ЗНО 2021

Анатолій Капіносов та ін.

МАТЕМАТИКА

Зовнішнє Незалежне Оцінювання

КОМПЛЕКСНЕ ВИДАННЯ

для підготовки до ЗНО і ДПА

Профільний рівень | **Рівень стандарту**

- ☑ Довідковий теоретичний матеріал
- ☑ Розв'язування типових задач
- ☑ Тренувальні тестові завдання
- ☑ Варіанти зошитів у форматі ЗНО
- ☑ Відповіді до всіх завдань

готуйся на 200 балів!

ЗАХИСТ ВІД ПІДРОБОК
СКРЕТЧ-КОД ГАРАНТУЄ ОРИГІНАЛЬНІСТЬ І ЯКІСТЬ ЦЬОГО ВИДАННЯ

Навчальне видання

Укладачі
Капіносов Анатолій Миколайович
Гап'юк Галина Володимирівна
Гринчишин Ярослав Тадейович
Кондратьєва Лариса Іванівна
Мартинюк Олеся Миронівна
Мартинюк Сергій Володимирович
Олійник Лариса Іванівна

МАТЕМАТИКА

Комплексна підготовка до ЗНО і ДПА

Профільний рівень і рівень стандарту

За чинною програмою

У підготовці видання використано матеріали для проведення ЗНО 2010–2019 рр.

Літературний редактор *Людмила Олійник*
Дизайнер обкладинки *Віталій Нехай*

Формат 60×84/8. 56 ум. др. арк., 54,34 обл.-вид. арк. Тираж 10 000. Замовлення № 20-519
Редакція газети «Підручники і посібники».
46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-21.
Збут: pip.ternopil@ukr.net Редакція: editoria@i.ua
www.pp-books.com.ua
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 5143 від 05.07.2016 р.
Книга-поштою: а/с 376, Тернопіль, 46011.
Тел.: 096-948-09-27; 097-50-35-376
pip.bookpost@gmail.com

Передмова головного редактора видавництва

Починаючи з 2021 р., здобувачі повної загальної середньої освіти обов'язково складатимуть державну підсумкову атестацію (ДПА) у формі зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО) з математики.

Випускники, які вивчали математику на рівні стандарту і не вступатимуть до закладів вищої освіти, які вимагають результати ЗНО з математики, отримають результат ДПА від 1 до 12 балів за виконання завдань сертифікаційної роботи рівня стандарту.

Ті, хто вивчав математику на рівні *стандарту* і планує використовувати результати ЗНО з математики для вступу до закладів вищої освіти, виконуватимуть усі 34 завдання сертифікаційної роботи з математики *рівня стандарту та профільного рівня*, а як ДПА їм зарахують результат за виконання завдань 1–26, 30, 31. Такі абітурієнти отримають результати за шкалою 1–12 балів (ДПА рівня стандарту) і 100–200 балів за рейтинговою шкалою ЗНО.

Випускники, які вивчали математику на *профільному* рівні, за виконання всіх 34 завдань сертифікаційної роботи з математики профільного рівня отримають оцінку як за шкалою 1–12 балів, так і за рейтинговою шкалою ЗНО 100–200 балів.

Зміст сертифікаційної роботи з математики визначатиметься Програмою ЗНО, затвердженою Міністерством освіти і науки України (Наказ МОН України № 1513 від 04.12.19 р.).

ДПА у формі ЗНО з математики передбачатиме два варіанти сертифікаційних робіт:

1) рівня стандарту; 2) рівня стандарту та профільного рівня.

Рівень стандарту (на розв'язання 28 завдань — 150 хв, приблизно 5 хв на 1 завдання):

- 16 завдань з вибором однієї правильної відповіді з чотирьох чи п'яти;
- завдання 17–20 — поєднання трьох рядків інформації, позначених цифрами, із п'ятьма варіантами, позначених буквами;
- завдання 21–26 — запис відповіді десятковим дробом;
- завдання 27–28 — завдання із записом повного розв'язання (перевіряється людиною).

Рівень стандарту та профільний рівень (на розв'язання 34 завдань — усього 210 хв, умовно 28 завдань по 5 хв — 140 хв плюс 70 хв на решту 5 завдань, по 14 хв на завдання):

- 16 завдань з вибором однієї правильної відповіді з чотирьох чи п'яти можливих;
- завдання 17–20 — поєднання трьох рядків інформації, позначених цифрами, із п'ятьма варіантами, позначеними буквами;
- завдання 21–29 — запис відповіді десятковим дробом;
- завдання 30–34 — завдання із записом повного розв'язання (перевіряється людиною)

Посібник призначений для підготовки здобувачів повної загальної середньої освіти й абітурієнтів до ДПА та ЗНО. Його укладено відповідно до вимог Програми ЗНО, затвердженої Міністерством освіти і науки України (Наказ МОН України № 1513 від 04.12.19 р.), та чинних підручників з математики. Посібник складається із двох частин: «*Алгебра та початки аналізу*», «*Геометрія*» та «*Відповіді*» до всіх завдань, що містяться в посібнику. Увесь матеріал поділено на 44 теми (28 — з алгебри і 16 — з геометрії).

Структура кожної теми в частинах «*Алгебра та початки аналізу*» та «*Геометрія*» така:

А. Перелік програмового матеріалу і компетентностей, знання яких вимагає програма ЗНО.

Б. Короткий виклад теоретичного матеріалу.

В. Приклади розв'язання задач.

Г. Завдання і вправи для самостійного розв'язування.

Завдання і вправи для самостійного розв'язання до кожної теми складаються із трьох частин.

Перша частина містить тестові завдання з п'ятьма варіантами відповідей, з яких лише один правильний. Завдання розміщено в послідовності зростання складності.

Друга частина містить завдання, які передбачають установлення відповідності між деякими математичними поняттями, позначеними цифрами 1–3, та їхніми властивостями, позначеними буквами А–Д.

У *третій* частині вміщено тестові завдання відкритої форми. Ці завдання зазвичай складніші від попередніх. Кожна тема цієї частини містить завдання з параметрами.

Матеріали, які стосуються *профільного рівня,* у цьому посібнику позначено двома рисками ліворуч і праворуч на берегах сторінок. Випускники, які вивчали математику на рівні стандарту і не вступатимуть до закладів вищої освіти, які вимагають результатів ЗНО з математики, їх можуть пропускати. Символом *зірочка* (*) в посібнику позначено складніші завдання в кожній темі (вони можуть виходити за межі шкільної програми).

Розв'язані в теоретичній частині задачі спочатку потрібно спробувати розв'язати самостійно! Якщо це вдалося зробити з усіма задачами — можна переходити до наступної теми.

Окрім цього посібника, для підготовки до ДПА та ЗНО з математики у видавництві «Підручники і посібники» можна придбати:

- «Тренажер» (містить 20 варіантів зошитів);
- «Довідник для підготовки до ЗНО»;
- «Збірник тестових завдань»;
- «Розв'язник» усіх вправ даного посібника.

Головний редактор видавництва «Підручники і посібники» Ярослав Гринчишин

АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Дійсні числа. Порівняння чисел та дії з ними

Тема 1. Властивості дій з дійсними числами. Правила порівняння і округлення чисел. Ознаки подільності. НСД і НСК. Арифметичні задачі

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— властивості дій з дійсними числами; правила порівняння дійсних чисел;
— розрізняти види чисел та числових проміжків;
— порівнювати дійсні числа;
— виконувати дії з дійсними числами;
— використовувати ознаки подільності чисел на 2, 3, 5, 9, 10;
— знаходити найбільший спільний дільник та найменше спільне кратне двох (кількох) чисел;
— знаходити неповну частку та остачу від ділення одного натурального числа на інше;
— перетворювати звичайний дріб у десятковий; округлювати цілі числа й десяткові дроби;
— використовувати властивості модуля до розв'язування задач;
— перетворювати нескінченний періодичний дріб у звичайний.

Натуральні числа — це числа, які використовують при лічбі: 1, 2, 3, ... Множину натуральних чисел позначають буквою N.

Цілі числа — це натуральні числа, числа протилежні до них та число нуль. Цілими є числа -2, 4, 0 тощо. Множину цілих чисел позначають буквою Z.

Раціональні числа — це числа, які можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in Z$, $n \in N$. Кожне раціональне число можна представити у вигляді скінченного або нескінченного періодичного десяткового дробу. Раціональними є числа 4,5; -3; $-7{,}3$; $-2\frac{7}{9}$ тощо. Множину раціональних чисел позначають буквою Q.

Ірраціональні числа — це нескінченні десяткові неперіодичні дроби. Наприклад, ірраціональними є числа $\sqrt{2}$, $\cos 7^\circ$, π тощо. Множину ірраціональних чисел позначають буквою I.

Дійсні числа — це раціональні та ірраціональні числа. Кожне дійсне число можна зобразити точкою на *числовій осі*, а кожній точці числової осі відповідає дійсне число. Множину дійсних чисел позначають буквою R.

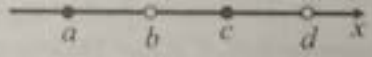


Рис. 1

Існують такі види числових проміжків (див. рис. 1): $[a;c]; (b;d); [a;b); (b;c]$, де деякі з чисел можуть бути $\pm\infty$.

Звичайний дріб — це число виду $\frac{m}{n}$, де m та n — натуральні числа. Риска дробу означає дію ділення: $\frac{m}{n} = m:n$. Число n — *знаменник* дробу, число m — *чисельник* дробу.

Звичайний дріб також є відношенням. Усі властивості звичайних дробів є властивостями відношень. І навпаки.

Дріб, у якому чисельник менший за знаменник, називають *правильним*. Дріб, у якому чисельник більший за знаменник або дорівнює йому, називають *неправильним*.

Наприклад, дроби $\frac{7}{13}$, $\frac{6}{24}$ — правильні, а дроби $\frac{21}{13}; \frac{12}{12}; \frac{14}{7}$ — неправильні.

Мішаним числом називають число, складене із натурального числа (*ціла частина*) і звичайного дробу (*дробова частина*). Мішане число є сумою цілої і дробової частини. Кожне мішане число можна записати як неправильний, у якого чисельник не ділиться на знаменник.

Наприклад, $5\frac{9}{11}$, $32\frac{3}{5}$ — мішані числа, $5\frac{9}{11} = 5 + \frac{9}{11}$.

З будь-якого неправильного дробу можна виділити цілу частину. Для цього досить поділити з остачею чисельник на знаменник. Частка від ділення буде цілою частиною, остача — чисельником, а дільник — знаменником. Наприклад, $\frac{37}{9} = 4\frac{1}{9}$, бо $37 : 9 = 4$ (ост. 1).

Основна властивість дробу. Якщо чисельник і знаменник дробу помножити чи поділити на одне й те саме натуральне число, то отримаємо дріб, який дорівнює даному.

Наприклад, $\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{5}{30}$; $\frac{200}{90} = \frac{200:10}{90:10} = \frac{20}{9}$.

Скороченням дробу називають ділення чисельника і знаменника дробу на їх спільний дільник, відмінний від одиниці. Найбільше число, на яке можна скоротити дріб, — найбільший спільний дільник чисельника і знаменника. Якщо він дорівнює 1, то дріб називають *нескоротним*.

Наприклад, дріб $\frac{200}{90}$ скоротний, бо $\frac{200}{90} = \frac{200:10}{90:10} = \frac{20}{9}$, а дріб $\frac{9}{14}$ — нескоротний.

Будь-які два дроби можна звести до одного і того ж *спільного знаменника*. Спільним знаменником може бути будь-яке спільне кратне їх знаменників (наприклад, добуток знаменників). Найменшим спільним знаменником дробів є найменше спільне кратне їх знаменників.

Щоб звести дріб до найменшого спільного знаменника, досить:

1) знайти найменше спільне кратне знаменників дробів;

2) поділити це НСК на кожен знаменник і знайти додаткові множники для кожного дробу;

3) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на його додатковий множник.

Наприклад, звести дроби $\frac{3}{8}$ і $\frac{5}{6}$ до найменшого спільного знаменника.

1) НСК(8, 6) = 24;

2) $24 : 8 = 3$; $24 : 6 = 4$. Числа 3 і 4 є додатковими множниками для дробів $\frac{3}{8}$ і $\frac{5}{6}$ відповідно;

3) $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{9}{24}$; $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{20}{24}$.

Дії над звичайними дробами

1. *Додавання (віднімання).* Щоб *додати* (*відняти*) дроби, треба спочатку звести їх до спільного знаменника. Сумою (різницею) дробів з однаковими знаменниками є дріб, чисельник якого є сумою (різницею) чисельників, а знаменник дорівнює їх знаменнику:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}, \qquad \left(\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}\right).$$

2. *Множення.* Добутком дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників даних дробів: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

3. *Ділення.* Часткою двох дробів є дріб, який дорівнює добутку дробу-діленого та оберненого числа до дробу-дільника: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Наприклад:

1) $\frac{2}{13} + \frac{3}{13} = \frac{2+3}{13} = \frac{5}{13}$;

2) $\frac{2}{3}^{\times 4} + \frac{3}{4}^{\times 3} = \frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{8+9}{12} = \frac{17}{12} = 1\frac{5}{12}$;

3) $\frac{1}{6}^{\times 3} + \frac{4}{9}^{\times 2} = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{18} = \frac{3+8}{18} = \frac{11}{18}$;

4) $3\frac{1}{10} + 6\frac{4}{15} = 3 + 6 + \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 4}{30} = 9 + \frac{11}{30} = 9\frac{11}{30}$;

5) $7\frac{4}{5} - 3\frac{1}{4} = 7 - 3 + \frac{4}{5} - \frac{1}{4} = 4 + \frac{16-5}{20} = 4\frac{11}{20}$;

6) $\frac{2}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{9 \cdot 5} = \frac{4}{45}$;

7) $3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{7}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{7 \cdot 8}{2 \cdot 3} = \frac{56}{6} = 9\frac{2}{6} = 9\frac{1}{3}$;

8) $7 : \frac{4}{9} = \frac{7}{1} \cdot \frac{9}{4} = \frac{7 \cdot 9}{1 \cdot 4} = \frac{63}{4} = 15\frac{3}{4}$;

9) $3\frac{5}{9}:2\frac{1}{3}=\frac{32}{9}:\frac{7}{3}=\frac{32}{9}\cdot\frac{3}{7}=\frac{32\cdot\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{3}{\cancel{9}}\cdot 7}=\frac{32}{21}=1\frac{11}{21}$.

Числові вирази. Порядок дій у числовому виразі

Числовий вираз — це запис, який складається із чисел, знаків арифметичних дій і, можливо, дужок. Якщо в числовому виразі виконати зазначені дії, то одержимо *значення числового виразу*.

Додавання і віднімання — це *дії першого ступеня*, а множення і ділення — *дії другого ступеня*.

1. Якщо в числовому виразі немає дужок і він містить лише дії одного ступеня, то їх виконують за порядком запису зліва направо.

2. Якщо у виразі є дії першого та другого ступенів, а дужок немає, то спочатку виконують дії другого ступеня, а потім — дії першого ступеня.

3. Якщо у виразі є дужки, то спочатку виконують дії в дужках у порядку, зазначеному в п. 1 і 2.

Наприклад, у числовому виразі $25 \cdot 296 - 17 \cdot (300 - 7 \cdot 40) + 5 \cdot 138$ порядок виконання арифметичних дій є таким:

$$\overset{③}{25} \cdot \overset{⑥}{296} - \overset{④}{17} \cdot (\overset{②}{300} - \overset{①}{7} \cdot \overset{⑤}{40}) + \overset{⑦}{5} \cdot \overset{⑧}{138}.$$

Десятковий дріб — це запис числа зі знаменником 10^n, де n — натуральне число.

Наприклад, $\frac{7}{10}=0,7$; $\frac{43}{1000}=0,043$; $\frac{807}{10}=80,7$.

Дії над десятковими дробами

1. *Додавання, віднімання.* Щоб додати або відняти десяткові дроби, потрібно їх записати так, щоб однакові розряди були один під одним і виконати дію. Якщо необхідно, то до одного з дробів можна дописати нулі праворуч. Наприклад:

$$\begin{array}{r} 16,8000 \\ +\ 0,5347 \\ \hline 17,3347 \end{array}$$

2. *Множення.* Множать десяткові дроби, не зважаючи на коми, як натуральні числа, а в добутку відділяють комою праворуч стільки цифр, скільки їх є після коми в обох множниках разом. Наприклад:

$$\begin{array}{r} 1,35 \\ \times\ 0,006 \\ \hline 0,00810 \end{array}$$

3. *Ділення.* Щоб поділити десяткові дроби, спочатку їх домножають на 10^n, де n — кількість цифр після коми в дільнику і перетворюють дільник у натуральне число. Кому в частці ставлять після завершення ділення цілої частини діленого.

Наприклад, поділимо 3,12 на 2,6, тобто 3,12 : 2,6 = 31,2 : 26.

$$\begin{array}{r|l} 31,2 & 26 \\ \hline 26 & 1,2 \\ \hline 52 & \\ 52 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Кожен звичайний дріб можна подати у вигляді скінченного або нескінченного десяткового дробу. Для цього потрібно чисельник поділити на знаменник.

Наприклад, $\frac{14}{11}=1,272727...$, $\frac{7}{12}=0,5833333...$, $\frac{3}{8}=0,375$.

Періодом нескінченного десяткового дробу називають найменшу групу цифр після коми десяткового дробу, яка повторюється. Період записують раз, поміщаючи його в круглі дужки, наприклад, 1,27272727... = 1,(27); 0,583333... = 0,58(3); 0,375 = 0,375000... = 0,375(0).

Кожен нескінченний десятковий періодичний дріб можна подати у вигляді звичайного.

Правило перетворення нескінченного періодичного дробу в звичайний

Наприклад, перетворити $x = 2,5(317)$ у звичайний. Оскільки між цілою частиною і періодом стоїть одна цифра, а у періоді 3 цифри, то розглянемо різницю $1000x - 10x = 25317,(317) - 25,(317)$, тобто $9990x = 25292$. Звідки $x=\frac{25292}{9990}$, тобто $2,5(317)=\frac{25292}{9990}$.

Щоб перетворити періодичний дріб у звичайний можна подати десятковий дріб сумою неперіодичної частини і періодичної, яку записати у вигляді нескінченно спадної геометричної прогресії:

$$2,5(3)=2,5+0,033...=\frac{25}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+...=\frac{25}{10}+\frac{3/100}{1-1/10}=\frac{5}{2}+\frac{3}{90}=\frac{225+3}{90}=\frac{228}{90}=\frac{38}{15}.$$

Властивості дій з дійсними числами

1. *Властивості додавання:*

$a + b = b + a$ (переставна властивість);

$(a + b) + c = a + (b + c)$ (сполучна властивість);

$a + 0 = a$ (властивість нуля);

$a + (-a) = 0$ (властивість суми протилежних чисел).

2. *Властивості множення:*

$ab = ba$ (переставна властивість);

$(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$ (сполучна властивість);

$(a + b) \cdot c = ac + bc$ (розподільна властивість);

$a \cdot 1 = a$ (властивість одиниці);

$a \cdot 0 = 0$ (властивість нуля);

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$, якщо $a \neq 0$ (властивість обернених чисел).

Модуль дійсного числа

Модулем (абсолютною величиною) дійсного числа a називають саме це число, якщо воно додатне або нуль ($a \geq 0$), і протилежне йому число, якщо воно від'ємне ($a < 0$).

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Наприклад, $|13| = 13$; $|-9| = 9$; $|0| = 0$; $|\sqrt{5} - 10| = -(\sqrt{5} - 10) = 10 - \sqrt{5}$.

Модуль числа a дорівнює відстані на числовій осі від початку відліку до точки a.

Модуль добутку (частки) дорівнює добутку (частці) модулів цих чисел

Наприклад, $|13 \cdot (-5)| = |13| \cdot |-5| = 13 \cdot 5 = 65$.

Додавання від'ємних чисел і чисел з різними знаками

1. Щоб *додати* два від'ємні числа, потрібно додати їхні модулі і перед одержаним результатом поставити знак «–». Наприклад, $-6 + (-2) = -8$.

2. Щоб додати два числа з різними знаками, потрібно:

1) з'ясувати, модуль якого числа більший;

2) від більшого модуля відняти менший;

3) перед одержаним результатом поставити знак доданка, модуль якого більший.

Наприклад: а) $-5 + 12 = +(12 - 5) = 7$; б) $-23{,}5 + 9{,}1 = -(23{,}5 - 9{,}1) = -14{,}4$.

Множення і ділення додатних і від'ємних чисел

Добуток (частка) двох чисел з різними знаками є число від'ємне.

Наприклад: а) $-0{,}25 \cdot 5 = -1{,}25$; б) $0{,}6 : (-3) = -0{,}2$.

Добуток (частка) двох від'ємних чисел є число додатне; модуль добутку (частки) дорівнює добутку (частці) модулів цих чисел. Наприклад: а) $-7 \cdot (-9) = 63$; б) $-24 : (-8) = 3$.

Стандартний вигляд числа. *Стандартним виглядом числа m* називають його запис у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$, $n \in Z$. Число n називають порядком числа m.

Наприклад: $m = 63000 = 6{,}3 \cdot 10^4$; $k = 0{,}0000014 = 1{,}4 \cdot 10^{-6}$.

Правила порівняння і округлення чисел

Порівняння чисел. Число a менше за число b ($a < b$), якщо воно лежить на числовій осі ліворуч від числа b (див. рис. 1). Або $a < b$ (чи $b > a$), якщо $a - b < 0$. Наприклад, $-5 < -2$, бо $-5 - (-2) = -3 < 0$. На рис. 1 $c > b > a$. Ці означення часто використовують при розв'язуванні завдань з параметрами.

Округлення чисел. Якщо в десятковому записі числа перша з відкинутих цифр є цифрою 0, 1, 2, 3, 4, то остання цифра, яка залишається, не змінюється. Якщо перша з відкинутих цифр 5, 6, 7, 8, 9, то останню цифру збільшують на 1. Наприклад, $5{,}23\underline{3} \approx 5{,}2\underline{3}$; $7{,}28\underline{3} \approx 7{,}\underline{3}$.

Ознаки подільності чисел

1. На 2 діляться ті і тільки ті числа, які закінчуються парними цифрами (0, 2,4, 6, 8).

2. На 3 діляться ті і тільки ті числа, сума цифр яких ділиться на 3.

3. На 5 діляться ті і тільки ті числа, які закінчуються цифрами 0 або 5.

4. На 9 діляться ті і тільки ті числа, сума цифр яких ділиться на 9.

5. На 10 діляться ті і тільки ті числа, які закінчуються цифрою 0.

Наприклад, число 112536 ділиться на 2 (6 — парна цифра), на 9 і 3 (1 + 1 + 2 + 5 + 3 + 6 = 18 — сума цифр ділиться на 3 і 9); 789 ділиться тільки на 3 (7 + 8 + 9 = 24 — сума цифр ділиться на 3).

Неповна частка та остача від ділення натуральних чисел

Щоб поділити a на b і знайти остачу r, потрібно знайти таке $n \in N$:

$a = bn + r$, де a — ділене, b — дільник, n — неповна частка, r — остача ($r < b$).

Наприклад, $27 : 6 = 6 \cdot 4 + 3$.

***Найбільший спільний дільник* (НСД) *і найменше спільне кратне* (НСК)**

Прості та складені числа

Натуральне число a називають *простим*, якщо воно має **лише** два дільники: 1 і a.

Наприклад, 13 — просте число, оскільки має два дільники (1 і 13), 2 — найменше просте число.

Натуральне число називають *складеним*, якщо воно має більше, ніж два дільники.

Наприклад, число 14 має чотири дільники (1, 2, 7 і 14), тому воно є складеним.

Число 1 є ні простим, ні складеним, оскільки має один дільник.

Розкласти складене число на прості множники означає записати дане число у вигляді добутку простих чисел. Наприклад, $2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1$.

Взаємно простими числами називають числа, які не мають спільних дільників, крім одиниці.

Наприклад, $85 = 5 \cdot 17$, $147 = 3 \cdot 7^2$, тому числа 85 і 147 — взаємно прості.

Найбільшим спільним дільником (НСД) кількох натуральних чисел називають найбільше число, на яке дані числа діляться без остачі. НСД даних чисел дорівнює добутку спільних простих множників цих чисел (у прикладі вони підкреслені).

Наприклад, НСД(18; 30) = $\underline{2} \cdot \underline{3} = 6$, оскільки $18 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3$; $30 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5$.

НСД(18; 30; 42) = $\underline{2} \cdot \underline{3} = 6$, оскільки $18 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 3$; $30 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5$; $42 = \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 7$.

Найменшим спільним кратним (НСК) кількох натуральних чисел називають найменше число, яке ділиться без остачі на кожне з даних чисел. НСК даних чисел дорівнює добутку одного з них на прості множники, яких нема в його розкладі, але є в розкладах решти чисел.

Наприклад, НСК(18; 30) = $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \underline{5} = 90$, оскільки $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{5}$.

НСК(18; 30; 42) = $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \underline{5} \cdot \underline{7} = 630$, оскільки $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{5}$; $42 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{7}$.

НСД(a; b) · НСК(a; b) = $a \cdot b$.

НСД(18; 30) · НСК(18; 30) = $6 \cdot 90 = 18 \cdot 30 = 540$.

Якщо числа a та b — взаємно прості, тобто НСД(a; b) = 1, то НСК(a; b) = $a \cdot b$. Наприклад, оскільки числа 85 і 147 є взаємно простими (НСД(85; 147) = 1), то НСК(85; 147) = $85 \cdot 147 = 12495$.

Приклад 1. Установити відповідність між числами (1–3) та множинами (А–Д), до яких вони належать.

1 –8	**А** множина парних чисел
2 23	**Б** множина цілих чисел, які не є натуральними
3 $\sqrt{16}$	**В** множина раціональних чисел, які не є цілими числами
	Г множина ірраціональних чисел
	Д множина простих чисел

1. –8 — число, яке не є натуральним, тому 1Б.

2. 23 — просте число, тому 2Д.

3. $\sqrt{16} = 4$ — парне число.

Відповідь.

	А	Б	В	Г	Д
1		⊠			
2					⊠
3	⊠				

■

Приклад 2. Не виконуючи ділення, встановити остачу від ділення 12312345633341 на 3.

А 1 **Б** 2 **В** 14 **Г** 4 **Д** 11

■ Число 12312345633341 запишемо як суму 123 123 456 33341 = 123 123 456 33330 + 11. Перше з цих чисел ділиться на 3 (сума цифр 39 ділиться на 3), тому число 12312345633330 ділиться націло на 3. Отже, остача від ділення визначається діленням 11 на 3. Таким чином, 11 : 3 = 3 (ост. 2). Отже, остача дорівнює 2. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 3. Знайти значення числового виразу $15\frac{11}{14}+11\frac{5}{7}:\left(4\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{9}-3\frac{1}{6}\right)$.

■ 1) $4\frac{1}{2}\cdot 2\frac{2}{9}=\frac{9}{2}\cdot\frac{20}{9}=\frac{9\cdot 20}{2\cdot 9}=\frac{1\cdot 10}{1\cdot 1}=10$; 2) $10-3\frac{1}{6}=9\frac{6}{6}-3\frac{1}{6}=6\frac{5}{6}$;

3) $11\frac{5}{7}:6\frac{5}{6}=\frac{82}{7}:\frac{41}{6}=\frac{82^{2}\cdot 6}{7\cdot 41^{1}}=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$;

4) $15\frac{11}{14}+1\frac{5^{\,2}}{7}=16+\frac{11+10}{14}=16+\frac{21}{14}=16+\frac{3}{2}=16+1\frac{1}{2}=17\frac{1}{2}$. *Відповідь.* 17,5. ■

Приклад 4. Обчислити $\dfrac{3\frac{1}{6}+5,2}{\left(4,6-\frac{5}{12}\right)\cdot 0,4}$.

А	Б	В	Г	Д
1,5	5	3	6	13

■ 1) $3\frac{1}{6}+5,2=3\frac{1}{6}+5\frac{2}{10}=(3+5)+\left(\frac{1^{\,5}}{6}+\frac{2^{\,3}}{10}\right)=8+\frac{5+6}{30}=8\frac{11}{30}$;

2) $4,6-\frac{5}{12}=4\frac{6}{10}-\frac{5}{12}=4+\left(\frac{6^{\,6}}{10}-\frac{5^{\,5}}{12}\right)=4+\frac{36-25}{60}=4\frac{11}{60}$;

3) $4\frac{11}{60}\cdot 0,4=\frac{251}{60}\cdot\frac{4}{10}=\frac{251\cdot 4^{1}}{{}_{15}60\cdot 10}=\frac{251}{15\cdot 10}=\frac{251}{150}$; 4) $8\frac{11}{30}:\frac{251}{150}=\frac{251}{30}\cdot\frac{150}{251}=\frac{150}{30}=5$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 5. Дано два числа 120; 220. **1.** Знайти НСД(120; 220). **2.** Знайти НСК(120; 220).

■ **1.** $120=\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\underline{5}$; $220=\underline{2}\cdot\underline{2}\cdot\underline{5}\cdot 11$. Тоді НСД(120; 220) = 2 · 2 · 5 = 20.

2. НСК(120; 220) = 120 · 11 = 120 · 220 : 20 = 1320. *Відповідь.* 1. 20. 2. 1320. ■

Приклад 6. Дано три числа 28; 16; 10.

1. Знайти НСК цих чисел. 2. Знайти НСД цих чисел.

■ 1. $28=2\cdot 2\cdot 7$; $16=2\cdot 2\cdot\underline{2}\cdot\underline{2}$; $10=2\cdot\underline{5}$. Отже, НСК (28; 16; 10) = 28 · 2 · 2 · 5 = 560.

2. У цих чисел є один спільний множник — 2. НСД(28; 16; 10) = 2. *Відповідь.* 1. 560. 2. 2. ■

Приклад 7. Оксана, Сергій і Петро о 16 годині почали розв'язувати задачі. Оксана на виконання кожної вправи витрачала 16 хв, Сергій — 24 хв, а Петро — 18 хв. Через деякий час вони одночасно закінчили виконувати свої завдання. О котрій годині найшвидше це могло статися?

А	Б	В	Г	Д
17 год 12 хв	18 год	18 год 20 хв	18 год 24 хв	19 год

■ Час, за який діти виконали свої завдання, має виражатися числом, яке ділиться на 16, на 24 і на 18, тобто необхідно знайти НСК(16, 24, 18). $16=2^4$; $24=2^3\cdot 3$; $18=2\cdot 3^2$; НСК(16; 24; 18) $=2^4\cdot 3^2=$ = 144. Отже, діти закінчать одночасно виконувати вправи через 144 хв = 2 год 24 хв. Це буде об 16 год + 2 год 24 хв = 18 год 24 хв. *Відповідь.* **Г.** ■

Арифметичні задачі

Приклад 8. Турист пройшов 2 / 5 шляху за 3 год. За який час він пройде решту шляху, рухаючись із такою ж швидкістю?

А	Б	В	Г	Д
4,5 год	4 год	5 год	3,5 год	1,8 год

■ Дві частини шляху з п'яти турист пройшов за 3 год, отже, одну частину він пройшов за 3 : 2 = 1,5 (год). Йому залишилося пройти 5 – 2 = 3 (частини) з п'яти, тоді цей шлях він пройде за 3 · 1,5 = 4,5 (год). *Відповідь.* **А.** ■

Приклад 9. Мотоцикліст проїхав деяку відстань за 6 год. Якщо він рухатиметься зі швидкістю 48 км/год, то пройде цю відстань за 5 год. Знайти початкову швидкість руху мотоцикліста.

■ Нехай x км/год — початкова швидкість руху мотоцикліста. Відстань дорівнює добутку швидкості і часу: $6x = 5 \cdot 48$; $x = 40$. *Відповідь.* 40 км/год. ■

Приклад 10. Два оператори комп'ютерного набору, працюючи разом, виконали деяку роботу за 12 год. Другий оператор, працюючи самостійно, може виконати цю роботу за 20 год. За скільки годин виконає цю ж роботу перший оператор, працюючи самостійно?

■ Другий оператор, працюючи самостійно, за 1 год виконає $\frac{1}{20}$ усієї роботи. Працюючи разом, за 1 год обидва оператори виконають $\frac{1}{12}$ частину всієї роботи. Отже, перший оператор, працюючи самостійно, за 1 год виконає $\frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{5-3}{60} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ (ч.) всієї роботи. Тоді на виконання всієї роботи першому оператору знадобиться $1 : \frac{1}{30} = 30$ (год). *Відповідь.* 30 год. ■

Приклад 11. У магазині купили 9 однакових зошитів по 5 грн за кожен та кілька ручок по 3 грн за кожну. Яке з наведених значень може дорівнювати вартості покупки?

А	Б	В	Г	Д
55 грн	56 грн	57 грн	58 грн	59 грн

■ Суму покупки можна записати у вигляді виразу $5 \cdot 9 + 3 \cdot n$, де n — кількість куплених ручок. $5 \cdot 9 + 3 \cdot n = 3 \cdot (5 \cdot 3 + n)$. Цей вираз містить добуток, у якому один з множників дорівнює 3, тоді вартість покупки має ділитися на 3. Отже, сума цифр числа повинна ділитися на 3. Серед запропонованих чисел це лише число 57 (5 + 7 = 12). *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 12. Середнє арифметичне п'яти чисел дорівнює 400, а одне з цих чисел — 600. Знайти середнє арифметичне решти чотирьох чисел.

■ Нехай a_1, a_2, a_3, a_4 і a_5 — задані числа, тоді $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} = 400$, звідки $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2000$. Якщо одне з чисел дорівнює 600, то, наприклад, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + 600 = 2000$; $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1400$. Тоді середнє арифметичне решти чотирьох чисел дорівнює

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{1400}{4} = 350.$$

Відповідь. 350. ■

Завдання 1.1–1.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

1.1. Яке з наведених чисел кратне числу 9?

А	Б	В	Г	Д
978999	100009	199999	253647	3333333

1.2. Знайти найбільший спільний дільник чисел 42 і 63.

А	Б	В	Г	Д
126	3	7	9	21

1.3. Знайти найменше спільне кратне чисел 28 і 35.

А 7 **Б** 140 **В** 70 **Г** 175 **Д** 280

1.4. Обчислити: $1{,}521 : 0{,}3 - 1{,}9 \cdot 0{,}3$.

А 0 **Б** –0,063 **В** 5,13 **Г** 4,5 **Д** –0,63

1.5. Обчислити: $2 \cdot \frac{3}{4} + \frac{12}{25} : \frac{3}{20}$.

А 3,575 **Б** 3,7 **В** 4,7 **Г** 5,7 **Д** 4,07

1.6. Обчислити: $4\frac{2}{3}-6\frac{3}{7}-\left(-1\frac{2}{9}\right)+5\frac{10}{21}$.

А $11\frac{23}{63}$ Б $4\frac{29}{63}$ В $4\frac{59}{63}$ Г $-4\frac{29}{63}$ Д $3\frac{4}{63}$

1.7. Обчислити: $-4{,}8 : (-2{,}6 + 3{,}4) + 0{,}8$.

А $-7{,}2$ Б $-6{,}8$ В $6{,}8$ Г $-5{,}2$ Д $5{,}2$

1.8. Розв'язати рівняння $(5x - 7) : 12 = 2 : 3$.

А 3 Б 2 В 7 Г 4 Д 6

1.9. Указати найбільше з наведених чисел.

А 0,23 Б 0,(23) В 0,233 Г 0,2(3) Д 0,2(31)

1.10°. Указати звичайний дріб, який дорівнює дробу 0,1(3).

А $\frac{13}{100}$ Б $\frac{13}{99}$ В $\frac{13}{90}$ Г $\frac{3}{13}$ Д $\frac{2}{15}$

1.11. $|\pi - 4| = \ldots$

А $\pi - 4$ Б $\pi + 4$ В -4π Г $4 - \pi$ Д 4π

1.12. Не виконуючи ділення, встановити остачу від ділення 33333333341 на 9.

А 1 Б 5 В 14 Г 4 Д 41

1.13. Швидкість равлика дорівнює $\frac{1}{12}$ м/хв. Яку відстань проповзе равлик за $6\frac{1}{4}$ години?

А 0,75 м Б 31,25 м В 75 м Г $\frac{25}{48}$ м Д $52\frac{1}{12}$ м

1.14. Із 68 жовтих і 85 червоних троянд склали букети, розділивши жовті та червоні троянди в усі букети порівну. Скільки найбільше букетів можна одержати?

А 9 Б 20 В 34 Г 17 Д 8

1.15. Яка найменша кількість метрів тканини може бути в рулоні, щоб його можна було продати без залишку по 6 м, по 8 м або по 10 м?

А 480 Б 60 В 120 Г 240 Д 4800

1.16. За три дні зорано 1800 га поля. За перший день зорано $\frac{2}{9}$ поля, а за другий — $\frac{1}{6}$ поля. Скільки гектарів поля було зорано за третій день?

А 1100 Б 700 В 1200 Г 800 Д 900

1.17. За перший день турист пройшов $\frac{4}{9}$ усього шляху, а за другий — решту — $26\frac{2}{3}$ км. Яку відстань пройшов турист за два дні?

А $46\frac{1}{4}$ км Б $54\frac{1}{3}$ км В 60 км Г $56\frac{1}{4}$ км Д 48 км

1.18. Басейн наповнюється через першу трубу за 4 години, а через другу — за 6 годин. Яку частину басейну залишиться наповнити після спільної роботи обох труб протягом 2 годин?

А $\frac{4}{5}$ Б $\frac{3}{5}$ В $\frac{1}{6}$ Г $\frac{2}{3}$ Д $\frac{9}{10}$

1.19. Басейн заповнюють водою через першу трубу за a годин, через другу — за b годин. Через скільки годин можна заповнити басейн при використанні обох труб разом?

А $a + b$ Б $a - b$ В ab Г $\frac{ab}{a+b}$ Д $\frac{a+b}{ab}$

1.20. Майстер виготовляє одну деталь за 5 хв, а його учень таку ж деталь — за 9 хв. Працюючи разом, вони виготовили 42 деталі. Скільки деталей виготовив майстер?

А 28 **Б** 32 **В** 30 **Г** 27 **Д** 25

1.21. Добуток двох послідовних парних натуральних чисел дорівнює 728. Знайти суму цих чисел.

А 56 **Б** 66 **В** 54 **Г** 32 **Д** 28

1.22. В одному місті всі мешканці розмовляють англійською або французькою мовою. Англійською мовою розмовляє 90% усіх мешканців, французькою — 80%. Скільки відсотків мешканців володіє лише однією мовою?

А 70% **Б** 60% **В** 30% **Г** 20% **Д** 10%

Завдання 1.23–1.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

1.23. **(ЗНО–2015)** Установити відповідність між твердженнями про дріб (1–4) та дробом (А–Д), для якого це твердження є правильним.

Твердження про дріб	*Дріб*
1 є скоротним	**А** 5/7
2 є неправильним	**Б** 13/27
3 менший за 0,5	**В** 41/10
	Г 3/4
4 є оберненим до дробу $1\frac{2}{5}$	**Д** 34/51

1.24. Установити відповідність між числами (1–3) та їх записами у стандартному вигляді (А–Д).

1 73,4	**А** $7{,}34 \cdot 10^{-3}$
2 734	**Б** $7{,}34 \cdot 10^{-2}$
3 0,734	**В** $7{,}34 \cdot 10^{-1}$
	Г $7{,}34 \cdot 10$
	Д $7{,}34 \cdot 10^{2}$

1.25. Установити відповідність між періодичними десятковими дробами (1–3) та їх записами у вигляді звичайних дробів (А–Д).

1	2	3
0,(6)	0,2(3)	0,1(6)

А	Б	В	Г	Д
$\frac{241}{330}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

1.26. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\lvert\pi - 4\rvert + \lvert\pi - 3\rvert$	**А** $2\pi - 7$
2 $\lvert 3 - \pi\rvert - \lvert -\pi - 4\rvert$	**Б** 7
3 $-\lvert\pi - 4\rvert - \lvert\pi - 3\rvert$	**В** 1
	Г –1
	Д –7

1.27. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $1000 \cdot 0{,}02 + 100 \cdot 0{,}004 + 10 \cdot 0{,}0003$	**А** 2,0403
2 $1000 \cdot 0{,}02 + 100 \cdot 0{,}04 + 10 \cdot 0{,}0003$	**Б** 2,4003
3 $10000 \cdot 0{,}02 + 1000 \cdot 0{,}004 + 100 \cdot 0{,}0003$	**В** 20,403
	Г 24,003
	Д 204,03

1.28. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $1{,}824 : 0{,}3 - 1{,}9 \cdot 0{,}2$	А 5,048
2 $0{,}2432 : 0{,}04 - 1{,}9 \cdot 0{,}02$	Б 5,98
3 $36{,}48 : 6 + 4{,}5 \cdot 0{,}2$	В 5,7
	Г 6,042
	Д 6,98

1.29. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $4 \cdot 1\frac{1}{2} + 1\frac{23}{25} : \frac{3}{20}$	А $15\frac{1}{3}$
2 $4 : 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} \cdot 7\frac{1}{7}$	Б $16\frac{1}{3}$
3 $8\frac{12}{33} \cdot \left(4\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}\right)$	В $17\frac{1}{3}$
	Г $18\frac{4}{5}$
	Д $19\frac{1}{3}$

1.30. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $-48 : (-26 + 34) + 80$	А –72
2 $-120 : (-26 - 34) + 36 \cdot (-2)$	Б –74
3 $68 : (7 - 41) - 18 \cdot 4$	В –70
	Г 74
	Д 72

1.31. Установити відповідність між степенями (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1	2	3
$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$	$\left(1\frac{1}{2}\right)^{-3}$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{8}{125}$	$\frac{8}{27}$	$1\frac{1}{8}$	$3\frac{3}{8}$	$15\frac{5}{8}$

1.32. **(ЗНО–2013)** З пунктів A і B одночасно по шосе назустріч один одному виїхали два велосипедисти. Вони їхали без зупинок зі сталими швидкостями: перший — зі швидкістю x км/год, другий — зі швидкістю y км/год ($x > y$). Через t годин ($t > 1$) вони зустрілися в точці C і, не зупиняючись, продовжили рух без зміни напрямків.

До кожного запитання (1–4) добери правильну відповідь (А–Д).

Запитання	***Відповідь***
1 На скільки кілометрів зменшилася відстань по шосе між велосипедистами через 1 год після початку руху?	А $(x + y)t$
2 Чому дорівнює відстань по шосе між пунктами A і B (у км)?	Б $(x - y)t$
3 На скільки кілометрів більше проїхав перший велосипедист, ніж другий, за час від початку руху до моменту зустрічі?	В $\frac{yt}{x}$
4 За скільки годин перший велосипедист подолає відстань по шосе від точки C до пункту B?	Г $\frac{(x - y)t}{y}$
	Д $x + y$

Розв'яжіть завдання 1.33–1.48. Відповідь запишіть десятковим дробом.

1.33. Обчислити значення виразу $\left(8\frac{7}{12}-2\frac{17}{36}\right)\cdot 2{,}7-4\frac{1}{3}:0{,}65$. У відповідь записати результат, округлений до 0,01.

1.34. Обчислити зручним способом: $\left(74{,}7\cdot\frac{2}{21}+(-105{,}3)\cdot 2\frac{3}{7}-(-105{,}3)\cdot\frac{2}{21}-2\frac{3}{7}\cdot 74{,}7\right):10$.

1.35. Знайти невідомий член пропорції: $\dfrac{1{,}2:0{,}375-0{,}2}{6\frac{4}{25}:15\frac{2}{5}+0{,}8}=\dfrac{(0{,}016:0{,}12+0{,}7)\cdot 3}{x}$.

1.36. Два пароплави заходять у порт після кожного рейсу. Перший робить рейс за 4 дні, а другий — за 6 днів. Якось у неділю вони зустрілись у порту. Через скільки днів вони зустрінуться в порту в неділю наступного разу?

1.37. Для учнів класу приготували однакові подарунки. У всіх подарунках було разом 588 цукерок, 140 яблук і 252 горіхи. **1.** Скільки учнів у класі, якщо їх більше, ніж 20? **2.** Скільки цукерок одержав кожен учень?

1.38. Середній вік одинадцяти футболістів команди становить 22 роки. Під час гри один із гравців залишив поле, після чого середній вік футболістів, які залишилися, дорівнював 21 рік. Скільки років футболістові, який залишив поле?

1.39. Кішка з кошенятами з'їдають куплений господарем корм за 8 днів. Якби кішку годували саму, то їй вистачило б корму на 11 днів. На скільки повних днів вистачило б корму кошенятам?

1.40. Швидкість товарного поїзда дорівнює 60 км/год. Чому дорівнює його довжина у метрах, якщо відомо, що він проходить повз нерухомого спостерігача за 15 секунд?

1.41. Петрик зриває за 21 хвилину 48 яблук, а Сашко за 84 хвилини — 36 яблук. Скільки яблук зірве Петрик за час, за який Сашко зірве 54 яблука?

1.42. У класі із 40 учнів 30 уміють плавати, 27 — грати у шахи і 5 не вміють ні плавати, ні грати в шахи. Скільки учнів уміють плавати і грати в шахи?

1.43. Знайти x, якщо $\left(3\frac{9}{16}:\left(\dfrac{2{,}75}{x:\frac{2}{7}-45}-\dfrac{7}{24}\right)+6{,}2\right):12\frac{2}{3}=1{,}2$.

1.44. **(ЗНО–2011)** Двоє робітників, працюючи разом, можуть скосити траву на ділянці за 2 години 6 хвилин. Скільки часу (у годинах) витратить на скошування трави на цій ділянці другий робітник, працюючи самостійно, якщо йому потрібно на виконання цього завдання на 4 години більше, ніж першому робітникові?

1.45. Катер пройшов за течією річки 60 км за деякий час. За цей же час проти течії він пройшов би 40 км. Яку відстань у кілометрах за цей час пропливе пліт?

1.46. Відстань між містами за течією річки теплохід проходить за 6 год, а проти течії — за 8 год. За скільки годин пропливе цю відстань пліт?

1.47. Автомобіль проїхав першу половину шляху зі швидкістю 60 км/год. Шлях, що залишився, половину часу він їхав зі швидкістю 80 км/год, а другу половину часу — зі швидкістю 100 км/год. Знайти у кілометрах за годину середню швидкість руху автомобіля.

1.48. Відстань між мотоциклістом і велосипедистом дорівнює 168 км, їх швидкості відповідно дорівнюють 72 км/год і 12 км/год. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо:
1) рухатимуться назустріч один одному; **2)** мотоцикліст наздоганятиме велосипедиста?

Тема 2. Відношення та пропорції. Відсотки. Задачі на відсотки. Текстові задачі

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:
— знаходити відношення чисел у вигляді відсотка, відсоток від числа, число за значенням його відсотка;
— розв'язувати основні задачі на відсотки, на пропорційні величини і пропорційний поділ;
— розв'язувати текстові задачі арифметичним способом.

Відношення. Частка від ділення двох чисел (двох змінних) називається *відношенням*.

Наприклад, $8:7$; $\frac{0,3}{1,2}$; $\frac{x}{y}$.

Основна властивість відношення: $\frac{a}{b}=\frac{ak}{bk}$, де $k \in R, k \neq 0$.

Пропорція. *Пропорцією* називають рівність двох відношень (часток): $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, або $a:b=c:d$. Числа a та d називають *крайніми членами пропорції*, b та c — *середніми членами пропорції*.

Основна властивість пропорції: добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх її членів: $a \cdot d = b \cdot c$.

Прямо пропорційні величини

Дві величини x і y називають *прямо пропорційними*, якщо $y = kx$. Або зі збільшенням значень однієї величини у певну кількість разів значення іншої величини збільшується в таку ж кількість разів:

$$\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_2}{y_1}=k, k \neq 0 \text{ — } \textit{коефіцієнт пропорційності}.$$

Наприклад, якщо швидкість руху автомобіля постійна, то:

Час		*Відстань*		
2 год	↓	120 км	↓	$\frac{2}{8}=\frac{120}{480}$
8 год		480 км		

Приклад 1. Сторони трикутника відносяться як $3:4:5$, а його периметр дорівнює 36 см.
1. Знайти сторони трикутника. **2.** Визначити вид трикутника.

■ **1.** Нехай сторони трикутника дорівнюють $3x$, $4x$, $5x$, де x — коефіцієнт пропорційності. Тоді його периметр $P = 3x + 4x + 5x = 12x$. $12x = 36$ см. $x = 3$ см. Сторони відповідно дорівнюють 9 см, 12 см, 15 см.

2. Оскільки $15^2 = 9^2 + 12^2$, то трикутник прямокутний.

Відповідь. **1.** 9 см, 12 см, 15 см. **2.** Прямокутний. ■

Обернено пропорційні величини

Дві величини x і y називають *обернено пропорційними*, якщо $y=\frac{k}{x}, k \neq 0$. Або зі збільшенням значень однієї величини у певну кількість разів значення іншої величини зменшується в таку ж кількість разів: $\frac{x_2}{x_1}=\frac{y_1}{y_2}$.

Наприклад, якщо відстань постійна, то:

Швидкість		*Час*		
40 км/ год	↓	4 год	↑	$\frac{40}{80}=\frac{2}{4}$
80 км/год		2 год		

Масштаб

Масштаб — це відношення відстані на карті до відповідної відстані на місцевості. Наприклад, масштаб 1 : 100000 означає, що 1 см на карті відповідає 100000 см = 1000 м = 1 км на місцевості.

Приклад 2. Відстань у 2400 км між Києвом і Парижем зображена на карті відрізком завдовжки 48 см. Знайти масштаб карти.

А	Б	В	Г	Д
1 : 5000000	1 : 200000	1 : 2400	1 : 5000	1 : 50

■ 48 см : 2400 км = 48 см : 240000000 см = 1 : 5000000.

Відповідь. **А.** ■

Відсотком (*процентом*) називають число одну соту.

Отже, $1\% = \frac{1}{100}$; $100\% = \frac{100}{100} = 1$; $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$; $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$.

Тоді 100% числа a дорівнюють a, 50% числа a дорівнюють $\frac{1}{2}a$, 25% числа a становлять $\frac{1}{4}a$.

Щоб перетворити число у відсотки, потрібно помножити його на 100.

Щоб перетворити відсотки в число, потрібно число відсотків поділити на 100.

Наприклад: а) $0{,}002 = 0{,}002 \cdot 100\% = 0{,}2\%$; $1{,}34 = 1{,}34 \cdot 100\% = 134\%$;

Знаходження відсотків від числа

Приклад 3. Зарплата водія становить 10400 грн. Авансом йому виплатили 40% зарплати. Яку суму отримав водій?

■ 10400 грн — 100%;

x грн — 40%.

Складаємо пропорцію: $\frac{10400}{x} = \frac{100}{40}$. Тоді $x = \frac{10400 \cdot 40}{100}$; $x = 4160$.

Отже, водій отримав 4160 грн. *Відповідь.* 4160 грн. ■

б) $2{,}3\% = 2{,}3 : 100 = 0{,}023$; $-40\% = -40 : 100 = -0{,}4$; $263\% = 263 : 100 = 2{,}63$.

Розв'язати *приклад 3* можна і перетворивши відсотки в число. Оскільки $40\% = 0{,}4$, то 0,4 від 10400: $10400 \cdot 0{,}4 = 4160$ (грн).

Для того щоб знайти p відсотків від заданого числа a, можна:

1) записати p відсотків десятковим дробом;

2) помножити число a на одержаний десятковий дріб.

Наприклад: знайти 13% від 40. $13\% = 0{,}13$; $40 \cdot 0{,}13 = 5{,}2$.

Знаходження числа за його відсотками

Приклад 4. Робітникові виплатили авансом 4200 грн, що становить 35% його зарплати. Яка заробітна плата у робітника?

■ Складаємо пропорцію: 4200 грн — 35%;

x грн — 100%.

Або $\frac{4200}{x} = \frac{35}{100}$, $x = \frac{4200 \cdot 100}{35}$; $x = 12000$. Отже, заробітна плата робітника становить 12000 грн.

Відповідь. 12000 грн. ■

Розв'яжемо задачу інакше. Оскільки $35\% = 0{,}35$, то легко знайти число за його частиною 0,35: $1400 : 0{,}35 = 12000$ (грн).

Для того щоб знайти число за його частиною m (або числом відповідних відсотків p), можна:

1) записати p відсотків десятковим дробом;

2) поділити m на одержаний десятковий дріб.

Наприклад: знайти число, якщо 19% його становлять 57. $19\% = 0{,}19$; $57 : 0{,}19 = 300$.

Знаходження відсоткового відношення двох чисел

Приклад 5. Сторожеві із зарплати 10800 грн виплатили авансом 4320 грн. Який відсоток зарплати він отримав?

■ Складаємо пропорцію: 10800 грн — 100 %;
4320 грн — x %.

Або $\frac{10800}{4320}=\frac{100}{x}$. Тоді $x=\frac{4320\cdot 100}{10800}$; $x = 40$. Отже, сторож отримав 40% зарплати. *В-дь.* 40%. ■

Розв'язати задачу можна провести і так. Оскільки $\frac{4320}{10800}=0,4$, то 0,4 = 40%.

Для того щоб знайти, скільки відсотків становить число a від числа b, можна:

1) знайти значення дробу $\frac{a}{b}$; *2) помножити його на 100%.*

Наприклад: знайти, скільки відсотків становить число 9 від числа 24. $\frac{9}{24}\cdot 100\% = 37,5\%$.

Формули простих і складних відсотків.

Якщо банк виплачує клієнтові щорічно p% внесеної суми A_0, то на рахунку клієнта через n років буде сума:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{pn}{100}\right).$$ Це ***формула простих відсотків***.

Якщо клієнт поклав у банк суму A_0 під p% річних, то через n років нагромаджений (накопичений) капітал становитиме:

$$A_n = A_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n.$$ Це ***формула складних відсотків***.

Приклад 6. Якою має бути початкова сума, покладена в банк під 20% річних, щоб через два роки прибуток становив 22000 грн?

■ Нехай початкова сума становить A_0 грн. Тоді через два роки на рахунку буде $A_2 = A_0\cdot(1+0,2)^2 = A_0\cdot 1,44$ (грн). Прибуток дорівнює різниці накопиченої (A_2) та початкової (A_0) суми: $A_2 - A_0 = A_0\cdot 1,44 - A_0 = A_0\cdot 0,44$. Рівняння: $A_0\cdot 0,44 = 22000$; $A_0=\frac{22000}{0,44}=50000$ (грн).

Відповідь. 50000 грн. ■

Приклад 7. Скільки сухої ромашки вийде із 50 кг свіжої, якщо при сушінні вона втрачає 84% своєї маси?

А	Б	В	Г	Д
34 кг	312,5 кг	60 кг	42 кг	8 кг

■ 1) 100% – 84% = 16% = 0,16 — частка маси після сушіння;
2) 0,16 · 50 = 8 (кг) — залишиться сухої ромашки. *Відповідь.* Д. ■

Приклад 8. Товар був виставлений на продаж за 4000 грн. Після двох знижок на одну й ту ж кількість відсотків він був проданий за 2250 грн. Визначити, на скільки відсотків щоразу знижували ціну.

■ Нехай ціну знижували на $x\%=\frac{x}{100}$. Тоді, застосувавши формулу складних відсотків, де $A_0 = 4000$ грн, $n = 2$, $A_2 = 2250$ грн, одержимо: $4000\left(1-\frac{x}{100}\right)^2 = 2250$; $\left(1-\frac{x}{100}\right)^2=\frac{225}{400}$; $1-\frac{x}{100}=\frac{15}{20}$; $\frac{x}{100}=\frac{1}{4}$; $x = 25$.

Відповідь. 25%. ■

Приклад 9. Токареві за перший рік роботи підвищили заробітну плату на 10%, а через рік — ще на 20%. На скільки відсотків підвищили токареві заробітну плату за два роки?

■ Нехай заробітна плата токаря становила a. Після першого підвищення вона становила $a + 0{,}1a = 1{,}1a$. Після другого підвищення (за 100% беремо вже $1{,}1a$) заробітна плата становитиме $1{,}2 \cdot 1{,}1a = 1{,}32a = 132\% \cdot a$. Отже, заробітна плата токаря зросла на 32%. *Відповідь.* На 32%. ■

Приклад 10. Вологість свіжоскошеної трави становить 60%, а вологість сіна — 15%. Скільки сіна можна одержати з 1,7 т свіжоскошеної трави?

■ 1) $1700 \cdot 0{,}4 = 680$ (кг) — маса сухої речовини в траві;

2) $680 : 0{,}85 = 800$ (кг) — маса сіна. *Відповідь.* 800 кг. ■

Приклад 11. Скільки води потрібно додати до 50 г 35%-го розчину, щоб одержати 10%-й розчин?

■ 1) $50 \cdot 0{,}35 = 17{,}5$ (г) — маса солі в розчині;

2) у новому розчині 17,5 г солі становлять 10%, тоді маса нового розчину дорівнює $17{,}5 : 0{,}1 = 175$ (г);

3) $175 - 50 = 125$ (г) — води потрібно додати до розчину. *Відповідь.* 125 г води. ■

Приклад 12. У зв'язку із впровадженням новітніх технологій на виробництві продуктивність праці зросла на 60%. На скільки відсотків зменшиться час виконання деякого завдання?

■ Продуктивність праці становить p одиниць продукції за 1 год, час її виконання — t год. Тоді вся робота A полягає у виготовленні pt одиниць продукції. Оскільки продуктивність праці зросла на 60%, то вона стала дорівнювати $1{,}6p$ одиниць продукції за 1 год. Кількість виготовлених одиниць продукції не змінилася, тому $pt = 1{,}6p \cdot t_1$, де t_1 — час виконання завдання зі збільшеною продуктивністю, звідки $t_1 = \dfrac{pt}{1{,}6p} = \dfrac{t}{1{,}6} = \dfrac{10t}{16} = \dfrac{5}{8}t$. Тоді час виконання завдання зменшився на $t - \dfrac{5}{8}t = \dfrac{3}{8}t$, що становить $\dfrac{3}{8}t : t = \dfrac{3}{8} = 37{,}5\%$. *Відповідь.* Час зменшиться на 37,5%. ■

Приклад 13. У яких пропорціях потрібно змішати 70%-й і 50%-й розчини кислоти, щоб одержати 65%-й розчин цієї кислоти?

■ Нехай узяли x г 70%-го розчину кислоти, а 50%-го — y г. Тоді маса 65%-го розчину дорівнює $(x + y)$ (г). Чистої кислоти в 70%-му розчині було $0{,}7x$ г, у 50%-му — $0{,}5y$ г. Чистої кислоти в новоутвореному розчині $0{,}65(x + y)$ г. Рівняння: $0{,}7x + 0{,}5y = 0{,}65(x + y)$; $0{,}7x + 0{,}5y = 0{,}65x + 0{,}65y$; $0{,}05x = 0{,}15y$; $x = 3y$; $\dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{1}$. Отже, потрібно взяти 3 частини 70%-го розчину й одну частину 50%-го розчину. *Відповідь.* 3 : 1. ■

Завдання 2.1–2.25 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

2.1. Як знайти невідоме в пропорції $\dfrac{x-3}{8-x} = \dfrac{2}{3}$?

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

2.2. 39 : 26 дорівнює…

А	Б	В	Г	Д
0,(6)	13 : 13	1,2	2 : 3	3 : 2

2.3. Як знайти 52% від числа 960?

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{960 \cdot 100}{52}$	$\dfrac{52 \cdot 100}{96}$	$\dfrac{960 \cdot 52}{100}$	960 : 52	960 · 52

2.4. Як знайти число, 60% якого дорівнюють 360?

А	Б	В	Г	Д
$360 \cdot 60$	$\frac{360}{60}$	$\frac{60 \cdot 100}{360}$	$\frac{360 \cdot 60}{100}$	$\frac{360 \cdot 100}{60}$

2.5. Як встановити, скільки відсотків становить число 9 від 96?

А $\frac{9 \cdot 100}{96}$ Б $\frac{96 \cdot 9}{100}$ В $\frac{96 \cdot 100}{9}$ Г $\frac{9}{96}$ Д $\frac{96}{9}$

2.6. Банк сплачує своїм вкладникам 8% річних. Визначити, скільки грошей потрібно внести на рахунок, щоб через рік отримати 60 грн прибутку.

А 1150 грн Б 1050 грн В 950 грн Г 850 грн Д 750 грн

2.7. **(ЗНО–2010)** За видачу свідоцтва про право на спадщину стягується державне мито в розмірі 0,5% від вартості майна, що успадковується. Скільки державного мита повинен сплатити спадкоємець, якщо вартість майна, що успадковується, становить 32 000 грн?

А 16 грн Б 64 грн В 160 грн Г 320 грн Д 1600 грн

2.8. Сплав містить 50 г олова і 200 г міді. Який відсотковий уміст олова у сплаві?

А 24% Б 40% В 20% Г 25% Д 50%

2.9. Вкладник вніс до банку 2000 грн, а через рік отримав 2160 грн. Під який відсоток річних були покладені гроші?

А 12% Б 8% В 6% Г 14% Д 16%

2.10. 10%-й розчин солі містить 180 г води. Яка маса цього розчину?

А 198 г Б 190 г В 1800 г Г 200 г Д 400 г

2.11. Ціна товару дорівнює 64 грн. Після зниження ціни товар коштував 56 грн. На скільки відсотків було знижено ціну?

А 25% Б 8% В 10% Г $14\frac{2}{7}\%$ Д 12,5%

2.12. Скільки відсотків від 180 становлять 15% від 300?

А 15% Б 20% В 25% Г 30% Д 40%

2.13. Сплав, маса якого дорівнює 320 кг, містить 20% олова, 144 кг свинцю і решту — домішки. Визначити відсотковий уміст домішок.

А 80% Б 25% В 35% Г 55% Д 48,75%

2.14. Скільки відсотків становить НСД(99; 126) від НСК(12; 20)?

А 25% Б 20% В 15% Г 10% Д 30%

2.15. Ціна товару була підвищена на 25%. На скільки відсотків необхідно зменшити нову ціну товару, щоб одержати початкову?

А 25% Б 15% В 35% Г 20% Д 10%

2.16. Власник футбольного клубу має прибуток. Щоб його збільшити, він підвищив ціну квитків на 25%. Кількість відвідувачів значно зменшилася, і він вимушений був повернутися до початкової ціни. На скільки відсотків власник клубу зменшив ціну квитків?

А 125% Б 100% В 25% Г 20% Д 120%

2.17. Деяке додатне число спочатку збільшили на 50%, а потім одержане число зменшили на 50%. Як змінилося початкове число?

А	Б	В	Г	Д
Не змінилося	Зменшилося на 25%	Зменшилося на 20%	Зменшилося на 5%	Збільшилося на 5%

2.18. На скільки відсотків збільшиться об'єм куба, якщо його ребро збільшити на 50%?

А 237,5% **Б** 125% **В** 150% **Г** 50% **Д** 337,5%

2.19. Вкладник вніс до банку 1000 грн під 8% річних. Яку суму він матиме на рахунку через 3 роки?

А $3 \cdot 1000 \cdot 1{,}08$ **Б** $3 \cdot 1000 \cdot 0{,}08$ **В** $1000 \cdot 0{,}08^2$ **Г** $1000 \cdot 0{,}08^3$ **Д** $1000 \cdot 1{,}08^3$

2.20. Число a становить 25% числа b. Скільки відсотків становить число b від числа a?

А 400% **Б** 200% **В** 250% **Г** 750% **Д** 500%

2.21. Товар подешевшав на 20%. На скільки відсотків більше можна купити товару за ту ж кількість грошей?

А 25% **Б** 20% **В** 10% **Г** 40% **Д** 5%

2.22. Тривалість робочого дня зменшилась з 8 год до 6 год. На скільки відсотків потрібно підвищити продуктивність праці, щоб випуск продукції залишився тим же?

А 20% **Б** 25% **В** $33\frac{1}{3}\%$ **Г** 35% **Д** $24\frac{1}{3}\%$

2.23. Машиніст провів поїзд за 7 год 30 хв замість 9 год за графіком. На скільки відсотків було збільшено середню швидкість?

А 20% **Б** $16\frac{2}{3}\%$ **В** 25% **Г** 15% **Д** 30%

2.24. У сплаві міді та цинку мідь становить $\frac{1}{7}$ частину маси цинку. Який відсотковий уміст міді у сплаві?

А $14\frac{2}{7}\%$ **Б** 12,5% **В** 25% **Г** 45% **Д** 6,2%

2.25. 2 кг сплаву міді з оловом містить 40% міді. Скільки потрібно додати до цього сплаву олова, щоб отриманий сплав містив 16% міді?

А 3 кг **Б** 2,5 кг **В** 2 кг **Г** 4 кг **Д** 3,5 кг

Завдання 2.26–2.30 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

2.26. Установити відповідність між частинами (1–3) та відсотками (А–Д).

1	2	3
$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{8}$

А	Б	В	Г	Д
40%	20%	80%	12,5%	25%

2.27. Установити відповідність між затушованими частинами круга (1–3) та відсотками (А–Д), які вони становлять від круга.

1	2	3
		

А	Б	В	Г	Д
$62\frac{1}{2}\%$	$58\frac{1}{3}\%$	$83\frac{1}{3}\%$	75%	$66\frac{2}{3}\%$

2.28. Установити відповідність між завданнями (1–3) та їх розв'язаннями (А–Д).

1 Скільки відсотків становить число 40 від числа 240?

2 Знайти 40% від числа 240.

3 Знайти число, 40% якого дорівнюють 240.

А $\frac{240 \cdot 40\%}{100\%}$

Б $\frac{240 \cdot 40\%}{100}$

В $\frac{240 \cdot 100\%}{40}$

Г $\frac{240 \cdot 100\%}{40\%}$

Д $\frac{40 \cdot 100\%}{240}$

2.29. Кількість дівчат у класі становить $\frac{1}{4}$ кількості хлопців. Установити відповідність між завданнями (1–3) та відповідями (А–Д) до них.

1 Скільки відсотків хлопців у класі?

2 Скільки відсотків дівчат у класі?

3 Знайти відсоткове відношення кількості дівчат до кількості хлопців.

А 20%

Б 75%

В 25%

Г 80%

Д 400%

2.30. Установити відповідність між задачами (1–3) та відповідями (А–Д) до них.

1 Вкладник вніс до банку 11000 грн під 13% річних. Скільки гривень становитиме прибуток через рік?

2 Вкладник вніс до банку 11000 грн під 12% річних. Скільки гривень буде на його рахунку через рік?

3 Вкладник вніс до банку 4000 грн під 16% річних. Скільки гривень становитиме прибуток через 2 роки?

А 12320

Б 1382,4

В 1340

Г 1430

Д 1440

Розв'яжіть завдання 2.31–2.43. Відповідь запишіть десятковим дробом.

2.31. 2 кг сплаву міді з оловом містить 40% міді. Скільки кілограмів олова потрібно додати до цього сплаву, щоб отриманий сплав містив 25% міді?

2.32 Скільки кілограмів води потрібно випарувати зі 100 кг 10%-го розчину солі, щоб одержати розчин з концентрацією 20%?

2.33. **(ЗНО–2013)** Додатне число A більше додатного числа B в 3,8 разу. На скільки відсотків число A більше за число B?

2.34. З молока одержують 21% вершків, а з вершків — 24% масла. Зі скількох тонн молока можна одержати 126 кг масла?

2.35. Змішали 2 л молока, жирність якого дорівнює 6%, і 3 л молока, жирність якого дорівнює 8%. Знайди у відсотках жирність утвореної суміші.

2.36. Щоб одержати 800 г 50%-го розчину нітратної кислоти, слід змішати 60%-й розчин цієї кислоти з 20%-м розчином. Скільки грамів 20% розчину потрібно використати?

2.37. До 400 г 5%-го розчину солі додали сіль й одержали 24%-й розчин. Яка маса утвореного розчину в грамах?

2.38. **(ЗНО–2013)** У магазині молодіжного одягу діє акція: при покупці будь-яких двох однакових футболок за одну з них платять на 40% менше, ніж за іншу. За дві однакові футболки, придбані в цьому магазині під час акції, Микола заплатив 200 гривень. Скільки гривень заплатить Микола, якщо він купить лише одну таку футболку?

2.39. Ребро куба збільшили на 50%. На скільки відсотків збільшиться:
1) площа поверхні куба; **2)** об'єм куба?

2.40. **(ЗНО–2014)** Початкова вартість сукні становила 144 грн. Унаслідок уцінення вартість цієї сукні було зменшено на 60%.
1. Обчислити вартість сукні після уцінення (у грн).
2. Скільки відсотків становить початкова вартість сукні від її вартості після уцінення?

2.41. **(ЗНО–2015)** У магазині в продажу є музичні диски, диски з науково-популярними фільмами та диски з художніми фільмами. Кількість дисків із науково-популярними фільмами в п'ять разів більша за кількість музичних дисків і вдвічі менша за кількість дисків із художніми фільмами. Загальна кількість дисків у цьому магазині дорівнює 192.
1. Скільки відсотків становить кількість музичних дисків від кількості всіх дисків у магазині?
2. Визначити кількість дисків із науково-популярними фільмами в цьому магазині.

2.42. Встановити, який відсоток річних нараховує банк, якщо через два роки за початкового вкладу 800 грн на рахунку стає 882 грн.

2.43. Ціна вхідного квитка в кінотеатр становить 36 грн. Після зменшення вхідної плати кількість глядачів збільшилася на 50%, а виручка — на 25%. Скільки гривень став коштувати квиток?

Тема 3. Цілі раціональні вирази

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— означення тотожно рівних виразів, тотожного перетворення виразу, тотожності;
— означення одночлена та многочлена;
— правила додавання, віднімання й множення одночленів та многочленів;
— формули скороченого множення;
— розклад многочлена на множники;
— виконання тотожних перетворень раціональних виразів та знаходження їх числових значень;
— означення області допустимих значень змінних, виразу зі змінними;
— доведення тотожності.

Раціональні вирази. *Раціональні вирази* — це вирази складені з чисел і змінних за допомогою операцій додавання (віднімання) і множення (ділення).

Наприклад, $\frac{1}{3}x^2 - a^3 + 4; \frac{y+2}{2x-y^2}$.

Цілі раціональні вирази. Раціональний вираз називають *цілим*, якщо він не містить ділення на вираз зі змінною.

Наприклад, $\frac{x^2y^3}{3} - a^2 + 4z; \frac{a^2+b^2-1}{7}$.

Областю допустимих значень змінних в цілих виразах є всі дійсні числа.

Областю значень виразу зі змінними є числа, яких може набувати вираз.

Наприклад, вираз $x^2 - 1$ набуває значень $[-1; +\infty)$, а вираз $8 - x^3$ — $(-\infty; +\infty)$.

Степінь числа a з натуральним показником n ($n > 1$)

Степенем числа a з натуральним показником n ($n > 1$) називають добуток n множників, кожен з яких дорівнює a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}.$$

Наприклад: $2^5 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ множників}} = 32$; $(-3)^4 = \underbrace{-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}_{4 \text{ множники}} = 81$; $(-5)^3 = \underbrace{-5 \cdot (-5) \cdot (-5)}_{3 \text{ множники}} = -125$.

Вважають, що $a^1 = a$; $0^n = 0$; $1^n = 1$. Наприклад, $7^1 = 7$; $(-8)^1 = -8$.

Будь-який степінь додатного числа є додатним числом. Наприклад, $2^{10} = 1024 > 0$; $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} > 0$.

Парний степінь від'ємного числа є додатним числом. Наприклад, $(-8)^2 = 64 > 0$; $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81} > 0$.

Непарний степінь від'ємного числа є від'ємним числом. Наприклад, $(-5)^3 = -125 < 0$.

Степінь з цілим показником.

Якщо $a \neq 0$ і n — натуральне число, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Наприклад, $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$; $(-6)^{-3} = \frac{1}{(-6)^3} = -\frac{1}{216}$;

$\left(1\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{5}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625}$. Очевидно, що $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Вважають, що $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$. Наприклад, $3^0 = 1$; $(-2)^0 = 1$.

Основні властивості степенів:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$. Наприклад, $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$;

2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Наприклад, $\frac{3^6}{3^2} = 3^{6-2} = 3^4 = 81$;

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$. Наприклад, $(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4096$;

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$. Наприклад, $20^3 = (2 \cdot 10)^3 = 2^3 \cdot 10^3 = 8 \cdot 1000 = 8000$;

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$. Наприклад, $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$.

Одночленами називають числа, змінні, їхні степені з натуральними показниками та добутки. Наприклад, 5; x; $\frac{2}{5}a^7$; $5m^2n \cdot (-3)m^4$. Одночлен, який містить єдиний числовий множник, записаний першим (*коефіцієнт*), та степені різних змінних, називають *одночленом стандартного вигляду*.

Наприклад, щоб подати одночлен $5m^2n \cdot (-3)m^4$ у стандартному вигляді, слід помножити 5 і –3 та m^2 і m^4: $5m^2n \cdot (-3)m^4 = -15m^6n$ (коефіцієнт цього одночлена — число –15).

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, які входять до нього. Якщо одночлен містить лише число, то його степінь дорівнює нулю. Наприклад, $-15m^6n$ — одночлен сьомого степеня, $10x$ — одночлен першого степеня, 78 — одночлен нульового степеня.

Многочленом називають суму кількох одночленів. Доданки многочлена, які відрізняються лише коефіцієнтом, називають *подібними членами* (доданками) многочлена.

Наприклад, у тричлені $3x^2 - 9x^5 \cdot 2y^2z - x^2$ подібними доданками є $3x^2$ та $-x^2$.

Многочлен, який містить лише одночлени стандартного вигляду, серед яких немає подібних членів, називають *многочленом стандартного вигляду*. Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший зі степенів одночленів, з яких складається даний многочлен.

Формули скороченого множення

1. $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Наприклад, $(a-3)(a+3) = a^2 - 3^2 = a^2 - 9$;

2. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Наприклад, $(2a-5)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 5 + 5^2 = 4a^2 - 20a + 25$;

3. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$. Наприклад, $(5 + 2x)^3 = 125 + 150x + 60x^2 + 8x^3$;

4. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$. Наприклад, $2^3 - x^3 = 8 - x^3 = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$;

5. $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n$.

Наприклад, $(m - x + 3c)^2 = m^2 + x^2 + 9c^2 - 2mx + 6mc - 6xc$.

Розкладання многочлена на множники

1. Винесення спільного множника за дужки.

Наприклад, $12a^5 - 30a^3b + 6a^3 = 6a^3 \cdot 2a^2 + 6a^3 \cdot (-5b) + 6a^3 \cdot 1 = 6a^3 \cdot (2a^2 - 5b + 1)$.

2. Використання формул скороченого множення.

Наприклад, $100x^2 - y^8 = (10x)^2 - (y^4)^2 = (10x - y^4)(10x + y^4)$.

3. Групування. Наприклад, $6x^2y^2 + 8y + 3x^2y + 4 = (6x^2y^2 + 3x^2y) + (8y + 4) =$

$= 3x^2y \cdot (2y + 1) + 4 \cdot (2y + 1) = (2y + 1)(3x^2y + 4)$.

Дії над многочленами

Щоб додати (відняти) многочлени, досить розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+» або «–», та звести подібні доданки, якщо вони є. Якщо перед дужками стоїть знак «+», то при розкриванні дужок знаки всіх одночленів, які були в дужках, не змінюються; якщо знак «–» — то знаки змінюються на протилежні. Наприклад, $(3 + 5x) + (7x - 4) = 3 + 5x + 7x - 4 = 12x - 1$; $(-4 + 3x) - (3 - 5x) = -4 + 3x - 3 + 5x = 8x - 7$.

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен помножити на кожен член многочлена й отримані добутки додати. Наприклад, $3x \cdot (2x + 5) = 3x \cdot 2x + 3x \cdot 5 = 6x^2 + 15x$.

Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожен член одного многочлена помножити на кожен член іншого многочлена й отримані добутки додати. Наприклад, $(3 + 5x)(7x - 4) = 3 \cdot 7x + 3 \cdot (-4) + 5x \cdot 7x + 5x \cdot (-4) = 21x - 12 + 35x^2 - 20x = 35x^2 + x - 12$.

Щоб поділити многочлен на одночлен, досить кожен член многочлена розділити на цей одночлен і одержані результати додати. Наприклад, $(15x^4 - 9x^3 + 24x^2 - 6x) : (3x) = 5x^3 - 3x^2 + 8x - 2$.

Ділення многочлена на многочлен

Якщо для двох многочленів $A(x)$ і $B(x)$ можна знайти такий многочлен $Q(x)$, що $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, то кажуть, що многочлен $A(x)$ *ділиться на многочлен* $B(x)$. Наприклад, оскільки $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, то многочлен $A(x) = x^2 - 9$ ділиться на многочлен $B(x) = x + 3$, тоді $Q(x) = x - 3$ — частка.

Ділення многочлена на многочлен за правилом кута

Щоб поділити многочлен на многочлен за правилом кута, потрібно:

1. Упорядкувати члени многочленів за спаданням степенів змінної.
2. Поділити старший член діленого на старший член дільника.
3. Одержаний результат помножити на дільник й одержаний добуток відняти від діленого.
4. З одержаною різницею повторити кроки 1–3 доки не залишиться в остачі нуль або степінь остачі не стане меншим від степеня дільника.

Наприклад:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 18x - 40 & x + 2 \\ \underline{-\,x^3 + 2x^2} & \hline & x^2 + x - 20 \\ x^2 - 18x & \\ \underline{-\,x^2 + 2x} & \\ -20x - 40 & \\ \underline{-\,-20x - 40} & \\ 0 & \end{array}$$

Многочлен від однієї змінної можна записати так: $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — числа, до того ж $a_0 \neq 0$, x — змінна.

Число d називають коренем многочлена, якщо $P(d) = 0$.

Наприклад, число 5 — корінь многочлена $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x - 5$, бо $P(5) = 5^3 - 4 \cdot 5^2 - 4 \cdot 5 - 5 = 0$.

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $P(x)$ на лінійний двочлен $x - d$ дорівнює значенню цього многочлена, якщо $x = d$, тобто $P(d)$.

Наприклад, остача від ділення многочлена $2x^3 - 3x^2 + 4x + 9$ на двочлен $x + 1$, дорівнює $P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 9 = 0$, тобто $P(x)$ ділиться на $x + 1$ націло: $P(x) = (x + 1)(2x^2 - 5x + 9)$.

Розклад на множники квадратного тричлена і деяких многочленів

Вираз $ax^2 + bx + c$, де a, b і c — деякі числа ($a \neq 0$), x — змінна, називають *квадратним тричленом*. Його корені x_1 та x_2 можна обчислити за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac \text{ — дискримінант.}$$

Якщо x_1 та x_2 — корені квадратного тричлена, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Наприклад, тричлен $2x^2 + x - 3$ має два корені: $-1{,}5$ і 1, тоді $2x^2 + x - 3 = 2(x - 1)(x + 1{,}5)$.

$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Наприклад: а) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$; б) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.

Якщо $n \in N$ і $n = 2k + 1$ — непарне число, то $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$. Наприклад, $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

Степінь двочлена (бінам Ньютона)

$(a+b)^n = a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-2}a^2b^{n-2} + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n$, де $C_n^k = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$ — число комбінацій з n по k. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

Наприклад, $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$. $(1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1) = 2^5 = 32$.

Приклад 1. Спростити вираз $(a^4)^{12} : a^8$.

А	Б	В	Г	Д
a^2	a^6	a^{40}	a^8	a

■ $(a^4)^{12} : a^8 = a^{4 \cdot 12} : a^8 = a^{48} : a^8 = a^{48-8} = a^{40}$. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 2. Записати в порядку спадання числа 4^{30}; 3^{40}; 2^{50}.

А	Б	В	Г	Д
$2^{50}; 4^{30}; 3^{40}$	$3^{40}; 4^{30}; 2^{50}$	$2^{50}; 3^{40}; 4^{30}$	$4^{30}; 3^{40}; 2^{50}$	$3^{40}; 2^{50}; 4^{30}$

■ $4^{30} = 4^{3 \cdot 10} = (4^3)^{10} = 64^{10}$; $3^{40} = 3^{4 \cdot 10} = (3^4)^{10} = 81^{10}$; $2^{50} = 2^{5 \cdot 10} = (2^5)^{10} = 32^{10}$. Оскільки основи степенів більші за 1, то при однаковому показнику степеня більшим є те число, основа якого більша. Отже, числа слід впорядкувати так: $81^{10}; 64^{10}; 32^{10}$ або $3^{40}; 4^{30}; 2^{50}$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 3. Обчислити: $21^8 \cdot 14^{-7} \cdot 6^9 \cdot 3^{-16}$.

А	Б	В	Г	Д
$4\frac{2}{3}$	42	56	84	$9\frac{1}{3}$

■ $21^8 \cdot 14^{-7} \cdot 6^9 \cdot 3^{-16} = (3 \cdot 7)^8 \cdot (2 \cdot 7)^{-7} \cdot (3 \cdot 2)^9 \cdot 3^{-16} = 3^8 \cdot 7^8 \cdot 2^{-7} \cdot 7^{-7} \cdot 3^9 \cdot 2^9 \cdot 3^{-16} =$

$= \frac{3^8 \cdot 7^8 \cdot 3^9 \cdot 2^9}{2^7 \cdot 7^7 \cdot 3^{16}} = 3^{8+9-16} \cdot 7^{8-7} \cdot 2^{9-7} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 4. Подати многочлен $3x^2 - 9x^5 \cdot 2y^2z - x^2$ у стандартному вигляді й визначити його степінь.

■ $3x^2 - 9x^5 \cdot 2y^2z - x^2 = 3x^2 - x^2 - 18x^5y^2z = 2x^2 - 18x^5y^2z$. Даний многочлен восьмого степеня. ■

Приклад 5. Виконати дії: $3ab^4 \cdot (a^2b - 8a)$.

■ $3ab^4 \cdot (a^2b - 8a) = 3ab^4 \cdot a^2b + 3ab^4 \cdot (-8a) = 3a^3b^5 - 24a^2b^4$. ■

Приклад 6. Спростити вираз $(3b - 2a)(2a + 3b)(9b^2 + 4a^2)$.

А	Б	В	Г	Д
$81b^4 + 16a^4$	$81b^4 - 16a^4$	$-81b^4 + 16a^4$	$9b^4 - 2ab + a^4$	$9b^4 - 2ab - a^4$

■ $(3b - 2a)(2a + 3b)(9b^2 + 4a^2) = (9b^2 - 4a^2)(9b^2 + 4a^2) = 81b^4 - 16a^4$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 7. Знайти суму лінійних множників, на які розкладається многочлен $x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12$.

А	Б	В	Г	Д
$4x - 5$	$4x + 7$	$4x + 5$	$4x - 3$	$4x + 3$

■ Знайдемо корені многочлена $x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12$. $x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12 = 0$. Випишемо дільники вільного члена: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$.

Обчислимо, що $P(1) = 1 + 5 - 1 - 17 + 12 = 0$. Виконавши ділення кутом, запишемо:

$$x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12 = (x - 1)(x^3 + 6x^2 + 5x - 12).$$

Виконаємо аналогічні дії з многочленом $x^3 + 6x^2 + 5x - 12$. Цілі дільники числа -12: $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$.

Знайдемо, що $P(1) = 1 + 6 + 5 - 12 = 0$. Отже, можна записати:

$$x^3 + 6x^2 + 5x - 12 = (x - 1)(x^2 + 7x + 12).$$

Розкладемо двочлен $x^2 + 7x + 12$ на множники: $x^2 + 7x + 12 = 0$; $D = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 1$;

$x_1 = \frac{-7+1}{2} = -3$; $x_2 = \frac{-7-1}{2} = -4$. $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$.

Тоді заданий многочлен можна записати у вигляді: $x^4 + 5x^3 - x^2 - 17x + 12 = (x - 1)^2(x + 3)(x + 4)$. Сума лінійних множників: $(x - 1) + (x - 1) + (x + 3) + (x + 4) = x - 1 + x - 1 + x + 3 + x + 4 = 4x + 5$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 8. Виконати дії: $(x^2-7)(3x-5)$.

■ $(x^2-7)(3x-5)=x^2\cdot 3x+x^2\cdot(-5)+(-7)\cdot 3x+(-7)\cdot(-5)=3x^3-5x^2-21x+35$. ■

Приклад 9. Розкласти на множники многочлен c^3+c^2-4c-4.

А	Б	В	Г	Д
$(c^2+1)(c-4)$	$(c^2+4)(c-1)$	$(c+1)(c-4)(c+4)$	$(c+1)(c-2)(c+2)$	$c(c^2+c-4)$

■ $c^3+c^2-4c-4=(c^3+c^2)-(4c+4)=c^2(c+1)-4(c+1)=(c+1)(c^2-4)=(c+1)(c-2)(c+2)$.
Відповідь. **Г.** ■

Приклад 10. Указати значення, якого може набувати вираз $a^2+10a+25$, якщо $a\in N$.

А	Б	В	Г	Д
1	49	16	25	48

■ $a^2+10a+25=(a+5)^2$. За натуральних значень a вирази $a+5$ і $(a+5)^2$ — натуральні числа. Із запропонованих чисел квадратом натурального числа, більшого за 5, є лише число 49. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 11. Установити відповідність між виразами (1–3) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $(2a-3)(3a+2)$
2 $(2a-3)^2$
3 $(3-2a)(3+2a)$

А $9+12a+4a^2$
Б $6a^2-5a-6$
В $4a^2-6a+9$
Г $9-12a+4a^2$
Д $9-4a^2$

■ **1.** $(2a-3)(3a+2)=2a\cdot 3a+2a\cdot 2-3\cdot 3a-3\cdot 2=6a^2+4a-9a-6=6a^2-5a-6$, тому **1Б.**
2. $(2a-3)^2=9-12a+4a^2$, тому **2Г.**
3. $(3-2a)(3+2a)=3^2-(2a)^2=9-4a^2$, тому **3Д.**

Відповідь.

	А	Б	В	Г	Д
1		⊠			
2				⊠	
3					⊠

■

Завдання 3.1–3.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

3.1. Обчислити: $9999\cdot 1001+1001$.

А	Б	В	Г	Д
1010000	10100	101001	101000	10010000

3.2. Обчислити: $(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\ldots+(-1)^{2020}$.

А	Б	В	Г	Д
2020	–2020	0	1	–1

3.3. Обчислити: $\dfrac{9^5\cdot 4^3}{27^4\cdot 2^5}$.

А $\dfrac{2}{9}$ **Б** 1 **В** 2 **Г** $\dfrac{2}{27}$ **Д** $\dfrac{4}{9}$

3.4. Обчислити: $\dfrac{4\cdot 3^{32}+9\cdot 3^{30}}{9^{16}}$.

А $4\cdot 3^{16}$ **Б** 15 **В** 13 **Г** $4\cdot 3^{14}$ **Д** 5

3.5. Знайти значення виразу $\dfrac{5^{3n+2}\cdot 2^{3n+1}}{1000^n}$.

А 2 **Б** 10^n **В** 5 **Г** 50 **Д** 10^{n+2}

3.6. На скільки $\dfrac{4^{a+1}-2^{2a-1}}{2^{2a}}$ менше від 9?

А 3,5 **Б** 3 **В** 4,5 **Г** 5,5 **Д** 7

3.7. Подати у вигляді многочлена вираз $\overline{abc}+\overline{cab}$.

А	Б	В	Г	Д
$110a+11b+101c$	$2a+2b+2c$	$200a+20b+2c$	$200a+2b+20c$	$111a+11b+c$

3.8. Відомо, що $a+b=1$, $b+c=2$, $a+c=3$. Знайти $3(a+b+c)$.

А 6 **Б** 9 **В** 12 **Г** 15 **Д** 18

3.9. **(ЗНО–2013)** Указати вираз, тотожно рівний виразу $(2x+5)\cdot(3-x)$.

А $15+x-2x^2$ **Б** $15+x+2x^2$ **В** $15+6x-2x^2$ **Г** $15+11x-2x^2$ **Д** $15+11x+2x^2$

3.10. Спростити вираз $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)\cdot\ldots\cdot(2^{32}+1)+1$.

А 2^{34} **Б** 2^{64} **В** $2^{64}+2$ **Г** $2^{34}+2$ **Д** $2^{34}-2$

3.11. **(ЗНО–2015)** $2(5x+6)=\ldots$

А $10x+12$ **Б** $10x+6$ **В** $7x+8$ **Г** $7x+12$ **Д** $5x+8$

3.12*. Подати многочлен $0{,}25x^2+y^2-xy-t^2$ у вигляді добутку.

А	Б	В	Г	Д
$(0{,}25x-y-t)\times$ $\times(0{,}25x+y+t)$	$(0{,}25x-y-t)\times$ $\times(0{,}25x-y+t)$	$(0{,}05x-y-t)\times$ $\times(0{,}05x-y+t)$	$(0{,}5x-y-t)\times$ $\times(0{,}5x-y+t)$	$(0{,}5x-y+t)\times$ $\times(0{,}5x+y+t)$

3.13*. Розкласти многочлен x^4+x^2+1 на множники і знайти суму вільних членів многочленів розкладу.

А 2 **Б** 4 **В** 0 **Г** 1 **Д** –1

3.14. Знайти $(a-b)^2$, якщо $(a+b)^2=36$, $a^2-b^2=24$.

А 2 **Б** 4 **В** 8 **Г** 16 **Д** 32

3.15. Знайти $(a+b)^4$, якщо $(ab)^3=125$, $a^2+b^2=15$.

А 25 **Б** 225 **В** 400 **Г** 500 **Д** 625

3.16. $1-2+3-4+5-6+\ldots+2019-2020=\ldots$

А 2019 **Б** –2020 **В** 1010 **Г** –1010 **Д** 0

3.17. $(200+1)(200-2)(200+3)(200-4)\ldots(200+2019)(200-2020)=\ldots$

А 2020000 **Б** –2020000 **В** 1010000 **Г** –1010000 **Д** 0

3.18. Знайти x, якщо $222222x=111111+222222+333333+444444$.

А 1 **Б** 4 **В** 5 **Г** 10 **Д** 12

3.19. Обчислити: $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2+101^2$.

А –500 **Б** 4949 **В** 101^2-1 **Г** –50 **Д** 5151

3.20. Спростити вираз: $70\cdot(71^9+71^8+71^7+\ldots+71^2+71)+71$.

А 70^{10} **Б** $71^{10}-1$ **В** 71^{10} **Г** $71^{10}+1$ **Д** $70^{10}+1$

3.21. Якою цифрою закінчується значення виразу $11^6+14^6-13^3$?

А 0 **Б** 2 **В** 3 **Г** 5 **Д** 7

3.22. Знайти частку від ділення многочленів x^4-x^2+x+1 та x^3-x^2+1.

А x^2-1 **Б** x **В** $x-1$ **Г** $x+1$ **Д** x^2+1

3.23. Знайти остачу від ділення многочлена x^3+5x^2-x-4 на двочлен $x-1$.

А 0 **Б** 1 **В** 2 **Г** –1 **Д** –2

Завдання 3.24–3.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

3.24. Установити відповідність між виразами (1–3) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $x^2-(x-1)(x+3)$	А $2x+3$
2 $x^2-(x+1)(x+3)$	Б $4x-3$
3 $x^2-(x-1)(x-3)$	В $-4x-3$
	Г $-4x+3$
	Д $-2x+3$

3.25. Установити відповідність між виразами (1–3) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $(a-2b)^2-(a-b)(a+b)$	А $2ab-5a^2$
2 $(2a+b)(b-2a)-(a-b)^2$	Б $2ab-5b^2$
3 $(-2a-b)^2-(a-b)^2$	В $-4ab+5b^2$
	Г $4ab-5a^2$
	Д $6ab+3a^2$

3.26. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх розкладами на множники (А–Д).

1 $ax-ay-by+bx$	А $(a+b)(y-x)$
2 $ax+ay-bx-by$	Б $(a+b)(x-y)$
3 $-ax+ay+bx-by$	В $(a-b)(x-y)$
	Г $(a-b)(y-x)$
	Д $(a-b)(x+y)$

3.27. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх розкладами на множники (А–Д).

1 $4(x-y)^2-9y^2$	А $(x+3y)(5x-3y)$
2 $4(x-y)^2-9x^2$	Б $(x-3y)(5x-3y)$
3 $9(x-y)^2-4y^2$	В $(x+2y)(2y-5x)$
	Г $(2x+y)(2x-5y)$
	Д $(3x-5y)(3x-y)$

3.28. **(ЗНО–2012)** До кожного виразу (1–4) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Д).

1 $(a-8)(a+8)$	А $a^2-16a+64$
2 $(a-8)^2$	Б a^2-64
3 $(a-4)(a^2+4a+16)$	В $a^2-20a+64$
4 $(a-4)(a-16)$	Г a^3+64
	Д a^3-64

Розв'яжіть завдання 3.29–3.35. Відповідь запишіть десятковим дробом.

3.29. Знайти значення виразу $\dfrac{2^{23}\cdot 27^3+15\cdot 4^{10}\cdot 9^4}{6^9\cdot 2^{10}+12^{10}}$.

3.30. Знайти частку від ділення 16^5+2^{15} на 33 у вигляді степеня числа 2. У відповідь записати показник степеня.

3.31. Виконати ділення многочлена $2x^3-3x^2-11x+6$ на двочлен $x-3$ і знайти значення отриманої частки, якщо $x=-2$.

3.32. Якою цифрою закінчується значення виразу $15^9+26^9+39^9$?

3.33. Якою цифрою закінчується число 99^{99^9}?

3.34. Знайти, за яких значень a і b многочлен $x^4+6x^3+3x^2+ax+b$ ділиться без остачі на многочлен x^2+4x+3. У відповідь записати суму a_0+b_0 знайдених значень a та b.

3.35. Дано многочлени $f(x)=x^4-x^2+x+1$ і $p(x)=x^3-x^2+1$. Знайти значення многочленів:

1. $f(x)-p(x)$; **2.** $f(x):p(x)$, якщо $x=5$.

Тема 4. Дробово-раціональні вирази

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— означення тотожно рівних виразів, тотожного перетворення виразу, тотожності;
— означення одночлена та многочлена;
— виконання тотожних перетворень раціональних виразів та знаходження їх числових значень;
— означення області допустимих значень змінних, виразу зі змінними;
— доведення тотожності.

Вирази, які можуть містити додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення до натурального степеня чисел та змінних, називають ***раціональними***. Якщо раціональний вираз не містить ділення на вираз зі змінною, то його називають *цілим*, а інакше — *дробовим*. Наприклад, вирази $2+a^2$; $\frac{6(a+b)}{7}$ — цілі раціональні, а вирази $\frac{4k+y}{3m-c}$; $x^2+x+\frac{1}{x}$ — дробові раціональні.

Два вирази називають *тотожно рівними*, якщо для всіх допустимих значень змінних їхні відповідні значення рівні. Наприклад, тотожно рівними є вирази $2x^2-18$ та $(2x+6)\cdot(x-3)$.

Раціональним дробом називають вираз виду $\frac{A}{B}$, де A і B — многочлени.

Допустимими значеннями змінних у виразі називають такі значення змінних, за яких вираз має числове значення. Наприклад, для виразу a^3+b-2 всі значення змінних a та b є допустимими, оскільки зазначені дії можна виконати за будь-яких значень a та b. Для виразу $\frac{m-2}{m}$ допустимими є всі значення m, крім $m=0$.

Множину всіх допустимих значень змінних даного виразу називають *областю допустимих значень* виразу (ОДЗ).

Наприклад, для виразу $x^{-3}+\frac{2}{x-5}$ областю допустимих значень є всі числа, крім $x=0$ та $x=5$, бо якщо $x=0$, то значення виразу $x^{-3}=\frac{1}{x^3}$ не існує, а якщо $x=5$, то не існує значення виразу $\frac{2}{x-5}$.

Застосування основної властивості раціонального дробу

1. *Скорочення дробу* — ділення чисельника і знаменника на спільний множник. Щоб скоротити раціональний дріб, слід спочатку чисельник і знаменник розкласти на множники.

Наприклад: скоротити дріб $\frac{12-3x^2}{15x+30}$. Одержимо: $\frac{12-3x^2}{15x+30}=\frac{3\left(4-x^2\right)}{15(x+2)}=\frac{3(2-x)(2+x)}{15(2+x)}=\frac{2-x}{5}$.

2. *Зміна знаків членів дробу.* Значення дробу не зміниться, якщо одночасно змінити знаки чисельника та знаменника $\frac{A}{B}=\frac{-A}{-B}$,. Якщо ж змінити знак тільки чисельника або тільки знаменника, то й дріб змінить свій знак: $\frac{-A}{B}=\frac{A}{-B}=-\frac{A}{B}$.

3. *Зведення дробів до спільного знаменника*. Щоб звести дроби до спільного знаменника, потрібно:

1) розкласти на множники знаменники дробів;

2) скласти спільний знаменник, внісши до нього усі різні множники в найвищих степенях, в яких вони входять у розклади знаменників;

3) знайти додатковий множник для кожного дробу;

4) помножити чисельник і знаменник кожного дробу на відповідний додатковий множник.

4. *Додавання і віднімання раціональних дробів*. Щоб додати чи відняти дроби з різними знаменниками, слід спочатку звести їх до спільного знаменника.

Наприклад: знайти різницю дробів $\frac{a^2-2b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b}$. Одержимо:

$$\frac{a^2-2b}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b}=\frac{a^2-2b}{(a-b)(a+b)}-\frac{a}{a+b}=\frac{a^2-2b}{(a-b)(a+b)}-\frac{a(a-b)}{(a-b)(a+b)}=\frac{a^2-2b-a^2+ab}{(a-b)(a+b)}=\frac{-2b+ab}{a^2-b^2}.$$

5. *Множення раціональних дробів.* Добутком двох раціональних дробів є дріб, чисельник якого дорівнює добутку чисельників, а знаменник — добутку знаменників.

Наприклад: знайти добуток дробів $\frac{2a^2}{x}\cdot\frac{y}{6ab}$. Маємо: $\frac{2a^2}{x}\cdot\frac{y}{6ab}=\frac{2a^2\cdot y}{x\cdot 6ab}=\frac{ay}{3xb}$.

6. *Ділення раціональних дробів:* $\frac{A_1}{B_1}:\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_1\cdot B_2}{B_1\cdot A_2}$.

Наприклад: знайти частку дробів $\frac{16x^3}{a+7}:\frac{12xy}{a^2-49}$.

Тоді: $\frac{16x^3}{a+7}:\frac{12xy}{a^2-49}=\frac{16x^3\cdot(a^2-49)}{(a+7)\cdot 12xy}=\frac{16x^3\cdot(a-7)(a+7)}{(a+7)\cdot 12xy}=\frac{4x^2(a-7)}{3y}$.

7. *Піднесення раціонального дробу до степеня з цілим показником:* $\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$.

Наприклад: $\left(\frac{5mn^2}{3x^4}\right)^3=\frac{\left(5mn^2\right)^3}{\left(3x^4\right)^3}=\frac{5^3\cdot m^3\cdot n^6}{3^3\cdot x^{12}}=\frac{125m^3n^6}{27x^{12}}$.

Умова рівності дробу нулю. Дріб $\frac{A}{B}$ дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли його чисельник дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю, тобто $\frac{A}{B}=0\Leftrightarrow\begin{cases}A=0;\\B\neq 0.\end{cases}$

Наприклад: знайти значення змінної, за яких дріб $\frac{x^2-9}{x+3}$ дорівнює нулю. Одержимо:

$\frac{x^2-9}{x+3}=0\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-9=0;\\x+3\neq 0;\end{cases}\begin{cases}(x-3)(x+3)=0;\\x+3\neq 0;\end{cases}\begin{cases}x=3 \text{ або } x=-3;\\x\neq -3.\end{cases}$ Отже, $x=3$.

Приклад 1. Скоротити дріб $\frac{12y^3-8y^2}{28y^2-36y^4}$.

■ $\frac{12y^3-8y^2}{28y^2-36y^4}=\frac{4y^2(3y-2)}{4y^2(7-9y^2)}=\frac{3y-2}{7-9y^2}$. ■

Приклад 2. Указати допустимі значення змінної у виразі $\frac{3}{x^2+1}+\frac{x-5}{x^2-1}$.

■ Знайдемо значення змінної x, за яких знаменник кожного з дробів дорівнює нулю:

$x^2+1=0;\ x^2=-1;\ x\in\varnothing;$

$x^2-1=0;\ x^2=1;\ x=\pm 1.$ *Відповідь.* Усі числа, крім ± 1. ■

Приклад 3. Скоротити дріб $\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}$.

А	Б	В	Г	Д
a^2	$a-1$	$\frac{a-1}{a+1}$	$\frac{a^3}{2}$	a^2-1

■ $\frac{a^3+a^2-a-1}{a^2+2a+1}=\frac{a^2(a+1)-(a+1)}{(a+1)^2}=\frac{(a+1)(a^2-1)}{(a+1)^2}=\frac{(a+1)(a+1)(a-1)}{(a+1)^2}=\frac{(a+1)^2(a-1)}{(a+1)^2}=a-1.$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Записати дробом вираз $\frac{x-1}{5-x}+\frac{x+3}{2x-10}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{3}$

■ $\frac{x-1}{5-x}+\frac{x+3}{2x-10}=-\frac{x-1}{x-5}^{\backslash 2}+\frac{x+3}{2(x-5)}=\frac{-2(x-1)+(x+3)}{2(x-5)}=\frac{-2x+2+x+3}{2(x-5)}=-\frac{-x+5}{2(x-5)}=\frac{-(x-5)}{2(x-5)}=-\frac{1}{2}$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 5. Якому з виразів тотожно рівний вираз $\frac{-4x^3\cdot x^2}{5(y-2)}$?

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{4x^5}{5(2-y)}$	$\frac{4x^5}{5(2-y)}$	$\frac{4x^6}{5(2-y)}$	$-\frac{4}{5(2-y)}$	$\frac{4x^5}{5(y-2)}$

■ $\frac{-4x^3\cdot x^2}{5(y-2)}=-\frac{4x^5}{5(y-2)}=\frac{4x^5}{5(2-y)}$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 6. Визначити, за яких натуральних значень змінної n вираз $\frac{2n+12}{2n}$ набуває цілих значень. У відповідь записати їх добуток.

■ Перетворимо заданий вираз: $\frac{2n+12}{2n}=\frac{2n}{2n}+\frac{12}{2n}=1+\frac{6}{n}$. 1 — ціле число, щоб дріб $\frac{6}{n}$ був цілим числом, необхідно, щоб n було дільником числа 6, тобто щоб: $n=1$, $n=2$, $n=3$, $n=6$. Добуток цих чисел дорівнює: $1\cdot 2\cdot 3\cdot 6=36$. *Відповідь.* 36. ■

Приклад 7. Відомо, що $\frac{x}{y}=5$. Знайти значення виразу $\frac{2y-x}{x}$.

■ Перетворимо заданий вираз: $\frac{2y-x}{x}=\frac{2y}{x}-\frac{x}{x}=2\cdot\frac{y}{x}-1$. Якщо $\frac{x}{y}=5$, то $\frac{y}{x}=\frac{1}{5}$. Отже, одержимо: $2\cdot\frac{y}{x}-1=2\cdot\frac{1}{5}-1=\frac{2}{5}-1=-0{,}6$. *Відповідь.* –0,6. ■

Приклад 8. Знайти найбільше значення дробу $\frac{52}{|x|+13}$ і відповідне йому значення змінної. У відповідь записати добуток цих чисел.

■ Дріб, у якому чисельник — число (52), набуде свого найбільшого значення, якщо знаменник, зменшуючись, набуде свого найменшого значення. Відомо, що $|x|\geq 0$, тому найменше значення, якого може набути $|x|$, дорівнює 0. $0+13=13$; $\frac{52}{13}=4$. Для всіх інших значень змінної x $|x|>0$, і тоді $|x|+13>13$, а дріб $\frac{52}{|x|+13}<4$. Отже, якщо $x=0$, то найбільше значення дробу $\frac{52}{|x|+13}$ дорівнює 4. Тоді добуток цих значень дорівнює $0\cdot 4=0$. *Відповідь.* 0. ■

Приклад 9. Відомо, що $x^2+\frac{1}{x^2}=3$. Знайти значення виразу $x-\frac{1}{x}$. Якщо таких значень кілька, то у відповідь записати їх суму.

■ Піднесемо вираз $x-\frac{1}{x}$ до квадрата: $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=x^2-2+\frac{1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}-2=$ $=3-2=1$. Отже, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=1$, тоді $x-\frac{1}{x}=1$ або $x-\frac{1}{x}=-1$. Їх сума: $1+(-1)=0$. *Відповідь.* 0. ■

Приклад 10. Доведіть, що $a+2-\dfrac{a(a+2)}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}}=2$.

■ $a+2-\dfrac{a(a+2)}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\dfrac{a+1}{a}}}}=a+2-\dfrac{a(a+2)}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{a}{a+1}}}=a+2-\dfrac{a(a+2)}{1+\dfrac{1}{\dfrac{a+1-a}{a+1}}}=a+2-\dfrac{a(a+2)}{1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{a+1}}}=a+2-\dfrac{a(a+2)}{1+a+1}=a+2-2=2$ ■

Завдання 4.1–4.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

4.1. $\dfrac{8}{5a-2}+\dfrac{3}{2-5a}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{11}{2-5a}$	$\dfrac{11}{5a-2}$	$\dfrac{5}{2-5a}$	$\dfrac{5}{5a-2}$	$\dfrac{24}{5a-2}$

4.2. $\dfrac{c^2}{c^2-4}-\dfrac{c}{c-2}=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{2c}{4-c^2}$	$\dfrac{2c}{c^2-4}$	$\dfrac{c^2}{c^2-4}$	$\dfrac{c^2}{4-c^2}$	$\dfrac{c^2-c}{c^2-4}$

4.3. $\dfrac{a^2-14a+49}{a^2}\cdot\dfrac{a^6}{a^2-49}=\ldots$

А $a^4(a-7)$ Б $\dfrac{a^3(a-7)}{a+7}$ В $\dfrac{a^4(a-7)}{a+7}$ Г $-14a^5$ Д $\dfrac{a^4(a+7)}{a-7}$

4.4. $(b+20):\dfrac{b^2+20b}{3}=\ldots$

А $\dfrac{b^2}{3}$ Б $\dfrac{b(b+20)^2}{3}$ В $\dfrac{b}{3}$ Г $\dfrac{3}{b}$ Д $\dfrac{3}{b^2}$

4.5. $\dfrac{7}{ab}-\dfrac{3a+6}{a}\cdot\dfrac{5}{a+2}=\ldots$

А $\dfrac{7-15a}{ab}$ Б $\dfrac{7-15b}{ab}$ В $\dfrac{7+15b}{ab}$ Г $\dfrac{7+15a}{ab}$ Д $\dfrac{7b-15}{ab}$

4.6. $\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{a}\right):(2a+1)=\ldots$

А $\dfrac{1}{(2a+1)^2}$ Б $\dfrac{a(a+1)}{(2a+1)^2}$ В $\dfrac{(2a+1)^2}{a(a+1)}$ Г a^2+a Д $\dfrac{1}{a^2+a}$

4.7. $a+\dfrac{81}{a-9}+9=\ldots$

А $\dfrac{a-9}{a^2}$ Б $\dfrac{a^2}{a-9}$ В $\dfrac{a+90}{a-9}$ Г $\dfrac{a-9}{a+90}$ Д $\dfrac{81}{a^2-81}$

4.8. $\frac{a^2+8}{a^3-4a}\cdot\frac{7a-14}{a^2-2a+4}+\frac{a}{7}=\ldots$

А $\frac{2a}{7}$ **Б** $\frac{7a}{a+7}$ **В** $\frac{a+7}{7a}$ **Г** $\frac{a^2+49}{7a}$ **Д** $\frac{7a}{a^2+49}$

4.9. $(a^2-b^2):(a^{-1}+b^{-1})=\ldots$

А $ab(a-b)$ **Б** $\frac{1}{ab(a-b)}$ **В** $\frac{ab}{a-b}$ **Г** $\frac{a-b}{ab}$ **Д** $ab(a+b)$

4.10. $\frac{a^6+a^{13}}{a^{-6}+a^{-13}}=\ldots$

А $\frac{1}{a^{19}}$ **Б** $\frac{1}{a^{78}}$ **В** a^{78} **Г** a^{19} **Д** $\frac{1}{a^7}$

4.11. **(ЗНО–2013)** Визначити m із співвідношення $\frac{m}{2}=\frac{3}{n}$, де $n\neq 0$.

А $m=6n$ **Б** $m=\frac{6}{n}$ **В** $m=\frac{2n}{3}$ **Г** $m=\frac{3}{2n}$ **Д** $m=\frac{n}{6}$

4.12. Якщо $\frac{1}{a}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}$, то $c=\ldots$

А $a-b$ **Б** $\frac{ab}{b-a}$ **В** $\frac{a-b}{ab}$ **Г** $\frac{ab}{a-b}$ **Д** ab

4.13. $\frac{a+b}{b}=4$. Знайти значення виразу $\frac{b}{a}$.

А $\frac{1}{4}$ **Б** 4 **В** 3 **Г** $\frac{1}{3}$ **Д** 5

4.14. $a+a^{-1}=b$. Знайти значення виразу a^2+a^{-2}.

А $\frac{1}{b^2-2}$ **Б** $\frac{1}{b^2}$ **В** b^2-2 **Г** $2b-1$ **Д** b^2+2

4.15. Якщо $y=\frac{x^2}{z}$ $(x\neq 0, z\neq 0)$, то $\frac{1}{x^2}=\ldots$

А $\sqrt{zy}$ **Б** $\frac{z}{y}$ **В** $\frac{y}{z}$ **Г** yz **Д** $\frac{1}{yz}$

4.16. $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+a}}=\ldots$

А $\frac{a+3}{2}$ **Б** $\frac{2a+3}{a+2}$ **В** $\frac{2a+1}{a+2}$ **Г** $\frac{a+2}{2a+1}$ **Д** $\frac{2a+1}{2a+2}$

4.17. $\frac{a+a^2+\ldots+a^{2020}}{a^{-1}+a^{-2}+\ldots+a^{-2020}}=\ldots$

А a^{2020} **Б** a^{2021} **В** $\frac{1}{a^{2021}}$ **Г** $\frac{1}{a^{2019}}$ **Д** a^{2019}

4.18. $\frac{3}{1-a^3}+\frac{3}{1+a^3}+\frac{6}{1+a^6}+\frac{12}{1+a^{12}}+\frac{24}{1+a^{24}}+\frac{48}{1+a^{48}}=\ldots$

А $\frac{96}{1-a^{96}}$ **Б** $\frac{1-a^{96}}{96}$ **В** $\frac{96}{1+a^{48}}$ **Г** $\frac{96}{1+a^{96}}$ **Д** $\frac{48}{1-a^{48}}$

4.19. $\frac{a}{b}=2$. Знайти значення виразу $\frac{4b^2+a^2}{a^2-ab}$.

А -16 Б 8 В 4 Г -8 Д -4

4.20. Обчислити: $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{5\cdot6}+\frac{1}{6\cdot7}+\frac{1}{7\cdot8}=\ldots$

А $-\frac{7}{8}$ Б $\frac{1}{8}$ В $\frac{1}{56}$ Г $\frac{7}{8}$ Д $-\frac{1}{8}$

Завдання 4.21–4.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

4.21. Установити відповідність між виразами (1–3) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\frac{a^2-b^2}{a+b}\cdot(a-b)$

2 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}-\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

3 $\frac{a^3+b^3}{a+b}+3ab$

А 0

Б $(a+b)^2$

В $4a^3$

Г $(2a+1)^2-1$

Д $a^2-2ab+b^2$

4.22. Установити відповідність між дробовими виразами (1–3) та тотожно рівними їх нескоротними дробами (А–Д).

1 $\frac{ay-ax}{by-bx}$ 2 $\frac{ax-bx}{a^2-ab}$ 3 $\frac{bx-by}{ay-ax}$

А $-\frac{a}{b}$ Б $-\frac{b}{a}$ В $\frac{a}{b}$ Г $\frac{x}{a}$ Д $-\frac{a}{x}$

4.23. Установити відповідність між різницями (1–3) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}$

2 $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$

3 $\frac{a}{b-a}-\frac{b}{a+b}$

А $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$

Б $\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-b^2}$

В $\frac{b^2+2ab-a^2}{a^2-b^2}$

Г $\frac{b^2-2ab-a^2}{a^2-b^2}$

Д $\frac{a^2-2ab-b^2}{a^2-b^2}$

4.24. Установити відповідність між виразами (1–3) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $a^2-\frac{1}{a}$

2 $1-\frac{1}{a^2}$

3 $\frac{1}{a^2}-1$

А $\frac{1-a^2}{a}$

Б $\frac{1-a^2}{a^2}$

В $\frac{1-a^3}{a}$

Г $\frac{a^2-1}{a^2}$

Д $\frac{a^3-1}{a}$

4.25. Установити відповідність між частками (1–3) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right):\frac{2}{a-1}$ 2 $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{2}{a+1}$ 3 $\left(a+\frac{a}{a-1}\right):a^2$

А $a+1$ Б $a-1$ В $\frac{1}{a+1}$ Г $\frac{1}{a-1}$ Д $\frac{1}{1-a}$

4.26. Установити відповідність між виразами (1–3) та тотожно рівними їм дробами (А–Д).

1 $\frac{1}{1+\frac{1}{a}}$

2 $\frac{1}{1+\frac{1}{2a+1}}$

3 $\frac{1}{1+\frac{1}{1+a}}$

А $\frac{2a+1}{2(a+1)}$

Б $\frac{2a+1}{a+1}$

В $\frac{a+1}{2a+1}$

Г $\frac{a}{a+1}$

Д $\frac{a+1}{a+2}$

Розв'яжіть завдання 4.27–4.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.

4.27. Спростити вираз $\left(\frac{b}{9a-a^3}-\frac{1}{a^2+3a}+\frac{3}{a^2b-9b}\right):\frac{b^2-6b+9}{a^3b-9ab}$ і знайти його значення, якщо $a=3$, $b=2$.

4.28. Спростити вираз $\left(1-\frac{1}{1-a}\right):\left(1-\frac{1-2a^2}{1-a}+a\right)$ і знайти його значення, якщо $a=2$.

4.29. Спростити вираз $\frac{a^2+a-ab-b}{a^2+a+ab+b}:\frac{a^2-a-ab+b}{a^2-a+ab-b}$.

4.30. Спростити вираз $\left(\frac{6}{a^2+5a+4}-\frac{2}{a^2+3a+2}+\frac{a}{a^2+6a+8}\right)^2\cdot\frac{a^2+4a+4}{2}$.

4.31. Спростити вираз $\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\right):\left(1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}\right)$ і знайти його значення, якщо $a=5$.

4.32. Спростити вираз $\frac{\left(ab^{-1}+a^{-1}b+1\right)\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-\left(ab^{-1}+a^{-1}b\right)}$. Знайти його значення, якщо $a=4$, $b=5$.

4.33. Спростити вираз $\frac{a}{a^2-1}+\frac{a^2+a-1}{a^3-a^2+a-1}+\frac{a^2-a-1}{a^3+a^2+a+1}-\frac{2a^3}{a^4-1}$ і знайти його значення, якщо $a=\frac{3}{2}$.

4.34. Спростити вираз $\left(1+\frac{a^{-n}+b^{-n}}{a^{-n}-b^{-n}}\right)^{-2}$ і знайти його значення, якщо $n=1$, $a=2b$.

4.35. Спростити вираз $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b+c}{(c-a)(a-b)}+\frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$.

4.36. Спростити вираз $1-\dfrac{a}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}}$ і знайти його значення, якщо $a=8$.

4.37. Спростити вираз $\dfrac{(a+b+c)^2+(a-b+c)^2+(a+b-c)^2+(b+c-a)^2}{a^2+b^2+c^2}$.

4.38. Спростити вираз $\dfrac{1}{a(a+3)}+\dfrac{1}{(a+3)(a+6)}+\dfrac{1}{(a+6)(a+9)}+\dfrac{1}{(a+9)(a+12)}+\dfrac{1}{(a+12)(a+15)}$ і знайти його значення, якщо $a=5$.

4.39*. Спростити вираз $\dfrac{x^3y-xy^3+y^3z-yz^3+z^3x-zx^3}{x^2y-xy^2+y^2z-yz^2+z^2x-zx^2}$ і знайти його значення, якщо $x=1$, $y=0{,}1$, $z=0{,}01$.

4.40. Спростити вираз $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}$ і знайти його значення, якщо: **1.** $a=3$; **2.** $a=3^{-1}$.

Тема 5. Ірраціональні вирази

зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— означення кореня n-го степеня та арифметичного кореня n-го степеня; властивості коренів;
— означення степеня з натуральним, цілим та раціональним показниками, їх властивості;
— означення тотожно рівних виразів, тотожного перетворення виразу, тотожності;
— виконання тотожних перетворень раціональних виразів та знаходження їх числових значень;
— означення області допустимих значень змінних, виразу зі змінними.

Квадратним коренем з числа a називають таке число, квадрат якого дорівнює a.

Наприклад, для числа 100 квадратними коренями є числа 10 та –10, бо $10^2 = 100$ і $(-10)^2 = 100$.

Арифметичним квадратним коренем з числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a, і позначають $\sqrt{a}$. Вираз $\sqrt{a}$ має зміст, якщо $a \geq 0$.

Наприклад, арифметичним квадратним коренем з числа 36 є $\sqrt{36} = 6$. Вираз $\sqrt{-100}$ не існує.

Справедливі рівності:

1. $\sqrt{a} = b$, якщо $b^2 = a$, $b \geq 0$. Наприклад, $\sqrt{25} = 5$, бо $5^2 = 25$ і $25 \geq 0$.

2. $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \geq 0$. Наприклад, $\left(\sqrt{36}\right)^2 = 36$.

3. $\sqrt{a^2} = |a|$, $a \in \boldsymbol{R}$. Наприклад, $\sqrt{7^2} = |7| = 7$, $\sqrt{(-7)^2} = |-7| = 7$.

Властивості арифметичного квадратного кореня

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$. Наприклад, $\sqrt{25 \cdot 16} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{16} = 5 \cdot 4 = 20$.

2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, якщо $a \geq 0$, $b > 0$. Наприклад, $\sqrt{\frac{144}{25}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{25}} = \frac{12}{5} = 2{,}4$.

3. $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$. Наприклад, $\sqrt{3^4} = |3^2| = 9$.

4. *Винесення множника з-під знака кореня.* $\sqrt{b^2 a} = |b|\sqrt{a} = \begin{cases} b\sqrt{a}, \text{ якщо } b \geq 0; \\ -b\sqrt{a}, \text{ якщо } b < 0. \end{cases}$

Наприклад, $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = |3|\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$; $\sqrt{(-5)^2 \cdot 3} = |-5|\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

5. *Внесення множника під знак кореня.* $b\sqrt{a} = \begin{cases} \sqrt{b^2 a}, \text{ якщо } b \geq 0; \\ -\sqrt{b^2 a}, \text{ якщо } b < 0. \end{cases}$

Наприклад, $2\sqrt{3} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{12}$; $-4\sqrt{2} = -\sqrt{4^2 \cdot 2} = -\sqrt{16 \cdot 2} = -\sqrt{32}$.

Корінь n-го степеня

Коренем n-го степеня, де $n \in N$, $n > 1$ з числа a називають таке число, n-й степінь якого дорівнює a. Корінь другого степеня прийнято називати квадратним коренем, а корінь третього степеня — *кубічним коренем*. Наприклад, коренями четвертого степеня з числа 625 є числа –5 та 5 (бо $(-5)^4 = 625$ і $5^4 = 625$); кубічним коренем з числа –27 є число –3 (бо $(-3)^3 = -27$). Якщо n — непарне натуральне число ($n > 1$), то існує єдиний корінь n-го степеня з довільного числа a.

$\sqrt[n]{a}$ — корінь, n — показник, a — підкореневий вираз. Наприклад, $\sqrt[5]{32} = 2$, оскільки $2^5 = 32$; $\sqrt[4]{81} = 3$, оскільки $3^4 = 81$; $\sqrt[3]{-125} = -5$, бо $(-5)^3 = -125$.

Арифметичним коренем n-го степеня з невід'ємного числа a називають таке невід'ємне число, n-й степінь якого дорівнює a, і позначають $\sqrt[n]{a}$. Якщо число n непарне, то запис $\sqrt[n]{a}$ використовують і для від'ємних значень a і він означає корінь n-го степеня з числа a (але не арифметичний). Наприклад, $\sqrt[3]{729} = 3$ — арифметичний корінь; $\sqrt[3]{-243} = -3$ — не арифметичний корінь.

Показники коренів виду $n = 2k + 1$ використовують для позначення будь-яких коренів. Корені $\sqrt[1]{a}$, $\sqrt[3]{a}$, ..., $\sqrt[2k+1]{a}$ існують для будь-яких $a \in \boldsymbol{R}$. Показники коренів виду $n = 2k$ використовують для

позначення арифметичних коренів. Корені $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ..., $\sqrt[2k]{a}$ існують лише для $a \geq 0$. Показником кореня може бути будь-яке натуральне число більше за 1.

Властивості арифметичних коренів n-го степеня.

1. $\sqrt[n]{0} = 0$. Наприклад, $\sqrt[6]{0} = 0$; $\sqrt[25]{0} = 0$.

2. $\sqrt[n]{1} = 1$. Наприклад, $\sqrt[3]{1} = 1$; $\sqrt[8]{1} = 1$.

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, до того ж, $\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1} = a$ для будь-яких значень a, $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k} = a$ лише для $a \geq 0$. Наприклад, $\left(\sqrt[4]{3}\right)^4 = 3$; $\left(\sqrt[3]{-3}\right)^3 = -3$.

- $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a$. Наприклад, $\sqrt[7]{2^7} = 2$; $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$;
- $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$. Наприклад, $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$;
- $\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0; \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$ Наприклад, $\sqrt[6]{2^6} = |2| = 2$; $\sqrt[4]{(-3)^4} = |-3| = 3$.

4. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ для всіх значень a з області визначення виразу $\sqrt[n]{a}$, m — ціле, n — натуральне. Наприклад, $\left(\sqrt[7]{2}\right)^5 = \sqrt[7]{2^5} = \sqrt[7]{32}$.

5. Для кореня непарного степеня (a та b — довільні): $\sqrt[2k+1]{ab} = \sqrt[2k+1]{a} \cdot \sqrt[2k+1]{b}$.

Наприклад, $\sqrt[3]{8000} = \sqrt[3]{8 \cdot 1000} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{10^3} = 2 \cdot 10 = 20$. Звідси можна одержати:

$\sqrt[2k+1]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[2k+1]{a}}{\sqrt[2k+1]{b}}$, якщо $b \neq 0$. Наприклад, $\sqrt[3]{\frac{-64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{-4}{5} = -\frac{4}{5}$.

6. Для кореня парного степеня: $\sqrt[2k]{ab} = \sqrt[2k]{|a|} \cdot \sqrt[2k]{|b|}$. Наприклад, $\sqrt[4]{1296} = \sqrt[4]{16 \cdot 81} =$

$= \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$; $\sqrt[4]{(-16) \cdot (-81)} = \sqrt[4]{|-16|} \cdot \sqrt[4]{|-81|} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{81} = 2 \cdot 3 = 6$;

$\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} = \sqrt{\left|1-\sqrt{2}\right|} \cdot \sqrt{\left|1-\sqrt{5}\right|} = \sqrt{\sqrt{2}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{5}-1}$.

7. Винесення множника з-під знака кореня.

- для кореня непарного степеня: $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b} = a \cdot \sqrt[2k+1]{b}$.

  Наприклад, $\sqrt[3]{(-5)^3 \cdot 2} = -5 \cdot \sqrt[3]{2}$; $\sqrt[5]{\left(1-\sqrt{3}\right)^5 \cdot 7} = \left(1-\sqrt{3}\right) \cdot \sqrt[5]{7}$;

- для кореня парного степеня: $\sqrt[2k]{a^{2k}b} = |a| \cdot \sqrt[2k]{b}$.

  Наприклад, $\sqrt[6]{(-2)^6 \cdot 5} = |-2| \cdot \sqrt[6]{5} = 2\sqrt[6]{5}$; $\sqrt[4]{\left(1-\sqrt{2}\right)^4 \cdot 3} = \left|1-\sqrt{2}\right| \cdot \sqrt[4]{3} = \left(\sqrt{2}-1\right) \cdot \sqrt[4]{3}$.

8. Внесення множника під знак кореня:

- для кореня непарного степеня: $a\sqrt[2k+1]{b} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}b}$.

  Наприклад, $2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$; $\left(1-\sqrt{7}\right) \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{\left(1-\sqrt{7}\right)^3 \cdot 5}$;

- для кореня парного степеня: $a \cdot \sqrt[2k]{b} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a^{2k}b}, \text{ якщо } a \geq 0; \\ -\sqrt[2k]{a^{2k}b}, \text{ якщо } a < 0, \end{cases}$ де $b \geq 0$.

  Наприклад, $2\sqrt[4]{5} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = \sqrt[4]{80}$; $\left(1-\sqrt{5}\right) \cdot \sqrt[6]{7} = -\sqrt[6]{\left(1-\sqrt{5}\right)^6 \cdot 7}$.

9. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$ для всіх значень a з області визначення виразу $\sqrt[nk]{a}$. Наприклад, $\sqrt{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[6]{5}$.

10. Якщо $a \geq 0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$.

Степенем додатного числа a з раціональним показником $\frac{m}{n}$, де m — ціле число, а n — натуральне ($n > 1$), називають корінь n-го степеня з числа a^m, тобто $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Наприклад, $\sqrt[3]{2^5} = 2^{\frac{5}{3}}$.

Приклад 1. Спростити вираз $15\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{160}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{10}$	$-\sqrt{10}$	11	$-2\sqrt{5}$	$-37\sqrt{2}$

■ $15\sqrt{\frac{2}{5}} - \sqrt{160} = 3\sqrt{\frac{5^2 \cdot 2}{5}} - \sqrt{16 \cdot 10} = 3\sqrt{10} - 4\sqrt{10} = -\sqrt{10}$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 2. Спростити вираз $\sqrt[3]{18z^4} \cdot \sqrt[3]{12z^5}$.

■ $\sqrt[3]{18z^4} \cdot \sqrt[3]{12z^5} = \sqrt[3]{18z^4 \cdot 12z^5} = \sqrt[3]{216z^9} = \sqrt[3]{(6z^3)^3} = 6z^3$. ■

Приклад 3. Обчислити значення виразу $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[10]{64}$.

■ $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[10]{64} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[10]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3} = \sqrt[3]{2^5} = 2$. ■

Приклад 4. Винести множник за знак кореня: **а)** $\sqrt[3]{54}$; **б)** $\sqrt{3a^9}$; **в)** $\sqrt[6]{5x^6y}$, якщо $x < 0$.

■ **а)** $\sqrt[3]{54} = \sqrt[3]{2 \cdot 27} = 3 \cdot \sqrt[3]{2}$; **б)** $\sqrt{3a^9} = \sqrt{3a \cdot (a^4)^2} = a^4 \cdot \sqrt{3a}$;

в) якщо $x < 0$, то $\sqrt[6]{5x^6y} = |x| \cdot \sqrt[6]{5y} = -x \cdot \sqrt[6]{5y}$. ■

Приклад 5. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу: **а)** $\frac{1}{\sqrt{5}}$; **б)** $\frac{6}{\sqrt[3]{2}}$; **в)** $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$.

■ **а)** $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$; **б)** $\frac{6}{\sqrt[3]{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{6 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{2} = 3 \cdot \sqrt[3]{4}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+3) \cdot (\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$. ■

Приклад 6. Знайти x із пропорції $\sqrt{a\sqrt[6]{a}} : \sqrt[6]{\sqrt{a}} = \left(\sqrt{a^{-3}}\right)^{-1} : x$.

А	Б	В	Г	Д
a^2	a	$1/a$	$\sqrt{a}$	$\sqrt[6]{\sqrt{a}}$

■ $x = \frac{\sqrt[6]{\sqrt{a}} \cdot \left(\sqrt{a^{-3}}\right)^{-1}}{\sqrt{a\sqrt[6]{a}}} = \frac{\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}} \cdot \left(\left(a^{-3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}{\sqrt{\sqrt[6]{a^7}}} = \frac{a^{\frac{1}{12}} \cdot a^{\frac{3}{2}}}{\left(a^{\frac{7}{6}}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{1}{12}+\frac{3}{2}}}{a^{\frac{7}{12}}} = a^{\frac{1}{12}+\frac{3}{2}-\frac{7}{12}} = a^{\frac{1+18-7}{12}} = a$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 7. Спростити вираз $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$.

А	Б	В	Г	Д
$7\sqrt{2}$	$2\sqrt{7}$	$\sqrt{14}$	$-2{,}8$	$-1{,}8$

■ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{7}) - \sqrt{7}(\sqrt{2}-\sqrt{7})}{(\sqrt{2}-\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7})} = \frac{2+\sqrt{14}-\sqrt{14}+7}{2-7} = \frac{9}{-5} = -1{,}8$. *В-дь.* **Д.** ■

Приклад 8. Знайти значення виразу $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}$.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{7}-5$	$5-2\sqrt{7}$	$1+2\sqrt{7}$	1	5

■ $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}+\sqrt{(3-\sqrt{7})^2}=|2-\sqrt{7}|+|3-\sqrt{7}|=\sqrt{7}-2+3-\sqrt{7}=1$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 9. Спростити вираз $\left(\dfrac{81x^{-4}y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{8}{3}}}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{8}{27}x^3yz^2$	$\frac{3}{2}x^2z^2$	$\frac{27}{8}x^3yz^2$	$\frac{3}{2x^3y}$	$\frac{81}{16}xyz^2$

■ $\left(\dfrac{81x^{-4}y^{-\frac{4}{3}}z^{-\frac{8}{3}}}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}=\dfrac{\left(3^4\right)^{-\frac{3}{4}}x^{-4\left(-\frac{3}{4}\right)}y^{-\frac{4}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)}z^{-\frac{8}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)}}{\left(2^4\right)^{-\frac{3}{4}}}=\dfrac{3^{-3}x^3yz^2}{2^{-3}}=\dfrac{2^3x^3yz^2}{3^3}=\dfrac{8}{27}x^3yz^2$. *В-дь.* **А.** ■

Приклад 10. Спростити вираз $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{5+2\sqrt{2}}$	$\sqrt{2}+1$

■ $\sqrt{2+\sqrt{9+4\sqrt{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{8+1+2\cdot2\sqrt{2}}}=\sqrt{2+\sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2+2\cdot2\sqrt{2}\cdot1+1^2}}=\sqrt{2+\sqrt{\left(2\sqrt{2}+1\right)^2}}=$

$=\sqrt{2+2\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot1+1^2}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\sqrt{2}+1$. *Відповідь.* **Д.** ■

Приклад 11. Виконати дії: $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}+3}{\sqrt[4]{a}-3}+\dfrac{\sqrt[4]{a}-3}{\sqrt[4]{a}+3}\right):\dfrac{3\sqrt{a}+27}{9-\sqrt{a}}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}$	$\frac{-2\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}$	$\frac{\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}$

■ $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a}+3}{\sqrt[4]{a}-3}+\dfrac{\sqrt[4]{a}-3}{\sqrt[4]{a}+3}\right):\dfrac{3\sqrt{a}+27}{9-\sqrt{a}}=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}+3\right)^2+\left(\sqrt[4]{a}-3\right)^2}{\left(\sqrt[4]{a}-3\right)\left(\sqrt[4]{a}+3\right)}\cdot\dfrac{9-\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+27}=$

$=\dfrac{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2+2\sqrt[4]{a}\cdot3+3^2+\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-2\sqrt[4]{a}\cdot3+3^2}{\left(\sqrt[4]{a}\right)^2-3^2}\cdot\dfrac{9-\sqrt{a}}{3\left(\sqrt{a}+9\right)}=\dfrac{2\sqrt{a}+18}{\sqrt{a}-9}\cdot\dfrac{-\left(\sqrt{a}-9\right)}{3\left(\sqrt{a}+9\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{a}+9\right)\cdot(-1)}{3\left(\sqrt{a}+9\right)}=-\dfrac{2}{3}$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 12. Спростити вираз $\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$1-\sqrt[8]{a}$	інша відповідь	$1+\sqrt[64]{a}$	$1-a$	$1-\sqrt[64]{a}$

■ $\left(1+\sqrt[32]{a}\right)\left(1-\sqrt[32]{a}\right)=1-\sqrt[16]{a}$; $\left(1+\sqrt[16]{a}\right)\left(1-\sqrt[16]{a}\right)=1-\sqrt[8]{a}$; $\left(1+\sqrt[8]{a}\right)\left(1-\sqrt[8]{a}\right)=1-\sqrt[4]{a}$; $\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)=1-\sqrt{a}$;

$\left(1+\sqrt{a}\right)\left(1-\sqrt{a}\right)=1-a$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 13. Установити відповідність між числами (1–3) та проміжками (А–Д), до яких вони належать.

1 $3\sqrt{5}$	А [4; 5]
2 $2\sqrt{8}$	Б [7; 8]
3 $5\sqrt{2}$	В [5; 6]
	Г [6; 7]
	Д [8; 9]

■ 1) $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45}$; $\sqrt{36}<\sqrt{45}<\sqrt{49}$; $6<\sqrt{45}<7$; $\sqrt{45}\in[6;7]$, тому **1Г**;

2) $2\sqrt{8}=\sqrt{2^2\cdot 8}=\sqrt{32}$; $\sqrt{25}<\sqrt{32}<\sqrt{36}$; $5<\sqrt{32}<6$; $\sqrt{32}\in[5;6]$, тому **2В**;

3) $5\sqrt{2}=\sqrt{5^2\cdot 2}=\sqrt{50}$; $\sqrt{49}<\sqrt{50}<\sqrt{64}$; $7<\sqrt{50}<8$; $\sqrt{50}\in[7;8]$, тому **3Б**.

Відповідь.

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2			⊠		
3		⊠			

■

Завдання 5.1–5.25 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

5.1. Обчислити: $\sqrt{6400}+\sqrt{49}+\sqrt{0{,}04}+\sqrt{0{,}0025}$.

А	Б	В	Г	Д
807,025	870,25	87,0205	87,25	870,025

5.2. Обчислити: $\sqrt{1\frac{1}{36}}\cdot\sqrt{1\frac{12}{37}}+\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}$.

А	Б	В	Г	Д
$26\frac{1}{6}$	$26\frac{13}{36}$	$5\frac{1}{6}$	$5\frac{5}{6}$	$6\frac{1}{6}$

5.3. Знайти значення виразу $\sqrt{15^2}+\sqrt{(-13)^2}+\left(\sqrt{3}\right)^2$.

А 5 Б 31 В 37 Г 32 Д 42

5.4. Спростити вираз $10\sqrt{2}+\sqrt{8}+\sqrt{50}$.

А $17\sqrt{2}$ Б $39\sqrt{2}$ В $37\sqrt{2}$ Г $19\sqrt{2}$ Д $24\sqrt{2}$

5.5. Знайти значення виразу $\sqrt{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}-\sqrt{7}$.

А -3 Б $3-2\sqrt{7}$ В $2-\sqrt{7}$ Г 3 Д $-3-2\sqrt{7}$

5.6. Обчислити: $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[3]{5}-\sqrt[4]{16}$.

А 1 Б 2 В 3 Г 4 Д 5

5.7. Указати правильну рівність.

А $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[6]{18}$ Б $\sqrt[3]{\sqrt[3]{11}}=\sqrt[9]{11}$ В $\left(\sqrt[3]{10}\right)^5=\sqrt[15]{10}$ Г $\sqrt[10]{(-2)^{10}}=-2$ Д $\sqrt[9]{(-3)^9}=-3$

5.8. **(ЗНО–2013)** Обчислити $\frac{2^6\cdot 5^6}{10^4}$.

А $10^{1,5}$ Б 10^2 В 10^8 Г 10^9 Д 10^{10}

5.9. Обчислити: $9^{\frac{3}{2}}+64^{-\frac{1}{3}}$.

А 27,25 Б 31 В 278 Г 27 Д $-7\frac{5}{6}$

5.10. Обчислити: $\sqrt[3]{5^6 \cdot 2^9}$.

А 200 Б 8000 В 1600 Г 400 Д 800

5.11. Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{3}{\sqrt{7}-1}$.

А $\frac{\sqrt{7}+1}{2}$ Б $\frac{\sqrt{7}-2}{2}$ В $2\left(\sqrt{7}+1\right)$ Г $3\left(\sqrt{7}+1\right)$ Д $\frac{\sqrt{7}-1}{2}$

5.12. Внести множники під знаки коренів: $a\sqrt{-a}+b\sqrt{b}$.

А $\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}$ Б $\sqrt{-a^3}+\sqrt{-b^3}$ В $-\sqrt{-a^3}-\sqrt{b^3}$ Г $\sqrt{-a^3}+\sqrt{b^3}$ Д $-\sqrt{-a^3}+\sqrt{b^3}$

5.13. $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}} = \ldots$

А $\sqrt[3]{a}$ Б $\sqrt[9]{a^8}$ В $\sqrt[8]{a}$ Г $\sqrt[8]{a^3}$ Д $\sqrt[3]{a^2}$

5.14. Спростити вираз $\sqrt[3]{\frac{a^4\sqrt[3]{b^9}}{a^{-2}}}$.

А $-a^2b$ Б $-ab$ В a^2b Г a^2b^2 Д ab^2

5.15. Спростити вираз $\sqrt[3]{\frac{x^9y^6z^3}{4\cdot(-2)^4}}$.

А $\frac{x^3y^2z}{2}$ Б $\frac{x^6y^3}{4}$ В $\frac{x^3y^2z}{4}$ Г $\frac{x^6y^3}{2}$ Д $\frac{x^3y^2}{4z}$

5.16. Знайти x, якщо $\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} = 2^x$.

А –1,125 Б –0,875 В –0,625 Г –0,375 Д –0,125

5.17. $\sqrt{\left(-2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} = \ldots$

А 0 Б 4 В –4 Г $4+2\sqrt{5}$ Д $2\sqrt{5}$

5.18. Знайти значення виразу $\sqrt[4]{(x-3)^4}+\sqrt[4]{(x-7{,}5)^4}$, якщо $x=\sqrt{10}$.

А –4,5 Б $2\sqrt{10}-10{,}5$ В $2x-10{,}5$ Г 4,5 Д 3,5

5.19. $\sqrt{7+2\sqrt{10}} = \ldots$

А $\sqrt{10}$ Б $3{,}5+\sqrt{10}$ В $\sqrt{3}+2$ Г $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ Д $1+\sqrt{6}$

5.20. Звільнитись від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{2}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{2}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}\right)$	$\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{49}+2\sqrt[3]{14}+\sqrt[3]{4}\right)$

5.21. Обчислити: $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}-\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

А 7 Б $3\sqrt{5}$ В $\frac{13+3\sqrt{5}}{4}$ Г 3,5 Д $-1-1{,}5\sqrt{5}$

5.22. Знайти значення виразу $\sqrt{71-16\sqrt{7}}+\sqrt{11-4\sqrt{7}}$.

А $10-2\sqrt{7}$ Б –10 В –6 Г 10 Д 6

5.23. Обчислити: $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$.

А 1 Б 2 В 3 Г 4 Д 5

5.24. Обчислити: $\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{4+\sqrt{9-4\sqrt{2}}}$.

А 1 Б 2 В 3 Г 4 Д $2\sqrt{2}$

5.25. Обчислити: $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{80}+\sqrt{81}}$.

А 1 Б 3 В 5 Г 8 Д 9

Завдання 5.26–5.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

5.26. Установити відповідність між заданими виразами (1–3) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}$

2 $\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-2\right)^3}$

3 $-\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}\right)^4$

А $2+\sqrt{2}$

Б $-2-\sqrt{2}$

В $2-\sqrt{2}$

Г $6-4\sqrt{2}$

Д $\sqrt{2}-2$

5.27. Установити відповідність між заданими виразами (1–3) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sqrt[4]{16a^8b^4}$, $b<0$

2 $\sqrt[3]{16a^3b^6}$

3 $\sqrt{4a^4b^4}$

А $2|a|b^2$

Б $2a^2b^2$

В $-2a^2b$

Г $2ab^2$

Д $2\sqrt[3]{2}ab^2$

5.28. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $(-27)^{\frac{1}{3}}$

2 $(-27)^{-\frac{1}{3}}$

3 $27^{-\frac{1}{3}}$

А $-\frac{1}{3}$

Б $\frac{1}{3}$

В -3

Г 3

Д 6

5.29. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sqrt{18}-\sqrt{32}+\sqrt{72}$

2 $\sqrt{72}+\sqrt{50}-\sqrt{162}$

3 $\sqrt{200}-\sqrt{8}-\sqrt{50}$

А $2\sqrt{2}$

Б $3\sqrt{2}$

В $4\sqrt{2}$

Г $5\sqrt{2}$

Д $6\sqrt{2}$

5.30. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sqrt{\left(-1-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(4-\sqrt{5}\right)^2}$	А 1
2 $\sqrt{\left(1-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(-1-\sqrt{5}\right)^2}$	Б $\sqrt{5}$
3 $\sqrt{\left(\sqrt{5}-2\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-3\right)^2}$	В 4
	Г $2\sqrt{5}$
	Д 5

5.31. Установити відповідність між виразами (1–3) та тотожно рівними їм степенями (А–Д).

1 $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$	А $a^{\frac{7}{16}}$
2 $\sqrt{a\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$	Б $a^{\frac{9}{16}}$
3 $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt[4]{a}}}$	В $a^{\frac{11}{16}}$
	Г $a^{\frac{13}{16}}$
	Д $a^{\frac{15}{16}}$

5.32. Установити відповідність між виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\sqrt{4-2\sqrt{3}}-\sqrt{3}$	А –2
2 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}$	Б –1
3 $\sqrt{12-6\sqrt{3}}+\sqrt{3}$	В 1
	Г 2
	Д 3

Розв'яжіть завдання 5.33–5.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

5.33. Обчислити: $\left(\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{64}\right)\left(\sqrt[3]{27}-\sqrt[3]{64}\right)$.

5.34. Обчислити: $\left(\sqrt[3]{49+20\sqrt{6}}+\sqrt[3]{5+2\sqrt{6}}\right)\sqrt[3]{5-2\sqrt{6}}$.

5.35. Обчислити: $\frac{53}{8-\sqrt{11}}+\frac{2}{\sqrt{13}+\sqrt{11}}-\frac{9}{\sqrt{13}+2}$.

5.36. Спростити вираз $\left(\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}-x^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}-1}{x^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{x^{\frac{1}{2}}+1}{x^{\frac{1}{2}}-1}\right)$.

5.37. Спростити вираз $\left(\frac{a^{0,5}+2}{a^{0,5}-2}+\frac{a^{0,5}-2}{a^{0,5}+2}-\frac{16}{a-4}\right)^4$.

5.38. Обчислити: $\sqrt{27+2\sqrt{50}}\cdot\left(5-\sqrt{2}\right)$.

5.39. Спростити вираз $\left(\sqrt{a}+\frac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):\left(\frac{a}{\sqrt{ab}+b}+\frac{b}{\sqrt{ab}-a}-\frac{a+b}{\sqrt{ab}}\right)$ і знайти його значення, якщо:

1) $a=2\frac{1}{4}$; $b=25$; 2) $a=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$; $b=\left(\frac{2}{11}\right)^{-2}$.

5.40. Обчислити: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

5.41. Обчислити: $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

5.42. Спростити вираз $\sqrt[4]{28-16\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

Тема 6. Показникові та логарифмічні вирази

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— означення та властивості логарифма;
— основна логарифмічна тотожність;
— виконувати тотожні перетворення показникових і логарифмічних виразів;
— доводити тотожності.

Показникові співвідношення

Показникові тотожності.

1. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$. Наприклад, $3^{x+2} = 3^x \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^x$.

2. $a^{x-y} = a^x : a^y$. Наприклад, $2^{5-x} = 2^5 : 2^x = \frac{32}{2^x}$.

3. $a^{xy} = (a^x)^y = (a^y)^x$. Наприклад, $7^{2x} = (7^2)^x = 49^x$; $\left(\frac{27}{64}\right)^x = \left(\frac{3^3}{4^3}\right)^x = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{3x}$.

4. $a^x \cdot b^x = (ab)^x$. Наприклад, $2^x \cdot 3^x = (2 \cdot 3)^x = 6^x$.

5. $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$, якщо $b \neq 0$. Наприклад, $\frac{3^x}{5^x} = \left(\frac{3}{5}\right)^x$.

6. $a^0 = 1$, якщо $a \neq 0$. Наприклад, $7^0 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 0{,}09^0 = 1$.

7. $a^1 = a$. Наприклад, $5^1 = 5$; $\left(\frac{1}{7}\right)^1 = \frac{1}{7}$.

8. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, якщо $a \neq 0$. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$. Наприклад, $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$; $\left(\frac{4}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{4}\right)^3$.

9. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, якщо $a > 0$, $n \in N$. Наприклад, $7^{\frac{n-4}{n}} = \sqrt[n]{7^{n-4}}$.

Логарифм

Логарифмом додатного числа b за основою a ($a > 0$, $a \neq 1$) називають показник степеня, до якого треба піднести основу a, щоб отримати число b. Тобто якщо $a^x = b$ і $a > 0$, $a \neq 1$, то $\log_a b = x$ і, навпаки, якщо $\log_a b = x$, то $a^x = b$. Наприклад, $\log_3 81 = 4$, бо $3^4 = 81$.

Логарифм за основою 10 називають *десятковим*. Записують: $\log_{10} x = \lg x$.

Логарифм за основою $e \approx 2{,}718281828459045...$ називають *натуральним*. Записують: $\log_e x = \ln x$.

Логарифмічні тотожності.

1. Основна логарифмічна тотожність: $a^{\log_a b} = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Наприклад, $3^{\log_3 5} = 5$; $2^{-\log_2 5} = \frac{1}{2^{\log_2 5}} = \frac{1}{5}$; $4^{\log_2 6} = 2^{2\log_2 6} = \left(2^{\log_2 6}\right)^2 = 6^2 = 36$.

2. $\log_a 1 = 0$, оскільки $a^0 = 1$. Наприклад, $\log_{13} 1 = 0$, бо $13^0 = 1$.

3. $\log_a a = 1$, оскільки $a^1 = a$. Наприклад, $\log_5 5 = 1$, бо $5^1 = 5$.

4. $\log_a xy = \log_a |x| + \log_a |y|$, $xy > 0$. Наприклад, $\log_2 40 = \log_2 (8 \cdot 5) = \log_2 8 + \log_2 5 = 3 + \log_2 5$.

5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a |x| - \log_a |y|$, $\frac{x}{y} > 0$. Наприклад, $\log_3 \frac{3}{17} = \log_3 3 - \log_3 17 = 1 - \log_3 17$.

6. $\log_a x^p = p \log_a |x|$, $x^p > 0$. Наприклад, $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\log_3 3 = 4$.

7. $\log_{a^k} x = \frac{1}{k} \log_a x$. Наприклад, $\log_8 2 = \log_{2^3} 2 = \frac{1}{3}\log_2 2 = \frac{1}{3}$; $\log_{\sqrt{3}} 3 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 3 = 2\log_3 3 = 2$.

8. Формула переходу до іншої основи: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$, де $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Наприклад, $\log_{25}3=\dfrac{\log_5 3}{\log_5 25}=\dfrac{\log_5 3}{2}$; $\log_7 11=\dfrac{\lg 11}{\lg 7}$.

Зокрема, $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$, $(b\neq 1)$. Наприклад, $\log_3 10=\dfrac{1}{\log_{10}3}=\dfrac{1}{\lg 3}$.

9. $a^{\log_b c}=b^{\log_b a}$. Наприклад, $2^{\log_4 x}+4x^{\log_4 2}=x^{\log_4 2}+4x^{\log_4 2}=5x^{\log_4 2}$.

Логарифмування

Обчислення логарифмів заданих чисел або виразів називають *логарифмуванням*.

Наприклад, прологарифмувати вираз $x=7abc^3$ за основою a ($a\neq 1, a>0, b>0, c>0$):

$\log_a x=\log_a(7abc^3)=\log_a 7+\log_a a+\log_a b+\log_a c^3=\log_a 7+1+\log_a b+3\log_a c$.

Потенціювання

Знаходження числа (виразу) за даним його логарифмом називають *потенціюванням*.

Наприклад, пропотенціювати вираз $\lg x=\lg 7+2\lg a-3\lg b$ і знайти x:

$\lg x=\lg 7+2\lg a-3\lg b=\lg 7+\lg a^2-\lg b^3=\lg(7a^2)-\lg b^3=\lg\dfrac{7a^2}{b^3}$; $\lg x=\lg\dfrac{7a^2}{b^3}$; $x=\dfrac{7a^2}{b^3}$.

Приклад 1. Обчислити: $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{18}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$.

А	Б	В	Г	Д
3	$\dfrac{1}{27}$	27	9	$\dfrac{1}{3}$

■ $\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{18}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\sqrt{9\cdot 2}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 2. Обчислити: $2^{\log_4 9+\log_2 8}$.

А	Б	В	Г	Д
10	24	12	13	6

■ $2^{\log_4 9+\log_2 8}=2^{\frac{\log_2 9}{\log_2 4}}2^{\log_2 8}=2^{\frac{2\log_2 3}{2}}\cdot 2^{\log_2 8}=3\cdot 8=24$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 3. Знайти значення виразу $\log_{20}5+\log_{20}4+2$.

А	Б	В	Г	Д
11	2	3	22	51

■ $\log_{20}5+\log_{20}4+2=\log_{20}(5\cdot 4)+2=\log_{20}20+2=1+2=3$. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 4. Обчислити суму 3^x+3^{-x}, якщо $9^x+9^{-x}=47$.

А	Б	В	Г	Д
7	49	45	$\sqrt{23}$	$\sqrt{47}$

■ Нехай $3^x+3^{-x}=t$. Піднесемо обидві частини рівності до квадрата й одержимо: $\left(3^x+3^{-x}\right)^2=t^2$; $3^{2x}+2\cdot 3^x\cdot 3^{-x}+3^{-2x}=t^2$; $\left(3^2\right)^x+2\cdot 3^{x+(-x)}+\left(3^2\right)^{-x}=t^2$; $9^x+2\cdot 3^0+9^{-x}=t^2$; $9^x+2\cdot 1+9^{-x}=t^2$. Оскільки за умовою $9^x+9^{-x}=47$, то $47+2=t^2$; $t^2=49$; $t=\pm 7$. Оскільки $3^x+3^{-x}>0$ (показникова функція набуває тільки додатних значень), то $t=7$. Отже, $3^x+3^{-x}=7$. *Відповідь.* **А.** ■

Приклад 5. Обчислити: $4^{\log_2 9-\frac{2}{\log_3 2}}$.

■ $2^{2(\log_2 9-2\log_3\sqrt{3})}=2^{2\log_2 9-2\log_2 3}=2^{\log_2 81-\log_2 9}=2^{\log_2(81/9)}=81/9=3$. *Відповідь.* 9. ■

Приклад 6. Обчислити: $27^{\log_5 \sqrt[3]{5}} + 4 \cdot 5^{\log_5^2 2} - 2^{\log_2 2} \cdot \log_2 16$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	$\frac{1}{81}$

■ $27^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt[3]{5}} + 4 \cdot 5^{\log_5^2 2} - 2^{\log_2 2} \cdot \log_2 16 = 27^{\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}} + 4 \cdot \left(5^{\log_5 2}\right)^{\log_5 2} - 2^{\log_2 2} \cdot \log_2 2^4 = 27^{\frac{1}{3}} +$

$+ 4 \cdot 2^{\log_5 2} - 2^{\log_2 2} \cdot 4 = \sqrt[3]{27} = 3$. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 7. Обчислити: $\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18}$.

А	Б	В	Г	Д
27	18	12	2	3

■ $\frac{1}{\log_{12} 18} + \frac{1}{\log_{27} 18} = \log_{18} 12 + \log_{18} 27 = \log_{18} (12 \cdot 27) = \log_{18} 324 = 2$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 8. Обчислити значення виразу $\log_2 \sin \frac{\pi}{12} + \log_2 \sin \frac{\pi}{6} + \log_2 \sin \frac{5\pi}{12}$.

А	Б	В	Г	Д
2^{-3}	3	–3	–2 / 3	не існує

■ $\log_2 \sin \frac{\pi}{12} + \log_2 \sin \frac{\pi}{6} + \log_2 \sin \frac{5\pi}{12} = \log_2 \left(\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} \right) = \log_2 \left(\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \right) =$

$= \log_2 \left(\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = \log_2 \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) =$

$= \log_2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \log_2 \left(2^{-3} \right) = -3$. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 9. Спростити $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \ldots \cdot \log_7 8$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	5	7	8

■ Перейдемо у всіх множниках до основи 2 й одержимо: $\log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \cdot \ldots \cdot \frac{\log_2 8}{\log_2 7} =$

$= \log_2 8 = 3$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 10. Знайти $\log_{30} 8$, якщо $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = c$.

■ $\log_{30} 8 = \log_{30} 2^3 = 3 \log_{30} 2 = 3 \log_{30} \frac{10}{5} = 3 \left(\log_{30} 10 - \log_{30} 5 \right) = 3 \left(\log_{30} \frac{30}{3} - c \right) = 3 \left(\log_{30} 30 - \log_{30} 3 - c \right) =$

$= 3(1 - a - c)$. *Відповідь.* $3(1 - a - c)$. ■

Приклад 11. Установити відповідність між виразами (1–3) та їхніми числовими значеннями (А–Д), якщо $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

1 $\log_a 27\sqrt{3}$

2 $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[4]{3}$

3 $\log_{\frac{9}{a}} \sqrt{3}$

А 0,6

Б –1,6

В –7

Г –10

Д 0,5

■ **1.** $\log_a 27\sqrt{3} = \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} 27\sqrt{3} = \frac{\log_3 3^{3,5}}{\log_3 3^{-0,5}} = \frac{3,5}{-0,5} = -7$. Отже, 1В.

2. $1/a = \sqrt{3} = 3^{0,5}$. $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[4]{3} = \dfrac{\log_3 3^{1/4}}{\log_3 3^{0,5}} = \dfrac{0,25}{0,5} = 0,5$. Отже, 2Д.

3. $9/a = 3^3 \cdot 3^{0,5} = 3^{3,5}$. $\log_{\frac{9}{a}} \dfrac{9}{\sqrt{3}} = \log_{3^{1,5}} \dfrac{3^2}{3^{0,5}} = \dfrac{\log_3 3^{1,5}}{\log_3 3^{2,5}} = \dfrac{1,5}{2,5} = \dfrac{3}{5} = 0,6$. Отже, 3А.

Відповідь.

	А	Б	В	Г	Д
1			⊠		
2					⊠
3	⊠				

■

Завдання 6.1–6.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

6.1. Указати неправильну рівність.

А	Б	В	Г	Д
$\log_2 16 = 4$	$\log_2 \frac{1}{16} = -4$	$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = 4$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = \frac{1}{4}$	$\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$

6.2. **(ЗНО–2013)** $\log_5 49 + 2\log_5 \dfrac{5}{7} = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
25	$\log_5 70$	$\log_5 49\frac{5}{7}$	$\log_5 35$	2

6.3. Спростити вираз $\dfrac{3\lg 2 + 3\lg 5}{\lg 1300 - \lg 0,13}$.

А 0,6 **Б** 0,7 **В** 0,65 **Г** 0,75 **Д** 0,5

6.4. **(ЗНО–2013)** $\dfrac{\lg 25}{\lg 5} = \ldots$

А lg5 **Б** 5 **В** lg20 **Г** 2 **Д** 0,5

6.5. $\dfrac{\log_8 128 - \log_8 2}{\log_2 36 - \log_2 9} = \ldots$

А 1 **Б** $\frac{14}{3}$ **В** 2 **Г** 16 **Д** 3

6.6. Обчислити значення виразу $\log_3 32 + 5\log_3 \dfrac{3}{2}$.

А 5 **Б** 3 **В** 32 **Г** –5 **Д** 9

6.7. Знайти значення x, якщо $\log_7 x = 2\log_7 6 - \log_7 12 + \log_7 15$.

А 39 **Б** 7,5 **В** 15 **Г** $\frac{17}{4}$ **Д** 45

6.8. Обчислити: $\dfrac{\log_3 32}{\log_3 2} + \dfrac{\log_7 27}{\log_7 3}$.

А 15 **Б** 8 **В** 25 **Г** 54 **Д** 64

6.9. Обчислити: $8^{\log_2 3} + 9^{\log_3 4}$.

А 33 **Б** 7 **В** 14 **Г** 43 **Д** 60

6.10. Обчислити: $\log_8 16$.

А 8 Б 2 В $\frac{3}{4}$ Г 12 Д $\frac{4}{3}$

6.11. Знайти $\log_3 200$, якщо $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$.

А $3a + 2b$ Б $32ab$ В $2a + 3b$ Г $3a + b$ Д $6(a + b)$

6.12. Обчислити: $\lg \operatorname{tg}1^\circ \lg \operatorname{tg}2^\circ \lg \operatorname{tg}3^\circ \ldots \lg \operatorname{tg}88^\circ \lg \operatorname{tg}89^\circ$.

А 89! Б 0,1 В 10 Г 1 Д 0

6.13. Обчислити: $\lg \operatorname{tg}1^\circ + \lg \operatorname{tg}2^\circ + \lg \operatorname{tg}3^\circ + \ldots + \lg \operatorname{tg}88^\circ + \lg \operatorname{tg}89^\circ$.

А 10 Б 1 В 0 Г 0,1 Д 89!

6.14. Обчислити: $7^{\log_7 3} - 3^{\log_3 7}$.

А 0 Б $\frac{7}{3}$ В 1 Г -1 Д 2

6.15. Обчислити: $\log_5 7 \cdot \log_{49} 125$.

А $\frac{1}{6}$ Б 1 В 6 Г $\frac{2}{3}$ Д 1,5

6.16. **(ЗНО–2012)** Записати числа 2^{15}, 4^{10}, 10^5 у порядку зростання.

А $2^{15}, 4^{10}, 10^5$ Б $2^{15}, 10^5, 4^{10}$ В $10^5, 2^{15}, 4^{10}$ Г $10^5, 4^{10}, 2^{15}$ Д $4^{10}, 2^{15}, 10^5$

6.17. $7^{1+\log_7 2} = \ldots$

А 9 Б 14 В 49 Г 343 Д 81

6.18. $\log_{7+4\sqrt{3}}\left(7-4\sqrt{3}\right) = \ldots$

А 14 Б 2 В 1 Г -1 Д -2

6.19. $\log_7 \sqrt[3]{7 \cdot \sqrt[4]{7}} = \ldots$

А $\frac{4}{5}$ Б $\frac{5}{4}$ В $\frac{1}{4}$ Г $\frac{1}{20}$ Д $7^{\frac{1}{20}}$

6.20. Обчислити: $\log_8 7 \cdot \log_7 6 \cdot \log_6 4$.

А $\frac{3}{2}$ Б $\frac{2}{3}$ В $\frac{1}{2}$ Г 2 Д 3

6.21. Обчислити: $\left(2^{2+\frac{1}{\log_3 2}} + 25^{\frac{1}{2\log_3 5}} + 1\right)^{\frac{1}{2}}$.

А 8 Б 16 В 3 Г 4 Д 5

6.22. Обчислити: $\left(5^{\log_5(\sqrt{3}+6)} - 3^{\log_3(\sqrt{3}-6)^2}\right)^2$.

А 64 Б 12 В 8 Г 2 Д $65 - 16\sqrt{3}$

6.23. Обчислити: $\log_n \log_n \underbrace{\sqrt[n]{\sqrt[n]{\ldots\sqrt[n]{n}}}}_{2008}$.

А 2008 Б -2008 В 1004 Г -1004 Д 1

Завдання 6.24–6.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

6.24. Установити відповідність між виразами (1–3) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $2\lg 5 + \lg 4$ 2 $\log_3 5 : \log_3 2$ 3 $\log_a\left(a^2 + a\right) - \log_a(a+1)$

А 5 Б $\log_5 2$ В 1 Г $\log_2 5$ Д $\log_2 4$

6.25. Установити відповідність між виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_{27}81$ 2 $\log_3\frac{1}{81}$ 3 $\log_{81}3$

А -4 Б $-\frac{1}{4}$ В $\frac{1}{4}$ Г $\frac{3}{4}$ Д $\frac{4}{3}$

6.26. Установити відповідність між виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_8 16$
2 $\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{32}$
3 $\log_{25}125$

А 0,(6)
Б 0,75
В 1,25
Г 1,(3)
Д 1,5

6.27. Установити відповідність між виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_5\frac{5\sqrt{5}}{\sqrt[5]{5}}$
2 $\log_2\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$
3 $\log_5\frac{5}{\sqrt[3]{25}}$

А 0,3
Б 0,(3)
В 1,3
Г 1,(3)
Д 1,(6)

6.28. Установити відповідність між виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\frac{\log_8 4+\log_8 16}{\log_6 16+\log_6 81}$
2 $\frac{\log_{12}2+\log_{12}72}{\log_5 75-\log_5 3}$
3 $\frac{\log_5 75-\log_5 3}{\log_4 32+\log_4 128}$

А 1/3
Б 1/2
В 2/3
Г 1
Д 4/3

6.29. Установити відповідність між логарифмічними виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $4^{\log_2 5}$
2 $5^{1+\log_5 2}$
3 $\sqrt{3}^{\log_3 64}$

А 6
Б 8
В 10
Г 12
Д 25

6.30. Установити відповідність між виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\frac{\log_3 64}{\log_3 2}+\frac{\log_5 9}{\log_5 3}$
2 $\frac{\log_4 625}{\log_4 5}+\frac{\log_7 128}{\log_7 2}$
3 $\frac{\log_5 49}{\log_5 7}+\frac{\log_3\frac{1}{16}}{\log_3\frac{1}{2}}$

А 7
Б 8
В 9
Г 6
Д 11

6.31. Установити відповідність між виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_3 7\cdot\log_{49}81$
2 $\log_5 8\cdot\log_{16}125$
3 $\log_9 1000\cdot\lg 3$

А 1,25
Б 1,5
В 1,75
Г 2
Д 2,25

6.32. Установити відповідність між виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\log_6 6 \cdot \log_6 5 \cdot \log_5 4$

2 $\log_{14} 8 \cdot \log_{15} 14 \cdot \log_{16} 15$

3 $\log_7 5 \cdot \log_5 4 \cdot \log_{12} 7$

А 5/8
Б 1/7
В 2/3
Г 3/4
Д 2/5

6.33. $\log_7 2 = a$, $\log_7 3 = b$. Установити відповідність між логарифмами чисел (1–3) та їх вираженням через a та b (А–Д).

1 $\log_7 1{,}5$

2 $\log_7 4{,}5$

3 $\log_6 7$

А $\dfrac{1}{a+b}$
Б $\dfrac{2b}{a}$
В $2b-a$
Г $\dfrac{1}{a-b}$
Д $b-a$

6.34. $\log_a b = 5$. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\log_{ab} a$

2 $\log_{ab} b$

3 $\log_b \sqrt{ab}$

А 5,5
Б 3
В $\dfrac{5}{6}$
Г 0,6
Д $\dfrac{1}{6}$

Розв'яжіть завдання 6.35–6.48. Відповідь запишіть десятковим дробом.

6.35. **(ЗНО–2015)** Обчислити значення виразу $\dfrac{1}{70} \cdot 2^{2\log_2 7}$.

6.36. Обчислити: $\left(25^{2-\log_5 75} + 7^{-\log_7 3}\right) \cdot 27$.

6.37. Обчислити: $3^{\frac{\log_3 5}{\log_3 3}} - 5^{\log_5 5} + 7^{\log_7 49}$.

6.38. Обчислити: $0{,}25^{\lg 0{,}5} \cdot 0{,}04^{\lg 0{,}5} + 81^{0{,}5\log_9 7} - 0{,}5 \cdot 27^{\frac{1}{\log_3 3}}$.

6.39. Обчислити: $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27$.

6.40. Обчислити: $2^{\log_2^2 3} - 3^{\log_3 3} - 9^{\log_3 2}$.

6.41. Обчислити: $\log_{3+\sqrt{8}}\left(3-\sqrt{8}\right) + \log_{3-\sqrt{8}}\left(3+\sqrt{8}\right)$.

6.42. Обчислити: $3 \cdot 7^{2\left(\log_{\sqrt{7}} 7\right)^{-1} + \frac{1}{3}\log_3 8} - 3 \cdot \log_9 \sqrt[4]{9\sqrt[3]{9}} - 10$.

6.43. Обчислити значення виразу $\log_a 500 - \log_a 4$, якщо $\log_5 a = \dfrac{1}{4}$.

6.44. Дано: $\log_{ab} a = 9$. Знайти $\log_{ab} b$.

6.45. Спростити вираз $a^{\frac{\log_a(\log_a a)}{\log_a a}} \cdot \log_a b$.

6.46. Обчислити: $\left(\log_5 2 + \log_2 5 + 2\right)\left(\log_5 2 - \lg 2\right) \cdot \log_2 5 - \log_5 2$.

6.47. Відомо, що $\log_{49} x = 2\log_{49} 6 - \log_{49} 12 + \log_{49} 15$ і $y = 45^{1+\log_{45} 2}$.

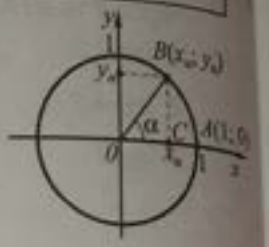
Знайти: 1) $\log_2 \dfrac{x}{y}$; 2) $\left(\dfrac{x+y}{15}\right)^{0{,}5}$.

6.48. Якщо $\log_a b = 5$, то: 1) $\log_b \sqrt{ab} = \ldots$; 2) $\log_a \sqrt{ab} = \ldots$.

Тема 7. Тригонометричні вирази

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— означення синуса, косинуса, тангенса, числового аргументу;
— основні співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу;
— формули зведення;
— формули додавання та наслідки з них;
— означення котангенса числового аргументу;
— доводити тотожності.



Нехай у прямокутній системі координат одиничний вектор OA вказує додатний напрям осі x. Нехай $\angle AOB = \alpha$, координати точки $B(x_\alpha; y_\alpha)$.

Синусом кута α (sinα) називають ординату точки B.

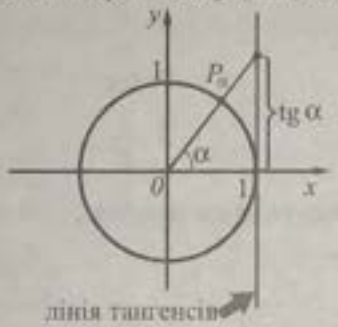
Косинусом кута α (cosα) називають абсцису точки B.

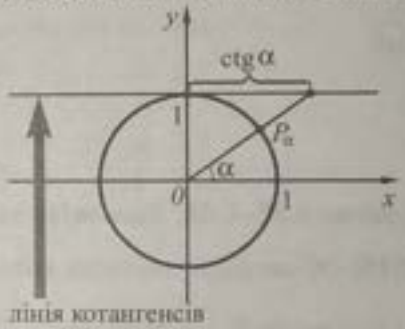
Тангенсом кута α (tgα) називають відношення ординати кінця одиничного рухомого радіуса до його абсциси: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, де $\cos\alpha \neq 0$.

Пряму, яка проходить через точку (1; 0) паралельно до осі ординат, називають *лінією тангенсів*.

Котангенсом кута α (ctgα) називають відношення абсциси кінця одиничного радіуса до його ординати: $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, де $\sin\alpha \neq 0$.

Пряму, яка проходить через точку (0; 1) паралельно до осі абсцис, називають *лінією котангенсів*.





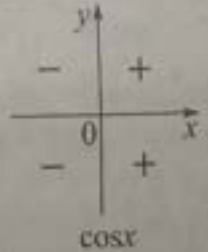
Значення синуса, косинуса, тангенса та котангенса деяких кутів:

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sinα	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
tgα	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctgα	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Для будь-якого кута α $|\sin\alpha| \leq 1$, $|\cos\alpha| \leq 1$, tgα і ctgα змінюються від $-\infty$ до $+\infty$.

Знаки тригонометричних функцій у чвертях:







Функції $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ — непарні, а функція $y = \cos x$ — парна, тому:

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$; $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$; $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$; $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

Серед усіх можливих періодів функцій виділяють основний період — найменший додатний період. Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ мають основний період 2π, а функції $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ — π.

Співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ — основна тригонометрична тотожність

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha};\ \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1;\ 1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\ 1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\sin\alpha =$	—	$\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\cos\alpha =$	$\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$	—	$\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$	$\pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$
$\operatorname{tg}\alpha =$	$\pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$	$\pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$	—	$\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$
$\operatorname{ctg}\alpha =$	$\pm\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{\sin\alpha}$	$\pm\frac{\cos\alpha}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$	—

Формули зведення

	$x=\frac{\pi}{2}-\alpha$	$x=\frac{\pi}{2}+\alpha$	$x=\pi-\alpha$	$x=\pi+\alpha$	$x=\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$x=\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$x=2\pi-\alpha$
	$x=90^\circ-\alpha$	$x=90^\circ+\alpha$	$x=180^\circ-\alpha$	$x=180^\circ+\alpha$	$x=270^\circ-\alpha$	$x=270^\circ+\alpha$	$x=360^\circ-\alpha$
$\sin x$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos x$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$

Якщо кут x відкладається від вертикальної осі, то *функція* міняється на *кофункцію*, якщо кут відкладається від горизонтальної осі, то *функція не змінюється*. Знак визначається знаком функції від аргументу x.

Наприклад, $\cos\underbrace{(90^\circ+x)}_{2\text{ чверть}} = -\sin x;\ \operatorname{tg}\underbrace{(\pi+5\alpha)}_{3\text{ чверть}} = \operatorname{tg}5\alpha;\ \sin\underbrace{\left(\frac{9}{2}\pi+\alpha\right)}_{2\text{ чверть}} = \sin\underbrace{\left(4\pi+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}_{2\text{ чверть}} = \cos\alpha;$

$\operatorname{ctg}\underbrace{(630^\circ+\alpha)}_{4\text{ чверть}} = \operatorname{ctg}(3\cdot 180^\circ+90^\circ+\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha;\ \cos\underbrace{(540^\circ+\alpha)}_{3\text{ чверть}} = \cos(360^\circ+180^\circ+\alpha) = -\cos\alpha;$

$\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{11}{2}\pi\right) = -\operatorname{tg}\underbrace{\left(\frac{8+3}{2}\pi-\alpha\right)}_{3\text{ чверть}} = -\operatorname{ctg}\alpha.$

Формули додавання для тригонометричних функцій

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta;\qquad \cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta};\qquad \operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta}.$$

Формули суми та різниці тригонометричних функцій

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\qquad \cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta};\qquad \operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Формули тригонометричних функцій подвійного та потрійного аргументу

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$;

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$;

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$;

$\operatorname{tg}2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$;

$\operatorname{ctg}2\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$;

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$;

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$;

$\operatorname{tg}3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$;

$\operatorname{ctg}3\alpha = \dfrac{\operatorname{ctg}^3\alpha - 3\operatorname{ctg}\alpha}{3\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}$.

Формули універсальної підстановки

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Формули половинного аргументу

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}};$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Формули пониження степеня

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

Формули добутку тригонометричних функцій

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2};$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)}{2}.$$

Обернені тригонометричні функції

Арксинусом числа b, де $|b| \le 1$, називають таке число α із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, синус якого дорівнює b. Узагалі $\arcsin b = \alpha$, якщо $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\alpha = b$.

Наприклад, якщо $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, то $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, бо $-\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ і $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, але $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} \ne \frac{3\pi}{4}$, оскільки $\frac{3\pi}{4}\notin\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Арккосинусом числа b, де $|b| \le 1$, називають таке число α із проміжку $[0; \pi]$, косинус якого дорівнює b. Узагалі $\arccos b = \alpha$, якщо $\alpha \in [0; \pi]$ і $\cos\alpha = b$.

Наприклад, $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, бо $\frac{\pi}{3} \in [0; \pi]$ і $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$; $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$, бо $\frac{5\pi}{6} \in [0; \pi]$ і $\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, але $\arccos\frac{1}{2} \ne -\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3} \notin [0; \pi]$.

Арктангенсом числа b називають таке число α з проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює b. Узагалі, $\operatorname{arctg} b = \alpha$, якщо $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\alpha = b$.

Наприклад, $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, бо $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$; $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$, оскільки $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ і $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$. $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$, але $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) \ne \frac{2\pi}{3}$, оскільки $\frac{2\pi}{3} \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Арккотангенсом числа b називають таке число α з проміжку $(0; \pi)$, котангенс якого дорівнює b. Узагалі, $\operatorname{arcctg} b = \alpha$, якщо $\alpha \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg}\alpha = b$.

Наприклад, $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$, бо $\frac{\pi}{3} \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$, бо $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$ і $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$. $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$, але $\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{3}\right) \ne -\frac{\pi}{6}$, оскільки $-\frac{\pi}{6} \notin (0; \pi)$.

Основні співвідношення між оберненими тригонометричними функціями

$\arcsin(\sin x) = x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\qquad \arccos(\cos x) = x$, $x \in [0; \pi]$;

$\sin(\arcsin x) = x$, $x \in [-1; 1]$; $\qquad \cos(\arccos x) = x$, $x \in [-1; 1]$;

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$; $\qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$; $\qquad \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$;

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},\ x \in [-1; 1];$$

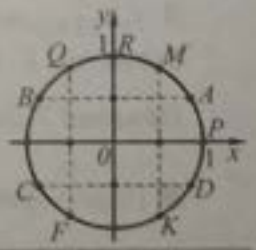
$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$; $\qquad \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$, $x \in (0; \pi)$;

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$; $\qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$;

$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$; $\qquad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Приклад 1. Які з точок на одиничному колі задовольняють умову $\sin\alpha = \frac{1}{2}$?



А	Б	В	Г	Д
M і K	Q і F	A і B	C і D	R

■ Синусом кута є ордината кінця одиничного рухомого радіуса. Ординати точок A та B дорівнюють 0,5.

Відповідь. В. ■

Приклад 2. Обчислити знак добутку $\sin280° \cdot \cos30° \cdot \operatorname{tg}170° \cdot \operatorname{ctg}190°$.

■ Для кожного кута визначимо чверть, у якій він міститься, і з'ясуємо знак даної функції. $280°$ — IV чверть, $\sin280° < 0$; $30°$ — I чверть, $\cos30° > 0$; $170°$ — II чверть, $\operatorname{tg}170° < 0$; $190°$ — III чверть, $\operatorname{ctg}190° > 0$. Отже, маємо знаки: «–» · «+» · «–» · «+» = «+». *В-дь.* $\sin280° \cdot \cos30° \cdot \operatorname{tg}170° \cdot \operatorname{ctg}190° > 0$. ■

Приклад 3. Знайти знак виразів: **1)** $\sin2{,}5$; **2)** $\cos6$.

■ $\frac{\pi}{2} < 2{,}5 < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < 6 < 2\pi$. Отже, кут $\alpha = 2{,}5$ радіана належить II чверті, а кут $\beta = 6$ радіан — IV чверті. Тоді $\sin2{,}5 > 0$, $\cos6 > 0$. *Відповідь.* **1)** $\sin2{,}5 > 0$; **2)** $\cos6 > 0$. ■

Приклад 4. Обчислити: $\dfrac{\sin(-30°)\cos(-60°)+\operatorname{tg}(-45°)}{\operatorname{ctg}(-60°)\cos(-30°)-\sin(-60°)\operatorname{tg}(-30°)}$.

■ Урахувавши парність (непарність) тригонометричних функцій, одержимо:

$$(\ldots)=\frac{-\sin30°\cos60°-\operatorname{tg}45°}{-\operatorname{ctg}60°\cos30°-\sin60°\operatorname{tg}30°}=\frac{-\sin^2 30°-1}{-\operatorname{tg}30°\cos30°-\cos30°\operatorname{tg}30°}=\frac{-0{,}25-1}{-2\sin30°}=\frac{1{,}25}{1}=1{,}25.$$

В-дь. 1,25. ■

Приклад 5. Звести $\cos\frac{391\pi}{18}$ до тригонометричної функції гострого кута.

А	Б	В	Г	Д
$\cos\frac{\pi}{18}$	$-\sin\frac{2\pi}{9}$	$\cos\frac{7\pi}{18}$	$\sin\frac{2\pi}{9}$	$\cos\frac{31\pi}{18}$

■ $\cos\frac{391\pi}{18}=\cos\left(21\pi+\frac{13\pi}{18}\right)=\cos\left(10\cdot2\pi+\pi+\frac{9\pi+4\pi}{18}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{2\pi}{9}\right)=\sin\frac{2\pi}{9}$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 6. Яка з указаних функцій є ні парною, ні непарною?

А	Б	В	Г	Д
$f_1(x)=\cos3x\operatorname{ctg}4x$	$f_2(x)=\frac{2+3\sin^2 5x}{6\operatorname{tg}x}$	$f_3(x)=5\sqrt{\cos x}+x^4$	$f_4(x)=\frac{x^2+\sin2x}{\sin2x-x^3}$	$f_5(x)=\sin6x\operatorname{tg}x+x^2$

■ **А** $f_1(-x)=\cos(-3x)\operatorname{ctg}(-4x)=\cos3x\cdot(-\operatorname{ctg}4x)=-\cos3x\operatorname{ctg}4x=-f_1(x)$. Функція непарна;

Б $f_2(-x)=\frac{2+3\sin^2(-5x)}{6\operatorname{tg}(-x)}=\frac{2+3(-\sin5x)^2}{-6\operatorname{tg}x}=-\frac{2+3\sin^2 5x}{6\operatorname{tg}x}=-f_2(x)$. Функція непарна;

В $f_3(-x)=5\sqrt{\cos(-x)}+(-x)^4=5\sqrt{\cos x}+x^4=f_3(x)$. Функція парна;

Г $f_4(-x)=\frac{(-x)^2+\sin(-2x)}{\sin(-2x)-(-x)^3}=\frac{x^2-\sin2x}{-\sin2x+x^3}=-\frac{x^2-\sin2x}{\sin2x-x^3}\neq f_4(x)$; $f_4(-x)\neq -f_4(x)$. Функція ні парна, ні непарна;

Д $f_5(-x)=\sin(-6x)\operatorname{tg}(-x)+(-x)^2=-\sin6x\cdot(-\operatorname{tg}x)+x^2=\sin6x\operatorname{tg}x+x^2=f_5(x)$. Функція парна.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 7. Знайти найбільше значення виразу $12\cos\alpha+5\sin\alpha-7$.

■ Перетворимо вираз: $12\cos\alpha+5\sin\alpha-7=\sqrt{12^2+5^2}\left(\frac{5}{\sqrt{12^2+5^2}}\sin\alpha+\frac{12}{\sqrt{12^2+5^2}}\cos\alpha\right)-7=$

$=13\left(\frac{5}{13}\sin\alpha+\frac{12}{13}\cos\alpha\right)-7=13\sin(\alpha+\varphi)-7$, де $\varphi=\arccos\frac{5}{13}=\arcsin\frac{12}{13}$. Далі маємо:

$-1\le\sin(\alpha+\varphi)\le1$; $-13\le13\sin(\alpha+\varphi)\le13$; $-20\le13\sin(\alpha+\varphi)-7\le6$. Отже, найбільше значення виразу $12\cos\alpha+5\sin\alpha-7$ дорівнює 6.

Відповідь. 6. ■

Приклад 8. Обчислити числове значення виразу $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{5}{12}\pi$	$-2\frac{5}{12}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{12}\pi$	$\frac{5}{12}\pi$

■ $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}-3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+3\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+3\cdot\frac{\pi}{6}=$

$=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{-2\pi+3\pi+6\pi}{12}=\frac{7}{12}\pi$.

Відповідь. Г. ■

Приклад 9. Знайти $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$ і $-\frac{\pi}{2}<\alpha<0$.

А	Б	В	Г	Д
0,5	2	–0,5	–2	5

■ Кут α міститься в четвертій чверті, тому $\sin\alpha<0$. Обчислимо $\sin\alpha$:

$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\frac{1}{5}}=-\sqrt{\frac{4}{5}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$. Знайдемо $\operatorname{tg}\alpha$: $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{2}{\sqrt{5}}:\frac{1}{\sqrt{5}}=-2$.

Відповідь. Г. ■

Приклад 10. Обчислити: $\sin 75^\circ\cdot\sin 15^\circ$.

■ $\sin 75^\circ\cdot\sin 15^\circ=\sin(90^\circ-15^\circ)\cdot\sin 15^\circ=\cos 15^\circ\cdot\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{4}$. *Відповідь.* $\frac{1}{4}$. ■

Приклад 11. Знайти значення виразу $2\sin^2 2\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2\cos^2 2\alpha$, якщо $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

А	Б	В	Г	Д
5	$2+\sqrt{3}$	3	$2-\sqrt{3}$	1

■ Спростимо вираз: $2\sin^2 2\alpha+2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+2\cos^2 2\alpha=2\left(\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha\right)+2\sin\alpha=2+2\sin\alpha$. Якщо

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, то $2+2\sin\alpha=2+2\cdot\sin\frac{\pi}{6}=2+2\cdot\frac{1}{2}=3$. *Відповідь.* В. ■

Приклад 12. Спростити вираз $\frac{\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}{\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}20^\circ}$.

■ $\frac{\cos 20^\circ-\cos 40^\circ}{\operatorname{tg}10^\circ+\operatorname{tg}20^\circ}=\frac{-2\sin 30^\circ\sin(-10^\circ)}{\frac{\sin 30^\circ}{\cos 10^\circ\cos 20^\circ}}=\frac{2\sin 30^\circ\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ}{\sin 30^\circ}=2\sin 10^\circ\cos 10^\circ\cos 20^\circ=$

$=\sin 20^\circ\cos 20^\circ=\frac{\sin 40^\circ}{2}$.

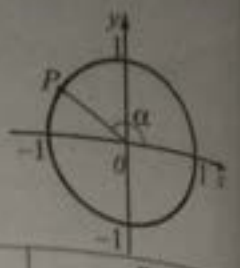
Відповідь. $\frac{\sin 40^\circ}{2}$. ■

Завдання 7.1–7.26 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

7.1. $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-2\sin^2\alpha$	1	$2\cos^2\alpha$	$2\sin^2\alpha$	0

7.2. **(ЗНО–2011)** На одиничному колі зображено точку $P(-0,8;\ 0,6)$ і кут α (див. рис.). Визначити $\cos\alpha$.



А	Б	В	Г	Д
–0,8	0,6	0,8	–0,6	$-\sqrt{3}/2$

7.3. Спростити вираз $\operatorname{ctg}(-\alpha)\cdot\operatorname{tg}(-\alpha)-\sin^2(-\alpha)$.

А $\cos\alpha$ Б $\cos^2\alpha$ В $\sin^2\alpha$ Г $1+\sin^2\alpha$ Д $-\cos^2\alpha$

7.4. **(ЗНО–2015)** Спростити вираз $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$.

А $\cos^2\alpha$ Б $\sin^2\alpha$ В $\operatorname{tg}^2\alpha$ Г $\operatorname{ctg}^2\alpha$ Д 1

7.5. **(ЗНО–2014)** Відомо, що $\operatorname{ctg}\alpha<0$, $\cos\alpha>0$. Якого значення може набувати $\sin\alpha$?

А –1 Б $-\dfrac{1}{2}$ В 0 Г $\dfrac{1}{2}$ Д 1

7.6. Знайти значення виразу $3\sin^2\alpha-7\cos^2\alpha$, якщо $\cos\alpha=-0,1$.

А 2 Б 2,9 В 3,1 Г 3,96 Д 2,92

7.7. Знайти значення виразу $\cos\left(\alpha-\beta+\dfrac{\pi}{2}\right)+2\sin(\alpha+\pi)\cos(\beta-\pi)$, якщо $\alpha=0,1\pi$, $\beta=0,15\pi$.

А 0 Б $-\dfrac{1}{2}$ В $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ Г $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ Д $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

7.8. $\operatorname{tg}7^\circ\operatorname{tg}83^\circ+\operatorname{tg}19^\circ\operatorname{tg}71^\circ=\ldots$

А 0 Б 1 В 2 Г 3 Д 4

7.9. $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\ldots$

А 1 Б $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ В $\sin\alpha\sin\beta$ Г $\cos\alpha\cos\beta$ Д $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$

7.10. $\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}(x+y)}+\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}(x-y)}=\ldots$

А 2 Б 0 В 1 Г $2\operatorname{tg}x$ Д $2\operatorname{tg}(x+y)$

7.11. $\sin(\pi-2\alpha)+2\cos\left(\dfrac{3}{2}\pi+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\ldots$

А $\sin2\alpha$ Б 1 В $3\cos2\alpha$ Г 3 Д 0

7.12. $\cos^4\dfrac{\alpha}{2}-\sin^4\dfrac{\alpha}{2}=\ldots$

А $\sin\alpha$ Б $\cos\alpha$ В $\cos\dfrac{\alpha}{4}$ Г $\cos2\alpha$ Д 1

7.13. $\dfrac{\sin40^\circ}{2\cos^2 20^\circ}=\ldots$

А $\cos20^\circ$ Б $\dfrac{1}{2}$ В $\sin20^\circ$ Г $\operatorname{ctg}20^\circ$ Д $\operatorname{tg}20^\circ$

7.14. $\sin 48^\circ + \sin 12^\circ = \ldots$

А $\sin 36^\circ$ Б $\frac{\sqrt{3}}{2}$ В $\cos 18^\circ$ Г $\frac{1}{2}$ Д $\frac{1}{2}\cos 18^\circ$

7.15. $\cos 70^\circ - \cos 10^\circ = \ldots$

А $-\sin 40^\circ$ Б $\sin 40^\circ$ В $\cos 30^\circ$ Г $\frac{1}{2}$ Д $2\sin 40^\circ$

7.16. $\cos 70^\circ + \cos 50^\circ = \ldots$

А $-\frac{1}{2}$ Б $\frac{1}{2}$ В $2\cos 10^\circ$ Г $\sin 10^\circ$ Д $\cos 10^\circ$

7.17. Знайти значення виразу $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, якщо $x = -\frac{\pi}{6}$.

А 0,5 Б –0,25 В –0,5 Г –2 Д 0,25

7.18. $\cos 75^\circ \cos 15^\circ = \ldots$

А $\frac{1}{2}$ Б $\frac{3}{4}$ В 1 Г $\frac{1}{4}$ Д $\frac{\sqrt{3}}{2}$

7.19. $\sin 105^\circ \cos 15^\circ = \ldots$

А $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Б $\frac{\sqrt{3}}{4}$ В $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$ Г $\frac{1}{2}$ Д $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

7.20. $\sin 75^\circ \sin 15^\circ = \ldots$

А $\frac{1}{2}$ Б $\frac{1}{4}$ В $\frac{3}{4}$ Г $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Д $\frac{\sqrt{3}}{4}$

7.21. $\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right) = \ldots$

А $\frac{1}{4}$ Б $\frac{3}{4}$ В $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ Г $\frac{1}{2}$ Д $\frac{\sqrt{15}}{4}$

7.22. $\cos\left(2\arcsin\frac{1}{6}\right) = \ldots$

А $\frac{17}{18}$ Б $\frac{1}{3}$ В $\frac{3}{4}$ Г $\frac{2}{3}$ Д $\frac{15}{16}$

7.23. $\operatorname{tg}\left(-\frac{1}{2}\arcsin 0{,}6\right) = \ldots$

А 0,3 Б $\frac{2}{3}$ В $\frac{1}{2}$ Г $-\frac{1}{3}$ Д $\frac{3}{4}$

7.24*. Обчислити: $3\sqrt{3}\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)$.

А 3 Б –3 В ± 3 Г $3\sqrt{6}$ Д $3\sqrt{2}$

7.25. $16\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9} = \ldots$

А 0,5 Б –0,5 В 2 Г –2 Д 0

7.26*. $\sin\frac{3\pi}{14} - \sin\frac{\pi}{14} - \sin\frac{5\pi}{14} = \ldots$

А $-\frac{1}{2}$ Б 1 В 0 Г $\frac{1}{2}$ Д –1

Завдання 7.27–7.39 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

7.27. Установити відповідність між виразами (1–3) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sin\alpha\cos\alpha$

2 $1-2\sin^2\alpha$

3 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)$

А $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

Б $-\cos 2\alpha$

В $\cos 2\alpha$

Г $2\cos\alpha$

Д $\sin 2\alpha$

7.28. Установити відповідність між виразами (1–3) та виразами, які їм дорівнюють (А–Д).

1 $\sin 740^\circ$

2 $\cos 560^\circ$

3 $\cos 225^\circ$

А $\cos 50^\circ$

Б $\sin 50^\circ$

В $\sin 20^\circ$

Г $\sin(-45^\circ)$

Д $-\cos 20^\circ$

7.29. Установити відповідність між виразами (1–3) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sin(45^\circ+\alpha)$

2 $\cos(45^\circ+\alpha)$

3 $\cos 3\alpha$

А $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$

Б $\cos\alpha\cos 2\alpha+\sin\alpha\sin 2\alpha$

В $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)$

Г $\cos\alpha\cos 2\alpha-\sin\alpha\sin 2\alpha$

Д $\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$

7.30. Одна зі сторін кута збігається з додатною піввіссю абсцис, а інша перетинає одиничне коло в точці $\left(-\frac{5}{13};-\frac{12}{13}\right)$. Установити відповідність між тригонометричними функціями кута β (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin\beta$ 2 $\cos\beta$ 3 $\operatorname{tg}\beta$

А $\frac{5}{12}$ Б $\frac{12}{5}$ В $-\frac{12}{13}$ Г $-\frac{5}{13}$ Д $\frac{13}{12}$

7.31. $\sin\beta=a$, β — кут I чверті. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$

2 $\sin(\pi-\beta)$

3 $\sin(\pi+\beta)$

А a

Б $-a$

В $\frac{1}{a}$

Г $-\sqrt{1-a^2}$

Д $\sqrt{1-a^2}$

7.32. $\operatorname{tg}\alpha=a$ $(a\neq 0)$. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

2 $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$

3 $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$

А $\sqrt{1-a^2}$

Б a

В $\frac{1}{a}$

Г $-a$

Д $-\frac{1}{a}$

7.33. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin 510^\circ$ 2 $\cos 690^\circ$ 3 $\cos 840^\circ$

А $-\frac{1}{2}$ Б $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ В $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Г $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Д $\frac{1}{2}$

7.34. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\operatorname{tg}\frac{20\pi}{3}$ 2 $\operatorname{tg}\frac{28\pi}{3}$ 3 $\operatorname{tg}\left(-\frac{31\pi}{6}\right)$

А $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ Б $-\sqrt{3}$ В $\frac{1}{\sqrt{3}}$ Г $\sqrt{3}$ Д -1

7.35. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–3) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $\cos 3x \cos x - \sin 3x \sin x$
2 $\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$
3 $\sin 3x \cos x + \cos 3x \sin x$

А $\sin 4x$
Б $-\cos 4x$
В $\cos 4x$
Г $\cos 2x$
Д $-\sin 2x$

7.36. α — кут другої чверті, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Установити відповідність між заданими тригонометричними виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sin 2\alpha$ 2 $\cos 2\alpha$ 3 $\operatorname{tg} 2\alpha$

А $-\frac{119}{120}$ Б $-\frac{119}{169}$ В $\frac{119}{169}$ Г $-\frac{120}{119}$ Д $-\frac{120}{169}$

7.37. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–3) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $\frac{\sin 3\alpha - \sin\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha}$
2 $\frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha}$
3 $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}$

А $\operatorname{tg}\alpha$
Б $\operatorname{ctg}\alpha$
В $\operatorname{tg} 2\alpha$
Г $\operatorname{ctg} 2\alpha$
Д $-\operatorname{ctg} 2\alpha$

7.38. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–3) та тотожно рівними їм виразами (А–Д).

1 $\sin 10^\circ + \cos 20^\circ$
2 $\sin 20^\circ + \cos 10^\circ$
3 $\cos 20^\circ - \sin 10^\circ$

А $\sin 50^\circ$
Б $\sin 40^\circ$
В $\sqrt{3}\sin 40^\circ$
Г $\sqrt{3}\sin 50^\circ$
Д $-\sqrt{3}\sin 50^\circ$

7.39. Установити відповідність між тригонометричними виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$ 2 $\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$ 3 $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$

А $\frac{4}{5}$ Б $\frac{3}{5}$ В $\frac{3}{4}$ Г $\frac{4}{3}$ Д $-\frac{3}{5}$

Розв'яжіть завдання 7.40–7.50. Відповідь запишіть десятковим дробом.

7.40. Обчислити: $\dfrac{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\cos(\alpha-\pi)\operatorname{tg}(-\alpha)}{\sin(\alpha-\pi)\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}$.

7.41. Спростити: $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$.

7.42. Спростити: $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha$.

7.43. Спростити: $\dfrac{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos5\alpha-\cos7\alpha}{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}\cdot 2\operatorname{ctg}\alpha$.

7.44. Спростити: $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha}{5\cos\alpha\cdot(\cos\alpha+\cos2\alpha)}$.

7.45. Спростити: $\left(\sin(2\pi-x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)-\cos(x-\pi)-\sin(x-\pi)\right)^2+\cos^2(\pi-x)$.

7.46. Обчислити: $2\sin20^\circ\cos50^\circ\sin60^\circ\cos10^\circ$.

7.47*. Обчислити: $\dfrac{1}{\cos1+\cos3}+\dfrac{1}{\cos1+\cos5}+\dfrac{1}{\cos1+\cos7}+\ldots+\dfrac{1}{\cos1+\cos2001}+\dfrac{\operatorname{tg}1-\operatorname{tg}1001}{2\sin1}$.

7.48. Спростити вираз $\dfrac{\cos5\alpha+5\cos3\alpha+10\cos\alpha}{\cos^5\alpha}$.

7.49. Спростити вираз $26\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}\right)-\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{7}{25}\right)$.

7.50. Якщо $x=2\arcsin\dfrac{1}{6}$, то: **1)** $18\cos x=\ldots$; **2)** $18\sqrt{35}\sin x=\ldots$.

Тема 8. Цілі рівняння

Вимоги матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:
- розв'язувати рівняння першого та другого степенів, а також рівняння, що зводяться до них;
- користуватися графічним методом розв'язування й дослідження рівнянь.

Лінійні рівняння з однією змінною

Лінійним рівнянням з однією змінною називають рівняння виду $ax = b$, де x — змінна, a і b — числа.

Якщо $a \neq 0$, то $x = \frac{b}{a}$ — єдиний корінь лінійного рівняння;

якщо $a = 0$, $b \neq 0$, то $0 \cdot x = b$ і рівняння коренів не має: $x \in \varnothing$;

якщо $a = 0$, $b = 0$, то $0 \cdot x = 0$ і коренями рівняння є всі дійсні числа: $x \in R$.

Рівняння, які зводяться до лінійних:

$2x - 2(x - 3) = 10;$ $2x - 2x + 6 = 10;$ $0x = 4.$	$2x + 2(x - 3) = 10;$ $2x + 2x - 6 = 10;$ $4x = 16;$ $x = 4.$	$2x - 2(x - 5) = 10;$ $2x - 2x + 10 = 10;$ $0x = 0.$
Відповідь. Коренів немає.	*Відповідь.* 4.	*Відповідь.* Довільне число.

Квадратні рівняння

Квадратним рівнянням (рівнянням другого степеня з однією змінною) називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — числа, до того ж $a \neq 0$. Якщо $b \neq 0$, $c \neq 0$, то квадратне рівняння називають повним. Якщо ж $b = 0$ або $c = 0$, то квадратне рівняння називають неповним.

Вираз $b^2 - 4ac$ називають *дискримінантом квадратного рівняння* і позначають літерою D. Кількість коренів квадратного рівняння залежить від значення дискримінанта.

Умова	*Корені*
$D = b^2 - 4ac > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ — два корені
$D = b^2 - 4ac = 0$	$x = \frac{-b}{2a}$ — один корінь
$D = b^2 - 4ac < 0$	жодного кореня

Наприклад, $5x^2 - 18x + 9 = 0$. $D = (-18)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 9 = 324 - 180 = 144 > 0$.

$x_1 = \frac{18 + \sqrt{144}}{2 \cdot 5} = \frac{18 + 12}{10} = 3$; $x_2 = \frac{18 - \sqrt{144}}{2 \cdot 5} = \frac{18 - 12}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. *Відповідь.* 3; $\frac{3}{5}$.

Квадратне рівняння, у якому перший коефіцієнт дорівнює одиниці ($a = 1$), називають *зведеним*. Другий коефіцієнт та вільний член зведеного квадратного рівняння позначають відповідно p та q, і рівняння має вигляд $x^2 + px + q = 0$.

Теорема Вієта. Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів — вільному члену. Тобто якщо x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$, то: $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

Наприклад, корені зведеного рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ дорівнюють $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Тоді $x_1 + x_2 = 5$; $x_1 \cdot x_2 = 6$.

Теорема, обернена до теореми Вієта. Якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно $-p$ і q, то m і n — корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Наприклад, -3 і -4 є відповідно сумою та добутком коренів квадратного рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$, тому коренями рівняння є числа -4 і 1.

Біквадратні рівняння

Біквадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де x — змінна, a, b, c — числа, до того ж $a \neq 0$. Заміною $x^2 = t$ біквадратне рівняння зводять до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$. Зробимо заміну $x^2 = t$. Тоді $x^4 = t^2$. Отримуємо рівняння $t^2 - 6t - 7 = 0$. Корені цього рівняння $t_1 = 7$, $t_2 = -1$. Повертаємося до змінної x: $x^2 = 7$; $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$ або $x^2 = -1$; коренів немає. *Відповідь.* $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$.

Двочленні рівняння

Алгебраїчне рівняння називають двочленним рівнянням, якщо воно має вигляд $x^n - a = 0$ ($n \in N$).

За будь-якого парного $n = 2k$ ($k \in N$), якщо $a > 0$, рівняння $x^{2k} - a = 0$ має два дійсні корені: $x_1 = \sqrt[2k]{a}$, $x_2 = -\sqrt[2k]{a}$. Якщо $a = 0$, то рівняння має один корінь $x = 0$. Якщо $a < 0$, рівняння не має дійсних коренів.

Наприклад: **а)** $x^6 - 64 = 0$; $x^6 = 64$; $x_1 = \sqrt[6]{64} = 2$; $x_2 = -\sqrt[6]{64} = -2$. *Відповідь.* ± 2;

б) $x^4 + 16 = 0$; $x^4 = -16$; $x \in \varnothing$. *Відповідь.* $x \in \varnothing$.

За будь-якого непарного $n = 2k - 1$ ($k \in N$), рівняння $x^{2k-1} - a = 0$ має один дійсний корінь:

$$x = \sqrt[2k-1]{a}.$$

Наприклад: **а)** $x^3 - 27 = 0$; $x^3 = 27$; $x = \sqrt[3]{27} = 3$. *Відповідь.* 3;

б) $x^5 + 32 = 0$; $x^5 = -32$; $x = \sqrt[5]{-32} = -2$. *Відповідь.* -2.

Якщо $a = 0$ за будь-якого $n \in N$ рівняння $x^n - a = 0$ має один корінь $x = 0$.

Наприклад: **а)** $x^3 = 0$; $x = 0$. *Відповідь.* 0; **б)** $x^5 = 0$; $x = 0$. *Відповідь.* 0.

Цілі раціональні рівняння вищих степенів

Рівняння виду $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$ ($n \in N$, $a_0 \neq 0$) називають алгебраїчним рівнянням степеня n.

Якщо $n = 1$, то $a_0x + a_1 = 0$ — лінійне рівняння.

Якщо $n = 2$, то $a_0x^2 + a_1x + a_2 = 0$ — квадратне рівняння.

Алгебраїчне рівняння степеня n має не більше n дійсних коренів.

Нехай $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Для рівняння $P_n(x) = 0$ справедлива теорема Безу (див. тему 3).

Розв'язання рівнянь вищих степенів, які мають хоча б один цілий корінь, виконують так:

1) знаходять множину дільників вільного члена a_n;

2) за теоремою Безу перевіряють, які з дільників є коренями рівняння $P_n(x) = 0$;

3) якщо x_1 — корінь рівняння $P_n(x) = 0$, то діленням у стовпчик знаходять частку $P_n(x) : (x - x_1)$;

4) записують частку $Q_{n-1}(x)$ як многочлен степеня $(n - 1)$;

5) визначають, якщо це можливо, корені многочлена $Q_{n-1}(x)$ і т. д.

Наприклад, знайти корені рівняння $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0$. Випишемо дільники вільного члена (-18): ± 1, ± 2, ± 3, ± 6, ± 9, ± 18.

Оскільки $P(1) = 0$, то поділимо многочлен $2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18$ на двочлен $x - 1$ і визначимо многочлен-частку:

$$\begin{array}{r|l}
2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 & x - 1 \\
\underline{2x^4 - 2x^3} & 2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 \\
-7x^3 + 4x^2 & \\
\underline{-7x^3 + 7x^2} & \\
-3x^2 + 21x & \\
\underline{-3x^2 + 3x} & \\
18x - 18 & \\
\underline{18x - 18} & \\
0 &
\end{array}$$

$$2x^4 - 9x^3 + 4x^2 + 21x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(2x^3 - 7x^2 - 3x + 18) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ 2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0. \end{array}\right.$$

Аналогічно визначаємо корінь рівняння $2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0$. Коренем рівняння є 2. Маємо:

$$2x^3 - 7x^2 - 3x + 18 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(2x^2 - 3x - 9) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ 2x^2 - 3x - 9 = 0; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ x = 3; \\ x = -1{,}5. \end{array}\right.$$

Відповідь. $-1{,}5$; 1; 2; 3.

Рівняння з модулями

Найпростіше рівняння з модулем $|f(x)| = a$ рівносильне сукупності рівнянь $\begin{cases} f(x) = a; \\ f(x) = -a, \end{cases}$ якщо $a \geq 0$. Якщо ж $a < 0$, то рівняння коренів не має. Наприклад, розв'язати рівняння $|2x - 3| = 5$.

$|2x - 3| = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 5; \\ 2x - 3 = -5; \end{cases} \begin{cases} x = 4; \\ x = -1. \end{cases}$ *Відповідь.* -1; 4.

Розв'язуючи рівняння, які містять змінну під знаком модуля, найчастіше застосовують такі методи:

1) *розкриття модуля за означенням.*

Наприклад, розв'язати рівняння $|x - 1| = 2x - 5$. Розглянемо два випадки, коли підмодульний вираз $x - 1$ невід'ємний і коли він від'ємний. Якщо $x - 1 \geq 0$, то $|x - 1| = x - 1$; якщо $x - 1 < 0$, то $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$. Тоді початкове рівняння еквівалентне сукупності двох систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} x - 1 \geq 0; \\ x - 1 = 2x - 5; \end{cases} \\ \begin{cases} x - 1 < 0; \\ -x + 1 = 2x - 5; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x \geq 1; \\ x = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1; \\ x = 2. \end{cases} \end{cases}$$

Перша система має розв'язок $x = 4$, а друга — розв'язків не має. *В-дь.* 4;

2) *піднесення обох частин рівняння до квадрата.*

Наприклад, розв'язати рівняння $|2 - x| = 2x - 10$. Якщо $2x - 10 < 0$; $x < 5$, то рівняння розв'язків не має, оскільки $|2 - x| \geq 0$. У випадку коли $2x - 10 \geq 0$, обидві частини рівняння невід'ємні й тому при піднесенні обох частин до квадрата одержимо рівносильну початковому рівнянню систему:

$$\begin{cases} 2x - 10 \geq 0; \\ (2 - x)^2 = (2x - 10)^2; \end{cases} \begin{cases} 2x \geq 10; \\ 4 - 4x + x^2 = 4x^2 - 40x + 100; \end{cases} \begin{cases} x \geq 5; \\ x^2 - 12x + 32 = 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 5; \\ \left[\begin{array}{l} x_1 = 8; \\ x_2 = 4; \end{array}\right. \end{cases}$$

$x = 8$. *Відповідь.* 8.

Спосіб піднесення до квадрата найбільше підходить для розв'язування рівнянь виду $|f(x)| = |g(x)|$.

Наприклад, розв'язати рівняння $|2x - 3| = |x + 7|$; $(2x - 3)^2 = (x + 7)^2$; $4x^2 - 12x + 9 = x^2 + 14x + 49$;

$3x^2 - 26x - 40 = 0$; $\left[\begin{array}{l} x_1 = -\dfrac{4}{3}; \\ x_2 = 10. \end{array}\right.$ *Відповідь.* $-\dfrac{4}{3}$; 10;

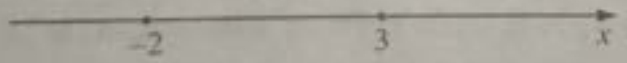
3) *метод інтервалів* (*проміжків*). Даний метод полягає у наступному:

а) прирівнюють до нуля вирази, які стоять під знаком модуля;

б) отримані значення відкладають на числовій прямій, яка при цьому розбивається на проміжки (інтервали), на кожному з яких визначається знак підмодульного виразу;

в) розв'язують отримані рівняння на кожному з інтервалів. Цей метод доцільно використовувати тоді, коли рівняння містить більше одного модуля.

Наприклад, розв'язати рівняння $|3 - x| - |x + 2| = 5$. Нанесемо на числову пряму значення x, за яких $3 - x = 0$ і $x + 2 = 0$, тобто $x = 3$ і $x = -2$. Числова пряма при цьому розіб'ється на три проміжки: $(-\infty; -2]$, $(-2; 3]$, $(3; +\infty)$.



Розв'яжемо рівняння на кожному з цих проміжків.

1) $x \in (-\infty; -2]$. На цьому проміжку $|3 - x| = 3 - x$, $|x + 2| = -x - 2$; $3 - x - (-x - 2) = 5$;

2) $3 - x + x + 2 = 5$; $0x = 0$; x — будь-яке число із заданого проміжку, тобто $x \in (-\infty; -2]$;

2) $x \in (-2; 3]$. На цьому проміжку $|3 - x| = 3 - x$, $|x + 2| = x + 2$; $3 - x - (x + 2) = 5$; $3 - x - x - 2 = 5$; $-2x = 4$; $x = -2$; $-2 \in (-2; 3]$; $x \in \varnothing$;

3) $x \in (3; +\infty)$. На цьому проміжку $|3 - x| = -(3 - x) = -3 + x$, $|x + 2| = x + 2$; $-3 + x - (x + 2) = 5$; $-3 + x - x - 2 = 5$; $0x = 10$; $x \in \varnothing$.

Одержимо: $x \in (-\infty; -2]$. *Відповідь.* $x \in (-\infty; -2]$.

Рівняння з параметрами

1. *Лінійні рівняння з параметром.* Якщо в рівнянні, крім букв, що позначають невідомі, є одна або кілька інших букв, то таке рівняння називають *рівнянням з буквеними коефіцієнтами*. Буквені коефіцієнти в рівнянні називають *параметрами*.

Наприклад, якщо в рівнянні $(a + 3) \cdot x = 7$, де x — змінна, a — позначає якесь число, то кажуть, що це рівняння з параметром a.

Розв'язати рівняння з параметром означає знайти його корені для всіх значень параметра.

Рівняння з параметрами розв'язують так само, як і рівняння без параметрів, але лише доти, доки кожне перетворення можна виконати однозначно. Якщо ж якесь перетворення не можна виконати однозначно, то розв'язання потрібно розбити на різні випадки залежно від значення параметра.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння $(a + 3) \cdot x = 7$, потрібно розглянути такі випадки:

1) якщо $a + 3 = 0$, тобто $a = -3$, одержимо рівняння $0x = 7$, яке не має коренів;

2) якщо $a + 3 \neq 0$, тобто $a \neq -3$, то рівняння має корінь $x = \frac{7}{a+3}$, до того ж він єдиний.

Відповідь. Якщо $a = -3$, то рівняння коренів не має; якщо $a \neq -3$, то рівняння має корінь $x = \frac{7}{a+3}$.

Узагалі будь-яке лінійне рівняння з параметром можна звести до рівняння виду $ax = b$.

Наприклад, розв'язати рівняння $4x + c = c^2x + 2$. $4x + c = c^2x + 2 \Leftrightarrow 4x - c^2x = 2 - c \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (4 - c^2)x = 2 - c \Leftrightarrow (2 - c)(2 + c)x = 2 - c$. Якщо $2 - c = 0$, тобто $c = 2$, то рівняння набуває виду $0x = 0$. Це рівняння має безліч коренів. Якщо $2 + c = 0$, тобто $c = -2$, одержимо $0x = 4$. Це рівняння не має коренів. Якщо $c \neq 2$ і $c \neq -2$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{2-c}{(2-c)(2+c)} = \frac{1}{2+c}$.

Відповідь. Якщо $c = 2$, то $x \in R$; якщо $c = -2$, то $x \in \varnothing$; якщо $c \neq \pm 2$, то $x = \frac{1}{2+c}$.

2. *Квадратні рівняння з параметрами.*

Розв'язання квадратного рівняння з параметром слід розпочинати із запитання «А чи є рівняння квадратним?». Якщо коефіцієнт біля x^2 може набувати нульового значення, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ перетвориться в лінійне рівняння $bx + c = 0$.

Наприклад, розв'язати рівняння $ax^2 + 2x + 1 = 0$. Розв'язання почнемо з випадку, коли $a = 0$. Тоді одержимо рівняння $2x + 1 = 0$, звідки $x = -0{,}5$. Якщо ж $a \neq 0$, то обчислимо: $D = 4 - 4a = 4(1 - a)$. Далі, якщо $a > 1$, то $D < 0$ і $x \in \varnothing$.

Якщо $a = 1$, то $D = 0$ і $x = \frac{-2}{2 \cdot 1} = -1$. Якщо $a < 1$, то $D > 0$ і $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

Відповідь. Якщо $a = 0$, то $x = -0{,}5$; якщо $a = 1$, то $x = -1$; якщо $a \in (1; +\infty)$, то $x \in \varnothing$; якщо $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1)$, то $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-a}}{a}$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $x(x - 4) = x^2 + 8$.

А	Б	В	Г	Д
–2	2	–2; 2	$\varnothing$	$x \in R$

■ $x(x - 4) = x^2 + 8$; $x^2 - 4x = x^2 + 8$; $-4x = 8$; $x = -2$. *Відповідь.* **А.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $4x + 3x^2 = 7$.

■ $4x + 3x^2 = 7$; $3x^2 + 4x - 7 = 0$. $D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7) = 16 + 84 = 100$.

$x_1 = \frac{-4+10}{6} = \frac{6}{6} = 1$; $x_2 = \frac{-4-10}{2 \cdot 3} = \frac{-14}{6} = -\frac{7}{3} = -2\frac{1}{3}$. *Відповідь.* $-2\frac{1}{3}$; 1. ■

Приклад 3. Обчислити відношення меншого кореня квадратного рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$ до його більшого кореня.

А	Б	В	Г	Д
6	–6	1/6	–1/6	–3/2

■ $x^2 + 5x - 6 = 0$; $x_1 = -6$, $x_2 = 1$. Оскільки $x_1 < x_2$, то $x_1 : x_2 = -6 : 1 = -6$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $(x^2 + 2x)(x - 1) = 0$.

А	Б	В	Г	Д
1	0; 2	–2; 0; 1	∅	–2; 1

■ $(x^2 + 2x)(x - 1) = 0$; $x(x + 2)(x - 1) = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = 1$. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $|x - 5| = 3$.

А	Б	В	Г	Д
8	2; 8	–8; –2	–2	коренів немає

■ $|x - 5| = 3$; $\left[\begin{array}{l} x - 5 = 3; \\ x - 5 = -3; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 8; \\ x = 2. \end{array}\right.$ *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 6. Знайти $x_1^2 + x_2^2$, де x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 - 12x + 13 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
157	131	144	169	118

■ $D = 144 - 52 = 92 > 0$, то за теоремою Вієта $x_1 \cdot x_2 = 13$, $x_1 + x_2 = 12$. Піднесемо обидві частини рівності $x_1 + x_2 = 12$ до квадрата: $(x_1 + x_2)^2 = 12^2$; $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 144$; $x_1^2 + x_2^2 = 144 - 2x_1x_2$; $x_1^2 + x_2^2 = 144 - 2 \cdot 13$; $x_1^2 + x_2^2 = 144 - 26$; $x_1^2 + x_2^2 = 118$. *Відповідь.* **Д.** ■

Приклад 7. Розв'язати рівняння $|2x + 3| - 5x - 18 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
–5; –3	–5	3	–3	5

■ $|2x + 3| = 5x + 18$; $\begin{cases} (2x + 3)^2 = (5x + 18)^2; \\ 5x + 18 \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 4x^2 + 12x + 9 = 25x^2 + 180x + 324; \\ x \geq -18/5; \end{cases}$

$\begin{cases} 21x^2 + 168x + 315 = 0; \\ x \geq -3{,}6; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 8x + 15 = 0; \\ x \geq -3{,}6; \end{cases}$ $\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = -5; \\ x = -3; \end{array}\right. \quad x = -3. \\ x \geq -3{,}6; \end{array}\right.$ *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 8. Розв'язати рівняння $x^4 - x^3 - 27x + 27 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
–1; –3	–3; 1	–1; 3	1; 3	1; 27

■ $x^4 - x^3 - 27x + 27 = 0$; $x^3(x - 1) - 27(x - 1) = 0$; $(x - 1)(x^3 - 27) = 0$; $x_1 = 1$; $x_2 = 3$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 9. Розв'язати рівняння $2x^8 + x^4 - 15 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt[4]{2{,}5}$	±3	–3; 2,5	$\pm\sqrt{2{,}5}$

■ Нехай $x^4 = t$, $t \geq 0$. Тоді $x^8 = t^2$. Маємо: $2t^2 + t - 15 = 0$; $D = 121$; $t_1 = \dfrac{-1-11}{4} = -3$ — не задовольняє умову $t \geq 0$; $t_2 = \dfrac{-1+11}{4} = 2{,}5$. Повертаємося до заміни: $x^4 = 2{,}5$; $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{2{,}5}$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 10. Розв'язати рівняння $x^2 - 2|x| - 8 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
±4	–2; 4	±2; ±4	–4; –2	±2

■ $x^2 - 2|x| - 8 = 0$; $|x|^2 - 2|x| - 8 = 0$; $(|x| - 4)(|x| + 2) = 0$. Оскільки $|x| + 2 > 0$, то $|x| = 4$, $x = \pm 4$. *В-дь.* **А.** ■

Приклад 11. Розв'язати рівняння $(x^2 - 5x)^2 - 2x^2 + 10x = 24$.

А	Б	В	Г	Д
–1; 1; 4; 6	–4; –1; 1; 6	–6; –1; 1; 4	–6; –4; –1; 1	–4; 6

■ $(x^2 - 5x)^2 - 2(x^2 - 5x) = 24$. Нехай $x^2 - 5x = t$, тоді одержимо: $t^2 - 2t - 24 = 0$;

$\begin{cases} t_1 = 6; \\ t_2 = -4. \end{cases}$ Повернемося до заміни: $\begin{cases} x^2 - 5x = 6; \\ x^2 - 5x = -4; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0; \\ x^2 - 5x + 4 = 0; \end{cases}$ $x_1 = 6; x_2 = -1; x_3 = 1; x_4 = 4$. *Відь.* А. ■

Приклад 12. Розв'язати рівняння $(x^2 + 4x)^2 - 2(x + 2)^2 = 7$.

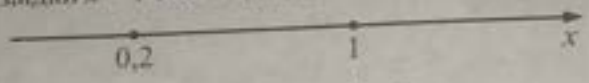
А	Б	В	Г	Д
–5; –1; 1; 3	–5; –3; –1; 1	–3; –1; 1; 5	–1; 1; 3; 5	–3; –1; 1; 5

■ Запишемо дане рівняння у вигляді $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x + 4) = 7$; $(x^2 + 4x)^2 - 2(x^2 + 4x) - 15 = 0$.

Введемо заміну $t = x^2 + 4x$; $t^2 - 2t - 15 = 0$; $\begin{cases} t_1 = -3; \\ t_2 = 5. \end{cases}$ Отже, $\begin{cases} x^2 + 4x = -3; \\ x^2 + 4x = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0; \\ x^2 + 4x - 5 = 0; \end{cases}$ $x_1 = -3; x_2 = -1;$ $x_3 = -5; x_4 = 1$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 13. Розв'язати рівняння $||5 - 5x| - |5x - 1|| = 3$. У відповідь записати добуток коренів. Якщо коренів безліч, то у відповідь записати 100, якщо коренів немає, то у відповідь записати 200.

■ Розкриємо зовнішній модуль й одержимо: $|5 - 5x| - |5x - 1| = \pm 3$; Знайдемо нулі підмодульних виразів: $5 - 5x = 0$ і $5x - 1 = 0$, звідки $x = 1$ та $x = 0{,}2$. Нанесемо одержані значення на числову пряму.



Розв'яжемо рівняння на кожному з одержаних проміжків.

1) $x \in (-\infty; 0{,}2]$. $|5 - 5x| = 5 - 5x$, $|5x - 1| = -(5x - 1) = -5x + 1$. $5 - 5x - (-5x + 1) = \pm 3$; $0x = \pm 3 - 4$; $x \in \varnothing$;

2) $x \in (0{,}2; 1]$. $|5 - 5x| = 5 - 5x$, $|5x - 1| = 5x - 1$. $5 - 5x - (5x - 1) = \pm 3$; $-10x = \pm 3 - 6$; $x_1 = 0{,}3$;

$0{,}3 \in (0{,}2; 1]$; $x_2 = 0{,}9$; $0{,}9 \in (0{,}2; 1]$;

3) $x \in (1; +\infty)$. $|5 - 5x| = -(5 - 5x) = -5 + 5x$; $|5x - 1| = 5x - 1$. $-5 + 5x - (5x - 1) = \pm 3$; $0x = 4 \pm 3$; $x \in \varnothing$.

Отже, рівняння має розв'язки $x_1 = 0{,}3$; $x_2 = 0{,}9$. Тоді добуток коренів дорівнює $0{,}3 \cdot 0{,}9 = 0{,}27$.

Відповідь. 0,27. ■

Приклад 14. Розв'язати рівняння $x^3 + 12x^2 + 44x + 48 = 0$. У відповідь записати суму коренів.

■ Якщо рівняння має цілий корінь, то він є дільником вільного члена 48, тобто це може бути ± 1; ± 2; ± 3; ± 4; ± 6; ± 8; ± 12; ± 16; ± 24; ± 48. Перевірка показує, що число -2 є коренем вихідного рівняння. Поділимо многочлен $x^3 + 12x^2 + 44x + 48$ на двочлен $x + 2$.

Отримаємо: $(x + 2)(x^2 + 10x + 24) = 0$; $\begin{cases} x = -2; \\ x^2 + 10x + 24 = 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2; \\ (x + 4)(x + 6) = 0; \end{cases}$ $x_1 = -2; x_2 = -4; x_3 = -6$.

Тоді сума коренів рівняння дорівнює $-2 + (-4) + (-6) = -12$. *Відповідь.* –12. ■

Приклад 15. Розв'язати рівняння $(a^2 - 3a - 4)x + 16 = a^2$. У відповідь записати значення параметра a, за якого рівняння має безліч коренів.

■ Запишемо дане рівняння у вигляді $(a - 4)(a + 1)x = a^2 - 16$; $(a - 4)(a + 1)x = (a - 4)(a + 4)$.

Якщо $a = -1$, то $0x = -15$; $x \in \varnothing$;

якщо $a = 4$, то $0x = 0$; $x \in R$;

якщо $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; 4) \cup (4; +\infty)$, то $x = \dfrac{(a-4)(a+4)}{(a-4)(a+1)} = \dfrac{a+4}{a+1}$. *Відповідь.* 4. ■

Приклад 16. За якого значення параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 + (2 - a)x - a - 3 = 0$ найменша?

■ За умови, що $D = (2 - a)^2 + 4(a + 3) \geq 0$ за теоремою Вієта маємо: $\begin{cases} x_1 + x_2 = a - 2; \\ x_1 \cdot x_2 = -a - 3. \end{cases}$ Тоді: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2 = (a-2)^2 + 2(a+3) = a^2 - 2a + 10 = (a-1)^2 + 9$. Сума $x_1^2 + x_2^2$ набуває найменшого значення, якщо $a = 1$. Якщо $a = 1$, то корені існують, оскільки $D = 1^2 + 4 \cdot (1 + 3) = 17 > 0$.

Відповідь. 1. ■

Завдання 8.1–8.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

8.1. Розв'язати рівняння $ax + b = c$, де $a \neq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \frac{a}{b-c}$	$x = \frac{a}{c-b}$	$x = \frac{b-c}{a}$	$x = \frac{c-b}{a}$	$x = \frac{c+b}{a}$

8.2. Розв'язати рівняння $\frac{1}{7}x - 2 = 0$ і $-0{,}2x = 4$ та записати добуток їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
–70	$-\frac{1}{70}$	–28	280	–280

8.3. Розв'язати рівняння $|x - 1| = 3$ та знайти суму його коренів.

А 0 Б 4 В 2 Г –2 Д –4

8.4. Знайти дискримінант рівняння $3x^2 - 2x - 5 = 0$.

А 64 Б –64 В 8 Г –31 Д 49

8.5. Знайти суму коренів рівняння $2x^2 - 5x - 7 = 0$.

А 5 Б –2,5 В 2,5 Г –7 Д –3,5

8.6. Скласти зведене квадратне рівняння з коренями $\sqrt{2}$ і $\sqrt{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 - 3\sqrt{2}x + 16 = 0$	$x^2 - 4x + 3\sqrt{2} = 0$	$x^2 + 3\sqrt{2}x + 4 = 0$	$x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$	скласти неможливо

8.7. Знайти суму цілих чисел, що належать відрізку, кінцями якого є корені квадратного рівняння $10x^2 + 7x - 12 = 0$.

А –2 Б –1 В 0 Г 1 Д –5

8.8. Скільки коренів має рівняння $|x^2 - 3x + 2| = 2$?

А Один Б два В три Г чотири Д жодного

8.9. У першій пачці зошитів було удвічі більше, ніж у другій. Коли з другої пачки переклали до першої 10 зошитів, то в другій стало в 4 рази менше зошитів, ніж у першій. Скільки зошитів було в другій пачці?

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо кількість зошитів у другій пачці позначено через x?

А	Б	В	Г	Д
$2x = 4(x - 10)$	$4(2x + 10) = x - 10$	$2x + 10 = 4x - 10$	$2x + 10 = 4(x - 10)$	$x + 2 + 10 = 4(x - 10)$

8.10. Одну й ту ж відстань один автомобіль проїхав за 3 год, а другий — за 2 год. Знайти швидкість руху автомобіля, який їхав повільніше, якщо його швидкість на 24 км/год менша від швидкості другого автомобіля. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо шукану швидкість позначено через x км/год?

А	Б	В	Г	Д
$3(x - 24) = 2x$	$3(x + 24) = 2x$	$3x = 2(x + 24)$	$\frac{x}{3} = \frac{x+24}{2}$	$3x = 2x + 24$

8.11. У першості з волейболу було зіграно 21 матч, при цьому кожна команда зіграла з іншими по одному разу. Скільки команд брало участь у першості? Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо кількість команд позначено через x?

А	Б	В	Г	Д
$x(x+1)=2$	$\frac{x(x-1)}{2}=21$	$\frac{x(x+1)}{2}=21$	$x+x-1=21$	$x(x-1)=21$

8.12. За якої умови рівняння $ax+b=cx+d$ не має коренів?

А	Б	В	Г	Д
$a=0, c\neq 0$	$a\neq c, d\neq b$	$a\neq c, d=b$	$a=c, d\neq b$	$a=c, d=b$

8.13. Коренем рівняння $kx=3$ є число 0,2. Знайти корінь рівняння $kx=-1$.

А $-\frac{1}{15}$ Б 15 В $-\frac{5}{3}$ Г $\frac{5}{3}$ Д $-\frac{2}{3}$

8.14. Знайти значення параметра a, за якого рівняння $(a^2-1)x=a^2+5a-6$ має безліч коренів.

А 1 Б ± 1 В $-6; 1$ Г $-6; \pm 1$ Д 0

8.15. За якого значення a рівняння $a^2x-2a^2=49x+14a$ має єдиний корінь?

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -7)$	$(7; +\infty)$	$(-\infty; -7)\cup(7; +\infty)$	$(-7; 7)$	$(-\infty; -7)\cup (-7; 7)\cup(7; +\infty)$

8.16. За якого t значення виразу $-0{,}3t+18$ на 5 більше від значення виразу $0{,}1t+1$?

А $-16{,}25$ Б 16,25 В 30 Г 55 Д -30

8.17. Знайти суму коренів рівняння $|4x-8|+|2-x|=4$.

А 2,8 Б 1,2 В 1,6 Г 4 Д 3

8.18. Знайти корінь рівняння $|x-1|+|x+3|=6{,}2$, який належить проміжку $(-\infty; -3)$.

А $-4{,}1$ Б $-2{,}1$ В -4 Г -5 Д -6

8.19. Указати всі значення a, за яких рівняння $|x-5|-1=a$ має два корені.

А $a>5$ Б $a<4$ В $a>1$ Г $a\geq -1$ Д $a>-1$

8.20. Знайти всі значення a, за яких один з коренів рівняння $x^2+2ax+a^2=0$ дорівнює -2.

А $a=\pm 2$ Б $a=2$ В $a=4$ Г $a=\pm 4$ Д $a=-2$

8.21. За яких значень m рівняння $4x^2+2x-m=0$ має тільки один корінь?

А 0,5 Б $-0{,}5$ В 0,25 Г $-0{,}25$ Д $\pm 0{,}25$

8.22. Знайти всі значення c, за яких рівняння $3x^2-2x+c=0$ має хоча б один спільний корінь з рівнянням $x^2+x-2=0$.

А	Б	В	Г	Д
$c=-5, c=-1{,}6$	$c=8, c=1$	$c=-16, c=-1$	$c=8, c=-1$	$c=5, c=1{,}6$

8.23. x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2-3x-5=0$. Не розв'язуючи рівняння, знайти $x_1^2+x_2^2$.

А -1 Б 19 В 4 Г -4 Д -19

8.24. Скільки коренів має рівняння $x^2-7|x|+10=0$?

А Один Б два В три Г чотири Д жодного

Завдання 8.25–8.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

8.25. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $ax + b = c,\ a \neq 0$ 2 $ax - b = c,\ a \neq 0$ 3 $ax - b + c = 0,\ a \neq 0$

А $\frac{a}{c+b}$ Б $\frac{c+b}{a}$ В $\frac{-c-b}{a}$ Г $\frac{b-c}{a}$ Д $\frac{c-b}{a}$

8.26. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $5x - 0,(3) = 5x - \frac{1}{3}$

2 $5x - 2 = 5x + 2$

3 $|5x - 2| = 2$

А Жодного
Б Один
В Два
Г Три
Д Безліч

8.27. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $7x + 2 = 5x + 6$
2 $7x - 2 = 6 - 5x$
3 $7x - 2 = -6 - 5x$

А $-\frac{1}{3}$
Б -1
В 0
Г $\frac{2}{3}$
Д 2

8.28. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $x^2 - 4x = 0$
2 $2x^2 - \sqrt{3}x - 1 = 0$
3 $-x^2 + 2x + 1,5 = 0$

А $\frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$
Б $\frac{\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{4}$
В $0; 4$
Г $\frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{13}}{2}$
Д $\frac{2+\sqrt{10}}{2}; \frac{3+\sqrt{11}}{4}$

8.29. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $x^2 - 4x + 3 = 0$

2 $x^2 + 2x - 3 = 0$

3 $x^2 + 4x + 3 = 0$

А $\varnothing$
Б $\{-1; -3\}$
В $\{-1; 3\}$
Г $\{-3; 1\}$
Д $\{1; 3\}$

8.30. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $x^2 - 6x + 1 = 0$

2 $x^2 - 6x - 1 = 0$

3 $x^2 - 6x + 2 = 0$

А $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{5}$
Б $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}$
В $x_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2}$
Г $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{11}$
Д $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{7}$

8.31. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д), якщо x_1 та x_2 — корені квадратного рівняння $x^2 - 5x - 4 = 0$.

1 $x_1x_2 + x_1 + x_2$

2 $x_1^2 + x_2^2$

3 $(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2$

А –20
Б 1
В 33
Г 65
Д 17

8.32. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

2 $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

3 $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$

А Жодного
Б Один
В Два
Г Три
Д Чотири

8.33. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $|x - 3| = 4$

2 $|x - 4| = -3$

3 $|x + 4| = 3$

А ∅
Б {1; 7}
В {–7; 1}
Г {–7; –1}
Д {–1; 7}

8.34. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $|2x - 3| = 2x - 3$

2 $|2x - 3| = -2x + 3$

3 $|2x - 3| = -x^2 - 1$

А $(-\infty; 1{,}5]$
Б $(-\infty; +\infty)$
В $[0; +\infty)$
Г $[1{,}5; +\infty)$
Д ∅

Розв'яжіть завдання 8.35–8.50. Відповідь запишіть десятковим дробом.

8.35. Розв'язати рівняння $\frac{x-2}{5} + \frac{2x-5}{4} + \frac{4x-1}{20} = 4 - x$.

8.36. За якого значення параметра a сума коренів рівняння $x^2 - (a^2 - 17a + 83)x - 21 = 0$ буде найменшою?

8.37. Розв'язати рівняння $x^6 - 3x^3 + 2 = 0$. У відповідь записати найменший корінь.

8.38. Розв'язати рівняння $x^3 + 9x^2 + 9x + 1 = 0$. У відповідь записати суму коренів.

8.39. Розв'язати рівняння $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$. У відповідь записати найбільший корінь.

8.40. Розв'язати рівняння $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$. У відповідь записати добуток коренів.

8.41. Розв'язати рівняння $|3x^2 - x| = 8 + x$. У відповідь записати найбільший корінь.

8.42. Розв'язати рівняння $|x + 1| + |x - 5| = 20$. У відповідь записати модуль різниці коренів.

8.43. Батько старший від сина в 9 разів, а сума їхніх років дорівнює 30. Через скільки років батько стане старшим від сина удвічі?

8.44. У двоцифровому числі цифра десятків утричі більша, ніж цифра одиниць. Якщо від цього числа відняти число, записане цими ж цифрами, але у зворотному порядку, то отримаємо 36. Знайти це число.

8.45. Розв'язати рівняння $(x + 2)(x + 1)x(x - 1) = 24$. У відповідь записати додатний корінь.

8.46. Розв'язати рівняння $x^4 + (x - 4)^4 = 82$. У відповідь записати найбільший корінь.

8.47. Розв'язати рівняння $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$. У відповідь записати найменший корінь.

8.48. Розв'язати рівняння $||x + 1| - |x - 3|| = |x|$. У відповідь записати суму натуральних коренів.

8.49. Розв'язати рівняння $|x^2 - 9| + |x^2 - 16| = 7$. У відповідь записати кількість цілих коренів.

8.50. Коренями рівняння $x^2 - 12x + 13 = 0$ є числа x_1 і x_2. Знайти: **1.** $x_1^2 + x_2^2$; **2.** $\frac{1}{12}\left(x_1^3 + x_2^3\right)$.

Тема 9. Цілі нерівності

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:
— розв'язувати нерівності першого та другого степенів, а також нерівності, що зводяться до них;
— користуватися графічним методом розв'язування й дослідження нерівностей.

Якщо два вирази зі змінною сполучити одним зі знаків — $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, то одержимо *нерівність зі змінною*. *Розв'язком нерівності* називають будь-яке значення змінної, за якого нерівність зі змінною перетворюється в правильну числову нерівність. Наприклад, число 3 є розв'язком нерівності $2x+5<20$, бо $2\cdot 3+5<20$; $11<20$ — правильна нерівність. *Розв'язати нерівність* зі змінною означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків не існує. Наприклад, будь-яке число, менше за 7,5 ($x\in(-\infty;\,7{,}5)$), перетворює нерівність $2x+5<20$ у правильну, а всяке інше — у неправильну, тому розв'язком цієї нерівності є проміжок $x\in(-\infty;\,7{,}5)$.

Нерівності називають *рівносильними*, якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків. Наприклад, нерівності $x^2\leq 1$ і $|x|\leq 1$ рівносильні, оскільки вони мають одну й ту саму множину розв'язків — відрізок $[-1;\,1]$.

Щоб розв'язати нерівність, потрібно проводити рівносильні перетворення.

Основні властивості рівносильності нерівностей:

- якщо доданок перенести з одної частини нерівності в іншу, змінивши при цьому його знак на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
  Наприклад, нерівність $x-7<4$ рівносильна нерівності $x<4+7$;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на вираз, який набуває лише додатних значень (зокрема, на додатне число), то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
  Наприклад, нерівність $3x<15$ рівносильна нерівності $x<\frac{15}{3}$;
- якщо обидві частини нерівності помножити або поділити на вираз, який набуває лише від'ємних значень (зокрема, на від'ємне число), і змінити знак нерівності на протилежний, то отримаємо нерівність, рівносильну даній.
  Наприклад, нерівність $-8x\geq 4$ рівносильна нерівності $x\leq\frac{4}{-8}$.

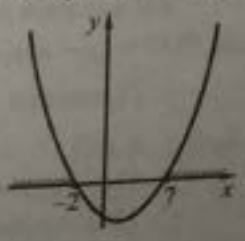
Лінійні нерівності

Нерівності виду $ax\diamond b$, де a, b — числа, x — змінна, $\diamond$ — один зі знаків $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, називають *лінійними*. Розглянемо нерівність $ax>b$. Якщо $a>0$, то $ax>b\Leftrightarrow x>\frac{b}{a}\Leftrightarrow x\in\left(\frac{b}{a};+\infty\right)$; якщо $a<0$, то $ax>b\Leftrightarrow x<\frac{b}{a}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;\frac{b}{a}\right)$; якщо $a=0$, то нерівність $0x>b$ правильна за будь-якого значення x, якщо b — від'ємне число ($b<0$), і не має розв'язків, якщо b — невід'ємне число ($b\geq 0$).

Наприклад, розв'язати нерівність $12-7x\geq 33$; $-7x\geq 33-12$; $-7x\geq 21$; $x\leq -3$. *В-дь.* $(-\infty;-3]$.

Нерівності другого степеня. Нерівності виду $ax^2+bx+c\diamond 0$, де a, b, c — числа, $a\neq 0$, x — змінна, називають нерівностями другого степеня (***квадратичними***).

Наприклад, $7x^2+3x-11\leq 0$, $x^2-8>0$ — квадратичні нерівності. Розв'язання квадратичних нерівностей зводять до відшукання проміжків, на яких відповідна квадратична функція $y=ax^2+bx+c$ набуває певних значень.



Наприклад, розв'язати нерівність $x^2-5x-14\geq 0$.

Графіком квадратичної функції $y=x^2-5x-14$ є парабола, вітки якої напрямлені вгору (бо $a>0$). Нулі цієї функції: $x_1=-2$, $x_2=7$. Функція набуває невід'ємних значень ($y\geq 0$), якщо $x\in(-\infty;-2]\cup[7;+\infty)$. *Відповідь.* $(-\infty;-2]\cup[7;+\infty)$.

Раціональні нерівності

Нерівності виду $P(x)\lessgtr 0$, де $P(x)$ — многочлен, називають ***раціональними***. Раціональними також називають нерівності, які набувають вказаного вигляду після розкривання дужок та зведення подібних доданків. Наприклад, $5x^3-4x^2-2x-1\geq 0$, $x(x-7)^3(2x^2+9)>0$ — раціональні нерівності. Лінійні та квадратичні нерівності є раціональними.

Метод інтервалів. Нехай потрібно розв'язати нерівність $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)>0$. Оскільки нулями лівої частини є $x_1, x_2, \ldots, x_n$ то найпоширеніші знаки нерівності на кожному з проміжків, на які нулі поділили вісь Ox, знаходимо розв'язок нерівності.

Наприклад, $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$.

1. Позначимо на осі Ox точки 1, 2, 3, 4 — нулі множників лівої частини нерівності. Вони поділять вісь Ox на проміжки $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; 3)$, $(3; 4)$, $(4; +\infty)$.

2. Для будь-якого x, що міститься праворуч від 4, будь-який двочлен лівої частини нерівності додатний, тому $P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)>0$ для будь-якого x, що належить проміжку $(4; +\infty)$.

3. Для будь-якого x, що лежить між точками 3 й 4, останній множник у добутку $P(x)$ від'ємний, а решта — додатні, тому $P(x)<0$ для будь-якого x, що належить проміжку $(3; 4)$.

4. Для будь-якого x, що лежить між точками 2 і 3, останніх два множники в добутку $P(x)$ від'ємні, а решта додатні, тому $P(x)>0$ для будь-якого x, що належить проміжку $(2; 3)$.

5. Аналогічно $P(x)<0$ для x із проміжку $(1; 2)$. Для $x\in(-\infty; 1)$: $P(x)>0$.

Отже,



Відповідь. $(-\infty; 1)\cup(2; 3)\cup(4; +\infty)$.

Розглянемо розв'язання нерівностей виду $P(x)\lessgtr 0$, де $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, $x_1<x_2<\ldots<x_n$, $n\geq 1$, $n\in N$, і не всі числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — різні. У цьому випадку добуток однакових двочленів записують у вигляді степеня цих двочленів. Для розв'язання таких нерівностей використовують загальний метод інтервалів.

Наприклад, розв'язати нерівність $(x+8)(x-1)^2(x-5)<0$. Ліва частина цієї нерівності є добутком, який містить множник $(x-1)^2$. Цей множник за будь-яких значень x, крім 1, є додатним числом. Тому для всіх $x\neq 1$ добуток має той же знак, що й добуток $(x+8)(x-5)$. Отже, дана нерівність рівносильна системі $\begin{cases}(x+8)(x-5)<0,\\ x\neq 1.\end{cases}$ Множиною розв'язків нерівності $(x+8)(x-5)<0$ є проміжок $(-8; 5)$. Щоб знайти всі розв'язки нерівності $(x+8)(x-1)^2(x-5)<0$, потрібно із проміжку $(-8; 5)$ виключити число 1. У результаті одержимо $x\in(-8; 1)\cup(1; 5)$.

Указані під час переходу через нуль множника парної кратності чергування знаків не відбувається.

Розв'яжемо нерівність $(x-2)^3(x+1)(x-4)>0$. Позначимо на координатній прямій нулі множників: -1, 2 і 4. Рухаючись справа наліво при переході через нуль множника $(x-2)^3$, добуток $(x-2)^3(x+1)(x-4)$ змінює знак так само, як і добуток $(x-2)(x+1)(x-4)$, оскільки множник $(x-2)^3$ змінює знак (непарний степінь числа має той самий знак, що й перший степінь цього ж числа). У результаті одержимо відповідь $x\in(-1; 2)\cup(4; +\infty)$.

Загальний метод інтервалів для розв'язання нерівностей виду $P(x)\lessgtr 0$, де $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$, $x_1<x_2<\ldots<x_n$, $n\geq 1$, $n\in N$, якщо не всі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ різні.

1. Привести раціональну нерівність до виду $P(x)\lessgtr 0$, де $P(x)=(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_n)^{k_n}$, $k_n\geq 1$, $k_n\in N$.

2. Нулі множників розташувати на осі Ox у відповідному порядку.

3. Над проміжком праворуч від найбільшого нуля многочлена $P(x)$ поставити знак «+». Потім, рухаючись справа наліво, при переході через черговий нуль змінювати знак на протилежний, якщо цьому нулеві відповідає двочлен у непарному степені, і зберігати знак, якщо цьому нулеві відповідає двочлен у парному степені.

Наприклад, розв'язати нерівність $(x+7)^4(x+4)^3(x-2)^2(x-3)<0$.

Розташуємо нулі множників на осі Ox. Позначимо знаки $P(x)$.



Отже, $x\in(-4;\ 2)\cup(2;\ 3)$.

Розв'язування нерівностей з модулем

Розглянемо нерівність $|x|<a$, де $a>0$. Скористаємося геометричною інтерпретацією модуля числа.



Нерівність виду $|x|<a$ задовольняють координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, меншу ніж a, тобто $-a<x<a$, $x\in(-a;\ a)$. Якщо ж $a\le 0$, то дана нерівність розв'язків не має.

Наприклад, розв'яжемо нерівність $|5x-1|<9$. Вона рівносильна системі нерівностей:

$$\begin{cases}5x-1<9;\\5x-1>-9,\end{cases}\ \text{звідки}\ \begin{cases}5x<10;\\5x>-8;\end{cases}\ \begin{cases}x<2;\\x>-1{,}6;\end{cases}\ x\in(-1{,}6;\ 2).$$

Нерівність виду $|x|>a$, де $a>0$, задовольняють координати тих і тільки тих точок координатної прямої, які віддалені від початку відліку на відстань, більшу за a, тобто нерівність виду $|x|>a$ рівносильна сукупності нерівностей $\begin{cases}x>a;\\x<-a.\end{cases}$



Якщо $a=0$, то множиною розв'язків нерівності $|x|>a$ є множина $x\in(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

Якщо $a<0$, то множиною розв'язків нерівності $|x|>a$ є множина $x\in(-\infty;\ +\infty)$, оскільки модуль числа завжди більший за від'ємне число.

Наприклад, розв'язати нерівність $|4x-5|>7$. Задана нерівність рівносильна сукупності нерівностей $\begin{cases}4x-5>7;\\4x-5<-7,\end{cases}$ звідки $\begin{cases}4x>12;\\4x<-2;\end{cases}\ \begin{cases}x>3;\\x<-0{,}5;\end{cases}$ *Відповідь.* $x\in(-\infty;\ -0{,}5)\cup(3;\ +\infty)$.



Щоб розв'язати нерівність виду $|f(x)|<>|g(x)|$, можна застосувати піднесення обох частин нерівності до квадрата.

Наприклад, розв'язати нерівність $|2x-1|\le|3x+1|$. При піднесенні до квадрата обох частин нерівності одержимо: $(2x-1)^2\le(3x+1)^2$; $4x^2-4x+1\le 9x^2+6x+1$; $5x^2+10x\ge 0$; $x^2+2x\ge 0$; $x(x+2)\ge 0$.

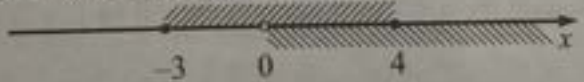
$x\in(-\infty;\ -2]\cup[0;\ +\infty)$. *Відповідь.* $(-\infty;\ -2]\cup[0;\ +\infty)$.

При розв'язуванні нерівностей, які містять кілька виразів під знаком модуля, можна застосувати метод інтервалів. Наприклад, розв'язати нерівність $|2x+6|+|x-4|>10$. Зазначимо на координатній прямій точки –3 і 4. Розглянемо нерівність на кожному з утворених проміжків.

1) $x<-3$; $-2x-6-x+4>10$; $-3x>12$; $x<-4$. Отже, $x\in(-\infty;\ -4)$;



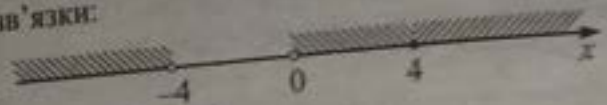
2) $-3\le x\le 4$; $2x+6-x+4>10$; $x>0$. Отже, $x\in(0;\ 4]$;



3) $x>4$; $2x+6+x-4>10$; $3x>8$; $x>2\frac{2}{3}$. Отже, $x\in(4;\ +\infty)$.



Об'єднаємо одержані розв'язки:



Одержимо *відповідь*: $x \in (-\infty; -4) \cup (0; +\infty)$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $4(x-2) - 3(x+1) \le 2x - 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-9; +\infty)$	$(-\infty; 9]$	$(-\infty; -9]$	$[-9; +\infty)$	$\left(-\infty; -4\frac{1}{3}\right]$

■ $4x - 8 - 3x - 3 \le 2x - 2$; $4x - 3x - 2x \le 8 + 3 - 2$; $-x \le 9$; $x \ge -9$; $x \in [-9; +\infty)$. *Відповідь*. Г. ■

Приклад 2. Знайти суму найбільшого та найменшого натуральних розв'язків нерівності $2 \le \frac{x-1}{2} \le 3$.

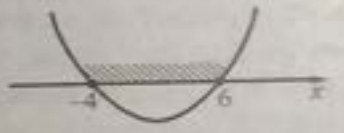
А	Б	В	Г	Д
12	10	11	9	8

■ $2 \le \frac{x-1}{2} \le 3 \mid \cdot 2$; $4 \le x - 1 \le 6$; $5 \le x \le 7$; $x \in [5; 7]$. Найменший розв'язок — число 5, найбільший — 7, а їх сума — $5 + 7 = 12$. *Відповідь*. А. ■

Приклад 3. Розв'язати нерівність $(x-1)(x-3) \le 27 - 2x$.

А	Б	В	Г	Д
$[-4; 6]$	$[-4; 5]$	$(-\infty; 4]$	$(-\infty; -4] \cup [6; +\infty)$	$(-4; 6)$

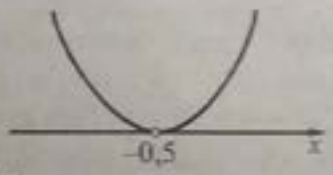
■ $(x-1)(x-3) \le 27 - 2x$; $x^2 - 3x - x + 3 \le 27 - 2x$; $x^2 - 2x - 24 \le 0$; $(x-6)(x+4) \le 0$. $x \in [-4; 6]$.



Відповідь. А. ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $4x^2 + 4x + 1 > 0$.

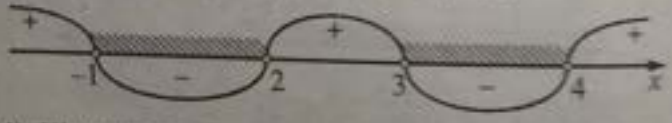
■ $4x^2 + 4x + 1 > 0$; $(2x+1)^2 > 0$. Розв'язком нерівності є всі дійсні числа, крім $x = -0{,}5$.



Відповідь. $(-\infty; -0{,}5) \cup (-0{,}5; +\infty)$. ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $(x^2 - 6x + 8)(3 - x)(x + 1) > 0$. У відповідь записати суму цілих розв'язків нерівності.

■ $(x^2 - 6x + 8)(3 - x)(x + 1) > 0$; $(x-2)(x-4)(x-3)(x+1) < 0$.

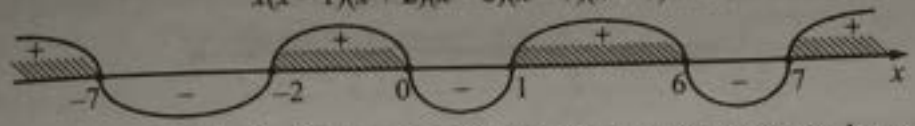


Отже, $x \in (-1; 2) \cup (3; 4)$. Цілими розв'язками нерівності є 0 та 1, а їх сума дорівнює $0 + 1 = 1$.
Відповідь. 1. ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $(x^3 - 1)(x^2 + 2x)(6 - x)(49 - x^2) \ge 0$. У відповідь записати найбільший від'ємний цілий розв'язок нерівності.

■ $(x^3 - 1)(x^2 + 2x)(6 - x)(49 - x^2) \ge 0$; $x(x-1)(x^2 + x + 1)(x+2)(x-6)(x-7)(x+7) \ge 0$. Оскільки $x^2 + x + 1 > 0$, то поділимо обидві частини нерівності на $x^2 + x + 1$ й розв'яжемо нерівність

$$x(x-1)(x+2)(x-6)(x-7)(x+7) \ge 0.$$

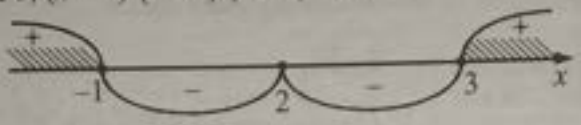


Отже, $x \in (-\infty; -7] \cup [-2; 0] \cup [1; 6] \cup [7; +\infty)$. Найбільший від'ємний цілий розв'язок дорівнює -1. *Відповідь.* -1. ■

Приклад 7. Розв'язати нерівність $(x+1)^7(3-x)^5(x-2)^2 \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1] \cup [2; 3]$	$(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$	$(-\infty; -1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$	$[1; 2] \cup [3; +\infty)$	$(-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty]$

■ $(x+1)^7(3-x)^5(x-2)^2 \le 0$; $(x+1)^7(x-3)^5(x-2)^2 \ge 0$.



Отже, $x \in (-\infty; -1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 8. Знайти найменший розв'язок нерівності $(x+2)^2(x-1) \ge 2(x+2)^2$ на проміжку $(-5; 5)$.

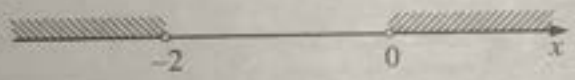
А	Б	В	Г	Д
4	5	3	-2	2

■ $(x+2)^2(x-1) \ge 2(x+2)^2$; $(x+2)^2(x-1) - 2(x+2)^2 \ge 0$; $(x+2)^2(x-1-2) \ge 0$; $(x+2)^2(x-3) \ge 0$; $x - 3 \ge 0$ або $(x+2)^2 = 0$; $x \ge 3$ або $x = -2$. Найменшим розв'язком нерівності на проміжку $(-5; 5)$ є $x = -2$. *В-дь.* **Г.** ■

Приклад 9. Розв'язати нерівність $|x+1| > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$	$(0; 2)$	$(-\infty; -2)$

■ $|x+1| > 1$; $\left[\begin{array}{l} x+1 > 1; \\ x+1 < -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x > 0; \\ x < -2. \end{array}\right.$ Отже, $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$. *Відповідь.* **В.** ■



Приклад 10. Розв'язати нерівність $|2-x| < 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-1; 5)$	$(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$

■ $|2-x| < 3$; $|x-2| < 3$; $\left\{\begin{array}{l} x-2 > -3; \\ x-2 < 3; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x > -1; \\ x < 5. \end{array}\right.$ Отже, $x \in (-1; 5)$. *Відповідь.* **Г.** ■



Приклад 11. Розв'язати нерівність $|x-1| + |x-2| \le 3$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; 3]$	$[0; 3)$	$(0; 3]$	$(0; 3)$	$\varnothing$

■ $|x-1| + |x-2| \le 3$. Нулі підмодульних виразів $x = 1$ та $x = 2$.

1) $x \in (-\infty; 1)$. $-x + 1 + (-x + 2) \le 3$; $-2x + 3 \le 3$; $-2x \le 0$; $x \ge 0$. Отже, $x \in [0; 1)$;



2) $x \in [1; 2]$. $x - 1 + (-x + 2) \le 3$; $0x + 1 \le 3$; $0x \le 2$. Отже, $x \in [1; 2]$;

3) $x\in(2;+\infty)$. $x-1+x-2\le 3$; $2x-3\le 3$; $x\le 3$. Отже, $x\in(2;3]$.



Об'єднавши всі розв'язки, одержимо: $x\in[0;1)\cup[1;2]\cup(2;3]=[0;3]$. *Відповідь.* **А.** ■

Приклад 12. За якого найменшого цілого значення параметра a нерівність $(a-1)x^2-2x-a>0$ справедлива для довільного $x>3$?

■ Розглянемо випадок, коли $a=1$. Тоді одержимо $-2x-1>0$ або $x<-0{,}5$. У цьому випадку умова задачі не виконується. Нехай $a\ne 1$. Дискримінант тричлена $f(x)=(a-1)x^2-2x-a$ дорівнює $D=4+4(a-1)a=4a^2-4a+4=(2a-1)^2+3>0$ за довільного значення a.

Для виконання умови $f(x)>0$ для всіх значень $x>3$ необхідно, щоб перший коефіцієнт був додатним, і щоб більший корінь тричлена x_2 задовольняв умову $x_2\le 3$.

$$\text{Тоді: } \begin{cases} a-1>0; \\ x_2\le 3; \\ f(3)\ge 0; \end{cases} \begin{cases} a>1; \\ \dfrac{2+\sqrt{4(a^2-a+1)}}{2(a-1)}\le 3; \\ 9(a-1)-6-a\ge 0; \end{cases} \begin{cases} a>1; \\ 1+\sqrt{a^2-a+1}\le 3(a-1); \\ 8a\ge 15; \end{cases} \begin{cases} \sqrt{a^2-a+1}\le 3a-4; \\ a\ge 15/8. \end{cases}$$

Оскільки $3a-4>0$, якщо $a\ge 15/8$, то піднесемо першу нерівність системи до квадрата: $a^2-a+1\le 9a^2-24a+16$; $8a^2-23a+15\ge 0$; $a_1=1$; $a_2=15/8$; $a\in(-\infty;1]\cup[15/8;+\infty)$. Таким чином, маємо розв'язок системи: $a\in[15/8;+\infty)$. Тоді найменше ціле значення $a=2$. *Відповідь.* 2. ■

Завдання 9.1–9.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

9.1. Розв'язати нерівність $-4x<20$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;5)$	$(-\infty;-5)$	$(5;+\infty)$	$(-5;+\infty)$	$(-4;20)$

9.2. Розв'язати нерівність $\dfrac{x-1}{2}<2$.

А	Б	В	Г	Д
$(5;+\infty)$	$(-\infty;5)$	$(-\infty;3)$	$(3;+\infty)$	$\left(-\infty;2\frac{1}{2}\right)$

9.3. Розв'язати нерівність $\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{3}\le 4$.

А $[4;+\infty)$ **Б** $(-\infty;4]$ **В** $[24;+\infty)$ **Г** $(-\infty;24)$ **Д** $(-\infty;24]$

9.4. **(ЗНО–2015)** Розв'язати нерівність $0{,}2x-54<0$.

А $(-\infty;27)$ **Б** $(270;+\infty)$ **В** $(-\infty;2{,}7)$ **Г** $(-\infty;270)$ **Д** $(10{,}8;+\infty)$

9.5. Розв'язати нерівність $-3\le -x+4<2$.

А $(2;7]$ **Б** $[2;7)$ **В** $[1;6)$ **Г** $[-3;-2)$ **Д** $(1;6]$

9.6. Розв'язати нерівність $(x+7)(x-3)<0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3;7)$	$(-\infty;3)\cup(7;+\infty)$	$(-\infty;-7)\cup(3;+\infty)$	$(3;7)$	$(-7;3)$

9.7. Розв'язати нерівність $x^2+7x-30\ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[-10;3]$	$(-\infty;-10]\cup[3;+\infty)$	$(-\infty;-3]\cup[10;+\infty)$	$[-3;10]$	$(-\infty;3]\cup[10;+\infty)$

9.8. Розв'язати нерівність $-x^2 + 3x + 10 > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(2; 5)$	$(-\infty; -5)\cup(2; +\infty)$	$(-5; 2)$	$(-\infty; -2)\cup(5; +\infty)$	$(-2; 5)$

9.9. Розв'язати нерівність $x^2 > 10$.

А	Б	В	Г	Д
$(\sqrt{10}; +\infty)$	$(-\sqrt{10}; \sqrt{10})$	$(-\sqrt{10}; +\infty)$	$(-\infty; -100)\cup(100; +\infty)$	$(-\infty; -\sqrt{10})\cup(\sqrt{10}; +\infty)$

9.10. Розв'язати нерівність $(x - 1)^2 < 16$.

А	Б	В	Г	Д
$(-5; 3)$	$(-4; 4)$	$(-3; 5)$	$(-\infty; -3)\cup(5; +\infty)$	$(-\infty; -4)\cup(4; +\infty)$

9.11. Розв'язати нерівність $(x - 3)(x + 5)(4 - x) \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5]\cup[3; 4]$	$[-5; 3]\cup[4; +\infty)$	$[-4; -3]\cup[5; +\infty)$	$(-\infty; -4]\cup[-3; 5]$	$(-\infty; 4]$

9.12. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(2 - x)^3(x + 2)^2(x - 3) \geq 0$.

А 2 Б жодного В 0 Г 3 Д безліч

9.13. Знайти множину розв'язків нерівності $(x - 2)^2 (x + 3) \leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3]\cup[2; +\infty)$	$(-\infty; -3]$	$[-3; 2]$	$(-\infty; -3]\cup\{2\}$	$(-\infty; -2]\cup\{3\}$

9.14. Розв'язати нерівність $x(5 - x)^3 > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(5; +\infty)$	$(-\infty; -5)\cup(0; +\infty)$	$(-\infty; 0)\cup(5; +\infty)$	$(-5; 0)$	$(0; 5)$

9.15. Скільки цілих розв'язків має нерівність $-x - 5 < -3x < x - 1$?

А Жодного Б один В два Г три Д більше, ніж три

9.16. Розв'язати нерівність $(x^2 - 3x - 10)(x - 1) > 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -2)\cup(1; 5)$	$(-2; 1)\cup(5; +\infty)$	$(-5; -1)\cup(2; +\infty)$	$(-\infty; -5)\cup(-1; 2)$	$(1; +\infty)$

9.17. Знайти множину розв'язків нерівності $|x - 5| < 8$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -13)\cup(3; +\infty)$	$(-\infty; 13)$	$(-13; 3)$	$(-3; 13)$	$(-\infty; -3)\cup(13; +\infty)$

9.18. Розв'язати нерівність $|x + 4| > 3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -7)\cup(-1; +\infty)$	$(-7; -1)$	$(-1; +\infty)$	$(-\infty; 1)\cup(7; +\infty)$	$(1; 7)$

9.19. Розв'язати нерівність $|3x| < x + 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0,5)$	$(0,5; +\infty)$	$(-0,25; 0,5)$	$(-0,5; 0)\cup(0; 0,25)$	$(0,25; +\infty)$

9.20. За яких значень a розв'язком нерівності $(a - 3)x \leq 7$ є проміжок $\left[\frac{7}{a-3}; +\infty\right)$?

А $a > 3$ Б $a \geq 3$ В $a \neq 3$ Г $a < 3$ Д $a \leq 3$

9.21. Знайти значення параметра a, за якого розв'язками нерівності $3x - 1 < ax + 5$ є усі дійсні числа.

А 3 Б 1 В 5 Г 0 Д 6

9.22. Знайти множину розв'язків нерівності $(x - 4)(a - x) \geq 0$, якщо $a < 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; a]\cup[4; +\infty)$	$[a; 4]$	$[-4; a]$	$(-\infty; -4]\cup[a; +\infty)$	$[4; -a]$

Завдання 9.23–9.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

9.23. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $5x > 30$
2 $-5x > 30$
3 $5x < 30$

А $(-\infty; -6)$
Б $(-\infty; 6)$
В $(-6; +\infty)$
Г $(-6; 6)$
Д $(6; +\infty)$

9.24. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x-1}{3} < 1$
2 $\frac{x+1}{3} < 1$
3 $\frac{-x+1}{3} < 1$

А $(-\infty; -4)$
Б $(-\infty; 2)$
В $(-\infty; 4)$
Г $(-4; +\infty)$
Д $(-2; +\infty)$

9.25. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} < 1$
2 $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} < 1$
3 $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} < -1$

А $(-\infty; -12)$ Б $(-\infty; 12)$ В $(-12; 12)$ Г $(-12; +\infty)$ Д $(12; +\infty)$

9.26. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(x-8)(x-3) < 0$
2 $(x-8)(x+3) > 0$
3 $(x+8)(x-3) < 0$

А $(-\infty; -8) \cup (-3; +\infty)$
Б $(-\infty; -3) \cup (8; +\infty)$
В $(-\infty; 3) \cup (8; +\infty)$
Г $(-8; 3)$
Д $(3; 8)$

9.27. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(x-2)(x+3) < 0$
2 $(2-x)(x+3) < 0$
3 $(x+2)(x-3) < 0$

А $(-\infty; -3) \cup (2; +\infty)$
Б $(-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$
В $(-3; -2)$
Г $(-3; 2)$
Д $(-2; 3)$

9.28. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(x+3)^2 x(x-1) \le 0$
2 $x^2(x+3)(x-1) \le 0$
3 $(x+3)x(x-1)^2 \le 0$

А $(-\infty; 0]$
Б $(-\infty; 0] \cup \{1\}$
В $[-3; 1]$
Г $[-3; 0] \cup \{1\}$
Д $\{-3\} \cup [0; 1]$

9.29. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $x^2 + x - 6 < 0$
2 $x^2 - x - 6 < 0$
3 $-x^2 + x + 12 < 0$

А $\varnothing$
Б $(-\infty; +\infty)$
В $(-2; 3)$
Г $(-3; 2)$
Д $(-\infty; -3) \cup (4; +\infty)$

9.30. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $3 < x - 2 < 5$
2 $3 < x + 2 < 5$
3 $3 < -x - 2 < 5$

А $(-7; -5)$
Б $(-3; -1)$
В $(-1; 3)$
Г $(1; 3)$
Д $(5; 7)$

9.31. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\lvert x-2\rvert<5$	А $(-7;-3)$
2 $\lvert x+2\rvert<5$	Б $(-7;7)$
3 $\lvert x-5\rvert<2$	В $(-7;3)$
	Г $(-3;7)$
	Д $(3;7)$

9.32. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\lvert x-3\rvert>4$	А $(-\infty;-7)\cup(1;+\infty)$
2 $\lvert x-4\rvert>3$	Б $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$
3 $\lvert x+4\rvert>3$	В $(-\infty;-7)\cup(-1;+\infty)$
	Г $(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$
	Д $(-\infty;1)\cup(7;+\infty)$

Розв'яжіть завдання 9.33–9.46. Відповідь запишіть десятковим дробом.

9.33. Розв'язати нерівність $\frac{2-x}{4}+1<\frac{2x-1}{10}-\frac{2x-3}{6}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

9.34. Розв'язати нерівність $7<1-3x<16$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

9.35. Розв'язати нерівність $x+1<\frac{x}{2}<x+2$. У відповідь записати суму цілих розв'язків.

9.36. Розв'язати нерівність $2\le x^2+x<6$. У відповідь записати найменший додатний розв'язок.

9.37. Розв'язати нерівність $(x^2+2x-15)(x^2-4x+3)(x-1)\le 0$. У відповідь записати кількість додатних цілих розв'язків.

9.38. Розв'язати нерівність $x^6-9x^3+8<0$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків.

9.39. Розв'язати нерівність $(x-2)^4-13(x-2)^2+36\le 0$. У відповідь записати суму цілих розв'язків.

9.40. Розв'язати нерівність $1<\lvert x-2\rvert<5$. У відповідь записати добуток цілих розв'язків.

9.41. Розв'язати нерівність $x^2-3\lvert x\rvert+2\le 0$. У відповідь записати добуток цілих розв'язків.

9.42. Розв'язати нерівність $\lvert 3x-6\rvert<x-1$. У відповідь записати середину проміжку, який є розв'язком нерівності.

9.43. Розв'язати нерівність $(x^2-x-1)(x^2-x-7)\le -5$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків.

9.44. Розв'язати нерівність $\lvert x^2-x+1\rvert\ge\lvert x^2-3x+4\rvert$. У відповідь записати найменший розв'язок.

9.45. Розв'язати нерівність $\lvert x-1\rvert+\lvert x+1\rvert<4$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

9.46. Дано многочлен $P(x)=x^6-9x^3+8$. Знайти:
1) найбільший корінь рівняння $P(x)=0$; **2)** найменший цілий розв'язок нерівності $P(x)\le 0$.

Тема 10. Раціональні й дробові раціональні рівняння

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— розв'язувати найпростіші раціональні й дробові раціональні рівняння, а також рівняння, що зводяться до них;

— користуватися графічним методом розв'язування й дослідження рівняння.

Раціональним називають рівняння виду $f(x) = g(x)$, де $f(x)$ та $g(x)$ — раціональні вирази. Якщо хоча б один із цих виразів дробовий, то рівняння називають *дробовим*.

Наприклад, $\frac{x+1}{5x-7} = \frac{3}{4-x}$ — дробове раціональне рівняння.

Схема розв'язування дробових раціональних рівнянь. Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна:

1) звести рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$;

2) розв'язати рівняння $P(x) = 0$;

3) перевірити корені рівняння $P(x) = 0$ на виконання умови $Q(x) \neq 0$.

Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{3x}{x+2} = \frac{1}{x}$.

$\frac{3x}{x+2} - \frac{1}{x} = 0$; $\frac{3x^2 - (x+2)}{x(x+2)} = 0$; $\begin{cases} 3x^2 - (x+2) = 0; \\ x(x+2) \neq 0; \end{cases}$ $3x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}$. За значень змінної 1 і $-\frac{2}{3}$ вираз $x(x+2)$ не дорівнює нулю. Отже, $-\frac{2}{3}$ і 1 — корені рівняння.

Зауваження. Щоб розв'язати дробове раціональне рівняння, можна спочатку знайти його ОДЗ, помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник; розв'язати одержане ціле рівняння й перевірити, чи всі знайдені розв'язки входять до ОДЗ.

Розв'язування рівнянь методом заміни

Розв'язати рівняння $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$.

Нехай $x + \frac{1}{x} = t$, тоді $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$; $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = t^2$, звідки $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Отже, одержали рівняння

$7t - 2(t^2 - 2) = 9$; $2t^2 - 7t + 5 = 0$; $\begin{bmatrix} t_1 = 2{,}5; \\ t_2 = 1. \end{bmatrix}$ Повернемося до заміни: $\begin{bmatrix} x + \frac{1}{x} = 2{,}5; \\ x + \frac{1}{x} = 1; \end{bmatrix}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 5x + 2 = 0, \\ x^2 - x + 1 = 0; \end{array}\right. \\ x \neq 0. \end{cases}$

Перше рівняння має коренями числа $x_1 = 2$, $x_2 = 0{,}5$, а друге рівняння дійсних коренів не має.

Відповідь. 2; 0,5.

Рівняння виду $\frac{Ax}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{Bx}{ax^2 + b_2x + c} = D$ ***та рівняння виду*** $\frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} + \frac{ax^2 + b_3x + c}{ax^2 + b_4x + c} = A$

Загальний метод розв'язування рівнянь виду $\frac{Ax}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{Bx}{ax^2 + b_2x + c} = D$ полягає у діленні чисельника та знаменника на $x \neq 0$ та використанні заміни $t = ax + \frac{c}{x}$ в отриманому рівнянні $\frac{A}{ax + b_1 + \frac{c}{x}} + \frac{B}{ax + b_2 + \frac{c}{x}} = D$. За допомогою такої заміни останнє рівняння зводиться до квадратного.

Наприклад, $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}=-\frac{5}{4}$. ОДЗ: $x\neq 2\pm\sqrt{2}$. Оскільки $x=0$ не є коренем даного рівняння, то, розділивши чисельник і знаменник кожного дробу у лівій частині рівняння на x, одержимо рівняння, рівносильне вихідному: $\frac{2}{x-4+\frac{2}{x}}+\frac{3}{x+1+\frac{2}{x}}=-\frac{5}{4}$. Виконаємо заміну: $x+\frac{2}{x}=t$. Тоді одержимо: $\frac{2}{t-4}+\frac{3}{t+1}=-\frac{5}{4}$; $\begin{cases}8(t+1)+12(t-4)=-5(t-4)(t+1);\\ t\neq 4;\\ t\neq -1;\end{cases}$ $\begin{cases}t^2+t-12=0;\\ t\neq 4;\\ t\neq -1;\end{cases}$ $\begin{cases}(t+4)(t-3)=0;\\ t\neq 4;\\ t\neq -1;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t_1=-4;\\ t_2=3.\end{array}\right.$

Повертаємося до заміни: 1) $x+\frac{2}{x}=-4$; $x^2+4x+2=0$; $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}$;

2) $x+\frac{2}{x}=3$; $x^2-3x+2=0$; $\left[\begin{array}{l}x_3=1;\\ x_4=2.\end{array}\right.$ *Відповідь.* $1;\ 2;\ -2\pm\sqrt{2}$.

Симетричні рівняння третього степеня

Рівняння виду $ax^3+bx^2+bx+a=0$, де $a\neq 0$, $b\in R$, називають *симетричним* рівнянням третього степеня.

1. Симетричне рівняння третього степеня має коренем число $x=-1$.

Справді, $a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+a=-a+b-b+a=0$; $0=0$.

2. Діленням многочлена ax^3+bx^2+bx+a на двочлен $x+1$ рівняння зводиться до квадратного. Наприклад, розв'язати рівняння $3x^3-7x^2-7x+3=0$. Оскільки $x=-1$ — корінь рівняння, то

$$3x^3-7x^2-7x+3=0\Leftrightarrow(x+1)(3x^2-10x+3)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;\\ 3x^2-10x+3=0;\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=-1;\\ x_2=1/3;\\ x_3=3.\end{array}\right.$$ *Відповідь.* $-1;\ \frac{1}{3};\ 3$.

Симетричні рівняння четвертого степеня

Рівняння виду $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$, де $a\neq 0$, $b\in R$, $c\in R$, називають *симетричним* рівнянням четвертого степеня. Для розв'язування рівняння такого виду можна:

1) поділити обидві частини рівняння на x^2 і згрупувати вирази так: $a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$;

2) уведенням заміни $x+\frac{1}{x}=t$, $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$, зведемо рівняння до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $2x^4+x^3-11x^2+x+2=0$. Очевидно, що $x=0$ не є коренем заданого рівняння. Поділимо обидві частини рівняння на $x^2\neq 0$: $2x^2+x-11+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0$;

$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-11=0$; $\begin{cases}x+\frac{1}{x}=t;\\ 2t^2+t-15=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x+\frac{1}{x}=t;\\ \left[\begin{array}{l}t_1=2{,}5;\\ t_2=-3;\end{array}\right.\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x+\frac{1}{x}=2{,}5;\\ x+\frac{1}{x}=-3;\end{array}\right.$ $\begin{cases}x\neq 0;\\ \left[\begin{array}{l}2x^2-5x+2=0;\\ x^2+3x+1=0;\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}x_1=2;\ x_2=0{,}5;\\ x_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.\end{cases}$

Відповідь. $\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; 2; $0{,}5$.

Дробові раціональні рівняння з параметрами

Дробові раціональні рівняння з параметрами розв'язують як звичайні рівняння, але тільки доти, доки кожне перетворення можна виконувати однозначно. Якщо ж перетворення не можна виконувати однозначно, то розв'язання слід розбити на кілька випадків.

Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{2x}{x+2}=2+\frac{a}{x}$. ОДЗ: $x\neq -2$; $x\neq 0$. Помножимо обидві частини заданого рівняння на вираз $x(x+2)$ й одержимо ціле рівняння, яке за умови $x(x+2)\neq 0$ рівносильне за-

даному: $2x^2 = 2x(x+2) + a(x+2)$; $2x^2 = 2x^2 + 4x + ax + 2a$; $4x + ax + 2a = 0$; $(4+a)x = -2a$. Якщо $4 + a = 0$, тобто $a = -4$, то одержимо: $0x = 8$ — рівняння коренів не має; якщо $a \neq -4$, то матимемо $x = \frac{-2a}{4+a}$. З'ясуємо, за яких значень a знайдені корені не входять до ОДЗ заданого рівняння, тобто знайдемо такі значення a, за яких $x = -2$ або $x = 0$.

1) $\frac{-2a}{4+a} = -2$; $2a = 2(4+a)$; $2a = 8 + 2a$; $0a = 8$; $a \in \varnothing$. Отже, не існує такого значення a, щоб $x = -2$.

2) Знайдемо значення a, за якого $x = 0$: $\frac{-2a}{4+a} = 0$; $a = 0$.

Відповідь. Якщо $a = 0$ або $a = -4$, то рівняння коренів не має; якщо $a \neq 0$ і $a \neq -4$, то $x = \frac{-2a}{4+a}$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{4x}{x^2 - 12x + 15}$.

■ $\frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{4x}{x^2 - 12x + 15}$. ОДЗ: $x \neq 6 \pm \sqrt{21}$. $x = 0$ не є коренем даного рівняння. Розділимо чисельник і знаменник кожного із дробів на $x \neq 0$ й одержимо: $\frac{x + 15/x - 10}{x + 15/x - 6} = \frac{4}{x + 15/x - 12}$. Виконаємо заміну $x + \frac{15}{x} = t$. Тоді $\frac{t-10}{t-6} = \frac{4}{t-12}$; $\begin{cases} t^2 - 26t + 144 = 0; \\ t \neq 6; \\ t \neq 12; \end{cases}$ $\begin{cases} (t-18)(t-8) = 0; \\ t \neq 6; \\ t \neq 12; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} t_1 = 18; \\ t_2 = 8. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни: 1) $x + \frac{15}{x} = 18$; $x^2 - 18x + 15 = 0$; $x_{1,2} = 9 \pm \sqrt{66}$; 2) $x + \frac{15}{x} = 8$; $x^2 - 8x + 15 = 0$; $x_3 = 5$; $x_4 = 3$.

Відповідь. $9 \pm \sqrt{66}$; 5; 3. ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x-4}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x^2 - 2x}$.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	2 і 3

■ $\frac{2}{x^2 - 4} + \frac{x-4}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x^2 - 2x}$; $\frac{2}{(x-2)(x+2)} + \frac{x-4}{x(x+2)} = \frac{1}{x(x-2)}$;

$\frac{2}{(x-2)(x+2)} \cdot x + \frac{x-4}{x(x+2)} \cdot (x-2) - \frac{1}{x(x-2)} \cdot (x+2) = 0$; $\frac{2x + (x-2)(x-4) - (x+2)}{x(x-2)(x+2)} = 0$; $\frac{2x + x^2 - 6x + 8 - x - 2}{x(x-2)(x+2)} = 0$;

$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0; \\ x \neq 0; \\ x \neq \pm 2; \end{cases}$ $\begin{cases} (x-2)(x-3) = 0; \\ x \neq 0; \\ x \neq \pm 2; \end{cases}$ $x = 3$. *Відповідь.* **А.** ■

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\frac{x^2 + 1}{x} + \frac{x}{x^2 + 1} = -2{,}5$.

А	Б	В	Г	Д
–2	–1	–2,5	0,5	1

■ ОДЗ: $x \neq 0$. Нехай $\frac{x^2 + 1}{x} = t$, тоді $\frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{t}$. Маємо: $t + \frac{1}{t} + \frac{5}{2} = 0$; $\begin{cases} 2t^2 + 5t + 2 = 0; \\ t \neq 0; \end{cases}$

$t_1 = -0{,}5$; $t_2 = -2$. Повернемося до заміни. 1) $\frac{x^2 + 1}{x} = -0{,}5$; $2x^2 + 2 = -x$; $2x^2 + x + 2 = 0$; $D < 0$, рівняння не має коренів; 2) $\frac{x^2 + 1}{x} = -2$; $x^2 + 1 = -2x$; $x^2 + 2x + 1 = 0$; $(x+1)^2 = 0$; $x = -1$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\frac{13x}{3x^2-5x+2}-\frac{12x}{3x^2+x+2}=5$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

■ Перевіркою встановлюємо, що $x=0$ не є коренем рівняння. Поділимо чисельник і знаменник кожного дробу на $x\neq 0$, одержимо: $\frac{13}{3x-5+\frac{2}{x}}-\frac{12}{3x+1+\frac{2}{x}}=5$. Нехай $3x+\frac{2}{x}=t$, тоді останнє рівняння можна записати у вигляді: $\frac{13}{t-5}-\frac{12}{t+1}=5$; $\begin{cases}13(t+1)-12(t-5)=5(t-5)(t+1);\\ t\neq 5;\\ t\neq -1;\end{cases}$ $\begin{cases}5t^2-21t-98=0;\\ t\neq 5;\\ t\neq -1;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t_1=-2{,}8;\\ t_2=7;\end{array}\right.\\ t\neq 5;\ t\neq -1.\end{cases}$

Повертаючись до заміни, матимемо: 1) $3x+\frac{2}{x}=-2{,}8$; $15x^2+14x+10=0$; $D<0$, рівняння коренів не має; 2) $3x+\frac{2}{x}=7$; $3x^2-7x+2=0$; $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=2$. Найбільшим коренем рівняння є $x=2$. *В-дь.* 2. ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$. У відповідь записати суму його коренів.

■ Поділимо обидві частини рівняння на $x^2\neq 0$ й одержимо: $2x^2+3x-4-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0$; $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-4=0$. Нехай $x-\frac{1}{x}=t$, тоді $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=t^2+2$. Одержимо: $2(t^2+2)+3t-4=0$; $2t^2+3t=0$; $t(2t+3)=0$; $\left[\begin{array}{l}t_1=0;\\ t_2=-1{,}5.\end{array}\right.$ Повернемося до заміни: 1) $x-\frac{1}{x}=0$; $x^2-1=0$; $x^2=1$; $x_{1,2}=\pm 1$; 2) $x-\frac{1}{x}=-1{,}5$; $2x^2+3x-2=0$; $x_3=-2$; $x_4=0{,}5$. Отже, рівняння має 4 корені. Їхня сума дорівнює: $-1+1-2+0{,}5=-1{,}5$. *Відповідь.* $-1{,}5$. ■

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\frac{12x}{3x^2-10x+1}-\frac{1}{x}=3x-6$. У відповідь записати число, обернене до добутку коренів рівняння.

■ $\frac{12x}{3x^2-10x+1}-\frac{1}{x}=3x-6$; $\frac{12x}{3x^2-10x+1}=\frac{1}{x}+3x-6$; $\frac{12x}{3x^2-10x+1}=\frac{3x^2-6x+1}{x}$. Урахувавши, що $x\neq 0$, одержимо: $\frac{12}{3x+1/x-10}=\frac{3x+1/x-6}{1}$. Нехай $3x+\frac{1}{x}=t$, тоді одержимо: $\frac{12}{t-10}=\frac{t-6}{1}$, $\begin{cases}12=(t-6)(t-10);\\ t\neq 10;\end{cases}$ $\begin{cases}t^2-16t+48=0;\\ t\neq 10;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}t_1=4;\\ t_2=12.\end{array}\right.$ Повернувшись до заміни, одержимо: $\left[\begin{array}{l}3x+1/x=4;\\ 3x+1/x=12;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}3x^2-4x+1=0;\\ 3x^2-12x+1=0.\end{array}\right.$ Обидва рівняння мають корені. Тоді добуток коренів першого рівняння дорівнює $\frac{1}{3}$, другого — $\frac{1}{3}$, обох рівнянь — $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$. Число, обернене до числа $\frac{1}{9}$, — 9. *Відповідь.* 9. ■

Приклад 7. Знайти всі значення a, за яких рівняння $\frac{(x+a)(x-5a)}{x+7}=0$ має єдиний корінь. У відповідь записати найменший з них.

■ ОДЗ: $x\neq -7$. На ОДЗ дане рівняння рівносильне рівнянню $(x+a)(x-5a)=0$; $x+a=0$ або $x-5a=0$; $x=-a$ або $x=5a$. З'ясуємо, за яких значень a знайдені корені не входять до ОДЗ, тобто за яких значень a буде виконуватися рівність $x=-7$. Одержуємо: 1) $-a=-7$; $a=7$; 2) $5a=-7$; $a=-1{,}4$. Якщо $a=7$, то тоді $x=5a=35$ — єдиний корінь. Якщо $a=-1{,}4$, то тоді $x=-a=1{,}4$ — єдиний корінь. Задане рівняння матиме єдиний корінь і тоді, коли $-a=5a\neq 7$, тобто якщо $a=0$. Отже, одержали: $a=7$, $a=-1{,}4$, $a=0$. Найменше значення a дорівнює $-1{,}4$. *Відповідь.* $-1{,}4$. ■

Завдання 10.1–10.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

10.1. Розв'язати рівняння $\frac{x-5}{x-5}=0$.

А	Б	В	Г	Д
R	5	$\varnothing$	$(-\infty; 5)\cup(5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

10.2. Розв'язати рівняння $\frac{x-5}{x-5}=1$.

А	Б	В	Г	Д
5	R	$\varnothing$	$(-\infty; 5)\cup(5; +\infty)$	$(5; +\infty)$

10.3. Розв'язати рівняння $\frac{x-x}{x-3}=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	R	$(-\infty; -3)\cup(-3; +\infty)$	$(-\infty; 3)\cup(3; +\infty)$	-3

10.4. Розв'язати рівняння $5x+\frac{1}{x^2-9}=\frac{1}{x^2-9}+10$.

А $\{2; 3\}$ **Б** $\varnothing$ **В** $\{-3; 2; 3\}$ **Г** $\{-3; 3\}$ **Д** $\{2\}$

10.5. Розв'язати рівняння $6x+\frac{1}{x^2-9}=\frac{1}{x^2-9}+18$.

А $\varnothing$ **Б** $\{0\}$ **В** $\{-3\}$ **Г** $\{-3; 3\}$ **Д** $\{3\}$

10.6. Розв'язати рівняння $\frac{x^3-4x}{x^2-4}=0$.

А $\varnothing$ **Б** $\{2\}$ **В** $\{-2; 2\}$ **Г** $\{-2; 0; 2\}$ **Д** $\{0\}$

10.7. Розв'язати рівняння $\frac{(x^2-9)(x^2-16)}{(x-3)(x+4)}=0$.

А $\{-4; -3; 3; 4\}$ **Б** $\{3; 4\}$ **В** $\{-3; -4\}$ **Г** $\{-3; 4\}$ **Д** $\{-4; 3\}$

10.8. Знайти суму коренів рівняння $\frac{(x-3)(x-5)}{x-2}=0$.

А 5 **Б** -8 **В** -1 **Г** 8 **Д** 10

10.9. **(ЗНО–2011)** Розв'язати рівняння $\frac{2}{x}=5$.

А $x=0{,}1$ **Б** $x=10$ **В** $x=2{,}5$ **Г** $x=0{,}4$ **Д** $x=-3$

10.10. Указати інтервал, який містить корені рівняння $\frac{3}{x}=\frac{2}{x+1}$.

А $(-5; -3)$ **Б** $(-1; 2)$ **В** $(2; 4)$ **Г** $(-2; 1)$ **Д** $(-4; -2)$

10.11. Розв'язати рівняння $\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x+4}=0$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А $(1; 2)$ **Б** $(-2; -1)$ **В** $(-4; -2)$ **Г** $(2; 4)$ **Д** $(4; 6)$

10.12. Розв'язати рівняння $\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-3}+1=0$ і вказати проміжок, якому належить більший його корінь.

А $(0; 1)$ **Б** $(2; 3)$ **В** $(4; 5)$ **Г** $(3; 4)$ **Д** $(4; +\infty)$

10.13. Знайти суму коренів рівняння $\frac{x}{3}=\frac{5}{x+2}$.

А 2 Б –2 В 15 Г –15 Д 5

10.14. Установити значення a, за яких рівняння $\frac{x-a}{x^2-8x+15}=0$ не має коренів.

А	Б	В	Г	Д
$a=15$	$a=3$ або $a=5$	$a=8$	$a=-3$ або $a=-5$	$a=-8$

10.15. Установити значення a, за яких рівняння $\frac{x-5}{x+9}=\frac{a-x}{x+9}$ не має коренів.

А $a=-23$ Б $a=-9$ В $a=5$ Г $a=23$ Д $a=9$

10.16. За якого найменшого значення параметра a рівняння $|4x+3|=5a+3$ має розв'язок?

А 1,25 Б –3 В 3 Г –0,6 Д 1

10.17. Катер проходить 160 км за течією річки за той же час, що й 140 км проти течії. Знайти власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо власну швидкість катера позначено через x км/год?

А $\frac{x+2}{160}=\frac{2x}{140}$ Б $\frac{x-2}{140}=\frac{x}{160}$ В $\frac{160}{x-2}=\frac{140}{x+2}$ Г $\frac{160}{x+2}=\frac{140}{x}x$ Д $\frac{160}{x+2}=\frac{140}{x-2}$

10.18. Робітник повинен був виготовити за деякий час 90 деталей. Щоденно він виготовляв на 3 деталі більше, ніж планувалося, і тому завдання виконав на 1 день раніше. Скільки деталей щоденно виготовляв робітник?

Кількість деталей, що виготовляє робітник за 1 день, позначено через x. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{90}{x-1}-\frac{90}{x}=3$	$\frac{90}{x-3}-\frac{90}{x}=1$	$\frac{90}{x}-\frac{90}{x-3}=1$	$\frac{90}{x}-\frac{90}{x-1}=3$	$90(x-3)-$ $-90x=1$

10.19. З одного міста в друге, відстань між якими дорівнює 300 км, одночасно виїхали два автомобілі. Швидкість першого з них на 10 км/год більша від швидкості другого, а тому він приїхав до місця призначення на 1 год раніше. Знайти швидкість кожного з автомобілів.

Швидкість першого автомобіля позначено через x км/год. Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{300}{x-1}-\frac{300}{x}=10$	$\frac{300}{x}-\frac{300}{x-1}=10$	$\frac{300}{x}-\frac{300}{x-10}=1$	$\frac{300}{x-10}-\frac{300}{x}=1$	$\frac{x-10}{300}-\frac{x}{300}=1$

10.20. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати деяке завдання за 60 год. За скільки годин може виконати всю роботу кожний з робітників, працюючи окремо, якщо перший з них може це зробити на 22 год швидше, ніж другий?

Яке з наведених рівнянь відповідає умові задачі, якщо час, за який може виконати завдання перший робітник, позначено через x год?

А	Б	В	Г	Д
$x+(x+22)=60$	$x+(x-22)=60$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+22}=60$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+22}=\frac{1}{60}$	$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-22}=\frac{1}{60}$

Завдання 10.21–10.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

10.21. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та рівносильними їм рівняннями або системами (А–Д).

1 $\frac{x}{x-1}=\frac{2}{x+1}$

2 $x^2+3x-2=0$

3 $\sqrt{x}(x+1)(x-2)=0$

А $(x+1)(x-2)=0$

Б $x(x-2)=0$

В $x^4+13=0$

Г $\begin{cases} x(x+1)=2(x-1); \\ (x-1)(x+1)\neq 0 \end{cases}$

Д $x(x+1)=-2(x-1)$

10.22. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\frac{x-4}{x-4}=0$

2 $\frac{x-4}{x-4}=1$

3 $\frac{x^2-16}{x+4}=0$

А $\{4\}$

Б $\{5\}$

В $(-\infty; 4)\cup(4; +\infty)$

Г $(-\infty; 5)\cup(5; +\infty)$

Д $\varnothing$

10.23. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $2x+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-5}+10$

2 $2x^2+\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x-5}+50$

3 $2x^2+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{x+5}+50$

А $\{-5; 5\}$

Б $\{0\}$

В $\varnothing$

Г $\{-5\}$

Д $\{5\}$

10.24. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\frac{(x^2-4)(x^2-25)}{(x-2)(x-5)}=0$

2 $\frac{(x^2-4)(x^2-25)}{(x+2)(x+5)}=0$

3 $\frac{(x+2)(x-5)}{(x^2-4)(x^2-25)}=0$

А $\{-2; 5\}$

Б $\{-2; -5\}$

В $\{2; 5\}$

Г $\{2; -5\}$

Д $\varnothing$

10.25. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\frac{2x-4}{x-2}=1$

2 $\frac{3x+2}{x+2}=1$

3 $\frac{(2x+3)(x-2)}{x^2-4}=1$

А $\{1\}$

Б $\{-1\}$

В $\{0\}$

Г $\{2\}$

Д $\varnothing$

10.26. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\frac{4}{x}=\frac{3}{x+1}$

2 $\frac{2}{x}=\frac{1}{x-2}$

3 $\frac{1}{x-3}=\frac{2}{9-x}$

А $\{-5\}$

Б $\{-4\}$

В $\{4\}$

Г $\{5\}$

Д $\{6\}$

Розв'яжіть завдання 10.27–10.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

10.27. Розв'язати рівняння $\frac{2x-2}{x+2}+\frac{x+3}{x-3}-5=0$. У відповідь записати суму коренів.

10.28. Розв'язати рівняння $\frac{2x}{x+2}+\frac{1}{x-2}=\frac{4}{x^2-4}$.

10.29. Розв'язати рівняння $\frac{3}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-6x+9}=\frac{3}{2x^2+6x}$.

10.30. Розв'язати рівняння $\frac{5}{4x^2+4x+4}-\frac{3x}{x^3-1}=\frac{1}{2(x-1)}$. У відповідь записати найменший корінь.

10.31. Розв'язати рівняння $\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}+4=0$. У відповідь записати добуток коренів.

10.32. Знайти суму коренів рівняння $\frac{24}{x^2+2x-8}-\frac{15}{x^2+2x-3}=2$.

10.33. Розв'язати рівняння $\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^4-8\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)^2=9$. У відповідь записати найбільший корінь.

Розв'язати задачі за допомогою рівнянь (10.34–10.36).

10.34. З пункту A в пункт B, відстань між якими дорівнює 60 км, спочатку виїхав автобус, а через 20 хв — легковий автомобіль, швидкість якого на 20 км/год вища, ніж швидкість автобуса. Знайти швидкість автобуса (у км/год), якщо він приїхав до пункту B на 10 хв пізніше від легкового автомобіля.

10.35. Бригада робітників повинна була за кілька днів виготовити 272 деталі. Перші десять днів бригада виконувала встановлену норму, а потім почала виготовляти щоденно на 4 деталі більше, ніж за нормою. Тому за один день до терміну було виготовлено 280 деталей. Скільки деталей повинна була виготовляти бригада щоденно за планом?

10.36. Басейн наповнюється водою двома трубами за 6 год. Перша труба може заповнити басейн водою на 5 год швидше, ніж друга. За скільки годин може заповнити весь басейн лише перша труба?

10.37. Розв'язати рівняння $9\left(x+\frac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=14$. У відповідь записати суму коренів.

10.38. Розв'язати рівняння $\frac{16}{(x+6)(x-1)}-\frac{20}{(x+2)(x+3)}=1$. У відповідь записати найменший корінь.

10.39. Розв'язати рівняння $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}=-\frac{5}{4}$. У відповідь записати найбільший корінь.

10.40. Розв'язати рівняння $\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-2}{x+3}=\frac{x-4}{x+5}\cdot\frac{x-5}{x+6}$. У відповідь записати найбільший корінь.

10.41. Знайти всі значення параметра a, за яких рівняння $\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{x}+a=0$ має тільки один корінь. У відповідь записати добуток значень a.

10.42. На заводі за певний термін повинні були відремонтувати 300 вагонів. Перевиконуючи план ремонту на 3 вагони за тиждень, за два тижні до закінчення терміну відремонтували 299 вагонів.
1) Скільки вагонів ремонтували щотижня?
2) На скільки відсотків завод перевиконував план?

Тема 11. Раціональні й дробові раціональні нерівності

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— розв'язувати раціональні й дробові раціональні нерівності, а також нерівності, що зводяться до них;
— розв'язувати раціональні й дробові раціональні нерівності, використовуючи означення та властивості модуля;
— розв'язувати нерівності, що містять степеневі вирази;
— розв'язувати нерівності, користуючись графічним методом розв'язування й дослідження нерівностей;
— розв'язувати нерівності з параметрами.

Нерівності виду $\frac{P(x)}{Q(x)} \diamond 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени, $\diamond$ — один зі знаків $>, <, \geq, \leq$, називають *дробово-раціональними*. Шляхом виконання рівносильних перетворень дробово-раціональну нерівність зводять до раціональної.

1) $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) > 0$;

2) $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0 \Leftrightarrow P(x) \cdot Q(x) < 0$;

3) $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \geq 0, \\ Q(x) \neq 0; \end{cases}$

4) $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \cdot Q(x) \leq 0, \\ Q(x) \neq 0. \end{cases}$

Метод інтервалів для розв'язання нерівностей виду $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени відносно x.

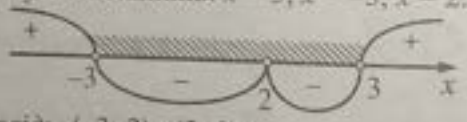
Нерівності $P(x) \cdot Q(x) > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ ($P(x) \cdot Q(x) < 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$) рівносильні.

Розглянемо випадок, коли многочлени $P(x)$ і $Q(x)$ розкладаються в добутки двочленів виду $x - x_0$.

Наприклад, розв'язати нерівність $\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} < \frac{5x}{(x+3)(x-2)}$. ОДЗ: $\begin{cases} x \neq -3; \\ x \neq 2. \end{cases}$ Тоді одержимо:

$\frac{x}{x+3} + \frac{2}{x-2} - \frac{5x}{(x+3)(x-2)} < 0$; $\frac{x(x-2)+2(x+3)-5x}{(x+3)(x-2)} < 0$; $\frac{x^2-5x+6}{(x+3)(x-2)} < 0$; $\frac{(x-3)(x-2)}{(x+3)(x-2)} < 0$.

Тоді $(x-3)(x+3)(x-2)^2 < 0$. Нулі множників: $x = 3$, $x = -3$, $x = 2$.



Отже, $x \in (-3; 2) \cup (2; 3)$. *Відповідь.* $(-3; 2) \cup (2; 3)$.

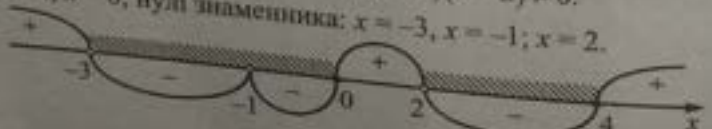
Зауваження. Розв'язки нерівностей виду $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ та $\frac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ є об'єднаннями розв'язків відповідних нерівностей $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ і $\frac{P(x)}{Q(x)} < 0$ та рівняння $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.

Наприклад, знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} \geq \frac{1}{x^2-x-2}$.

Маємо: $\frac{8x+3}{(x^2+2x+1)(x^2+x-6)} - \frac{1}{x^2-x-2} \geq 0$; $\frac{8x+3}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} - \frac{1}{(x-2)(x+1)} \geq 0$; $\frac{8x+3-(x+1)(x+3)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0$;

$\frac{-x^2+4x}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \geq 0$; $\frac{x(x-4)}{(x+1)^2(x+3)(x-2)} \leq 0$; $\begin{cases} x(x-4)(x+1)^2(x+3)(x-2) \leq 0; \\ (x+1)^2(x+3)(x-2) \neq 0. \end{cases}$

Нулі чисельника: $x = 4$, $x = 0$; нулі знаменника: $x = -3$, $x = -1$; $x = 2$.



Отже, $\begin{cases} -3 < x < -1; \\ -1 < x \le 0; \\ 2 < x \le 4. \end{cases}$ Цілими є 4 розв'язки –2; 0; 3; 4. *Відповідь.* 4.

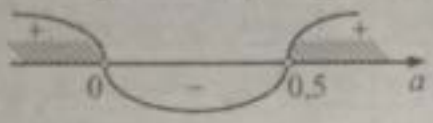
Розв'язування дробових раціональних нерівностей з параметром

Розглянемо приклад: розв'язати нерівність $\frac{x-2}{ax-1} < 0$. Якщо $a = 0$, то одержимо лінійну нерівність $-(x-2) < 0$, тобто $x > 2$.

Нехай $a \neq 0$, тоді дана нерівність рівносильна нерівності $a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right) < 0$. Застосуємо для розв'язування цієї нерівності метод інтервалів. Нулі множників: $x_1 = 2$ та $x_2 = \frac{1}{a}$, до того ж:

1) $x_1 = x_2 = 2$, якщо $a = 0{,}5$;

2) $x_2 < x_1$, якщо $\frac{1}{a} < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{a} - 2 < 0$; $\frac{1-2a}{a} < 0$; $2\left(a-\frac{1}{2}\right)a > 0$; $a < 0$ або $a > 0{,}5$;



3) $x_1 < x_2$, якщо $a \in (0; 0{,}5)$.

Розглянемо випадки.

1) $a = 0{,}5$. У цьому випадку нерівність набуває вигляду $(x-2)^2 < 0$, що неможливо. Отже, якщо $a = 0{,}5$, то вихідна нерівність не має розв'язків;

2.1) $a < 0$. $a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2) < 0$; $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2) > 0$; $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right) \cup (2; +\infty)$;

2.2) $a > 0{,}5$; $a\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2) < 0$; $\left(x-\frac{1}{a}\right)(x-2) < 0$; $x \in \left(\frac{1}{a}; 2\right)$;

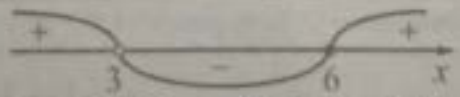
3) $a \in (0; 0{,}5)$. $a(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right) < 0$; $(x-2)\left(x-\frac{1}{a}\right) < 0$; $x \in \left(2; \frac{1}{a}\right)$.

Відповідь. Якщо $a < 0$, то $x \in \left(-\infty; \frac{1}{a}\right) \cup (2; +\infty)$; якщо $a = 0$, то $x \in (2; +\infty)$; якщо $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$, то $x \in \left(2; \frac{1}{a}\right)$; якщо $a = 0{,}5$, то $x \in \varnothing$; якщо $a > 0{,}5$, то $x \in \left(\frac{1}{a}; 2\right)$.

Приклад 1. Визначити кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{6-x}{3x-9} \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
3; 4; 5; 6	3; 4	3	4	4; 5; 6

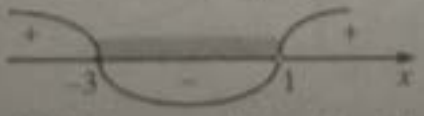
■ ОДЗ: $x \neq 3$. $\frac{6-x}{3x-9} \ge 0$; $\frac{x-6}{x-3} \le 0$;



Отже, $x \in (3; 6]$. Цілими розв'язками нерівності є 4; 5; 6 і їх кількість дорівнює 3. *Відповідь.* В. ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{5x+7}{x-1} \le 2$.

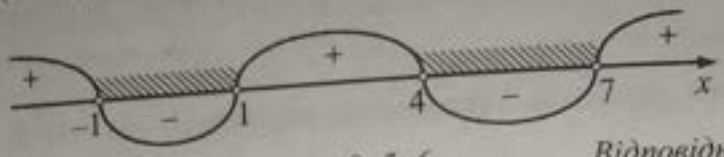
■ ОДЗ: $x \neq 1$. $\frac{5x+7}{x-1} \le 2$; $\frac{5x+7}{x-1} - 2 \le 0$; $\frac{5x+7-2(x-1)}{x-1} \le 0$; $\frac{3x+9}{x-1} \le 0 \;\Big|:3$; $\frac{x+3}{x-1} \le 0$;



Отже, розв'язок нерівності — $x \in [-3; 1)$. *Відповідь.* $[-3; 1)$. ■

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7}>0$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності.

■ $\frac{x^2-5x+4}{-x^2+6x+7}>0$; $\frac{(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-7)}<0$; $(x-1)(x-4)(x+1)(x-7)<0$. Нулі множників: $x=-1$, $x=1$, $x=4$, $x=7$.



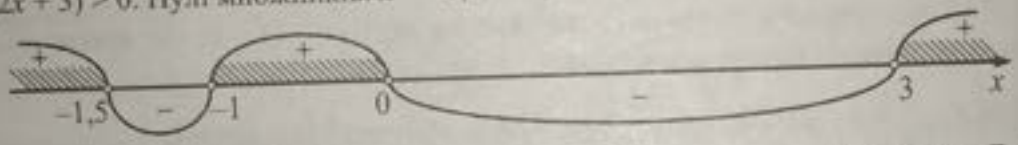
Отже, $x\in(-1;\,1)\cup(4;\,7)$. Цілими розв'язками є 0; 5; 6. *Відповідь.* 3. ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\frac{x}{2x+3}>\frac{1}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-3)\cup(-1;0)\cup(3;+\infty)$	$(-1{,}5;-1)\cup(3;+\infty)$	$(-\infty;-1{,}5]\cup[-1;0]\cup[3;+\infty)$	$(-1{,}5;1)\cup(0;3)$	$(-\infty;-1{,}5)\cup(-1;0)\cup(3;+\infty)$

■ $\frac{x}{2x+3}>\frac{1}{x}$; $\frac{x}{2x+3}-\frac{1}{x}>0$; $\frac{x^2-(2x+3)}{x(2x+3)}>0$; $\frac{x^2-2x-3}{x(2x+3)}>0$; $\frac{(x+1)(x-3)}{x(2x+3)}>0$;

$(x+1)(x-3)x(2x+3)>0$. Нулі множників: $x=-1$, $x=3$, $x=0$, $x=-1{,}5$.



Отже, $x\in(-\infty;-1{,}5)\cup(-1;0)\cup(3;+\infty)$. *Відповідь.* Д. ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-5x+6}{|x|+7}<0$.

А	Б	В	Г	Д
$x\in R$	$(2;3)$	$(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$	$(-\infty;-3)\cup(-2;+\infty)$	$(-\infty;-7)\cup(2;3)$

■ Оскільки $|x|+7>0$, то: $x^2-5x+6<0$; $(x-2)(x-3)<0$. Отже, $x\in(2;\,3)$. *Відповідь.* Б. ■



Приклад 6. Розв'язати нерівність $\frac{x^2+3x+2}{x^2-|x|-2}\ge -3x$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

■ $\frac{x^2+3x+2}{x^2-|x|-2}\ge -3x$. Знайдемо ОДЗ нерівності $x^2-|x|-2\ne 0$; $(|x|-2)(|x|+1)\ne 0$; $|x|\ne 2$; $x\ne\pm 2$.

1) Нехай $x\ge 0$, $x\ne 2$, тоді отримаємо: $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2}\ge -3x$; $\frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}\ge -3x$; $\frac{x+2}{x-2}\ge -3x$;

$\frac{x+2}{x-2}+3x\ge 0$; $\frac{x+2+3x^2-6x}{x-2}\ge 0$; $\frac{3x^2-5x+2}{x-2}\ge 0$; $\frac{(x-1)(3x-2)}{x-2}\ge 0$; $(x-1)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)\ge 0$.



Отже, $x\in\left[\frac{2}{3};1\right]\cup(2;+\infty)$.

2) нехай $x<0$, $x\neq -2$, тоді отримаємо: $\frac{x^2+3x+2}{x^2+x-2}\geq -3x$; $\frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-1)}\geq -3x$; $\frac{x+1}{x-1}+3x\geq 0$;

$\frac{x+1+3x(x-1)}{x-1}\geq 0$; $\frac{3x^2-2x+1}{x-1}\geq 0$. Квадратний тричлен $3x^2-2x+1$ має від'ємний дискримінант, перший коефіцієнт $a=3>0$, тому за всіх значень x набуває тільки додатних значень, тому одержимо нерівність $x-1>0$, звідки $x\in\varnothing$.

Розв'язками нерівності є $x\in\left[\frac{2}{3};1\right]\cup(2;+\infty)$, а найменший цілий розв'язок $x=1$. *Відповідь.* 1. ■

Приклад 7. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\left|\frac{3x+1}{x-3}\right|<3$.

■ ОДЗ: $x\neq 3$. $\begin{cases}\frac{3x+1}{x-3}<3;\\ \frac{3x+1}{x-3}>-3.\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{3x+1-3x+9}{x-3}<0;\\ \frac{3x+1+3x-9}{x-3}>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\frac{10}{x-3}<0;\\ \frac{6x-8}{x-3}>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x-3<0;\\ (x-3)\left(x-\frac{4}{3}\right)>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x<3;\\ \left[\begin{array}{l}x>3;\\ x<\frac{4}{3};\end{array}\right.\end{cases}$ $x<\frac{4}{3}$.

Отже, $x\in\left(-\infty;4/3\right)$. Тоді найбільший цілий розв'язок $x=1$. *Відповідь.* 1. ■

Приклад 8. Розв'язати нерівність $\left|\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|\geq 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-2;-1)$	$(-2;-1)\cup(0;+\infty)$	$(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup$ $\cup(-1;0]$	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$

■ (...); $\left|\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}\right|\geq 1$. ОДЗ: $\left[\begin{array}{l}x\neq -1;\\ x\neq -2.\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}\geq 1;\\ \frac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}\leq -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{(x-1)(x-2)-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}\geq 0;\\ \frac{(x-1)(x-2)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)}\leq 0;\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\frac{-6x}{(x+1)(x+2)}\geq 0;\\ \frac{2x^2+4}{(x+1)(x+2)}\leq 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\frac{x}{(x+1)(x+2)}\leq 0;\\ \frac{x^2+2}{(x+1)(x+2)}\leq 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x(x+1)(x+2)\leq 0;\ (1)\\ (x+1)(x+2)\leq 0;\quad (2)\end{array}\right.$

1) 

$x\in(-\infty;-2)\cup(-1;0]$; 2) 

$x\in(-2;-1)$

Отже, $x\in(-\infty;-2)\cup(-2;-1)\cup(-1;0]$. *Відповідь.* В. ■

Приклад 9. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких нерівність $\frac{\left|x^2+4a(a-x)+4\right|}{|x-2a|}\leq$ $\leq 2x+3-x^2$ має хоча б один розв'язок. У відповідь записати найбільше значення параметра a.

■ Перетворимо чисельник дробу:

$$|x^2+4a(a-x)+4|=|x^2+4a^2-4ax+4|=|(x-2a)^2+4|=(x-2a)^2+4.$$

Ліва частина нерівності: $h(x)=\frac{(x-2a)^2+4}{|x-2a|}=|x-2a|+\frac{4}{|x-2a|}=2\left(\frac{|x-2a|}{2}+\frac{2}{|x-2a|}\right)$. Для всіх $b>0$ виконується нерівність $b+\frac{1}{b}\geq 2$. Тому $\frac{|x-2a|}{2}+\frac{2}{|x-2a|}\geq 2$. Отже, $|x-2a|+\frac{4}{|x-2a|}\geq 4$. Права частина нерівності перетвориться так: $f(x)=-x^2+2x+3=-(x^2-2x+1)+4=-(x-1)^2+4$, тому

$-(x-1)^2+4\le 4$. Маємо: $h(x)\ge 4$, $f(x)\le 4$. Задана нерівність виконується лише тоді, коли $h(x)=f(x)=4$. З умови $f(x)=4$ випливає, що $x=1$. Тоді умову $h(x)=4$ можна записати так: $2\cdot\left(\frac{|1-2a|}{2}+\frac{2}{|1-2a|}\right)=4$. Нехай $|1-2a|=t$. Тоді $t+\frac{4}{t}=4$; $t^2-4t+4=0$; $(t-2)^2=0$; $t=2$, тобто $|1-2a|=2$; $\left[\begin{array}{l}1-2a=2,\\1-2a=-2;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}a=-0{,}5;\\a=1{,}5.\end{array}\right.$ Найбільше значення $a=1{,}5$. *Відповідь.* 1,5. ■

Завдання 11.1–11.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

11.1. Знайти множину розв'язків нерівності $x+\frac{1}{x}>\frac{1}{x}-2$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-2;+\infty)$	$(-2;0)\cup(0;+\infty)$	$(0;+\infty)$	$(-\infty;-2)\cup(-2;0)\cup(0;+\infty)$

11.2. Вибрати нерівність, множиною розв'язків якої є R.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{-x^2}{x^2-4}\le 0$	$\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^2\ge 0$	$\frac{x^2-4}{x^2-4}\ge 0$	$\frac{x^2+1}{x^2}\ge 0$	$\frac{-x^2}{x^2+4}\le 0$

11.3. **(ЗНО–2013)** Розв'язати нерівність $\frac{1}{x-5}<0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;5)$	$(-\infty;-5)$	$(-\infty;5)\cup(5;+\infty)$	$(-5;+\infty)$	$(5;+\infty)$

11.4. Розв'язати нерівність $\frac{x}{x-5}\ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;0]\cup(5;+\infty)$	$(-\infty;0)\cup[5;+\infty)$	$(-\infty;0)\cup(5;+\infty)$	$[0;5)$	$(0;5]$

11.5. Розв'язати нерівність $\frac{x+5}{x-2}\le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-2)\cup[5;+\infty)$	$(-\infty;-5]\cup(2;+\infty)$	$[-5;2]$	$[-5;2)$	$(-2;5]$

11.6. **(ЗНО–2015)** Розв'язати нерівність $\frac{(x-6)(x+2)^2}{x-3}\le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\{-2\}\cup(3;6]$	$(-\infty;-2]\cup(3;6]$	$[-2;6]$	$(-\infty;6]$	$(-\infty;3)\cup(3;6]$

11.7. Розв'язати нерівність $\frac{x+5}{x^2-4}\le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[-5;-2)\cup(2;+\infty)$	$(-\infty;-5]\cup(-2;2)$	$(-\infty;-5]\cup[-2;2]$	$(-\infty;-5)$	$(-\infty;5]$

11.8. Розв'язати нерівність $\frac{x+5}{x+3}>1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-5)\cup(-3;+\infty)$	$(-5;+\infty)$	$(-3;+\infty)$	$(-\infty;-5)$	$(-\infty;-3)$

11.9. Розв'язати нерівність $\frac{3x+4}{x+1}\le 2$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[-1\frac{1}{3};-1\right)$	$[-2;-1]$	$[-2;-1)$	$\left[-1\frac{1}{3};-1\right]$	$(-\infty;-2]\cup(-1;+\infty)$

11.10. Розв'язати нерівність $\frac{1}{x}\le -x$.

А $(1;+\infty)$ **Б** $(-\infty;-1)$ **В** $(0;+\infty)$ **Г** $(-\infty;0)$ **Д** $(-\infty;0]$

11.11. Розв'язати нерівність $\frac{3}{x}\le\frac{2}{x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-3]\cup(-1;0)$	$(-\infty;-3]\cup[-1;0]$	$[-3;-1)$	$(-1;0)$	$(-3;-1]$

11.12. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{3}{x-3}>\frac{1}{x+2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$	$(-\infty;-4,5)\cup(-2;3)$	$(-4,5;-2)\cup(3;+\infty)$	$(-2;3)$	$(-3;2)\cup(4,5;+\infty)$

11.13. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{4x^2-4x+1}{(x+4)(x-3)}\ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$	$(-4;3)$	$\left(-4;\frac{1}{2}\right)\cup(3;+\infty)$	$(-\infty;-4)\cup\left\{\frac{1}{2}\right\}\cup(3;+\infty)$	$(-\infty;-4]\cup[3;+\infty)$

11.14. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}\le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-4;3)$	$(-4;2)\cup(2;3]$	$(-\infty;-4)\cup[2]\cup(3;+\infty)$	$(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$	$(-3;4)$

11.15. Обчислити найменший цілий розв'язок нерівності $\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-2-x^2}{x+9}\le 0$.

А -9 **Б** -8 **В** 0 **Г** 9 **Д** 1

11.16. Розв'язати нерівність $\frac{(x-1)^2(x+7)(x+3)^3}{x^2+6x+9}\ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[-7;-3)\cup[1;+\infty)$	$(-\infty;-7]\cup(-3;+\infty)$	$[-7;-3)$	$(-\infty;3)\cup[7;+\infty)$	$(3;7]$

11.17. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $\frac{x(x-3)(3x-2)}{2x-3}\le 0$.

А 1 **Б** 2 **В** 3 **Г** 4 **Д** 5

11.18. Розв'язати нерівність $\frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}\le 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-4;3)$	$(-4;3)$	$(-\infty;-4)$	$(-4;+\infty)$	$(-4;2)\cup(2;+\infty)$

11.19. Знайти множину розв'язків нерівності $\left|\frac{1}{x-5}\right|>1$.

А	Б	В	Г	Д
$(4;5)\cup(5;6)$	$(4;6)$	$(-\infty;4)\cup(6;+\infty)$	$(-6;-4)$	$(-\infty;-6)\cup(-4;+\infty)$

11.20. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{7}{|x|+5}<1$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-2;2)$	$(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$	$(-\infty;-5)\cup(2;+\infty)$	$(-5;2)$

11.21. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{(x+2)(x-a)}{x-4}\le 0$, якщо $-2<a<3$.

А	Б	В	Г	Д
$[-2;a]$	$[a;4)$	$[-2;a]\cup(4;+\infty)$	$(-\infty;-2]\cup[a;4)$	$[a;4]$

11.22. Знайти множину розв'язків нерівності $\frac{x^2-2x-15}{(x-5)(x-a)}\le 0$, якщо $-3<a<5$.

А	Б	В	Г	Д
$[-3;a]$	$[-3;a)$	$(-\infty;-3]\cup(5;+\infty)$	$(-\infty;-3]\cup[5;+\infty)$	$(-\infty;-3]\cup(a;5)\cup\cup(5;+\infty)$

Завдання 11.23–11.29 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

11.23. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $x^2>3$
2 $|x|\le\sqrt{3}$
3 $\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}\le 0$

А $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$
Б $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$
В $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$
Г $\left(\sqrt{3};\infty\right)$
Д $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$

11.24. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та рівносильними їм нерівностями (А–Д).

1 $(x+2)(x-3)<0$
2 $(x+2)(x-3)>0$
3 $\frac{x+2}{x-3}\ge 0$

А $\frac{x-3}{x+2}<0$
Б $\begin{cases}(x+2)(x-3)\ge 0;\\ x\ne 3\end{cases}$
В $(x+2)(x-3)\le 0$
Г $\left(\frac{x-3}{x+2}\right)^2\ge 0$
Д $\frac{x+2}{x-3}>0$

11.25. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $x+\frac{1}{x-2}\ge\frac{1}{x-2}+2$
2 $x+\frac{1}{x-3}>\frac{1}{x-3}+2$
3 $x+\frac{1}{x+1}\ge\frac{1}{x+1}+2$

А $[2;+\infty)$
Б $(-\infty;-2]$
В $[-2;3)\cup(3;+\infty)$
Г $(2;3)\cup(3;+\infty)$
Д $(2;+\infty)$

11.26. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x-3}{x+2}\le 0$

2 $\frac{x+2}{x-3}\le 0$

3 $\frac{1}{(x+2)(x-3)}\le 0$

А $(-2; 3)$

Б $[-2; 3]$

В $[-2; 3)$

Г $(-2; 3]$

Д $(-\infty; -2]\cup[3; +\infty)$

11.27. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x+3}{x^2-4}\le 0$

2 $\frac{x+3}{x^2-4}\ge 0$

3 $\frac{x^2-4}{x+3}\ge 0$

А $(-\infty; -3)\cup[-2; 2]$

Б $(-\infty; -3]\cup(-2; 2)$

В $(-\infty; -3]\cup[-2; 2]$

Г $[-3; -2)\cup(2; +\infty)$

Д $(-3; -2]\cup[2; +\infty)$

11.28. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{x+4}{x+1}>1$

2 $\frac{x+1}{x+4}>1$

3 $\frac{x+1}{x+4}<1$

А $(-\infty; -4)$

Б $(-\infty; -1)$

В $(-\infty; 4)$

Г $(-4; +\infty)$

Д $(-1; +\infty)$

11.29. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\frac{1}{x}\le -x$

2 $\frac{1}{x}\ge -x$

3 $\frac{1}{x}\le x$

А $(-\infty; -1]\cup(0; 1]$

Б $(-\infty; 0)$

В $[-1; 0)\cup[1; +\infty)$

Г $(-1; 1)$

Д $(0; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 11.30–11.44. Відповідь запишіть десятковим дробом.

11.30. Розв'язати нерівність $\frac{x-5}{x+5}<x$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок.

11.31. Розв'язати нерівність $\frac{2}{x+9}<\frac{x}{x-6}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.32. Розв'язати нерівність $\frac{1}{1-x}\ge 1-2x$. У відповідь записати суму всіх додатних цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.33. Розв'язати нерівність $\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2x}\le 1$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.34. Розв'язати нерівність $\frac{1}{x^2-3x+2}\le\frac{1}{2}$. У відповідь записати добуток усіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.35. Розв'язати нерівність $2+\frac{1}{x-3}+\frac{x-3}{x+2}\le\frac{1}{(x-3)(x+2)}$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

11.36. Розв'язати нерівність $\frac{2}{3x+7}\le\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+1}$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок.

11.37. Розв'язати нерівність $\frac{x-8}{x^2-5x+4}>\frac{2}{x+1}$. У відповідь записати найменший додатний цілий розв'язок.

11.38. Розв'язати нерівність $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8}\le 0$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків.

11.39. Розв'язати нерівність $\left|\frac{2x+5}{4x+1}\right|<1$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.40. Розв'язати нерівність $1-\frac{1}{x+2}\ge\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)(x-1)}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.41. Розв'язати нерівність $\frac{x^3-3x+2}{6-x}\le 0$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.42. Розв'язати нерівність $\frac{|x+7|}{x^2+8x+7}<5$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.43. Розв'язати нерівність $\left|\frac{1}{x+1}\right|<\left|\frac{2}{x-2}\right|$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

11.44. Розв'язати нерівність $1-\frac{1}{x+2}\le\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x+1}\right)(x-1)}$. У відповідь записати:

1) суму всіх цілих чисел, які є розв'язками нерівності;

2) добуток усіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності і менші по модулю за 2022.

Тема 12. Ірраціональні рівняння

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:
— розв'язувати найпростіші ірраціональні рівняння або рівняння, що зводяться до найпростіших;
— розв'язувати ірраціональні рівняння, а також їх системи;
— розв'язувати ірраціональні рівняння, користуючись графічним методом;
— розв'язувати рівняння та їх системи з параметрами.

Ірраціональними називають рівняння, які містять змінну під знаком кореня (радикала) або в основі степеня з раціональним показником. Наприклад, $x+3=\sqrt{2x-1}$; $x^{\frac{2}{3}}-10=6$.

Основними методами розв'язування ірраціональних рівнянь є:

а) метод піднесення обох частин рівняння до одного й того ж степеня;

б) метод уведення нових змінних;

в) штучні прийоми.

Метод піднесення обох частин рівняння до одного й того ж степеня

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь *методом піднесення обох частин до парного степеня* можуть з'явитися побічні (зайві) корені.

Так, наприклад, якщо задано рівняння $\sqrt{x+5}=x-1$, то, піднісши до квадрата обидві його частини, одержимо: $\left(\sqrt{x+5}\right)^2=(x-1)^2$; $x+5=x^2-2x+1$; $x^2-3x-4=0$; $x_1=4$ і $x_2=-1$. Коренем вихідного рівняння $\left(\sqrt{4+5}=4-1\right)$ є $x_1=4$, а $x_2=-1$ є побічним коренем $\left(\sqrt{-1+5}\neq -1-1;\ \sqrt{4}\neq -2\right)$.

При розв'язуванні ірраціонального рівняння, яке містить парні степені радикалів, буває корисним знаходження ОДЗ, що може полегшити його розв'язування.

Відокремлення квадратного кореня

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}=3$. Відокремимо один квадратний корінь $\sqrt{x+2}=3-\sqrt{3-x}$, а потім піднесемо обидві частини рівняння до квадрата: $x+2=9-6\sqrt{3-x}+3-x$; $5-x=3\sqrt{3-x}$. Ще раз піднесемо до квадрата: $25-10x+x^2=9(3-x)$; $x^2-x-2=0$; $x_1=-1$, $x_2=2$. Обидва значення є коренями даного рівняння: якщо $x_1=-1$, то одержимо: $\sqrt{-1+2}+\sqrt{3-(-1)}=3$; $\sqrt{1}+\sqrt{4}=3$; $3=3$; якщо $x_2=2$, то одержимо: $\sqrt{2+2}+\sqrt{3-2}=3$; $\sqrt{4}+\sqrt{1}=3$; $3=3$.

Іноді корисно почати розв'язання рівняння зі знаходження його області визначення. Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}-\sqrt{9x+7}+\sqrt{x-2}=0$. ОДЗ: $\begin{cases}11x+3\geq 0;\\ 2-x\geq 0;\\ 9x-7\geq 0;\\ x-2\geq 0;\end{cases}\begin{cases}x\geq -3/11;\\ x\leq 2;\\ x\geq 7/9;\\ x\geq 2;\end{cases}$ $x=2$. Отже, область визначення складається тільки з однієї точки $x=2$. Перевіримо, чи буде це значення коренем вихідного рівняння: $\sqrt{11\cdot 2+3}-\sqrt{2-2}-\sqrt{9\cdot 2+7}+\sqrt{2-2}=0$; $\sqrt{25}-\sqrt{25}=0$; $0=0$. *Відповідь.* 2.

При розв'язуванні ірраціональних рівнянь слід пам'ятати, що:

1) у рівнянні корені парного степеня є арифметичними, а це значить, що значення кореня завжди невід'ємне, крім цього, підкореневий вираз теж невід'ємний;

2) корені непарного степеня визначені для будь-якого значення підкореневого виразу;

3) формальне використання властивостей кореня $\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[2n]{b}$ або $\sqrt[2n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[2n]{a}}{\sqrt[2n]{b}}$ може призвести до звуження області визначення рівняння, що недопустимо.

Наприклад, у рівності $\sqrt[2n]{ab}=\sqrt[2n]{a}\cdot\sqrt[2n]{b}$ замість $ab\geq 0$ (у лівій частині), отримаємо вужчу область $a\geq 0$ і $b\geq 0$ (у правій частині).

Метод уведення нових змінних

Одним зі способів, який застосовують для розв'язування ірраціональних рівнянь, є *введення нової змінної*. Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2-6x+18}=9$. Позначимо вираз x^2-6x+9 через t: $x^2-6x+9=t\geq 0$. Тоді $x^2-6x+18=t+9$ і вихідне рівняння набуде вигляду: $\sqrt{t}+\sqrt{t+9}=9$. Розв'яжемо його: $\sqrt{t}+\sqrt{t+9}=9;\ \sqrt{t+9}=9-\sqrt{t};\ t+9=81-18\sqrt{t}+t;\ \ 18\sqrt{t}=72;\ \sqrt{t}=4;\ t=16$. Повернувшись до заміни, одержимо: $x^2-6x+9=16;\ x^2-6x-7=0;\ x_1=-1,\ x_2=7$. Виконавши перевірку, встановлюємо, що обидва значення задовольняють початкове рівняння. *Відповідь.* –1; 7.

Штучні прийоми

Рівняння виду $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{g(x)}=h(x)$

При розв'язуванні рівнянь такого виду доцільно піднести обидві частини до куба за формулою $\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)^3=a\pm b\pm 3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}\right)$.

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+1}=3$. Після піднесення обох частин рівняння до куба отримаємо: $8-x+x+1+3\sqrt[3]{(8-x)(x+1)}\left(\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+1}\right)=27$. Використаємо умову, що $\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{x+1}=3$. Одержимо: $\sqrt[3]{(8-x)(x+1)}=2$; $(8-x)(x+1)=8;\ x^2-7x=0;\ x_1=0,\ x_2=7$. *В-дь.* 0; 7.

Зведення ірраціонального рівняння до системи рівнянь

Нехай потрібно розв'язати рівняння $\sqrt[4]{8-x}+\sqrt[4]{89+x}=5$. Позначимо $\sqrt[4]{8-x}=a$, звідки $8-x=a^4$; $\sqrt[4]{89+x}=b$, звідки $89+x=b^4$ і $a^4+b^4=8-x+89+x=97$. Одержимо систему рівнянь: $\begin{cases}a+b=5;\\ a^4+b^4=97.\end{cases}$ Перетворимо вираз a^4+b^4: $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=((a+b)^2-2ab)^2-2a^2b^2$. Одержимо рівняння: $(25-2ab)^2-2a^2b^2=97$. Нехай $ab=t$, тоді маємо: $(25-2t)^2-2t^2=97;\ 625-100t+4t^2-2t^2-97=0;\ 2t^2-100t+528=0;\ t^2-50t+264=0;$ $\left[\begin{array}{l}t_1=44;\\ t_2=6,\end{array}\right.$ тобто $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a+b=5;\\ ab=6;\end{cases}\\ \begin{cases}a+b=5;\\ ab=44.\end{cases}\end{array}\right.$ Розв'язками першої системи є $a=2,\ b=3$ або $a=3,\ b=2$, друга система розв'язків не має. Повертаємося до заміни й одержуємо: $x_1=-8,\ x_2=-73$. *Відповідь.* –8; –73.

Спряженість в ірраціональних рівняннях

Раціональне рівняння, яке виникне, може мати сторонні корені, тому для знайдених розв'язків обов'язково потрібно виконати перевірку.

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}=4$ (1). Складемо нове рівняння $\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}=A$ (2). Перемножимо почастинно рівняння (1) і (2): $(1+x+x^2)-(1-x+x^2)=4A$ й виразимо A через x: $2x=4A;\ A=\frac{x}{2}$. Таким чином, $\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}=\frac{x}{2}$. Додамо вихідне рівняння до останнього: $2\sqrt{1+x+x^2}=4+\frac{x}{2};\ \ 4\left(1+x+x^2\right)=16+4x+\frac{x^2}{4};\ \ 16+16x+16x^2=64+16x+x^2;\ 15x^2=48;\ x_{1,2}=\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$. Перевіркою встановлюємо, що обидва корені задовольняють вихідне рівняння.

Відповідь. $\pm\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Розв'язування ірраціональних рівнянь з використанням властивостей відомих функцій та оцінки значень лівої й правої частин рівняння

Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-7x+6}=12x-x^2-36$. Перепишемо задане рівняння так: $\sqrt{x^2-7x+6}=-(x-6)^2$; $f(x)=\sqrt{x^2-7x+6}\geq 0$; $g(x)=-(x-6)^2\leq 0$. Отже, дане рівняння рівносильне системі: $\begin{cases}\sqrt{x^2-7x+6}=0;\\ -(x-6)^2=0;\end{cases}$ $x=6$. *Відповідь.* 6.

Якщо розв'язування рівнянь призводить до громіздких обчислень, то іноді варто скористатися властивостями зростання чи спадання відповідних функцій. Це можна зробити так:

1) дібрати один чи кілька коренів рівняння;

2) довести, що дане рівняння не має інших коренів.

Наприклад, розв'язати рівняння $\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}=3$. ОДЗ: $x\geq 7$. Неважко побачити, що $x=8$ є коренем заданого рівняння. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{x}$. Вона зростає на проміжку $[7;+\infty)$, тоді рівняння $f(x)=3$ має єдиний корінь, і цей корінь $x=8$. *Відповідь.* 8.

Ірраціональні рівняння з параметрами

Нехай потрібно з'ясувати, за яких значень параметра a рівняння $\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x$ має єдиний додатний корінь. Оскільки ліва частина рівняння невід'ємна, то рівняння може мати корінь, лише якщо $x\geq 0$. Виконаємо заміну $\sqrt{a+x}=y$, $y\geq 0$. Тоді $\begin{cases}\sqrt{a+x}=y;\\ \sqrt{a+y}=x;\\ x\geq 0,\ y\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}y^2-x-a=0;\\ x^2-y-a=0;\\ x\geq 0,\ y\geq 0.\end{cases}$ Віднявши від першого рівняння друге, отримаємо рівняння: $(y^2-x^2)+(y-x)=0$; $(y-x)(y+x+1)=0$. Оскільки $y+x+1>0$ за усіх значень x та y, то залишається одна можливість: $y-x=0$; $y=x$. Отже, система набуде вигляду: $\begin{cases}x^2-x-a=0;\\ x\geq 0.\end{cases}$ Вона матиме один додатний розв'язок у таких випадках: 1) $\begin{cases}D=1+4a=0;\\ x_0=\dfrac{1}{2}>0,\end{cases}$ звідки $a=-\dfrac{1}{4}$; 2) $a>0$ (корені квадратного тричлена x^2+bx+c мають різні знаки, коли $c<0$).

Відповідь. $a=-\dfrac{1}{4}$ або $a>0$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{3x+7}=x-7$.

А	Б	В	Г	Д
3	14	3,14	–7	6

■ $\sqrt{3x+7}=x-7$. Якщо $x-7<0$, то рівняння коренів не має. Якщо $x-7\geq 0$, $x\geq 7$, то: $\left(\sqrt{3x+7}\right)^2=(x-7)^2$; $3x+7=x^2-14x+49$; $x^2-17x+42=0$; $x_1=3$ — не задовольняє умову $x\geq 7$, $x_2=14$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}-\sqrt{x+10}=0$.

А	Б	В	Г	Д
6	7,5	4,14	8	5

■ $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}-\sqrt{x+10}=0$; $\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}=\sqrt{x+10}$; $\left(\sqrt{x+3}+\sqrt{4x-23}\right)^2=\left(\sqrt{x+10}\right)^2$;

$5x-20+2\sqrt{(x+3)(4x-23)}=x+10$; $2\sqrt{(x+3)(4x-23)}=30-4x$; $\sqrt{4x^2-11x-69}=15-2x$;

$4x^2-11x-69=225-60x+4x^2$; $49x=294$; $x=6$.

Перевірка: $\sqrt{6+3}+\sqrt{4\cdot 6-23}-\sqrt{6+10}=\sqrt{9}+\sqrt{1}-\sqrt{16}=0$; $0=0$ — правильна рівність; 6 — корінь рівняння. *Відповідь.* **А.** ■

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}=3$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{16}$	81	12	3

■ $2x^{\frac{1}{2}}-5x^{\frac{1}{4}}=3$. Зробимо заміну: $x^{\frac{1}{4}}=t$, $t\geq 0$. Тоді $x^{\frac{1}{2}}=t^2$, і задане рівняння матиме вигляд $2t^2-5t=3$; $2t^2-5t-3=0$; $t_1=3$; $t_2=-\frac{1}{2}$ — не задовольняє умову $t\geq 0$. Тому: $x^{\frac{1}{4}}=3$; $x=3^4$; $x=81$.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $3\sqrt[3]{2x-9}-\sqrt{4-x}=1$.

■ Знайдемо ОДЗ: $\begin{cases}2x-9\geq 0;\\ 4-x\geq 0;\end{cases}$ $\begin{cases}2x\geq 9;\\ -x\geq -4;\end{cases}$ $\begin{cases}x\geq 4{,}5;\\ x\leq 4;\end{cases}$ $x\in\varnothing$. Оскільки ОДЗ — порожня множина, то рівняння коренів не має. *Відповідь.* $\varnothing$. ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x-3}=\sqrt{-2-x}$.

■ ОДЗ: $-2-x\geq 0$ або $x\leq -2$. Якщо $x\leq -2$, то тоді $x-3<0$. Отже, $\sqrt[3]{x-3}<0$. Звідси випливає, що на ОДЗ рівняння його ліва частина від'ємна, а права — невід'ємна, тому вихідне рівняння коренів не має. *Відповідь.* $\varnothing$. ■

Приклад 6. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$.

■ $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$. ОДЗ: $x\geq -3$. $\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^6=\left(\sqrt{x+3}\right)^6$; $(x+7)^2=(x+3)^3$; $x^2+14x+49=x^3+9x^2+27x+27$; $x^3+8x^2+13x-22=0$. Підбором знаходимо, що $x=1$ — корінь рівняння. Тоді маємо: $x^3+8x^2+13x-22=(x-1)(x^2+9x+22)$; $x^2+9x+22=0$; $D<0$, це рівняння не має коренів. Перевіркою встановлюємо, що $x=1$ задовольняє вихідне рівняння. *Відповідь.* 1. ■

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{5-x}=2$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

■ $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt{5-x}=2$. ОДЗ: $x\leq 5$. Нехай $\sqrt[3]{x+3}=a$, $\sqrt{5-x}=b$, $b\geq 0$. Тоді $x+3=a^3$, $5-x=b^2$ і $a^3+b^2=x+3+5-x=8$. Маємо: $\begin{cases}a+b=2;\\ a^3+b^2=8;\end{cases}$ $\begin{cases}b=2-a;\\ a^3+(2-a)^2=8;\end{cases}$ $\begin{cases}b=2-a;\\ a^3+4-4a+a^2=8;\end{cases}$

$\begin{cases}b=2-a;\\ a^3+a^2-4a-4=0;\end{cases}$ $\begin{cases}b=2-a;\\ a^2(a+1)-4(a+1)=0;\end{cases}$ $\begin{cases}b=2-a;\\ (a+1)(a^2-4)=0;\end{cases}$ $\begin{cases}b=2-a;\\ \left[\begin{array}{l}a=-1;\\ a=2;\\ a=-2;\end{array}\right.\end{cases}$ $\begin{cases}b=2-a;\\ \left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+3}=-1;\\ \sqrt[3]{x+3}=2;\\ \sqrt[3]{x+3}=-2;\end{array}\right.\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x=-4;\\ x=5;\\ x=-11.\end{array}\right.$

Сума коренів рівняння: $-4+5-11=-10$. *Відповідь.* -10. ■

Приклад 8. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}=\frac{2}{x}$. У відповідь записати добуток коренів.

■ $\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}=\frac{2}{x}$. ОДЗ: $x\neq 0$. Розглянемо функцію $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}$. Вона є зростаючою на R. Функція $g(x)=\frac{2}{x}$ спадає на кожному із проміжків $x\in(-\infty;0)$ і $x\in(0;+\infty)$. Оскільки функції $f(x)$ і $g(x)$ непарні, то достатньо знайти корені на проміжку $(0;+\infty)$, корені на проміжку $(-\infty;0)$ слід взяти з протилежним знаком. На проміжку $x\in(0;+\infty)$ вихідне рівняння має корінь $x=1$, і рівняння, якщо в

рівнянні $f(x) = g(x)$ функція $f(x)$ зростає на певному проміжку, а функція $g(x)$ спадає на цьому ж проміжку, то це рівняння може мати не більше одного кореня на даному проміжку. На проміжку $(-\infty; 0)$ корінь даного рівняння $x = -1$, і він з аналогічних міркувань єдиний. Отже, вихідне рівняння має два корені: $x = 1$ та $x = -1$. Тоді добуток коренів дорівнює $1 \cdot (-1) = -1$. *Відповідь.* -1. ■

Приклад 9. За якого найбільшого значення параметра a рівняння $\left(\sqrt{x-2}-3\right)(x-a)=0$ має єдиний корінь?

■ ОДЗ: $x - 2 \geq 0$; $x \geq 2$. Маємо: $(\ldots)$; $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}-3=0;\\ x-a=0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sqrt{x-2}=3;\\ x=a;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x-2=9;\\ x=a;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=11;\\ x=a.\end{array}\right.$ Рівняння має лише один корінь $x = 11$, якщо $a < 2$ або якщо $a = 11$. Отже, найбільшим значенням параметра a, за якого рівняння має єдиний корінь, є $a = 11$. *Відповідь.* 11. ■

Приклад 10. Розв'язати рівняння $x+3-\sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}=\dfrac{6}{x-5}$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

■ ОДЗ: $\dfrac{x+3}{x-5} \geq 0$; $x \in (-\infty; -3] \cup (5; +\infty)$. Перепишемо рівняння так: $(x-5)(x+3)-(x-5)\sqrt{\dfrac{x+3}{x-5}}=6$.

1. Якщо $x > 5$, то отримаємо: $(x-5)(x+3)-\sqrt{(x-5)(x+3)}-6=0; t^2-t-6=0$, де $t=\sqrt{(x-5)(x+3)}>0$; $t_1=3; t_2=-2$. Звідки $t_1=\sqrt{(x-5)(x+3)}=3; x^2-2x-24=0; (x-6)(x+4)=0; x=6$.

2. Якщо $x \leq -3$, то $(x-5)(x+3)+\sqrt{(x-5)(x+3)}=6$. Нехай $\sqrt{(x-5)(x+3)}=t$, $t>0$, тоді маємо: $t^2+t-6=0$; $t_1=-3; t_2=2$. Отже, $\sqrt{(x+3)(x-5)}=2$; $x^2-2x-19=0$; $\left[\begin{array}{l}x_1=1+2\sqrt{5};\\ x_2=1-2\sqrt{5};\end{array}\right.$ $x=1-2\sqrt{5} \leq -3$.

З двох коренів $x = 6$ і $x = 1-2\sqrt{5}$ більшим є $x = 6$. *Відповідь.* 6. ■

Завдання 12.1–12.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

12.1. Знайти область визначення (ОДЗ) рівняння $\sqrt{5-x}+\sqrt{x+1}=2$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-\infty; -1]$	$[5; +\infty)$	$(-1; 5)$	$[-1; 5]$

12.2. Указати рівняння, областю визначення якого є одне число.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x-4}+\sqrt{5-x}=3$	$\sqrt{5-x}+\sqrt{x-7}=2$	$\sqrt{x+2}-\sqrt{x}=-x$	$\sqrt{2x-6}+\sqrt{9-3x}=x$	$\sqrt{x}+\sqrt{-x-1}=2$

12.3. Указати рівняння, область визначення якого є порожня множина.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x+4}+\sqrt{x}=2$	$\sqrt{4-x}+\sqrt{-x}=2$	$\sqrt{x}+\sqrt{-x}=0$	$\sqrt{x-3}+\sqrt{x-6}=1$	$\sqrt{x-5}+\sqrt{4-x}=2$

12.4. Указати рівняння, коренем якого є число 2.

А	Б	В	Г	Д
$(x-2)\sqrt{x-3}=0$	$(x-2)\sqrt{3-2x}=0$	$(x-2)\sqrt{-x}=0$	$(x-2)\sqrt{x-1}=0$	$(x-2)\sqrt{1-x}=0$

12.5. Знайти суму коренів рівнянь $\sqrt[3]{x}=2$, $\sqrt[3]{x}=-3$ і $\sqrt[3]{-x}=1$.

А	Б	В	Г	Д
–20	–18	0	12	9

12.6. Знайти суму коренів рівнянь $\sqrt{x-1}=2$ і $\sqrt{-x}=5$.

А 30 Б –20 В 8 Г –7 Д –24

12.7. Яке з наведених рівнянь має корені?

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{x+7}=-1$	$\sqrt{x-3}+\sqrt{1-x}=2$	$\sqrt{x+5}+\sqrt{2-x}=0$	$\sqrt{2x-6}+\sqrt{x-3}=0$	$\sqrt{x}+\sqrt{3-x}=-2$

12.8. Знайти значення виразу $\sqrt{2x-9}$, якщо значення x задовольняє умову $\sqrt{2x-9}=\sqrt{6-x}$.

А ∅ Б 5 або –1 В 1 або –1 Г 5 Д 1

12.9. Знайти значення виразу $\sqrt{x+11}$, якщо значення x задовольняє умову $\sqrt{x+11}=1-x$.

А 3 або 4 Б 3 або –3 В 3 Г 4 або –4 Д 4

12.10. Знайти суму коренів рівняння $\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}+2=0$.

А 9 Б –9 В 3 Г –3 Д 2

12.11. Розв'язати рівняння $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[6]{x+1}=6$.

А ∅ Б $-4\frac{3}{8}; 7$ В 7 Г –7 Д 63

12.12. Скільки коренів має рівняння $3\sqrt{x-1}+7\sqrt{1-x}=3x^3+7x^5$?

А Жодного Б один В два Г три Д більше, ніж три

12.13. Скільки цілих коренів має рівняння $\sqrt[4]{3x-6}+\sqrt[3]{x+6}=2-\sqrt{2-x}$?

А Жодного Б один В два Г три Д чотири

12.14. Скільки цілих коренів має рівняння $\sqrt{2019-x}+\sqrt{x-2018}=1$?

А Жодного Б один В два Г три Д чотири

12.15. Скільки ірраціональних коренів має рівняння $\sqrt{2x-3}=3-2x$?

А Жодного Б один В два Г три Д чотири

12.16. Скільки коренів має рівняння $\left(x^2-5\right)\left(x+\sqrt{-x}\right)=0$?

А Жодного Б один В два Г три Д чотири

12.17. Розв'язати рівняння $(3x+12)\sqrt{x-2}=0$.

А –4 Б –4; 2 В 2 Г –2; 4 Д –2

12.18. Знайти суму коренів рівняння $\left(x^2+5x-6\right)\sqrt{x+1,5}=0$.

А –6,5 Б 3,5 В –5 Г –2,5 Д –0,5

12.19. Скільки коренів має рівняння $(x-1)\sqrt{x^2-x-6}=6x-6$?

А Жодного Б один В два Г три Д чотири

12.20. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-a}=a$.

А	Б	В	Г	Д
За будь-якого a $x=2a$	за будь-якого a $x=a^2+a$	якщо $a\le 0$, $x\in\varnothing$, якщо $a>0$, $x=a^2+a$	якщо $a<0$, $x\in\varnothing$, якщо $a\ge 0$, $x=a^2+a$	якщо $a<0$, $x\in\varnothing$, якщо $a\ge 0$, $x=2a$

12.21. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+4}=a-2$.

А	Б	В	Г	Д
За будь-якого a $x=a^2-2a$	якщо $a<2$, $x\in\varnothing$, якщо $a\geq 2$, $x=a-2$	якщо $a\leq 2$, $x\in\varnothing$, якщо $a>2$, $x=a-2$	якщо $a\leq 2$, $x\in\varnothing$, якщо $a>2$, $x=a^2-2a$	якщо $a<2$, $x\in\varnothing$, якщо $a\geq 2$, $x=a^2-4a$

12.22. Знайти всі значення a, за яких рівняння $\sqrt{(x-a)(x+1)}=0$ та $(x-a)\sqrt{x+1}=0$ рівносильні.

А $a\leq -1$ **Б** $a=-1$ **В** $a>-1$ **Г** $a\geq -1$ **Д** $a<-1$

12.23. Знайти всі значення a, за яких рівняння $\sqrt{(x-a)(x+1)}=0$ та $(x+1)\sqrt{x-a}=0$ рівносильні.

А $a\leq -1$ **Б** $a=-1$ **В** $a>-1$ **Г** $a\geq -1$ **Д** $a<-1$

Завдання 12.24–12.30 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

12.24. Установити відповідність між заданими рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\sqrt{x-2}=-2$
2 $(x+2)\sqrt{x-6}=0$
3 $\sqrt{\dfrac{x-2}{x-6}}=0$

А $\{2\}$
Б $\{6\}$
В $\varnothing$
Г $\{-2;\,6\}$
Д $\{-2\}$

12.25. Установити відповідність між заданими рівняннями (1–3) та рівносильними їм рівняннями або системами (А–Д).

1 $\sqrt{x-2}=\sqrt{-5-x+x^2}$
2 $\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{3}$
3 $(x-2)\cdot\sqrt{x-4}=0$

А $x^2-8x+16=0$
Б $\sqrt{x-2}\cdot(x-4)=0$
В $x^2-2x-3=0$
Г $|x-4|=1$
Д $\begin{cases}x^2-2x-3=0;\\ x-2\geq 0\end{cases}$

12.26. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та областями їх визначення (А–Д).

1 $\sqrt{x-4}+\sqrt{4-x}=0$
2 $\sqrt{x-4}+\sqrt{x+4}=4$
3 $\sqrt{4-x}+\sqrt{x+4}=4$

А $\varnothing$
Б $(-\infty;\,-4]$
В $[-4;\,4]$
Г $[4;\,+\infty)$
Д $\{4\}$

12.27. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\sqrt{-x}=4$
2 $\sqrt{x}=-4$
3 $\sqrt{x^2}=16$

А $\varnothing$
Б $\{-4;\,4\}$
В $\{16\}$
Г $\{-16\}$
Д $\{-16;\,16\}$

12.28. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\sqrt[3]{-2x}=4$
2 $\sqrt[4]{-4x}=4$
3 $\sqrt[4]{-4x}=-4$

А $\varnothing$
Б $\{-64\}$
В $\{-32\}$
Г $\{32\}$
Д $\{16\}$

12.29. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $x^2-10x\sqrt{x}+9x=0$	А один
2 $x+10\sqrt{x}+9=0$	Б два
3 $x-5\sqrt{x}+4=0$	В три
	Г чотири
	Д жодного

12.30. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $(x-2)\sqrt{x+1}=0$	А $-1;\ 2$
2 $(x+1)\sqrt{x-2}=0$	Б $1;\ 2$
3 $(x-2)\sqrt{x-1}=0$	В 2
	Г $-1;\ 1$
	Д 1

Розв'яжіть завдання 12.31–12.47. Відповідь запишіть десятковим дробом.

12.31. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-5x+1}=\sqrt{x-4}$.

12.32. Розв'язати рівняння $\sqrt{3-x}\sqrt{2-x}=\sqrt{2}$.

12.33. Розв'язати рівняння $\sqrt{4+2x-x^2}=x-2$.

12.34. Розв'язати рівняння $(x-1)\sqrt{x^2-x-42}=0$. У відповідь записати модуль різниці коренів.

12.35. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+5}-\sqrt{x}=1$.

12.36. Розв'язати рівняння $\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{x+1}$.

12.37. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{\dfrac{5-x}{x+3}}+\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5-x}}=2$.

12.38. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^2-3x+5}=-x^2+3x+7$. У відповідь записати модуль різниці коренів.

12.39. Знайти суму коренів рівняння $(x+1)(x-4)=\sqrt{x^2-3x+7}+9$.

12.40. Розв'язати рівняння $\dfrac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

12.41. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\sqrt{x+7}-\sqrt{y-9}=2;\\ \sqrt{y+7}-\sqrt{x-9}=2.\end{cases}$ У відповідь записати найбільше зі значень x_0 або y_0, де пара $(x_0;\ y_0)$ — розв'язок системи.

12.42. Задано рівняння $\sqrt{x^2-3x-88}+\sqrt{176+6x-2x^2}\arccos(x-10)=0$.

1) Знайти область визначення рівняння; **2)** розв'язати рівняння.

12.43. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$. У відповідь записати суму коренів.

12.44. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{x+7}-\sqrt{x+3}=0$.

12.45. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-1}+2\sqrt{x^2+5x-6}=51-2x$.

12.46. Розв'язати рівняння $\sqrt{x+6+4\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}=4$. У відповідь записати найменший корінь.

12.47. Розв'язати рівняння $\sqrt{|x|+1}-\sqrt{|x|}=a$. У відповідь записати найбільше значення a, за якого рівняння має корені.

Тема 13. Ірраціональні нерівності

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— розв'язувати найпростіші нерівності, що містять ірраціональні вирази;
— застосовувати загальні методи і прийоми у процесі розв'язування нерівності (розкладання на множники, заміна змінної, графіки, властивості функцій…);
— розв'язувати нерівності, що містять ірраціональні вирази;
— розв'язувати нерівності, користуючись графічним методом;
— розв'язувати нерівності та їх системи з параметрами.

Нерівність, яка містить змінну під знаком радикала або в основі степеня з раціональним показником, називають *ірраціональною*.

Наприклад, $\sqrt{x-2}>3-7x$, $\sqrt[4]{x}+\sqrt{2x+1}\le 1$, $x^{\frac{1}{3}}-x>3$ — ірраціональні нерівності.

Основним методом розв'язування ірраціональних нерівностей є *піднесення обох її частин до степеня*. Необхідно звернути увагу на таке:

1. Піднесення обох частин нерівності до непарного степеня зі збереженням знака нерівності завжди є рівносильним перетворенням.

Наприклад, розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x-2}<-2$. Можна виконати такі рівносильні перетворення: $\left(\sqrt[3]{x-2}\right)^3<(-2)^3$; $x-2<-8$; $x<-6$; $x\in(-\infty;-6)$. *Відповідь.* $(-\infty;-6)$.

2. Якщо обидві частини нерівності на деякій множині X визначені та набувають лише невід'ємних значень, то при піднесенні обох частин нерівності до парного степеня зі збереженням знака вихідної нерівності одержимо нерівність, рівносильну вихідній на множині X.

Наприклад, розв'язати нерівність $\sqrt[6]{2x-6}<1$. ОДЗ: $2x-6\ge 0$; $x\ge 3$. Обидві частини вихідної нерівності невід'ємні, отже, дана нерівність рівносильна на ОДЗ нерівностям: $\left(\sqrt[6]{2x-6}\right)^6<1^6$; $2x-6<1$; $x<3{,}5$. Врахувавши ОДЗ, одержимо: $3\le x<3{,}5$. *Відповідь.* $[3;3{,}5)$.

3. Ірраціональні нерівності виду $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x)$, де $g(x)<0$, розв'язків не мають.

4. Щоб уникнути помилок, при розв'язуванні ірраціональних нерівностей доцільно розглядати ті значення змінної, за яких усі функції, які входять до нерівності, є визначеними, тобто знайти $D(f)$ цієї нерівності, а потім обґрунтовано виконати рівносильний перехід на всій області визначення або на її частинах.

Для розв'язування ірраціональних нерівностей можна застосовувати ще такі рівносильні перетворення:

1. $\sqrt[2n]{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0;\\ g(x)>0;\\ f(x)<\left(g(x)\right)^{2n}.\end{cases}$

Наприклад, розв'язати нерівність $\sqrt{4-x}<x+2$. Замінимо вихідну нерівність системою нерівностей $\begin{cases}4-x\ge 0;\\ x+2>0;\\ 4-x<(x+2)^2;\end{cases}\begin{cases}x\le 4;\\ x>-2;\\ x^2+5x>0;\end{cases}\begin{cases}-2<x\le 4;\\ x(x+5)>0;\end{cases}\begin{cases}-2<x\le 4;\\ x>0;\end{cases}$ $0<x\le 4$; $x\in(0;4]$. *Відповідь.* $(0;4]$.

2. $\sqrt[2n]{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{cases}f(x)\ge 0;\\ g(x)<0;\end{cases}\right.$
$\left.\begin{cases}g(x)\ge 0;\\ f(x)>\left(g(x)\right)^{2n},\end{cases}\right.$

зокрема, нерівність $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ рівносильна системі нерівностей $\begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) > g(x). \end{cases}$

Наприклад: а) розв'язати нерівність $\sqrt{\frac{x-3}{1-3x}} > -1$. ОДЗ: $\frac{x-3}{1-3x} \geq 0$; $\frac{x-3}{3x-1} \leq 0$; $\begin{cases} 3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-3) \leq 0, \\ x \neq \frac{1}{3}; \end{cases}$ $\frac{1}{3} < x \leq 3$. Оскільки $\sqrt{\frac{x-3}{1-3x}} \geq 0$, то за всіх $x \in \left(\frac{1}{3}; 3\right]$ виконується нерівність $\sqrt{\frac{x-3}{1-3x}} > -1$. *Відповідь.* $\left(\frac{1}{3}; 3\right]$;

б) розв'язати нерівність $\sqrt{4-x} > x+2$.

1) $\begin{cases} 4-x \geq 0; \\ x+2 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 4; \\ x < -2; \end{cases}$ $x \in (-\infty; -2)$;

2) $\begin{cases} x+2 \geq 0; \\ 4-x > (x+2)^2; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2; \\ x^2+5x < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq -2; \\ -5 < x < 0; \end{cases}$ $x \in [-2; 0)$.

Об'єднаємо результати, отримані в 1) і 2): $x \in (-\infty; -2) \cup [-2; 0) = (-\infty; 0)$. *Відповідь.* $(-\infty; 0)$.

Розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{f(x)} + b \lessgtr bf(x) + c$

Розв'яжемо нерівність $\sqrt{2x^2-8x+12} < x^2-4x-6$. Виконаємо перетворення: $\sqrt{2x^2-8x+12} < \frac{1}{2}(2x^2-8x+12)-12$. Уведемо нову змінну: $\sqrt{2x^2-8x+12} = t$, $t \geq 0$. Далі отримаємо: $t < \frac{1}{2}t^2 - 12$; $t^2 - 2t - 24 > 0$; $(t-6)(t+4) > 0$. Урахувавши, що $t \geq 0$, маємо: $t > 6$.

Повертаємося до заміни: $\sqrt{2x^2-8x+12} > 6$; $2x^2 - 8x + 12 > 36$; $x^2 - 4x - 12 > 0$; $(x+2)(x-6) > 0$; $x \in (-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$. *Відповідь.* $(-\infty; -2) \cup (6; +\infty)$.

Розв'язування ірраціональних нерівностей виду $\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} \lessgtr \sqrt{kx+m}$

Розв'яжемо нерівність $\sqrt{x+3} > \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1}$. ОДЗ: $\begin{cases} x \geq -3; \\ x \geq 0{,}5; \\ x \geq 1; \end{cases}$ $x \geq 1$. Оскільки обидві частини нерівності невід'ємні, то піднесемо їх до квадрата й одержимо: $x + 3 > 2x - 1 + x - 1 + 2\sqrt{(2x-1)(x-1)}$; $2\sqrt{(2x-1)(x-1)} < 5 - 2x$;

$\begin{cases} 5-2x > 0; \\ x \geq 1; \\ 4(2x^2-3x+1) < 25 - 20x + 4x^2; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \leq x < 2{,}5; \\ 4x^2 + 8x - 21 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \leq x < 2{,}5; \\ -3{,}5 < x < 1{,}5; \end{cases}$ $x \in [1; 1{,}5)$. *Відповідь.* $[1; 1{,}5)$.

Розв'язування ірраціональних нерівностей методом інтервалів

Алгоритм розв'язання складається із таких кроків:

1. Звести нерівність до виду $f(x) > 0$ або $f(x) < 0$.
2. Знайти $D(f)$.
3. Знайти нулі функції $f(x)$, розв'язавши рівняння $f(x) = 0$.
4. Позначити нулі функції та знайти знаки функції на кожному із проміжків, на які розбито $D(f)$.
5. Записати відповідь, урахувавши знак нерівності.

Наприклад, розв'язати нерівність $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}>\sqrt{x+21}$.

1. Зведемо нерівність до виду $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}-\sqrt{x+21}>0$. Нехай $f(x)=2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}-\sqrt{x+21}$.

2. $D(f)$: $\begin{cases}x\ge 0;\\5-x\ge 0;\\x+21\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 0;\\x\le 5;\\x\ge -21;\end{cases}$ $0\le x\le 5$.

3. Нулі функції $2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}-\sqrt{x+21}=0$.

$2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}=\sqrt{x+21}$; $4x+5-x+4\sqrt{x}\sqrt{5-x}=x+21$; $4\sqrt{5x-x^2}=16-2x$; $2\sqrt{5x-x^2}=8-x$;

$\begin{cases}4(5x-x^2)=64-16x+x^2;\\0\le x\le 5;\\8-x\ge 0;\end{cases}$ $\begin{cases}5x^2-36x+64=0;\\0\le x\le 5;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=4;\\x_2=\frac{16}{5};\end{array}\right. x_1=4;\ x_2=3{,}2.\\0\le x\le 5;\end{cases}$

4. Розбиваємо $D(f)$ точками 3,2 і 4 на проміжки і знаходимо знак $f(x)=2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}-\sqrt{x+21}$ на кожному із них:



5. *Відповідь.* (3,2; 4).

Ірраціональні нерівності з параметрами

Розв'яжемо нерівність $\sqrt{x+a}+\sqrt{x}<a$. Оскільки ліва частина нерівності за умови $x\ge 0$ і $x+a\ge 0$ невід'ємна, то якщо $a\le 0$ нерівність розв'язків не має. Якщо $a>0$, то отримаємо $\sqrt{x+a}<a-\sqrt{x}$;

$\begin{cases}a-\sqrt{x}>0;\\x+a<\left(a-\sqrt{x}\right)^2;\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{x}<a;\\x+a<a^2-2a\sqrt{x}+x;\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{x}<a;\\2a\sqrt{x}<a^2-a;\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{x}<a;\\\sqrt{x}<\frac{a-1}{2}.\end{cases}$ За умови $a\le 1$ нерівність $\sqrt{x}<\frac{a-1}{2}$ розв'язків не має. Для $a>1$ $0<\frac{a-1}{2}<a$, тому система рівносильна нерівності $\sqrt{x}<\frac{a-1}{2}$, звідки $x\in\left[0;\frac{(a-1)^2}{4}\right)$. *Відповідь.* Якщо $a\le 1$, то $x\in\varnothing$; якщо $a>1$, то $x\in\left[0;\frac{(a-1)^2}{4}\right)$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x+3}\ge -4$.

А	Б	В	Г	Д
(–3,5; +∞)	(6,5; +∞)	(1,5; +∞)	[6,5; +∞)	[–1,5; +∞)

■ $\sqrt{2x+3}\ge -4$. Розв'язки нерівності — усі допустимі значення x.

Отже, $2x+3\ge 0$; $2x\ge -3$; $x\ge -1{,}5$. *Відповідь.* Д. ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x^3-2x}>x+2$.

■ Піднесемо обидві частини нерівності до куба: $x^3-2x>x^3+6x^2+12x+8$; $6x^2+14x+8<0$; $3x^2+7x+4<0$; $x_1=-1$, $x_2=-\frac{4}{3}$; $x\in\left(-\frac{4}{3};-1\right)$.

Відповідь. $\left(-\frac{4}{3};-1\right)$. ■

Приклад 3. Розв'язати нерівність $\sqrt{9x-20}<x$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{20}{9};4\right)$	$\left[\frac{20}{9};4\right)\cup(5;+\infty)$	$[5;+\infty)$	$\left(\frac{20}{9};4\right)\cup(5;+\infty)$	$(5;+\infty)$

■ $\begin{cases}9x-20\ge 0;\\ x>0;\\ \left(\sqrt{9x-20}\right)^2<x^2;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge\frac{20}{9};\\ x>0;\\ 9x-20<x^2;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge\frac{20}{9};\\ x^2-9x+20>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge\frac{20}{9};\\ (x-4)(x-5)>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge\frac{20}{9};\\ x\in(-\infty;4)\cup(5;+\infty).\end{cases}$



$x\in\left[\frac{20}{9};4\right)\cup(5;+\infty)$.

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\sqrt{\left(x^2-5x+6\right)^2}>2-x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;+\infty)$	$(2;+\infty)$	$[3;+\infty)$	$(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$	$(-\infty;2)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$

■ Замінимо вихідну нерівність на нерівність $|x^2-5x+6|>2-x$; далі розкриємо модуль за означенням: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5x+6\ge 0;\\ x^2-5x+6>2-x;\end{cases}\quad (1)\\ \begin{cases}x^2-5x+6<0;\\ -(x^2-5x+6)>2-x.\end{cases}\quad (2)\end{array}\right.$

Розв'яжемо систему (1): $\begin{cases}x^2-5x+6\ge 0;\\ x^2-5x+6>2-x;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-2)(x-3)\ge 0;\\ x^2-4x+4>0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 2;\\ x\ge 3;\end{array}\right.\\ x\ne 2;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}x<2;\\ x\ge 3;\end{array}\right.$ $x\in(-\infty;2)\cup[3;+\infty)$.

Розв'яжемо систему (2): $\begin{cases}x^2-5x+6<0;\\ x^2-5x+6<x-2;\end{cases}$ $\begin{cases}(x-2)(x-3)<0;\\ x^2-6x+8<0;\end{cases}$ $\left[\begin{array}{l}2<x<3;\\ 2<x<4;\end{array}\right.$ $x\in(2;3)$.

Об'єднавши результати, одержимо:



$x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-3x-4}<\sqrt{x^2-5x+6}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-1]$	$(-\infty;-1]\cup[4;5)$	$[4;5)$	$(-\infty;-1)\cup(4;5)$	$(-\infty;5)$

■ Дана нерівність рівносильна системі:

$\begin{cases}x^2-3x-4\ge 0;\\ x^2-3x-4<x^2-5x+6;\end{cases}$ $\begin{cases}(x+1)(x-4)\ge 0;\\ 2x<10;\end{cases}$ $\begin{cases}x\in(-\infty;-1]\cup[4;+\infty);\\ x<5;\end{cases}$ $x\in(-\infty;-1]\cup[4;5)$.

Відповідь. **Б.** ■

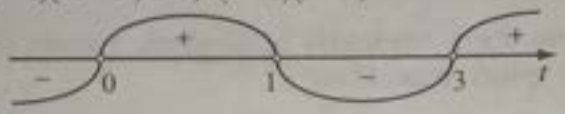
Приклад 6. Розв'язати нерівність $\sqrt{\frac{x-3}{1-5x}} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
0,2; 3	(0,2; 3]	3	[3; +∞)	∅

■ Ураховуючи, що $\sqrt{\frac{x-3}{1-5x}} \ge 0$ для всіх допустимих значеннях x, можемо зробити висновок, що розв'язком заданої нерівності є лише розв'язок рівняння $\sqrt{\frac{x-3}{1-5x}} = 0$; $\frac{x-3}{1-5x} = 0$; $x = 3$. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

■ ОДЗ: $x \ge 1$. Перепишемо нерівність у вигляді: $\sqrt[3]{2-x} > 1 - \sqrt{x-1}$ й піднесемо обидві частини нерівності до куба: $\left(\sqrt[3]{2-x}\right)^3 > \left(1-\sqrt{x-1}\right)^3$; $2-x > \left(1-\sqrt{x-1}\right)^3$; $1-(x-1) > \left(1-\sqrt{x-1}\right)^3$. Нехай $\sqrt{x-1} = t$, $t \ge 0$. Тоді останню нерівність перепишемо у вигляді: $1-t^2 > (1-t)^3$; $(1-t)(1+t) > (1-t)^3$; $(1-t)(1+t-1+2t-t^2) > 0$; $(1-t)(3t-t^2) > 0$; $t(t-1)(t-3) > 0$.



$\left[\begin{array}{l} t > 3; \\ 0 < t < 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-1} > 3; \\ 0 < \sqrt{x-1} < 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x-1 > 9; \\ 0 < x-1 < 1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x > 10; \\ 1 < x < 2. \end{array}\right.$ Отже, $x \in (1; 2) \cup (10; +\infty)$. Найменший цілий розв'язок дорівнює 11. *Відповідь.* 11. ■

Приклад 8. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(x-2)\sqrt{16-x^2} \le 0$.

■ ОДЗ: $16 - x^2 \ge 0$; $(x-4)(x+4) \le 0$; $-4 \le x \le 4$; $x \in [-4; 4]$.

1. Рівність $(x-2)\sqrt{16-x^2} = 0$ отримаємо лише для значень $x_1 = 2$; $x_{2,3} = \pm 4$.

2. Строга нерівність $(x-2)\sqrt{16-x^2} < 0$ на ОДЗ виконується лише для $x < 2$.

Отже, $x \in [-4; 2] \cup \{4\}$. Цілими розв'язками є: –4; –3; –2; –1; 0; 1; 2; 4, усього їх є 8. *Відповідь.* 8. ■

Приклад 9. Розв'язати нерівність $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}} + \sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}} \le 2$. У відповідь записати суму цілих розв'язків нерівності.

■ $\sqrt{5x+8-6\sqrt{5x-1}} + \sqrt{5x+24-10\sqrt{5x-1}} \le 2$. Нехай $\sqrt{5x-1} = t$, $t \ge 0$. Тоді $5x - 1 = t^2$; $5x + 8 = t^2 + 9$; $5x + 24 = t^2 + 25$. Тоді маємо: $\sqrt{t^2-6t+9} + \sqrt{t^2-10t+25} \le 2$; $\sqrt{(t-3)^2} + \sqrt{(t-5)^2} \le 2$; $|t-3| + |t-5| \le 2$.

1. Нулі підмодульних функцій: $t_1 = 3$; $t_2 = 5$.

2. Розкриємо значення модулів на трьох проміжках:

I. $\begin{cases} 0 \le t < 3; \\ -t+3-t+5 \le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le t < 3; \\ -2t \le -6; \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \le t < 3; \\ t \ge 3; \end{cases}$ $t = \varnothing$;

II. $\begin{cases} 3 \le t \le 5; \\ t-3-t+5 \le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} 3 \le t \le 5; \\ 0 \le 0; \end{cases}$ $t \in [3; 5]$;

III. $\begin{cases} t > 5; \\ t-3+t-5 \le 2; \end{cases}$ $\begin{cases} t > 5; \\ 2t \le 10; \end{cases}$ $\begin{cases} t > 5; \\ t \le 5; \end{cases}$ $t = \varnothing$.

Отже, $3 \le t \le 5$. Повернемося до заміни: $3 \le \sqrt{5x-1} \le 5$; $9 \le 5x - 1 \le 25$; $10 \le 5x \le 26$; $2 \le x \le 5{,}2$. Цілі розв'язки: 2, 3, 4, 5, а їхня сума 2 + 3 + 4 + 5 = 14. *Відповідь.* 14. ■

Приклад 10. За якого найбільшого цілого значення параметра a будь-яке x із проміжку $[1; 5]$ задовольняє нерівність $3ax+2\sqrt{3x+1}-6x+a-5<0$?

■ Задана нерівність на проміжку $x\in[1; 5]$ рівносильна нерівності: $(3x+1)a<6x-2\sqrt{3x+1}+5$;

$a<\dfrac{6x+5}{3x+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3x+1}}$; $a<2+\dfrac{3}{3x+1}-\dfrac{2}{\sqrt{3x+1}}$; $a<\dfrac{3}{3x+1}-2\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3x+1}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}+2$; $a<\dfrac{5}{3}+\left(\sqrt{\dfrac{3}{3x+1}}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$.

Отже, значення a повинно бути менше від значення виразу $\dfrac{5}{3}+\left(\sqrt{\dfrac{3}{3x+1}}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$ для всіх $x\in[1; 5]$.

Мінімальне значення цього виразу досягається, якщо $\left(\sqrt{\dfrac{3}{3x+1}}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=0$;

$\sqrt{\dfrac{3}{3x+1}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}; 3x+1=3^2$; $x=\dfrac{8}{3}$. Цей корінь належить проміжку $[1; 5]$. Отже, для всіх $x\in[1; 5]$ значення $a<\dfrac{5}{3}$, або $a\in\left(-\infty;\dfrac{5}{3}\right)$, і тоді найбільше ціле значення $a=1$. *Відповідь.* 1. ■

Завдання 13.1–13.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

13.1. Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x}>-3$.

А	Б	В	Г	Д
R	$\varnothing$	$(9; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$

13.2. Розв'язати нерівність $\sqrt{x}\geq 5$.

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$[5; +\infty)$	$[25; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(25; +\infty)$

13.3. Розв'язати нерівність $\sqrt{x}\leq 4$.

А $(-\infty; 16]$ **Б** $(0; 2]$ **В** $[0; 2]$ **Г** $(0; 16]$ **Д** $[0; 16]$

13.4. Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x}<-2$.

А R **Б** $\varnothing$ **В** $(-\infty; -2)$ **Г** $(-\infty; -4)$ **Д** $[0; 4)$

13.5. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x}<2$.

А $[0; 2)$ **Б** $[0; 8)$ **В** $(-\infty; 16)$ **Г** $[0; 16)$ **Д** $(0; 16)$

13.6. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x}>-2$.

А $(-8; +\infty)$ **Б** $(0; +\infty)$ **В** $(8; +\infty)$ **Г** $(-8; 0)$ **Д** $(-8; 0]$

13.7. Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-1}$.

А R **Б** $[3; +\infty)$ **В** $[1; +\infty)$ **Г** $(1; +\infty)$ **Д** $[3; +\infty)$

13.8. Розв'язати нерівність $\sqrt{x}\leq x$.

А $[1; +\infty)$ **Б** $[0; +\infty)$ **В** $[0; 1]$ **Г** $\{0\}\cup(1; +\infty)$ **Д** $\{0\}\cup[1; +\infty)$

13.9. Скільки цілих розв'язків має нерівність $\sqrt{2x}\geq x$?

А Жодного **Б** один **В** два **Г** три **Д** більше, ніж три

13.10. Розв'язати нерівність $(x+4)\sqrt{-x}>0$.

А $\varnothing$ **Б** $(-4; 0)$ **В** $(-4; 0]$ **Г** $(-4; +\infty)$ **Д** $\{0\}\cup(4; +\infty)$

13.11. Скільки цілих розв'язків має нерівність $(5-x)\sqrt{x}>0$?

А Три Б чотири В п'ять Г шість Д більше, ніж шість

13.12. Розв'язати нерівність $(x-6)\sqrt{x}\geq 0$.

А $(0;+\infty)$ Б $[0;+\infty)$ В $(6;+\infty)$ Г $[6;+\infty)$ Д $\{0\}\cup[6;+\infty)$

13.13. Розв'язати нерівність $(x+1)\sqrt{x+3}\leq 0$.

А $\varnothing$ Б $[-3;+\infty)$ В $[-1;+\infty)$ Г $[-3;-1]$ Д $[1;3]$

13.14. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-9}<x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$	$(3;+\infty)$	$[3;+\infty)$	$(-\infty;-3]$	$\varnothing$

13.15. Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{x^2-1}>x$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$[-1;1]$	$(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$	$(-\infty;-1)$	$(-\infty;-1]$

13.16. Знайти множину розв'язків нерівності $\sqrt{3x+7}<x+1$.

А $\left[-\frac{7}{3};+\infty\right)$ Б $(-1;0)$ В $(3;+\infty)$ Г $[3;+\infty)$ Д $(-1;3)$

13.17. Серед наведених нерівностей вказати ту, множина розв'язків якої містить множину натуральних чисел.

А $\sqrt{x}>1$ Б $\sqrt{x}>-1$ В $\sqrt{x}<-1$ Г $\sqrt{x}<1$ Д $\sqrt{-x}>-1$

13.18. Серед наведених нерівностей вказати ту, множиною розв'язків якої є відрізок $[-2;0]$.

А $\sqrt{-x}\geq\sqrt{2}$ Б $\sqrt{x}\geq\sqrt{2}$ В $\sqrt{x}\leq\sqrt{2}$ Г $\sqrt{-x}\leq\sqrt{2}$ Д $\sqrt{-x}\leq-\sqrt{2}$

13.19. Розв'язати нерівність $\sqrt[3]{x-3}\sqrt{x-2}\sqrt[4]{5-x}\leq 0$.

А $[3;+\infty)$ Б $[5;+\infty)$ В $(-\infty;3]$ Г $[2;3]$ Д $[2;3]\cup\{5\}$

13.20. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\sqrt[3]{x-3}\sqrt{x-3}\sqrt[4]{5-x}\geq 0$.

А 14 Б 12 В 9 Г 7 Д 6

Завдання 13.21–13.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

13.21. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x^2+1}>-2$

2 $\sqrt{x+1}<-2$

3 $\frac{1}{\sqrt{3-x}}>0$

А $(-\infty;+\infty)$

Б $(-\infty;-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3};+\infty)$

В $(-\infty;3)$

Г $\varnothing$

Д $[1,5;3)$

13.22. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–3) та рівносильними їм нерівностями або системами (А–Д).

1 $\sqrt{x^2+7}>x$ 2 $\sqrt{x-2}<\sqrt{1-x}$ 3 $\sqrt{x^2+2x}>-3$

А $x^2+2x>9$ Б $\cos x<-\sqrt{3}$ В $\begin{cases}2x<3;\\x-1\geq 0\end{cases}$ Г $\sin x>-\frac{\pi}{2}$ Д $x^2+2x\geq 0$

13.23. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x} \geq -4$

2 $\sqrt{x+4} \geq 0$

3 $\sqrt{x} \geq 2$

А $[-4; +\infty)$
Б $[-2; +\infty)$
В $[0; +\infty)$
Г $[2; +\infty)$
Д $[4; +\infty)$

13.24. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x} \leq 2$ 2 $\sqrt{x} \leq -2$ 3 $\sqrt{x-2} \leq 2$

А $[-2; 0]$ Б $[-2; 2]$ В $[0; 4]$ Г $[2; 6]$ Д $\varnothing$

13.25. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{-x} \geq -\sqrt{3}$
2 $\sqrt{-x} \leq -\sqrt{3}$
3 $\sqrt{-x} \geq \sqrt{3}$

А $(-\infty; -3]$
Б $(-\infty; 0]$
В $[-3; 0]$
Г $[0; +\infty)$
Д $\varnothing$

13.26. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x+2} > \sqrt{x}$
2 $\sqrt{x} > \sqrt{x-2}$
3 $\sqrt{x+2} > \sqrt{-x}$

А $\varnothing$
Б $[-2; +\infty)$
В $(-1; 0]$
Г $[0; +\infty)$
Д $[2; +\infty)$

13.27. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\sqrt{x} \geq x$
2 $\sqrt{x} \leq x$
3 $\sqrt{-x} \geq x$

А $\varnothing$
Б $(-\infty; 0]$
В $[0; 1]$
Г $\{0\} \cup [1; +\infty)$
Д $\{0\}$

Розв'яжіть завдання 13.28–13.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

13.28. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2-7x+5} \geq \sqrt{3x-4}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

13.29. Розв'язати нерівність $\sqrt{\frac{2x-3}{4x-1}} \geq \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

13.30. Розв'язати нерівність $\sqrt{(x-3)(2-x)} < 3+2x$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

13.31. Розв'язати нерівність $\sqrt{-x^2+6x-5} > 8-2x$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

13.32. Розв'язати нерівність $\frac{\sqrt{2x-1}}{x-2} < 1$. У відповідь записати суму всіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

13.33. Розв'язати нерівність $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$. У відповідь записати найбільше ціле від'ємне число, яке не є розв'язком нерівності.

13.34. Розв'язати нерівність $\sqrt{x-6} - \sqrt{x+10} \leq 1$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

13.35. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+15}\le 5$. У відповідь записати суму найбільшого та найменшого розв'язків нерівності.

13.36. Розв'язати нерівність $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$. У відповідь записати суму всіх цілих розв'язків нерівності.

13.37. Розв'язати нерівність $\sqrt{(3x-2)^2}>x+6$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

13.38. Розв'язати нерівність $\left|\sqrt{x-2}-3\right|\ge\left|\sqrt{7-x}-2\right|+1$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

13.39. Розв'язати нерівність $\sqrt{25-x^2}\le\frac{12}{x}$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

13.40. Розв'язати нерівність $\frac{11-\sqrt{25-x^2}}{x}\le 2$. У відповідь записати модуль добутку усіх цілих розв'язків нерівності.

13.41. Дано функції $f(x)=x+1$, $g(x)=\sqrt{x^2-x-2}$.

1) Розв'язати рівняння $\frac{g(x)}{f(x)}=0$;

2) розв'язати нерівність $f(x)\cdot g(x)\ge 0$. У відповідь записати найменший розв'язок нерівності.

Тема 14. Показникові рівняння

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— розв'язувати найпростіші рівняння, що містять показникові вирази, або рівняння, що зводяться до них;
— застосовувати загальні методи і прийоми розв'язування рівнянь (розкладання на множники, заміна змінної, графіки, властивості функцій…);
— розв'язувати рівняння, що містять показникові вирази;
— розв'язувати рівняння, користуючись графічним методом розв'язування й дослідження рівнянь;
— розв'язувати рівняння та їх системи з параметрами.

Рівняння, яке містить змінну в показнику степеня, називають *показниковим* рівнянням.

Рівняння виду $a^x = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, називають *найпростішим* показниковим рівнянням. Якщо $b > 0$, то розв'язком рівняння $a^x = b$ є $x = \log_a b$; якщо $b \leq 0$, то рівняння $a^x = b$ коренів не має.

Наприклад, $5^x = 125$; $\left(\frac{2}{7}\right)^x = 1{,}5$ тощо.

Показникові рівняння найчастіше розв'язують шляхом логарифмування обох його частин:

- рівняння виду $a^{f(x)} = b$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ розв'язують, логарифмуючи обидві його частини за основою a. Отримують рівносильне рівняння $f(x) = \log_a b$;
- рівняння виду $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)$;
- рівняння виду $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, де $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ рівносильне рівнянню $f(x) = g(x)\log_a b$.

Зведення до однієї основи

Розв'язати рівняння $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$.

Маємо: $2^{7-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$; $2^{7-3x} = 2^{4-x}$; $7 - 3x = 4 - x$; $2x = 3$; $x = 1{,}5$. *Відповідь.* 1,5.

Розв'язати рівняння $7^{2\sin x + \sqrt{3}} = 1$.

Одержимо: $7^{2\sin x + \sqrt{3}} = 1$; $7^{2\sin x + \sqrt{3}} = 7^0$; $2\sin x + \sqrt{3} = 0$; $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Відповідь. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$.

Рівняння $a^{f(x)} = b^{f(x)}$, які не зводяться до однієї основи

Розв'язати рівняння $3^{x+2} = 5^{x+2}$ (основи різні, показники однакові). Розділимо обидві частини рівняння на $5^{x+2} \neq 0$. Одержимо: $\frac{3^{x+2}}{5^{x+2}} = 1$; $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+2} = \left(\frac{3}{5}\right)^0$; $x + 2 = 0$; $x = -2$. *Відповідь.* –2.

Розв'язати рівняння $3^{2x-1} = 5^{3-x}$.

Прологарифмуємо рівняння за основою 10: $\lg 3^{2x-1} = \lg 5^{3-x}$; $(2x-1)\lg 3 = (3-x)\lg 5$;

$2x\lg 3 + x\lg 5 = 3\lg 5 + \lg 3$; $x(2\lg 3 + \lg 5) = 3\lg 5 + \lg 3$, звідки $x = \frac{3\lg 5 + \lg 3}{2\lg 3 + \lg 5} = \frac{\lg(5^3 \cdot 3)}{\lg(3^2 \cdot 5)} = \frac{\lg 375}{\lg 45} = \lg_{45} 375$.

Відповідь. $\lg_{45} 375$.

Винесення спільного множника за дужки

Розв'язати рівняння $2 \cdot 7^{x+1} - 6 \cdot 7^{x-1} - 7^x = 85$.

Винесемо за дужки 7^{x-1} — множник з найменшим показником.

Матимемо: $7^{x-1}(2 \cdot 7^2 - 6 - 7) = 85$; $7^{x-1} \cdot 85 = 85$; $7^{x-1} = 1$; $7^{x-1} = 7^0$; $x - 1 = 0$; $x = 1$. *Відповідь.* 1.

Рівняння, які зводять до квадратних

1. Рівняння виду $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x + C = 0$

Уведемо нову змінну $a^x = t$, $t > 0$ й одержимо квадратне рівняння.

Наприклад, розв'язати рівняння $2^{2x} - 10 \cdot 2^x + 16 = 0$.

Нехай $2^x = t$, тоді маємо: $t^2 - 10t + 16 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 2; \\ t_2 = 8. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} 2^x = 2; \\ 2^x = 8; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 1; \\ x = 3. \end{array}\right.$ *В-дь.* 1; 3.

2. Рівняння виду $A \cdot a^x + B \cdot a^{-x} = C$

За допомогою заміни $a^x = t$, $t > 0$ рівняння можна звести до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $5^x + 3 \cdot 5^{-x} = 4$.

Нехай $5^x = t$, тоді: $t + \frac{3}{t} = 4$; $t^2 - 4t + 3 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 1; \\ t_2 = 3. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} 5^x = 1; \\ 5^x = 3; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = \log_5 3. \end{array}\right.$

Відповідь. 0; $\log_5 3$.

Однорідні показникові рівняння $A \cdot a^{2x} + B \cdot a^x \cdot b^x + C \cdot b^{2x} = 0$

Поділимо обидві частини рівняння на $a^{2x} \neq 0$, тоді одержимо рівняння $A + B\left(\frac{b}{a}\right)^x = C\left(\frac{b}{a}\right)^{2x}$. Виконаємо заміну $\left(\frac{b}{a}\right)^x = t$, $t > 0$, і зведемо це рівняння до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

Маємо: $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$; $3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} = 5 \cdot 4^x \cdot 9^x$. Поділимо обидві частини на $9^{2x} \neq 0$: $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0$. Нехай $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t$, $t > 0$, тоді маємо: $3t^2 - 5t + 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 1; \\ t_2 = \frac{2}{3}. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1; \\ \left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{4}{9}\right)^0; \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ 2x = 1; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 0; \\ x = 0{,}5. \end{array}\right.$ *Відповідь.* 0; 0,5.

Рівняння виду $A^x + B^x = C$, ***де*** $A \cdot B = 1$

Уведемо заміну $A^x = t$, $t > 0$. Тоді $B^x = \frac{1}{t}$ і рівняння можна звести до квадратного.

Наприклад, розв'язати рівняння $\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x + \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = 6$.

Оскільки $3 \pm 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} \pm 1)^2$, то отримаємо $\left(\sqrt{2} + 1\right)^x + \left(\sqrt{2} - 1\right)^x = 6$; $\left(\sqrt{2} + 1\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{2} + 1\right)^x} = 6$. Нехай $\left(\sqrt{2} + 1\right)^x = t$, $t > 0$. Тоді: $t + \frac{1}{t} = 6$; $t^2 - 6t + 1 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t_1 = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2; \\ t_2 = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2. \end{array}\right.$ Повертаємося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \left(\sqrt{2} + 1\right)^x = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2; \\ \left(\sqrt{2} + 1\right)^x = \left(\sqrt{2} - 1\right)^2; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x = 2; \\ x = -2. \end{array}\right.$ *Відповідь.* ± 2.

Використання монотонності функцій

Розв'язати рівняння $2^x = 3 - x$.

Методом підбору знаходимо, що $x = 1$ — корінь рівняння. Функція $y = 2^x$ — зростаюча, а функція $y = 3 - x$ — спадна, тому цей корінь — єдиний. *Відповідь.* 1.

Розв'язати рівняння $12^x + 5^x = 13^x$.

Поділимо обидві частини рівняння на $12^x \neq 0$: $1 + \left(\frac{5}{12}\right)^x = \left(\frac{13}{12}\right)^x$. Методом підбору знаходимо, що

$x=2$ — корінь рівняння. Функція $y=1+(5/12)^x$ — спадна, а функція $y=(13/12)^x$ — зростаюча, тому графіки цих функцій перетинаються не більше як в одній точці. *Відповідь.* 2.

Показниково-степеневі рівняння — рівняння, які мають змінну в показнику степеня і в основі

Розв'язування рівнянь виду $(f(x))^{g(x)}=(f(x))^m$ зводиться до випадків:

1. $f(x)=1$. 2. $f(x)=-1$. 3. $f(x)=0$. 4. $g(x)=m$.

Наприклад, розв'язати рівняння $(x+1)^{x^2+x-4}=(x+1)^2$.

Для відшукання коренів рівняння потрібно розглянути чотири випадки:

1. $x+1=1$, звідки $x=0$. Одержимо: $1^{-4}=1^2$; $1=1$. $x=0$ — корінь рівняння;
2. $x+1=-1$, звідки $x=-2$. Одержимо: $(-1)^{-2}=(-1)^2$; $1=1$. $x=-2$ — корінь рівняння;
3. $x+1=0$, звідки $x=-1$. Одержимо: вираз 0^{-4} не має змісту, тому $x=-1$ не є коренем рівняння;
4. $x^2+x-4=2$; $x^2+x-6=0$; $x_1=2$, $x_2=-3$.

Відповідь. -3; -2; 0; 2.

Показникові рівняння з параметром

Розв'язати рівняння $3\cdot4^{x-2}+27=a+a\cdot4^{x-2}$.

Перетворимо задане рівняння: $3\cdot4^{x-2}-a\cdot4^{x-2}=a-27$; $4^{x-2}(3-a)=a-27$. Якщо $a=3$, то маємо: $4^{x-2}\cdot0=-24$ — рівняння коренів не має. У випадку, коли $a\neq3$, одержимо рівняння: $4^{x-2}=\dfrac{a-27}{3-a}$. Це рівняння матиме корені, якщо $\dfrac{a-27}{3-a}>0$, тобто коли $a\in(3;27)$. Тоді за означенням логарифма маємо: $x-2=\log_4\dfrac{a-27}{3-a}$; $x=2+\log_4\dfrac{a-27}{3-a}$.

Відповідь. Якщо $a\le3$ або $a\ge27$, то рівняння коренів не має; якщо $a\in(3;27)$, то $x=2+\log_4\dfrac{a-27}{3-a}$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $0{,}2^{3x-1}=\sqrt{125}$.

А	Б	В	Г	Д
5	3	1	$-1/6$	0,4

■ $0{,}2^{3x-1}=\sqrt{125}$; $\left(5^{-1}\right)^{3x-1}=\left(5^3\right)^{\frac{1}{2}}$; $5^{-3x+1}=5^{\frac{3}{2}}$; $-3x+1=\dfrac{3}{2}$; $x=-\dfrac{1}{6}$. *Відповідь.* Г. ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $4^{x-1}-1{,}5\cdot2^{x+2}+20=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_2 20$	2	2; $\log_2 20$	10	4

■ $4^{x-1}-1{,}5\cdot2^{x+2}+20=0$; $\dfrac{4^x}{4^1}-1{,}5\cdot2^x\cdot2^2+20=0$; $2^{2x}-24\cdot2^x+80=0$. Зробимо заміну: $2^x=t$. Одержимо: $t^2-24t+80=0$; $t_1=20$, $t_2=4$. Повертаємось до змінної x: $2^x=20$; $x=\log_2 20$ або $2^x=4$; $x=2$. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 3. Розв'язати рівняння $3\cdot4^x-5\cdot6^x+2\cdot9^x=0$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	2/3	1; 2/3	0; 1

■ $3\cdot4^x-5\cdot6^x+2\cdot9^x=0$; $3\cdot2^{2x}-5\cdot2^x\cdot3^x+2\cdot3^{2x}=0$. Поділимо обидві частини рівняння на вираз $3^{2x}\neq0$ й одержимо: $3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}-5\left(\dfrac{2}{3}\right)^x+2=0$. Зробимо заміну: $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x=a$. Тоді $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x}=a^2$. Отримаємо:

$3a^2-5a+2=0$; $a_1=1, a_2=\frac{2}{3}$. Повертаємося до попередньої змінної й маємо: $\left(\frac{2}{3}\right)^x=1; x=0$ або $\left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{2}{3}$; $x=1$. *Відповідь.* **Д.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $7^{x+1}=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
1	7	0	14	0,5

■ $7^{x+1}=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$. Очевидно, що $x=0$ — корінь рівняння $\left(7^1=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1;\ 7=7\right)$. Функція $y=7^{x+1}$ зростаюча, а функція $y=14\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1}$ спадна. Тому дане рівняння має не більше одного кореня. Отже, інших коренів, крім $x=0$, немає.

Відповідь. **В.** ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $5^{\frac{x+4}{x}}-124\cdot5^{\frac{2}{x}}-25=0$.

А	Б	В	Г	Д
1	4	2	0	0,5

■ Зведемо степені лівої частини до одного показника: $5^{\frac{x+4}{x}}-124\cdot5^{\frac{2}{x}}-25=0$; $5^{\frac{1x+4}{x}}-124\cdot5^{\frac{2}{x}}-25=0$; $5\cdot\left(5^{\frac{2}{x}}\right)^2-124\cdot5^{\frac{2}{x}}-25=0$. Зробимо заміну $5^{\frac{2}{x}}=a$. Одержимо: $5a^2-124a-25=0$; $a_1=-\frac{1}{5}$; $a_2=25$. Повертаємося до попередньої заміни: $5^{\frac{2}{x}}=-\frac{1}{5}$ — коренів немає. $5^{\frac{2}{x}}=25$; $5^{\frac{2}{x}}=5^2$; $\frac{2}{x}=2$; $x=1$.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 6. Знайти суму коренів рівняння $\left(3^{2x^2-29}-27\right)\sqrt[4]{5x+18}=0$.

А	Б	В	Г	Д
0,4	–3,6	4	–0,4	–7,6

■ ОДЗ рівняння: $5x+18\ge0$; $x\ge-3,6$. Маємо: **1.** $3^{2x^2-29}-27=0$; $3^{2x^2-29}=3^3$; $2x^2-29=3$; $x^2=16$; $x_1=-4, x_2=4$. Урахувавши ОДЗ, маємо: $x=4$. **2.** $\sqrt[4]{5x+18}=0$; $5x+18=0$; $x=-3,6$. Отже, коренями рівняння є числа –3,6 і 4, а їх сума дорівнює –3,6 + 4 = 0,4.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 7. Знайти суму коренів рівняння $2^x+2^{-x}=2\cos2x$.

■ Оцінимо ліву й праву частини рівняння: $2^x+2^{-x}=2^x+\frac{1}{2^x}\ge2$; $2\cos2x\le2$. Замінимо рівняння рівносильною системою: $\begin{cases}2^x+\frac{1}{2^x}=2; & (1)\\ 2\cos2x=2. & (2)\end{cases}$

Розв'яжемо перше рівняння системи. Нехай $2^x=t, t>0$. $t+\frac{1}{t}=2$; $t^2-2t+1=0$; $t=1$; $2^x=1$; $x=0$.

Перевіримо, чи задовольняє корінь $x=0$ друге рівняння системи: $2\cos(2\cdot0)=2$; $2\cdot1=2$; $2=2$. Отже, $x=0$ — розв'язок системи, а, отже, й даного рівняння.

Відповідь. 0. ■

Приклад 8. Розв'язати рівняння $3\cdot 4^x + (3x-10)\cdot 2^x + 3 - x = 0$. У відповідь записати більший корінь.

■ Нехай $2^x = t$, $t > 0$. Тоді $3t^2 + (3x-10)t + 3 - x = 0$; $3t^2 + 3tx - 10t + 3 - x = 0$; $3t^2 - 9t + 3tx - t + 3 - x = 0$; $3t(t-3+x) - (t-3+x) = 0$; $(t-3+x)(3t-1) = 0$; $t_1 = 3 - x$; $t_2 = \frac{1}{3}$. Повертаємося до заміни: 1) $2^x = 3 - x$. Ліва частина цього рівняння — зростаюча функція, права — спадна; $x = 1$ — єдиний корінь; 2) $2^x = \frac{1}{3}$; $x = -\log_2 3$. Отже, корені рівняння $x = 1$ та $x = -\log_2 3$. Більший корінь дорівнює 1.

Відповідь. 1. ■

Приклад 9. За яких значень a рівняння $3^{x^2+a} + 4^{x^2+a} + 5^{x^2+a} = 6^{x^2+a}$ має тільки один корінь?

■ Нехай $x^2 + a = t$. Тоді маємо: $3^t + 4^t + 5^t = 6^t$. Підбором знаходимо, що $t = 3$ — корінь цього рівняння. Покажемо, що цей корінь єдиний. Для цього поділимо обидві частини рівняння на 6^t й одержимо: $\left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{5}{6}\right)^t = 1$. Оскільки функція $f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{2}{3}\right)^t + \left(\frac{5}{6}\right)^t$ за довільних значень t спадна, як сума спадних функцій, і $E(f) = (0; +\infty)$, то її графік перетинає пряму $y = 1$ лише один раз (якщо $t = 3$). Отже, $x^2 + a = 3$; $x^2 = 3 - a$. Одержане рівняння має лише один корінь $x = 0$, якщо $a = 3$.

Відповідь. 3. ■

Завдання 14.1–14.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

14.1. **(ЗНО–2015)** Розв'язати рівняння $4^x = 8$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	2	32

14.2. Розв'язати рівняння $5^{x-9} = 5$ і $3^x - 3 = 0$ та вказати суму їх коренів.

А	Б	В	Г	Д
0	1	8	9	11

14.3. Розв'язати рівняння $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 4^{2x}$ і $4^{3x+1} = 8^{-2x-1}$ та вказати інтервал, який містить їх корені.

А $(-3; -2)$ **Б** $(-2; -1)$ **В** $(-1; 0)$ **Г** $(0; 1)$ **Д** $(1; 2)$

14.4. Розв'язати рівняння $3^{x-5} = 9^{-2x}$.

А $1\frac{2}{3}$ **Б** 1 **В** 1,25 **Г** 0 **Д** -1

14.5. Розв'язати рівняння $5^{\frac{x-2}{(x+2)(x-1)}} = 1$ і $\left(\frac{2}{3}\right)^{(x^2-4)(x-1)} = 1$ і вказати їх спільні корені.

А -2; 2 і 1 **Б** 2 і 1 **В** -2 і 1 **Г** -2 і 2 **Д** 2

14.6. Якому з проміжків належить корінь рівняння $0{,}008^x = 5^{1-2x}$?

А $[0; 2]$ **Б** $(-1; 5]$ **В** $(2; +\infty)$ **Г** $(0; 1)$ **Д** $(-3; 0]$

14.7. Серед наведених рівнянь вказати рівняння, рівносильне рівнянню $8^x = 16^{-1}\sqrt{32^x}$.

А $3x = x - 1$ **Б** $3x = \frac{x}{2} - 1$ **В** $3x = \frac{5x}{2} \cdot 4$ **Г** $3x = \frac{5x}{2} - 4$ **Д** $3x = \frac{6x}{2} - 4$

14.8. Яке з наведених рівнянь має корені?

А $7^{x^2} = \frac{1}{2}$ **Б** $7^x = \frac{1}{2}$ **В** $7^{|x|} = \frac{1}{2}$ **Г** $7^x = 0$ **Д** $7^x = -\frac{1}{2}$

14.9. Розв'язати рівняння $6^{x+1}=3^{x+1}$ і $2^{x-5}=8^{x-5}$ і знайти суму їх коренів.

А 4 Б –4 В 5 Г –5 Д 53

14.10. Розв'язати рівняння $4^{x+2}-4^{x+1}+4^x=39$.

А $\sqrt[4]{3}$ Б $\sqrt[4]{4}$ В $\log_3 4$ Г $\log_4 3$ Д ∅

14.11. Знайти суму коренів рівняння $5^{2x}-6\cdot 5^x+5=0$.

А 1 Б 0 В –6 Г 6 Д –5

14.12. Установити кількість коренів рівняння $3^{2x^2}-12\cdot 3^{x^2}+27=0$.

А Жодного Б один В два Г три Д чотири

14.13. Розв'язати рівняння $7^{x^2}=2$.

А $\pm\sqrt{\log_2 7}$ Б $\sqrt{\log_2 7}$ В $\pm\sqrt{\log_7 2}$ Г $\sqrt{\log_7 2}$ Д $\pm\sqrt{7}$

14.14. Розв'язати рівняння $2^x\cdot 3^{x-1}=72$ і $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{7^x}=196$ і вказати суму їх коренів.

А 8 Б 7 В 6 Г 5 Д 4

14.15. Розв'язати рівняння $\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^x=\frac{27}{64}$ і $5^{2x}\cdot 6^{2x}=900$ і вказати суму їх коренів.

А 8 Б 7 В 6 Г 5 Д 4

14.16. Знайти значення виразу 7^x, якщо $7^x-\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x}=6$.

А 1 Б 2 В 6 Г 7 Д 14

14.17. Знайти значення виразу $\left(\frac{2}{3}\right)^x$, якщо $3\cdot 2^{2x}+2\cdot 3^{2x}=5\cdot 6^x$.

А 4 Б 3 або 4 В $\frac{2}{3}$ або 1 Г 0 або 1 Д $\frac{4}{9}$ або 1

14.18. Знайти значення виразу 2^x, якщо $2^{2-x}-2^{x-1}=1$.

А 2 Б 2 або –4 В 1 Г 4 Д 2 або 4

14.19. Знайти значення виразу $9^{\frac{1}{x}}$, якщо $81^{\frac{1}{x}}-4\cdot 9^{\frac{1}{x}}=45$.

А 4 або 9 Б –4 або 9 В 9 Г 81 Д 16 або 25

14.20. Указати проміжок, якому належить корінь рівняння $9^{\frac{3}{x}}+2\cdot 3^{\frac{x+3}{x}}-27=0$.

А [–4; –2] Б [–2; 0] В [0; 2] Г [2; 4] Д [4; 6]

14.21. Розв'язати рівняння $2^{\sin^2 x}+2^{\cos^2 x}=3$.

А ∅ Б 0 В $2\pi k,\ k\in Z$ Г $\pi k,\ k\in Z$ Д $\frac{\pi k}{2},\ k\in Z$

14.22. За якого найбільшого значення параметра a рівняння $16^x-(a+1)\cdot 4^x+a=0$ має один корінь?

А –2 Б –1 В 0 Г 1 Д 2

14.23. Знайти суму коренів рівняння $(x^2+x+1)^{x-3}=1$.

А 3 Б 0; –1 В –1; 0; 3 Г 2 Д –2

Завдання 14.24–14.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

14.24. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $5^x = 7$	А 5^7
2 $x^5 = 7$	Б $\sqrt[7]{5}$
3 $7^x = 5$	В $\sqrt[5]{7}$
	Г $\log_7 5$
	Д $\log_5 7$

14.25. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|} = 2^{1-x}$	А Жодного
2 $2^{|x-1|} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$	Б Один
3 $2^{-x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3}$	В Два
	Г Три
	Д Безліч

14.26. Установити відповідність між парами рівнянь (1–3) та сумою їх коренів (А–Д).

1 $6^{-2x} = 36$ і $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} = \frac{1}{8}$	А –2
2 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = 4$ і $\left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 49$	Б 2
3 $3^x = 243$ і $\left(\frac{8}{125}\right)^{x+4} = \left(\frac{5}{2}\right)^9$	В –1
	Г 5
	Д 0

14.27. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та значеннями (А–Д) виразу 2^{x_0-1}, де x_0 – корінь рівняння.

1 $2^x - 2^{x-2} = 24$	А 2
2 $2^{x+1} - 7 \cdot 2^{x-2} = 16$	Б 4
3 $2^{x+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 120$	В 8
	Г 16
	Д 32

14.28. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та сумами їх коренів (А–Д).

1 $\left(\frac{1}{4}\right)^{-x} - 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} + 16 = 0$	А 3
2 $4^x - 36 \cdot 2^x + 128 = 0$	Б 4
3 $16^x - 20 \cdot 4^x + 64 = 0$	В 5
	Г 2
	Д 7

Розв'яжіть завдання 14.29–14.44. Відповідь запишіть десятковим дробом.

14.29. Розв'язати рівняння $0{,}125 \cdot 8^{2x-5} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^{-4}$.

14.30. Розв'язати рівняння $\sqrt[3]{2^x \cdot \sqrt[3]{4^x \cdot 0{,}125^{\frac{1}{x}}}} = \sqrt[9]{4}$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.31. Розв'язати рівняння $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = 0{,}04^{-28}$.

14.32. Розв'язати рівняння $2^{\sqrt{x}+2} - 2^{\sqrt{x}+1} = 12 + 2^{\sqrt{x}-1}$.

14.33. Розв'язати рівняння $7\cdot 3^x - 5^{x+1} = 3^{x+3} - 5^{x+2}$.

14.34. Розв'язати рівняння $3^{2\sqrt{x+5}} - 10\cdot 3^{\sqrt{x+5}} + 9 = 0$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.35. Указати найбільше ціле значення параметра a, за якого рівняння $2^{2x} + (a+1)\cdot 2^x + \frac{1}{4} = 0$ має два різні корені.

14.36. Розв'язати рівняння $\frac{4}{2^x+2} - \frac{1}{2^x-3} = 2$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.37. Розв'язати рівняння $8\cdot 81^x + 9\cdot 64^x = 17\cdot 72^x$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

14.38. Розв'язати рівняння $2^{\cos 2x} = 3\cdot 2^{\cos^2 x} - 4$. У відповідь записати $\frac{x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

14.39. Розв'язати рівняння $50\cdot 7^{\sqrt{-5x}} - 7^{\sqrt{-20x+1}} - 7 = 0$.

14.40. Розв'язати рівняння $3^{2x} + \frac{36}{3^{2x}} - \left(3^x + \frac{6}{3^x}\right) = 8$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

14.41. Розв'язати рівняння $81\cdot\left(\sqrt{10}+3\right)^{5x-61} = \left(\frac{3}{\sqrt{10}-3}\right)^{5x-61}$.

14.42. Розв'язати рівняння $|x-5|^{\frac{x}{x-6}} = 1$. У відповідь записати найбільший корінь рівняння.

14.43. Розв'язати рівняння $25^x - (2a+1)\cdot 5^x + a^2 + a = 0$. У відповідь записати найменше ціле значення a, за якого рівняння має два корені.

14.44. Знайти: **1)** додатний корінь рівняння, якщо $3\cdot 2^{2x} + 2\cdot 3^{2x} = 5\cdot 6^x$;

2) найбільше значення виразу $\left(\frac{2}{3}\right)^x$, де x — корінь рівняння.

Тема 15. Показникові нерівності

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— розв'язувати найпростіші нерівності, що містять показникові вирази;
— застосовувати загальні методи і прийоми у процесі розв'язування нерівності (розкладання на множники, заміна змінної, графіки, властивості функцій, ...);
— розв'язувати нерівності, що містять показникові вирази;
— розв'язувати нерівності, користуючись графічним методом розв'язування й дослідження;
— розв'язувати нерівності та їх системи з параметрами.

Нерівність, яка містить змінну в показнику степеня, називають показниковою.

Наприклад, $2^{x+3} < 7$; $5^{x^2} \le \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ тощо.

Розв'язування показникових нерівностей, зазвичай, ґрунтується на таких властивостях показникової функції:

1) функція $y = a^x$ зростає, якщо $a > 1$;

2) функція $y = a^x$ спадає, якщо $0 < a < 1$;

3) функція $y = a^x$ набуває лише додатних значень.

Показникові нерівності можна класифікувати за способами їх розв'язання:

1. Найпростіші та ті, які зводяться до найпростіших:
   а) зведення до однієї основи;
   б) винесення спільного множника за дужки;
   в) ділення обох частин на степінь.
2. Нерівності, які зводяться до алгебраїчних:
   а) зведення до квадратної нерівності шляхом заміни;
   б) однорідні.
3. Нестандартні показникові нерівності.

Показникові нерівності виду $a^{nx} <> b^{nx}$ $(a \ne b)$ зводяться до найпростіших шляхом ділення обох частин на b^{nx} або a^{nx} $(b^{nx} \ne 0,\ a^{nx} \ne 0)$

Наприклад, розв'язати нерівність $5^{3x-2} < 7^{3x-2}$. Поділимо обидві частини нерівності на $7^{3x-2} > 0$. Одержимо: $\left(\frac{5}{7}\right)^{3x-1} < 1$. Приведемо нерівність до однієї основи: $\left(\frac{5}{7}\right)^{3x-2} < \left(\frac{5}{7}\right)^{0}$. Оскільки $\frac{5}{7} < 1$, то одержимо: $3x - 2 > 0$; $x \in \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. *Відповідь.* $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

Нерівності виду $a^{f(x)} > a^{g(x)}$

Наприклад: а) розв'язати нерівність $(0{,}5)^x \ge \frac{1}{32}$. Маємо: $\left(\frac{1}{2}\right)^x \ge \left(\frac{1}{2}\right)^5$. Оскільки основа $0 < \frac{1}{2} < 1$, то отримаємо: $x \le 5$; $x \in (-\infty; 5]$. *Відповідь.* $(-\infty; 5]$.

б) розв'язати нерівність $16^x > 0{,}125$. Маємо: $2^{4x} > 2^{-3}$. Оскільки основа $2 > 1$, то отримаємо: $4x > -3$; $x > -0{,}75$; $x \in (-0{,}75; +\infty)$. *Відповідь.* $(-0{,}75; +\infty)$.

Нерівності виду $a^{f(x)} > b$

Необхідно розглянути випадки:

1) $b \le 0$, тоді $a^{f(x)} > b$; $x \in D(f)$;

2) $b > 0$, тоді $a^{f(x)} > b$; $f(x) > \log_a b$, якщо $a > 1$, і $f(x) < \log_a b$, якщо $0 < a < 1$.

Наприклад:

а) розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^x > -2$. Оскільки $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 0$, то $x \in \mathbb{R}$. *Відповідь.* $x \in \mathbb{R}$.

б) розв'язати нерівність $2^x > 7$. Одержимо нерівність $2^x > 2^{\log_2 7}$. Оскільки основа $2 > 1$, то отримаємо: $x > \log_2 7$; $x \in (\log_2 7; +\infty)$. *Відповідь.* $(\log_2 7; +\infty)$.

Нерівності виду $a^{f(x)} > b^{g(x)}$

При розв'язуванні нерівностей такого виду застосовують логарифмування обох частин за основами a чи b. Врахувавши властивості функцій, одержимо: $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)\log_a b$, якщо $a > 1$, $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)\log_a b$, якщо $0 < a < 1$.

Наприклад, розв'язати нерівність $11^{3-x} > 3^{2x-1}$. Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою 3 й одержимо: $\log_3 11^{3-x} > \log_3 3^{2x-1}$; $(3-x)\log_3 11 > 2x - 1$; $(2 + \log_3 11)x < 1 + 3\log_3 11$. Оскільки $2 + \log_3 11 > 0$, то $x < \dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}$; $x \in \left(-\infty; \dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}\right)$. *Відповідь.* $\left(-\infty; \dfrac{1+3\log_3 11}{2+\log_3 11}\right)$.

Розв'язування показникових нерівностей методом заміни змінної

Нехай потрібно розв'язати нерівність $\dfrac{1}{5^x - 5} \le \dfrac{2}{5^x + 15}$. Уведемо заміну $5^x = t$, $t > 0$. Тоді одержимо: $\dfrac{1}{t-5} \le \dfrac{2}{t+15}$; $\dfrac{1}{t-5} - \dfrac{2}{t+15} \le 0$; $\dfrac{t+15-2(t-5)}{(t-5)(t+15)} \le 0$; $\dfrac{-t+25}{(t-5)(t+15)} \le 0$; $\dfrac{t-25}{(t-5)(t+15)} \ge 0$.



$t \in (-15; 5) \cup [25; +\infty)$. Врахувавши, що $t > 0$ та заміну, одержимо: $\left[\begin{array}{l} 5^x < 5; \\ 5^x \ge 25; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} 5^x < 5^1; \\ 5^x \ge 5^2; \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x < 1; \\ x \ge 2; \end{array}\right.$

$x \in (-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$. *Відповідь.* $(-\infty; 1) \cup [2; +\infty)$.

Зведення показникових нерівностей до найпростіших шляхом винесення спільного множника за дужки

Показникові нерівності виду $A_0 \cdot a^{kx+b_0} + A_1 \cdot a^{kx+b_1} + \ldots + A_n \cdot a^{kx+b_n} \lessgtr B$ зводяться до найпростіших шляхом винесення за дужки спільного множника a^{kx+b_i}, де b_i — найменше з чисел $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

Наприклад, розв'язати нерівність $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 4^{x+1} + 3 \cdot 4^{x+2} \le 236$. Перетворимо нерівність і винесемо спільний множник 4^x за дужки: $3 \cdot 4^x + 8 \cdot 4^x + 48 \cdot 4^x \le 236$; $4^x(3 + 8 + 48) \le 236$; $4^x \cdot 59 \le 236$; $4^x \le 4$; $x \le 1$.

Відповідь. $(-\infty; 1]$.

Зведення показникових нерівностей до квадратних шляхом уведення нової змінної

Показникові нерівності виду $Aa^{2x} + Ba^x + C \lessgtr 0$ зводяться до квадратних шляхом уведення заміни $a^x = t$, $t > 0$.

Наприклад, розв'язати нерівність $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$. Нехай $2^{-x} = t$, $t > 0$. Тоді $4^{-x} = t^2$. Одержимо: $2t^2 - 7t - 4 < 0$; $2\left(t + \dfrac{1}{2}\right)(t-4) < 0$;



$-\dfrac{1}{2} < t < 4$. Урахувавши, що $t > 0$, маємо: $0 < t < 4$. Тоді початкова нерівність рівносильна нерівності: $2^{-x} < 4$; $2^{-x} < 2^2$; $-x < 2$; $x > -2$.

Отже, $x \in (-2; +\infty)$. *Відповідь.* $(-2; +\infty)$.

Розв'язування нерівностей, які містять однорідні функції відносно показникових функцій

Нерівності виду $A_0 a^{nx} + A_1 a^{(n-1)x} b^x + A_2 a^{(n-2)x} b^{2x} + \ldots + A_{n-1} a^x b^{(n-1)x} + A_n b^{nx} \lessgtr 0$ є однорідними відносно функцій a^x і b^x. Поділимо обидві частини нерівності на $b^{nx} > 0$ й одержимо таку нерівність: $A_0\left(\dfrac{a}{b}\right)^{nx} + A_1\left(\dfrac{a}{b}\right)^{(n-1)x} + \ldots + A_{n-1}\left(\dfrac{a}{b}\right)^x + A_n \lessgtr 0$, яку після заміни $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = t$, $t > 0$, можна звести до раціональної нерівності $A_0 t^n + A_1 t^{n-1} + \ldots + A_{n-1} t + A_n \lessgtr 0$.

Наприклад, розв'язати нерівність $2\cdot 9^x - 5\cdot 6^x + 3\cdot 4^x \ge 0$. Запишемо задану нерівність у вигляді $2\cdot 3^{2x} - 5\cdot 2^x\cdot 3^x + 3\cdot 2^{2x} \ge 0$. Поділимо обидві частини на $3^{2x} > 0$ й отримаємо:

$2 - 5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \ge 0$. Нехай $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, $t > 0$, тоді одержимо: $3t^2 - 5t + 2 \ge 0$; $\left[\begin{array}{l} t \ge 1; \\ t \le \frac{2}{3}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} (2/3)^x \ge 1; \\ \left(\frac{2}{3}\right)^x \le \frac{2}{3}; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x \le 0; \\ x \ge 1; \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; 0]\cup[1; +\infty)$. *Відповідь.* $(-\infty; 0]\cup[1; +\infty)$.

Степенево-показникові нерівності

1. Нерівності виду $(f(x))^{g(x)} > 1$. $(f(x))^{g(x)} > 1 \Leftrightarrow (f(x))^{g(x)} > (f(x))^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{0 < f(x) < 1; \\ g(x) < 0; \\ \{f(x) > 1; \\ g(x) > 0. \end{array}\right.$

Наприклад, розв'язати нерівність $\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1$.

$\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1 \Leftrightarrow \left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > \left(4x^2 + 2x + 1\right)^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{0 < 4x^2 + 2x + 1 < 1; \\ x^2 - x < 0; \\ \{4x^2 + 2x + 1 > 1; \\ x^2 - x > 0; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \{0 < (2x + 0{,}5)^2 + 0{,}75 < 1; \\ x^2 - x < 0; \\ \{4x^2 + 2x > 0; \\ x^2 - x > 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{2x(2x+1) < 0; \\ x(x-1) < 0; \\ \{x(x + 0{,}5) > 0; \\ x(x-1) > 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{-0{,}5 < x < 0; \\ 0 < x < 1; \\ \{\left[\begin{array}{l} x > 0; \\ x < -0{,}5; \end{array}\right. \\ \{\left[\begin{array}{l} x > 1; \\ x < 0; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing; \\ \left[\begin{array}{l} x > 1; \\ x < -0{,}5; \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 1; \\ x < -0{,}5. \end{array}\right.$

Отже, $x \in (-\infty; -0{,}5)\cup(1; +\infty)$. *Відповідь.* $(-\infty; -0{,}5)\cup(1; +\infty)$.

2. Нерівності виду $(f(x))^{g(x)} < 1$. $(f(x))^{g(x)} < 1 \Leftrightarrow (f(x))^{g(x)} < (f(x))^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{0 < f(x) < 1; \\ g(x) > 0; \\ \{f(x) > 1; \\ g(x) < 0. \end{array}\right.$

Наприклад, розв'язати нерівність $(3 - x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1$.

$(3 - x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < 1 \Leftrightarrow (3 - x)^{\frac{3x-5}{3-x}} < (3 - x)^0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{0 < 3 - x < 1; \\ \frac{3x-5}{3-x} > 0; \\ \{3 - x > 1; \\ \frac{3x-5}{3-x} < 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{-3 < -x < -2; \\ \left(x - \frac{5}{3}\right)(x-3) < 0; \\ \{x < 2; \\ \left(x - \frac{5}{3}\right)(x-3) > 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \{2 < x < 3; \\ \frac{5}{3} < x < 3; \\ \{\left[\begin{array}{l} x < 2; \\ x > 3; \end{array}\right. \\ x < \frac{5}{3}; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 3 \\ x < \frac{5}{3}. \end{array}\right.$

Отже, $x \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right)\cup(2; 3)$. *Відповідь.* $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)\cup(2; 3)$.

3. Нерівність виду $(f(x))^{\varphi(x)} > (g(x))^{\varphi(x)}$

Нерівності такого виду найпростіше розв'язують логарифмуванням обох частин зі збереженням знака початкової нерівності, якщо основа логарифма $a > 1$, і зі зміною знака на протилежний, якщо основа логарифма $0 < a < 1$.

Наприклад, розв'язати нерівність $\frac{1}{4}x^{\log_2 x} < 2^{\log_2 x}$. Знайдемо ОДЗ: $x > 0$. Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою $a = 2 > 1$ на її ОДЗ: $\log_2\frac{1}{4} + \log_2 x^{\log_2 x} < \log_2 x$; $-2 + \log_2^2 x < \log_2 x$; $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 < 0$. Уведемо позначення: $t = \log_2 x$, тоді одержимо нерівність: $t^2 - t - 2 < 0$; $t_1 = -1$, $t_2 = 2$; $-1 < t < 2$. Повертаємося до заміни: $\begin{cases}\log_2 x > -1;\\ \log_2 x < 2;\end{cases}$ $\begin{cases}x > \frac{1}{2};\\ x < 4;\end{cases}$ $\frac{1}{2} < x < 4$; $x \in \left(\frac{1}{2}; 4\right)$. *В-дь.* $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $0{,}5^{2x+7} \le 4$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -4{,}5]$	$[-2{,}5; +\infty)$	$[-4{,}5; +\infty)$	$(-\infty; -2{,}5]$	$[2{,}5; +\infty)$

■ $0{,}5^{2x+7} \le 4$. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+7} \le \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; $2x + 7 \ge -2$; $2x \ge -9$; $x \ge -4{,}5$. $x \in [-4{,}5; +\infty)$. *Відповідь.* **В.** ■

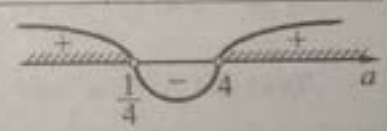
Приклад 2. Розв'язати нерівність $5^{8x+1} + 5^{8x-1} < 130$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -0{,}25)$	$(-\infty; 0{,}25)$	$(-0{,}25; +\infty)$	$(0{,}25; +\infty)$	$(-\infty; 4)$

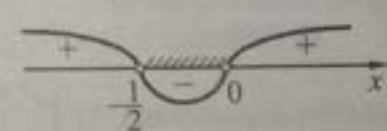
■ $5\cdot 5^{8x} + \frac{5^{8x}}{5} < 130$; $5^{8x}(5 + \frac{1}{5}) < 130$; $5^{8x} < \frac{130\cdot 5}{26}$; $5^{8x} < 25$; $8x < 2$; $x < 0{,}25$. $x \in (-\infty; 0{,}25)$. *В-дь:* **Б.** ■

Приклад 3. Розв'язати нерівність $4^{\frac{x+1}{x}} - 17\cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 > 0$.

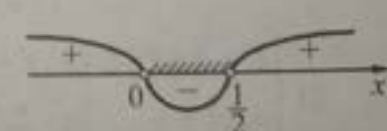
А	Б	В	Г	Д
$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$



■ $4^{1+\frac{1}{x}} - 17\cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 > 0$; $4\cdot 4^{\frac{1}{x}} - 17\cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 > 0$. Зробимо заміну: $2^{\frac{1}{x}} = a$. Тоді $4^{\frac{1}{x}} = \left(2^{\frac{1}{x}}\right)^2 = a^2$. $4a^2 - 17a + 4 > 0$; $a_1 = 4$, $a_2 = \frac{1}{4}$. $a < \frac{1}{4}$ або $a > 4$. Повернемось до заміни:



1. $2^{\frac{1}{x}} < \frac{1}{4}$; $2^{\frac{1}{x}} < 2^{-2}$; $\frac{1}{x} < -2$; $\frac{1+2x}{x} < 0$. $2\left(x + \frac{1}{2}\right)x < 0$ $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

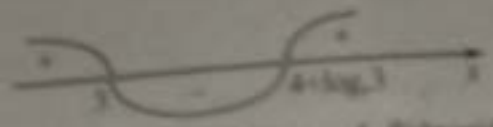


2. $2^{\frac{1}{x}} > 4$; $2^{\frac{1}{x}} > 2^2$; $\frac{1}{x} > 2$; $\frac{1-2x}{x} > 0$; $2\left(x - \frac{1}{2}\right)x < 0$. $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Отже, $x \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right)$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $3^{x-3} > 5^{x^2-7x+12}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

■ Прологарифмуємо обидві частини нерівності за основою 5. Оскільки $5 > 1$, то знак нерівності зберігається. Тоді: $(x-3)\log_5 3 > x^2 - 7x + 12$; $(x-3)\log_5 3 > (x-3)(x-4)$; $(x-3)(x-4-\log_5 3) < 0$.



Отже, $x\in(3;\,4+\log_2 3)$. Найменший цілий розв'язок — 4. *Відповідь.* 4. ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{t}+\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^{t}<8$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності.

■ Очевидно, що $\sqrt{4-\sqrt{15}}=\dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}$. Виконавши заміну: $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^{t}=z$, $z>0$, одержимо:

$z+\dfrac{1}{z}<8$; $z^2-8z+1<0$; $z_{1,2}=4\pm\sqrt{15}$; $\left(4+\sqrt{15}\right)^{-1}<z<4+\sqrt{15}$;



Задана нерівність рівносильна нерівності: $\left(4+\sqrt{15}\right)^{-1}<\left(4+\sqrt{15}\right)^{\frac{x}{2}}<\left(4+\sqrt{15}\right)^{1}$; $-1<\dfrac{x}{2}<1$;

$-2<x<2$. Найбільший цілий розв'язок — $x=1$. *Відповідь.* 1. ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $3^{x-\sqrt{x+1}}+3^{x+\sqrt{x+1}}\ge 28$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

■ $3^{x-\sqrt{x+1}}+3^{x-\sqrt{x+1}}\ge 28$; $3\cdot 3^{\sqrt{x+1}}+\dfrac{3^x}{3^{\sqrt{x+1}}}\ge 28$. Нехай $3^{\sqrt{x+1}}=t$, $t>0$. Тоді задану нерівність можна записати так: $3t+\dfrac{9}{t}-28\ge 0$; $3t^2-28t+9\ge 0$; $3\left(t-\dfrac{1}{3}\right)(t-9)\ge 0$; $\left[\begin{array}{l} t\le\frac{1}{3};\\ t\ge 9. \end{array}\right.$



Повернемося до заміни: 1) $3^{\sqrt{x+1}}\le\dfrac{1}{3}$; $3^{\sqrt{x+1}}\le 3^{-1}$; $\sqrt{x+1}\le -1$ — нерівність розв'язків не має;

2) $3^{\sqrt{x+1}}\ge 9$; $\sqrt{x+1}\ge 2$; $x\ge 3$. Найменший цілий розв'язок — $x=3$. *Відповідь.* 3. ■

Приклад 7. Розв'язати нерівність $\left(x^2+x+1\right)^{\frac{x+1}{x+2}}\ge\left(x^2+x+1\right)^{3}$. У відповідь записати суму всіх розв'язків нерівності.

■ Оскільки $x^2+x+1>0$ для всіх значень x, то вихідна нерівність рівносильна сукупності двох систем нерівностей: 1) $\begin{cases} x^2+x+1=1,\\ x\ne -2; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+1)=0,\\ x\ne -2; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x=0;\\ x=-1. \end{array}\right.$

2) $\begin{cases} x^2+x+1>1,\\ \dfrac{x+5}{x+2}\ge 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+x>0,\\ 3-\dfrac{x+5}{x+2}\le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+1)>0,\\ \dfrac{2x+1}{x+2}\le 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\in(-\infty;-1)\cup(0;+\infty);\\ x\in(-2;-0{,}5]; \end{cases}$ $x\in(-2;-1)$.

3) $\begin{cases} x^2+x+1<1,\\ \dfrac{x+5}{x+2}\le 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+x<0,\\ \dfrac{2x+1}{x+2}\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+1)<0,\\ \dfrac{x+0{,}5}{x+2}\ge 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x\in(-1;0);\\ x\in(-\infty;-2)\cup[-0{,}5;+\infty); \end{cases}$ $x\in[-0{,}5;0)$.

Об'єднавши розв'язки систем (1-3), одержимо: $x\in(-2;-1)\cup\left[-0{,}5;0\right]$. Цілими розв'язками є -1 і 0, а їх сума дорівнює $-1+0=-1$. *Відповідь.* -1. ■

Приклад 8. За яких значень a нерівність $4^x-(a-4)2^x+4>0$ виконується для будь-яких дійсних значень x? У відповідь записати найбільше ціле значення a.

■ Нехай $2^x=t$, $t>0$. Одержимо квадратну нерівність $t^2-(a-4)t+4>0$. Сформулюємо завдання так: за яких значень параметра a графік квадратичної функції $f(t)=t^2-(a-4)t+4$ на проміжку $(0;+\infty)$ розміщений над віссю t? Це можливо у двох випадках:

1) графік функції $y=f(t)$ міститься над віссю t для будь-якого t: дискримінант квадратного тричлена $f(t)$ повинен бути від'ємний: $(a-4)^2-16<0$; $a^2-8a+16-16<0$; $a(a-8)<0$; $a\in(0;8)$;

2) якщо ж $D=a(a-8)\geq 0$ (або $a\in(-\infty;0]\cup[8;+\infty)$), то більший корінь тричлена $f(t)$ повинен бути недодатним: $x_2=0{,}5\left(a-4+\sqrt{a(a-8)}\right)\leq 0$. Маємо $\sqrt{a(a-8)}<4-a$; $\begin{cases}a^2-8a<a^2-8a+16;\\ a<4;\end{cases}$ $a<4$; $a\in(-\infty;4)$.

Об'єднаємо розв'язки 1) і 2): $a\in(-\infty;8)$. Найбільше ціле значення дорівнює $a=7$. *Відповідь.* 7. ■

Завдання 15.1–15.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

15.1. Розв'язати нерівність $5^x>5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;1)$	$(-\infty;0)$	$(0;+\infty)$	$(1;+\infty)$	$(5;+\infty)$

15.2. **(ЗНО–2012)** Розв'язати нерівність $\left(\frac{\pi}{4}\right)^x<\left(\frac{\pi}{4}\right)^3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-3;+\infty)$	$(3;+\infty)$	$(-\infty;3)$	$(-\infty;-3)$	$\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$

15.3. Знайти множину розв'язків нерівності $0{,}7^x<1$.

А $\varnothing$ **Б** $(-\infty;+\infty)$ **В** $(-\infty;0)$ **Г** $(0;+\infty)$ **Д** $(1;+\infty)$

15.4. Розв'язати нерівність $2^x<\frac{1}{8}$.

А $(-\infty;-3)$ **Б** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ **В** $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ **Г** $(-3;+\infty)$ **Д** $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$

15.5. Розв'язати нерівність $9^{x+5}>27^x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;5)$	$(10;+\infty)$	$(-\infty;10)$	$(0;10)$	будь-яке дійсне число

15.6. Яка з наведених нерівностей має розв'язки?

А $7^x<-1$ **Б** $7^{|x|}<0{,}7$ **В** $7^{x^2}<1$ **Г** $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}<2$ **Д** $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}>2$

15.7. Розв'язати нерівність $7^x-7^{\frac{1}{x}}>0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-1)\cup(0;1)$	$(-1;1)$	$(1;+\infty)$	$(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$	$(-1;0)\cup(1;+\infty)$

15.8. Знайти множину розв'язків нерівності $4^x>3$.

А R **Б** $(-\infty;\log_4 3)$ **В** $(-\infty;\log_3 4)$ **Г** $(\log_4 3;+\infty)$ **Д** $(\log_3 4;+\infty)$

15.9. Розв'язати нерівність $1 \le \left(\frac{1}{3}\right)^x \le 27$.

А $\left[0; \frac{1}{3}\right]$ Б $[0; 3]$ В $\left[\frac{1}{3}; 1\right]$ Г $[-3; 0]$ Д $\left[-\frac{1}{3}; 0\right]$

15.10. Розв'язати нерівність $3^x > 5^x$.

А $(-\infty; 0)$ Б $(0; +\infty)$ В $(-\infty; -1)$ Г $(1; +\infty)$ Д $\varnothing$

15.11. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+x-20} > 1$.

А $\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{5}\right)$ Б $(-5; 4)$ В $(4; 5)$ Г $\left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{4}\right)$ Д $(-4; 5)$

15.12. Розв'язати нерівність $2^{x+1} + 2^x < 24$.

А $(-3; +\infty)$ Б $(-\infty; -3)$ В $(3; +\infty)$ Г $(0; 3)$ Д $(-\infty; 3)$

15.13. Знайти множину розв'язків нерівності $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-6; 8)$	$(2; 4)$	$(1; 2)$	$(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$

15.14. Розв'язати нерівність $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -1) \cup (-1; 1)$	$(-1; 1)$	$\left[-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right]$	$(-3; 3)$	$\left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$

15.15. Розв'язати нерівність $3^x + 3^{2-x} > 10$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$	$(-\infty; 1) \cup (9; +\infty)$	$(0; 2)$	$(-\infty; 3) \cup (10; +\infty)$	$(1; 9)$

15.16. Указати найменший розв'язок нерівності $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+2} \le \left(\frac{5}{2}\right)^2$.

А 0 Б -4 В 4 Г -2 Д не існує

15.17. Розв'язати нерівність $3^{|x|+2} > 27$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$	$(-5; 5)$	$(-1; 1)$	$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$\varnothing$

15.18. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|-1} < \frac{1}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$	$(-4; 4)$	$(4; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$

15.19. Розв'язати нерівність $\left(2^x - 2\right)\sqrt{x^2 - 5x + 6} \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$[1; 2) \cup (3; +\infty)$	$[0; 2] \cup [3; +\infty)$	$[3; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$[1; 2] \cup [3; +\infty)$

15.20. Розв'язати нерівність $2^{x^2} > \sin x$.

А	Б	В	Г	Д
R	$\varnothing$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	0	$(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$

15.21. За якого значення параметра a нерівність $a^2 - 2 \cdot 4^{x+1} - a \cdot 2^{x+1} > 0$ не має розв'язків?

А $a > 1$ Б $a \ne 0$ В $a < 0$ Г $a > 0$ Д $a = 0$

Завдання 15.22–15.25 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

15.22. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $7^x > 1$

2 $7^x > -1$

3 $\left(\frac{1}{7}\right)^x < -1$

А $(1; +\infty)$

Б $(-\infty; 0)$

В $(0; +\infty)$

Г $(-\infty; +\infty)$

Д $\varnothing$

15.23. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $(\lg 5)^{x+2} > (\lg 5)^{-1}$

2 $(\lg 12)^{x+2} > (\lg 12)^{-1}$

3 $(\sin 3)^{x-3} > (\sin 3)^4$

А $(6; +\infty)$

Б $(-\infty; 7)$

В $(-\infty; -3)$

Г $(-\infty; 3)$

Д $(-3; +\infty)$

15.24. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $1 \le \left(\frac{1}{2}\right)^x \le 16$

2 $1 \le 2^x \le 16$

3 $1 \le 16^x \le 2$

А $\left[-\frac{1}{4}; 0\right]$

Б $[-4; 0]$

В $\left[0; \frac{1}{4}\right]$

Г $\left[\frac{1}{4}; 4\right]$

Д $[0; 4]$

15.25. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $2^{|x|+2} > \frac{1}{8}$

2 $2^{|x|+2} > 8$

3 $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|+2} > 8$

А $(1; +\infty)$

Б $(-1; 1)$

В $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Г $(-\infty; +\infty)$

Д $\varnothing$

Розв'яжіть завдання 15.26–15.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

15.26. Розв'язати нерівність $\sqrt{27} \cdot 3^{7x-x^2} \ge \frac{\sqrt{243}}{3^{2x+1}}$. У відповідь записати суму всіх цілих розв'язків нерівності.

15.27. Розв'язати нерівність $2^{x^2+3x} - 8 \cdot 2^x > 0$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

15.28. Розв'язати нерівність $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} \ge 56$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

15.29. Розв'язати нерівність $2^x + 2^{-x+1} - 3 < 0$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.30. Розв'язати нерівність $2^{\sqrt{x}} - 2^{1-\sqrt{x}} \le 1$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.31. Розв'язати нерівність $(2^x-8)(x^2-4x+3)>0$. У відповідь записати добуток усіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

15.32. Розв'язати нерівність $\frac{1}{2^{x+1}-1}>\frac{1}{2^x+3}$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.33. Розв'язати нерівність $2\cdot 4^x-5\cdot 6^x+3\cdot 9^x<0$. У відповідь записати координату середини проміжку, який є розв'язком нерівності.

15.34. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $7^{x-5}>3^{x^2-x-30}$.

15.35. Розв'язати нерівність $\left(\sqrt{2}-1\right)^{\frac{x-5}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}+1\right)^{-x}$. У відповідь записати найбільший розв'язок нерівності.

15.36. Розв'язати нерівність $3^{x^2-2}-5^{x^2-1}>5^{x^2-1}+3^{x^2-2}$. У відповідь записати суму цілих розв'язків нерівності.

15.37. Розв'язати нерівність $\sqrt{9^x+24}-2>3^{x+1}$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності.

15.38. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x-4/x^2}\ge 2^{2x-10/x}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

15.39. Розв'язати нерівність $7^{x-5}>3^{x^2-x-30}$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності.

15.40. Розв'язати нерівність $\left(\sqrt{5}-2\right)^x+\left(\sqrt{5}+2\right)^x<2\sqrt{5}$. У відповідь записати суму цілих розв'язків нерівності.

15.41. Розв'язати нерівність $(x+3)^{-2x^2-3x-5}<1$. У відповідь записати суму всіх цілих недодатних розв'язків нерівності.

15.42. Дано функції $f(x)=2^x-8$ і $g(x)=x^2-4x+3$.

1) Розв'язати рівняння $\frac{f(x)}{g(x)}=0$. У відповідь записати кількість розв'язків рівняння;

2) розв'язати нерівність $f(x)\cdot g(x)>0$. У відповідь записати добуток усіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

Тема 16. Логарифмічні рівняння

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— розв'язувати найпростіші рівняння, що містять логарифмічні вирази;
— застосовувати загальні методи та прийоми (розкладання на множники, заміна змінної, застосування властивостей і графіків функцій) у процесі розв'язування логарифмічних рівнянь;
— розв'язувати логарифмічні рівняння графічним методом;
— розв'язувати логарифмічні рівняння з параметрами.

Рівняння, яке містить змінну під знаком логарифма або в основі логарифма, називають *логарифмічним*.

Найпростіші логарифмічні рівняння

1. $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Наприклад, $\log_3 x = 4$; $x = 3^4$; $x = 16$. *Відповідь.* 16.

2. $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Наприклад, $\log_{0,2}(x + 4) = -2$; $x + 4 = (0,2)^{-2}$; $x + 4 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$; $x = 5^2 - 4$; $x = 21$. *Відповідь.* 21.

3. $\log_a f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Наприклад, $\log_2(4^x - 2) = x$; $4^x - 2 = 2^x$. Нехай $2^x = t$, тоді маємо: $t^2 - t - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l} t = 2; \\ t = -1; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2^x = 2; \\ 2^x = -1; \end{array}\right.$ $x = 1$. *Відповідь.* 1.

4. Рівняння $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0 \text{ або } g(x) > 0; \end{cases}$ де $a > 0$, $a \neq 1$.

Наприклад, $\log_2(x^2 - x - 2) = \log_2(x + 1)$; $\begin{cases} x + 1 > 0; \\ x^2 - x - 2 = x + 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x > -1; \\ (x - 3)(x + 1) = 0. \end{cases}$ $x = 3$. *Відповідь.* 3.

5. Рівняння $\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$ рівносильне системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ f(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1; \end{cases}$ або системі $\begin{cases} f(x) = g(x); \\ g(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0; \\ \varphi(x) \neq 1. \end{cases}$

Наприклад, $\log_{2x}(x^2 - 3x) = \log_{2x}(6x - 8)$; $\begin{cases} x^2 - 3x = 6x - 8; \\ 6x - 8 > 0; \\ 2x > 0; \\ 2x \neq 1; \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 9x + 8 = 0; \\ x > 4/3; \\ x > 0; \\ x \neq \frac{1}{2}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1, \ x = 8; \\ x > \frac{4}{3}; \end{cases}$ $x = 8$.

Відповідь. 8.

Розв'язування логарифмічних рівнянь потенціюванням

Перехід від рівняння, яке містить логарифми, до рівняння, яке їх не містить, називають *потенціюванням*.

Наприклад, розв'язати рівняння $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = 2$. Подамо число 2 у вигляді десяткового логарифма: $2 = \lg 100$. Тоді $\lg(x - 9) + \lg(2x - 1) = \lg 100$. Суму логарифмів замінимо логарифмом добутку виразів: $\lg((x - 9)(2x - 1)) = \lg 100$. Врахувавши ОДЗ: $\begin{cases} x - 9 > 0; \\ 2x - 1 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 9; \\ x > 0,5; \end{cases}$ $x > 9$, замінимо рівняння рівносильною системою й одержимо: $\begin{cases} (x - 9)(2x - 1) = 100; \\ x > 9; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x^2 - 19x - 91 = 0; \\ x > 9; \end{cases}$ $\begin{cases} (2x + 7)(x - 13) = 0; \\ x > 9; \end{cases}$

$x = 13$. *Відповідь.* 13.

Розв'язування рівнянь із застосуванням основної логарифмічної тотожності $a^{\log_a b} = b$

Наприклад, розв'язати рівняння $9^{\log_3(1-2x)} = 5x^2 - 5$. Перетворимо ліву частину рівняння, застосувавши основну логарифмічну тотожність: $9^{\log_3(1-2x)} = \left(3^2\right)^{\log_3(1-2x)} = 3^{2\log_3(1-2x)} = 3^{\log_3(1-2x)^2} = (1-2x)^2$ за умови, що $1-2x>0$. Звідки одержимо: $\begin{cases}(1-2x)^2 = 5x^2-5;\\ 1-2x>0;\end{cases}$ $\begin{cases}1-4x+4x^2 = 5x^2-5;\\ x<0,5;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2+4x-6=0;\\ x<0,5;\end{cases}$

$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-2+\sqrt{10};\\ x=-2-\sqrt{10};\end{array}\right.\\ x<0,5;\end{cases}$ $x=-2-\sqrt{10}$. *Відповідь.* $-2-\sqrt{10}$.

Використання формул $f(x) = a^{\log_a f(x)}$, ***де*** $a>0$, $a\neq 1$, $f(x)>0$

Наприклад, розв'язати рівняння $3x^{\log_5 2} + 2^{\log_5 x} = 64$.

ОДЗ: $x>0$. На цій множині $x^{\log_5 2} = (5^{\log_5 x})^{\log_5 2} = (5^{\log_5 2})^{\log_5 x} = 2^{\log_5 x}$, тому вихідне рівняння рівносильне рівнянню $3\cdot 2^{\log_5 x} + 2^{\log_5 x} = 64$; $4\cdot 2^{\log_5 x} = 64$; $2^{\log_5 x} = 16$; $2^{\log_5 x} = 2^4$; $\log_5 x = 4$; $x = 625$. *Відповідь.* 625.

Зведення до однієї основи (використання формули $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$)

Наприклад, розв'язати рівняння $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5$. Зведемо всі логарифми до основи 2:

$\dfrac{\log_2 x}{\log_2 2^2} + \dfrac{\log_2 x}{\log_2 2^{-4}} + \dfrac{\log_2 x^3}{\log_2 2^3} = 5$; $\dfrac{1}{2}\log_2 x - \dfrac{1}{4}\log_2 x + \dfrac{3}{3}\log_2 x = 5$. Зведемо подібні доданки: $\dfrac{5}{4}\log_2 x = 5$; $\log_2 x = 4$; $x = 2^4$; $x = 16$. *Відповідь.* 16.

Розв'язування рівнянь логарифмуванням обох частин рівняння

Розв'язати рівняння $x^{\lg x} = 100x$. ОДЗ: $x>0$. Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою 10: $\lg x^{\lg x} = \lg 100x$; $\lg x\cdot\lg x = \lg 100 + \lg x$; $\lg^2 x = 2 + \lg x$; $\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$. Нехай $\lg x = t$. Тоді одержимо: $t^2 - t - 2 = 0$; $\left[\begin{array}{l}t=2;\\ t=-1.\end{array}\right.$ Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l}\lg x = 2;\\ \lg x = -1;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x_1 = 100;\\ x_2 = 0,1.\end{array}\right.$ *Відповідь.* 0,1; 100.

Розв'язування логарифмічних рівнянь методом заміни змінної

При розв'язуванні рівнянь цим методом необхідно звернути увагу на таке:

$\log_a^2\left(x^2\right) = \left(\log_a x^2\right)^2 = \left(2\log_a|x|\right)^2 = 2^2\left(\log_a|x|\right)^2 = 4\log_a^2|x|$;

$\log_a^2 x^3 = \left(\log_a x^3\right)^2 = \left(3\log_a x\right)^2 = 3^2\log_a^2 x = 9\log_a^2 x$.

Узагалі, для непарних m маємо: $\log_a^n x^m = m^n\log_a^n x$. Для парних m маємо: $\log_a^n x^m = m^n\log_a^n|x|$.

Наприклад:

1) розв'язати рівняння $3\log_3^2 x - 4\log_3 x - 4 = 0$.

Нехай $\log_3 x = t$, тоді маємо рівняння: $3t^2 - 4t - 4 = 0$; $\left[\begin{array}{l}t_1 = 2;\\ t_2 = -\dfrac{2}{3}.\end{array}\right.$ Повертаємося до заміни:

а) $\log_3 x = 2$; $x = 9$; б) $\log_3 x = -\dfrac{2}{3}$; $x = 3^{-\frac{2}{3}}$; $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$. *Відповідь.* 9; $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}}$;

2) розв'язати рівняння $\lg^2 x^4 - \lg x^{14} = 2$.

Перетворимо дане рівняння: $4^2\lg^2|x| - 14\lg|x| - 2 = 0$; $8\lg^2|x| - 7\lg|x| - 1 = 0$. Нехай $\lg|x| = t$. Тоді

маємо: $8t^2-7t-1=0$; $\left[\begin{array}{l} t_1=1; \\ t_2=-\frac{1}{8}. \end{array}\right.$ Повернемося до заміни: $\left[\begin{array}{l} \lg|x|=1; \\ \lg|x|=-\frac{1}{8}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} |x|=10^1; \\ |x|=10^{-\frac{1}{8}}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\pm 10; \\ x=\pm\frac{1}{\sqrt[8]{10}}. \end{array}\right.$

Отже, дане рівняння має чотири корені: $\pm 10; \pm\frac{1}{\sqrt[8]{10}}$. *Відповідь.* $\pm 10; \pm\frac{1}{\sqrt[8]{10}}$.

Застосування монотонності при розв'язуванні логарифмічних рівнянь

Розв'язати рівняння $\log_5(x+3)=3-x$. Встановимо монотонність функцій у лівій і правій частинах: $y=\log_5(x+3)$ — зростаюча функція ($a=5>1$); $y=3-x$ — спадна. Підбором знайдемо корінь: $x=2$. Із властивостей монотонності $x=2$ — єдиний корінь. *Відповідь.* 2.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\lg(5x-3)=1$.

А	Б	В	Г	Д
0,6	1,2	2,6	1	0

■ $\lg(5x-3)=1$; $\lg(5x-3)=\lg 10$; $5x-3=10$; $x=2{,}6$. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\log_2(2x+1)=\log_2(9x+17)-\log_2(x+5)$.

А	Б	В	Г	Д
–3	2	2; –3	$-1\frac{5}{6}$	–2

■ $\log_2(2x+1)=\log_2(9x+17)-\log_2(x+5)$; $\log_2(2x+1)+\log_2(x+5)=\log_2(9x+17)$.

$\left\{\begin{array}{l} \log_2\big((2x+1)(x+5)\big)=\log_2(9x+17); \\ 2x+1>0; \\ 9x+17>0; \\ x+5>0; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 2x^2+11x+5=9x+17; \\ x>-1/2; \\ x>-17/9; \\ x>-5; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 2x^2+2x-12=0; \\ x>-\frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x^2+x-6=0; \\ x>-\frac{1}{2}; \end{array}\right.$

$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1=-3; \\ x_2=2; \end{array}\right. \\ x>-0{,}5. \end{array}\right.$ Отже, $x=2$ — корінь рівняння. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 3. Розв'язати рівняння $\log_5\log_4\log_3 x=0$.

А	Б	В	Г	Д
∅	12	0	1	81

■ $\log_5\log_4\log_3 x=\log_5 1$; $\log_4\log_3 x=1$. $\log_4\log_3 x=\log_4 4$; $\log_3 x=4$; $x=3^4$; $x=81$. *В-дь.* **Д.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\log_2^2 x-\log_2 x^5=4\log_2 64$.

А	Б	В	Г	Д
–3; 8	8	–3	$\frac{1}{8}$; 256	256

■ $\log_2^2 x-\log_2 x^5=4\log_2 64$; $\log_2^2 x-5\log_2 x=24$. Заміна: $\log_2 x=a$. Матимемо: $a^2-5a-24=0$;

$a_1=8$, $a_2=-3$. $\log_2 x=8$; $x=2^8$; $x=256$ або $\log_2 x=-3$; $x=2^{-3}$; $x=\frac{1}{8}$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $\log_8(x-7)+\log_3(7-x)=11$.

А	Б	В	Г	Д
∅	7	±7	$\pm 2\sqrt{15}$	0

■ $\log_2(x-6)+\log_2(7-x)=1$. ОДЗ: $\begin{cases} x-7>0, \\ 7-x>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>7, \\ x<7; \end{cases}$ $x\in\varnothing$. Коренів немає. *Відповідь.* А. ■

Приклад 6. Розв'яжіть рівняння $\log_3 7+2\log_9 7=3$.

А	Б	В	Г	Д
Немає коренів	3; 7	$\sqrt{56}$	1	7

■ $\log_3 7+2\log_{3^2}7=3$; $3\log_3 7=3$; $\log_3 7=1$; $x=7$. *Відповідь.* Д. ■

Приклад 7. Розв'яжіть рівняння $x-1+\log_2 3=\log_2\left(3^x-4^{x-1}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
1	4	0	$\varnothing$	3

■ За означенням логарифма одержимо: $4^{x-1+\log_2 3}=3^x-4^{x-1}$. Ліву частину перетворимо так: $4^{x-1+\log_2 3}=4^{x-1}\cdot 4^{\log_2 3}=4^{x-1}\cdot 3$. Одержимо рівняння: $3\cdot 4^{x-1}=3^x-4^{x-1}$; $4\cdot 4^{x-1}=3^x$; $4^x=3^x$; $\left(\frac{4}{3}\right)^x=1$; $x=0$. *Відповідь.* Б. ■

Приклад 8. Розв'яжіть рівняння $\log_x\left(2x^2-3x-4\right)=2$.

А	Б	В	Г	Д
–1	4	–1; 4	–4; 1	1

■ Замінимо задане рівняння рівносильною системою:

$$\begin{cases} x^2=2x^2-3x-4, \\ x>0, \\ x\neq 1; \end{cases} \begin{cases} x^2-3x-4=0, \\ x>0, \\ x\neq 1; \end{cases} \begin{cases} (x-4)(x+1)=0, \\ x>0, \\ x\neq 1; \end{cases} \quad x=4. \text{ Відповідь. Б. } ■$$

Приклад 9. Розв'яжіть рівняння $\log_{x^2-1}\left(x^3+6\right)=\log_{x^2-1}\left(4x^2-x\right)$. У відповідь запишіть суму коренів рівняння.

■ Задане рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x^3+6>0, \\ x^2-1>0, \\ x^2-1\neq 1; \\ x^3+6=4x^2-x. \end{cases}$

Рівняння системи $x^3-4x^2+x+6=0$ за наслідком з теореми Безу має три корені: $x_1=-1$, $x_2=2$, $x_3=3$. Число $x_1=-1$ не задовольняє умову $x^2-1>0$. Числа $x_2=2$, $x_3=3$ є розв'язками цієї системи, отже, й вихідного рівняння. Сума коренів дорівнює $2+3=5$. *Відповідь.* 5. ■

Приклад 10. Розв'яжіть рівняння $x\log_3^2 x-(2x+3)\log_3 x+6=0$. У відповідь запишіть добуток коренів рівняння.

■ ОДЗ: $x>0$. Подамо вихідне рівняння у вигляді добутку двох множників:
$(\log_3 x-2)(x\log_3 x-3)=0$. Тоді корінями рівняння є:
1) $\log_3 x=2$; $x=9$;
2) $\log_3 x=\frac{3}{x}$. На проміжку $(0;+\infty)$ функція $y=\frac{3}{x}$ — спадна, а функція $y=\log_3 x$ зростаюча ($3>1$). Отже, вказані існує корінь рівняння $\log_3 x=\frac{3}{x}$, то він єдиний. Підбором знаходимо корінь $x=3$. Отже, вихідне рівняння має корені: 3 і 9. Тоді їх добуток дорівнює $3\cdot 9=27$. *Відповідь.* 27. ■

Приклад 11. Розв'язати рівняння $\lg 2x + \lg(2-x) = \lg\lg a$. За яких значень a рівняння має корені?

■ ОДЗ: $\begin{cases} x>0; \\ 2-x>0; \end{cases} \begin{cases} x>0; \\ x<2; \end{cases} x \in (0;2)$. $\lg 2x + \lg(2-x) = \lg\lg a$; $\lg(2x(2-x)) = \lg\lg a$; $2x(2-x) = \lg a$;

Оскільки $x(2-x)>0$, то рівняння матиме корені, лише якщо $\lg a > 0$; $a > 1$. Тоді одержимо: $2x^2 - 4x + \lg a = 0$. Розв'яжемо квадратне рівняння: $D = (-4)^2 - 8\cdot\lg a = 8(2-\lg a)$. Щоб вихідне рівняння мало розв'язки, необхідно виконання умови $D \ge 0$, тобто $2 - \lg a \ge 0$; $\lg a \le 2$; $a \le 100$.

Якщо $1 < a \le 100$, то $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{16(1-0{,}5\lg a)}}{4}$; $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-0{,}5\lg a}$.

Перевіримо виконання умови ОДЗ. $1 < a \le 100$, то $0 < \lg a \le 2$; $-1 \le -0{,}5\lg a < 0$; $0 \le 1 - 0{,}5\lg a < 1$; $0 \le \sqrt{1-0{,}5\lg a} < 1$; $1 \le x_2 = 1 + \sqrt{1-0{,}5\lg a} < 2$ і $0 < x_1 = 1 - \sqrt{1-0{,}5\lg a} \le 1$. Отже, x_1 і x_2 належать ОДЗ.

Відповідь. Якщо $1 < a \le 100$, то $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-0{,}5\lg a}$; якщо $a > 100$, то рівняння коренів не має; якщо $a \le 1$, то рівняння не має змісту. ■

Завдання 16.1–16.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

16.1. Розв'язати рівняння $\log_a x = c$.

А	Б	В	Г	Д
∅	$a \cdot c$	c^a	a^c	c/a

16.2. Розв'язати рівняння $\log_{\frac{1}{2}} x = -4$.

А	Б	В	Г	Д
∅	–16	1/16	1/16; 16	16

16.3. Розв'язати рівняння $\log_2(-x) = 5$.

А ∅ Б 32 В –32 Г $\dfrac{1}{32}$ Д $-\dfrac{1}{32}$

16.4. Розв'язати рівняння $\lg(x^2 - x) = 1 - \lg 5$.

А ∅ Б –3; 2 В –2; 1 Г –2; 3 Д –1; 2

16.5. Скільки коренів має рівняння $\lg(x^4 - 10x^2) = \lg 3x^3$?

А Жодного Б один В два Г три Д чотири

16.6. Розв'язати рівняння $\log_6(x-2) + \log_6(x-1) = 1$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А (–2,1; –1,9) Б (3,9; 4,1) В (2,9; 3,1) Г (1,9; 3,1) Д (5,9; 6,1)

16.7. Розв'язати рівняння $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 1$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А (0,9; 1,1) Б (1,9; 2,1) В (2,9; 3,1) Г (3,9; 4,1) Д (5,9; 6,1)

16.8. Розв'язати рівняння $\log_2(x+1) + \log_2(x+2) = 3 - \log_2 4$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А (–1,1; –0,9) Б (–0,1; 0,1) В (0,9; 1,1) Г (1,9; 2,1) Д (3,9; 4,1)

16.9. Розв'язати рівняння $\log_2^2 x - 2\log_2 x - 3 = 0$ і вказати суму його коренів.

А –8,5 Б 7,5 В –2 Г 2 Д 8,5

16.10. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $\log_3 x + \log_9 x + \log_{81} x = 7$.

А $\log_3 x = \frac{49}{4}$ Б $\log_3 x = 1$ В $\log_3 x = 4$ Г $\log_3 x = -\frac{7}{5}$ Д $\log_3 x = 35$

16.11. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $x^{\lg x} = 10$.

А $2\lg x = 10$ Б $2\lg x = 1$ В $\lg^2 x = 10$ Г $\lg^2 x = 1$ Д $\lg^2 x = 2$

16.12. Указати рівняння, яке утворюється з рівняння $x^{\lg x} = 1000x^2$ у результаті логарифмування обох його частин.

А	Б	В	Г	Д
$\lg^2 x + 2\lg x + 1000 = 0$	$\lg^2 x - 2\lg x - 1000 = 0$	$\lg^2 x = 6\lg x$	$\lg^2 x + 2\lg x + 3 = 0$	$\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$

16.13. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $2\lg x^2 - \lg^2(-x) = 4$.

А	Б	В	Г	Д
$5\lg(-x) = 4$	$3\lg(-x) = 4$	$\lg^2 x - 4\lg x + 4 = 0$	$\lg^2(-x) - 4\lg(-x) + 4 = 0$	$\lg^2(-x) - 4\lg(-x) - 4 = 0$

16.14. Розв'язати рівняння $\log_a \log_b \log_c x = 0$.

А c^b Б a^{bc} В b^c Г a^c Д abc

16.15. Указати кількість коренів рівняння $\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x^4 + 24 = 0$.

А Чотири Б три В два Г один Д жодного

16.16. Розв'язати рівняння $\lg x \log_5 x = \lg 2$ і знайти суму його коренів.

А 2,5 Б 3,5 В 4,5 Г 10,5 Д 1

16.17. Розв'язати рівняння $5^{\log_5 x} + x^{\log_5 5} = 50$ і вказати проміжок, якому належить його корінь.

А (3,9; 4,1) Б (4,9; 5,1) В (5,9; 6,1) Г (6,9; 7,1) Д (8,9; 9,1)

16.18. Указати рівняння, рівносильне рівнянню $\lg x(x+9) + \lg\frac{x+9}{x} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\lg\|x+9\| = 0$	$\lg(x+9) = 0$	$\lg\|x\| = 0$	$\lg\|x-9\| = 0$	рівносильне рівняння відсутнє

16.19. Розв'язати рівняння $5^{2^x} = 7$.

А $\log_5\log_2 7$ Б $\log_2\log_5 7$ В $\log_7\log_5 2$ Г $\log_7\log_2 5$ Д $\log_2\log_7 5$

16.20. За якого значення параметра a рівняння $(x-a)\log_2(3x-8) = 0$ має один корінь?

А -3 Б -1 В 0 Г 1 Д 3

Завдання 16.21–16.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

16.21. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\log_2^2 x = 1$

2 $2\log_2 x - \log_2(2-x) = 0$

3 $2\cdot 3^x = -6$

А $\{1\}$

Б $\left\{\frac{1}{2}; 2\right\}$

В $\left\{\frac{1}{2}\right\}$

Г $\varnothing$

Д $\{-2; 1\}$

16.22. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\log_3(-x)=4$ 2 $\log_4 x=-3$ 3 $\log_3 x=-4$

А $-\frac{1}{64}$ Б $\frac{1}{64}$ В -64 Г $\frac{1}{81}$ Д -81

16.23. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $\log_2\log_3\log_4 x=0$
2 $\log_4\log_3\log_2 x=0$
3 $\log_3\log_2\log_4 x=0$

А 8
Б 9
В 16
Г 64
Д 81

16.24. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та добутками їх коренів (А–Д).

1 $\log_2^2 x+4\log_2 x+3=0$
2 $\log_2^2 x+2\log_2 x-3=0$
3 $\log_2^2 x-4\log_2 x+3=0$

А 4
Б 16
В 1/4
Г 1/2
Д 1/16

16.25. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $\lg^5 x-3\lg^3 x-4\lg x=0$
2 $\lg^4 x-5\lg^2 x+4=0$
3 $\lg^4 x+5\lg^2 x+4=0$

А Жодного
Б Два
В Три
Г Чотири
Д П'ять

16.26. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $5^{2^x}=9$
2 $2^{5^x}=9$
3 $2^{9^x}=5$

А $\log_5\log_9 2$
Б $\log_9\log_2 5$
В $\log_2\log_9 5$
Г $\log_5\log_2 9$
Д $\log_2\log_5 9$

Розв'яжіть завдання 16.27–16.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.

16.27. Розв'язати рівняння $\log_7(x-2)-\log_7(x+2)=1-\log_7(2x-7)$.

16.28. Розв'язати рівняння $\log_2\frac{x-5}{x+5}+\log_2(x^2-25)=0$.

16.29. Розв'язати рівняння $\lg^2 x^4-\lg x^{14}=2$. У відповідь записати найменший корінь рівняння.

16.30. Розв'язати рівняння $4\lg x^2-\lg^2(-x)=16$. У відповідь записати $x_0/1000$, де x_0 — корінь рівняння.

16.31. Розв'язати рівняння $\frac{1}{5-\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$. У відповідь записати модуль різниці коренів рівняння.

16.32. Розв'язати рівняння $\lg^2(100x)+\lg^2(10x)=14+\lg\frac{1}{x}$. У відповідь записати найбільший корінь.

16.33. Розв'язати рівняння $\log_5 x+\log_x 25=3$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.34. Розв'язати рівняння $\log_2 x\cdot\log_4 x\cdot\log_8 x=36$.

16.35. Розв'язати рівняння $x^{\lg x}=1000x^2$. У відповідь записати найменший корінь рівняння.

16.36. Розв'язати рівняння $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.37. Розв'язати рівняння $\sqrt{x^{\log_6 x}} = 10$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.38. Розв'язати рівняння $3\log_x 4 + 2\log_{4x} 4 + 3\log_{16x} 4 = 0$. У відповідь записати суму коренів рівняння.

16.39. Розв'язати рівняння $\left|\log_{\sqrt{5}} x - 4\right| - \left|\log_5 x - 4\right| = 1$. У відповідь записати добуток коренів рівняння.

16.40. Дано рівняння $\log_2^2 x^2 - 5\log_2 x^4 + 24 = 0$.

1) Указати кількість коренів рівняння;

2) знайти найбільший корінь рівняння.

Тема 17. Логарифмічні нерівності

Зміст матеріалу і компетентності, значення яких вимагає програма ЗНО:

- розв'язувати найпростіші нерівності, що містять логарифмічні вирази;
- застосовувати загальні методи та прийоми (розкладання на множники, заміна змінної, застосування властивостей і графіків функцій) у процесі розв'язування логарифмічних нерівностей;
- розв'язувати логарифмічні нерівності графічним методом;
- розв'язувати логарифмічні нерівності з параметрами.

Нерівність, яка містить змінну під знаком логарифма або в його основі, називають *логарифмічною*.

Наприклад, $\log_3 x < 3$, $\lg x + \lg(x+8) \geq \lg(4-5x)$ тощо.

Розв'язування логарифмічних нерівностей ґрунтується на властивості монотонності логарифмічної функції: функція $y = \log_a x$ монотонно зростає, якщо $a > 1$, і монотонно спадає, якщо $0 < a < 1$. При цьому слід урахувати, що підлогарифмічний вираз може набувати лише додатних значень.

Нерівності, що розв'язуються з використанням властивостей логарифмів

Розглянемо нерівність $\log_a f(x) > \log_a g(x)$. Одержимо: $\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1;\\0<g(x)<f(x);\end{cases}\\\begin{cases}0<a<1;\\0<f(x)<g(x).\end{cases}\end{array}\right.$

Наприклад, розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+18\right) < 2\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$.

ОДЗ: $x > 4$. Перепишемо задану нерівність у вигляді $\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2-6x+18\right) < \log_{\frac{1}{3}}(x-4)^2$. Оскільки $0 < \frac{1}{3} < 1$, то дана нерівність рівносильна системі: $\begin{cases}x^2-6x+18>(x-4)^2;\\x-4>0;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-6x+18>x^2-8x+16;\\x>4;\end{cases}$

$\begin{cases}2x+2>0;\\x>4;\end{cases}$ $\begin{cases}x>-1;\\x>4,\end{cases}$ $x > 4$. *Відповідь.* $(4; +\infty)$.

Нерівності виду $\log_a f(x) > b$ розв'язують так:

$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \log_a f(x) > b\log_a a \Leftrightarrow \log_a f(x) > \log_a a^b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}0<f(x)<a^b;\\0<a<1;\end{cases}\\\begin{cases}f(x)>a^b;\\a>1.\end{cases}\end{array}\right.$

Наприклад: 1) розв'язати нерівність $\log_2(8-x) < 1$.

Одержимо: $\log_2(8-x) < 1$; $0 < 8-x < 2$. Тоді $\begin{cases}8-x>0;\\8-x<2;\end{cases}$ $\begin{cases}x<8;\\x>6;\end{cases}$ $x \in (6; 8)$. *Відповідь.* $(6; 8)$;

2) розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\log_5\left(x^2-4\right) > 0$.

Запишемо дану нерівність у вигляді: $\log_{\frac{1}{2}}\log_5\left(x^2-4\right) > \log_{\frac{1}{2}}1$; $0 < \log_5\left(x^2-4\right) < 1$;

$\begin{cases}\log_5\left(x^2-4\right)<\log_5 5;\\\log_5\left(x^2-4\right)>\log_5 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2-4<5;\\x^2-4>1;\end{cases}$ $\begin{cases}x^2<9;\\x^2>5;\end{cases}$ $\begin{cases}x\in(-3;3);\\x\in\left(-\infty;\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};+\infty\right).\end{cases}$ Тоді спільний розв'язок:



$x \in \left(-3;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};3\right)$. *Відповідь.* $\left(-3;-\sqrt{5}\right)\cup\left(\sqrt{5};3\right)$.

Логарифмічні нерівності, які розв'язуються заміною змінної

Розв'язати нерівність $\log^2_{0,5} x + \log_{0,5} x - 2 \le 0$.

Нехай $\log_{0,5} x = t$. Перепишемо нерівність у вигляді: $t^2 + t - 2 \le 0$; $(t+2)(t-1) \le 0$ $t \in [-2; 1]$.

Повернемося до заміни: $\begin{cases} t_1 \ge -2; \\ t_2 \le 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \log_{0,5} x \ge -2; \\ \log_{0,5} x \le 1; \end{cases}$ $\begin{cases} \log_{0,5} x \ge \log_{0,5} 0,5^{-2}; \\ \log_{0,5} x \le \log_{0,5} 0,5; \end{cases}$ $\begin{cases} x \le 4; \\ x \ge 0,5; \end{cases}$ $x \in [0,5; 4]$.

Відповідь. $[0,5; 4]$.

Показниково-логарифмічні нерівності

Показниково-логарифмічними нерівностями називають нерівності виду $\left(g(x)\right)^{f(x)} \diamond a$, де $f(x)$ містить логарифмічну функцію, а знак $\diamond$ — один зі знаків $<, >, \le, \ge$.

Розв'язуючи такі нерівності, спочатку переконуємося, що обидві частини нерівності набувають тільки додатних значень, тобто що логарифми цих частин існують, і тоді логарифмуємо їх.

Наприклад, розв'язати нерівність $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2} \le 100$.

ОДЗ: $x > 0$. Обидві частини нерівності при $x > 0$ набувають тільки додатних значень, тобто логарифми обох частин існують. Прологарифмуємо дану нерівність за основою 10. Оскільки $10 > 1$, то одержимо: $\lg\left(\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x - 2}\right) \le \lg 100$; $(\lg x - 2)(\lg x - 1) \le 2$. Нехай $\lg x = t$, тоді маємо: $(t-2)(t-1) \le 2$; $t^2 - 3t \le 0$; $0 \le t \le 3$; $0 \le \lg x \le 3$; $\lg 1 \le \lg x \le \lg 10^3$; $1 \le x \le 1000$; $x \in [1; 1000]$. *Відповідь.* $[1; 1000]$.

Нерівності, які містять змінну під знаком логарифма й в основі логарифма

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > M \Leftrightarrow \log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} \left(\varphi(x)\right)^M \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1; \\ 0 < f(x) < \left(\varphi(x)\right)^M; \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi(x) > 1; \\ f(x) > \left(\varphi(x)\right)^M. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi(x) > 1; \\ 0 < g(x) < f(x); \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \varphi(x) < 1; \\ 0 < f(x) < g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Наприклад, розв'язати нерівність $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0$.

Перепишемо нерівність так: $\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > \log_x 1$. Нерівність рівносильна сукупності двох систем:

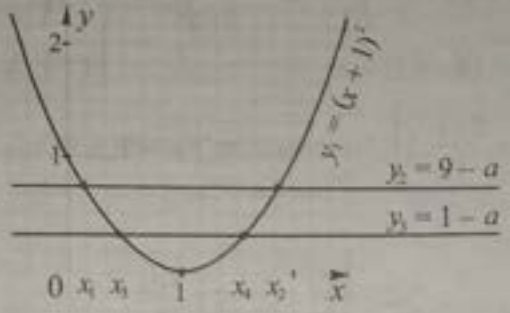
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1; \\ \frac{3x-1}{x^2+1} < 1; \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1; \\ \frac{3x-1}{x^2+1} > 1; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1; \\ 3x - 1 < x^2 + 1; \\ 3x - 1 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1; \\ 3x - 1 > x^2 + 1; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1; \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \\ x > 1/3; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1; \\ x^2 - 3x + 2 < 0; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{1}{3} < x < 1; \\ \left[\begin{array}{l} x > 2; \\ x < 1; \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1; \\ 1 < x < 2; \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} < x < 1; \\ 1 < x < 2. \end{array}\right. x \in \left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2).$$

Відповідь. $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$.

Логарифмічні нерівності з параметрами

Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x+a\right)>-3$.

Перепишемо дану нерівність у вигляді: $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2-2x+a\right)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$. Звідси випливає: $0<x^2-2x+a<8$; $0<(x-1)^2+a-1<8$; $1-a<(x-1)^2<9-a$. (1) Зобразимо на координатній площині графіки функцій $y_1=(x-1)^2$; $y_2=9-a$ та $y_3=1-a$.



З нерівності (1) та рисунка маємо: якщо $9-a\le 0$, тобто $a\ge 9$, то нерівність розв'язків не має.

Якщо $\begin{cases}9-a>0;\\1-a<0;\end{cases}$ $1<a<9$, то нерівність матиме розв'язки і ними будуть усі такі x, що $x_1<x<x_2$, де x_1 і x_2 — абсциси точок перетину параболи $y_1=(x-1)^2$ з прямою $y_2=9-a$, які обчислюють за формулою $x_{1,2}=1\pm\sqrt{9-a}$.

Якщо ж $\begin{cases}9-a>0;\\1-a\ge 0;\end{cases}$ $a\le 1$, то розв'язками вихідної нерівності є всі такі x, що $x_1<x<x_3$, $x_4<x<x_2$, де x_3 і x_4 — абсциси точок перетину параболи $y_1=(x-1)^2$ з прямою $y_2=1-a$, які обчислюють за формулою $x_{3,4}=1\pm\sqrt{1-a}$.

Відповідь. Якщо $a\le 1$, то $x\in(x_1;x_3)\cup(x_4;x_2)$; якщо $1<a<9$, то $x\in(x_1;x_2)$; якщо $a\ge 9$, то $x\in\varnothing$, де $x_1=1-\sqrt{9-a}$, $x_2=1+\sqrt{9-a}$; $x_3=1-\sqrt{1-a}$; $x_4=1+\sqrt{1-a}$.

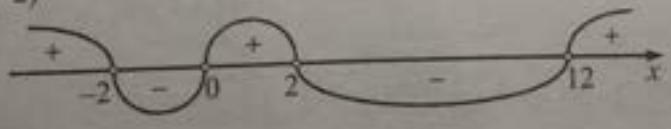
Приклад 1. Розв'язати нерівність $\log_3\left(x^2-5x-5\right)>2$.

■ Оскільки основа логарифмів $3>1$, то дана нерівність рівносильна такій: $x^2-5x-5>3^2$; $x^2-5x-14>0$; $(x+2)(x-7)>0$; $x\in(-\infty;-2)\cup(7;+\infty)$. *Відповідь.* $(-\infty;-2)\cup(7;+\infty)$. ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x-3}{x^2+2x}<3$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-2)\cup(2;12)$	$(2;12)$	$(-2;0)\cup(2;12)$	$(-\infty;-2)\cup(0;2)\cup(12;+\infty)$	$\varnothing$

■ $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x-3}{x^2+2x}<3$; $\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x-3}{x^2+2x}<\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8}$. Оскільки $\frac{1}{2}<1$, то $\frac{2x-3}{x^2+2x}>\frac{1}{8}$; $\frac{16x-24-x^2-2x}{8(x^2+2x)}>0$; $\frac{x^2-14x+24}{x^2+2x}<0$; $\frac{(x-2)(x-12)}{x(x+2)}<0$. $x\in(-2;0)\cup(2;12)$. *Відповідь.* **В.** ■



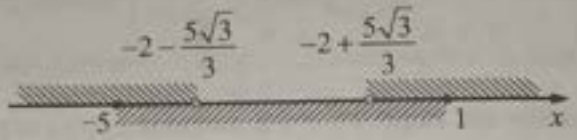
Приклад 3. Знайти цілі розв'язки нерівності $\sqrt{\log_{\frac{1}{3}}\left(x^2+4x-4\right)}<1$. У відповідь записати їх суму.

■ Дана нерівність рівносильна подвійній нерівності: $0\le\log_{1/3}\left(x^2+4x-4\right)<1$. Перетворимо останню нерівність: $\log_{1/3}1\le\log_{1/3}\left(x^2+4x-4\right)<\log_{1/3}\frac{1}{3}$. Врахувавши, що $\frac{1}{3}<1$, одержимо: $\frac{1}{3}<x^2+4x-4\le1$,

звідки: $\begin{cases}3x^2+12x-13>0;\\ x^2+4x-5\le0;\end{cases}$ $\begin{cases}\left(x+2+\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\left(x+2-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)>0;\\ (x-1)(x+5)\le0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\in\left(-\infty;-2-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(-2+\frac{5\sqrt{3}}{3};+\infty\right);\\ x\in[-5;1].\end{cases}$

Отже, $x\in\left[-5;-2-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(-2+\frac{5\sqrt{3}}{3};1\right]$. Цілими розв'язками є –5 і 1. Їхня сума дорівнює $-5+1=-4$.

Відповідь. –4. ■



Приклад 4. Розв'язати нерівність $\log_{\cos1}\log_8\left(x^2+6x+1\right)>0$.

■ $\log_{\cos1}\log_8\left(x^2+6x+1\right)>0$; $\log_{\cos1}\log_8\left(x^2+6x+1\right)>\log_{\cos1}1$. Оскільки основа логарифма $0<\cos1<1$, то дана нерівність рівносильна такій подвійній нерівності: $0<\log_8\left(x^2+6x+1\right)<1$;

$\log_8 1<\log_8\left(x^2+6x+1\right)<\log_8 8$; $1<x^2+6x+1<8$; $0<x^2+6x<7$; $\begin{cases}x(x+6)>0;\\ (x+7)(x-1)<0;\end{cases}$ $\begin{cases}x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty);\\ x\in(-7;1).\end{cases}$

$x\in(-7;-6)\cup(0;1)$. *Відповідь.* $(-7;-6)\cup(0;1)$. ■

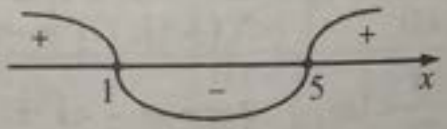


Приклад 5. Знайти суму цілих розв'язків нерівності $\log_5^2 x+(2x-7)\log_5 x+x^2-7x+6\le0$.

■ Ліву частину нерівності розглянемо як квадратний тричлен відносно $\log_5 x$. Нехай $\log_5 x=t$. Знайдемо корені рівняння: $t^2+(2x-7)t+x^2-7x+6=0$; $D=(2x-7)^2-4\cdot(x^2-7x+6)=$

$=4x^2-28x+49-4x^2+28x-24=25$; $t_{1,2}=\frac{(7-2x)\pm5}{2}$; $t_1=-x+1$, $t_2=-x+6$. Повернемося до заміни: $(\log_5 x+x-1)(\log_5 x+x-6)\le0$. Функції $t_1=\log_5 x+x-1$ та $t_2=\log_5 x+x-6$ є зростаючими і перетворюються у нуль, якщо $x_1=1$ або $x_2=5$ відповідно.

Отже, знаки лівої частини нерівності такі:



Тоді $x\in[1;5]$. Цілими розв'язками є числа від 1 до 5, а їхня сума дорівнює $1+2+3+4+5=15$.

Відповідь. 15. ■

Завдання 17.1–17.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

17.1. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_3(x-4) \le \log_3 8$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 12)$	$(-\infty; 12]$	$[4; 12]$	$(4; 12]$	$(0; 12]$

17.2. Розв'язати нерівність $\log_{0,1}(2x-5) > \log_{0,1} x$.

А	Б	В	Г	Д
$(2,5; +\infty)$	$(5; +\infty)$	$(-\infty; 5)$	$(0; 5)$	$(2,5; 5)$

17.3. Розв'язати нерівність $\log_\pi x > \log_\pi 3 + \log_\pi 5$.

А $(15; +\infty)$ **Б** $(-\infty; 15)$ **В** $(0; 15)$ **Г** $(8; +\infty)$ **Д** $(0; 8)$

17.4. Розв'язати нерівність $\log_{0,1}(2x-1) \ge \log_{0,1} 10 - \log_{0,1} 2$.

А $(0; 3]$ **Б** $[3; +\infty)$ **В** $(-\infty; 3]$ **Г** $(0,5; 3]$ **Д** $(0,5; 4,5]$

17.5. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_{\sin 1} x > 2\log_{\sin 1} 7$.

А $(49; +\infty)$ **Б** $(0; 49)$ **В** $(14; +\infty)$ **Г** $(0; 14)$ **Д** $(-\infty; 49)$

17.6. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_5 x < 2$.

А $(-\infty; 25)$ **Б** $(25; +\infty)$ **В** $(0; 25)$ **Г** $(0; 2)$ **Д** $(-\infty; 2)$

17.7. Скільки цілих чисел є розв'язками нерівності $\log_{\frac{1}{2}}(x+3) \ge -1$?

А Одне **Б** два **В** три **Г** жодне **Д** більше, ніж три

17.8. Розв'язати нерівність $\log_8(3x-10) < \frac{1}{3}$.

А $\left(0; 3\frac{1}{3}\right)$ **Б** $\left(-\infty; 3\frac{1}{3}\right)$ **В** $(4; +\infty)$ **Г** $(-\infty; 4)$ **Д** $\left(3\frac{1}{3}; 4\right)$

17.9. Указати найбільший цілий розв'язок нерівності $\log_{\frac{1}{7}}(x+3) > -1$.

А 6 **Б** 7 **В** 4 **Г** 3 **Д** –3

17.10. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{5}\right)^{\log_{\frac{1}{7}}(2-x)} < 2$.

А $(-\infty; 2)$ **Б** $(-\infty; 0)$ **В** $(0; +\infty)$ **Г** $(0; 2)$ **Д** $(2; +\infty)$

17.11. Скільки цілих розв'язків має нерівність $-2 < \log_{\frac{1}{2}} x < 3$?

А Один **Б** два **В** три **Г** жодного **Д** більше, ніж три

17.12. Розв'язати нерівність $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 \le 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]\cup[2; +\infty)$	$[1; 2]$	$[3; 9]$	$(-\infty; 3]\cup[9; +\infty)$	$(3; 9)$

17.13. Розв'язати нерівність $\lg^2 x - 4\lg x + 3 \ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]\cup[3; +\infty)$	$(0; 1]\cup[3; +\infty)$	$[10; 1000]$	$(-\infty; 10]\cup[1000; +\infty)$	$(0; 10]\cup[1000; +\infty)$

17.14. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{3}}(\log_5 x) \geq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{1}{3}; 5\right]$	$(1; 5]$	$(0; 1]$	$(-\infty; 0]\cup[1; +\infty)$	$(-\infty; 1]\cup(5; +\infty)$

17.15. Скільки цілих розв'язків має нерівність $\frac{\sqrt{x+3}}{\log_2(2x-3)} \leq 0$?

А Жодного **Б** один **В** два **Г** три **Д** більше, ніж три

17.16. Знайти множину розв'язків нерівності $\log_x 5 < 1$.

А $(0; 1)\cup(1; +\infty)$ **Б** $(0; 1)\cup(5; +\infty)$ **В** $(0; +\infty)$ **Г** $(0; 5)\cup(5; +\infty)$ **Д** $(0; 1)\cup(1; 5)$

17.17. Указати цілі розв'язки нерівності $\log_{\frac{x+1}{3}} 2 < 0$.

А 1; 2 **Б** 1 **В** 0; 1 **Г** 0; 1; 2 **Д** 2; 3

17.18. Розв'язати нерівність $\log_9 (x+3)^2 \leq 1$.

А	Б	В	Г	Д
$[-6; 0]$	$[-6; -3)\cup(-3; +\infty)$	$(-\infty; -6]\cup[0; +\infty)$	$(-\infty; -6)\cup(0; +\infty)$	$[-6; -3)\cup(-3; 0]$

17.19. Розв'язати нерівність $(x-2)\log_{0,5} x \leq 0$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 1]\cup[2; +\infty)$	$[1; 2]$	$(0; 1]\cup[2; +\infty)$	$(0; 2]$	$(0; 1)\cup(2; +\infty)$

17.20. Розв'язати нерівність $x^x < 1$ $(x > 0)$, застосувавши логарифмування.

А $(1; +\infty)$ **Б** $(0; +\infty)$ **В** $(0; 1)$ **Г** $(-\infty; 0)\cup(0; 1)$ **Д** 1

17.21. Розв'язати нерівність $\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right| \leq 1$.

А $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$ **Б** $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ **В** $\left(0; \frac{1}{2}\right]$ **Г** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ **Д** $[2; +\infty)$

17.22. Розв'язати нерівність $|\log_3 x| \geq 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{1}{3}; 3\right]$	$[3; +\infty)$	$\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right)\cup[3; +\infty)$	$\left(0; \frac{1}{3}\right]\cup[3; +\infty)$	$\left[-\frac{1}{3}; 0\right)\cup[3; +\infty)$

Завдання 17.23–17.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

17.23. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та рівносильними їм нерівностями або системами (А–Д).

1 $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > -2$

2 $\log_2(x+1) > 2$

3 $2^{x+1} < 16$

А $x+1 > 4$

Б $x+1 < 4$

В $\begin{cases} x+1 < 4; \\ x+1 > 0 \end{cases}$

Г $x+1 > -2$

Д $x+1 < -2$

17.24. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_4 x < 0$

2 $\log_4 x > 0$

3 $\log_4(-x) < 0$

А $(-\infty; -1)$
Б $(-\infty; 1)$
В $(1; +\infty)$
Г $(-1; 0)$
Д $(0; 1)$

17.25. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_{0,5} x < 0$
2 $\log_{0,5} x > 0$
3 $\log_{0,5}(-x) < 0$

А $(-\infty; -1)$
Б $(-\infty; 1)$
В $(1; +\infty)$
Г $(-1; 0)$
Д $(0; 1)$

17.26. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_9 x < \frac{1}{2}$

2 $\log_{\frac{1}{3}} x > -2$

3 $\log_{\frac{1}{9}} x < -\frac{1}{2}$

А $(0; 9)$
Б $(9; +\infty)$
В $\left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$
Г $(0; 3)$
Д $(3; +\infty)$

17.27. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_5(x-2) < \log_5(-x)$

2 $\log_{\frac{1}{5}}(2-x) < \log_{\frac{1}{5}}(-x)$

3 $\log_5(x+2) > \log_5(-x)$

А $(-1; +\infty)$
Б $(-1; 0)$
В $(-2; -1)$
Г $(-\infty; 0)$
Д $\varnothing$

17.28. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та множинами їх розв'язків (А–Д).

1 $\log_2(\log_5 x) < 0$

2 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_5 x) < 0$

3 $\log_5(\log_2 x) < 0$

А $(0; 0,5)$
Б $(1; 2)$
В $(1; 5)$
Г $(-\infty; 5)$
Д $(5; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 17.29–17.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

17.29. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) > -1$. У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.

17.30. Розв'язати нерівність $\lg(x-2) + \lg(27-x) < 2$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності.

17.31. Розв'язати нерівність $\lg x + 6\log_x 10 \le 5$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків.

17.32. Розв'язати нерівність $\lg^2(-x) + \lg x^2 - 3 < 0$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків.

17.33. Розв'язати нерівність $\lg^2 100x - 5\lg x > 6$. У відповідь записати кількість натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

17.34. Розв'язати нерівність $9^{\log_3^2 x} < 4x^{\log_3 x} - 3$. У відповідь записати суму всіх натуральних розв'язків нерівності.

17.35. Розв'язати нерівність $\log_{x^2}\frac{2x}{x-3}\le\frac{1}{2}$. У відповідь записати суму всіх цілих чисел, які не є розв'язками нерівності.

17.36. Розв'язати нерівність $\log_x 2\cdot\log_{2x}2\cdot\log_2 4x>1$. У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.

17.37. Розв'язати нерівність $x^{\frac{3x-1}{2-x}}>1$. У відповідь записати найменше натуральне число, яке не є розв'язком нерівності.

17.38. Розв'язати нерівність $\log_2(5-x)\log_{x+1}\frac{1}{8}\ge-6$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

17.39. Розв'язати нерівність $\log_{\frac{1}{2}}|x|\ge|x|-1$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків нерівності.

17.40. Розв'язати нерівність $\log_x 3x\le\sqrt{\log_x\left(3x^7\right)}$. У відповідь записати добуток усіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

17.41. Розв'язати нерівність $\log_{x+1}|x-2|\le 1$. У відповідь записати суму всіх натуральних чисел, які не є розв'язками нерівності.

17.42. Дано функцію $f(x)=\lg^2 x+\lg x^2-3$. **1)** Знайти нулі функції. У відповідь записати найменше значення; **2)** установити проміжки, де функція набуває від'ємних значень. У відповідь записати найменше ціле значення.

Тема 18. Тригонометричні рівняння

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— розв'язувати найпростіші рівняння, що містять тригонометричні вирази;
— застосовувати загальні методи та прийоми (розкладання на множники, заміна змінної, застосування властивостей і графіків функцій) у процесі розв'язування тригонометричні рівнянь;
— розв'язувати тригонометричні рівняння графічним методом;
— розв'язувати тригонометричні рівняння з параметрами.

Тригонометричними називають рівняння, які містять змінну під знаком тригонометричних функцій.

Найпростіші тригонометричні рівняння

Рівняння виду $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$, де x — невідома величина, a — довільне дійсне число, називають *найпростішими тригонометричними рівняннями*.

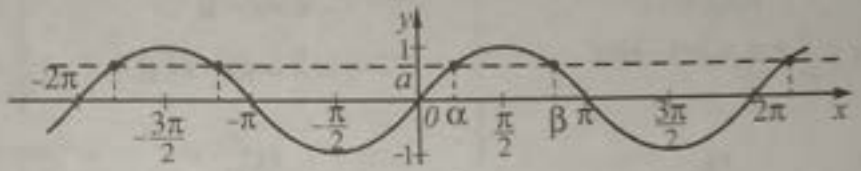
1. Рівняння $\sin x = a$.

Оскільки $-1 \le \sin x \le 1$ для будь-якого x, то якщо $a > 1$ або $a < -1$, рівняння $\sin x = a$ не має коренів. Для того, щоб розв'язати рівняння $\sin x = a$, досить знайти на одиничному колі або графіку відповідної функції такі точки, ординати яких дорівнюють a. Якщо пряма $y = a$ перетинає одиничне коло (графік) у точках M_α і M_β, то кути α і β є коренями рівняння $\sin x = a$.

$\sin x = a$

Якщо $|a| \le 1$, то $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$.





$\alpha = \arcsin a;\ \beta = \pi - \arcsin a$

Окремі випадки

$\sin x = -1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$



$\sin x = 0$

$x = \pi k,\ k \in Z$



$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$



Наприклад:

1. Розв'язати рівняння $\sin x = \frac{1}{2}$. $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k,\ k \in Z$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

Відповідь. $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

2. Розв'язати рівняння $\sin x = -\frac{1}{2}$. Маємо: $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z$; $x = (-1)^k \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi k,\ k \in Z$; $x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$. *Відповідь.* $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$.

3. Знайти найменший розв'язок рівняння $\sqrt{2} - 2\sin \frac{\pi x}{9} = 0$, який задовольняє умову $0 < x < 10$.

Запишемо рівняння у вигляді: $\sin \frac{\pi x}{9} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тоді $\frac{\pi x}{9} = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$; $x = (-1)^k \frac{9}{4} + 9k,\ k \in Z$. Якщо

$k<0$, то $x<0$; якщо $k=0$, то $x=(-1)^0\frac{9}{4}+9\cdot 0=2{,}25$, якщо $k=1$, то $x=(-1)^1\frac{9}{4}+9\cdot 1=-2{,}25+9=6{,}75$. Оскільки $0<x<10$, то найменший розв'язок з цього проміжку дорівнює 2,25. *Відповідь.* 2,25.

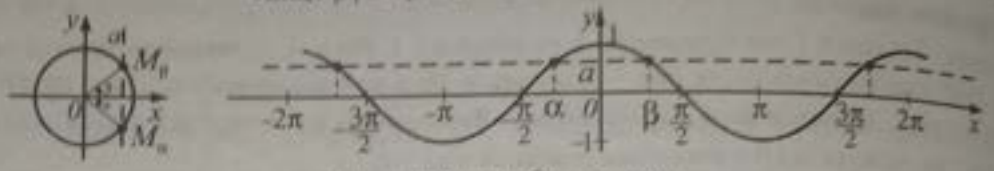
4. Розв'язати рівняння $\sin(\pi\cdot 4^x)=0$. $\pi\cdot 4^x=\pi k$, $k\in Z$; $4^x=n$, $n\in N$, бо показникова функція набуває лише додатних значень, звідки $x=\log_4 n$. *Відповідь.* $\log_4 n$, $n\in N$.

2. Рівняння $\cos x=a$.

Оскільки $-1\le\cos x\le 1$ для будь-якого x, то якщо $a>1$ або $a<-1$, рівняння $\cos x=a$ не має коренів. Для того, щоб розв'язати рівняння $\cos x=a$, досить знайти на одиничному колі або графіку відповідної функції такі точки, абсциси яких дорівнюють a. Якщо пряма $x=a$ перетинає одиничне коло (графік) у точках M_α і M_β, то кути α і β є коренями рівняння $\cos x=a$.

$\cos x=a$

Якщо $|a|\le 1$, то $x=\pm\arccos a+2\pi k$, $k\in Z$.



$\alpha=-\arccos a$; $\beta=\arccos a$

Окремі випадки

$\cos x=-1$	$\cos x=0$	$\cos x=1$
$x=\pi+2\pi k$, $k\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in Z$	$x=2\pi k$, $k\in Z$
		

Наприклад:

1. Розв'язати рівняння $2\cos x=1$. Запишемо рівняння у вигляді: $\cos x=\frac{1}{2}$; $x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. *Відповідь.* $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

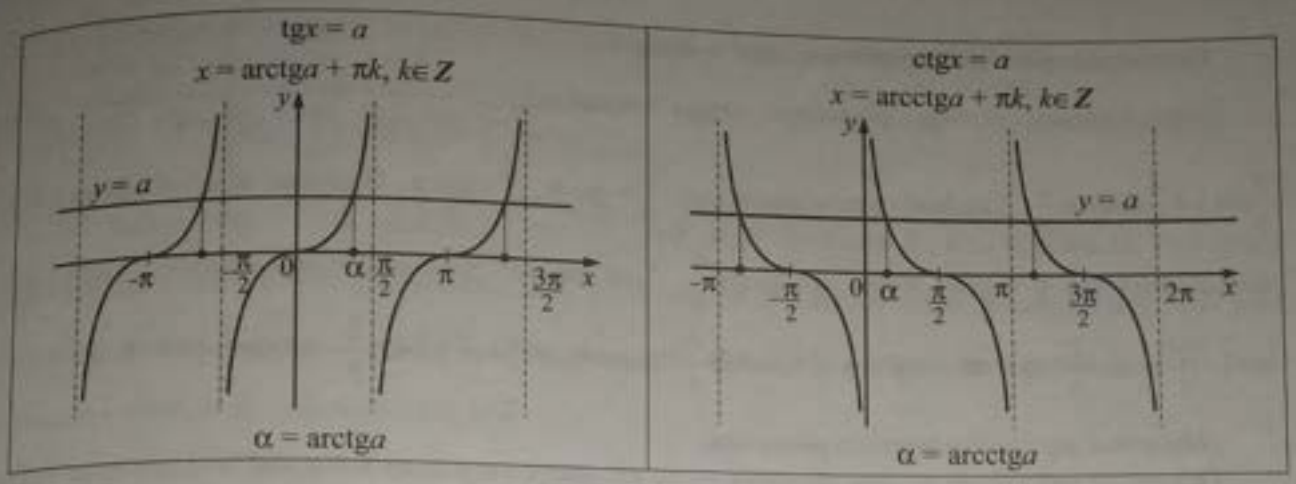
2. Розв'язати рівняння $\cos 4x=-\frac{1}{2}$. Нехай $4x=t$, тоді $\cos t=-\frac{1}{2}$; $t=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k$, $k\in Z$; $t=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$. Повернемося до заміни: $4x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $x=\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Відповідь. $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

3. Рівняння $\operatorname{tg}x=a$ і $\operatorname{ctg}x=a$.

Для будь-якого дійсного числа a на проміжку $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ існує тільки один кут α такий, що $\operatorname{tg}\alpha=a$. Це кут $\alpha=\operatorname{arctg}a$. Враховуючи періодичність функції $y=\operatorname{tg}x$, одержуємо формулу коренів рівняння $\operatorname{tg}x=a$: $x=\operatorname{arctg}a+\pi k$, $k\in Z$.

Для будь-якого дійсного числа a на проміжку $(0;\pi)$ існує тільки один кут α такий, що $\operatorname{ctg}\alpha=a$. Це кут $\alpha=\operatorname{arcctg}a$. Враховуючи періодичність функції $y=\operatorname{ctg}x$, одержуємо формулу коренів рівняння $\operatorname{ctg}x=a$: $x=\operatorname{arcctg}a+\pi k$, $k\in Z$.



Наприклад, розв'язати рівняння $3\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)+\sqrt{3}=0$. Запишемо дане рівняння у вигляді $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{6}-2x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Скористаємося формулами зведення й одержимо: $\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}-2x\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg}\left(\pi-\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $-\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\operatorname{tg}\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Уведемо заміну $t=2x+\frac{\pi}{6}$. Маємо: $\operatorname{tg}t=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $t=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi k$, $k\in Z$; $t=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$. Повернемося до заміни: $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$; $2x=\pi k$, $k\in Z$; $x=\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$. *Відповідь.* $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

Рівняння, які зводяться до квадратних

Нехай потрібно розв'язати рівняння $4\cos^2\frac{x}{2}-8\cos\frac{x}{2}+3=0$. Уведемо нову змінну: $\cos\frac{x}{2}=t$, звідки одержимо рівняння: $4t^2-8t+3=0$; $\left[\begin{array}{l}t_1=1/2;\\t_2=1{,}5.\end{array}\right.$ Повернемося до заміни та розв'яжемо одержані рівняння: 1) $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$; $\frac{x}{2}=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k$, $k\in Z$; $\frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in Z$; $x=\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$;

2) $\cos\frac{x}{2}=1{,}5$; $x\in\varnothing$. *Відповідь.* $\pm\frac{2\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$.

Рівняння виду asinx + bcosx = c, де a, b, c∈R

Рівняння цього виду розв'язують за допомогою введення допоміжного кута. Вважаючи, що $a^2+b^2\neq 0$, поділимо обидві частини вихідного рівняння на $\sqrt{a^2+b^2}$ й одержимо:

$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Одержані коефіцієнти при sinx і cosx мають такі властивості: $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|\le 1$, $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2=1$, тому можна стверджувати, що існує такий кут φ, що, наприклад, $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$. Тоді останнє рівняння зводиться до найпростішого: $\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\sin(x+\varphi)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Наприклад, розв'язати рівняння $3\sin x + 4\cos x = 2$.

Перетворимо задане рівняння: $3\sin x + 4\cos x = 2$; $\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin x + \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos x = \frac{2}{\sqrt{3^2+4^2}}$;

$\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{2}{5}$. Уведемо допоміжний кут: $\frac{3}{5} = \cos\varphi$, $\frac{4}{5} = \sin\varphi$. Оскільки $\sin\varphi > 0$ і $\cos\varphi > 0$, то за допоміжний кут φ можна взяти $\varphi = \arcsin\frac{4}{5}$. Тоді маємо: $\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{2}{5}$; $\sin(x+\varphi) = \frac{2}{5}$;

$x = (-1)^k \arcsin\frac{2}{5} - \varphi + \pi k$, $k \in Z$, де $\varphi = \arcsin\frac{4}{5}$. *Відповідь.* $(-1)^k \arcsin\frac{2}{5} - \arcsin\frac{4}{5} + \pi k$, $k \in Z$.

Однорідні тригонометричні рівняння

Однорідні тригонометричні рівняння — це рівняння виду $a_0\sin^n x + a_1\sin^{n-1}x\cos x + a_2\sin^{n-2}x\cos^2 x + \ldots + a_{n-1}\sin x\cos^{n-1}x + a_n\cos^n x = 0$, де a_0, a_1, a_2, ..., a_n — дійсні числа, $n \geq 1$. Таке рівняння легко звести до рівняння відносно tg$x$, якщо всі його члени поділити на $\cos^n x$. При цьому, якщо $a_0 \neq 0$, то ділення не спричиняє втрати коренів. Справді, якщо $\cos x = 0$, то початкове рівняння набуває вигляду $a_0\sin^n x = 0$, звідки $\sin x = 0$, що неможливо, оскільки $\cos x$ і $\sin x$ одночасно не можуть дорівнювати нулю.

Наприклад, розв'язати рівняння $3\sin^2 x - 2\sin x\cos x - \cos^2 x = 0$. Поділимо обидві частини рівняння на $\cos^2 x \neq 0$: $3\mathrm{tg}^2 x - 2\mathrm{tg}x - 1 = 0$. Уведемо заміну $\mathrm{tg}x = t$ й матимемо: $3t^2 - 2t - 1 = 0$; $t_1 = -\frac{1}{3}$; $t_2 = 1$.

Повернемося до заміни: 1) $\mathrm{tg}\,x = -\frac{1}{3}$; $x = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi k$, $k \in Z$; $x = -\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in Z$;

2) $\mathrm{tg}\,x = 1$; $x = \mathrm{arctg}1 + \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$. *Відповідь.* $-\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$.

Дробово-раціональні тригонометричні рівняння

Складність розв'язування рівнянь цього типу полягає у формуванні відповіді. Основною складністю при розв'язуванні дробово-раціональних тригонометричних рівнянь є відбір його коренів.

Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{\cos x + \cos 3x}{\sin 2x} = 0$.

ОДЗ: $\sin 2x \neq 0$; $2x \neq \pi k$, $k \in Z$; $x \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. Розв'яжемо рівняння $\cos x + \cos 3x = 0$;

$2\cos\frac{x+3x}{2}\cos\frac{x-3x}{2} = 0$; $2\cos 2x\cos x = 0$.

Тоді $\left[\begin{array}{l}\cos x = 0;\\ \cos 2x = 0;\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;\\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z.\end{array}\right.$



Зобразимо на одиничному колі точки, які відповідають кореням рівняння $\cos x = 0$ і $\cos 2x = 0$ і закреслимо точки, які не входять в ОДЗ.

Отже, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$ — корені рівняння. *Відповідь.* $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$.

Розв'язування рівнянь на застосування обмеженості функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

Наприклад, розв'язати рівняння $\cos 3x + \cos\frac{5x}{2} = 2$.

Маємо: $|\cos 3x| \leq 1$, $\left|\cos\frac{5x}{2}\right| \leq 1$, тоді $\cos 3x + \cos\frac{5x}{2} \leq 2$, до того ж рівність виконується лише тоді,

коли: $\begin{cases}\cos 3x = 1;\\ \cos\frac{5x}{2} = 1;\end{cases}$ $\begin{cases}x = \frac{2\pi n}{3}, n \in Z;\\ x = \frac{4\pi k}{5}, k \in Z.\end{cases}$ Прирівнюючи праві частини цих рівностей, одержуємо: $\frac{2\pi n}{3} = \frac{4\pi k}{5}$, звідки $10\pi n = 12\pi k$, $n \in Z$, $k \in Z$; $n = \frac{6k}{5}$, $n \in Z$, $k \in Z$. Оскільки n і k — цілі числа, то в праву частину замість k можна підставити лише цілі числа кратні 5. Тому останнє рівняння має розв'язки лише у цілих числах виду $k = 5l$, $l \in Z$. Підставляючи значення $k = 5l$ в розв'язок системи $x = \frac{4\pi k}{5}$, одержуємо, що $x = 4\pi l$, $l \in Z$. *Відповідь.* $4\pi l$, $l \in Z$.

Тригонометричні рівняння з параметрами

Розв'язати рівняння $a\sin^2 x + 2(a+2)\sin x + 8 = 0$.

Задане рівняння відносно $\sin x$ є або лінійним, якщо $a = 0$, або квадратним, якщо $a \neq 0$.

а) $a = 0$: $4\sin x + 8 = 0$; $\sin x = -2$; $x \in \varnothing$;

б) $a \neq 0$. Уведемо заміну $\sin x = t$ й одержимо: $at^2 + 2(a+2)t + 8 = 0$; $\frac{D}{4} = (a+2)^2 - 8a = (a-2)^2$;

$t_{1,2} = \frac{-(a+2) \pm (a-2)}{a}$; $t_1 = -2$; $t_2 = -\frac{4}{a}$. Повернемося до заміни: 1) $\sin x = -2$; $x \in \varnothing$;

2) $\sin x = -\frac{4}{a}$. Якщо $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$, то $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{4}{a}\right) + \pi k$, $k \in Z$; якщо $a \in (-4; 4)$, то $x \in \varnothing$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$, то $x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{4}{a} + \pi k$, $k \in Z$; якщо $a \in (-4; 4)$, то $x \in \varnothing$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi k, k \in Z$	$x = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi k}{5}, k \in Z$	$x = -\frac{\pi}{60} + \pi k, k \in Z$	$x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$	$x = \frac{\pi}{4} + 3\pi k, k \in Z$

■ $\operatorname{tg}\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$; $5x + \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi k$, $k \in Z$; $5x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$; $5x = \frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{60} + \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 2. Розв'язати рівняння $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$	$-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$	$\pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$	$\pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

■ $\cos 2x = -\frac{1}{2}$; $2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 3. Знайти найбільший від'ємний корінь рівняння $\cos 3x = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{3}$	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	$\frac{k\pi}{3}, k \in Z$	$-\frac{\pi}{2}$

■ $\cos 3x = 1$; $3x = 2k\pi$, $k \in Z$, $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in Z$. Найбільший від'ємний корінь одержимо, якщо $k = -1$

Отже, $x = -\frac{2\pi}{3}$. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi k}{2}$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in Z$	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$	$\frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$	$\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in Z$	πk; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $k, n \in Z$

■ $\cos 3x + \sin 2x - \cos x = 0$. $-2\sin 2x \cdot \sin x + \sin 2x = 0$; $\sin 2x \cdot (1 - 2\sin x) = 0$;

1) $\sin 2x = 0$; $2x = \pi k, k \in Z$; $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. **2)** $1 - 2\sin x = 0$; $\sin x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. *В-дь.* **А.** ■

Приклад 5. Розв'язати рівняння $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$2\pi k$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in Z$	$2\pi k$, $k \in Z$	$\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$	$2\pi k$, $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in Z$	$2\pi k$, $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $k, n \in Z$

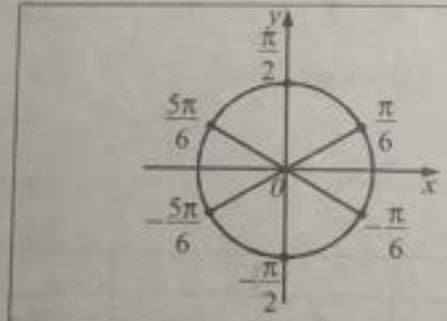
■ $2\sin^2 x + \cos x - 1 = 0$; $2(1 - \cos^2 x) + \cos x - 1 = 0$; $-2\cos^2 x + \cos x + 1 = 0$; $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$;

$(\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0$; $\cos x = 1$; $x = 2\pi k$, $k \in Z$ або $\cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$. *В-дь.* **Г.** ■

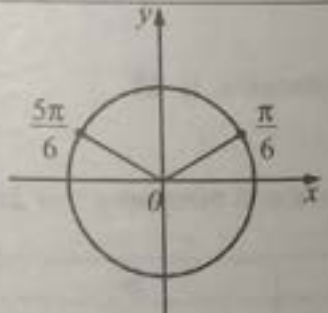
Приклад 6. Розв'язати рівняння $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$. У відповідь записати найменший додатний корінь (у градусах).

■ $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x - 2\sin x \cos 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 3x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 3x = 0; \\ 1 - 2\sin x = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z; \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$ Зобразимо множину розв'язків на одиничному колі.



а) $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$



б) $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

Множина розв'язків $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$ є підмножиною множини $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$. Тому відповіддю є $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$. Найменший додатний корінь дорівнює $\frac{\pi}{6} = 30°$. *Відповідь.* $30°$. ■

Приклад 7. Розв'язати рівняння $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$. У відповідь записати кількість коренів, які належать проміжку $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$.

■ Перетворимо вихідне рівняння:

$\cos^2x+\cos^22x+\cos^23x+\cos^24x=2 \Leftrightarrow \frac{1+\cos2x}{2}+\frac{1+\cos4x}{2}+\frac{1+\cos6x}{2}+\frac{1+\cos8x}{2}=2 \Leftrightarrow$

$(\cos8x+\cos2x)+(\cos6x+\cos4x)=0;\ 2\cos5x\cdot\cos3x+2\cos5x\cdot\cos x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos5x(\cos3x+\cos x)=0 \Leftrightarrow 4\cos5x\cdot\cos2x\cdot\cos x=0 \Leftrightarrow x_1=\frac{\pi}{2}+\pi n=\pi\frac{2n+1}{2}, n\in Z;$

$x_2=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}=\pi\frac{2k+1}{4}, k\in Z;\ \ x_3=\frac{\pi}{10}+\frac{\pi m}{5}=\pi\frac{2m+1}{10}, m\in Z.$ Проміжку $\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ належать три корені: $\pi/10,\ 3\pi/10,\ \pi/4$. *Відповідь.* 3. ■

Приклад 8. За яких значень параметра a рівняння $\sin^4x+\cos^4x=a$ має корені? У відповідь записати найменший з них.

■ Маємо: $\sin^4x+\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)^2-2\sin^2x\cos^2x=1-2\sin^2x\cos^2x=1-\frac{1}{2}\sin^22x=$

$=1-\frac{1}{4}(1-\cos4x)=\frac{1}{4}(\cos4x+3)$. Тоді дане рівняння рівносильне такому: $\frac{1}{4}(\cos4x+3)=a$, або $\cos4x=4a-3$. Воно має корені, якщо виконується умова $-1\le 4a-3\le 1$, звідки $a\in[0{,}5;\ 1]$. Найменшим значення є 0,5. *Відповідь.* 0,5. ■

Приклад 9. За яких значень параметра a рівняння $\sin2x+(a+2)(\sin x-\cos x)=2a+1$ має принаймні один корінь? У відповідь записати кількість цілих значень a.

■ Перетворимо рівняння: $\sin2x+(a+2)(\sin x-\cos x)=2a+1;\ -(1-\sin2x)+(a+2)(\sin x-\cos x)=$ $=2a;\ -(\sin^2x-2\sin x\cos x+\cos^2x)+(a+2)(\sin x-\cos x)=2a;\ (\sin x-\cos x)^2-(a+2)(\sin x-\cos x)+2a=0$. Уведемо заміну: $\sin x-\cos x=t$. Тоді одержимо рівняння: $t^2-(a+2)t+2a=0;\ t_1=2,\ t_2=a$. Повернемося до заміни: $\sin x-\cos x=2$ або $\sin x-\cos x=a$. Оскільки одночасно $\sin x=1, \cos x=-1$ не може бути, то рівняння $\sin x-\cos x=2$ коренів не має, а рівняння $\sin x-\cos x=a;\ \sin(x-45^\circ)=a/\sqrt{2}$ має корені тільки у випадку виконання умови $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$. Проміжок $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ містить такі цілі числа: $-1,\ 0,\ 1$. Їх кількість дорівнює 3. *Відповідь.* 3. ■

Завдання 18.1–18.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

18.1. Розв'язати рівняння $2\sin x=-1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},$ $n\in Z$	$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},$ $n\in Z$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n\in Z$	$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2},$ $n\in Z$	$x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n,$ $n\in Z$

18.2. Розв'язати рівняння $\sin\pi x=1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$	$x=\frac{\pi^2}{2}+2\pi^2n, n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$	$x=\frac{1}{2}+n, n\in Z$	$x=\frac{1}{2}+2n, n\in Z$

18.3. Розв'язати рівняння $2\cos2x=-\sqrt{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$x=\pm\frac{3\pi}{8}+\pi n, n\in Z$	$x=\pm\frac{\pi}{8}+\pi n, n\in Z$	$x=\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$	$x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$

18.4. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\pi n,\ n\in Z$	$x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$	$x=-\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$	$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

18.5. Розв'язати рівняння $(\operatorname{ctg} x)^{100}=1$.

А	Б	В	Г	Д
$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$	$x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$	0	$x=\operatorname{arcctg}100+\pi n,\ n\in Z$

18.6. Указати рівняння, яке має хоча б один корінь.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x=\frac{\pi}{3}$	$\arccos x=-\frac{\pi}{3}$	$\arcsin x=\pi$	$\operatorname{arctg} x=2$	$\operatorname{arcctg} x=3$

18.7. Указати рівняння, яке має тільки один корінь.

А	Б	В	Г	Д
$\sin x=-1$	$\cos x=-2$	$\operatorname{arctg} x=1$	$\operatorname{tg} x=1$	$\frac{\cos x-1}{\sin x}=0$

18.8. Розв'язати рівняння $\sin^2 x-\sin x=0$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\pi n,$ $n\in Z$	$x=\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+\pi n,$ $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,$ $n\in Z$	$x=\pi n,\ x=-\frac{\pi}{2}+\pi n,$ $n\in Z$	$x=\pi n,\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,$ $n\in Z$

18.9. Знайти корінь рівняння $\sin 2x-4\cos x=0$, який належить проміжку $[2\pi;\ 3\pi]$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	$\frac{13\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{4}$

18.10. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg} x=\operatorname{ctg} x$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n\in Z$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,$ $n\in Z$	$x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,$ $n\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},$ $n\in Z$	рівняння коренів немає

18.11. Розв'язати рівняння $\dfrac{\cos x}{\sin x-1}=0$.

А	Б	В	Г	Д
$x=-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$	$x=\pi n,\ n\in Z$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

18.12. Розв'язати рівняння $\sqrt{3}\sin x-\cos x=0$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$	$x=\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$	$x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$	$x=-\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

18.13. Розв'язати рівняння $\cos^2 x + 5\cos x - 6 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pi + 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm\arccos 1 + \pi n,$ $n \in Z$	$x = 2\pi n, n \in Z,$ $x = \pm(\pi - \arccos 6) + 2\pi k, k \in Z$	$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = 2\pi n,$ $n \in Z$

18.14. Розв'язати рівняння $\sin x + \cos x = -\sqrt{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$	$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$	$x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$	$x = \frac{5\pi}{4} + \pi n, n \in Z$	$x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{2}) + \pi n, n \in Z$

18.15. Розв'язати рівняння $\sin x^2 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{\pi n}, n \in N$	0	$\{0\} \cup \{\sqrt{2\pi n}, n \in N\}$	$-\sqrt{2\pi n}, n \in N$	$\{0\} \cup \{\pm\sqrt{\pi n}, n \in N$

18.16. Розв'язати рівняння $\operatorname{tg}\sqrt{x} = -1$.

А	Б	В	Г	Д
$x = \left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2, n \in N$	$x = -\frac{\pi^2}{16} + \pi^2 n^2, n \in N$	$x = \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n\right)^2, n \in N$	$x = \frac{\pi^2}{16} + \pi^2 n^2, n \in N$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in N$

18.17. У якому вигляді можна подати розв'язок рівняння $\cos(\pi x) = x^2 - 4x + 5$?

А	Б	В	Г	Д
$\log_\pi \pi^2$	$\log_\pi \pi$	$\log_\pi \frac{\pi}{2}$	$\log_{\frac{1}{\pi}} \pi$	$\log_\pi \pi^3$

18.18. Розв'язати рівняння $\cos(\cos x) = 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\varnothing$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$x = \pm\arccos(2\pi n) +$ $+2\pi n, n \in Z$	$x = 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pm\pi + 2\pi n,$ $n \in Z$

18.19. Розв'язати рівняння $\sin x + \sin|x| = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\pi n, n \in Z$	0	$(-\infty; 0]$	$(-\infty; 0] \cup \{\pi n, n \in N\}$	$(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\right\}$

18.20. Розв'язати рівняння $|\cos x| = \cos x + 2\sin x$.

А	Б	В	Г	Д
$x = 2\pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi n,$ $n \in Z$	$x = \pi n, x = -\frac{\pi}{4} +$ $+2\pi k,\ n, k \in Z$	$x = \pi n, x = -\frac{\pi}{4} +$ $+\pi k,\ n, k \in Z$	$x = 2\pi n, x = \frac{3\pi}{4} +$ $+2\pi k,\ n, k \in Z$

18.21. За якого найменшого значення параметра a рівняння $2\cos 4x = a - 5$ має корені?

А	Б	В	Г	Д
–3	0	3	1	–1

18.22. Знайти всі значення a, за яких рівняння $(a+2)\sin x = a^2 - 4$ має корені.

А	Б	В	Г	Д
$a \in (1; 3)$	$a \in R$	$a \neq 2$	$a \in \{-2\} \cup [1; 3]$	$\varnothing$

Завдання 18.23–18.34 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

18.23. Установити відповідність між заданими рівняннями (1–3) та множинами їх коренів на проміжку $[0; 2\pi]$ (А–Д).

1 $\sin 2x = 0$

2 $2\cos x = 2$

3 $\cos 2x = 0$

А $\{0; 2\pi\}$

Б $\left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}; 2\pi\right\}$

В $\left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}; \pi\right\}$

Г $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

Д $\left\{\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

18.24. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та множинами їх коренів (А–Д).

1 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a, |a| \leq 1$

2 $\sin x \cos x = \frac{a}{2}, |a| \leq 1$

3 $\sin x = a \cos x$

А $\pm \arccos a + 2n\pi, n \in Z$

Б $\operatorname{arctg} a + n\pi, n \in Z$

В $\operatorname{arcctg} a + n\pi, n \in Z$

Г $(-1)^n \arcsin a + n\pi, n \in Z$

Д $(-1)^n \cdot \frac{1}{2} \arcsin a + \frac{n\pi}{2}, n \in Z$

18.25. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $2\sin x = 1$

2 $\sin 2x = 1$

3 $\sin \frac{x}{2} = 1$

А $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z$

Б $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

В $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Г $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Д $x = (4n+1)\pi, n \in Z$

18.26. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів на відрізку $[0; 2\pi]$ (А–Д)

1 $\sin 2x = 0$

2 $\sin 2x = -\frac{1}{2}$

3 $\sin \frac{x}{8} = 1$

А Жодного

Б Один

В Два

Г Чотири

Д П'ять

18.27. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів на проміжку $(0; \pi)$ (А–Д).

1 $\operatorname{ctg} 3x = 4$

2 $\operatorname{ctg} 2x = 2$

3 $\operatorname{ctg} \frac{x}{4} = 0$

А Чотири
Б Три
В Два
Г Один
Д Жодного

18.28. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $\sin^2 x - 4\sin x + 3 = 0$

2 $\sin^2 x - 3\sin x - 4 = 0$

3 $\cos^2 x - 5\cos x + 4 = 0$

А $x = 2\pi n, n \in Z$
Б $x = \pi(2n+1), n \in Z$
В $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
Г $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$
Д $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

18.29. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та рівносильними їм рівняннями (А–Д).

1 $\cos 3x - \cos x = 0$

2 $\cos 3x + \cos x = 0$

3 $\sin 3x - \sin x = 0$

А $\sin 2x \cos 3x = 0$
Б $\sin 3x \cos 2x = 0$
В $\sin 2x = 0$
Г $\sin x \cos 2x = 0$
Д $\cos x \cos 2x = 0$

18.30. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $\sin \frac{x}{2} - \sqrt{3}\cos \frac{x}{2} = 0$

2 $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 0$

3 $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 0$

А $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$
Б $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$
В $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$
Г $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
Д $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

18.31. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та рівносильними їм рівняннями (А–Д).

1 $\frac{\cos x}{\sin x - 2} = 0$

2 $\frac{\cos x}{\sin x - 1} = 0$

3 $\frac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$

А $\sin x = -1$
Б $\sin x = 1$
В $\cos x = 2$
Г $\cos x = 0$
Д $\cos x = -1$

18.32. **(ЗНО–2012)** Розв'яжіть рівняння (1–4). Установіть відповідність між кожним рівнянням та твердженням (А–Д), що є правильним для цього рівняння.

Рівняння

1 $x + \pi = 0$

2 $\cos x = \sqrt{3}$

3 $\sqrt{x} = 4$

4 $\frac{x-1}{x+7} = 0$

Твердження

А коренем рівняння є ірраціональне число
Б коренем рівняння є число 16
В рівняння не має коренів
Г рівняння має два корені
Д корінь рівняння належить відрізку $[-2; 2]$

18.33. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $|\sin x| = -\sin x$

2 $|\sin x| = \sin x$

3 $|\cos x| = -\cos x$

А $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$

Б $x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in Z$

В $x \in [\pi(2k+1); \pi(2k+2)], k \in Z$

Г $x \in \left[\frac{\pi}{2} + 4\pi k; \frac{3\pi}{2} + 4\pi k\right], k \in Z$

Д $x \in [2\pi k; \pi(2k+1)], k \in Z$

18.34. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $\sin(x - |x|) = 0$

2 $\sin(x + |x|) = 0$

3 $\cos(x + |x|) = 1$

А $\{-\pi n, n \in N\} \cup [0; +\infty)$

Б $\{-2\pi n, n \in N\} \cup [0; +\infty)$

В $(-\infty; 0] \cup \left\{\frac{\pi n}{2}, n \in N\right\}$

Г $(-\infty; 0] \cup \{\pi n, n \in N\}$

Д $\left\{-\frac{\pi n}{2}, n \in N\right\} \cup [0; +\infty)$

Розв'яжіть завдання 18.35–18.53. Відповідь запишіть десятковим дробом.

18.35. Розв'язати рівняння $\sin(\pi \sin x) = -1$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; \pi]$.

18.36. Розв'язати рівняння $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4\pi}{3}\right) = 1$. У відповідь записати найменший додатний корінь, округлений з точністю до 0,1.

18.37. Знайти кількість коренів рівняння $\sin 2x \cdot \operatorname{tg} x + 1 = 3\sin x$ на проміжку $(0; \pi)$.

18.38. Розв'язати рівняння $3\sin x - 2\cos^2 x = -3$. У відповідь записати кількість коренів на $[0; \pi]$.

18.39. Розв'язати рівняння $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; \pi]$.

18.40. Розв'язати рівняння $\sqrt{1 - \sin x} = \cos x$. У відповідь записати значення $\frac{x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.41. Розв'язати рівняння $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; \pi]$.

18.42. Розв'язати рівняння $\cos x = \sin 3x$. У відповідь записати значення $\frac{x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.43. Розв'язати рівняння $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2$. У відповідь записати значення $\frac{3x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.44. Розв'язати рівняння $\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{2}$. У відповідь записати кількість коренів на $[0; 2\pi]$.

18.45. Розв'язати рівняння $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = 2$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; 2\pi]$.

18.46. Розв'язати рівняння $(\sin x + \cos x)^2 - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; 2\pi]$.

18.47. Нехай x_0 — найменший додатний корінь рівняння $\cos^2 x - 5\sin x \cos x + 2 = 0$. Знайти $\operatorname{tg} x_0$.

18.48. За яких значень параметра a рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x = a$ має розв'язки? У відповідь записати суму найбільшого та найменшого значень a.

18.49. Розв'язати рівняння $\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^2 4x + \frac{1}{4}$. У відповідь записати значення $\frac{4x_0}{\pi}$, де x_0 — найменший додатний корінь рівняння.

18.50. Розв'язати рівняння $9(\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x) = 15(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2 + 2$. У відповідь записати кількість коренів на проміжку $[0; 2\pi]$.

18.51. Розв'язати рівняння $\arccos(\sin x) = \frac{x}{2}$. У відповідь записати значення $\frac{S}{\pi}$, де S — сума всіх коренів рівняння.

18.52. Розв'язати рівняння $\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x = a$. У відповідь записати найбільше значення a, за якого рівняння має корені.

18.53. Відомо, що $\cos^2\alpha - 5\sin\alpha\cos\alpha + 2 = 0$.

1) Знайти $\operatorname{tg}\alpha$. У відповідь записати найбільше значення $\operatorname{tg}\alpha$;

2) розв'язати рівняння $\cos^2 x - 5\sin\alpha\cos x + 2 = 0$. У відповідь записати найменший додатний корінь (у градусах).

Тема 19. Тригонометричні нерівності

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:
— розв'язувати найпростіші нерівності, що містять тригонометричні вирази;
— застосовувати загальні методи та прийоми (розкладання на множники, заміна змінної, застосування властивостей і графіків функцій) у процесі розв'язування тригонометричних нерівностей;
— розв'язувати тригонометричні нерівності графічним методом;
— розв'язувати тригонометричні нерівності з параметрами.

Нерівності, які містять змінну під знаком тригонометричної функції, називають *тригонометричними*.

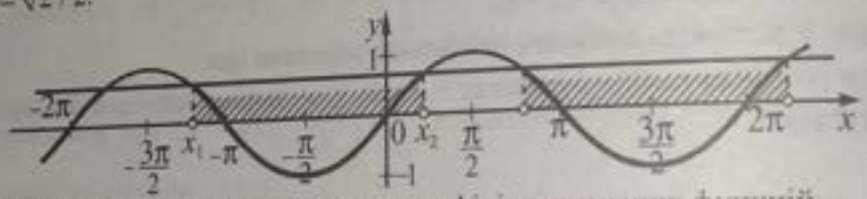
Наприклад, $\cos x \le \frac{1}{3}$; $5\sin^2 x + 3\cos x > 6$ тощо.

Найпростіші тригонометричні нерівності. Найпростіші тригонометричні нерівності — це нерівності виду $\sin x \lhd a$, $\cos x \lhd a$, $\operatorname{tg} x \lhd a$, $\operatorname{ctg} x \lhd a$. Розв'язувати найпростіші тригонометричні нерівності можна графічно або за допомогою одиничного кола.

За означенням, синусом кута α є ордината точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола, а косинусом — абсциса точки $P_\alpha(x; y)$ одиничного кола. Цей факт використовується при розв'язуванні тригонометричних нерівностей виду $\sin x \lhd a$, $\cos x \lhd a$ за допомогою одиничного кола.

Наприклад: 1. Розв'язати нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Оскільки $\left|\sqrt{2}/2\right| \le 1$, то розв'язок існує. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \sin x$ і $y = \sqrt{2}/2$ та виділимо проміжки, на яких графік функції $y = \sin x$ розташований нижче від графіка прямої $y = \sqrt{2}/2$.

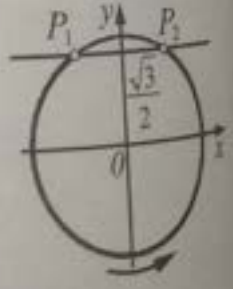


Знайдемо абсциси точок x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) — перетину графіків зазначених функцій.

$x_1 = -\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = = -\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{5\pi}{4}$; $x_2 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. Запишемо відповідь, урахувавши період функції $y = \sin x$. *Відповідь.* $\left(-\frac{5\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$;

2. Розв'язати нерівність $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Побудуємо одиничне коло, пряму $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і позначимо точки P_1 і P_2 перетину одиничного кола й зазначеної прямої та виділимо множину точок, ординати яких менші за $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Знайдемо значення x_1 і x_2, здійснюючи обхід дуги проти годинникової стрілки: $x_1 < x_2$, де $x_1 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$;

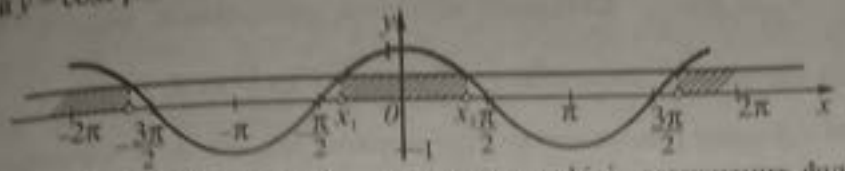


$x_2 = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi = \frac{\pi}{3} + 2\pi$. *Відповідь.* $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi(1+k)\right)$, $k \in Z$.

Розглянемо розв'язування тригонометричних нерівностей, які містять функцію $y = \cos x$.

Наприклад: 1. Розв'язати нерівність $\cos x \geq \frac{1}{2}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \cos x$ і $y = \frac{1}{2}$ та виділимо проміжки, на яких графік функцій $y = \cos x$ розташований вище від графіка прямої $y = 1/2$.



Знайдемо абсциси точок x_1 і x_2 ($x_1 < x_2$) — перетину графіків зазначених функцій, які є кінцями одного з проміжків, на якому виконується задана нерівність. $x_1 = -\arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$; $x_2 = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Запишемо відповідь, врахувавши період функції $y = \cos x$. *Відповідь.* $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

2. Розв'язати нерівність $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Побудуємо одиничне коло і пряму $x = \sqrt{3}/2$, позначимо точки P_1 і P_2 перетину одиничного кола й зазначеної прямої та виділимо множину точок, абсциси яких більші за $\sqrt{3}/2$. Знайдемо значення x_1 і x_2, здійснюючи обхід проти годинникової стрілки: $x_1 < x_2$, де $x_1 = -\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{6}$;

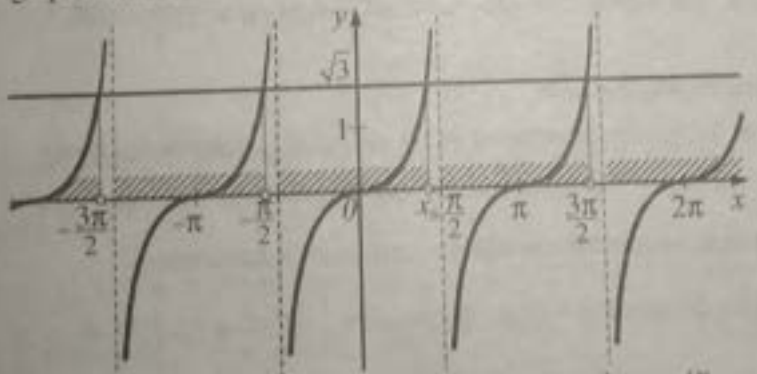


$x_2 = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$. *Відповідь.* $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

Розглянемо розв'язування тригонометричних нерівностей, які містять функцію $y = \operatorname{tg} x$.

Наприклад: 1. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \sqrt{3}$ та виділимо проміжки, на яких графік функцій $y = \operatorname{tg} x$ розташований нижче від графіка прямої $y = \sqrt{3}$.



Знайдемо абсцису точки x_0 — перетину графіків зазначених функцій, яка є кінцем одного з проміжків, на якому виконується задана нерівність $x_0 = \frac{\pi}{3}$. Іншим кінцем цього проміжка є точка $-\frac{\pi}{2}$, у якій функція $y = \operatorname{tg} x$ невизначена.

Одним із проміжків, який є розв'язком нерівності, є $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{3}$. Запишемо відповідь, врахувавши, що період функції $y = \operatorname{tg} x$ дорівнює π.

Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

2. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg}x < 1$.

Побудуємо одиничне коло, лінію тангенсів, на якій позначимо точку $T(1; 1)$ і виділимо ту частину лінії тангенсів, яка розміщена нижче від точки T, та дугу кола, яка відповідає виділеній частині лінії тангенсів. Запишемо значення кутів, які відповідають виділеній дузі.

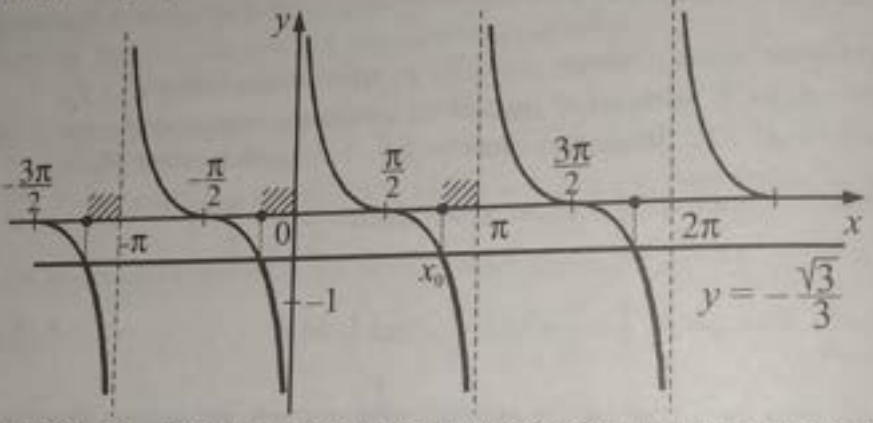


$-\frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg}1$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$. Запишемо відповідь, урахувавши, що період функції $y = \operatorname{tg}x$ дорівнює π. *Відповідь.* $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Розглянемо розв'язування тригонометричних нерівностей, які містять функцію $y = \operatorname{ctg}x$.

1. Розв'язати нерівність $\operatorname{ctg}x \le -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \operatorname{ctg}x$ і $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ та виділимо проміжки, на яких графік функції $y = \operatorname{ctg}x$ розташований не вище від графіка прямої $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

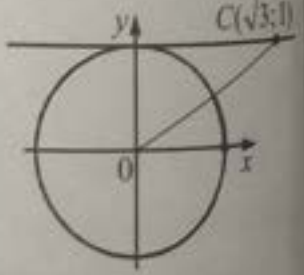


Знайдемо абсцису точки x_0, яка є кінцем одного з проміжків, на якому виконується задана нерівність $x_0 = \frac{2\pi}{3}$. Іншим кінцем цього проміжка є точка π, у якій функція $y = \operatorname{ctg}x$ невизначена.

Одним із проміжків, який є розв'язком нерівності, є $\frac{2\pi}{3} \le x < \pi$. Запишемо відповідь, врахувавши, що період функції $y = \operatorname{ctg}x$ дорівнює π. *Відповідь.* $\left[\frac{2\pi}{3} + \pi k; \pi + \pi k\right)$, $k \in Z$.

2. Розв'язати нерівність $\operatorname{ctg}x \ge \sqrt{3}$.

Побудуємо одиничне коло, лінію котангенсів, на якій позначимо точку $C(\sqrt{3}; 1)$ і виділимо ту частину лінії котангенсів, яка розміщена праворуч від точки C, та дугу кола, яка відповідає виділеній частині лінії котангенсів.

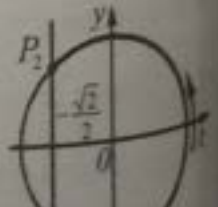


$0 < x \le \frac{\pi}{6}$. Урахуємо період функції $y = \operatorname{ctg}x$: *Відповідь.* $\left(\pi k; \frac{\pi}{6} + \pi k\right]$, $k \in Z$.

Тригонометричні нерівності зі складним аргументом

Наприклад, розв'язати нерівність $\cos 2x \ge -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уведемо нову змінну $t = 2x$ і запишемо дану нерівність у вигляді: $\cos t \ge -\sqrt{2}/2$. Виділимо на одиничному колі множину точок, абсциси яких не менші за $-\sqrt{2}/2$.



Знайдемо значення $t_1 = -\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\pi}{4}$ і $t_2 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$, здійснюючи обхід проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$.

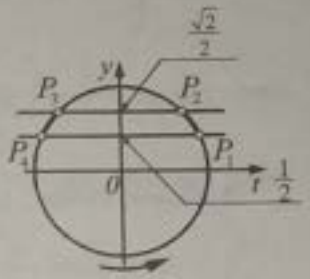
Запишемо умову, за якої точка t належить дузі P_1P_2: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le t \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Повернемося до початкової змінної: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le 2x \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. $-\frac{3\pi}{8} + \pi k \le x \le \frac{3\pi}{8} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Відповідь. $\left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k; \frac{3\pi}{8} + \pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Подвійні тригонометричні нерівності

Розв'язати нерівність $\frac{1}{2} < \sin\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уведемо нову змінну $t = \frac{x}{2}$ й одержимо нерівність $\frac{1}{2} < \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$. На одиничному колі виділимо множину точок, ординати яких більші за $\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4).



Знайдемо значення t_1, t_2, t_3 і t_4, здійснюючи обхід кола проти годинникової стрілки: $t_1 < t_2$, $t_3 < t_4$.

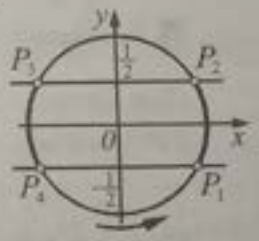
$t_1 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $t_2 = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$; $t_3 = \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$; $t_4 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$.

Тоді маємо: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ або $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < \frac{x}{2} < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Розв'яжемо одержані нерівності відносно x: $\frac{\pi}{3} + 4\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$ або $\frac{3\pi}{2} + 4\pi k < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Відповідь. $\left(\frac{\pi}{3} + 4\pi k; \frac{\pi}{2} + 4\pi k\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2} + 4\pi k; \frac{5\pi}{3} + 4\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Нерівності, у яких тригонометрична функція міститься під знаком модуля

Нехай необхідно розв'язати нерівність $|\sin x| < \frac{1}{2}$.



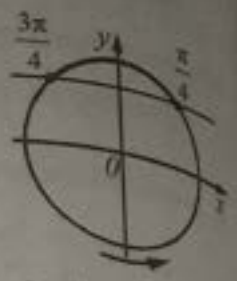
Запишемо задану нерівність у вигляді подвійної нерівності: $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$. Для цього виділимо на одиничному колі множини точок, ординати яких більші за $-\frac{1}{2}$ і менші за $\frac{1}{2}$ (дуги P_1P_2 і P_3P_4).

Знайдемо значення x_1, x_2, x_3 і x_4, виконуючи обхід кола проти годинникової стрілки: $x_1 < x_2$, $x_3 < x_4$.

$x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$; $x_2 = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $x_3 = \pi - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{5\pi}{6}$; $x_4 = \pi + \arcsin\frac{1}{2} = \frac{7\pi}{6}$.

Запишемо умови, за яких точка x є розв'язком нерівності: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. Запишемо відповідь, врахувавши, що дуги P_1P_2 і P_3P_4 симетричні відносно початку координат. *Відповідь.* $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\sin 3x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$.



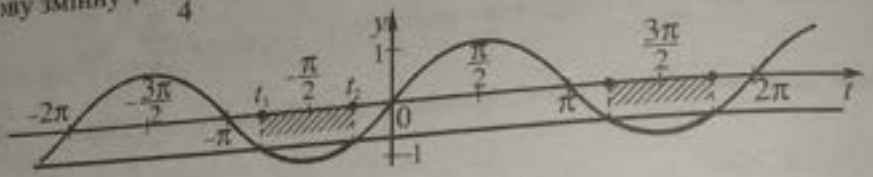
■ $3x \in \left[\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k; \pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$;

$3x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$; $x \in \left[\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in Z$.

Відповідь. $\left[\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right]$, $k \in Z$. ■

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\sin\left(\frac{x}{4} - 1\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$. У відповідь записати кількість цілих розв'язків нерівності з проміжку $[-6; 2]$.

■ Уведемо нову змінну $t = \frac{x}{4} - 1$ і розв'яжемо нерівність $\sin t \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$ (див. рис.).



Знайдемо точки t_1 і t_2 $(t_1 < t_2)$:

$t_1 = -\pi + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$; $t_2 = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$. $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le t \le -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$

Повернемося до заміни: $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le \frac{x}{4} - 1 \le -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$; $1 - \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \le \frac{x}{4} \le 1 - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$;

$4 - 3\pi + 8\pi k \le x \le 4 - \pi + 8\pi k$, $k \in Z$. Якщо $k = 0$, то цілими розв'язками є числа $-5, -4, -3, -2, -1, 0$, усього їх є 6. Якщо $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$, то розв'язків на проміжку $[-6; 2]$ немає. *Відповідь.* 6. ■

Приклад 3. Визначити найменше додатне значення x, для якого виконується нерівність $2\cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right) \ge -1$.

А	Б	В	Г	Д
0°	30°	45°	60°	90°

■ Запишемо нерівність у вигляді $\cos(x - 150°) \ge -\frac{1}{2}$.



Далі маємо: $-120° + 360°n \le x - 150° \le 120° + 360°n$, $n \in Z$;

$30° + 360°n \le x \le 270° + 360°n$, $n \in Z$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 4. Розв'язати нерівність $\cos^2 x < \frac{3}{4}$.

■ $\cos^2 x < \frac{3}{4}$; $\frac{1 + \cos 2x}{2} < \frac{3}{4}$; $1 + \cos 2x < \frac{3}{2}$; $\cos 2x < \frac{1}{2}$; $\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k < 2x < 2\pi - \arccos\frac{1}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

$\frac{\pi}{3} + 2\pi k < 2x < 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k \in Z$. *В-дь.* $\left(\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k\right)$, $k \in Z$. ■

Приклад 5. Розв'язати нерівність $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x \ge 1$.

■ $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x \ge \frac{1}{2}$; $\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \ge \frac{1}{2}$; $\arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k \le 2x + \frac{\pi}{6} \le \pi - \arcsin\frac{1}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$;

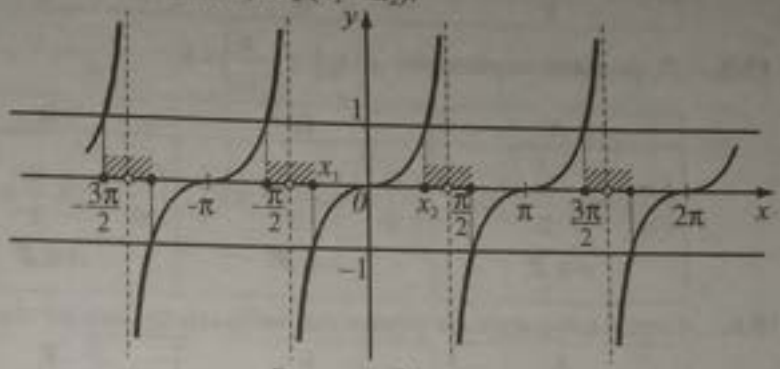
$\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 2x + \frac{\pi}{6} \le \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k \le 2x \le \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; $2\pi k \le 2x \le \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$,

$k \in Z$; $\pi k \le x \le \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in Z$. *Відповідь.* $\left[\pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k\right]$ $k \in Z$. ■

Приклад 6. Розв'язати нерівність $|\operatorname{tg}x| \geq 1$.

■ Запишемо дану нерівність у вигляді сукупності нерівностей $\begin{bmatrix} \operatorname{tg}x \leq -1; \\ \operatorname{tg}x \geq 1. \end{bmatrix}$ Побудуємо графіки функцій $y = \operatorname{tg}x$, $y = -1$ і $y = 1$ та виділимо проміжки, на яких графік функції $y = \operatorname{tg}x$ розташований вище від прямої $y = 1$ або нижче від прямої $y = -1$. Знайдемо точки x_1 і x_2 $(x_1 < x_2)$:

$x_1 = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$; $x_2 = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}$.



Відповідь. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k; -\frac{\pi}{4}+\pi k\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$, $k \in Z$. ■

Приклад 7. Знайти всі значення параметра a із проміжку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, для кожного з яких нерівність $\sin^2 x + \cos^2(x-a) \geq \frac{3}{4} + 2\sin x \sin a \cos(x-a)$ виконується для всіх x. У відповідь записати найбільше значення параметра з цього проміжка (у градусах).

■ Виконаємо перетворення $\sin^2 x + \cos^2(x-a) \geq \frac{3}{4} + 2\sin x \sin a \cos(x-a)$:

$\sin^2 x - \frac{3}{4} \geq 2\sin x \sin a \cos(x-a) - \cos^2(x-a)$; $\sin^2 x - \frac{3}{4} \geq \cos(x-a)(2\sin x \sin a - \cos(x-a))$;

$\sin^2 x - \frac{3}{4} \geq \cos(x-a)(2\sin x \sin a - \cos x \cos a - \sin x \sin a)$; $\sin^2 x - \frac{3}{4} \geq \cos(x-a)(\sin x \sin a - \cos x \cos a)$;

$\sin^2 x - \frac{3}{4} \geq -\cos(x-a)\cos(x+a)$; $\frac{1-\cos 2x}{2} - \frac{3}{4} \geq -\frac{\cos 2x + \cos 2a}{2}$; $\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2} - \frac{3}{4} \geq -\frac{\cos 2x}{2} - \frac{\cos 2a}{2}$;

$\cos 2a \geq \frac{1}{2}$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k < 2a < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $-30° + 180°k < a < 30° + 180°k$. Отже, $a \in [-30° + 180°k; 30° + 180°k]$, $k \in Z$. Найбільше значення a з проміжку $[90°; 270]$ при $k = 1$ дорівнює $210°$. *Відповідь.* 210. ■

Завдання 19.1–19.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

19.1. Розв'язати нерівність $2\sin 2x > -\sqrt{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{3\pi}{8}+\pi k\right), k \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k; \frac{3\pi}{4}+\pi k\right), k \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k; \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right), k \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{8}+2\pi k; \frac{5\pi}{8}+2\pi k\right), k \in Z$	$\left(-\frac{\pi}{8}+\pi k; \frac{5\pi}{8}+\pi k\right), k \in Z$

19.2. Знайти довжину кожного з відрізків координатної прямої, які утворюють розв'язки нерівності $2\sin x \leq 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{6\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{8\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$

19.3. Розв'язати нерівність $\cos \pi x > \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k; \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in Z$	$\left(-\frac{1}{8}+2k; \frac{1}{6}+2k\right)$, $k \in Z$	$\left(\frac{1}{3}+2k; \frac{7}{3}+2k\right)$, $k \in Z$	$\left(-\frac{1}{3}+k; \frac{1}{3}+k\right)$, $k \in Z$	$\left(-\frac{1}{3}+2k; \frac{1}{3}+2k\right)$, $k \in Z$

19.4. Знайти довжину кожного з відрізків координатної прямої, які утворюють розв'язки нерівності $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\le-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$

19.5. Розв'язати нерівність $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)>1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\pi n;\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$, $n\in Z$

19.6. Серед наведених нерівностей вибрати ту, яка не має розв'язків.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x<-\frac{3}{4}$	$\sin x\ge 0,2$	$\operatorname{arctg} x\ge 2$	$\operatorname{tg} x\le\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\operatorname{arctg} x\le 1,2$

19.7. Серед наведених нерівностей вибрати ту, яка має розв'язки.

А	Б	В	Г	Д
$\cos x\ge 3/2$	$\cos x<-1$	$\sin x>1$	$\operatorname{tg} x\le\sqrt{3}$	$\arcsin x\le-\pi$

19.8. Розв'язати нерівність $\cos 5x\cos x-\sin 5x\sin x<-\frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{2}{3}\pi+2\pi n;\frac{4}{3}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}\pi+2\pi n;\frac{\pi}{3}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{4}{3}\pi+2\pi n;\frac{2}{3}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3};\frac{2\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{2}{9}\pi+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}\right)$, $n\in Z$

19.9. Розв'язати нерівність $\sin^2 x>\frac{1}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{5}{6}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{7}{6}\pi+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5}{6}\pi+\pi n\right)$, $n\in Z$

19.10. Розв'язати нерівність $\cos^2 x\le\frac{1}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left[\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{2}{3}\pi+2\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2}{3}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$

19.11. Розв'язати нерівність $(2\sin x-3)\operatorname{tg} x\ge 0$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi n\right], n\in Z$	$\left[\pi n;\frac{\pi}{2}+\pi n\right), n\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n\right], n\in Z$	$\varnothing$	$\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n;\pi n\right), n\in Z$

19.12. Розв'язати нерівність $\sin x<\cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$, $n\in Z$	$\left(-\frac{3}{4}\pi+\pi n;\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$,	$\left(-\frac{3}{4}\pi+2\pi n;\frac{\pi}{4}+2\pi n\right)$,	$(-\pi+2\pi n;2\pi n)$,	$\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{5}{4}\pi+2\pi n\right)$,

19.13. Розв'язати нерівність $\sin x - \cos x > 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3}{4}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{2}+\pi k;\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{3}{4}\pi+\pi k;\frac{9}{4}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\pi+2\pi k;\frac{5}{2}\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$

19.14. Розв'язати нерівність $\sqrt{\sin x} \geq \sqrt{\cos x}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{5}{4}\pi+2\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left[2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$	$\left(2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\varnothing$	$\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$, $k\in Z$

19.15. Розв'язати нерівність $|\sin x| < \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{5}{6}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{5}{6}\pi+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{7}{6}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$

19.16. Розв'язати нерівність $|\cos x| > \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2}{3}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{5}{6}\pi+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{2\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k\in Z$	$\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k\in Z$

19.17. Розв'язати нерівність $\arccos x \leq \frac{1}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\cos\frac{1}{2};1\right]$	$\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$	$\left[-1;\cos\frac{1}{2}\right]$	$\left(\cos\frac{1}{2};1\right)$	$\left(-1;\cos\frac{1}{2}\right)$

19.18. Розв'язати нерівність $0 < \arcsin x \leq \frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right]$	$\left(0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$	$\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$	$\left[0;\frac{1}{2}\right)$

19.19. Розв'язати нерівність $\operatorname{arctg} x \geq \frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\infty;\sqrt{3}\right]$	$\left[\sqrt{3}/3;+\infty\right)$	$[1;+\infty)$	$\left[\sqrt{3};+\infty\right)$	$\left(-\infty;\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

19.20. Розв'язати нерівність $-\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} x \leq \frac{\pi}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(-\sqrt{3};1\right]$	$\left(-1;\sqrt{3}/3\right]$	$\left(-1;\sqrt{3}\right]$	$\left[-\sqrt{3};1\right)$	$\left[-\sqrt{3}/3;1\right)$

Завдання 19.21–19.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

19.21. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–3) та їх найбільшими розв'язками на проміжку $[0; 2\pi]$ (А–Д).

1 $\cos x \le -\frac{1}{2}$

2 $\sin x \ge \frac{1}{2}$

3 $\operatorname{tg} x \le 1$

А $\frac{5\pi}{6}$

Б $\frac{3\pi}{4}$

В 2π

Г $\frac{7\pi}{4}$

Д $\frac{4\pi}{3}$

19.22. Установити відповідність між заданими нерівностями (1–3) та їх найменшими розв'язками на проміжку $[0; \pi]$ (А–Д).

1 $\cos^2 x - \sin^2 x < 2$

2 $\sin 2x \ge 1$

3 $\operatorname{ctg} 2x \le 1$

А $\frac{\pi}{8}$

Б $\frac{\pi}{2}$

В $\frac{\pi}{4}$

Г 0

Д π

19.23. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\sin\frac{x}{2} > \frac{1}{2}$

2 $\sin\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$

3 $\sin\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$

А $\frac{2\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z$

Б $\frac{\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z$

В $\frac{3\pi}{2} + 4\pi n < x < \frac{9\pi}{2} + 4\pi n, n \in Z$

Г $\frac{\pi}{3} + 4\pi n < x < \frac{5\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z$

Д $\varnothing$

19.24. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\cos 2x > \frac{1}{2}$

2 $\cos 2x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\cos 2x > -\frac{1}{2}$

А $-\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in Z$

Б $\frac{3\pi}{8} + \pi n < x < \frac{5\pi}{8} + \pi n, n \in Z$

В $\frac{\pi}{12} + \pi n < x < \frac{11\pi}{12} + \pi n, n \in Z$

Г $-\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$

Д $-\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

19.25. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\operatorname{tg} 4x > 1$

2 $\operatorname{tg} 4x < -\sqrt{3}$

3 $\operatorname{tg} 4x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$

А $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}, n \in Z$

Б $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4}, n \in Z$

В $-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4} < x < -\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4}, n \in Z$

Г $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n \in Z$

Д $-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4} < x < \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n \in Z$

19.26. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} > \sqrt{3}$

2 $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} < \frac{1}{\sqrt{3}}$

3 $\operatorname{ctg}\frac{x}{3} > -1$

А $\frac{\pi}{2}+3\pi n < x < 3\pi(n+1), n \in Z$

Б $3\pi n < x < \frac{9\pi}{4}+3\pi n, n \in Z$

В $3\pi n < x < \frac{\pi}{2}+3\pi n, n \in Z$

Г $\pi(3n+1) < x < 3\pi(n+1), n \in Z$

Д $\frac{5\pi}{2}+3\pi n < x < 3\pi(n+1), n \in Z$

19.27. Установити відповідність між нерівностями (1–3) та їх розв'язками (А–Д).

1 $\cos^2 x - \sin^2 x > -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2 $\cos x \cos 3x - \sin x \sin 3x < \frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x < -\frac{1}{2}$

А $\frac{\pi}{8}+\pi n < x < \frac{3\pi}{8}+\pi n, n \in Z$

Б $\frac{2\pi}{3}+2\pi n < x < \frac{4\pi}{3}+2\pi n, n \in Z$

В $-\frac{3\pi}{8}+\pi n < x < \frac{3\pi}{8}+\pi n, n \in Z$

Г $\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{2} < x < \frac{11\pi}{24}+\frac{\pi n}{2}, n \in Z$

Д $\frac{\pi}{6}+\pi n < x < \frac{5\pi}{6}+\pi n, n \in Z$

Розв'яжіть завдання 19.28–19.34. Відповідь запишіть десятковим дробом.

19.28. Розв'язати нерівність $\sin\left(\frac{3}{4}x+\frac{\pi}{9}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$. У відповідь записати найменший додатний цілий розв'язок нерівності.

19.29. Розв'язати нерівність $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 < 0$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0; 2\pi]$.

19.30. Розв'язати нерівність $\cos 2x + \cos x \geq 0$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0; 2\pi]$.

19.31. Розв'язати нерівність $2\sin^4 2x \geq \sin^2 2x$. У відповідь записати найбільший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0; 2\pi]$.

19.32. Розв'язати нерівність $\sqrt{3}\sin x + \cos x < 1$. У відповідь записати найменший цілий розв'язок нерівності на проміжку $[0; 2\pi]$.

19.33. Розв'язати нерівність $\arcsin\frac{1}{x} + \arccos\frac{1}{x} < 2$. У відповідь записати найменший додатний розв'язок нерівності.

19.34. Відомо, що $\sin^2 x \leq \frac{1}{4}$, x_0 — розв'язок нерівності. **1)** Знайти найбільше і найменше значення $\sin x_0$. У відповідь записати їх добуток; **2)** якого найменшого значення може набувати $\cos^2 x_0$?

Тема 20. Системи рівнянь і нерівностей

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— розв'язувати системи лінійних рівнянь і нерівностей, а також ті, що зводяться до них;
— розв'язувати системи ірраціональних рівнянь нерівностей;
— використовувати графічні методи розв'язування систем рівнянь і нерівностей;
— розв'язувати системи рівнянь з параметрами.

Якщо завдання полягає у відшуканні спільних розв'язків кількох рівнянь, то кажуть, що треба розв'язати *систему рівнянь*.

Наприклад, $\begin{cases} 5x-2y=3; \\ x+y=15 \end{cases}$ — система двох лінійних рівнянь із двома невідомими.

Розв'язком системи рівнянь називають такий набір значень невідомих, який задовольняє кожне з рівнянь системи. Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що система не має розв'язків.

Дві системи рівнянь називають *рівносильними*, якщо множини їх розв'язків збігаються. Справедливі такі твердження:

1. Якщо рівняння системи замінити рівносильним йому рівнянням, то отримаємо систему, рівносильну даній.

2. Якщо одне рівняння системи замінити його почастинною сумою з іншим, то отримаємо систему, рівносильну даній.

Основними способами розв'язування систем рівнянь є графічний, спосіб підстановки і додавання.

Графічний спосіб

Щоб розв'язати систему рівнянь графічно, слід в одній системі координат побудувати графіки кожного з рівнянь і знайти спільні точки цих графіків. Координати точок перетину будуть розв'язками.

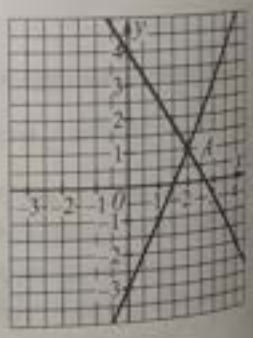
Наприклад, знайти графічним способом розв'язки системи рівнянь $\begin{cases} 3x+2y=8; \\ 2x-y=3. \end{cases}$

Кожне з рівнянь системи є лінійним, тому їхніми графіками є прямі.

$3x+2y=8$	x	0	4
	y	4	–2

$2x-y=3$	x	0	1
	y	–3	–1

Будуємо графіки рівнянь в одній системі координат.



Графіки перетинаються в одній точці — точці $A(2; 1)$.

Перевіркою встановлюємо, що (2; 1) — розв'язок системи.

Відповідь. (2; 1).

Спосіб підстановки

Спосіб підстановки полягає в тому, що одне з рівнянь подають у вигляді $y = f(x)$ або $x = g(y)$ (виражають одну змінну через іншу) і підставляють в інше рівняння замість змінної отриманий вираз. У результаті такої підстановки отримують рівняння з однією змінною. Розв'язавши його, підставляють отриманий корінь в інше рівняння системи і визначають значення іншої змінної.

Наприклад, розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-y=1; \\ x^3-y^3=7. \end{cases}$

Виразимо з першого рівняння системи змінну x через змінну y: $x = 1 + y$ та підставимо одержане значення у друге рівняння системи. Маємо: $(1+y)^3 - y^3 = 7$; $1 + 3y + 3y^2 + y^3 - y^3 = 7$; $3y^2 + 3y - 6 = 0$.

$y^2 + y - 2 = 0$; $y_1 = -2$, $y_2 = 1$. Підставимо знайдені значення й одержимо: $x_1 = 1 + (-2) = -1$; $x_2 = 1 + 1 = 2$. Отже, розв'язками системи є $(-1; -2)$ і $(2; 1)$. *Відповідь.* $(-1; -2)$, $(2; 1)$.

Спосіб додавання. Суть способу додавання полягає в тому, що рівняння системи домножують на такі числа, щоб у них коефіцієнти при одній зі змінних стали протилежними числами. Тоді, почастинно додавши ці рівняння, отримують алгебраїчне рівняння з однією змінною і т. д.

Наприклад, розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ x + y = 7. \end{cases}$

Домножимо друге рівняння на 2: $\begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ x + y = 7; \end{cases} \cdot 2 \quad \begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ 2x + 2y = 14. \end{cases}$ Додамо рівняння системи й результат запишемо першим рівнянням, а друге рівняння перепишемо без змін: $\begin{cases} 5x = 25; \\ x + y = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5; \\ y = 7 - x; \end{cases}$

Підставимо знайдене значення x у друге рівняння: $\begin{cases} x = 5; \\ y = 7 - 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5; \\ y = 2. \end{cases}$ Отже, $(5; 2)$ — розв'язок системи. *Відповідь.* $(5; 2)$.

Спосіб заміни змінних. Систему алгебраїчних рівнянь часто можна спростити, якщо ввести *нові змінні*.

Наприклад, розв'язуючи систему $\begin{cases} \dfrac{1}{2x - y} + y = 2; \\ \dfrac{y}{2x - y} = 1, \end{cases}$ зручно ввести заміну $z = \dfrac{1}{2x - y}$ й одержати систему $\begin{cases} z + y = 2; \\ yz = 1, \end{cases}$ звідки $\begin{cases} y = 1; \\ z = 1. \end{cases}$ Повертаючись до заміни, отримаємо систему рівнянь $\begin{cases} y = 1; \\ \dfrac{1}{2x - y} = 1, \end{cases}$ з якої знайдемо розв'язок вихідної системи — $(1; 1)$. *Відповідь.* $(1; 1)$.

При розв'язуванні *систем нерівностей* використовують ті ж методи, що і при розв'язуванні систем рівнянь за умови, що при перетвореннях зберігаються умови рівносильності. Тут в першу чергу використовують *графічний метод і метод додавання.*

Наприклад, знайти фігуру, утворену системою трьох лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} x - 4y \geq -15; \\ -4x + y \geq -15; \\ x + y \geq 5. \end{cases}$$

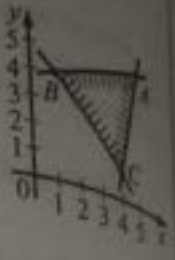
Знайдемо точки перетину відповідних прямих $\begin{cases} x - 4y + 15 = 0; & (1) \\ -4x + y + 15 = 0; & (2) \\ x + y - 5 = 0. & (3) \end{cases}$.

Прямі, задані рівняннями 1 і 2: $\begin{cases} x - 4y + 15 = 0; \\ -4x + y + 15 = 0; \end{cases} \cdot 4 \quad \begin{cases} x - 4y + 15 = 0; \\ -15y + 75 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5; \\ y = 5. \end{cases}$ $A(5; 5)$.

Прямі, задані рівняннями 1 і 3: $\begin{cases} x - 4y + 15 = 0; \\ x + y - 5 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 4y + 15 = 0; \\ -5y + 20 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1; \\ y = 4. \end{cases}$ $B(1; 4)$.

Прямі, задані рівняннями 2 і 3: $\begin{cases}-4x+y+15=0;\\ x+y-5=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x+y-5=0;\\ -5x+20=0;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4;\\ y=1.\end{cases}$ $C(4;1)$.

Накреслимо прямі і позначимо області, задані нерівностями:



$\begin{cases}x\ge 4y-15; \text{ (область під прямою } AB)\\ y\ge 4x-15; \text{ (область над прямою } BC)\\ y\ge 5-x. \text{ (область над прямою } AC)\end{cases}$

Відповідь. Утворився трикутник ABC, з вершинами $A(5;5)$, $B(1;4)$, $C(4;1)$.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}2x-y=7;\\ -3x+4y=-8.\end{cases}$

■ З першого рівняння отримуємо: $y=2x-7$. Підставивши замість y в друге рівняння вираз $2x-7$, отримаємо: $-3x+4(2x-7)=-8$; $5x=20$; $x=4$. Тоді $y=2\cdot 4-7=1$. Розв'язок системи рівнянь: (4; 1). *Відповідь.* (4; 1). ■

Приклад 2. Нехай $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи рівнянь $\begin{cases}\sqrt{25-10x+x^2}+y=4;\\ y-3x+11=0.\end{cases}$ Знайти добуток x_0y_0.

■ $\begin{cases}\sqrt{25-10x+x^2}+y=4;\\ y-3x+11=0;\end{cases}$ $\begin{cases}\sqrt{(x-5)^2}+y=4;\\ y=3x-11;\end{cases}$ $\begin{cases}|x-5|+3x-11=4;\\ y=3x-11;\end{cases}$ $\begin{cases}|x-5|+3x=15;\\ y=3x-11.\end{cases}$

1. Якщо $x-5\ge 0$, тобто $x\ge 5$. $\begin{cases}x-5+3x=15;\\ y=3x-11;\end{cases}$ $\begin{cases}4x=20;\\ y=3x-11;\end{cases}$ $\begin{cases}x=5;\\ y=4.\end{cases}$

2. Якщо $x-5<0$, тобто $x<5$. $\begin{cases}-x+5+3x=15;\\ y=3x-11;\end{cases}$ $\begin{cases}2x=10;\\ y=3x-11;\end{cases}$ $x=5$ — не підходить.

Отже, $x_0=5$, $y_0=4$. Тоді $x_0\cdot y_0=5\cdot 4=20$. *Відповідь.* 20. ■

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}3^x\cdot 5^y=75;\\ 3^y\cdot 5^x=45.\end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
(1; 2)	(3; 5)	(2; 1)	інша відповідь	(2; 3)

■ $\begin{cases}3^x\cdot 5^y=75;\\ 3^y\cdot 5^x=45;\end{cases}$ $\begin{cases}\dfrac{3^x\cdot 5^y}{3^y\cdot 5^x}=\dfrac{75}{45};\\ 3^x\cdot 5^y\cdot 3^y\cdot 5^x=75\cdot 45;\end{cases}$ $\begin{cases}3^{x-y}\cdot 5^{y-x}=\dfrac{75}{45};\\ 3^{x+y}\cdot 5^{x+y}=5\cdot 15\cdot 3\cdot 15;\end{cases}$ $\begin{cases}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{x-y}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{-1};\\ x+y=3;\end{cases}$ $\begin{cases}x-y=-1;\\ x+y=3;\end{cases}$

$2x=2$; $x=1$, $y=2$. *Відповідь.* А. ■

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}x^4+y^4=17(x+y)^2;\\ xy=2(x+y).\end{cases}$

■ Уведемо заміну $x+y=t$, $xy=z$. Перетворимо ліву частину першого рівняння: $x^4+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2z^2=(x^2+2xy+y^2-2xy)^2-2z^2=((x+y)^2-2z)^2-2z^2=$

$=(t^2-2z)^2-2z^2=t^4-4t^2z+2z^2$. Тоді одержимо: $\begin{cases}t^4-4t^2z+2z^2=17t^2;\\ z=2t;\end{cases}$ звідки перше рівняння можна переписати так: $t^4-4t^2\cdot 2t+2(2t)^2=17t^2$; $t^4-8t^3-9t^2=0$; $t^2(t^2-8t-9)=0$, яке має розв'язки $t_1=1$,

$a=-1,\ b=9$. Із рівності $z=2t$ маємо, що $z_1=0,\ z_2=-2,\ z_3=18$. Тоді одержуємо три системи:

1) $\begin{cases} x+y=0; \\ xy=0, \end{cases}$ звідки розв'язком є $(0;\ 0)$; 2) $\begin{cases} x+y=-1; \\ xy=-2, \end{cases}$ звідки розв'язками є $(1;\ -2)$ і $(-2;\ 1)$;

3) $\begin{cases} x+y=9; \\ xy=18, \end{cases}$ звідки розв'язками є $(3;\ 6)$ і $(6;\ 3)$. *Відповідь.* $(0;\ 0)$, $(1;\ -2)$, $(-2;\ 1)$, $(3;\ 6)$, $(6;\ 3)$. ■

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^{x-2y}=36; \\ 4(x-2y)+\log_6 x=9. \end{cases}$

■ Прологарифмуємо перше рівняння системи за основою 6, врахувавши, що $x>0$, а значить, $x^{x-2y}>0$ й одержимо: $\begin{cases} (x-2y)\log_6 x=2; \\ x-2y=\dfrac{1}{4}(9-\log_6 x). \end{cases}$ Увівши заміну $t=\log_6 x$, одержимо: $\begin{cases} (x-2y)\cdot t=2; \\ x-2y=\dfrac{1}{4}(9-t). \end{cases}$

Далі маємо: $\dfrac{1}{4}(9-t)t=2;\ t^2-9t+8=0;\ t_1=1,\ t_2=8.$

Отже, $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_6 x=1; \\ x-2y=\dfrac{1}{4}(9-\log_6 x); \end{cases} \\ \begin{cases} \log_6 x=8; \\ x-2y=\dfrac{1}{4}(9-\log_6 x); \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6; \\ 6-2y=\dfrac{1}{4}(9-1); \end{cases} \\ \begin{cases} x=6^8; \\ 6^8-2y=\dfrac{1}{4}(9-8); \end{cases} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6; \\ y=2; \end{cases} \\ \begin{cases} x=6^8; \\ y=\dfrac{4\cdot 6^8-1}{8}. \end{cases} \end{array}\right.$ *В-дь.* $(6;\ 2)$, $\left(6^8;\ \dfrac{4\cdot 6^8-1}{8}\right)$. ■

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)}=50; \\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=2-\lg 5. \end{cases}$

■ Прологарифмуємо перше рівняння системи й одержимо:

$\begin{cases} 1+\lg(x+y)=\lg 5+1; \\ \lg\big((x-y)(x+y)\big)=2-\lg 5; \end{cases}$ $\begin{cases} \lg(x+y)=\lg 5; \\ \lg\big((x-y)(x+y)\big)=\lg\dfrac{10^2}{5}; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5; \\ (x-y)(x+y)=20; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5; \\ 5(x-y)=20; \end{cases}$ $\begin{cases} x+y=5; \\ x-y=4; \end{cases}$

$\begin{cases} x+y=5; \\ 2x=9; \end{cases}$ $\begin{cases} x=4,5; \\ y=0,5. \end{cases}$ *Відповідь.* $(4,5;\ 0,5)$. ■

Приклад 7. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{5}{2}; \\ x^2-y^2=3. \end{cases}$

■ Уведемо заміну $z=\dfrac{y}{x}$ й одержимо: $\begin{cases} \dfrac{1}{z}+z=\dfrac{5}{2}; \\ x^2-y^2=3; \end{cases}$ $\begin{cases} 2z^2-5z+2=0; \\ x^2-y^2=3; \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z_1=0,5; \\ x^2-y^2=3; \end{cases} \\ \begin{cases} z_2=2; \\ x^2-y^2=3; \end{cases} \end{array}\right.$

1. $\begin{cases} \dfrac{y}{x}=0,5; \\ x^2-y^2=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=0,5x; \\ x^2-(0,5x)^2=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=0,5x; \\ 0,75x^2=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=0,5x; \\ x^2=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1=2;\ y_1=1; \\ x_2=-2;\ y_2=-1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \frac{y}{x}=2; \\ x^2-y^2=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x; \\ x^2-4x^2=3; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x; \\ -3x^2=3; \end{cases}$ $\varnothing$.

Отже, розв'язками системи є $(-2;-1)$, $(2;1)$. *Відповідь.* $(-2;-1)$, $(2;1)$. ■

Приклад 8. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1; \\ y=3-|x-1|. \end{cases}$

■ $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1, \\ y=3-|x-1|; \end{cases}$ $\begin{cases} |x-1|+|y-2|=1, \\ |x-1|=3-y. \end{cases}$ Підставимо друге рівняння в перше: $3-y+|y-2|=1$;

1. Якщо $y-2<0$, то матимемо: $3-y-(y-2)=1$; $-2y=-4$; $y=2$; $y=\varnothing$.

2. Якщо $y-2\geq 0$, то матимемо: $3-y+y-2=1$; $1=1$; $y\geq 2$.

З другого рівняння матимемо: $|x-1|=3-y$; $3-y\geq 0$; $2\leq y\leq 3$; $-3\leq -y\leq -2$; $0\leq 3-y\leq 1$.

Тоді: $0\leq |x-1|\leq 1$; $-1\leq x-1\leq 1$; $0\leq x\leq 2$.

При $0\leq x\leq 1$: $1-x=3-y$; $y=2+x$; при $1<x\leq 2$: $x-1=3-y$; $y=4-x$.

Загальний розв'язок системи зручно зобразити графічно.



■

Приклад 9. Обчислити площу фігури, утвореної системою лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} 2-y\leq 0; \\ 3y+4x-30\leq 0; \\ 4y-3x-5\leq 0. \end{cases}$$

Знайдемо точки перетину відповідних прямих $\begin{cases} y=2; \\ 3y+4x-30=0; \\ 4y-3x-5=0. \end{cases}$

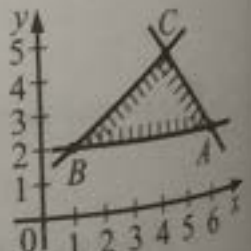
Прямі, задані рівняннями 1 і 2: $\begin{cases} y=2; \\ 3y+4x-30=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2; \\ 6+4x-30=0; \end{cases}$ $A(6;2)$.

Прямі, задані рівняннями 1 і 3: $\begin{cases} y=2; \\ 4y-3x-5=0; \end{cases}$ $\begin{cases} y=2; \\ 8-3x-5=0; \end{cases}$ $B(1;2)$.

Прямі, задані рівняннями 2 і 3:

$\begin{cases} 3y+4x-30=0; \ |\cdot 3 \\ 4y-3x-5=0; \ |\cdot 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 3y+4x-30=0; \\ 25y-110=0; \end{cases}$ $\begin{cases} 13,2+4x-30=0; \\ y=4,4; \end{cases}$ $C(4,2;4,4)$.

Накреслимо прямі і позначимо області, задані нерівностями:



$$\begin{cases} y\geq 2; \text{ (область над прямою } AB) \\ y\leq 0,75x+1,25; \text{ (область під прямою } BC) \\ y\leq -\frac{4}{3}x+10. \text{ (область під прямою } AC) \end{cases}$$

Утворився трикутник ABC, з вершинами $A(6;2)$, $B(1;2)$, $C(4{,}2;4{,}4)$. Висота трикутника дорівнює $h=4{,}4-2=2{,}4$, $AB=6-1=5$. Отже, $S=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2{,}4=$ $=6$ (кв. од.). *Відповідь.* 6.

Завдання 20.1–20.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

20.1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x+3y=14; \\ 2y-x=6 \end{cases}$ і знайти добуток компонентів розв'язку.

А	Б	В	Г	Д
16	20	8	$1\frac{1}{5}$	$13\frac{1}{3}$

20.2. Дано систему рівнянь $\begin{cases} x+y=3; \\ 2x-3y=-4. \end{cases}$ Яке утвориться рівняння, якщо з першого рівняння виразити змінну y через x, і отриманий вираз підставити у друге рівняння замість y?

А	Б	В	Г	Д
$5x+3=-4$	$3x-9=-4$	$5x-3=-4$	$5x+9=-4$	$5x-9=-4$

20.3. Знайти суму компонентів $x_0 + y_0 + z_0$ розв'язку системи рівнянь $\begin{cases} x+y=-2; \\ y+z=-11; \\ x+z=1. \end{cases}$

А -6 Б -12 В -18 Г -24 Д -3

20.4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3x+4y=-20; \\ 5x+2y=-10. \end{cases}$

А $(3; 4)$ Б $(0; -5)$ В $(7; 9)$ Г $(2; -4)$ Д $(1; -7{,}5)$

20.5. Знайти середнє арифметичне чисел x та y, які є розв'язками системи рівнянь $\begin{cases} 3x+2y=7; \\ -x+3y=16. \end{cases}$

А 3 Б 2 В 1 Г 4 Д 3,5

20.6. Знайти компонент x_0 розв'язку $(x_0; y_0)$ системи рівнянь $\begin{cases} \frac{2}{x}+\frac{1}{y}=4; \\ \frac{1}{x}-\frac{3}{y}=9. \end{cases}$

А 3 Б $\frac{1}{3}$ В 147 Г 91 Д $1\frac{6}{7}$

20.7. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ x^2-2y^2=-7? \end{cases}$

А Один Б два В три Г чотири Д жодного

20.8. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} |x-3|-y=0, \\ xy-4=0? \end{cases}$

А Один Б два В три Г чотири Д жодного

20.9. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x-y=16; \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=8 \end{cases}$ і вказати добуток компонентів її розв'язку.

А 34 Б 128 В 64 Г 15 Д 225

20.10. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 3^{x+y}=27; \\ 4^{x-y}=0{,}25 \end{cases}$ і вказати компонент x_0 її розв'язку $(x_0; y_0)$.

А 0 Б -1 В 1 Г 2 Д -2

20.11. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}\lg(x+y)=2;\\ \lg(x-y)=1\end{cases}$ і вказати компонент y_0 її розв'язку $(x_0; y_0)$.

А 35 Б 110 В 90 Г 55 Д 45

20.12. Знайти суму компонентів розв'язку системи рівнянь $\begin{cases}\lg x+\lg y=\lg 2;\\ x^2+y^2=5.\end{cases}$

А –3 Б 3 В $\sqrt{7}$ Г 9 Д 7

20.13. Яка з наведених систем за будь-яких значень p має єдиний розв'язок?

А $\begin{cases}2y=x;\\ y=0{,}5x+p\end{cases}$ Б $\begin{cases}0{,}5x+y=3;\\ x+2y=p\end{cases}$ В $\begin{cases}x-2y=5;\\ 2x-4y=p\end{cases}$ Г $\begin{cases}x+2y=3;\\ x-y=p\end{cases}$ Д $\begin{cases}x-3y=5;\\ 6y-2x=p\end{cases}$

20.14. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases}2x-y=5;\\ x+ay=2\end{cases}$ не має розв'язків?

А 0,5 Б –0,5 В –1 Г 2,5 Д 10

20.15. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases}3x+y=-15;\\ -x-ay=5\end{cases}$ має безліч розв'язків?

А $\frac{1}{3}$ Б $-\frac{1}{3}$ В 3 Г –3 Д –1

20.16. За яких значень a і b система рівнянь $\begin{cases}6x+by=5a;\\ 5ax-6y=b\end{cases}$ має розв'язок $(-1; 2)$?

А	Б	В	Г	Д
$a=2$, $b=2$	$a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$	$a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$	$a=-2$, $b=-2$	$a=-1$, $b=2$

20.17. Скільки розв'язків системи рівнянь $\begin{cases}x^2-2xy+y^2=4;\\ x^2+xy=4\end{cases}$ містять нульовий компонент?

А Один Б два В три Г чотири Д жодного

20.18. Знайти $|x-y|$, якщо $\begin{cases}x^2-xy=79,\\ y^2-xy=2.\end{cases}$

А 8 Б 9 В $\sqrt{77}$ Г 7 Д 81

20.19. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases}|x|-|y|=0;\\ x^2-4x=0?\end{cases}$

А Один Б два В три Г більше, ніж три Д жодного

20.20. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases}x^2+y^2=4;\\ x-y=a\end{cases}$ має єдиний розв'язок?

А	Б	В	Г	Д
$a=3$	$a=2\sqrt{3}$	$a=-2\sqrt{2}$ або $a=2\sqrt{2}$	$a=-2\sqrt{3}$ або $a=2\sqrt{3}$	$a=-\sqrt{2}$ або $a=\sqrt{2}$

20.21. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases}xy=6;\\ yz=8;\\ zx=12?\end{cases}$

А Один Б два В три Г чотири Д жодного

20.22. За якого значення k пряма $y = kx + 2$ проходить через точку перетину прямих $x + y = 5$ і $x - y = 1$?

А –2 Б –1 В 0 Г 1 Д 2

20.23. За якого значення a система рівнянь $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1\frac{1}{2}; \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = -\frac{1}{2}; \\ ax + y = 13 \end{cases}$ має розв'язок?

А –2 Б –3 В 4 Г 5 Д 6

Завдання 20.24–20.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

20.24. Установити відповідність між системами рівнянь (1–3) та кількістю їх розв'язків (А–Д).

1 $\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 1{,}5x + 3y = 6 \end{cases}$

2 $\begin{cases} 2x + 3y = 10; \\ 4x + 6y = 7 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ 4x + 5y = 19 \end{cases}$

А Жодного
Б Один
В Два
Г Три
Д Безліч

20.25. Установити відповідність між системами рівнянь (1–3) та першими компонентами x_0 розв'язків $(x_0; y_0)$ цих систем (А–Д).

1 $\begin{cases} x + y = 20; \\ x - y = 14 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + y = 19; \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x + y = 16; \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

А 8 Б 10 В 12 Г 14 Д 17

20.26. Установити відповідність між системами рівнянь (1–3) та рівняннями (А–Д), які утворюються з цих систем при їх розв'язуванні способом підстановки.

1 $\begin{cases} x - y = 1; \\ xy = 20 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + y = 1; \\ xy = -20 \end{cases}$

3 $\begin{cases} x - y = 1; \\ xy = -20 \end{cases}$

А $y^2 + 20y = 0$
Б $y^2 + y + 20 = 0$
В $y^2 + y - 20 = 0$
Г $y^2 - y + 20 = 0$
Д $y^2 - y - 20 = 0$

20.27. Установити відповідність між системами рівнянь (1–3) та першими компонентами x_0 розв'язків $(x_0; y_0)$ цих систем (А–Д).

1 $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{6}; \\ \frac{1}{x} - \frac{5}{y} = -\frac{1}{12} \end{cases}$

2 $\begin{cases} \sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 13; \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 3^{x-y} = 81; \\ 2^{x+\frac{y}{2}} = 128 \end{cases}$

А 6 Б 12 В 16 Г 20 Д 24

20.28. Установити відповідність між системами рівнянь (1–3) та кількістю їх розв'язків (А–Д).

1 $\begin{cases} xy = 1; \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$

2 $\begin{cases} xy = 1; \\ x - y = 0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} xy = 1; \\ x + y = 0 \end{cases}$

А Жодного

Б Один

В Два

Г Три

Д Чотири

Розв'яжіть завдання 20.29–20.45. Відповідь запишіть десятковим дробом.

20.29. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x + 5y = 12; \\ 3x - 4y = -5. \end{cases}$ У відповідь записати суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.30. Указати значення параметра a, за якого система $\begin{cases} ax + 3y = 9; \\ 12x + ay = 18 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

20.31. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 7; \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.32. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3; \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.33. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - xy = 6; \\ y^2 - xy = 3. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.34. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - 3xy + y^2 = -1; \\ 2x^2 + 5xy - y^2 = 17. \end{cases}$ У відповідь записати найбільше значення x із розв'язків системи.

20.35. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \dfrac{3}{2x+y} + \dfrac{1}{2x-y} = \dfrac{2}{5}; \\ \dfrac{7}{2x+y} + \dfrac{2}{2x-y} = \dfrac{3}{5}. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.36. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1; \\ y(x+2) = 40. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.37. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 4^y = 14; \\ 3^x + 4^y = 13. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.38. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 10^{\lg x \cdot \lg(x+1)} = 40; \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 3\lg 2. \end{cases}$

У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.39. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y+1} = 10; \\ \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{y+1} = 16. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.40. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy = 1; \\ yz = 2; \\ zx = 8. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0 + z_0$, де $(x_0; y_0; z_0)$ — розв'язок системи.

20.41. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 4xy - \dfrac{x}{y} = 30; \\ 3xy + \dfrac{2x}{y} = 28. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.42. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 2x^2 + xy - y^2 = 0; \\ x^2 - 3xy + y^2 = -1. \end{cases}$ У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.43. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \log_8(xy) = 3\log_8 x \cdot \log_8 y; \\ 4\log_8 \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_8 x}{\log_8 y}. \end{cases}$

У відповідь записати найбільшу суму $x_0 + \sqrt{2}\, y_0$, де $(x_0; y_0)$ — розв'язок системи.

20.44. За якого значення a сума $x + y$ набуває найменшого значення, якщо $\begin{cases} 2x + 3y = 2a^2 - 12a + 8; \\ 3x - 2y = 3a^2 + 8a + 12? \end{cases}$

20.45. Знайти всі значення параметра a, за якого площа фігури, заданої системою нерівностей $\begin{cases} y \geq 1; \\ y \leq -x^2 + (a+1)x - a, \end{cases}$ буде більше 4/3. У відповіді вказати найменше ціле додатне значення a.

Тема 21. Числові послідовності. Арифметична та геометрична прогресії

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— означення арифметичної та геометричної прогресій;
— використовувати основні властивості арифметичної та геометричної прогресій;
— формули n-го члена арифметичної та геометричної прогресій;
— формули перших n членів арифметичної та геометричної прогресій;
— розрізняти арифметичні та геометричні прогресії;
— розв'язувати задачі на арифметичну та геометричну прогресії.

Послідовністю називають функцію, задану на множині всіх натуральних чисел (нескінченна послідовність) або на множині перших n натуральних чисел (скінченна послідовність). Число a_1 називають *першим членом* послідовності, a_n — n-м членом, а натуральне число n — його *номером*. Ми розглядатимемо лише послідовності, елементами яких є числа. Їх називають *числовими послідовностями*.

Послідовності позначають (a_n), (b_n), (c_n), ... і записують: (a_n): a_1, a_2, a_3, ... Зростаючою (спадною) називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, більший (менший) за попередній. Наприклад, розглянемо послідовність (a_n): 2; 4; 6; 8; ... — послідовність парних натуральних чисел, у якій $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$, ... Член послідовності $a_2 = 4$ є попереднім до члена $a_3 = 6$ і наступним за членом $a_1 = 2$. Числову послідовність можна задавати: формулою n-ого члена, таблицею, рекурентною тощо. Наприклад, знайти четвертий член послідовності, n-й член якої заданий формуло $c_n = n^3 - n$. $c_4 = 4^3 - 4 = 60$.

Арифметична прогресія. *Арифметичною прогресією* називають послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, утворюється додаванням до попереднього члена одного і того самого числа. Це число називають *різницею арифметичної прогресії* і позначають d. Отже, якщо (a_n): a_1; a_2; ...; a_n; ... — арифметична прогресія, то $a_2 = a_1 + d$; $a_3 = a_2 + d$; ..., тобто для будь-якого натурального n виконується рівність $a_{n-1} = a_n + d$. Наприклад: а) послідовність (a_n): –8; –1; 6; 13; ... є арифметичною прогресією, перший член якої дорівнює $a_1 = -8$, а різниця — $d = 7$; б) 4; 7; 10; 13; 16; 19 — скінченна арифметична прогресія, у якій $d = 3$; –4; –11; –18; –25; ... — нескінченна арифметична прогресія, у якій $d = -7$; 3; 3; 3; 3; ... — нескінченна арифметична прогресія, у якій $d = 0$.

Арифметична прогресія має такі властивості:

Властивість 1. Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів. Тобто якщо a_1; a_2; a_3; a_4; ... — арифметична прогресія, то $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$; $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$; ...; $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$. Правильно й навпаки: послідовність, у якій будь-який член, починаючи з другого, є середнім арифметичним двох сусідніх з ним членів, є арифметичною прогресією. Наприклад, знайти невідомі члени арифметичної прогресії (a_n): –11; a_2; –21; –26; a_5; –36. $a_1 = -11$, $a_3 = -21$. Тоді $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{-11 - 21}{2} = -16$; $a_5 = \frac{a_4 + a_6}{2} = \frac{-26 - 36}{2} = -31$;

Властивість 2. Сума будь-яких двох членів скінченної арифметичної прогресії, які рівновіддалені від її крайніх членів, дорівнює сумі крайніх членів цієї прогресії. Тобто якщо (a_n): a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6 — арифметична прогресія, то $a_1 + a_6 = a_2 + a_5 = a_3 + a_4$. Наприклад, знайти суму середніх членів арифметичної прогресії (a_n): 5; 7; ...; 19. $a_1 = 5$, $a_2 = 7$, тоді різниця — $d = 7 - 5 = 2$. Неважко бачити, що $19 = a_8$. Тому середніми членами цієї прогресії є a_4 і a_5. Тоді $a_4 + a_5 = a_1 + a_8 = 5 + 19 = 24$.

Формула n-го члена арифметичної прогресії має вигляд $a_n = a_1 + d(n-1)$, де a_1 — перший член прогресії, d — різниця, n — порядковий номер члена прогресії.

Наприклад: а) нехай задано арифметичну прогресію (a_n), у якій $a_1 = 3{,}2$ і $d = 0{,}3$, потрібно знайти a_{10}. Запишемо формулу n-го члена арифметичної прогресії $a_n = a_1 + d(n-1)$. Тоді маємо $a_{10} = a_1 + 9d = 3{,}2 + 9 \cdot 0{,}3 = 5{,}9$; б) знайти п'ятий член арифметичної прогресії (a_n), якщо її восьмий член дорівнює 24, а різниця — 3. Оскільки $a_n = a_1 + d(n-1)$, то $a_5 = a_1 + 4d$. Знайдемо a_1: $a_8 = a_1 + 7d$, звідки $a_1 = a_8 - 7d = 24 - 7 \cdot 3 = 3$. Тоді $a_5 = 3 + 4 \cdot 3 = 15$.

Для обчислення *суми n перших членів арифметичної прогресії* використовують такі формули:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \qquad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Наприклад, знайти суму десяти перших членів арифметичної прогресії (a_n), у якій $a_1 = -4$, $d = 2$. За другою формулою знаходимо: $S_{10} = \frac{2 \cdot (-4) + 2(10-1)}{2} \cdot 10 = 50$.

Геометрична прогресія. *Геометричною прогресією* називають послідовність, перший член якої відмінний від нуля, а інші утворюються множенням попереднього члена на одне й те саме число, відмінне від нуля. Це число називають *знаменником геометричної прогресії* і позначають q. Отже, якщо (b_n): b_1; b_2; b_3; …; b_n; … — геометрична прогресія, то для будь-якого натурального n виконується рівність: $b_{n+1} = b_n \cdot q$. Знаменник геометричної прогресії дорівнює частці від ділення будь-якого її члена, починаючи з другого, на попередній, тобто: $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \ldots = \frac{b_n}{b_{n-1}}$. Якщо (b_n) — геометрична прогресія, то її рекурентна формула має вигляд: $b_{n+1} = b_n \cdot q$, $b_1 \neq 0$, $q \neq 0$.

Наприклад: а) послідовність (b_n): 1; 3; 9; 27; ... є нескінченною геометричною прогресією, перший член якої дорівнює $b_1 = 1$, а знаменник — $q = 3$; б) 3; 1; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$; $\frac{1}{27}$ — скінченна геометрична прогресія, у якій $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{3}$; в) 5; –10; 20; –40; … — нескінченна геометрична прогресія, у якій $b_1 = 5$, $q = -2$; г) 7; 7; 7; 7; … — нескінченна геометрична прогресія, у якій $b_1 = 7$, $q = 1$.

Геометрична прогресія має такі властивості:

Властивість 1. Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів. Отже, якщо (b_n): b_1; b_2; …; b_n; … — геометрична прогресія, то $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$, $b_3^2 = b_2 \cdot b_4$ тощо. Правильно й навпаки: якщо в деякій послідовності відмінних від нуля чисел квадрат будь-якого числа, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним чисел, то ця послідовність є геометричною прогресією. Якщо всі члени геометричної прогресії (b_n) є додатними числами, то з рівності $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ випливає $b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Кожний член такої прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів. Наприклад, знайти сьомий член геометричної прогресії (b_n), якщо $b_6 = 3$, $b_8 = 27$. За описаною вище властивістю геометричної прогресії маємо: $b_7^2 = b_6 \cdot b_8$; $b_7^2 = 3 \cdot 27 = 81$; $b_7 = \pm 9$. Отже, $b_7 = 9$ або $b_7 = -9$.

Властивість 2. Добутки членів скінченної геометричної прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів, однакові й дорівнюють добутку її крайніх членів. Тобто якщо (b_n): b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 — скінченна геометрична прогресія, то $b_1 \cdot b_6 = b_2 \cdot b_5 = b_3 \cdot b_4$. Наприклад, знайти сьомий член геометричної прогресії (b_n) b_1, b_2,…, b_7, b_8, якщо $b_1 = -3$, $b_2 = 6$ та $b_8 = 384$. За описаною вище властивістю геометричної прогресії маємо: $b_2 \cdot b_7 = b_1 \cdot b_8$; $b_7 = b_1 \cdot b_8 : b_2 = (-3) \cdot 384 : 6 = -192$.

Формула n-го члена геометричної прогресії: $b_n = b_1 q^{n-1}$, де b_1 — перший член прогресії, q — її знаменник, n — порядковий номер члена прогресії.

Наприклад, між числами 3 і 48 вставити такі три числа, щоб вони разом з даними числами утворювали геометричну прогресію (b_n). Нехай (b_n): 3; b_2; b_3; b_4; 48 — дана геометрична прогресія. Використавши формулу $b_n = b_1 q^{n-1}$ й урахувавши, що $b_1 = 3$, $b_5 = 48$, складемо та розв'яжемо рівняння: $48 = 3 \cdot q^4$; $q^4 = 16$; $q = \pm 2$. Якщо $q = 2$, то $b_2 = 3 \cdot 2 = 6$, $b_3 = 6 \cdot 2 = 12$, $b_4 = 12 \cdot 2 = 24$. Якщо $q = -2$, то $b_2 = 3 \cdot (-2) = -6$, $b_3 = 12$, $b_4 = -24$. Одержали прогресії: 3; 6; 12; 24; 48 або 3; –6; 12; –24; 48.

Для обчислення *суми n перших членів геометричної прогресії* (b_n), де b_1 — перший член, b_n — n-й член, q — її знаменник, $q \neq 1$, n — кількість членів, використовують такі формули:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \text{ або } S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}, q \neq 1.$$

Формула ж суми n перших членів геометричної прогресії, знаменник q якої дорівнює 1: $S_n = n \cdot b_1$.

Наприклад, знайти суму перших чотирьох членів геометричної прогресії, перший член якої $b_1 = \frac{1}{40}$, а знаменник — $q = \frac{1}{3}$.

За формулою $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ маємо: $S_4 = \frac{\frac{1}{40}\cdot\left(1-(1/3)^4\right)}{1-1/3} = \frac{1}{40}\cdot\frac{80}{81}\cdot\frac{3}{2} = \frac{1}{27}$.

Нескінченно спадна геометрична прогресія*

У прогресіях 1; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{4^2}$; $\frac{1}{4^3}$; ...; $\frac{1}{4^{n-1}}$; ..., 1; $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{3^2}$; $-\frac{1}{3^3}$; ...; $\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$; ... зі зростанням номера n модулі їхніх членів необмежено зменшуються, наближуючись до нуля. Прогресії такого виду називають нескінченно спадними. Геометричну прогресію називають *нескінченно спадною*, якщо модуль її знаменника менший за одиницю, тобто $|q| < 1$.

Сумою всіх членів нескінченно спадної геометричної прогресії (b_n) називають число, до якого прямує сума її перших n членів за необмеженого збільшення n. Формула *суми нескінченно спадної геометричної прогресії* має вигляд:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Наприклад, знайти суму членів послідовності 2; 1; $\frac{1}{2}$; ... . Задана послідовність є нескінченно спадною геометричною прогресією, у якій перший член дорівнює 2, а знаменник — $\frac{1}{2}$. Тоді сума членів прогресії дорівнює: $S = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$.

Приклад 1. Послідовність (a_n) задана формулою n-го члена $a_n = 2n^2 + 1$. Знайти: a_3, a_5, a_9.

■ $a_3 = 2\cdot 3^2 + 1 = 19$; $a_5 = 2\cdot 5^2 + 1 = 51$; $a_9 = 2\cdot 9^2 + 1 = 163$. *Відповідь.* 19; 51; 163. ■

Приклад 2. Числова послідовність (a_n) задано формулою n-го члена $a_n = (n-1)(n+4)$. Чи є членом цієї послідовності число: **а)** 150; **б)** 8?

■ **а)** Розв'яжемо рівняння: $(n-1)(n+4) = 150$, де $n \in N$; $n^2 + 3n - 154 = 0$; $n_1 = 11$, $n_2 = -14$ — не задовольняє умови задачі. Отже, число 150 є членом послідовності;

б) розв'яжемо рівняння: $(n-1)(n+4) = 8$; $n^2 + 3n - 12 = 0$; $n_1 = \frac{-3+\sqrt{57}}{2}$, $n_2 = \frac{-3-\sqrt{57}}{2}$, $n_1 \notin N$, $n_2 \notin N$. Отже, число 8 не є членом послідовності. *Відповідь.* **а)** Так, **б)** ні. ■

Приклад 3. Записати для арифметичної прогресії (a_n): –38; –34; –30; ... формулу n-го члена.

■ Оскільки $a_1 = -38$, $a_2 = -34$, то $d = a_2 - a_1 = -34 - (-38) = 4$. Формула n-го члена арифметичної прогресії (a_n): $a_n = -38 + 4(n-1) = 4n - 42$. *Відповідь.* $a_n = 4n - 42$. ■

Приклад 4. Знайти різницю і п'ятий член арифметичної прогресії (a_n): **а)** 9,8; 11; 12,2; 13,4 ...; **б)** $\sqrt{3}-7$; $\sqrt{3}-4$; $\sqrt{3}-1$; $\sqrt{3}+2$; ... .

■ **а)** $d = a_2 - a_1 = 11 - 9{,}8 = 1{,}2$; $a_4 = 13{,}4$; $a_5 = a_4 + d = 13{,}4 + 1{,}2 = 14{,}6$;

б) $d = a_4 - a_3 = \sqrt{3} + 2 - (\sqrt{3} - 1) = 3$; $a_4 = \sqrt{3} + 2$; $a_5 = a_4 + d = \sqrt{3} + 2 + 3 = \sqrt{3} + 5$.

Відповідь. **а)** 14,6; **б)** $\sqrt{3} + 5$. ■

Приклад 5. Між числами 2,5 і 4 вставити два таких числа, щоб вони разом з даними утворювали арифметичну прогресію (a_n).

■ Маємо прогресію (a_n): 2,5; a_2; a_3; 4. Використавши формулу $a_n = a_1 + d(n-1)$ й урахувавши, що $a_1 = 2{,}5$; $a_4 = 4$, складемо та розв'яжемо рівняння: $2{,}5 + 3d = 4$; $3d = 1{,}5$; $d = 0{,}5$. Тоді $a_2 = 2{,}5 + 0{,}5 = 3$; $a_3 = 3 + 0{,}5 = 3{,}5$. *Відповідь.* 3; 3,5. ■

Приклад 6. Знайти суму всіх трицифрових чисел, кратних 4, та менших за 250.

А	Б	В	Г	Д
124	4712	174	6612	348

■ Вказані числа утворюють арифметичну прогресію, перший член якої $a_1 = 100$, різниця $d = 4$. За формулою n-го члена одержимо: $a_n = 100 + 4(n-1) = 4n + 96$.

Щоб знайти кількість членів прогресії, складемо нерівність: $4n + 96 < 250$; $n < 38{,}5$. Отже, потрібно знайти суму 38 перших членів арифметичної прогресії. $S_{38} = \frac{2 \cdot 100 + 4 \cdot 37}{2} \cdot 38 = 6612$. *В-дь.* **Г.** ■

Приклад 7. Шість чисел утворюють арифметичну прогресію (a_n). Сума перших трьох її членів дорівнює -24, а сума трьох останніх дорівнює 12. Знайти ці числа.

■ Урахувавши, що $S_3 = -24$, $S_6 = -24 + 12 = -12$, складемо і розв'яжемо систему:

$$\begin{cases} \frac{2a_1 + 2d}{2} \cdot 3 = -24, \\ \frac{2a_1 + 5d}{2} \cdot 6 = -12; \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 + d = -8, \\ 2a_1 + 5d = -4; \end{cases}$$

$3d = 12$; $d = 4$. Тоді: $a_1 = -8 - 4 = -12$; $a_2 = -12 + 4 = -8$; $a_3 = -8 + 4 = -4$; $a_4 = -4 + 4 = 0$; $a_5 = 0 + 4 = 4$; $a_6 = 4 + 4 = 8$. *Відповідь.* -12; -8; -4; 0; 4; 8. ■

Приклад 8. Щоб заасфальтувати ділянку завдовжки 117 м, використовують два асфальтоукладачі. Перший встановили на одному кінці ділянки, другий — на протилежному. Працювати вони почали одночасно. За першу хвилину перший асфальтоукладач пройшов 1 м, за кожну наступну хвилину він проходив на 0,5 м більше, ніж за попередню. Другий за кожну хвилину проходив 6 м. Через скільки хвилин обидва асфальтоукладачі зустрінуться?

■ Нехай обидва асфальтоукладачі зустрінуться через x хв, тоді другий укладач пройде до зустрічі шлях, що дорівнює $6x$ м, а перший пройде шлях, який можна виразити за допомогою суми членів арифметичної прогресії, де $a_1 = 1$, $n = x$, $d = 0{,}5$. $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = \frac{2 + 0{,}5(x-1)}{2} \cdot x = \frac{4 + x - 1}{4} \cdot x = \frac{3x + x^2}{4}$. Увесь шлях дорівнює 117 м. Отже, маємо квадратне рівняння $6x + \frac{3x + x^2}{4} = 117$. $x^2 + 27x - 468 = 0$, звідки $x_1 = 12$, $x_2 = -39$ — не задовольняє умову задачі. Отже, обидва асфальтоукладачі зустрінуться через 12 хв. *Відповідь.* 12 хв. ■

Приклад 9. Знайти знаменник та четвертий член геометричної прогресії (b_n): 4; -6; 9; … .

■ $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2}$; $b_4 = b_3 \cdot q = 9 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{2} = -13{,}5$. *Відповідь.* $-\frac{3}{2}$; $-13{,}5$. ■

Приклад 10. За яких значень x числа 5^{5x}, $10^{\frac{3x^2+3}{4}}$ і 32^x будуть послідовними членами геометричної прогресії (b_n)? У відповідь записати добуток цих значень.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

■ За властивістю 1 геометричної прогресії маємо: $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$. Тоді: $\left(10^{\frac{3x^2+3}{4}}\right)^2 = 5^{5x} \cdot 32^x$;

$10^{\frac{3x^2+3}{2}} = 5^{5x} \cdot 2^{5x}$; $10^{\frac{3x^2+3}{2}} = 10^{5x}$; $\frac{3x^2+3}{2} = 5x$; $3x^2 - 10x + 3 = 0$; $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{1}{3}$. Тоді $x_1 \cdot x_2 = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$. *В-дь.* **А.** ■

Приклад 11. Знайти чотири числа, що утворюють геометричну прогресію (b_n), у якій сума крайніх членів дорівнює 27, а добуток середніх — 72.

■ Маємо геометричну прогресію b_1; b_2; b_3; b_4, у якій $b_1 + b_4 = 27$, $b_2 \cdot b_3 = 72$. Оскільки $b_2 b_3 = b_1 b_4$, то складемо і розв'яжемо систему: $\begin{cases} b_1 + b_4 = 27, \\ b_1 \cdot b_4 = 72. \end{cases}$ Звідки $b_1 = 3$, $b_4 = 24$ або $b_1 = 24$, $b_4 = 3$. Маємо дві прогресії: 1) 3; b_2; b_3; 24, 2) 24; b_2; b_3; 3. Знайдемо b_2 і b_3 в кожному з випадків.

1) Використавши формулу n-го члена геометричної прогресії, одержимо: $b_4 = b_1 q^3$; $3 \cdot q^3 = 24$; $q^3 = 8$; $q = 2$. Тоді $b_2 = 3 \cdot 2 = 6$; $b_3 = 6 \cdot 2 = 12$. Маємо прогресію 3; 6; 12; 24.

2) $b_4 = b_1q^3$; $24q^3 = 3$; $q^3 = \frac{1}{8}$; $q = \frac{1}{2}$. Маємо прогресію: 24; 12; 6; 3. *В-дь.* 3; 6; 12; 24 або 24; 12; 6; 3. ■

Приклад 12. З однієї бактерії за 30 хвилини утворюється дві, кожна з яких за 30 хвилини знову ділиться навпіл тощо. Скільки бактерій буде в організмі з однієї через добу?

А	Б	В	Г	Д
2^{30}	2^{48}	2^{24}	60	30

■ Число бактерій збільшується удвічі через кожні півгодини. Якщо зафіксувати кількість бактерій щопівгодини, то одержимо послідовність: 1; 2; 2^2; 2^3; ...; 2^{n-1}. Ця послідовність є геометричною прогресією. Потрібно визначити, скільки бактерій утвориться з однієї бактерії через 24 год (48 разів по півгодини), тобто потрібно знайти 49-й член прогресії. Маємо $b_1 = 1$, $q = 2$, $n = 49$. Тоді за формулою $b_n = b_1q^{n-1}$ маємо: $b_{49} = 1 \cdot 2^{49-1} = 2^{48}$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 13*. Знайти третій член нескінченної геометричної прогресії (b_n), сума якої дорівнює $\frac{8}{5}$, а другий член — $-\frac{1}{2}$.

■ За умовою складаємо та розв'язуємо систему: $\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = \frac{8}{5}, \\ b_1q = -\frac{1}{2}. \end{cases}$ Поділивши почленно друге рівняння на перше, отримаємо $q(1-q) = -\frac{5}{16}$ або $q^2 - q - \frac{5}{16} = 0$. Звідки маємо $q_1 = -\frac{1}{4}$, $q_2 = \frac{5}{4}$. Значення q_2 не задовольняє умову $|q| < 1$. Отже, $q = -\frac{1}{4}$. Тоді $b_3 = b_2q = -\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$. *Відповідь.* $\frac{1}{8}$. ■

Приклад 14. Перший, п'ятий та одинадцятий члени арифметичної прогресії (a_n) є трьома послідовними членами геометричної прогресії (b_n). Запиши шість перших членів арифметичної прогресії, якщо $a_1 = 24$.

■ Нехай $a_1 = 24$ — перший член арифметичної прогресії, d — різниця прогресії. Тоді $a_5 = 24 + 4d$, $a_{11} = 24 + 10d$. (b_n): b_1; b_2; b_3; ... — геометрична прогресія. За умовою, $b_1 = 24$, $b_2 = a_5 = 24 + 4d$, $b_3 = a_{11} = 24 + 10d$. За властивістю геометричної прогресії $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$. Маємо $(24 + 4d)^2 = 24(24 + 10d)$; $24^2 + 8 \cdot 24d + 16d^2 = 24^2 + 10 \cdot 24d$; $16d^2 - 2 \cdot 24d = 0$; $16d(d - 3) = 0$, $d = 0$ або $d = 3$. Отже, можливі два випадки:

1) $d = 0$, $a_1 = 24$, тоді маємо арифметичну прогресію: 24; 24; 24; 24; 24; 24.

2) $d = 3$, $a_1 = 24$, тоді маємо арифметичну прогресію: 24; 27; 30; 33; 36; 39.

Відповідь. 24; 24; 24; 24; 24; 24 або 24; 27; 30; 33; 36; 39. ■

Приклад 15. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння $50x^5 - 25(a-3)x^3 + 8ax = 0$ має п'ять розв'язків, які утворюють арифметичну прогресію.

■ Функція $f(x) = 50x^5 - 25(a-3)x^3 + 8ax$ є непарною, оскільки функції x^5, x^3 і x — непарні. Тому, якщо $x_0 \neq 0$ є розв'язком рівняння $f(x_0) = 0$, то і $-x_0$ є його коренем: $f(-x_0) = -f(x_0) = 0$. Таким чином, корені рівняння $-x_2$; $-x_1$; 0; x_1; x_2. Проте за умовою розв'язки утворюють арифметичну прогресію a_1; a_2; a_3; a_4; a_5,тому врахувавши, що $a_3 = 0$; $a_4 = x_1$, одержимо, що $x_1 = d$, а тому $a_5 = 2d$. Отже, шукану арифметичну прогресію можна записати у вигляді: $-2d$; $-d$; 0; d; $2d$. Розглянемо многочлен, коренями якого будуть члени побудованої арифметичної прогресії $(x + 2d)(x + d)(x - 0)(x - d)(x - 2d) = 0$. Домноживши його на 50, в результаті одержимо $50x(x^2 - 4d^2)(x^2 - d^2) = 0$, $50x^5 - 50 \cdot 5x^3d^2 + 200xd^4 = 0$. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, одержимо: $\begin{cases} 250d^2 = 25(a-3), \\ 200d^4 = 8a; \end{cases}$ $\begin{cases} 10d^2 = a - 3, \\ 100d^4 = 4a; \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq 3, \\ (a-3)^2 = 4a; \end{cases}$ $a^2 - 6a + 9 = 4a$, $a^2 - 10a + 9 = 0$; $(a-1)(a-9) = 0$. Отже, можливий випадок: $a = 9$. *Відповідь.* 9. ■

Завдання 21.1–21.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

21.1. Знайти тридцять перший член арифметичної прогресії 3; 5,5; 8; ...

А	Б	В	Г	Д
85,5	83	80,5	78	73,5

21.2. **(ЗНО–2014)** Арифметичну прогресію (a_n) задано формулою n-го члена $a_n = 4 - 8n$. Знайти різницю цієї прогресії.

А	Б	В	Г	Д
8	4	–2	–4	–8

21.3. Ламана містить 14 відрізків. Кожний її відрізок, починаючи з другого, на 2 см більший від попереднього. Знайти довжину найменшого з відрізків, якщо найбільший з них дорівнює 29 см.

А 2 см Б 2,5 см В 3 см Г 3,5 см Д 4 см

21.4. В арифметичній прогресії $a_1 = 3$, $a_{75} = 299$. Знайти a_{50}.

А 90 Б 99 В 190 Г 199 Д 203

21.5. В арифметичній прогресії тридцять членів. Знайти суму всіх членів прогресії, якщо перший її член дорівнює $a_1 = -12$, а останній — 75.

А 1305 Б 945 В 2610 Г 835 Д 1890

21.6. Знайти суму перших тринадцяти членів арифметичної прогресії –8; –5; –2; ...

А 140 Б 120 В 130 Г 240 Д 260

21.7. Третій і сьомий члени арифметичної прогресії відповідно дорівнюють 11 і 23. Знайти суму 10-ти перших членів цієї прогресії.

А 85 Б 35 В 185 Г 175 Д 370

21.8. Записати формулу для обчислення n-го члена геометричної прогресії 4; 12; 36; ...

А $b_n = 3 \cdot 4^{n-1}$ Б $b_n = 4 \cdot 8^{n-1}$ В $b_n = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ Г $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$ Д $b_n = 4 \cdot 3^n$

21.9. **(ЗНО–2011)** Визначити знаменник геометричної прогресії (b_n), якщо $b_9 = 24$, $b_6 = -\frac{1}{9}$.

А $\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ Б $-\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$ В 3 Г 6 Д –6

21.10. $17 + 17^2 + 17^3 + \ldots + 17^{20} = \ldots$

А $\frac{16 \cdot \left(17^{20} - 1\right)}{17}$ Б $\frac{17 \cdot \left(17^{19} - 1\right)}{16}$ В $\frac{17 \cdot \left(17^{20} - 1\right)}{16}$ Г $\frac{17^{20} - 1}{16}$ Д $\frac{17^{21} - 1}{16}$

21.11*. Знайти суму нескінченно спадної геометричної прогресії $3; -\frac{3}{2}; \frac{3}{4}; -\frac{3}{8}; \ldots$

А 2 Б 3 В 6 Г 2,5 Д 1

21.12*. Обчислити суму $21^{-1} + 21^{-2} + 21^{-3} + \ldots$.

А 0,1 Б 0,05 В 0,01 Г 0,2 Д 0,02

21.13. (a_n) — арифметична прогресія, в якої $a_1 = 9$, $a_{10} = 27$. Знайти a_{15}.

А Не можна визначити Б 41 В 39 Г 47 Д 37

21.14. В арифметичній прогресії (a_n) $a_8 = 6$. Знайти S_{15}.

А 180 Б 84 В 96 Г 90 Д не можна визначити

21.15. Сума восьмого і двадцятого членів арифметичної прогресії дорівнює 48. Знайти чотирнадцятий член прогресії.

А 96 Б 24 В 26 Г 22 Д не можна визначити

21.16. (a_n) — арифметична прогресія. Знайти суму перших її десяти членів, якщо $a_4 = 10$ і $a_7 = 19$.

А 145 Б 290 В 155 Г 390 Д 310

21.17. Знайти суму натуральних чисел від 40 до 200 включно.
А 19280 Б 19200 В 19320 Г 38400 Д 38640

21.18*. Знайти знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо $b_1 = \frac{1}{101}$, а сума — $\frac{1}{100}$.
А $\frac{1}{50}$ Б $\frac{1}{100}$ В $\frac{1}{101}$ Г $\frac{1}{200}$ Д $\frac{1}{300}$

21.19. Вираз $1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5 + a^6 - a^7 + a^8 - a^9$, де $a \neq -1$, тотожно дорівнює виразу ...
А $\frac{a^{10}-1}{a-1}$ Б $\frac{a^{10}+1}{a+1}$ В $\frac{a^{10}-1}{a+1}$ Г $\frac{1-a^{10}}{a+1}$ Д $\frac{1-a^9}{a+1}$

21.20. У пробірці міститься три клітини, які розмножуються поділом навпіл. Скільки утвориться клітин після n-го поділу?
А $2 \cdot 3^n$ Б $2 \cdot 3^{n-1}$ В $3 + 2^n$ Г $3 \cdot 2^{n-1}$ Д $3 \cdot 2^n$

21.21. Вкладник вніс до банку a гривень під 10% річних. Скільки грошей буде на рахунку вкладника через n років?
А $1{,}1^n a$ Б $1{,}1a^n$ В $(1 + 0{,}1^n)a$ Г $(1 + 1{,}1^n)a$ Д $0{,}1a^n$

21.22. $11 + 101 + 1001 + 10001 + \ldots + \underbrace{100\ldots001}_{n} = \ldots$
А $\frac{10^{n+1}+n-10}{9}$ Б $\frac{10^{n+2}+9n-1}{9}$ В $\frac{10^{n+2}-10}{9}$ Г $\frac{10^{n+1}-10}{9}$ Д $\frac{10^{n+2}+10n-1}{9}$

Завдання 21.23–21.33 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

21.23. Установити відповідність між послідовностями (1–3) та їхніми можливими властивостями (А–Д).

1 Арифметична прогресія ($d = 1$)
2 Арифметична прогресія ($d \neq 1$)
3 Геометрична прогресія ($|q| > 1$)

А $S_n = \frac{n^2 + 13n}{2}$
Б $S = \frac{b_1}{1-q}$
В $S_n = (3n + 2)n$
Г $b_n = 2^n$
Д $b_n = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$

21.24. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–3), заданими двома членами, та їх різницями (А–Д).

1 $a_1 = -1, a_2 = 3$
2 $a_1 = -30, a_5 = -6$
3 $a_1 = 13, a_4 = 1$

А –2
Б –4
В 2
Г 4
Д 6

21.25. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–3), заданими двома членами, та формулами n-го члена (А–Д).

1 $a_1 = 2, a_3 = 12$
2 $a_2 = -11, a_5 = -20$
3 $a_3 = 18, a_7 = 38$

А $a_n = 5 + 3n$
Б $a_n = 3 + 5n$
В $a_n = -5 - 3n$
Г $a_n = -3 - 5n$
Д $a_n = -3 + 5n$

21.26. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–3), заданими двома членами, та їх десятим членом (А–Д).

1 $a_1 = -9, a_3 = -23$
2 $a_1 = -2, a_7 = 16$
3 $a_1 = -5, a_{13} = -29$

А $a_{10} = 25$
Б $a_{10} = 35$
В $a_{10} = -45$
Г $a_{10} = -23$
Д $a_{10} = -72$

21.27. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–3), заданими двома членами, та формулами сум n перших її членів (А–Д).

1 $a_1 = 5, a_2 = 9$

2 $a_1 = -5, a_3 = -13$

3 $a_1 = 7, a_4 = 13$

А $S_n = n^2 + 6n$

Б $S_n = -n^2 - 10n$

В $S_n = -2n^2 - 3n$

Г $S_n = 2n^2 + 3n$

Д $S_n = -n^2 + 10n$

21.28. Установити відповідність між арифметичними прогресіями (a_n) (1–3), заданими двома членами, та сумами 10 перших її членів (А–Д).

1 $a_1 = 7, a_2 = 9$

2 $a_1 = -7, a_2 = -9$

3 $a_1 = -3, a_3 = 1$

А –160

Б –60

В 0

Г 60

Д 160

21.29. Установити відповідність між геометричними прогресіями (b_n) (1–3), заданими двома членами, та їх знаменниками (А–Д).

1 $b_1 = -2, b_4 = -54$

2 $b_2 = -6, b_5 = 162$

3 $b_1 = 32, b_4 = 4$

А –3

Б –0,5

В $-\frac{1}{3}$

Г 0,5

Д 3

21.30. Установити відповідність між геометричними прогресіями (b_n) (1–3), заданими двома членами, та формулами n-го члена (А–Д).

1 $b_1 = 4, b_4 = 108$

2 $b_1 = 2, b_4 = -54$

3 $b_2 = -6, b_5 = 48$

А $b_n = 2 \cdot (-3)^{n-1}$

Б $b_n = 3 \cdot (-2)^{n-1}$

В $b_n = 4 \cdot (-3)^{n-1}$

Г $b_n = 4 \cdot 3^{n-1}$

Д $b_n = 8 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

21.31. Установити відповідність між геометричними прогресіями (b_n) (1–3), заданими двома першими членами, та формулами суми n перших їх членів (А–Д).

1 $b_1 = 4, b_2 = 8$

2 $b_1 = -4, b_2 = -2$

3 $b_1 = 12, b_2 = -24$

А $S_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{2}$

Б $S_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}$

В $S_n = 2^{n+2} - 4$

Г $S_n = 2^{-n+3} - 8$

Д $S_n = 2 \cdot (-2)^{n+1} + 4$

21.32*. Установити відповідність між нескінченними спадними геометричними прогресіями (b_n) (1–3), заданими двома першими членами, та їх сумами (А–Д).

1 $b_1 = 6, b_2 = 1$

2 $b_1 = 25, b_2 = -5$

3 $b_1 = \frac{2}{3}, b_2 = -\frac{1}{3}$

А $20\frac{5}{6}$

Б 0,6

В 3,6

Г 7,2

Д 4/9

21.33. Установити відповідність між заданими виразами (1–3) та їх сумами (А–Д).

1 $1+a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}$, де $a \neq \pm 1$

2 $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5+a^6$, де $a \neq -1$

3 $a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}+a^{12}$, де $a \neq \pm 1$

А $\frac{a^7+1}{a+1}$ Б $\frac{a^{14}-a^2}{a^2-1}$ В $\frac{a-a^7}{a+1}$ Г $\frac{a-a^7}{a-1}$ Д $\frac{1-a^{12}}{1-a^2}$

Розв'яжіть завдання 21.34–21.48. Відповідь запишіть десятковим дробом.

21.34. Знайти найбільший від'ємний член арифметичної прогресії (a_n), у якої $a_1 = 101$, $d = -7$.

21.35. **(ЗНО–2015)** Плавець під час першого тренування подолав дистанцію у 450 м. Кожного наступного тренування він пропливав на 50 м більше, ніж попереднього, поки не досягнув результату — 1000 м за одне тренування. Після цього під час кожного відвідування басейну плавець пропливав 1000 м. Скільки всього кілометрів плавець проплив за перші 10 тижнів тренувань, якщо він тренувався тричі кожного тижня?

21.36. Із двох точок, відстань між якими дорівнює 155 м, одночасно починають рухатися назустріч одне одному два тіла. Перше тіло рухається рівномірно зі швидкістю 8 м/с, а друге тіло за першу секунду пройшло 3 м, а кожної наступної секунди проходить на 1 м більше, ніж за попередню. Через скільки секунд тіла зустрінуться?

21.37. Знайти суму S усіх трицифрових натуральних чисел, які діляться на число 7 без остачі. У відповідь записати $S : 100$.

21.38. Знайти найбільше значення x, за яких числа $x - 1$, $2x - 1$ і $x^2 - 5$, записані в указаному порядку, утворюють арифметичну прогресію.

21.39. Визначити, за яких значень x три числа $\lg 2$, $\lg(3^x - 3)$ і $\lg(3^x + 9)$, узяті в заданій послідовності, утворюють арифметичну прогресію.

21.40. Знайти різницю арифметичної прогресії, якщо сума перших її 100 членів на 50 більша від суми ста наступних.

21.41. Інфузорії-туфельки розмножуються поділом на дві частини. Скільки утвориться інфузорій із п'яти після семи поділів?

21.42*. (x_n) — нескінченна спадна геометрична прогресія, у якої $x_1 = 3$, $q = \frac{1}{3}$. Знайти суму її членів з непарними номерами.

21.43. **(ЗНО–2010)** Одним із мобільних операторів було запроваджено акцію «Довше розмовляєш — менше платиш» з такими умовами: плата за з'єднання відсутня; за першу хвилину розмови абонент сплачує 30 копійок, а за кожну наступну хвилину розмови — на 3 копійки менше, ніж за попередню; плата за одинадцяту та всі наступні хвилини не нараховується; умови дійсні для дзвінків абонентам усіх мобільних операторів країни. Скільки за умовами акції коштуватиме абоненту цього мобільного оператора розмова тривалістю 8 хвилин (у грн)?

21.44*. Спростити функцію $y = x^4 + \frac{x^4}{1+x^4} + \frac{x^4}{(1+x^4)^2} + \frac{x^4}{(1+x^4)^3} + \ldots$ та знайти її значення, якщо $x = 3$.

21.45. Задано дві арифметичні прогресії: 2; 7; 12; … і 3; 10; 17;…. Зі спільних членів цих арифметичних прогресій складають третю прогресію. Обчислити суму S п'ятдесяти перших членів третьої прогресії. У відповідь записати $S : 100$.

21.46. Числа m, n і p, відмінні від нуля та записані в заданій послідовності, утворюють геометричну прогресію, а числа $m + n$, $n + p$ і $p + m$, записані в заданій послідовності, — арифметичну прогресію. Знайти знаменник геометричної прогресії, відмінний від 1.

21.47. Перший, п'ятий та одинадцятий члени арифметичної прогресії (a_n), різниця якої не дорівнює нулю, утворюють геометричну прогресію $(b_1; b_2; b_3)$. Знайти ці прогресії, якщо $a_1 = 24$. У відповідь записати другий член: **1)** арифметичної прогресії; **2)** геометричної прогресії.

21.48. Три різних корені рівняння $x^3 + (a^2 - 14a)x^2 + 39ax - 27 = 0$ утворюють геометричну прогресію. Знайти: **1)** значення параметра a; **2)** суму цих членів.

Тема 22. Функціональна залежність. Елементарні функції та їхні властивості

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

- означення функції та способи її задання;
- знаходити область визначення, область значень функції;
- досліджувати на парність (непарність) функцію;
- встановлювати властивості числових функцій, заданих формулою або графіком;
- досліджувати функцію на періодичність;
- використовувати періодичність функцій для розв'язування задач;
- використовувати означення функції, оберненої до даної, для розв'язування задач.

Поняття функції. Змінну y називають функцією від змінної x, якщо *кожному* значенню змінної x відповідає *одне* значення змінної y. При цьому змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом*, а змінну y — *залежною змінною*, або *функцією* (від аргументу x).

Якщо змінна y є функцією від аргументу x, то записують: $y = f(x)$. Значення функції для $x = x_0$ позначають через $f(x_0)$.

Область визначення і множина значень функції

Множину значень, яких набуває аргумент, називають *областю визначення* функції; множину значень, яких набуває функція, називають *областю значень* функції.

Область визначення функції $y = f(x)$ позначають $D(f)$ або $D(y)$, а область значень — $E(f)$ або $E(y)$.

Якщо вираз $f(x)$ є многочленом, то областю визначення функції $y = f(x)$ є множина всіх дійсних чисел; якщо $f(x)$ — раціональний дріб, то областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, крім тих значень x, для яких знаменник дробу дорівнює нулю; якщо функція задана формулою $y = \sqrt{f(x)}$, то областю визначення функції є множина всіх дійсних чисел, для яких виконується нерівність $f(x) \geq 0$.

Наприклад, розглянемо функцію $y = \dfrac{5}{x-4}$. Вираз $\dfrac{5}{x-4}$ має зміст для всіх x, крім $x = 4$. Тому область визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел, крім $x = 4$, тобто $D(y) = (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

Графіком функції називають фігуру, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють усім значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Функцію можна задавати графічно, таблицею та аналітично (за допомогою формули).

Нулі функції. Проміжки знакосталості

Розглянемо функцію $y = f(x)$, графік якої зображено на рис. 1. Якщо $x = -1$, $x = 4$ або $x = 6$, то значення функції дорівнює нулю. Такі значення аргументу x називають *нулями функції*.

Щоб знайти нулі функції $y = f(x)$, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Наприклад, нулем функції $y = x - 2$ є лише одне значення x: $x - 2 = 0$; $x = 2$; нулями функції $y = x^2 - 2x$ є числа 0 та 2.

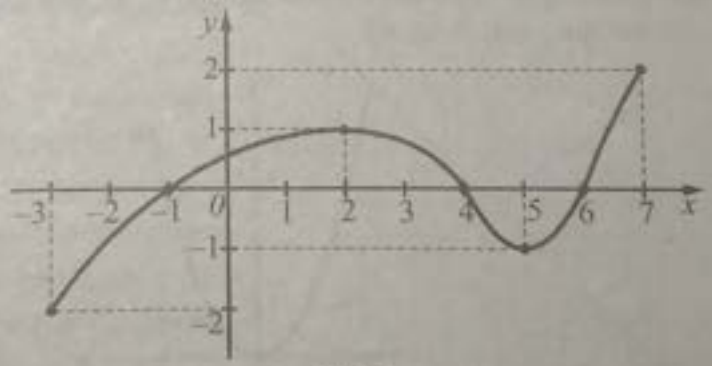


Рис. 1

Нулі функції розбивають її область визначення на *проміжки знакосталості* — проміжки, на яких функція набуває значень одного знака. Щоб знайти проміжки знакосталості, необхідно область визначення розбити нулями функції на проміжки і на кожному з них визначити її знак, наприклад знайти знак функції у будь-якій точці відповідного проміжку.

Зростання, спадання функції. Розглянемо графік функції $y = f(x)$ на рис. 1. На проміжку $[-3; 2]$ графік «йде вгору»: якщо збільшувати значення x із цього проміжку, то відповідні значення функції збільшуватимуться. Наприклад, візьмемо значення аргументу $x_1 = -3$ і $x_2 = -1$, тоді $x_2 > x_1$. Оскільки $f(x_1) = f(-3) = -2$, а $f(x_2) = f(-1) = 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$. Більшому значенню аргументу (x_2) відповідає більше значення функції ($f(x_2)$). Кажуть, що на проміжку $[-3; 2]$ функція $y = f(x)$ *зростає* (або *є зростаючою*). Такою ж вона є й на проміжку $[5; 7]$.

На проміжку [2; 5] графік функції $y = f(x)$ «іде вниз»: якщо збільшувати значення аргументу, то відповідні значення функції зменшуватимуться. Кажуть, що на цьому проміжку функція $y = f(x)$ спадає (або є спадною).

Якщо функція зростає на всій області визначення, то її називають *зростаючою функцією*; якщо функція спадає на всій області визначення, то її називають *спадною функцією*.

Наприклад, на рис. 2 зображено графік функції, областю визначення якої є проміжок [–1; 5]. Ця функція є зростаючою, бо вона зростає на всій області визначення. Функція, графік якої зображено на рис. 3, є спадною, бо вона спадає на всій області визначення. Функція, графік якої зображено на рис. 4, є спадною на $(-\infty; 0)$ і на $(0; +\infty)$. На області визначення $(-\infty; 0) \cup (0 + \infty)$ вона є ні спадною, ні зростаючою.

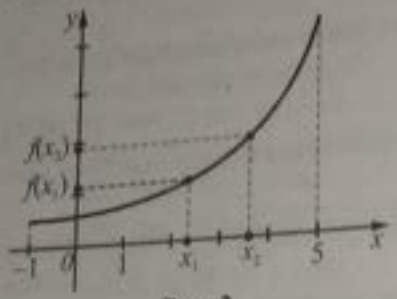


Рис. 2

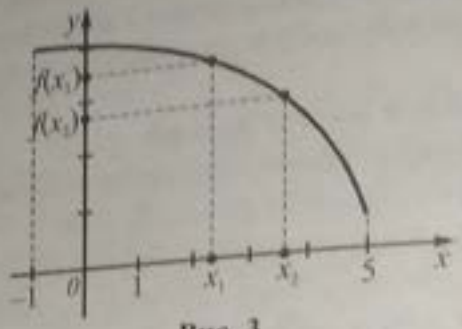


Рис. 3

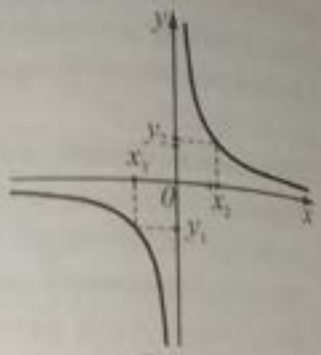


Рис. 4

Зростаючими, наприклад, є функції $y = 2x$, $y = \sqrt{x}$, а спадними — функції $y = -2x$, $y = -x$. Функція $y = f(x)$, графік якої зображено на рис. 1, є ні зростаючою, ні спадною. Вона лише зростає або спадає на окремих проміжках.

Парні та непарні функції. Розглянемо функцію $f(x) = x^2$, її графік зображено на рис. 5. Оскільки для будь-якого значення x виконується рівність $(-x)^2 = x^2$, то $f(-x) = f(x)$. Функцію $f(x) = x^2$ *парна*.

Функцію $y = f(x)$ називають *парною*, якщо для будь-якого значення x з області її визначення значення $-x$ також належить області визначення і виконується рівність $f(-x) = f(x)$. Область визначення парної функції симетрична відносно початку координат, бо разом із точкою x вона містить і точку $-x$.

Графік парної функції симетричний відносно осі y (див., наприклад, рис. 5). Тому для побудови графіка парної функції досить побудувати частину графіка для $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити цю частину відносно осі y.

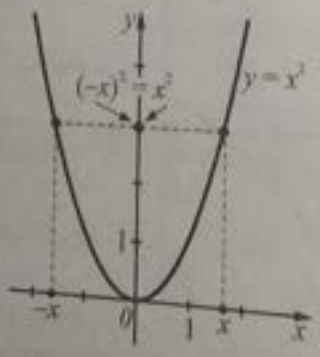


Рис. 5

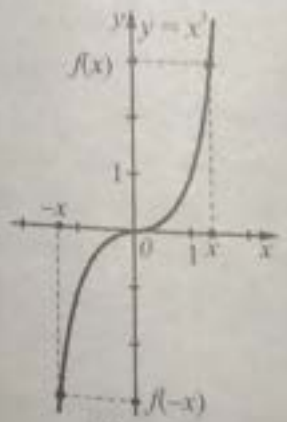


Рис. 6

На рис. 6 зображено графік функції $f(x) = x^3$. Оскільки для будь-якого значення x виконується рівність $(-x)^3 = -(x^3)$, то $f(-x) = -f(x)$. Функцію $f(x) = x^3$ називають *непарною*.

Функцію $y = f(x)$ називають *непарною*, якщо для будь-якого значення x з області її визначення значення $-x$ теж належить області визначення і виконується рівність $f(-x) = -f(x)$.

Область визначення та графік непарної функції симетричні відносно початку координат.

Тому для побудови графіка непарної функції досить побудувати частину графіка для $x \geq 0$, а потім симетрично відобразити цю частину відносно почат

Розглянемо функцію $f(x) = 2x + 3$. Область її визначення — множина всіх дійсних чисел — симетрична відносно початку координат. Для цієї функції $f(-x) = -2x + 3$. Рівності $f(-x) = f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$ для всіх значень x не виконуються, наприклад, для $x = 1$ ($f(1) = 5$; $f(-1) = 1$; $f(-1) \neq f(1)$ і $f(-1) \neq -f(1)$). Тому ця функція є ні парною, ні непарною; функція $f(x) = \sqrt{x}$, де $x \geq 0$, також є ні парною, ні непарною, бо область визначення функції (проміжок $[0; +\infty)$) не симетрична відносно початку координат.

Обернена функція. Функцію $y = f(x)$ називають *оборотною*, якщо для будь-якого значення y_0 існує єдине значення x_0 з області визначення функції таке, що $y_0 = f(x_0)$. Так функція зображена на рис. 6 є оборотною, а функція, зображена на рис. 5 — ні, оскільки одному значенню функції y_0 існує два значення x_0 та $-x_0$: $y_0 = f(x_0) = f(-x_0)$.

Якщо функція $y = f(x)$ є оборотною, тоді для кожного значення x можна поставити у відповідність єдине значення y: $x = g(y)$. Цю функцію називають *оберненою* до функції $f(x)$. Скориставшись традиційним позначенням функції, при якому аргумент прийнято позначати x, а функцію y, одержимо функцію $y = g(x)$. Функції f та g називають *взаємно оберненими*. Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.

Наприклад, щоб знайти обернену функцію до $y = \dfrac{5}{x-4}$ виразимо x через y: $x = \dfrac{5}{y} + 4$. Скориставшись традиційним позначенням функції, при якому аргумент прийнято позначати x, а функцію y, одержимо функцію $y = \dfrac{5}{x} + 4$. Ми одержали функцію $y = \dfrac{5}{x} + 4$ обернену до функції $y = \dfrac{5}{x-4}$, причому область визначення функції $y = \dfrac{5}{x-4}$ $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ є областю значень оберненої функції, а область значень $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ функції $y = \dfrac{5}{x-4}$ є областю визначення функції $y = \dfrac{5}{x} + 4$.

Періодичність функції. Функцію $y = f(x)$ називають *періодичною*, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для будь-якого числа x із області визначення функції виконується рівність $f(x \pm T) = f(x)$. Число T називають *періодом функції*. Найменше додатне число, яке є періодом функції називають *найменшим додатним періодом*, або *основним періодом* цієї функції, і позначають T_0. Наприклад, основним періодом функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$ є число 2π, а функцій $y = \operatorname{tg} x$ та $y = \operatorname{ctg} x$ — π.

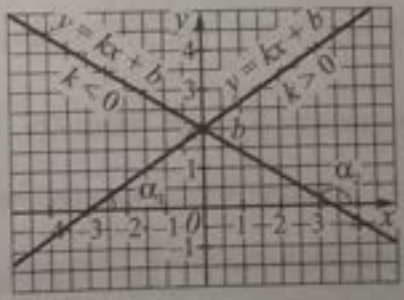
Пряма пропорційність $y = kx$ ($k \neq 0$)

Функцію, задану формулою $y = kx$ ($k \neq 0$), де x та y — змінні, k — число, називають *прямою пропорційністю*. Число k називають *коефіцієнтом пропорційності*. Графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат під кутом α ($k = \operatorname{tg}\alpha$). Коефіцієнт k називають також *кутовим коефіцієнтом прямої*. Для побудови прямої достатньо знати дві точки. Оскільки графік прямої пропорційності проходить через початок координат, то достатньо знайти ще одну точку.



Функцію, задану формулою $y = kx + b$, де x та y — змінні, k і b — числа, називають *лінійною функцією*. Число k називають *кутовим коефіцієнтом прямої*. Графіком лінійної функції є пряма, яка проходить під кутом α ($k = \operatorname{tg}\alpha$) до осі абсцис.

Пряма $y = kx + b$ перетинає вісь ординат у точці $(0; b)$ і вісь абсцис у точці $\left(-\dfrac{b}{k}; 0\right)$.



Лінійна функція $y = kx + b$ ($k \neq 0$)

Основні властивості функції $y = kx + b$ ($k \neq 0$, $b \neq 0$):

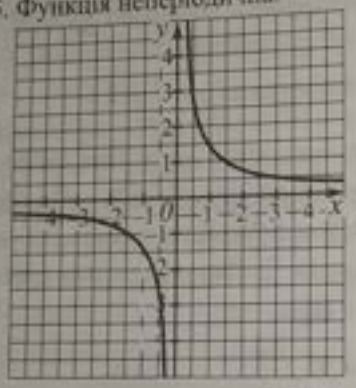
1. Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Множина значень функції: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.
3. Якщо $k > 0$, то функція є зростаючою, якщо $k < 0$, то функція є спадною.
4. Функція не є ні парною, ні непарною.
5. Функція неперіодична.

Обернена пропорційність $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)

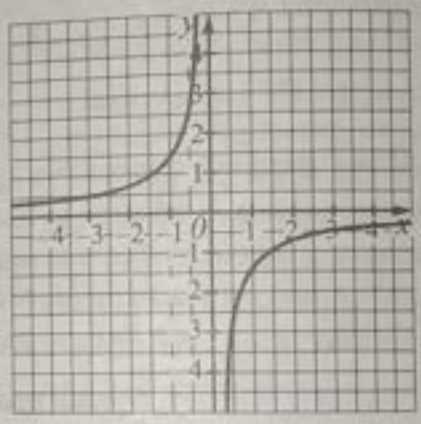
Функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$), де x та y — змінні, k — число, називають *оберненою пропорційністю*. Графіком функції $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) є *гіпербола*, частини графіка — *вітки гіперболи*. Графік не перетинає осей координат.

Основні властивості функції $y = \frac{k}{x}$:

1. Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
2. Множина значень функції: $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.
3. Якщо $k > 0$, то функція є спадною на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, якщо $k < 0$, то функція є зростаючою на проміжках $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.
4. Функція непарна.
5. Функція неперіодична.



$y = \frac{k}{x}$ ($k > 0$)



$y = \frac{k}{x}$ ($k < 0$)

Квадратична функція $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

Функцію, задану формулою $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), де x та y — змінні, a, b і c — числа ($a \neq 0$), називають *квадратичною функцією*. Графіком функції $y = ax^2 + bx + c$ є *парабола* з вершиною у точці $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$, де $D = b^2 - 4ac$. Віссю симетрії параболи є пряма $x = -\frac{b}{2a}$, яка паралельна до осі y.

Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

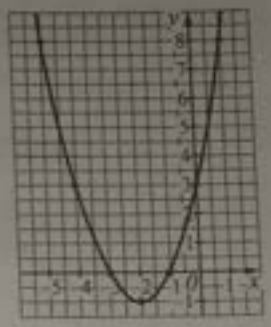
Якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз і значення $-\frac{D}{4a}$ є найбільшим значенням функції, тобто $E(y) = \left(-\infty; \frac{-D}{4a}\right]$; якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору і значення $-\frac{D}{4a}$ є найменшим значенням функції, тобто $E(y) = \left[-\frac{D}{4a}; +\infty\right)$.

Якщо $D < 0$, то парабола не перетинає вісь абсцис; якщо $D = 0$, то парабола дотикається до осі x у вершині; якщо $D > 0$, то парабола перетинає вісь x у точках $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$ і $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$.

Парабола перетинає вісь y в точці з координатами $(0; c)$.

Наприклад, побудувати графік функції $y = x^2 + 4x + 3$. Оскільки $a = 1 > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, $b = 4$, $c = 3$.

$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 > 0$ — парабола перетинає вісь x у двох точках.



Вершина параболи має координати:

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 1} = -2; y_0 = -\frac{D}{4a} = -\frac{4}{4 \cdot 1} = -1$. Точки перетину з Ox:

$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - 2}{2 \cdot 1} = -\frac{6}{2} = -3; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + 2}{2 \cdot 1} = -\frac{2}{2} = -1$.

Точка перетину з віссю y: (0; 3).

Знайдемо значення функції (див. рис.) для кількох цілих значень x, близьких до абсциси вершини:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
y	8	3	0	–1	0	3	8

Степенева функція $y = x^\alpha$

Функцію, задану формулою $y = x^\alpha$, де x та y — змінні, α — стале числа, називають *степеневою*. Властивості та графік степеневої функції залежать від показника степеня α.

1. Якщо α — натуральне число, то:

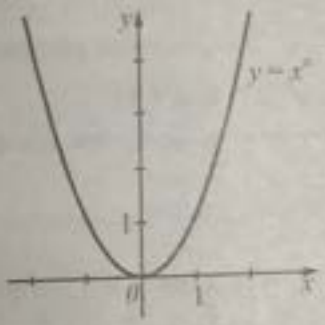
1. Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Множина значень функції: якщо α — натуральне парне, $E(y) = [0; +\infty)$; якщо α — натуральне непарне, $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

3. Якщо α — натуральне парне, то функція спадає на проміжку $(-\infty; 0]$ і зростає $[0; +\infty)$; якщо α — натуральне непарне, то функція зростає на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

4. Якщо α — натуральне парне, то функція парна; якщо α — натуральне непарне, то функція непарна.

5. Функція неперіодична.

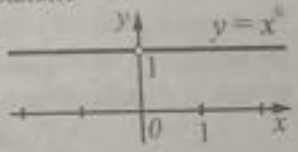


α — парне натуральне



α — непарне натуральне

2. Якщо $\alpha = 0$, то:



1. Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Множина значень функції: $E(y) = 1$.

3. Функція парна.

3. Якщо α — від'ємне ціле число, тобто $\alpha = -n$, де $n \in N$, то маємо $y = x^{-n}$:

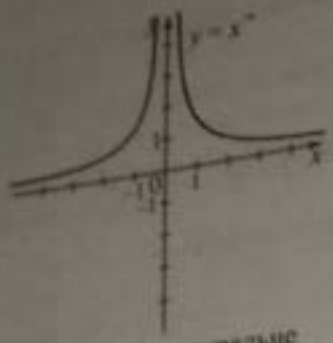
1. Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Множина значень функції: якщо n — парне, $E(y) = (0; +\infty)$; якщо n — непарне, $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

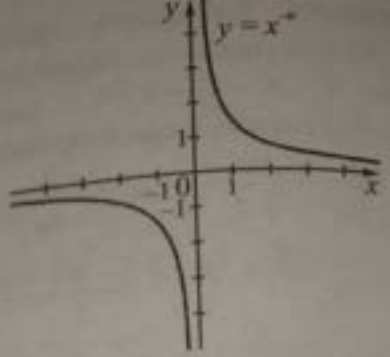
3. Якщо n — парне, то функція зростає на проміжку $(-\infty; 0)$ і спадає на — $(0; +\infty)$; якщо n — непарне, то спадає на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$.

4. Якщо n — парне, то функція парна; якщо n — непарне, то функція непарна.

5. Функція неперіодична.



n — парне натуральне



n — непарне натуральне

4. Якщо $a = \frac{1}{n}$, то маємо $y = x^a = \sqrt[n]{x}$, де $n \in N$:

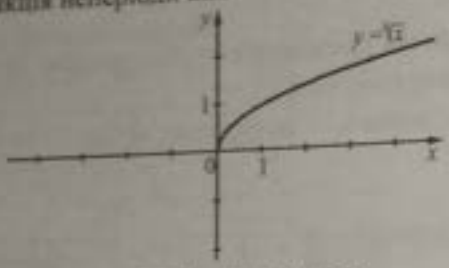
1. Якщо n — парне, то область визначення функції: $D(y) = [0; +\infty)$; якщо n — непарне $(n > 1)$, то $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2. Множина значень функції: якщо n — парне, $E(y) = [0; +\infty)$; якщо n — непарне $(n > 1)$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

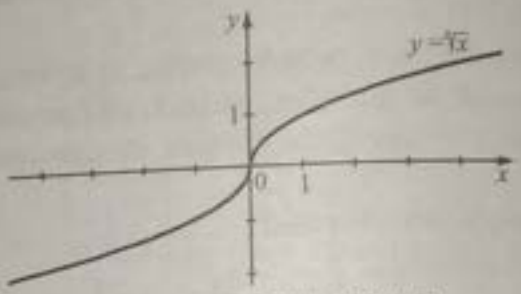
3. Функція зростаюча.

4. Якщо n — парне, то функція не є ні парною, ні не парною; якщо n — непарне $(n > 1)$, то функція непарна.

5. Функція неперіодична.



n — парне натуральне



n — непарне натуральне

Показникова функція $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$

Функцію, задану формулою $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$, де x та y — змінні, називають *показниковою*.

Основні властивості показникової функції:

1. Область визначення функції: $D(y) = \boldsymbol{R}$.

2. Множина значень $E(y) = (0; +\infty)$.

3. Якщо $0 < a < 1$, то функція спадає на проміжку $(-\infty; +\infty)$; якщо $a > 1$, то функція зростає на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

4. Функція не має нулів.

5. Проміжок $(-\infty; +\infty)$ є проміжком знакосталості функції.

6. Функція не є ні парною, ні не парною.

7. Функція неперіодична.

Логарифмічна функція $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$

Якщо кожному додатному числу x можна поставити у відповідність число y таке , що $y = \log_a x$, то функцію, задану формулою $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$, де x та y — змінні, називають логарифмічною.

Основні властивості логарифмічної функції:

1. Область визначення функції: $D(y) = (0; +\infty)$.

2. Множина значень $E(y) = \boldsymbol{R}$.

3. Якщо $0 < a < 1$, то функція спадає; якщо $a > 1$, то функція є зростаючою.

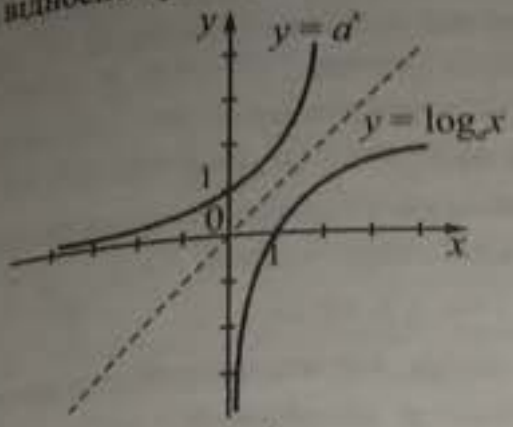
4. Нулі функції: $x = 1$.

5. Якщо $0 < a < 1$, то $y > 0$ на проміжку $(0; 1)$ і $y < 0$ на проміжку $(1; +\infty)$; якщо $a > 1$, то $y < 0$ на проміжку $(0; 1)$ і $y > 0$ на проміжку $(1; +\infty)$.

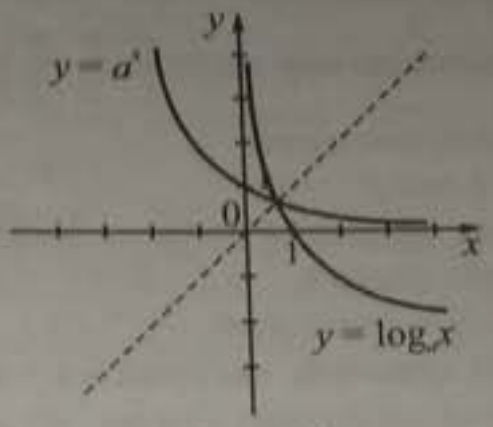
6. Функція не є ні парною, ні не парною.

7. Функція неперіодична.

Логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $g(x) = a^x$, тому їх гра
симетричні відносно прямої $y = x$.



$a > 1$



$0 < a < 1$

Тригонометричні функції

Функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, де x та y — змінні, називають *тригонометричними*, а також і функції $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Основні властивості залежать від виду тригонометричної функції:

$y = \sin x$	$y = \cos x$
1. Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; +\infty)$. 2. Множина значень $E(y) = [-1; 1]$. 3. Функція спадає на $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$; функція зростає на $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$. 4. Нулі функції: $x = \pi n$, $n \in Z$. 5. $y > 0$ на проміжках $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$; $y < 0$ на проміжках $(-\pi + 2\pi n; 2\pi n)$, $n \in Z$. 6. Функція непарна. 7. Функція періодична, $T_0 = 2\pi$.	1. Область визначення функції: $D(y) = (-\infty;$ 2. Множина значень $E(y) = [-1; 1]$. 3. Функція спадає на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$; функція зростає на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, $n \in Z$. 4. Нулі функції: $x = \pi / 2 + \pi n$, $n \in Z$. 5. $y > 0$ на проміжках $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right.$ $y < 0$ на проміжках $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, n 6. Функція парна. 7. Функція періодична, $T_0 = 2\pi$.

$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
1. Область визначення функції: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. 2. Множина значень $E(y) = (-\infty; +\infty)$. 3. Функція зростає на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$. 4. Нулі функції: $x = \pi n$, $n \in Z$. 5. $y > 0$ на проміжках $(\pi n; \pi / 2 + \pi n)$; $y < 0$ на проміжках $(-\pi / 2 + \pi n; \pi n)$, $n \in Z$. 6. Функція непарна. 7. Функція періодична, $T_0 = \pi$.	1. Область визначення функції: $x \neq \pi n$, $n \in$ 2. Множина значень $E(y) = (-\infty; +\infty)$. 3. Функція спадає на $(\pi n; \pi + \pi n)$ $n \in Z$. 4. Нулі функції: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$. 5. $y > 0$ на проміжках $(\pi n; \pi / 2 + \pi n)$; $y < 0$ на проміжках $(-\pi / 2 + \pi n; \pi n)$, $n \in Z$. 6. Функція непарна. 7. Функція періодична, $T_0 = \pi$.

$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$

$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
1. Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.	1. Область визначення функції: $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2. Множина значень $E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	2. Множина значень $E(y) = (0; \pi)$.
3. Функція зростаюча.	3. Функція спадна.
4. Нулі функції: $x = 0$.	4. Функція нулів немає.
5. $y < 0$ на проміжку $(-\infty; 0)$; $y > 0$ на $(0; +\infty)$.	5. $y > 0$ на $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
6. Функція непарна.	6. Функція не є ні парною, ні непарною.
7. Функція неперіодична.	7. Функція неперіодична.

Слід зазначити, що функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ є оберненими функціями до відповідних $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ на своїх областях визначення.

Приклад 1. Функцію задано формулою $f(x) = \frac{2x+1}{3}$. Знайти $f(-5)$.

А	Б	В	Г	Д
3	–1	1	–3	$3\frac{2}{3}$

■ $f(-5) = \frac{2\cdot(-5)+1}{3} = \frac{-10+1}{3} = \frac{-9}{3} = -3$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 2. Указати проміжки, на яких функція $f(x) = -5x + 15$ набуває від'ємних значень.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 3)$	$(3; +\infty)$	$(-\infty; -3)$	$(-3; +\infty)$	$(1/3; +\infty)$

■ Функція набуває від'ємних значень на тих проміжках, де $f(x) < 0$. Розв'яжемо нерівність: $-5x + 15 < 0$; $-5x < -15$; $x > 3$; $x \in (3; +\infty)$. *Відповідь.* **Б.** ■

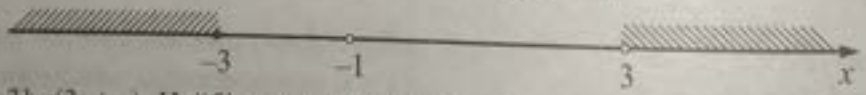
Приклад 3. Знайти область визначення функції $y = \sqrt{|x| - 3} + \frac{x^2 + 4}{(x-1)^2 - 4}$. У відповідь записати суму найменшого додатного і найбільшого від'ємного цілих значень цієї області.

■ Для того, щоб знайти область визначення функції, необхідно розв'язати таку систему:

$$\begin{cases} |x| - 3 \geq 0; & (1) \\ (x-1)^2 - 4 \neq 0. & (2) \end{cases}$$

Розглянемо (1): $|x| - 3 \geq 0$; $|x| \geq 3$; $\left[\begin{array}{l} x \geq 3; \\ x \leq -3; \end{array}\right.$ $x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Розглянемо (2): $(x-1)^2 - 4 \neq 0$; $(x-1)^2 \neq 4$; $x - 1 \neq \pm 2$; $\left[\begin{array}{l} x \neq 3; \\ x \neq -1. \end{array}\right.$



Отже, $x \in (-\infty; -3] \cup (3; +\infty)$. Найбільше від'ємне ціле значення дорівнює –3, найменше ціле додатне значення — 4, а їх сума дорівнює $-3 + 4 = 1$. *Відповідь.* 1. ■

Приклад 4. Указати проміжок, якому належать нулі функції $y = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; 0)$	$(-5; 3)$	$[-2; 1)$	$(-2; +\infty)$	$[0; 1]$

■ Щоб знайти нулі функції, потрібно розв'язати рівняння $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$; $x^2(x+2) - (x+2) = 0$; $(x+2)(x^2 - 1) = 0$; $\left[\begin{array}{l} x = -2; \\ x = \pm 1. \end{array}\right.$ Числа –2; –1 і 1 належать проміжку $(-5; 3)$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 5. За якого значення параметра c графік функції $y = \log_2(x + c)$ проходить через точку $(2; 3)$?

А	Б	В	Г	Д
7	4	1	6	4,5

■ $x = 2$; $y = 3$. $\log_2(2 + c) = 3$; $2 + c = 2^3$; $c = 8 - 2$; $c = 6$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 6. Знайти множину значень функції $y = \sin x - 3$.

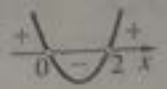
А	Б	В	Г	Д
$[-4; -2]$	$[-10; 4]$	$[2; 4]$	$(-\infty; +\infty)$	$[-3; 3]$

■ Множиною значень функції $y = \sin x$ є $[-1; 1]$, тобто $-1 \le \sin x \le 1$. Додамо до всіх частин подвійної нерівності число -3 й отримаємо: $-4 \le \sin x - 3 \le -2$. Отже, множиною значень функції $y = \sin x - 3$ є проміжок $[-4; -2]$. *Відповідь.* **А.** ■

Приклад 7. Знайти область визначення функції $f(x) = \log_{0,5}(2x - x^2)$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; 2)$	$(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$	$(0; 2]$	$(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$	$[0; 2)$

■ За властивістю логарифмічної функції областю визначення функції $f(x) = \log_{0,5}(2x - x^2)$ є усі значення x, які задовольняють умову $2x - x^2 > 0$. Розв'яжемо утворену нерівність: $x^2 - 2x < 0$; $x(x - 2) < 0$; $x \in (0; 2)$. *Відповідь.* **А.** ■



Приклад 8. Яке з наведених чисел входить до множини значень функції $y = 2^x + 4$?

А	Б	В	Г	Д
5	жодне	3	4	0

■ Знайдемо множину значень функції $y = 2^x + 4$. Оскільки $0 < 2^x < +\infty$, то $4 < 2^x + 4 < +\infty$. Тому множиною значень функції є $y \in (4; +\infty)$. У проміжок $(4; +\infty)$ входить лише число 5. *Відповідь.* **А.** ■

Приклад 9. Графіку функції, заданої формулою $y = \begin{cases} 4/x, & \text{якщо } x > 0; \\ -4/x, & \text{якщо } x < 0, \end{cases}$ належать точки $A(-2; a)$, $B(2; b)$, $C\left(\frac{1}{2}; c\right)$. Знайти a, b і c. У відповідь записати їх суму.

■ $A(-2; a)$: $-2 < 0$, тому точка належить частині графіка функції $y = -\frac{4}{x}$. Маємо: $a = -\frac{4}{-2} = 2$.

$B(2; b)$: $2 > 0$, тому точка належить частині графіка функції $y = \frac{4}{x}$. Маємо: $b = \frac{4}{2} = 2$.

$C\left(\frac{1}{2}; c\right)$: $\frac{1}{2} > 0$, тому точка належить частині графіка функції $y = \frac{4}{x}$. Маємо: $c = \frac{4}{0,5} = 8$.

Сума знайдених значень дорівнює: $2 + 2 + 8 = 12$. *Відповідь.* 12. ■

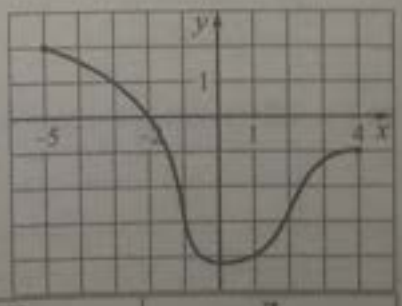
Приклад 10. Функція спадає, якщо $x < 0$. Вкажіть найменше з чисел.

А	Б	В	Г	Д
$f\left(-\frac{3}{8}\right)$	$f\left(-\frac{7}{10}\right)$	$f\left(-\frac{3}{4}\right)$	$f\left(-\frac{3}{5}\right)$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$

■ Функція спадна, тому більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції. Найменше із запропонованих чисел відповідає найбільшому значенню аргументу: $f\left(-\frac{3}{8}\right)$. *В-дь.* **А.** ■

Завдання 22.1–22.29 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

22.1. **(ЗНО–2015)** Графік функції, визначеної на проміжку $[-5; 4]$, проходить через одну з наведених точок (див. рисунок). Указати цю точку.



А	Б	В	Г	Д
$(-5; -2)$	$(1; -3)$	$(-1; 4)$	$(-3; 1)$	$(0; -2)$

22.2. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{5^{x+1}-1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(1,5;+\infty)$	$[2;+\infty)$	$[1,5;+\infty)$	$[5;+\infty)$	$[3;+\infty)$

22.3. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{\dfrac{x-4}{x+1}}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$	$(-1;+\infty)$	$(-1;4)$	$(-\infty;-1)\cup(4;+\infty)$	$(-\infty;-1)\cup[4;+\infty)$

22.4. Яка з множин є областю визначення функції $y=\sqrt[4]{-\log_3 x+1}$?

А	Б	В	Г	Д
$[0;3]$	$[0;4]$	$[-3;3)$	$(-\infty;3]$	$(0;3]$

22.5. **(ЗНО-2011)** Указати лінійну функцію, графік якої паралельний вісі абсцис і проходить через точку $A(-2;3)$.

А	Б	В	Г	Д
$y=-\dfrac{3}{2}x$	$y=-2$	$x=-2$	$x=3$	$y=3$

22.6. Знайти множину значень функції $y=-x^2+4x-5$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;1]$	$(-\infty;-1]$	$[1;+\infty)$	$(-\infty;5]$	$[-5;+\infty)$

22.7. Обчислити відстань від початку координат до вершини параболи $y=-x^2+10x-13$.

А	Б	В	Г	Д
5	13	12	17	10

22.8. Знайти множину значень функції $y=-2\cos x+5$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1;1]$	$[2;5]$	$[-2;-5]$	$[3;7]$	R

22.9. Знайти множину значень функції $y=3\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-2$.

А	Б	В	Г	Д
$[-1;1]$	$[-5;1]$	$[1;3]$	$[-5;-2]$	$[-3;3]$

22.10. **(ЗНО-2011)** Функція $y=f(x)$ є спадною на проміжку $(-\infty;+\infty)$. Указати правильну відповідь.

А	Б	В	Г	Д
$f(1)>f(-1)$	$f(1)<f(8)$	$f(1)>f(0)$	$f(-1)<f(0)$	$f(1)>f(10)$

22.11. Дано функцію $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$. Знайти $f(x+1)$.

А	Б	В	Г	Д
$f(x+1)=\dfrac{x}{x+2}$	$f(x+1)=\dfrac{2}{1+x}$	$f(x+1)=-\dfrac{x}{x+2}$	$f(x+1)=\dfrac{1+x}{1-x}$	$f(x+1)=\dfrac{2}{1+x}$

22.12. **(ЗНО-2013)** Указати парну функцію.

А	Б	В	Г	Д
$y=4^x$	$y=x$	$y=\sqrt{x}$	$y=\operatorname{tg}x$	$y=\lvert x\rvert$

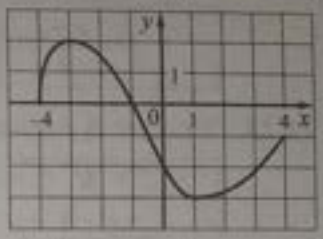
22.13. Яка з наведених функцій є непарною?

А	Б	В	Г	Д
$y = x + \lvert x\rvert$	$y = \sin^2 x$	$y = \dfrac{x^2}{x-1}$	$y = \sqrt[3]{\lvert x\rvert}$	$y = \sqrt[3]{x}$

22.14. Функція $f(x)$ — парна, а функція $g(x)$ — непарна. $f(7) = -11$, $g(5) = -2$. Обчислити $2f(-7) - 3g(-5)$.

А	Б	В	Г	Д
–28	–16	28	16	29

22.15. **(ЗНО–2012)** На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на проміжку $[-4; 4]$. Знайти множину всіх значень x, для яких $f(x) \le -2$.



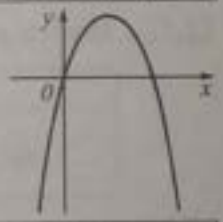
А	Б	В	Г	Д
$[0; 3]$	$[-3; 2]$	$[-1; 4]$	$[-3; -2]$	$[-4; 0]$

22.16. За ескізом графіка $y = ax + b$ вказати знаки параметрів a і b.



А	Б	В	Г	Д
$a > 0, b > 0$	$a > 0, b < 0$	$a < 0, b > 0$	$a < 0, b < 0$	$a > 0, b = 0$

22.17. **(ЗНО–2010)** На рисунку зображено ескіз графіка функції $y = ax^2 + bx + c$. Указати правильне твердження щодо коефіцієнтів a, b, c.



А	Б	В	Г	Д
$\begin{cases} a<0, \\ b<0, \\ c=0 \end{cases}$	$\begin{cases} a>0, \\ b<0, \\ c>0 \end{cases}$	$\begin{cases} a>0, \\ b>0, \\ c=0 \end{cases}$	$\begin{cases} a<0, \\ b>0, \\ c<0 \end{cases}$	$\begin{cases} a<0, \\ b>0, \\ c=0 \end{cases}$

22.18. За яких значень a парабола $y = 9x^2 - 12x + 35a$ має з віссю абсцис дві точки перетину?

А	Б	В	Г	Д
$a = \dfrac{4}{35}$	$a < \dfrac{4}{35}$	$a > \dfrac{4}{35}$	$a < \dfrac{18}{35}$	$a < \dfrac{16}{35}$

22.19. Указати функцію, у якої основний період дорівнює π.

А	Б	В	Г	Д
$y = \sin(x + \pi)$	$y = \cos(2x + 1)$	$y = \operatorname{tg}(3x + \pi)$	$y = \operatorname{ctg}(4x + 2)$	$y = \pi$

22.20. Знайти основний період функції $y = \cos^2 6x$.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{2\pi}{3}$	3π	$\dfrac{\pi}{3}$	6π	$\dfrac{\pi}{6}$

22.21. Знайти основний період функції $y = 2\cos\frac{x}{3} + 3\operatorname{tg}\frac{x}{8}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi}{24}$	6π	24π	8π	функція неперіодична

22.22. Указати функцію, обернену до функції $y = 4x - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{x+1}{4}$	$y = \frac{1}{4x-1}$	$y = \frac{x}{4} + 1$	$y = 4x + 1$	$y = -4x + 1$

22.23. Указати функцію, обернену до функції $y = x^2 - 2$, $x \in [0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x^2-2}$	$y = \sqrt{x} - 2$	$y = \sqrt{x} + 2$	$y = -\sqrt{x+2}$	$y = \sqrt{x+2}$

22.24. Указати складену функцію $y = f(g(x))$, якщо $g(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{x^2}{x^2+1}$	$y = x^2 + 1$	$y = \frac{x}{x^2+1}$	$y = \frac{x^2+1}{x}$	$y = \frac{x^2+1}{x^2}$

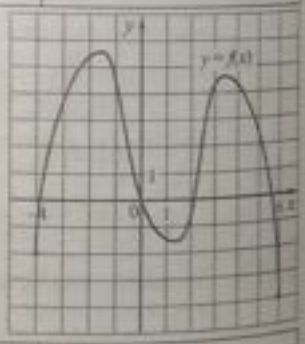
22.25. Указати складену функцію $y = f(g(x))$, якщо $g(x) = \sqrt{x+1}$, $f(x) = x^2 - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$y = (x^2-1)\sqrt{x+1}$, $D(y) = [-1; +\infty)$	$y = x$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$	$y = \sqrt{x}$, $D(y) = [0; +\infty)$	$y = \sqrt{x^2}$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$	$y = x$ $D(y) = [-1; +\infty)$

22.26. Знайти множину значень функції $y = 5^{\sin x}$.

А	Б	В	Г	Д
$(0; +\infty)$	R	$[-5; 5]$	$\left[\frac{1}{5}; 5\right]$	$[-1; 1]$

22.27. **(ЗНО–2010)** На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, яка визначена на відрізку $[-4; 6]$. Скільки всього коренів має рівняння $f(x) = x$ на цьому відрізку?



А	Б	В	Г	Д
Жодного	один	два	три	чотири

22.28. Знайти множину значень функції $y = \frac{1}{1+x^2}$.

А	Б	В	Г	Д
R	$(0; +\infty)$	$(0; 1]$	$\left(0; \frac{1}{2}\right)$	$\left[0; \frac{1}{2}\right)$

22.29. Знайти найбільше ціле значення функції $y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cos 3x + \sin 4x \sin 3x - 2}$.

А	Б	В	Г	Д
25/3	0	75	8	–1

Завдання 22.30–22.40 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

22.30. Установити відповідність між функціями (1–3) та областями їх визначення (А–Д).

1 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{x+2}{x-1}$

2 $f(x) = \sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$

3 $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x+2}{x-1}}$

А $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$

Б $(-2;1)$

В $(-\infty;-2) \cup (1;+\infty)$

Г $(-\infty;-2) \cup (-2;+\infty)$

Д $(-\infty;-2) \cup [1;+\infty)$

22.31. (ЗНО–2012) Кожній точці (1–4) поставити у відповідність функцію (А–Д), графіку якої належить ця точка.

Точка	*Функція*
1 $O(0; 0)$	А $y = 2x + 2$
2 $M(0; -1)$	Б $y = \operatorname{ctg} x$
3 $N(-1; 0)$	В $y = \operatorname{tg} x$
4 $K(0; 1)$	Г $y = \sqrt{x} - 1$
	Д $y = 2^x$

22.32. Установити відповідність між функціями (1–3) та їх множинами значень (А–Д).

1 $y = \sqrt{x^2 + 9} + 1$

2 $y = 2^x - 4$

3 $y = -x^2 + 4x - 8$

А $(-\infty; -4)$

Б $(-\infty; -4]$

В $(-\infty; 4)$

Г $[4; +\infty)$

Д $(-4; +\infty)$

22.33. Установити відповідність між функціями (1–3) та їх множинами значень (А–Д).

1 $y = 2\arcsin x$

2 $y = 2\arccos x$

3 $y = 2\operatorname{arctg} x$

А $(-\pi; \pi)$

Б $[-\pi; \pi]$

В $(0; \pi)$

Г $(0; 2\pi)$

Д $[0; 2\pi]$

22.34. Установити відповідність між функціями (1–3) та їх найменшими додатними періодами (А–Д).

1 $y = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$

2 $y = \operatorname{ctg} 2x$

3 $y = \cos \dfrac{x}{2}$

А $\pi/4$

Б $\pi/2$

В π

Г 2π

Д 4π

22.35. Установити відповідність між функціями (1–3) та оберненими до них функціями (А–Д).

1 $y = 3x$

2 $y = \dfrac{3}{x}$

3 $y = -3x$

А $y = 3/x$

Б $y = -3/x$

В $y = -3x$

Г $y = x/3$

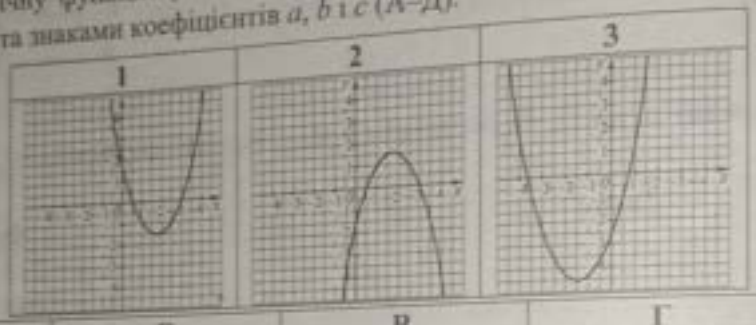
Д $y = -x/3$

22.36. Дано лінійну функцію $y = ax + b$. Установити відповідність між знаками коефіцієнтів a й b (1–3) та ескізами графіків (А–Д).

1	2	3
$a > 0, b > 0$	$a > 0, b < 0$	$a < 0, b > 0$



22.37. Дано квадратичну функцію $y = ax^2 + bx + c$. Установити відповідність між ескізами графіків функцій (1–3) та знаками коефіцієнтів a, b і c (А–Д).



А	Б	В	Г	Д
$a>0, b>0, c>0$	$a>0, b>0, c<0$	$a>0, b<0, c>0$	$a<0, b<0, c>0$	$a<0, b>0, c<0$

22.38. Установити відповідність між функціями (1–3) та проміжками їх зростання (А–Д).

1 $y = x^2 - 3$

2 $y = (x - 3)^2$

3 $y = -x^2 + 3$

А $(-\infty; 0]$

Б $[0; +\infty)$

В $(-\infty; -3]$

Г $[-3; +\infty)$

Д $[3; +\infty)$

22.39. Установити відповідність між функціями (1–3) та їх парністю (А–Д).

1 $y = 0$

2 $y = x^3 + \operatorname{tg} x$

3 $y = x^4 - \sin x$

А На парність не досліджується

Б Парна

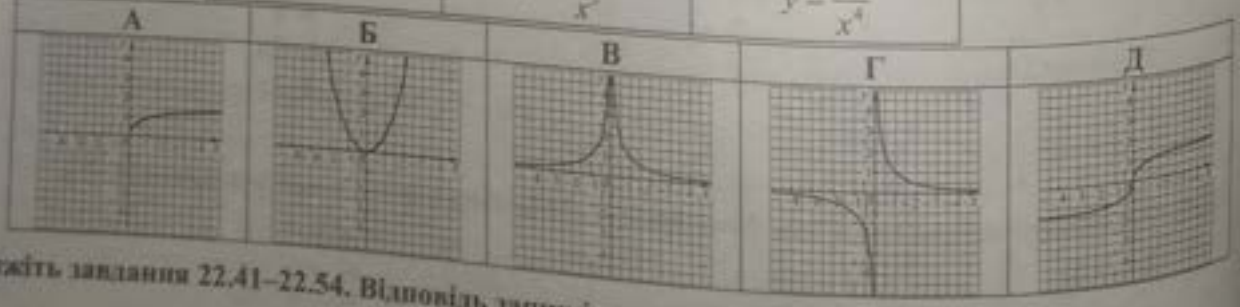
В Непарна

Г Ні парна, ні непарна

Д Парна і непарна

22.40. Установити відповідність між функціями (1–3) та ескізами їх графіків (А–Д).

1	2	3
$y = \sqrt[3]{x}$	$y = \frac{1}{x^3}$	$y = \frac{1}{x^4}$



Розв'яжіть завдання 22.41–22.54. Відповідь запишіть десятковим дробом.

22.41. Знайти область визначення функції $y = \frac{\sqrt{5 - x^2 - 4x}}{3 - x}$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу в області визначення.

22.42. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{\log_{0,3}\dfrac{x-1}{x+5}}$. У відповідь записати найменше ціле значення аргументу.

22.43. Знайти область визначення функції $y=\log_{x+4}\left(9-8x-x^2\right)$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.

22.44. Знайти область визначення функції $y=\sqrt{\dfrac{(x+4)(3-x)}{\lg\left(x^2+1\right)}}$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.

22.45. Знайти область визначення функції $y=\arcsin\dfrac{x-5}{6}-\lg\left(x^2-10x+24\right)$. У відповідь записати кількість цілих значень аргументу з області визначення.

22.46. Знайти область визначення функції $y=\arccos\dfrac{x-4}{x}$. У відповідь записати найменше значення аргументу.

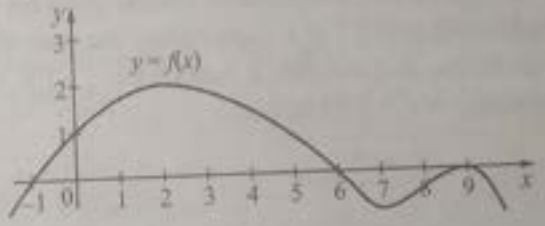
22.47. Знайти область значень функції $y=3\sin^2x+2\cos^2x$. У відповідь записати кількість цілих значень функції.

22.48. **(ЗНО–2013)** Знайти найбільше значення функції $y=\dfrac{(1-2\cos x)^2}{2}$.

22.49. Знайти найменший додатний період T_0 функції $y=\sin x+\cos\dfrac{x}{3}+\sin\dfrac{x}{5}$. У відповідь записати значення $T_0:\pi$.

22.50. Знайти нулі функції $y=\ln^2(x^2-3x-9)+\sqrt{x^3-8x-8}$.

22.51. **(ЗНО–2011)** На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$, що визначена на проміжку $(-\infty;+\infty)$ і має лише три нулі. Розв'язати систему $\begin{cases} f(x)\geq 0, \\ x^2+x-6>0. \end{cases}$ У відповідь записати суму всіх цілих розв'язків системи.



22.52. За якого найбільшого значення параметра a функція $f(x)=\ln\left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right)$ буде непарною?

22.53. За яких значень параметра a число π є періодом функції $f(x)=\dfrac{\cos x}{a+\sin x}$?

22.54. Для функції $y=2\sin\left(\pi x+3\right)-7$ знайти: 1) основний період; 2) найбільше значення.

Тема 23. Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— будувати графіки лінійних, квадратичних, степеневих, показникових, логарифмічних та тригонометричних функцій;
— розв'язувати задачі, використовуючи графіки функцій
— використовувати перетворення графіків функцій.

Якщо відомий графік функції $y = f(x)$, то шляхом його перетворення можна отримати графіки низки інших функцій.

Графік функції $y = f(x) + a$

Нехай x_1 належить області визначення функції $y = f(x)$, тоді $f(x_1)$ і $f(x_1) + a$ є значеннями відповідно функцій $y = f(x)$ і $y = f(x) + a$ у цій точці. Тоді точка $A_1(x_1; f(x_1))$ належить графіку функції $y = f(x)$, а точка $A_1'(x_1; f(x_1) + a)$ — графіку функції $y = f(x) + a$. Але точку $A_1'(x_1; f(x_1) + a)$ можна одержати перенесенням точки A_1 угору на відстань a одиниць, якщо $a > 0$, або вниз на відстань $|a|$, якщо $a < 0$. Оскільки вибрана точка x_1 — довільна точка з області визначення функцій, то аналогічно можна одержати будь-яку точку графіка функції $y = f(x) + a$ з графіка функції $y = f(x)$.

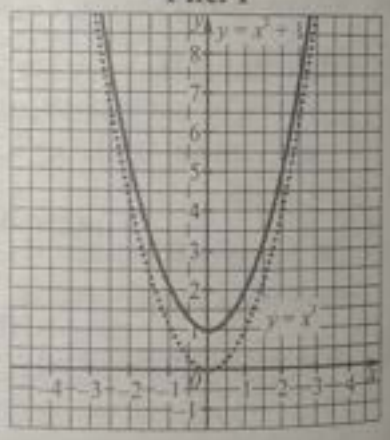
Узагалі, *графік функції $y = f(x) + a$ можна одержати із графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі y на a одиниць угору, якщо $a > 0$, і на $|a|$ одиниць униз, якщо $a < 0$.*

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(x) + 4$. Оскільки $4 > 0$, то для побудови графіка функції $y = f(x) + 4$ достатньо перенести графік функції $y = f(x)$ на 4 одиниці вгору (див. рис. 1).



Рис. 1

Наприклад, побудувати графік функції $y = x^2 + 1$. Будуємо графік функції $y = x^2$ і паралельно переносимо графік вгору на 1 одиницю вздовж осі y (оскільки $1 > 0$). Одержуємо графік функції $y = x^2 + 1$ (див. рис.).

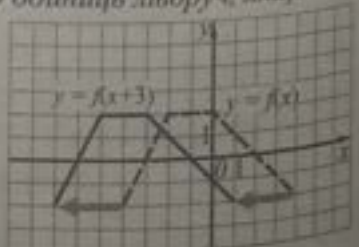


Графік функції $y = f(x + b)$

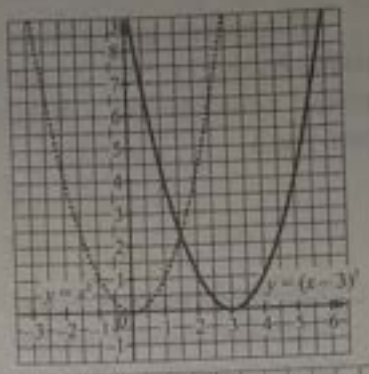
Нехай x_1 належить області визначення функції $y = f(x)$ і $y_1 = f(x_1)$. Знайдемо значення y_2 функції $y = f(x + b)$ у точці $x_1 - b$. Одержимо: $y_2 = f((x_1 - b) + b) = f(x_1) = y_1$. Отже, значення функції $y = f(x + b)$ відносно значення функції $y = f(x)$ зміщується на відстань $|b|$ праворуч ($b < 0$) або ліворуч ($b > 0$). Оскільки вибрана точка x_1 — довільна точка з області визначення функцій, то аналогічно можна одержати будь-яку точку графіка функції $y = f(x + b)$ з графіка функції $y = f(x)$.

Узагалі, *графік функції $y = f(x + b)$, можна одержати з графіка функції $y = f(x)$ за допомогою паралельного перенесення вздовж осі x на $|b|$ одиниць праворуч, якщо $b < 0$, і на b одиниць ліворуч, якщо $b > 0$.*

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(x + 3)$. Оскільки $3 > 0$, то для побудови графіка функції $y = f(x + 3)$ достатньо перенести графік функції $y = f(x)$ на 3 одиниці ліворуч (див. рис. 2).



Наприклад, побудувати графік функції $y = (x-3)^2$. Будуємо графік функції $y = x^2$ і паралельно переносимо графік праворуч на 3 одиниці вздовж осі x (оскільки $-3 < 0$). Одержуємо графік функції $y = (x-3)^2$ (див. рис.).



Графік функції $y = f(x + a) + b$

Щоб побудувати графік функції $y = f(x + a) + b$, необхідно послідовно виконати два паралельних перенесення графіка функції $y = f(x)$ (див. розглянуті вище випадки) або виконати одне паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ на вектор $\overrightarrow{(-a; b)}$.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(x+3) - 5$. Оскільки $3 > 0$, $-5 < 0$, то для побудови графіка функції $y = f(x + 3) - 5$ достатньо перенести графік функції $y = f(x)$ на 3 одиниці ліворуч і 5 одиниць вниз (див. рис. 3).

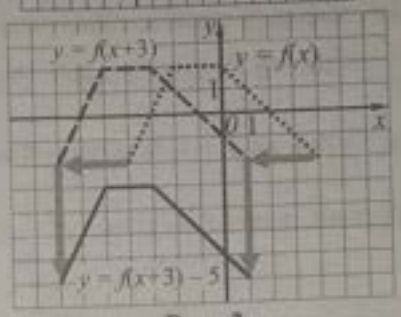
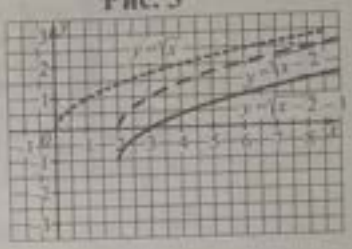


Рис. 3

Наприклад, побудувати графік функції $y = \sqrt{x-2} - 1$. Будуємо графік функції $y = \sqrt{x}$ і паралельно переносимо графік праворуч на 2 одиниці вздовж осі x (оскільки $-2 < 0$), одержуючи графік функції $y = \sqrt{x-2}$ паралельно переносимо отриманий графік униз на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = \sqrt{x-2} - 1$ (див. рис.).



Графік функції $y = -f(x)$

Щоб побудувати графік функції $y = -f(x)$, необхідно симетрично відобразити графік функції $y = f(x)$ відносно осі абсцис.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = -f(x)$. Симетрично відображаємо графік відносно осі x (рис. 4).

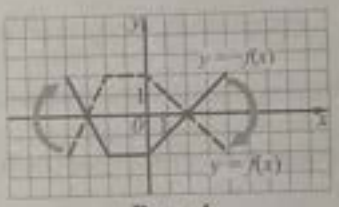
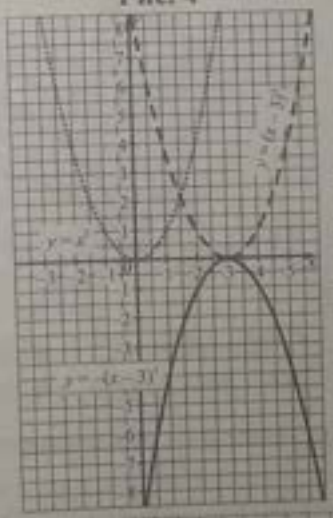


Рис. 4

Наприклад, побудувати графік функції $y = -(x-3)^2$. Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік праворуч на 3 одиниці вздовж осі x (оскільки $-3 < 0$) й одержуємо графік функції $y = (x-3)^2$; відображаємо одержаний графік симетрично відносно осі x й одержуємо графік функції $y = -(x-3)^2$ (див. рис.).



Графік функції $y = f(-x)$

Щоб побудувати графік функції $y = f(-x)$, необхідно симетрично відобразити графік функції $y = f(x)$ відносно осі ординат.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(-x)$. Симетрично відображаємо графік відносно осі y (див. рис. 5).

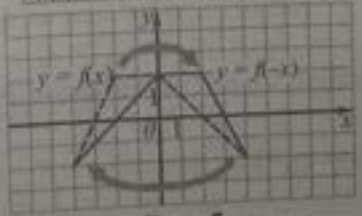
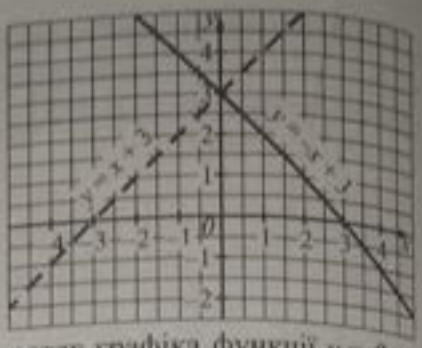


Рис. 5

Наприклад, побудувати графік функції $y = -x + 3$. Будуємо графік функції $y = x + 3$ і відображаємо одержаний графік симетрично відносно осі y й одержуємо графік функції $y = -x + 3$ (див. рис.).



Графік функції $y = cf(x)$

Щоб побудувати графік функції $y = cf(x)$, необхідно виконати розтяг графіка функції $y = f(x)$ від осі абсцис у c разів, якщо $c > 1$, або стиск до осі абсцис у $1/c$ разів, якщо $0 < c < 1$.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графіки функцій: а) $y = 2f(x)$; б) $y = \frac{1}{2}f(x)$.

а) Оскільки $2 > 1$, то виконуємо розтяг удвічі від осі x, (див. рис. 6 а); б) оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1$, то для побудови графіка функції $y = \frac{1}{2}f(x)$ виконаємо стиск графіка функції $y = f(x)$ до осі x (див. рис. 6 б).

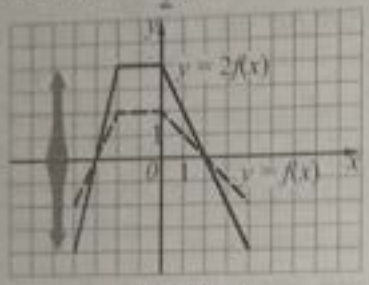


Рис. 6 а)

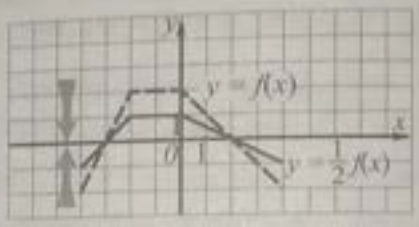
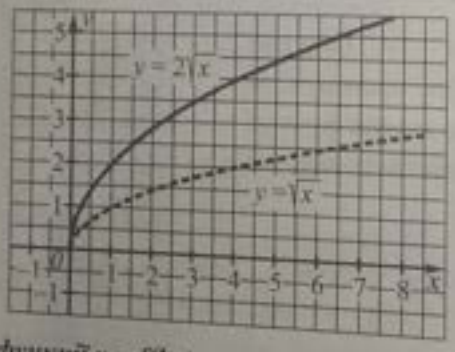


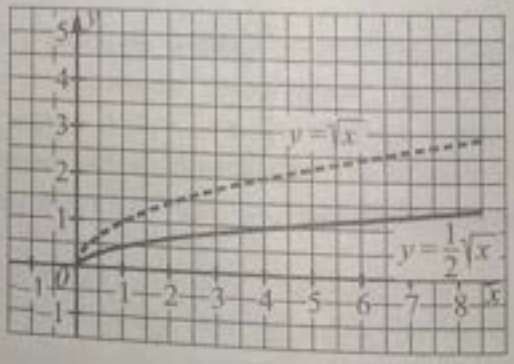
Рис. 6 б)

Наприклад, побудувати графіки функцій: а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$. Будуємо графік функції $y = \sqrt{x}$.

а) Виконуємо розтяг графіка функції $y = \sqrt{x}$ удвічі від осі x й одержуємо графік функції $y = 2\sqrt{x}$;

б) виконуємо стиск графіка функції $y = \sqrt{x}$ удвічі до осі x й одержуємо графік функції $y = \frac{\sqrt{x}}{2}$ (див. рис.).





Графік функції $y = f(kx)$

Щоб побудувати графік функції $y = f(kx)$, необхідно виконати розтяг графіка функції $y = f(x)$ від осі ординат у $\frac{1}{k}$ разів, якщо $0 < k < 1$, або стиск до осі ординат у k разів, якщо $k > 1$.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графіки функцій: а) $y = f(2x)$; б) $y = f\left(\frac{1}{2}x\right)$.

а) Оскільки $2 > 1$, то виконуємо стиск удвічі до осі y, (див. рис. 7 а); б) оскільки $0 < \frac{1}{2} < 1$, то для побудови графіка функції $y = f(\frac{1}{2}x)$ виконаємо розтяг графіка функції $y = f(x)$ від осі y (див. рис. 7 б).

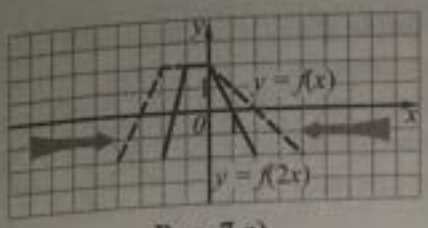


Рис. 7 а)

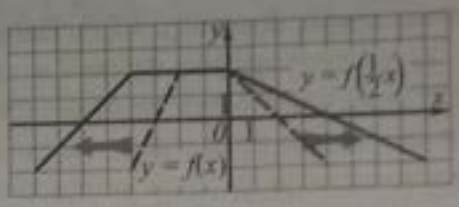
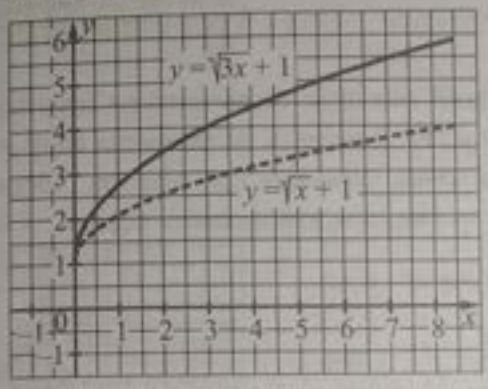
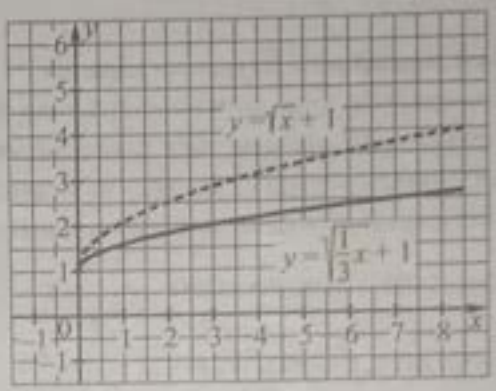


Рис. 7 б)

Наприклад, побудувати графіки функцій: а) $y=\sqrt{3x}+1$; б) $y=\sqrt{\frac{x}{3}}+1$. Будуємо графік функції $y=\sqrt{x}+1$. а) Виконуємо стиск графіка функції $y=\sqrt{x}+1$ утричі до осі y й одержуємо графік функції $y=\sqrt{3x}+1$; б) виконуємо розтяг графіка функції $y=\sqrt{x}$ утричі від осі y й одержуємо графік функції $y=\sqrt{x/3}+1$ (див. рис.).





Графік функції $y = |f(x)|$. За означенням модуля маємо: $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x)\geq 0; \\ -f(x), & \text{якщо } f(x)<0. \end{cases}$

Отже, якщо $f(x) \geq 0$, то значення функцій $y = |f(x)|$ та $y = f(x)$ однакові, якщо $f(x) < 0$, то значення цих функцій є протилежними числами. Тому графік функції $y = |f(x)|$ можна одержати так: будуємо графік функції $y = f(x)$ і ту його частину, яка розташована нижче від осі x, симетрично відображаємо відносно цієї осі.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = |f(x)|$. Ту частину графіка функції $y = f(x)$, яка розміщена над віссю x, у тому числі точки перетину графіка з віссю абсцис, залишаємо без змін, а ту частину, яка розміщена під віссю абсцис, симетрично відображаємо відносно цієї осі (див. рис. 8).

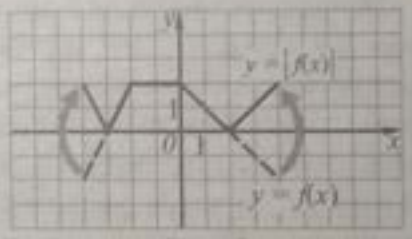
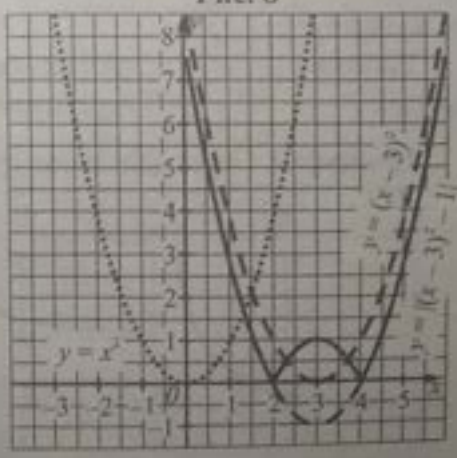


Рис. 8

Наприклад, побудувати графік функції $y = |(x-3)^2 - 1|$. Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік праворуч на 3 одиниці вздовж осі x (оскільки $-3 < 0$) й одержуємо графік функції $y = (x-3)^2$; паралельно переносимо отриманий графік униз на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = (x-3)^2 - 1$; відображаємо симетрично відносно осі x ту частину графіка, яка міститься під віссю, й одержуємо графік функції $y = |(x-3)^2 - 1|$ (див. рис.).



Графік функції $y = f(|x|)$

Функція $y = f(|x|)$ — парна ($f(|-x|) = f(|x|)$). Тому достатньо побудувати графік функції $y = f(x)$ для $x \geq 0$ і симетрично відобразити його відносно осі ординат.

Нехай задано графік функції $y = f(x)$. Побудувати графік функції $y = f(|x|)$. Ту частину графіка функції $y = f(x)$, яка розміщена праворуч осі y, у тому числі точки перетину графіка з віссю ординат, залишаємо без змін, а ту частину, яка розміщена ліворуч від осі абсцис, замінюємо симетричною до розташованої праворуч частини відносно осі ординат (див. рис. 9).

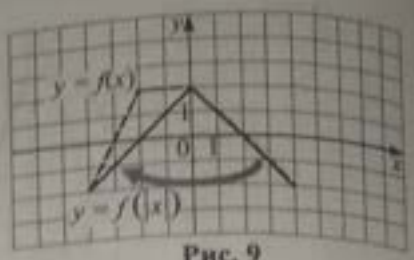
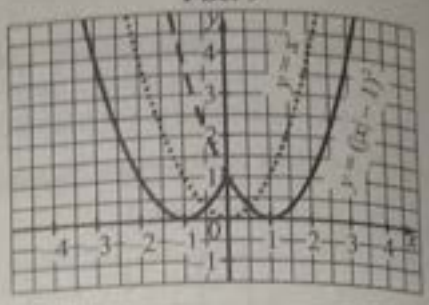


Рис. 9

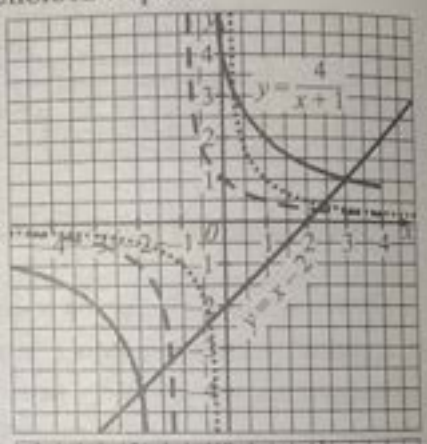
Наприклад, побудувати графік функції $y = (|x| - 1)^2$. Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік ліворуч на 1 одиницю вздовж осі x й одержуємо графік функції $y = (x - 1)^2$; залишаємо ту частину графіка, яка відповідає невід'ємним значенням x; симетрично відображаємо її відносно осі y й одержуємо графік функції $y = (|x| - 1)^2$.



Графічний метод розв'язування рівнянь

Часто, використовуючи побудову графіків функцій методом геометричних перетворень, зручно розв'язувати деякі види рівнянь. Для цього рівняння $f(x) = 0$ зводять до рівняння виду $g(x) = h(x)$, будують графіки рівнянь $y = g(x)$ і $y = h(x)$ та знаходять точки перетину цих рівнянь. Абсциси точок перетину є наближеними значеннями коренів рівняння, за якими встановлюють корені.

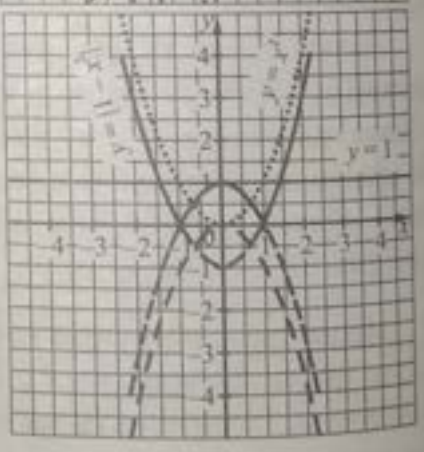
Наприклад, розв'язати рівняння $\frac{4}{x+1} = x - 2$. Будуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{4}{x+1}$ і $y = x - 2$ та знаходимо абсциси точок їх перетину.



З рисунка видно, що $x_1 = 3$, $x_2 = -2$. Перевіркою встановлюємо, що $x_1 = 3$ і $x_2 = -2$ — корені рівняння.

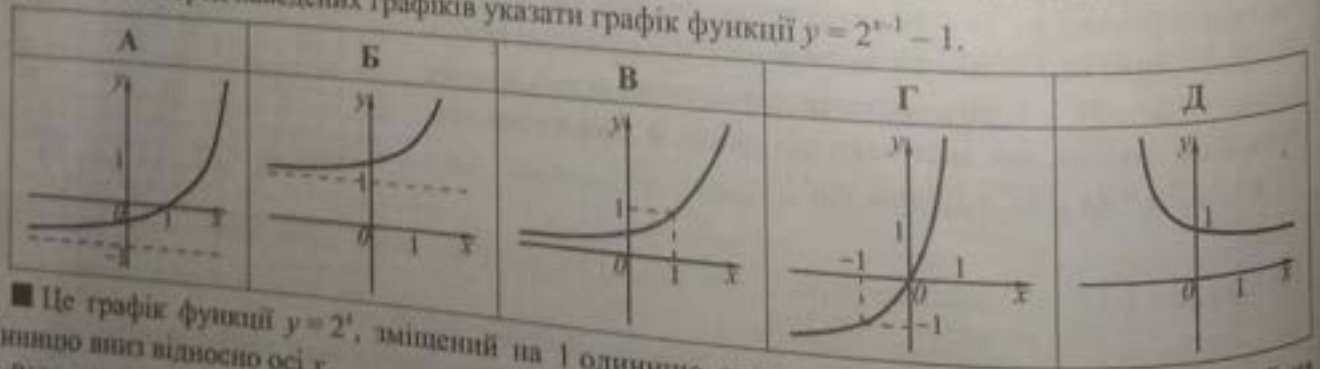
У деяких випадках за допомогою методу геометричних перетворень зручно розв'язувати рівняння з параметрами.

Наприклад, знайти всі значення параметра a, для яких рівняння $|1 - x^2| = a$ має три корені. Будуємо графік функції $y = x^2$; симетрично відображаємо одержаний графік відносно осі x й одержуємо графік функції $y = -x^2$; паралельно переносимо отриманий графік угору на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = 1 - x^2$; симетрично відображаємо відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержуємо графік функції $y = |1 - x^2|$.



Рівняння $|1 - x^2| = a$ матиме три корені, якщо $a = 1$ (графіки функцій $y = |1 - x^2|$ і $y = 1$ перетинаються в трьох точках).

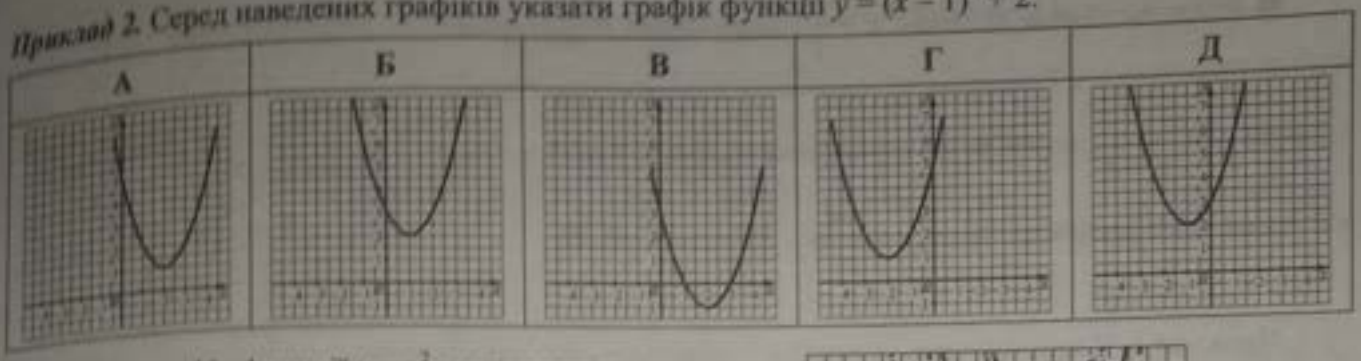
Приклад 1. Серед наведених графіків указати графік функції $y = 2^{x-1} - 1$.



■ Це графік функції $y = 2^x$, зміщений на 1 одиницю праворуч відносно осі y та опущений на 1 одиницю вниз відносно осі x.

Відповідь. А. ■

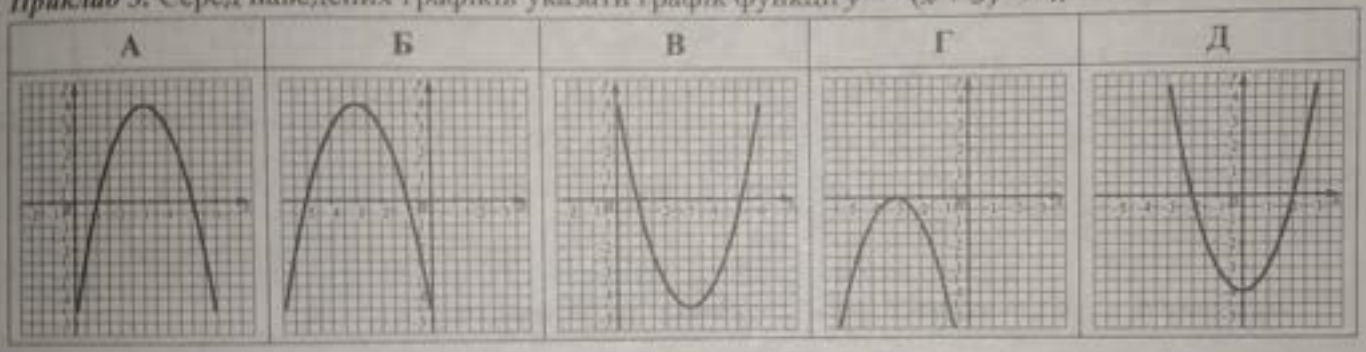
Приклад 2. Серед наведених графіків указати графік функції $y = (x - 1)^2 + 2$.



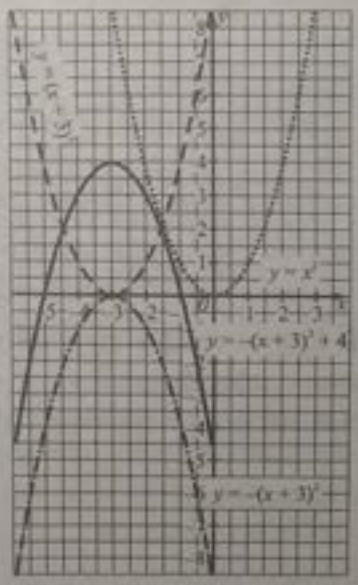
■ Будуємо графік функції $y = x^2$; переносимо графік праворуч на 1 одиницю вздовж осі x й одержуємо графік функції $y = (x - 1)^2$; паралельно переносимо одержаний графік угору на 2 одиниці вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = (x - 1)^2 + 2$. *Відповідь.* **Б.** ■



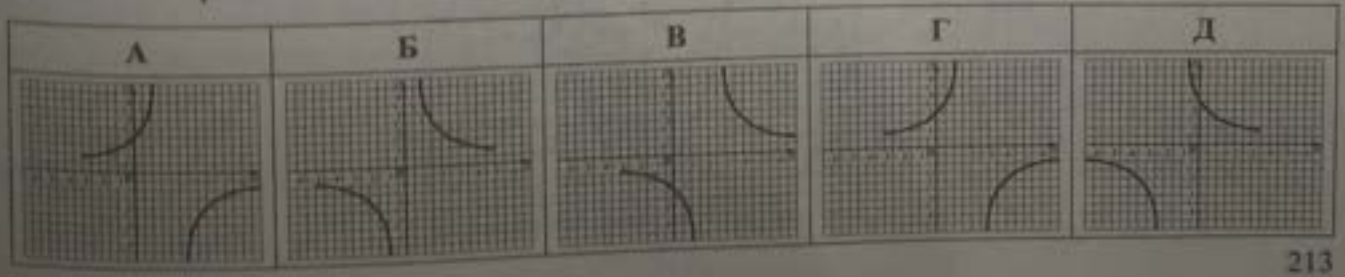
Приклад 3. Серед наведених графіків указати графік функції $y = -(x + 3)^2 + 4$.



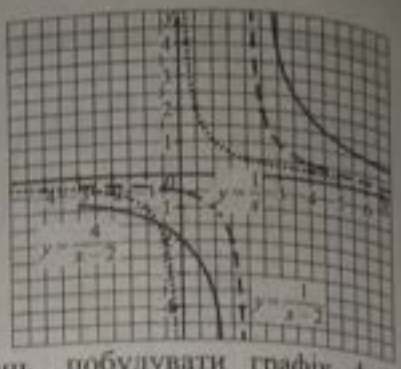
■ Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік ліворуч на 3 одиниці й одержуємо графік функції $y = (x + 3)^2$; відображаємо отриманий графік симетрично відносно осі x й одержуємо графік функції $y = -(x + 3)^2$; паралельно переносимо отриманий графік угору на 4 одиниці й одержуємо графік функції $y = -(x + 3)^2 + 4$. *Відповідь.* **Б.** ■



Приклад 4. Серед наведених графіків указати графік функції $y = \dfrac{4}{x - 2}$.



■ Будуємо графік функції $y = \frac{1}{x}$; паралельно переносимо графік праворуч на 2 одиниці вздовж осі x й одержуємо графік функції $y = \frac{1}{x-2}$; розтягуємо отриманий графік у 4 рази від осі x й одержуємо графік функції $y = \frac{4}{x-2}$. *Відповідь.* **В.** ■

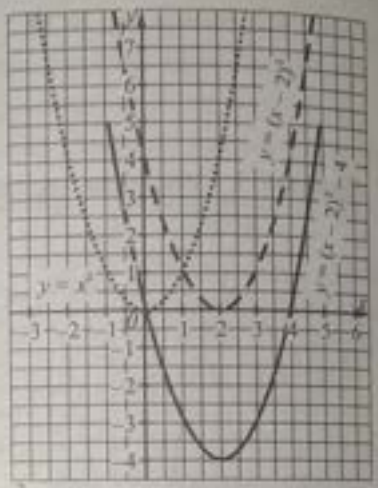


Приклад 5. Користуючись методом геометричних перетворень, побудувати графік функції $y = (x-2)^2 - 4$ та знайти проміжки її зростання.

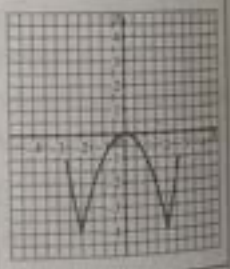
А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 2]$	$[0; 4]$	$[2; +\infty)$	$[4; +\infty)$

■ Будуємо графік функції $y = x^2$; паралельно переносимо графік праворуч на 2 одиниці й одержуємо графік функції $y = (x-2)^2$; паралельно переносимо отриманий графік униз на 4 одиниці й одержуємо графік функції $y = (x-2)^2 - 4$.

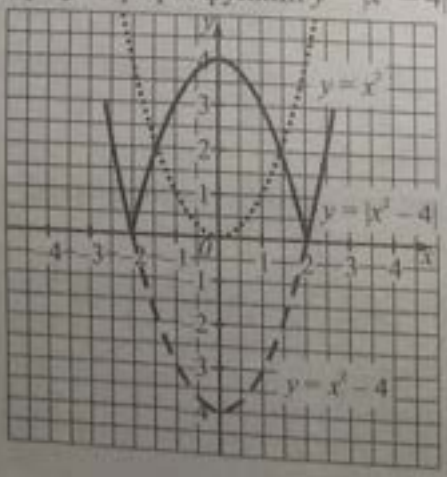
Функція зростає на проміжку $[2; +\infty)$. *Відповідь.* **Г.** ■



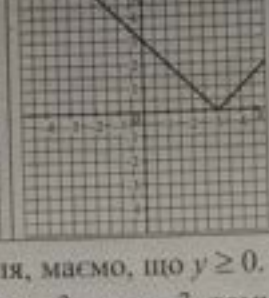
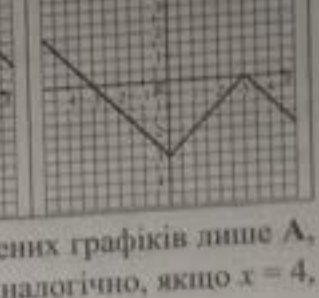
Приклад 6. Серед наведених графіків указати графік функції $y = |x^2 - 4|$.

А	Б	В	Г	Д
				

■ Будую графік функції $y = x^2$; паралельно переношу графік униз на 4 одиниці вздовж осі y й одержую графік функції $y = x^2 - 4$; симетрично відображаю відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержую графік функції $y = |x^2 - 4|$. *Відповідь.* ***Г.*** ■



Приклад 7. Серед наведених графіків указати графік функції $y = |3 - |x - 3||$.

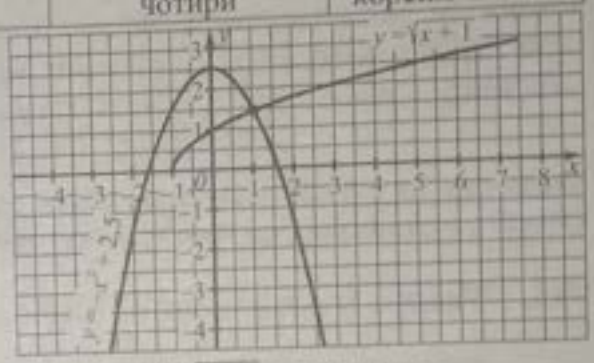
А	Б	В	Г	Д
				

■ Використовуючи властивість модуля, маємо, що $y \geq 0$. Тому серед наведених графіків лише **А**, **В** та **Г** відповідають цій властивості. Якщо $x = 3$, то $y = 3$, тому це не графік **В**. Аналогічно, якщо $x = 4$, то $y = 2$, тому не **А**. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 8. Користуючись графічним методом, встановити кількість коренів рівняння $\sqrt{x+1} = -x^2 + 2{,}5$.

А	Б	В	Г	Д
Один	два	три	чотири	коренів не має

■ Будуємо графіки функцій $y = \sqrt{x+1}$ та $y = -x^2 + 2{,}5$.



Дане рівняння має один корінь, бо графіки перетинаються лише в одній точці.

Відповідь. **А.** ■

Приклад 9. Користуючись графічним методом, розв'язати рівняння $\sqrt{x+3} = 4 - 2x$.

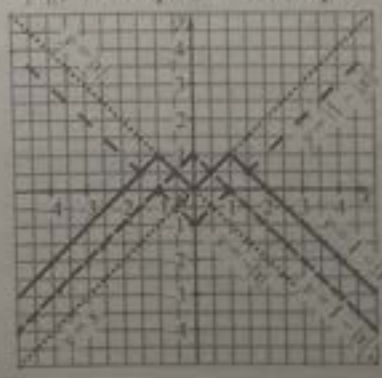
А	Б	В	Г	Д
5	2	1	3,5	–1

■ $\sqrt{x+3} = 4 - 2x$. Будуємо графіки функцій $y = \sqrt{x+3}$ і $y = 4 - 2x$ та знаходимо абсцису точки їх перетину. $x = 1$. Перевіркою встановлюємо, що $x = 1$ — корінь рівняння. *Відповідь.* **В.** ■



Приклад 10. Скільки коренів має рівняння $1 - |1 - |x|| = a$? У відповідь записати кількість коренів, якщо $0 < a < 1$.

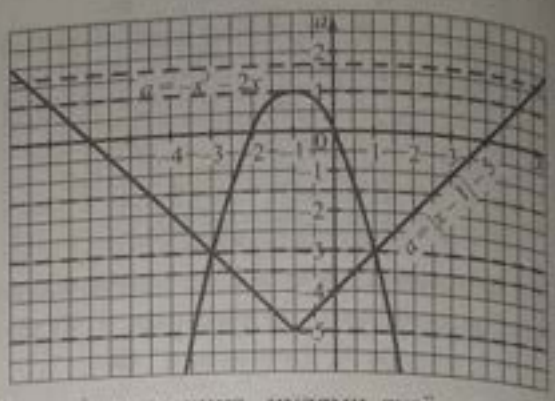
■ Будуємо графік функції $y = |x|$; симетрично відображаємо його відносно осі x графік й одержуємо графік функції $y = -|x|$; паралельно переносимо отриманий графік угору на 1 одиницю вздовж осі y й одержуємо графік функції $y = 1 - |x|$; симетрично відображаємо відносно осі x ту частину отриманого графіка, яка міститься під віссю x, й одержуємо графік функції $y = |1 - |x||$; симетрично відображаємо відносно осі x графік й одержуємо графік функції $y = -|1 - |x||$; паралельно переносимо графік угору на 1 одиницю й одержуємо графік функції $y = 1 - |1 - |x||$. Будуємо графік рівняння $y = a$.



Якщо $a < 0$, то рівняння має два корені; якщо $a = 0$, то рівняння має три корені; якщо $0 < a < 1$, то рівняння має чотири корені; якщо $a = 1$, то рівняння має 2 корені; якщо $a > 1$ — коренів немає.

Відповідь. 4. ■

Приклад 11. За яких значень параметра a рівняння $(a+5-|x-1|)(a+x^2+2x)=0$ має рівно три корені? У відповідь записати їх суму.



■ (...). Дане рівняння рівносильне такій сукупності: $\begin{cases} a+5-|x-1|=0, \\ a+x^2+2x=0. \end{cases}$ Розв'яжемо кожне з цих рівнянь в системі xOa. Для цього розглянемо функції $a=|x-1|-5$ та $a=-x^2-2x$.

Будуємо графік функції $a=|x-1|-5$: $a=|x|$ паралельно переносимо отриманий графік ліворуч на 1 одиницю вздовж осі абсцис та вниз на 5 одиниць вздовж осі ординат.

Будуємо графік функції $a=-x^2-2x=-x(x+2)$: парабола вітками вниз, нулями якої є $x=0$ та $x=-2$, а координати вершини $(-1;\ 1)$.

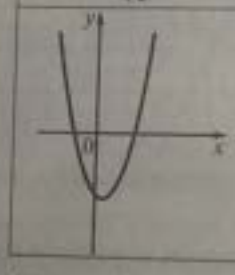
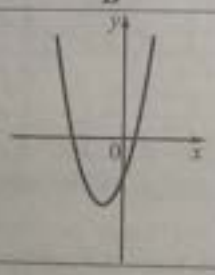
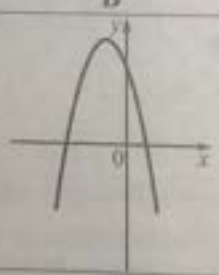
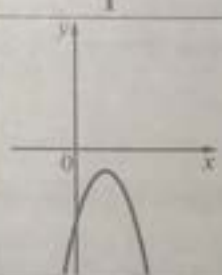
З графіка маємо, що абсциси точок перетину цих функцій є $x=1$ та $x=-3$ при цьому $a=-3$. Якщо $a<-5$, то рівняння має два корені; якщо $a=-5$, то рівняння має три корені; якщо $-5<a<-3$, то рівняння має чотири корені; якщо $a=-3$, то рівняння має 2 корені; якщо $-3<a<1$, то рівняння має чотири корені; якщо $a=1$, то рівняння має 3 корені; якщо $a>1$, то рівняння має два корені. Отже, розв'язками задачі є $a=-5$ та $a=1$, їх сума дорівнює -4. *Відповідь.* -4. ■

Завдання 23.1–23.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

23.1. Указати формулу функції, графік якої отримують із графіка $y=\frac{1}{x}$ у результаті його паралельного перенесення в додатному напрямі осі y на 5 одиниць.

А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{1}{x+5}$	$y=\frac{1}{x-5}$	$y=\frac{1}{x}-5$	$y=\frac{1}{x}+5$	$y=\frac{5}{x}$

23.2. **(ЗНО–2012)** На якому з наведених рисунків зображено ескіз графіка функції $y=4-(x-1)^2$?

А	Б	В	Г	Д
				

23.3. Указати формулу функції, графік якої отримують із графіка $y=\cos x$ у результаті його стискування до осі x утричі.

А	Б	В	Г	Д
$y=3\cos x$	$y=\frac{1}{3}\cos x$	$y=\cos 3x$	$y=\cos\frac{x}{3}$	$y=\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$

23.4. Областю значень функції $y=f(x)$ є проміжок $[-4;\ 16]$. Знайти область значень $y=\frac{1}{4}f(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$[-16;\ 64]$	$[4;\ 4]$	$[-1;\ 4]$	$[-4;\ 16]$	неможна визначити

23.5. На якому з рисунків зображено графік функції $y = -2^x$?

А	Б	В	Г	Д
				

23.6. Указати формулу функції, графік якої отримують із графіка функції $y = x^3$ у результаті його паралельного перенесення в додатному напрямі осі x на 4 одиниці.

А	Б	В	Г	Д
$y = (x-4)^3$	$y = (x+4)^3$	$y = x^3 - 4$	$y = x^3 + 4$	$y = 4x^3$

23.7. На якому з рисунків зображено графік функції $y = \sqrt{x+1}$?

А	Б	В	Г	Д
				

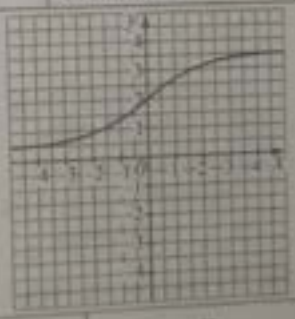
23.8. Указати формулу функції, графік якої отримують із графіка функції $y = \sin x$ у результаті його розтягування у 8 разів від осі y?

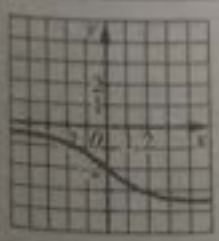
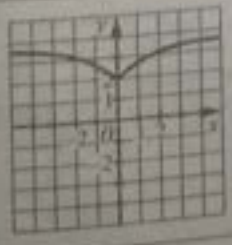
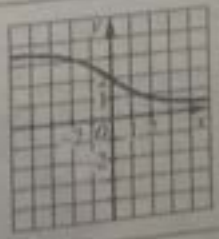
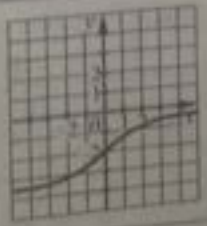
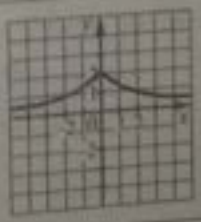
А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{8}\sin x$	$y = 8\sin x$	$y = \sin\frac{x}{8}$	$y = \sin 8x$	$y = \sin x + 8$

23.9. Областю визначення функції $y = f(x)$ є проміжок $[-4; 6]$. Знайти область визначення функції $y = f(2x)$.

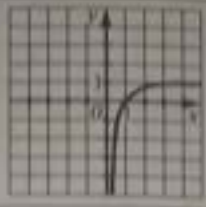
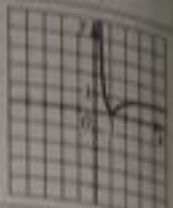
А	Б	В	Г	Д
$[-8; 12]$	$[-2; 3]$	$[-4; 3]$	$[-2; 8]$	не можна визначити

23.10. На рисунку зображено ескіз графіка функції $y = f(x)$. На якому з рисунків зображено ескіз графіка функції $y = f(-x)$?

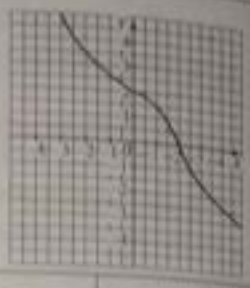


А	Б	В	Г	Д
				

23.11. На якому з рисунків зображено графік функції $y = |\log_3 x|$?

А	Б	В	Г	Д
				

23.12. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. На якому з рисунків зображено графік функції $y = f(|x|)$?



А	Б	В	Г	Д
				

23.13. Графік функції $y = x^3$ перенесли ліворуч на 4 одиниці й відобразили симетрично відносно осі x. Графік якої функції отримали в результаті таких перетворень?

А	Б	В	Г	Д
$y = -(x-4)^3$	$y = -(x+4)^3$	$y = (-x)^3 - 4$	$y = (-x)^3 + 4$	$y = (x+4)^3$

23.14. Областю значень функції $y = f(x)$ є проміжок $[-2; 2]$. Знайти область значень функції $y = 4f(x) - 3$.

А	Б	В	Г	Д
$[-20; -4]$	$[-2; 2]$	$[-3{,}5; -2{,}5]$	$[-11; 5]$	$[0; 5]$

23.15. У результаті яких послідовних перетворень із графіка функції $y = f(x)$ можна отримати графік функції $y = f(2x + 6)$?

А	Б	В	Г	Д
стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 6 одиниць	розтягом від осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 6 одиниць	стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 3 одиниці	стиском до осі y удвічі й паралельним перенесенням праворуч на 3 одиниці	розтягом від осі y удвічі й паралельним перенесенням ліворуч на 3 одиниці

23.16. Областю визначення функції $y = f(x)$ є проміжок $[0; 2]$. Знайти область визначення функції $y = f\left(\frac{x}{2} - 4\right)$.

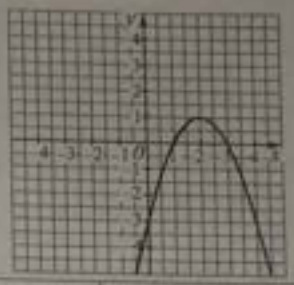
А	Б	В	Г	Д
$[-4; -2]$	$[4; 5]$	$[-8; -4]$	$[4; 8]$	$[8; 12]$

в) 5 000 Н; г) 500 Н.

3. На рисунку зображено тіло, сили, прикладені до нього, і його прискорення (див. рис.). Спроектувавши н...

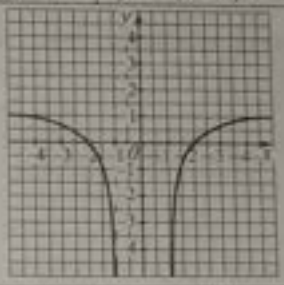


23.17. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
$y=(x+2)^2+1$	$y=-(x-2)^2+1$	$y=-(x-2)^2-1$	$y=(-x-2)^2+1$	$y=-(x-2)^2-1$

23.18. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
$y=\lvert\ln(x-1)\rvert$	$y=\lvert\ln(x+1)\rvert$	$y=\ln(\lvert x\rvert+1)$	$y=\ln(\lvert x\rvert-1)$	$y=\ln(\lvert x\rvert-2)$

23.19. На якому з рисунків зображено графік функції $y=\dfrac{x-1}{x-2}$?

А	Б	В	Г	Д
				

23.20. Ескіз графіка якої з наведених функцій зображено на рисунку?

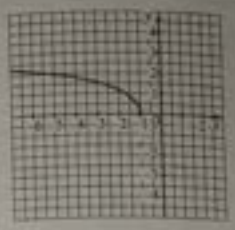


А	Б	В	Г	Д
$y=\sqrt{\lvert x\rvert+1}$	$y=\sqrt{\lvert x\rvert-1}$	$y=-\sqrt{\lvert x+1\rvert}$	$y=-\sqrt{\lvert x\rvert+1}$	$y=-\sqrt{x+1}$

Завдання 23.21–23.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

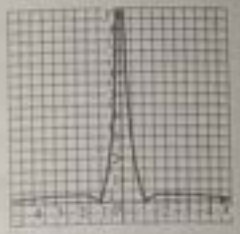
23.21. Установити відповідність між функціями (1–3) та їх графіками (А–Д).

1	2	3
$y=\dfrac{x-4}{x+2}$	$y=3^{\frac{1}{\log_3 3}-2}$	$y=\sqrt{-1-x}$

А	Б	В	Г	Д
				

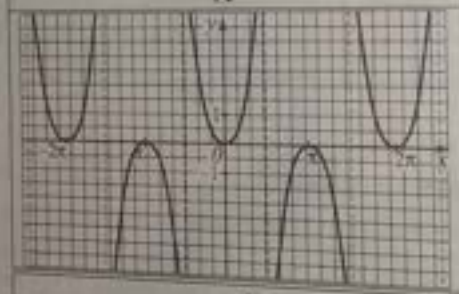
23.22. Установити відповідність між функціями (1–3) та їх графіками (А–Д).

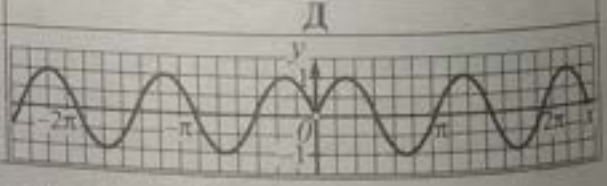
1	2	3
$y=\frac{x-\lvert x\rvert}{2}$	$y=x^2-2\lvert x\rvert-8$	$y=\lvert -x^2-x+2\rvert$

А	Б	В	Г	Д
				

23.23. Установити відповідність між функціями (1–3) та їх графіками (А–Д).

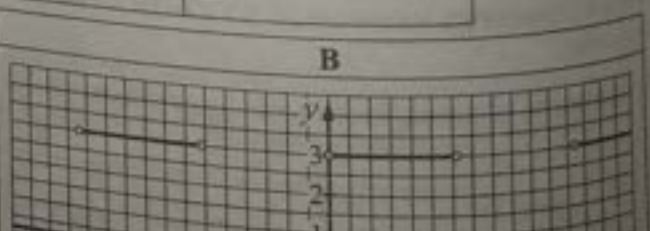
1	2	3
$y=\frac{\lvert x\rvert}{x}\sin 2x$	$y=\lvert x+1\rvert+\lvert x-2\rvert+\lvert x-3\rvert$	$y=3^{\lvert\log_3 x\rvert}$

А	Б	В
		

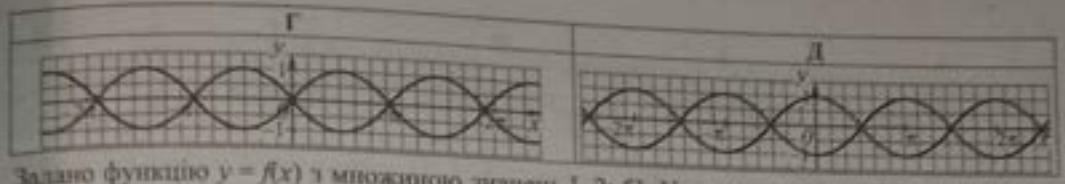
Г	Д
	

23.24. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх графіками (А–Д).

1	2	3
$y=3^{\frac{\sin x}{\lvert\sin x\rvert}}$	$x+\lvert x\rvert=y+\lvert y\rvert$	$\lvert y\rvert=\lvert\sin x\rvert$

А	Б	В
		

г) $ma = F\cos\alpha + F_a$. б) $ma = F\sin\alpha + N + mg$; в) $ma = F +$



23.25. Задано функцію $y = f(x)$ з множиною значень $[-2; 5]$. Установити відповідність між функціями (1–3) та їхніми множинами значень (А–Д).

1 $y = f(x) + 2$	**А** $[0; 5]$
2 $y = -f(x)$	**Б** $[-4; 10]$
3 $y = 2f(x)$	**В** $[2; 5]$
	Г $[0; 7]$
	Д $[-5; 2]$

23.26. Задано функцію $y = \varphi(x)$ з областю визначення $[-4; 10]$. Установити відповідність між функціями (1–3) та їхніми областями визначення (А–Д).

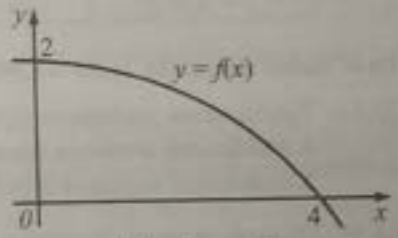
1 $y = \varphi(x + 4)$	**А** $[-4; 10]$
2 $y = \varphi(x - 4)$	**Б** $[0; 14]$
3 $y = \varphi(x) + 5$	**В** $[4; 18]$
	Г $[1; 15]$
	Д $[-8; 6]$

23.27. Задано функцію $y = h(x)$ з областю визначення $[-2; 6]$. Установити відповідність між функціями (1–3) та їхніми областями визначення (А–Д).

1 $y = h\left(\frac{x}{2}\right)$	**А** $[0; 6]$
2 $y = h(2x)$	**Б** $[-6; 2]$
3 $y = h(-x)$	**В** $[-4; 12]$
	Г $[-6; 6]$
	Д $[-1; 3]$

23.28. **(ЗНО–2012)** На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, спадної на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Установіть відповідність між функцією (1–4) та точкою перетину її графіка з віссю Ox (А–Д).

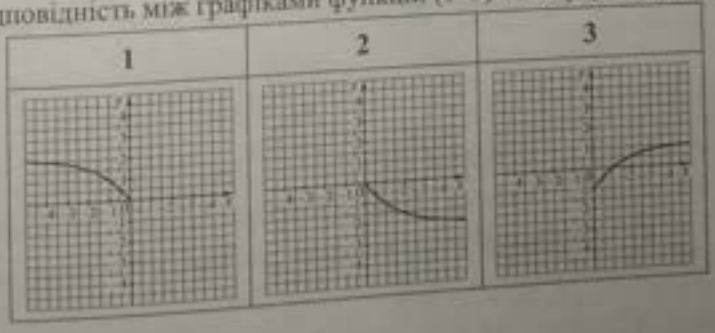
Функція	*Точка перетину*
1 $y = f(x + 2)$	**А** $(0; 0)$
2 $y = f(x - 2)$	**Б** $(2; 0)$
3 $y = 2f(x)$	**В** $(4; 0)$
4 $y = f(x) - 2$	**Г** $(6; 0)$
	Д $(8; 0)$



23.29. Установити відповідність між геометричними перетвореннями графіків функцій $y = \cos x$ і $y = \sin x$ (1–3) та функціями, одержаних у результаті цих перетворень (А–Д).

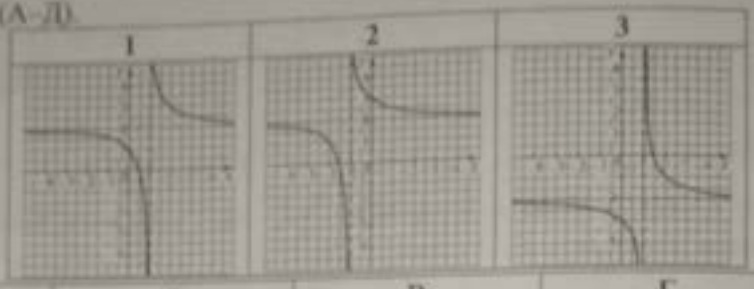
1 Графік функції $y = \cos x$ симетрично відобразили відносно осі x	**А** $y = \lvert\sin x\rvert$
2 Графік функції $y = \cos x$ симетрично відобразили відносно осі y	**Б** $y = \sin x$
3 Частину графіка функції $y = \sin x$, яка лежить вище і на самій осі x залишили без змін, а частину, яка лежить нижче осі x, відобразили симетрично відносно цієї осі	**В** $y = \sin\lvert x\rvert$
	Г $y = \cos(-x)$
	Д $y = -\cos x$

23.30. Установити відповідність між графіками функцій (1–3) та їх формулами (А–Д).



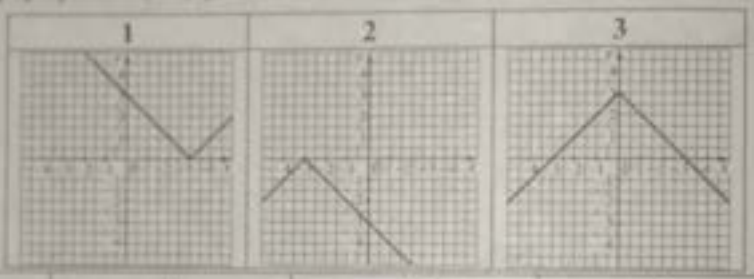
А	Б	В	Г	Д
$y=\sqrt{x}-1$	$y=\sqrt{x-1}$	$y=\sqrt{x+1}$	$y=\sqrt{-x}$	$y=-\sqrt{x}$

23.31. Установити відповідність між графіками функцій (1–3), утворених із графіка функції $y=\frac{1}{x}$, та їх формулами (А–Д).



А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{1}{x+1}+2$	$y=\frac{1}{x-1}-2$	$y=\frac{1}{x-1}+2$	$y=\frac{1}{x-2}+1$	$y=\frac{1}{x+1}-2$

23.32. Установити відповідність між графіками функцій (1–3), утворених із графіка функції $y=|x|$, та відповідними формулами (А–Д).



А	Б	В	Г	Д
$y=\|x+3\|$	$y=-\|x\|+3$	$y=\|x-3\|$	$y=-\|x+3\|$	$y=\|x\|-3$

Розв'яжіть завдання 23.33–23.34. Відповідь запишіть десятковим дробом.

23.33. Найбільшим значенням функції $y=f(x)$ є число 8. Знайти:

1. найбільше значення функції $y=0{,}3f(4x+5)-1$;

2. найменше значення функції $y=-3f(2x-5)$.

23.34. Область значень функції $y=f(x)$ є $(-\infty; 5]$. Знайти найбільше значення, яке може приймати аргумент x функції $y=\varphi(x)$, графік якої симетричний до графіка функції $y=f(x)$ відносно прямої $y=x$. Якщо такого числа не існує записати число 100.

Тема 24. Похідна функції, її геометричний і механічний зміст

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— поняття похідної в точці;
— знаходити похідні функцій;
— знаходити числове значення похідної функції в точці для заданого значення аргумента;
— знаходити похідну суми, добутку і частки двох функцій;
— знаходити кутовий коефіцієнт і кут нахилу дотичної до графіка функції в даній точці;
— розв'язувати задачі з використанням геометричного та фізичного змісту похідної;
— знаходити похідну складеної функції;
— складати рівняння дотичної до графіка функції в точці;
— поняття другої похідної.

Границя функції. Розглянемо функцію $f(x) = x - 1$ і точку $x_0 = 1$. Якщо значення аргумента x прямують до числа 1 (позначають $x \to 1$), то відповідні їм значення функції $f(x)$ прямують до числа 0 (позначають $f(x) \to 0$). По-іншому: якщо значення аргумента усе ближче знаходяться до числа 1, то відповідні їх значення функції $f(x)$ усе менше відрізняються від числа 0. У цьому випадку кажуть, що число 0 є границею функції $f(x)$ у точці 1, і відповідно записують $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.

Для границь функції справедливими є всі твердження для границь послідовностей.

Наприклад: $\lim\limits_{x \to 3} 8 = 8$; $\lim\limits_{x \to 2}\left(3x^2\right) = 3\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 3 \cdot 2^2 = 12$;

$\lim\limits_{x \to 3}\left(x^2 - 3x + 2\right) = \lim\limits_{x \to 3} x^2 - 3\lim\limits_{x \to 3} x + \lim\limits_{x \to 3} 2 = 3^2 - 3 \cdot 3 + 2 = 2$; $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x \to 2}(x-1)} = \dfrac{2+2}{2-1} = 4$.

Неперервність функції. Функцію $y = f(x)$ називають *неперервною* у точці x_0, якщо вона визначена в деякому околі цієї точки і при $x \to x_0$ границя функції дорівнює значенню функції у цій точці, тобто $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в кожній точці деякої множини $M \subset R$, то кажуть, що вона неперервна на всій множині M. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на $D(f)$, то таку функцію називають неперервною.

Теорема: Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ неперервні в точці x_0, то в цій точці неперервними є й функції $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$ і $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (якщо $g(x) \neq 0$).

Похідна функції. Розглянемо функцію $y = f(x)$. Нехай x_0 — фіксована точка з області визначення функції f. Якщо x — довільна точка області визначення функції $y = f(x)$ така, що $x \neq x_0$, то різницю $x - x_0$ називають *приростом аргумента функції* $y = f(x)$ у точці x_0 і позначають Δx (читають *«дельта ікс»*). Отже, $\Delta x = x - x_0$, звідки $x = x_0 + \Delta x$. Кажуть, що *аргумент одержав приріст* Δx *у точці* x_0. Якщо аргумент одержав приріст Δx у точці x_0, то значення функції змінилося на величину $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Цю величину називають *приростом функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 і позначають Δf.

Наприклад, знайти приріст функції $y = x^3$ у точці x_0, який відповідає приросту аргумента Δx. Одержимо: $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2 \Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$.

Похідною функції $y = f(x)$ у точці x називають границю (якщо вона існує) відношення приросту функції $\Delta f(x)$ до приросту аргумента Δx, якщо приріст аргумента прямує до нуля:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Похідну функції позначають y' або $f'(x)$. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну, то функцію називають *диференційованою*. Відшукання похідної функції f називають *диференціюванням*.

Наприклад, користуючись означенням, знайти похідну функції $y = \sqrt{x}$.

Маємо: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x+\Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}\right)} \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Таблиця похідних елементарних функцій

1. $(C)' = 0$, C — константа.
2. $(x)' = 1$.
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$.
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.
5. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
6. $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$.
7. $\left(e^x\right)' = e^x$.
8. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$.
9. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
10. $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$.
11. $(\sin x)' = \cos x$.
12. $(\cos x)' = -\sin x$.
13. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
14. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Правила диференціювання

Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ диференційовані, C — деяка константа, то диференційованими будуть також функції $y = Cf(x)$, $y = f(x) \pm g(x)$, $y = f(x) \cdot g(x)$, $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, до того ж справедливими є рівності:

$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0$

Наприклад: а) $\left(3x^4\right)' = 3 \cdot \left(x^4\right)' = 3 \cdot 4x^{4-1} = 12x^3$; б) $\left(2x + \sqrt{x}\right)' = (2x)' + \left(\sqrt{x}\right)' = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $(x^2 \cdot \sin x)' = (x^2)' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot x^2 = 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x$;

г) $\left(\frac{3x+1}{4x^2-3}\right)' = \frac{(3x+1)'\left(4x^2-3\right) - \left(4x^2-3\right)'(3x+1)}{\left(4x^2-3\right)^2} = \frac{3\left(4x^2-3\right) - 8x(3x+1)}{\left(4x^2-3\right)^2} = \frac{-12x^2-8x-9}{\left(4x^2-3\right)^2}$.

Похідна складеної функції

Якщо значенням аргумента функції f є значення функції g, то кажуть, що задано складену функцію $y = f(g(x))$. Наприклад, нехай задано функції $f(t) = 3t + 1$, $t(x) = \cos x$, тоді $f(t) = f(t(x)) = 3t(x) + 1 = 3 \cdot \cos x + 1$. Отже, можна сказати, що $y = 3\cos x + 1$ задає складену функцію $y = f(g(x))$.

Похідну складеної функції обчислюють за формулою

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g) \cdot g'(x).$$

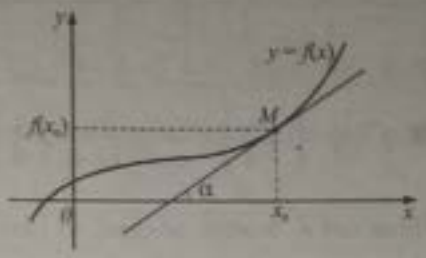
Наприклад, знайти похідну функції $\left((2x+1)^4\right)' = 4(2x+1)^3 \cdot (2x+1)' = 4(2x+1)^3 \cdot 2 = 8(2x+1)^3$.

Фізичний зміст похідної. Похідна функції $y = f(x)$ у точці x_0 виражає швидкість зміни функції або процесу, який ця функція описує, у цій точці. Так, якщо функція $S = S(t)$ описує рух матеріальної

точки, тобто залежність пройденої відстані S від часу t, то її миттєва швидкість в момент часу t_0 дорівнює похідній $S(t)$ у точці t_0: $v(t_0) = S'(t_0)$; похідна швидкості $v = v(t)$ за часом є прискоренням: $v'(t) = a(t)$.

Геометричний зміст похідної

Значення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в цій точці: $k(x_0) = f'(x_0)$. Оскільки $k(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, де α — кут нахилу цієї дотичної з додатним напрямком осі абсцис, то $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.



Рівняння дотичної до графіка функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x_0. Тоді до графіка функції у точці з абсцисою x_0 можна провести невертикальну дотичну (див. рис.). Рівняння невертикальної прямої має вигляд $y = kx + b$. Виходячи з геометричного змісту похідної, одержимо: $k = f'(x_0)$. Тоді $y = f'(x_0) \cdot x + b$. Ця пряма проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$, тому $f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$, звідки $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$. Тоді рівняння дотичної має вигляд: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

Наприклад, скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^2 + 3x - 4$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$. Маємо: $f(x_0) = f(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 - 4 = 6$; $f'(x) = 2x + 3$; $f'(x_0) = f'(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$. Підставивши знайдені числові значення у рівняння дотичної, одержимо: $y = 7(x - 2) + 6$; $y = 7x - 8$.

Друга похідна. Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка є диференційовною на певній множині, тоді її похідна $y' = f'(x)$ є також функцією заданою на тій же множині. Якщо $f'(x)$ у точці x_0 є теж диференційованою, то її похідну в точці x_0 називають другою похідною функції $y = f(x)$ (у точці x_0) і позначають $y''(x_0)$ або $f''(x_0)$. Функцію $f(x)$ називають двічі диференційованою в точці x_0. Якщо функція двічі диференційована на всій множині $D(f)$, то її називають двічі диференційовною.

Наприклад, оскільки прискорення $a(t) = v'(t)$, а $v(t) = S'(t)$, то $a(t) = S''(t)$. Якщо $S(t) = t^2 + 3t + 3$, то $v(t) = S'(t) = 2t + 3$, а прискорення руху $a(t) = S''(t) = 2$, тобто рух тіла є рівноприскореним.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	–1	3	–3

■ $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x-2}-1} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{x-3} = \lim\limits_{x \to 3} \left(\sqrt{x-2}+1\right) = \sqrt{3-2}+1 = 2.$

Відповідь. **Б.** ■

Приклад 2. Яка з послідовностей не має границі?

А	Б	В	Г	Д
$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$x_n = 0{,}99^n$	$x_n = \dfrac{2n-1}{2n}$	$x_n = \left(\sqrt{3}\right)^n$	усі мають границі

■ $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} 3^n} = 0$; $\lim\limits_{n \to \infty} (0{,}99)^n = \dfrac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} (100/99)^n} = 0$; $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2n-1}{2n} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{2 - \frac{1}{n}}{2} = 1$;

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = \lim\limits_{n \to \infty} (1{,}73\ldots)^n$ — члени послідовності можуть стати як завгодно великими. Отже, послідовність границі немає.

Відповідь. **Г.** ■

Приклад 3. Знайти похідну функції $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{4}\operatorname{tg}x$	-1	$\frac{\sin(x/4)}{\cos(x/4)}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4\cos^2(x/4)}$

■ $f'(x)=\left(\operatorname{tg}\frac{x}{4}\right)'=\frac{1}{\cos^2(x/4)}\cdot\left(\frac{x}{4}\right)'=\frac{1}{4\cos^2(x/4)}$. *Відповідь.* Д. ■

Приклад 4. Знайти похідні: а) $\left(5x^3+8x-11\right)'$; б) $\left(x^2\cos x\right)'$; в) $\left(\sin\left(3x^2\right)\right)'$; г) $\left(\sqrt{6x^4+1}\right)'$.

■ а) $\left(5x^3+8x-11\right)'=\left(5x^3\right)'+(8x)'-11'=5\left(x^3\right)'+8(x)'-0=15x^2+8$;

б) $\left(x^2\cos x\right)'=\left(x^2\right)'\cos x+(\cos x)'x^2=2x\cos x+(-\sin x)x^2=2x\cos x-x^2\sin x$;

в) $\left(\sin\left(3x^2\right)\right)'=\cos\left(3x^2\right)\cdot\left(3x^2\right)'=\cos\left(3x^2\right)\cdot 6x=6x\cos\left(3x^2\right)$.

г) $\left(\sqrt{6x^4+1}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{6x^4+1}}\cdot\left(6x^4+1\right)'=\frac{1}{2\sqrt{6x^4+1}}\cdot 24x^3=\frac{12x^3}{\sqrt{6x^4+1}}$. ■

Приклад 5. Знайти $f'(3)$, якщо $f(x)=(2x+1)^3$.

А	Б	В	Г	Д
300	294	280	264	147

■ $f'(x)=\left((2x+1)^3\right)'=3(2x+1)^2\cdot(2x+1)'=3(2x+1)^2\cdot 2=6(2x+1)^2$. $f'(3)=6(6+1)^2=6\cdot 49=294$. *Відп.* Б. ■

Приклад 6. Знайти $f'(0{,}75)$, якщо $f(x)=5e^{4x-3}-8$.

А	Б	В	Г	Д
$20e$	20	10	7	5

■ $f'(x)=(5e^{4x-3}-8)'=5e^{4x-3}(4x-3)'=5e^{4x-3}4=20e^{4x-3}$. $f'(0{,}75)=20e^{4\cdot 0{,}75-3}=20e^0=20$. *Відп.* Б. ■

Приклад 7. Знайти $f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, якщо $f(x)=4\cos\frac{5x}{2}-7x+3$.

А	Б	В	Г	Д
-2	-3	3	4	2

■ $f'(x)=\left(4\cos\frac{5x}{2}-7x+3\right)'=-4\sin\frac{5x}{2}\cdot\left(\frac{5x}{2}\right)'-7=-4\sin\frac{5x}{2}\cdot\frac{5}{2}-7=-10\sin\frac{5x}{2}-7$.

$f'\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-10\sin\left(\frac{5}{2}\cdot\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)-7=10\sin\frac{5\pi}{6}-7=10\cdot\frac{1}{2}-7=-2$. *Відповідь.* А. ■

Приклад 8. Указати функцію, для якої рівняння $3x-y-2=0$ є рівнянням дотичної до її графіка в точці $A(1;1)$.

А	Б	В	Г	Д
$y=x^2$	$y=\sin x$	$y=\frac{2}{x-1}$	$y=x^3$	$y=(x-1)^3$

■ Функції $y=\sin x$, $y=\frac{2}{x-1}$, $y=(x-1)^2$ не проходять через точку $A(1;1)$, тому вони не можуть мати дотичної в цій точці. Для функції $y=x^3$ маємо: $y'=3x^2$; $y'(1)=3$. За формулою дотичної $y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$ отримаємо: $y=3(x-1)+1$; $3x-y-2=0$ — рівняння дотичної, тому А. Для функції $y=x^2$: $y'=2x$; $y'(1)=2$. Кутовий коефіцієнт дотичної $k=2\neq 3$. *Відповідь.* А. ■

Приклад 9. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, яку проведено до графіка функції $y = 5x^2 - 3x + 2$ в точці з абсцисою $x_0 = 2$.

А	Б	В	Г	Д
16	17	0,3	0	19

■ Оскільки $k = y'(x_0)$, то: $y' = (5x^2 - 3x + 2)' = 10x - 3$. $k = y'(2) = 10 \cdot 2 - 3 = 17$. *Відповідь.* **Б.** ■

Приклад 10. Обчислити тангенс кута нахилу дотичної до графіка функції $f(x) = x - \frac{1}{3x^2}$ у точці з абсцисою $x_0 = 1/3$.

А	Б	В	Г	Д
19	4	$1\frac{2}{9}$	–17	0,5

■ $f'(x) = \left(x - \frac{1}{3x^2}\right)' = \left(x - \frac{1}{3}x^{-2}\right)' = 1 + \frac{2}{3}x^{-3} = 1 + \frac{2}{3x^3}$. Тоді $\operatorname{tg}\alpha = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 1 + \frac{2}{3 \cdot (1/3)^3} = 1 + 18 = 19$. *В-дь.* **А.** ■

Приклад 11. Обчислити ординату точки графіка функції $y = 2x^2 - 3x + 1$, у якій дотична до цього графіка паралельна до прямої $y = 3x + 7$.

А	Б	В	Г	Д
–1	1,5	1	3	10

■ Оскільки дотична до графіка функції паралельна до прямої $y = 3x + 7$, то кутові коефіцієнти дотичної $y = kx + b$ і функції $y = 3x + 7$ рівні, тобто $k = 3$. Отже, $f'(x_0) = k = 3$. Знайдемо $f'(x) = (2x^2 - 3x + 1)' = 4x - 3$; $f'(x_0) = 4x_0 - 3$; $4x_0 - 3 = 3$; $x_0 = 1,5$. Знайдемо y_0 — ординату точки графіка функції y: $y(x_0) = 2 \cdot (1,5)^2 - 3 \cdot 1,5 + 1 = 4,5 - 4,5 + 1 = 1$. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 12. Знайти, у який момент часу прискорення рухомої точки дорівнюватиме 2 см/с^2, якщо точка рухається прямолінійно за законом $x(t) = 3t^2 + 9\ln t + 7$, де $x(t)$ — шлях (у см), t — час (у с).

А	Б	В	Г	Д
1 с	1,5 с	2 с	2,5 с	5 с

■ Знайдемо похідну $x(t)$: $x'(t) = 6t + \frac{9}{t}$. Отже, $v(t) = 6t + \frac{9}{t}$. Знайдемо прискорення $a(t) = v'(t) = 6 - \frac{9}{t^2}$. За умовою, $a(t) = 2$ см/с^2: $6 - \frac{9}{t^2} = 2$; $4t^2 = 9$; $t^2 = \frac{9}{4}$. Оскільки $t > 0$, то $t = 1,5$ (с). *В-дь.* **Б.** ■

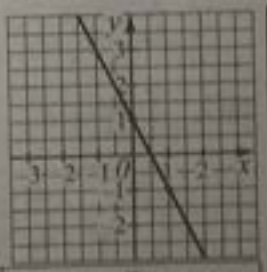
Приклад 13. Тіло рухається прямолінійно за законом $S(t) = t^2 + t + 4$, де S — відстань (у м), t — час (у с). Знайти: **1)** початкову швидкість тіла; **2)** швидкість тіла через 3 с після початку руху; **3)** прискорення тіла.

■ $v(t) = S'(t) = \left(t^2 + t + 4\right)' = 2t + 1$.

1) Початкова швидкість — це швидкість, якщо $t = 0$ с: $v(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$ (м/с).

2) $v(3) = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ (м/с). **3)** $a(t) = v'(t) = \left(2t + 1\right)' = 2$. Отже, прискорення $a(t) = 2$ м/с^2. ■

Приклад 14. Вказати функцію, дотичну до графіка якої у точці $x = 1$ зображено на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$y = 3x - 4$	$y = x^2 - 2$	$y = x^3 - 2x$	$y = x^2 - 2x$	$y = -x^2$

■ Графік дотичної $y = kx + b$ проходить через точки $(0; 1)$ і $(1; -1)$. Отже, $\begin{cases} 1 = k \cdot 0 + b; \\ -1 = k \cdot 1 + b; \end{cases} \begin{cases} b = 1; \\ k = -2. \end{cases}$

Рівняння дотичної: $y = -2x + 1$. Оскільки, $k = f'(x_0)$, то $f'(1) = -2$. Знайдемо $f'(1)$ для функцій:

А $y' = (3x - 4)' = 3$; $y'(1) = 3$

Б $y' = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$; $y'(1) = 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1$

В $y' = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$; $y'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

Г $y' = (x^2 - 2x)' = 2x - 2$; $y'(1) = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

Д $y' = (-x^2)' = -2x$; $y'(1) = -2 \cdot 1 = -2$

Отже, $f'(1) = -2$ для функції $y = -x^2$. $y(1) = -1^2 = -1$. Рівняння дотичної до функції $y = -x^2$ має вигляд: $y = -2(x - 1) - 1$; $y = -2x + 1$. *Відповідь.* **Д.** ■

Завдання 24.1–24.27 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

24.1. $(x^5 + 3x^2 - x + 3)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^7}{7} + x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x$	$6x^5 + 6x$	$6x^5 + 6x - 1$	$6x^5 + 6x - 3$	$\frac{x^7}{7} + x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + 1$

24.2. $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{3}{x^4} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{3x^2} + 2\sqrt{x}$	$\frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3x^3} + \frac{\sqrt{x}}{2}$

24.3. **(ЗНО–2013)** Знайти похідну функції $y = e^{-2x}$.

А	Б	В	Г	Д
$y' = e^{-2x}$	$y' = -2e^{-2x}$	$y' = -2e^{-2x+1}$	$y' = 2e^{-2x}$	$y' = -\frac{1}{2}e^{-2x}$

24.4. Знайти похідну функції $y = 5\sin 7x - 7x^2 + 7$.

А	Б	В	Г	Д
$5\cos 7x - 14x$	$35\cos 7x - 7x$	$35\cos 7x - 14x$	$7\cos 7x - 7x + 7$	$5\cos 7x - 7x$

24.5. **(ЗНО–2012)** Функція $f(x)$ має в точці x_0 похідну $f'(x_0) = -4$. Визначити значення похідної функції $g(x) = 2f(x) + 7x - 3$ в точці x_0.

А	Б	В	Г	Д
15	12	–1	–4	–8

24.6. $\left(x^5 \cdot 7^x\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$5x^4 \cdot 7^x + x^5 \cdot 7^x \lg 7$	$5x^4 \cdot 7^x \ln 7$	$5x^4 \cdot 7^x \lg 7$	$5x^4 \cdot 7^x + x^5 7^x \cdot \ln 7$	$5x^4 + 7^x \ln 7$

24.7. $\left(\frac{\ln x}{x^4}\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{x^3 - 4x^3 \ln x}{x^8}$	$\frac{1}{4x^4}$	$\frac{\ln x}{4x^3}$	$\frac{x^3 - 4x^3 \ln x}{x^8}$	$\frac{x^3 - 4x^3 \ln x}{x^4}$

24.8. $\left(e^{3x+5}\right)' = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{3}e^{3x+5}$	$3e^{x}$	$(3x+5)e^{3x+5}$	$3e^{3x+5}$	e^{3x+5}

24.9. Знайти похідну функції $y = \cos 3x$ у точці $x_0 = \frac{\pi}{18}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3}{2}$

24.10. **(ЗНО–2015)** Указати рівняння прямої, яка може бути дотичною до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$, якщо $f'(2) = -3$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{3}{2}x + 1$	$y = 3x - 2$	$y = 2x + 3$	$y = \frac{3}{2}x - 1$	$y = -3x + 2$

24.11. Рівняння дотичної до кривої $y = 2x^2 - 4x - 1$ має вигляд: $y = 8x - 19$. Визначити абсцису точки дотику.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	–4	8

24.12. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $y = x^3$ у точці (2; 8).

А	Б	В	Г	Д
$y + 8 = 12(x + 2)$	$y - 8 = \frac{1}{12}(x - 2)$	$y - 8 = x - 2$	$y - 8 = 8(x - 2)$	$y - 8 = 12(x - 2)$

24.13. На кривій $f(x) = x^2 - x + 1$ знайти точку, в якій дотична до кривої паралельна до прямої $3x - y - 1 = 0$.

А	Б	В	Г	Д
(2; 3)	(0; 3)	(0; 1)	2	3

24.14. **(ЗНО–2012)** Функція $f(x)$ в точці $x_0 = 5$ має похідну $f'(5) = -1$. Обчислити значення похідної функції $g(x) = f(x) \cdot x$ в точці x_0, якщо $f(5) = 3$.

А	Б	В	Г	Д
$g'(5) = -2$	$g'(5) = -1$	$g'(5) = -5$	$g'(5) = 14$	$g'(5) = 15$

24.15. Знайти миттєву швидкість точки, яка рухається за законом $s(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t + 1$ (s — шлях у метрах, t — час у секундах) через 3 с після початку руху.

А	Б	В	Г	Д
12 м/с	13 м/с	14 м/с	15 м/с	16 м/с

24.16. Тіло рухається за законом $s(t) = t^2 - 4\sqrt{t}$. Знайти швидкість тіла в момент $t_0 = 4$.

А	Б	В	Г	Д
5	4,75	12	7	7,875

24.17. Обчислити $f'(x)$, якщо $f(x) = \sin 5 + e^3$.

А	Б	В	Г	Д
$\cos 5 + 3e^2$	$\sin 5 + e^3$	$\cos 5$	0	$3e^2$

24.18. Обчислити $f'(x)$, якщо $f(x) = \ln\cos x^2$.

А	Б	В	Г	Д
$-2x\operatorname{tg}x^2$	$-\operatorname{tg}x^2$	$\frac{2x}{\cos x^2}$	$-2\operatorname{tg}x^2$	$2x\operatorname{tg}x^2$

24.19. Обчислити $f'(x)$, якщо $f(x) = \sin^2(2x + 0{,}5)$.

А	Б	В	Г	Д
$2(2x + 0{,}5)\cos^2 x\,(2x + 0{,}5)$	$2\cos(4x + 1)$	$-2\cos(4x + 1)$	$2\sin(4x + 1)$	$-2\sin(4x + 1)$

24.20. Обчислити значення похідної функції $y = (3x + 1)^3 \cdot \cos^3(x^2 + 2x + 1) + \pi^3$ у точці $x_0 = -1$.

А	Б	В	Г	Д
36	12	-12	0	$36 + \pi^3$

24.21. Матеріальна точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 2{,}5t^2 - 15t$, s — шлях у метрах, t — час у секундах. Через який час від початку руху ця точка зупинилася?

А	Б	В	Г	Д
1 с	2 с	3 с	3,5 с	4 с

24.22. На рисунку зображено графік функції і дотичну до нього в точці з абсцисою x_0. Знайти значення $f'(x_0)$.



А	Б	В	Г	Д
5	-2	2	0,5	$-0{,}5$

24.23. Дано функцію $y = |3x + 2|$. У якій точці функція не має похідної?

А	Б	В	Г	Д
2	-2	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$	похідна існує в усіх точках $x \in R$

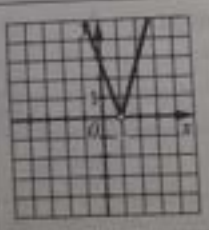
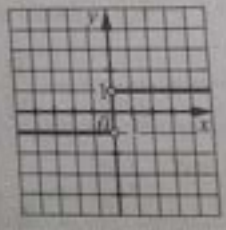
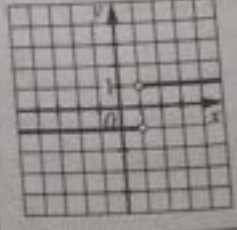
24.24. Обчислити похідну функції $y = |2x - 5|$ на проміжку $(-\infty; 0]$.

А	Б	В	Г	Д
2,5	5	-5	2	-2

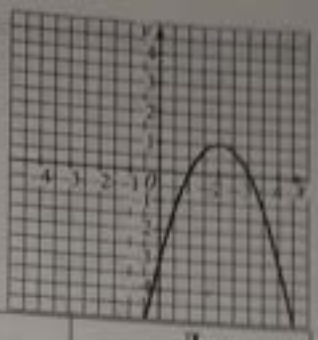
24.25. $f(x) = x(x - 1)(x - 2)\ldots(x - 19)(x - 20)$. Знайти $f'(0)$.

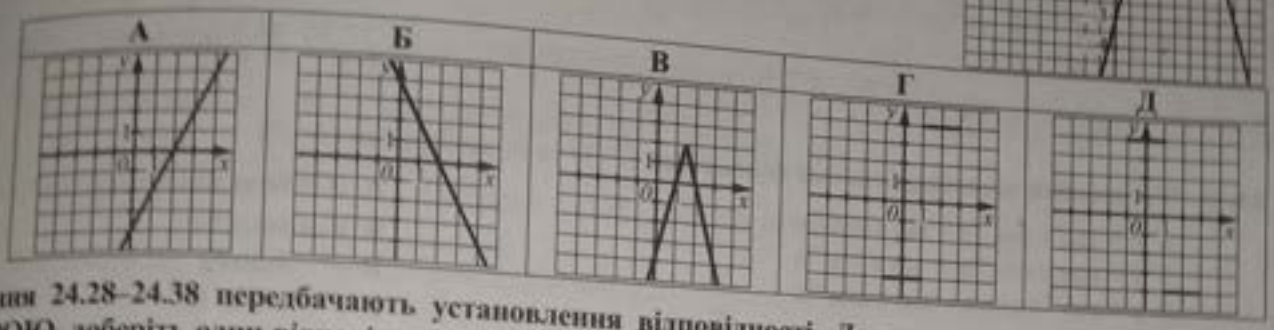
А	Б	В	Г	Д
$-20!$	20!	0	1	20

24.26. На якому з рисунків побудовано графік похідної функції $y = |1 - x|$?

А	Б	В	Г	Д
				

24.27. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$. Серед наведених графіків вказати графік функції $y = f'(x)$.





Завдання 24.28–24.38 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

24.28. Установити відповідність між функціями (1–3) та їхніми похідними (А–Д).

1 $f(x) = \sin(2x+3)$

2 $f(x) = 2\cos(x+3)$

3 $f(x) = \sin^2(x+3)$

А $f'(x) = -2\sin(x+3)$

Б $f'(x) = \sin(2(x+3))$

В $f'(x) = 2\sin(2x+3)$

Г $f'(x) = 2\cos(2x+3)$

Д $f'(x) = \dfrac{2}{\cos^2 2x}$

24.29. Установити відповідність між функціями (1–3) та їхніми похідними (А–Д).

1 $f(x) = 2\sin^2(3x-4) + \cos x$

2 $f(x) = 2\sin(3x-4)\cdot\cos x$

3 $f(x) = \dfrac{2\sin(3x-4)}{\cos x}$

А $f'(x) = \dfrac{3\cos x - 0{,}5\sin(6x-8)\cdot\sin x}{\cos^2(3x-4)}$

Б $f'(x) = 6\sin(6x-8) - \sin x$

В $f'(x) = \dfrac{6\cos(3x-4)\cdot\cos x + 2\sin(3x-4)\cdot\sin x}{\cos^2 x}$

Г $f'(x) = -2\cos(3x-4)\cdot\sin x$

Д $f'(x) = 6\cos(3x-4)\cdot\cos x - 2\sin(3x-4)\cdot\sin x$

24.30. Установити відповідність між функціями (1–3) та їхніми похідними (А–Д).

1 $y = \dfrac{x}{3} + 5$

2 $y = 5 - \dfrac{x}{3}$

3 $y = 3 + 5x$

А $y' = -3$

Б $y' = 5$

В $y' = -\dfrac{1}{3}$

Г $y' = -5$

Д $y' = \dfrac{1}{3}$

24.31. Установити відповідність між функціями (1–3) та їхніми похідними (А–Д).

1 $y = \sin 5 + e^5$

2 $y = \sin 5x + e^5$

3 $y = \sin 5 + e^{5x}$

А $y' = 5(\cos 5x + e^{5x})$

Б $y' = \cos 5x$

В $y' = 5e^{5x}$

Г $y' = 5\cos 5x$

Д $y' = 0$

24.32. Установити відповідність між функціями (1–3) та їхніми похідними (А–Д).

1 $y = 4x^4 - \frac{2}{x^2}$

2 $y = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2x^2}$

3 $y = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{x^2}$

А $y' = x^3 + 1/x^3$

Б $y' = x^3 - \frac{4}{x^3}$

В $y' = 16x^3 + \frac{4}{x^3}$

Г $y' = 16x^3 + \frac{1}{x^3}$

Д $y' = x^3 + \frac{4}{x^3}$

24.33. Установити відповідність між функціями (1–3) та їх похідними (А–Д).

1 $y = \cos x \cos 7x - \sin x \sin 7x$

2 $y = \cos x \cos 7x + \sin x \sin 7x$

3 $y = \sin 7x \cos x - \sin x \cos 7x$

А $y' = 8\cos 8x$

Б $y' = 6\cos 6x$

В $y' = 8\sin 8x$

Г $y' = -8\sin 8x$

Д $y' = -6\sin 6x$

24.34. Установити відповідність між функціями (1–3) та їх похідними (А–Д).

1 $y = x\sin 3$

2 $y = 3\sin x$

3 $y = 3 + \sin x$

А $y' = 3\sin^2 x \cos x$

Б $y' = \cos 3$

В $y' = \cos x$

Г $y' = \sin 3$

Д $y' = 3\cos x$

24.35. Установити відповідність між функціями (1–3) та їх похідними в точці π (А–Д).

1 $y = \sin\frac{x}{3}$

2 $y = \sin 3x$

3 $y = \frac{\sin x}{3}$

А -3

Б $-1/3$

В 0

Г $1/6$

Д 1

24.36. Установити відповідність між залежностями відстані S від часу t руху матеріальних тіл (1–3) та їх швидкостями в момент часу $t = 1$ (А–Д).

1 $S(t) = 8\frac{1}{3}t^3 + 5t$

2 $S(t) = 4t + 1$

3 $S(t) = \frac{t^2}{3} + 5t$

А 4

Б 5

В $5\frac{1}{3}$

Г $5\frac{2}{3}$

Д 30

24.37. Установити відповідність між залежностями відстані S від часу t руху матеріальних тіл (1–3) та часом від початку руху до зупинки тіла (А–Д).

1 $S(t) = \frac{t^3}{3} - t$

2 $S(t) = \frac{t^4}{4} - t^3 + 2$

3 $S(t) = \frac{t^5}{5} - t^3 + 4$

А $\frac{1}{2}$

Б 1

В $\sqrt{3}$

Г 3

Д 4

24.38. Установити відповідність між функціями (1–3) та тангенсами кутів, які утворюють дотичні, проведені до графіків функцій у точці з абсцисою $x = 0$ з додатним напрямком осі x (А–Д).

1 $y = e^{2x}$	**А** 0
2 $y = 2\sin 4x$	**Б** 1
3 $y = 8\cos x$	**В** 2
	Г 4
	Д 8

Розв'яжіть завдання 24.39–24.51. Відповідь запишіть десятковим дробом.

24.39. Обчислити значення похідної функції $y = \sqrt{\operatorname{tg} 6x}$ у точці $x_0 = \dfrac{\pi}{24}$.

24.40. Обчислити значення похідної функції $y = (2x^2 - 1)\ln^2 x$ у точці $x_0 = 1$.

24.41. Знати похідну функції $y = \sqrt[4]{1 + \cos^3 x}$ у точці $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

24.42. **(ЗНО–2011)** Матеріальна точка рухається за законом $s(t) = 2t^2 + 3t$, де s вимірюється в метрах, а t — у секундах. Знайти значення t (у секундах), при якому миттєва швидкість матеріальної точки дорівнює 76 м/с.

24.43. Записати рівняння дотичної до графіка функції $y = 5x^2 - 2x$, яка утворює з додатним напрямом осі x кут 135°. У відповідь записати абсцису точки дотику.

24.44. Скласти рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = e^{5x+1}$, яка паралельна до прямої $y = 5x - 8$. У відповідь записати абсцису точки дотику.

24.45.* За яких від'ємних значень a пряма $y = ax - 5$ дотикається до кривої $y = 3x^2 - 4x - 2$?

24.46. Пряма $y = -\dfrac{3}{4}x + C$ є дотичною до лінії, заданої рівнянням $y = 0{,}5x^4 - x$. Знайти абсцису точки дотику.

24.47. Знайти тангенс гострого кута, під яким парабола $y = x^2 + 2x - 8$ перетинає вісь абсцис.

24.48. Обчислити площу трикутника, утвореного осями координат і дотичною до графіка функції $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ у точці з абсцисою $x_0 = 2$. У відповідь записати значення площі з точністю до 0,01.

24.49. Знати похідну функції $y = \sqrt{6 + 6\cos^2 x^2}$ у точці $x_0 = \sqrt{\pi}/2$. У відповідь записати $f'(x_0)/\sqrt{\pi}$.

24.50. Скласти рівняння прямої, не паралельної до осі абсцис, яка проходить через точку $M(0{,}5; 2)$ і дотикається до графіка функції $y = 2 - \dfrac{x^2}{2}$. У відповідь записати абсцису точки дотику.

24.51. За якого значення параметра a пряма $y = \dfrac{x}{2}$ дотикається до кривої $y = \sqrt{x} - a$?

Тема 25. Застосування похідної для дослідження функцій

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— знаходити проміжки монотонності функції;
— достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку;
— знаходити екстремуми функції за допомогою похідної, найбільше та найменше значення функції;
— досліджувати функції за допомогою похідної та будувати їх графіки;
— досліджувати функції на опуклість, асимптоти функції.
— розв'язувати прикладні задачі на знаходження найбільших і найменших значень функції.

Якщо для всіх x з проміжку $(a; b)$ виконується нерівність $f'(x) > 0$, то на цьому проміжку функція *зростає*. Якщо ж для всіх x з проміжку $(a; b)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то на цьому проміжку функція *спадає*. Проміжки зростання та спадання функції називають *проміжками монотонності*.

Щоб *дослідити функцію $f(x)$ на монотонність*, слід:

1) знайти її похідну $f'(x)$;

2) знайти критичні точки функції ($f'(x) = 0$ або $f'(x)$ не існує);

3) визначити знак похідної функції на кожному з проміжків, на які критичні точки розбивають область визначення функції;

4) визначити проміжки зростання та спадання функції.

Якщо похідна функції неперервна в кінці проміжку монотонності, то її включають в проміжок монотонності.

Наприклад, з'ясувати, чи зростає функція $f(x) = 4\sqrt{x} + 6x$ на проміжку $(0; +\infty)$. Знайдемо похідну функції: $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + 6$. Оскільки на $x \in (0; +\infty)$ $\frac{2}{\sqrt{x}} + 6 > 0$, то $f(x)$ зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

Максимуми й мінімуми функції. Кажуть, що функція $y = f(x)$ має в точці x_0 *максимум* (*мінімум*), якщо існує такий окіл точки x_0, що для всіх x з цього околу, виконується нерівність $f(x) \le f(x_0)$ ($f(x) \ge f(x_0)$). Точки максимуму й мінімуму називають *точками екстремуму*. Значення функції в точках максимуму й мінімуму називають *екстремумами* (максимами й мінімумами) функції.

Достатня умова екстремуму. Якщо похідна функції $y = f(x)$ перетворюється в нуль у точці x_0 і при переході через цю точку в напрямку зростання x змінює знак з «+» на «–» (з «–» на «+»), то в точці x_0 функція має максимум (мінімум). Якщо ж при переході через точку x_0 похідна функції не змінює знака, то в цій точці функція $y = f(x)$ екстремуму не має (має перегин).

Наприклад, задано функцію $y = x^2$. Тоді $y' = (x^2)' = 2x$. У точці $x = 0$ дана функція має мінімум, оскільки $f'(0) = 0$ і похідна змінює знак з «–» на «+».

Щоб *дослідити функцію на екстремум*, потрібно:

1) знайти критичні точки функції;

2) перевірити, чи змінює знак похідна функції при переході через критичну точку;

3) обчислити значення максимуму y_{max} або мінімуму y_{min}.

Наприклад, знайти точки екстремуму функції $f(x) = x^3 - 3x^2 + 18$.

Обчислимо похідну функції: $f'(x) = 3x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки функції: $f'(x) = 0$; $3x^2 - 6x = 0$; $x(x - 2) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Дослідимо знак похідної в околах критичних точок.



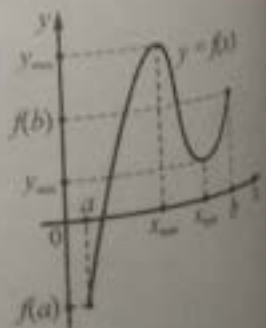
Оскільки при переході через точку $x = 0$ похідна змінює знак з «+» на «–», то ця точка є точкою максимуму; при переході через точку $x = 2$ похідна змінює знак з «–» на «+», тому ця точка є точкою мінімуму. *Відповідь.* $x_{max} = 0$; $x_{min} = 2$.

Щоб *знайти найбільше та найменше значення* неперервної на відрізку $[a; b]$ функції, потрібно:

1) знайти всі критичні точки функції на інтервалі $(a; b)$;

2) обчислити значення функції у кожній критичній точці та на кінцях відрізка;

3) вибрати найбільше та найменше значення (див. рис.).



При дослідженні функцій поряд з першою похідною використовують другу похідну, за допомогою якої досліджують характер опуклості (вгнутості) функцій.

Якщо для всіх $x \in (a; b)$ виконується нерівність $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$), то графік функції $f(x)$ є *вгнутим* (*опуклим*) на даному проміжку.

Асимптоти. Пряму $x = a$ називають *вертикальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. Пряму $y = b$ називають *горизонтальною асимптотою* графіка функції $y = f(x)$, якщо $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ або $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Наприклад, пряма $y = 0$ є горизонтальною асимптотою графіка функції $y = \frac{1}{x^2 - 1}$, оскільки $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$, а пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою графіка функції $y = \frac{1}{x}$, оскільки $\lim\limits_{x \to +0} \frac{1}{x} = \infty$.

Дослідження функції на побудову на його основі графіка можна виконувати за такою схемою:

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність, непарність, періодичність.
3. Знайти проміжки зростання, спадання та екстремуми функції.
4. Дослідити характер опуклості функції та знайти точки перегину.
4. Знайти асимптоти графіка функції.
5. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат та проміжки знакосталості функції.
6. Використовуючи результати дослідження й обчисливши ряд точок, будуємо графік функції.

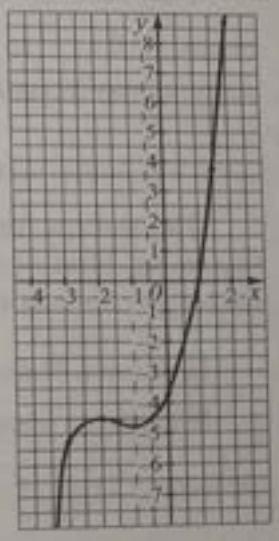
Наприклад, побудувати графік функції $y = \frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6}$.

1. Область визначення функції $D(f) = \boldsymbol{R}$.

2. Функція неперіодична, ні парна, ні непарна, бо $y(-x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2 - 2x - 3\frac{5}{6} \neq -y(x)$ і $y(-x) \neq y(x)$.

3. $y' = \left(\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6}\right)' = x^2 + 3x + 2$. $x^2 + 3x + 2 = 0$; $x_1 = -2$, $x_2 = -1$.

На проміжках $(-\infty; -2)$ і $(-1; +\infty)$ функція зростає, бо $y' > 0$; а на проміжку $(-2; -1)$ функція спадає, бо $y' < 0$. Оскільки в точці $x = -2$ похідна змінює знак з «+» на «–», тому точка $x = -2$ — точка максимуму, $y_{\max} = -4{,}5$; у точці $x = -1$ похідна змінює знак з «–» на «+», то точка $x = -1$ — точка мінімуму, $y_{\min} = -4\frac{2}{3}$.



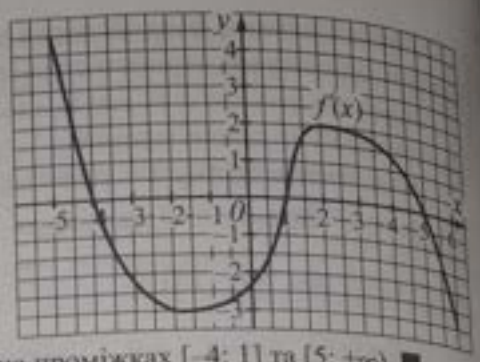
4. $y'' = (x^2 + 3x + 2)' = 2x + 3$. $2x + 3 = 0$, $x = -1{,}5$. На проміжку $(-\infty; -1{,}5)$ $y'' < 0$, тому графік на цьому проміжку опуклий, а на проміжку $(-1{,}5; +\infty)$ $y'' > 0$, тому графік на цьому проміжку вгнутий. Точка $\left(-\frac{3}{2}; -4\frac{7}{12}\right)$ є точкою перегину.

5. Асимптот функція не має.

6. Графік перетинає вісь y в точці $\left(0; -3\frac{5}{6}\right)$, бо $f(0) = -3\frac{5}{6}$. Підбором встановлюємо, що $x = 1$ — корінь рівняння $\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6} = 0$. Тоді $\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2 + 2x - 3\frac{5}{6} = (x - 1)\left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{11}{6}x + \frac{23}{6}\right)$, звідки одержуємо, що це єдиний корінь. Отже, графік перетинає вісь x у точці $(1; 0)$. На проміжку $(-\infty; 1)$ функція $f(x) < 0$, а на проміжку $(1; +\infty)$ — $f(x) > 0$.

7. Будуємо графік функції.

Приклад 1. На рисунку зображено графік похідної функції $f(x)$, яка диференційована на $\boldsymbol{R}$. Указати проміжки зростання та спадання функції $f(x)$.



■ З графіка маємо, що $f'(x) > 0$ на проміжках $(-\infty; -4)$ та $(1; 5)$. Отже, враховуючи неперервність функції $f(x)$, функція $f(x)$ зростає на $(-\infty; -4]$ та $[1; 5]$. Оскільки на проміжках $(-4; 1)$ та $(5; +\infty)$ виконується нерівність $f'(x) < 0$, то функція $f(x)$ спадає на $[-4; 1]$ та $[5; +\infty)$.

Відповідь. Зростає на проміжках $(-\infty; -4]$ та $[1; 5]$ і спадає на проміжках $[-4; 1]$ та $[5; +\infty)$. ■

Приклад 2. Яка з указаних функцій є зростаючою на всій області визначення?

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = 0{,}4^x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$	$f(x) = 3$	зростаючої функції немає

■ $f(x) = 0{,}4^x$ $(0 < 0{,}4 < 1)$ — функція спадна; $f(x) = x^2$ — функція спадна, якщо $x \le 0$; $f(x) = \left(\sqrt{3}\right)^x$ $\left(\sqrt{3} > 1\right)$ — функція зростаюча; $f(x) = 3$ — ні зростаюча, ні спадна. *Відповідь.* **В.** ■

Приклад 3. Дослідити на монотонність та екстремум функцію $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 5$.

■ $y' = x^2 - 6x$. Знайдемо критичні точки, прирівнявши похідну до нуля: $y' = 0$; $x^2 - 6x = 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 6$. Критичні точки — 0 і 6 — розбивають область визначення на три проміжки: $(-\infty; 0)$, $(0; 6)$, $(6; +\infty)$. Визначимо, який знак має похідна функції на кожному з проміжків. Для цього виберемо довільне число з проміжку $(-\infty; 0)$, наприклад, -10, і обчислимо значення похідної функції: $y'(-10) = (-10)^2 - 6 \cdot (-10) = 160 > 0$. Тобто на проміжку $(-\infty; 0)$ похідна функції набуває лише додатних значень. Виконавши аналогічні обчислення, визначимо знак похідної на інших проміжках.

Оскільки на проміжках $(-\infty; 0)$ та $(6; +\infty)$ похідна набуває додатних значень і функція неперервна у точках $x = 0$ і $x = 6$, то функція зростає на проміжках $(-\infty; 0]$ та $[6; +\infty)$. На проміжку $(0; 6)$ похідна від'ємна, тому функція спадає на $[0; 6]$.



Оскільки при переході через точку 0 похідна функції змінює знак з «+» на «–», то $x = 0$ — точка максимуму. Максимум функції дорівнює: $y_{max} = y(0) = 5$. При переході через точку 6 похідна функції змінює знак з «–» на «+». Тому $x = 6$ — точка мінімуму. Мінімум функції: $y_{min} = y(6) = -31$. ■

Приклад 4. Знайти проміжки зростання (спадання) функції $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$.

■ Знайдемо область визначення функції: $x^2 - x - 2 \ge 0$; $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$. Похідна функції $f(x)$ дорівнює: $f'(x) = \left(\sqrt{x^2 - x - 2}\right)' = \frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}}$. Функція $f(x)$ зростає, якщо $f'(x) > 0$, тому $\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} > 0$, тобто $\begin{cases} 2x - 1 > 0; \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0{,}5; \\ x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty). \end{cases}$ Отже, функція зростає на $(2; +\infty)$, а значить на $[2; +\infty)$.

Аналогічно, функція спадає, якщо $f'(x) < 0$, тому $\frac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} < 0$, тобто $\begin{cases} 2x - 1 < 0; \\ x^2 - x - 2 > 0; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0{,}5; \\ x \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty). \end{cases}$ Аналогічно, функція спадає на проміжку $(-\infty; -1]$.

Слід зазначити, що в точках $x = -1$ і $x = 2$ функція $f(x)$ неперервна, але не диференційована. *Відповідь.* Функція зростає на $(2; +\infty)$, спадає на $(-\infty; -1]$. ■

Приклад 5. Яка з указаних функцій має максимум у точці $x_0 = 0$?

А	Б	В	Г	Д
$y = 7x^2 + 5$	$y = 2x^3 - 7$	$y = -3x^2 + 4$	$y = 2x/(x + 2)$	$y = \cos(x - \pi/4)$

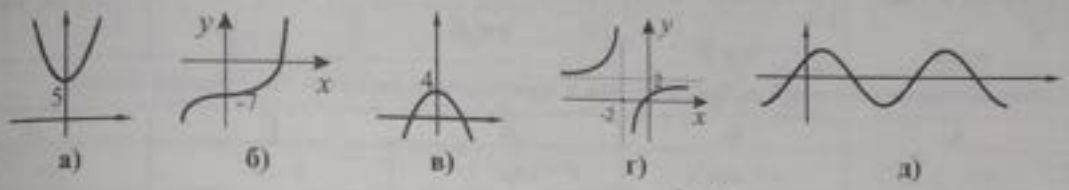
■ **а)** Функція $y = 7x^2 + 5$ — не має максимумів узагалі ($x_0 = 0$ — точка мінімум) (рис. а);

б) $y = 2x^3 - 7$; критична точка $y' = 6x^2 = 0$; $x_0 = 0$; $y' = 6x^2$ не міняє знак при переході через критичну точку, тому $y = 2x^3 - 7$ не має максимумів (рис. б);

в) $y = -3x^2 + 4$ — парабола, вітки якої напрямлені вниз, має максимум у точці $x_0 = 0$ (рис. в);

г) $y = \dfrac{2x}{x+2} = \dfrac{2x+4-4}{x+2} = 2 - \dfrac{4}{x+2}$ — рівняння гіперболи (не має максимумів) (рис. г);

д) $y = \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$ — не має максимуму в точці $x_0 = 0$ (рис. д). *Відповідь.* **В.** ■



а) **б)** **в)** **г)** **д)**

Приклад 6. Знайти найбільше значення функції $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x-1}$ на відрізку $[-3; 0]$.

■ $f'(x) = \left(\dfrac{x^2+8}{x-1}\right)' = \left(\dfrac{x^2-x+x-1+9}{x-1}\right)' = \left(x+1+\dfrac{9}{x-1}\right)' = 1 - \dfrac{9}{(x-1)^2}$. $f'(x) = 0$; $1 - \dfrac{9}{(x-1)^2} = 0$; $(x-1)^2 = 9$; $x = 1 \pm 3$. Критичні точки $x_1 = -2$; $x_2 = 4$. Оскільки $x_2 = 4$ не належить проміжку $[-3; 0]$, то порівняємо значення $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$. $f(-3) = \dfrac{9+8}{-3-1} = \dfrac{17}{-4} = -4\dfrac{1}{4}$; $f(-2) = \dfrac{4+8}{-3} = -4$; $f(0) = \dfrac{8}{-1} = -8$. Найбільше значення $f(-2) = -4$. *Відповідь.* -4. ■

Приклад 7. Побудувати графік функції $y = \dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

■ 1. Область визначення функції $D(f) = R$.

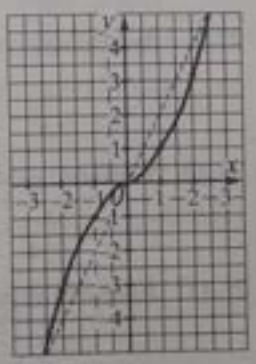
2. Функція неперіодична і непарна ($y(-x) = \dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+1} = -\dfrac{2x^3}{x^2+1} = -y(x)$). Звідси маємо, що дослідження функції достатньо провести для $x \geq 0$.

3. $y' = \dfrac{6x^2(x^2+1) - 2x^3 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^4+6x^2}{(x^2+1)^2}$. Якщо $x > 0$, то $y' > 0$, на проміжку $[0; +\infty)$ функція зростає.

4. Графік проходить через початок координат, бо $y(0) = 0$. Знайдемо ще кілька точок на графіку:

x	0	1	2	3
y	0	1	3,2	5,4

6. Будуємо графік функції на проміжку $[0; +\infty)$. Використавши симетрію відносно початку координат, будуємо графік на проміжку $(-\infty; 0)$. ■



Завдання 25.1–25.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

25.1. Визначити проміжок зростання функції $y = x^2 - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$[1; +\infty)$	$(-\infty; -1)$	$(-\infty; 0]$

25.2. Знайти проміжки зростання функції $y = f(x)$, якщо $f'(x) = (x-1)(x-5)$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$	$[-5; -1]$	$[1; -5]$	$(-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$	$(-\infty; -5]$

25.3. Знайти проміжки спадання функції $y = \varphi(x)$, якщо $\varphi'(x) = (x+2)(x-1)^2(x-3)$.

А	Б	В	Г	Д
$[-3; 2]$	$(-\infty; -3]$ і $[-1; 2]$	$(-\infty; -2]$ і $[1; 3]$	$(-\infty; -2]$ і $[3; +\infty)$	$[-2; 3]$

25.4. Знайти проміжки зростання функції $y = x^2 e^x$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; -2]$ і $[0; +\infty)$	$[-2; 0]$	$(-\infty; 0]$ і $[2; +\infty)$	$[0; 2]$

25.5. Знайти проміжки спадання функції $y = \sin^2 x$.

А	Б	В	Г	Д
$\left[\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi + \pi n\right]$, $n \in Z$	$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right]$, $n \in Z$	$[\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n]$, $n \in Z$	$\left[\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right]$, $n \in Z$	$(-\infty; +\infty)$

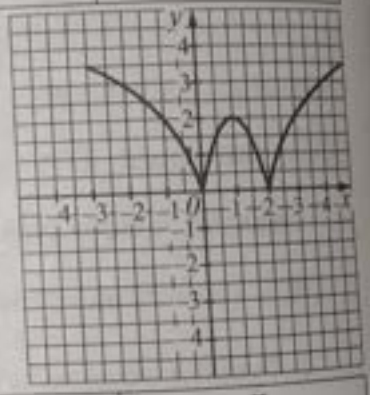
25.6. Серед наведених функцій вибрати ту, яка є зростаючою на множині дійсних чисел.

А	Б	В	Г	Д
$y = -x^3$	$y = \cos^2 x$	$y = \ln(x^2 + 1)$	$y = e^{x^3}$	$y = e^{|x|}$

25.7. Серед наведених функцій вибрати ту, в якої проміжком спадання є проміжок $[0; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = \frac{1}{x^2 + 1}$	$y = xe^x$	$y = \ln(x^3 + 1)$	$y = e^{x^3}$	$y = e^{x^2}$

25.8. Скільки критичних точок має функція $y = f(x)$, зображена на рисунку?



А	Б	В	Г	Д
Одну	дві	три	чотири	більше, ніж чотири

25.9. Знайти критичні точки функції $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

А	Б	В	Г	Д
0	-3 і -1	-3 і 1	1 і 3	-1 і 3

25.10. Указати критичні точки функції $y = x(x-4)^3$.

А	Б	В	Г	Д
0; 4	4	1; 4	3	1

25.11. Знайти критичну точку функції $y = 2x^2 - 4x$.

А	Б	В	Г	Д
-1	1	4	0	2

25.12. Знайти критичні точки функції $y = \frac{2}{x} + \frac{x}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
-2; 2; 0	-2; 2	2	$2; 0$	0

25.13. Знайти точки максимуму функції $y = f(x)$, якщо $f'(x) = x(x + 3)(x - 5)$.

А	Б	В	Г	Д
-3 і 5	-3	0	5	0 і 5

25.14. Знайти точки мінімуму функції $y = f(x)$, якщо $f'(x) = x(x - 2)^2(x - 5)$.

А	Б	В	Г	Д
5	2	0	0 і 5	0 і 2

25.15. Визначити усі критичні точки функції $f(x)$ на відрізку $[-4; 4]$, якщо на рисунку зображено графік функції $y = f'(x)$.



А	Б	В	Г	Д
$-3; -1$ і 1	-3 і -1	-2 і 1	-4 і 4	-3 і 1

25.16. Указати усі точки екстремуму функції $f(x)$ на відрізку $[-3; 4]$, якщо на рисунку зображено графік функції $y = f'(x)$.



А	Б	В	Г	Д
-1 і 2	-1; 1 і 2	-2; 1 і 3	-2 і 3	-3 і 4

25.17. Указати проміжки зростання функції $\varphi(x)$ на відрізку $[-5; 5]$, якщо на рисунку зображено графік функції $y = \varphi'(x)$.

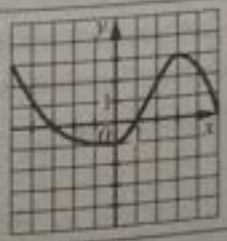
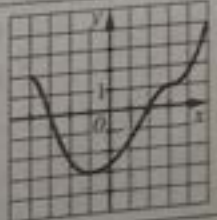
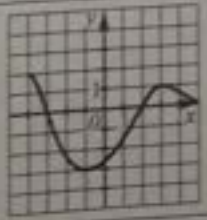
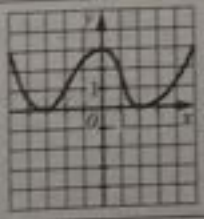


А	Б	В	Г	Д
$[-2; 3]$	$[-1; 2]$	$[-2; 1]$ і $[4; 5]$	$[1; 3]$	$[-5; -3]$ і $[1; 4]$

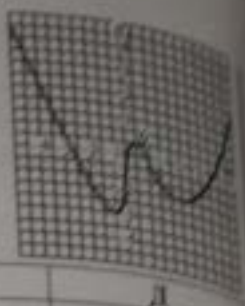
25.18. Функція $y = g(x)$ визначена на множині дійсних чисел; -3 і 2 — нулі функції. Зміну знаків похідної функції подано в таблиці.

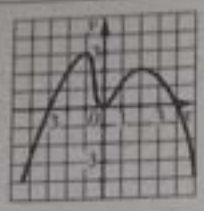
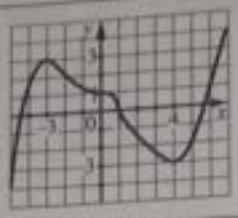
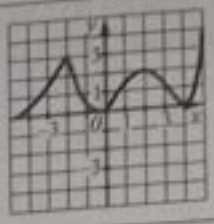
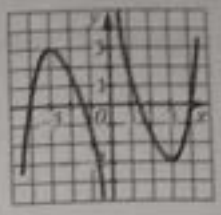
$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 3)$	3	$(3; +\infty)$
$g'(x) < 0$	$g'(-1) = 0$	$g'(x) > 0$	$g'(3) = 0$	$g'(x) < 0$

Який з наведених графіків може бути графіком функції $g(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

25.19. На рисунку зображено графік функції $g = g'(x)$. Який з наведених графіків може бути графіком функції $y = g(x)$?



А	Б	В	Г	Д
				

25.20. Знайти точку, в якій функція $y = x \ln x$ набуває найменшого значення.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{e^2}$	$\frac{1}{e}$	1	e	e^2

25.21. Знайти точку максимуму функції $y = \frac{\ln x}{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$1/e$	$\sqrt{e}$	1	e	e^2

25.22. За яких значень a функція $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + ax$ має критичні точки, але не має точок екстремумів?

А	Б	В	Г	Д
-1	-1 і 1	1	-4 і 4	4

25.23. За яких значень a точка 5 є точкою мінімуму функції $y = f(x)$, якщо $f'(x) = (x-5)(x-a)$?

А	Б	В	Г	Д
$a \geq 5$	$a = 5$	$a > 5$	$a \leq 5$	$a < 5$

25.24. За яких значень a точка 3 є точкою максимуму функції $y = \frac{x^3}{3} - \frac{a+3}{2}x^2 + 3ax$?

А	Б	В	Г	Д
$a = 3$	$a \geq 3$	$a \leq 3$	$a < 3$	$a > 3$

Завдання 25.25–25.35 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

25.25. Установити відповідність між функціями (1–3) та їхніми властивостями (А–Д).

1 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

2 $y = 2^{|x|} + 2$

3 $y = 2^x + 2$

А Зростаюча на всій області визначення

Б Спадна на всій області визначення

В Має максимальне значення

Г Має найменше значення

Д Періодична

25.26. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–3) та проміжками спадання відповідних їм функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = (x + 1)(x - 5)$

2 $f'(x) = (x + 1)(5 - x)$

3 $f'(x) = (x + 1)^2(x - 5)$

А $(-\infty; -1]$
Б $(-\infty; 5]$
В $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$
Г $[-5; 1]$
Д $[-1; 5]$

25.27. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–3) та проміжками зростання відповідних їм функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = (x + 3)(x - 4)$

2 $f'(x) = (x + 3)(4 - x)$

3 $f'(x) = (x + 3)^2(x - 4)$

А $[4; +\infty)$
Б $[-3; +\infty)$
В $(-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$
Г $[-3; 4]$
Д $[-4; 3]$

25.28. Установити відповідність між функціями (1–3) та проміжками спадання цих функцій (А–Д).

1 $y = -3x^5 - 4x$

2 $y = x^4 - 2x^2$

3 $y = e^{x^2-2x+3}$

А $(-\infty; 1]$
Б $(-\infty; 0]$
В $(-\infty; -1] \cup [0; 1]$
Г $[0; +\infty)$
Д $(-\infty; +\infty)$

25.29. Установити відповідність між функціями (1–3) та проміжками зростання цих функцій (А–Д).

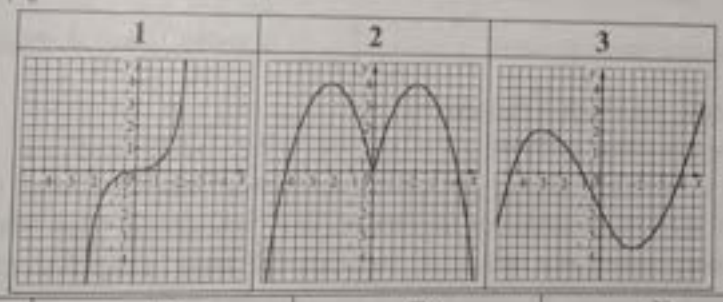
1 $y = 3x - x^2$

2 $y = \sqrt{1 - x^2}$

3 $y = x - \ln x$

А $(-\infty; +\infty)$
Б $[-1; 0]$
В $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$
Г $[1; +\infty)$
Д $(-\infty; 1{,}5]$

25.30. Установити відповідність між ескізами графіків функцій (1–3) та кількістю критичних точок цих функцій (А–Д).



А	Б	В	Г	Д
Жодної	одна	дві	три	чотири

25.31. Установити відповідність між функціями (1–3) та їх критичними точками (А–Д).

1 $y = x^5 - 5x$

2 $y = x^2 + \frac{2}{x}$

3 $y = e^{x^2+2x}$

А 1
Б –1
В –1; 0; 1
Г 0; 2
Д –1; 1

25.32. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–3) та точками максимуму функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = x(x + 2)(x - 4)$

2 $f'(x) = x^2(x + 2)(x - 4)$

3 $f'(x) = x(x + 2)(4 - x)$

А –2
Б 4
В –2; 4
Г –4
Д 0

25.33. Установити відповідність між похідними $f'(x)$ функцій (1–3) та точками мінімуму функцій $f(x)$ (А–Д).

1 $f'(x) = (x+3)(x-1)(x-5)$

2 $f'(x) = (x+3)(x-1)^2(x-5)$

3 $f'(x) = (x+3)(x-1)(5-x)$

А 5
Б 1
В –3
Г –1
Д –3; 5

25.34. Установити відповідність між функціями (1–3) та точками максимуму цих функцій (А–Д).

1 $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$

2 $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$

3 $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$

А 0
Б 1
В –1
Г –1; 0
Д –1; 1

25.35. Установити відповідність між функціями (1–3) та точками мінімуму цих функцій (А–Д).

1 $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2$

2 $y = -\frac{x^4}{4} + 2x^2$

3 $y = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$

А 0
Б 2
В –2; 2
Г –2; 0
Д –2

Розв'яжіть завдання 25.36–25.45. Відповідь запишіть десятковим дробом.

25.36. Знайти проміжки спадання функції $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 5$. У відповідь записати додатну абсцису середини одного з проміжків спадання.

25.37. Знайти проміжки спадання функції $y = \frac{3x + x^2}{x-1}$. У відповідь записати половину максимальної віддалі між точками, проміжків спадання.

25.38. Знайти найбільше значення функції $y = -2x^3 + 6x^2 + 9$ на відрізку $[0; 3]$.

25.39. Число 64 подати у вигляді добутку двох додатних множників так, щоб сума їхніх квадратів була найменшою. У відповідь записати найменшу суму квадратів знайдених множників.

25.40. Прямокутну ділянку землі, яка прилягає до стіни будинку, потрібно обгородити парканом завдовжки 160 метрів. Знайти: **1)** довжину прямокутника в метрах, за якої площа ділянки буде найбільшою; **2)** 1% від найбільшої площі ділянки (у $м^2$).

25.41. Визначити: **1)** висоту (у м); **2)** площу стін і дна (у $м^2$) відкритого басейну із квадратним дном, об'єм якого дорівнює 32 $м^3$, такого, щоб на облицювання його стін і дна витрати на матеріал були найменшими.

25.42. За якого найменшого цілого значення a функція $y = x^3 + 3x^2 + ax - 1$ не має критичних точок?

25.43. За якого від'ємного значення b один із екстремумів функції $y = 2x^3 - 3x^2 + b$ дорівнює –1?

25.44. За якого найбільшого значення a функція $y = xe^x$ є спадною на проміжку $[a-5; a+3]$?

25.45*. Знайти, за яких значень параметра a сума кубів коренів рівняння $6x^2 + 6(a-1)x - 5a + 2a^2 = 0$ буде найбільшою.

Тема 26. Первісна. Інтеграл

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— *означення первісної функції;*
— *знаходити первісну, використовуючи її основні властивості;*
— *поняття криволінійної трапеції;*
— *поняття визначеного інтеграла;*
— *обчислювати площу плоских фігур за допомогою інтеграла;*
— *застосовувати формулу Ньютона — Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла;*
— *обчислювати об'єми фігур за допомогою інтеграла;*
— *розв'язувати нескладні задачі, що зводяться до знаходження інтеграла.*

Функцію $F(x)$ називають *первісною для функції* $f(x)$ на проміжку X, якщо для довільного $x \in X$ справедлива рівність $F'(x) = f(x)$.

Наприклад, оскільки $(x^3)' = 3x^2$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, то $F(x) = x^3$ є первісною функції $f(x) = 3x^2$ на R.

Основна властивість первісної. Якщо $F(x)$ — первісна для функції $f(x)$ на проміжку X, то функція $f(x)$ має безліч первісних, і *загальний вигляд первісних функції* $f(x)$ на проміжку X можна задати формулою $F(x) + C$, де C — довільне число.

Наприклад, первісною для функції $f(x) = 4x^3$, є функція $F(x) = x^4$, оскільки $(x^4)' = 4x^3$. Первісними для функції $f(x) = 4x^3$ є також $F(x) = x^4 + 6$, $F(x) = x^4 - 1$ і взагалі $F(x) = x^4 + C$, де C — довільне число.

Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на проміжку X називають *невизначеним інтегралом* функції на цьому проміжку і позначають $\int f(x)dx = F(x) + C$. Наприклад, $\int \cos x dx = \sin x + C$.

Властивості невизначеного інтеграла

1. $\int F'(x)dx = F(x) + C$.
2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
3. $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$.
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.
5. $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$, або $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(kx+b)d(kx+b)$.

Таблиця інтегралів

1. $\int kdx = kx + C$.
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$.
3. $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$.
4. $\int \sqrt[n]{x}dx = \frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}} + C$.
5. $\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x} + C$.
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C$.
9. $\int e^x dx = e^x + C$.
10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
11. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x + C$.

При обчисленні інтегралів підінтегральну функцію зводять до однієї з табличних. Наприклад, знайти інтеграл $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$. Виконаємо перетворення: $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C = 1{,}5\sqrt[3]{x^2} + C$.

Якщо підінтегральна функція $f(x)$ не може бути безпосередньо перетворена до однієї з табличних, то можна використати метод заміни змінної чи інтегрування за частинами.

Наприклад, знайти $\int \cos(3x+6)dx$.

Введемо позначення $t = 3x + 6$, звідки $x = t/3 - 2$. Тоді $dx = d\left(\frac{1}{3}t - 2\right) = \frac{1}{3}dt$.

Одержимо: $\int \cos(3x+6)dx = \int \cos t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \cos t\,dt = \frac{1}{3}\sin t + C = \frac{1}{3}\sin(3x+6) + C$.

Згідно методу інтегрування частинами, $\int uv'dx = uv - \int vu'dx$, де $u = u(x)$ і $v = v(x)$ — диференційовані функції.

Наприклад, знайти $\int x \ln x dx$. Уведемо позначення: $u = \ln x$, $v' = x$. Звідси $u' = 1/x$, $v = \int v'dx = \int x dx = \frac{x^2}{2}$. Отже, $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C$.

Фігуру, що обмежена графіком функції $y = f(x)$ і прямими $y = 0$, $x = a$ і $x = b$, називають *криволінійною трапецією* (рис. 1 а). Площу криволінійної трапеції обчислюють за формулою $S = F(b) - F(a)$, де F — будь-яка первісна функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$.

Різницю $F(b) - F(a)$ називають *визначеним інтегралом* функції $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

При обчисленні визначеного інтеграла різницю $F(b) - F(a)$ позначають $F(x)\Big|_a^b$.

Рівність $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$ називають *формулою Ньютона — Лейбніца*.

Слід ураховувати, якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ мають первісні на проміжку $[a; b]$, то справедливі рівності:

1. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$.
4. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Наприклад, обчислити $\int_1^5 (2x+6)dx$.

Маємо: $\int_1^5 (2x+6)dx = \int_1^5 2x dx + \int_1^5 6dx = \left(x^2 + 6x\right)\Big|_1^5 = 5^2 + 6 \cdot 5 - \left(1^2 + 6 \cdot 1\right) = 48$. *Відповідь.* 48.

Формула площі криволінійної трапеції: $S = \int_a^b f(x)dx$, якщо $f(x) \geq 0$ (рис. 1).

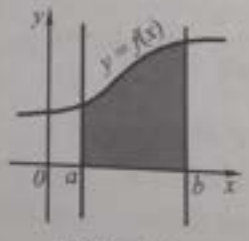


Рис. 1 а)

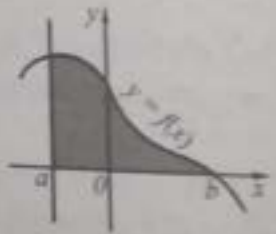


Рис. 1 б)

Якщо на проміжку $[a; b]$ $f(x) \leq 0$, то площу криволінійної трапеції обчислюють за формулою:

$$S = -\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Наприклад, знайти площу фігури, обмеженої лініями: $y = x^2 - 4x - 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$. Фігура обмежена заданими лініями, є криволінійною трапецією (рис. 2). Функція $y = x^2 - 4x - 1$ на відрізку $[0; 3]$ набуває від'ємних значень, тому площа фігури дорівнює:

$$S=\left|\int_0^3\left(x^2-4x-1\right)dx\right|=\left|\frac{x^3}{3}-2x^2-x\Big|_0^3\right|=|9-18-3-0|=12.$$

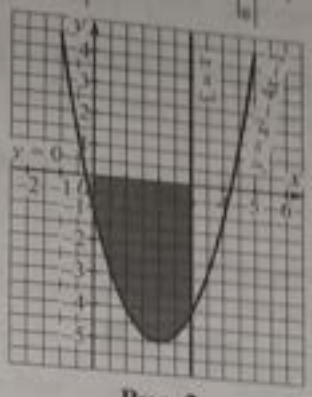


Рис. 2

Нехай $y=f(x)$ і $y=g(x)$ — неперервні на проміжку $[a;\ b]$ функції і для всіх $x\in[a;\ b]$ виконується нерівність $f(x)\geq g(x)$. Тоді площу фігури, зображеної на рисунку 3, обчислюють за формулою:

$$S=\int_a^b\left(f(x)-g(x)\right)dx.$$

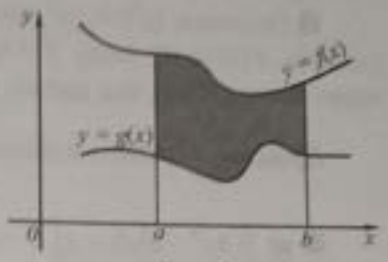
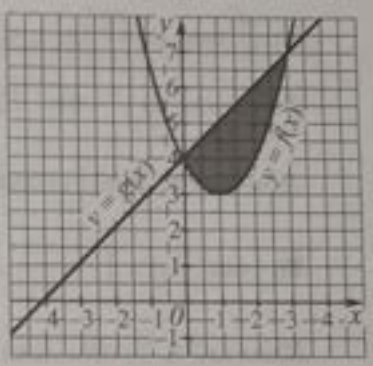


Рис. 3

Наприклад, знайти площу фігури, обмеженої функціями $f(x)=x^2-2x+4$ і $g(x)=x+4$. Побудуємо фігуру, площу якої слід знайти. Знайдемо точки перетину графіків заданих функцій:

$x^2-2x+4=x+4;\ x^2-3x=0;\ x_1=0,\ x_2=3.$

Графіки заданих функцій перетинаються у точках з абсцисами $x=0$ і $x=3$. Оскільки $g(x)>f(x)$, то площа фігури дорівнює:



$$S=\int_0^3\left(g(x)-f(x)\right)dx=\int_0^3\left(x+4-x^2+2x-4\right)dx=$$

$$=\int_0^3\left(-x^2+3x\right)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3=\left(\frac{3}{2}\cdot9-\frac{27}{3}\right)-\left(\frac{3}{2}\cdot0-\frac{0}{3}\right)=4{,}5.\ \textit{В-дь.}4{,}5.$$

Об'єм тіла, утвореного від обертання криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, де $x\in[a;\ b]$, навколо осі x, обчислюють за формулою: $V=\pi\int_a^b f^2(x)dx$ (рис. 4).

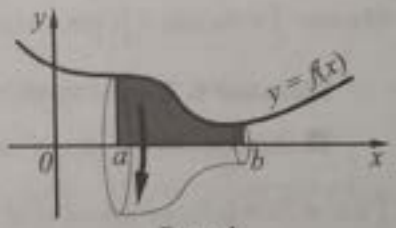
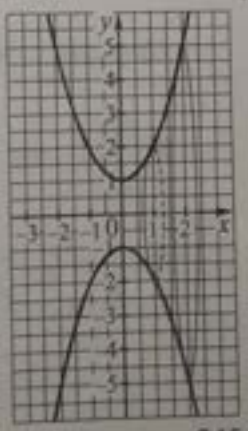


Рис. 4

Наприклад, знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y=x^2+1,\ x=1,\ x=2,\ y=0$. Побудуємо фігуру, об'єм якої слід знайти.



$$V=\pi\int_1^2 f^2(x)dx=\pi\int_1^2(x^2+1)^2dx=\pi\int_1^2(x^4+2x^2+1)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+2\cdot\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_1^2=$$

$$=\pi\left[\left(\frac{32}{5}+2\cdot\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{5}+2\cdot\frac{1}{3}+1\right)\right]=\frac{178\pi}{15}.\ \textit{Відповідь.}\ \frac{178\pi}{15}.$$

Шлях S, який пройшла за проміжок часу $[t_1; t_2]$ матеріальна точка, що рухається прямолінійно з швидкістю $v = v(t)$, обчислюють за формулою: $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

Наприклад, знайти шлях, який пройде матеріальна точка, яка рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 5 + 0{,}5t$ (м/с), за проміжок часу від $t_1 = 2$ с до $t_2 = 10$ с:

$$S = \int_2^{10}\left(5+\frac{t}{2}\right)dt = \left(5t+\frac{t^2}{4}\right)\Bigg|_2^{10} = 50+\frac{10^2}{4}-10-\frac{2^2}{4} = 75-11 = 64\ (\text{м}).$$

Приклад 1. Знайти первісну $F(x)$ функції $f(x) = \sin x$.

■ Оскільки $(-\cos x)' = \sin x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$, то $F(x) = -\cos x$ є однією з первісних. Загальний вигляд первісної функції має вигляд $F(x) = -\cos x + C$. ■

Приклад 2. Знайти первісну функції $f(x) = 3x^2$, графік якої проходить через точку (2; 10).

■ Оскільки $(x^3)' = 3x^2$, то загальний вигляд первісної є $F(x) = x^3 + C$. Знайдемо значення C, за умовою, $F(2) = 10$. Тому $2^3 + C = 10$; $C = 2$. Таким чином, первісна функції $f(x) = 3x^2$, яка проходить через точку (2; 10), має вигляд $F(x) = x^3 + 2$. ■

Приклад 3. Знайти невизначений інтеграл: **а)** $\int\left(4x^3-6\right)dx$; **б)** $\int\left(3\cos x+\frac{10}{x}\right)dx$.

■ **а)** $\int\left(4x^3-6\right)dx = 4\int x^3dx - 6\int dx = 4\cdot\frac{x^4}{4} - 6\cdot x + C = x^4 - 6x + C$;

б) $\int\left(3\cos x+\frac{10}{x}\right)dx = 3\int\cos x dx + 10\int\frac{dx}{x} = 3\sin x + 10\ln|x| + C$.

Відповідь. **а)** $x^4 - 6x + C$; **б)** $3\sin x + 10\ln|x| + C$. ■

Приклад 4. Знайти невизначений інтеграл $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$.

■ $\int\cos^2\frac{x}{2}dx = \int\frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos x)dx = \frac{1}{2}(x+\sin x)+C$. *Відповідь.* $\frac{x+\sin x}{2}+C$. ■

Приклад 5. Знайти невизначений інтеграл $\int x\sin x dx$.

■ Оскільки $(x\cos x)' = \cos x - x\sin x$, то $x\sin x = \cos x - (x\cos x)'$.

Маємо: $\int x\sin x dx = \int(\cos x - (x\cos x)')dx = \sin x - x\cos x + C$. *Відповідь.* $-x\cos x + \sin x + C$. ■

Приклад 6. Знайти невизначений інтеграл $\int\sqrt{x^2+3x+1}(2x+3)dx$.

■ Використаємо метод заміни змінної, позначивши $t = x^2 + 3x + 1$, звідки $t' = 2x + 3$. Тоді

$\int\sqrt{x^2+3x+1}(2x+3)dx = \int\sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}\left(x^2+3x+1\right)^{\frac{3}{2}} + C$. *Відповідь.* $\frac{2}{3}\left(x^2+3x+1\right)^{\frac{3}{2}} + C$. ■

Приклад 7. Знайти визначений інтеграл $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$.

■ $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin^2\frac{x}{2}dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4}\frac{1-\cos x}{2}dx = \frac{1}{2}\left[\int_{\pi/6}^{\pi/4}dx - \int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos x dx\right] = \frac{1}{2}\left[x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} - \sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}-\left(\sin\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\pi}{24}-\frac{\sqrt{2}-1}{4} = \frac{\pi-6\sqrt{2}+6}{24}$. *Відповідь.* $\frac{\pi-6\sqrt{2}+6}{24}$. ■

Приклад 8. Знайти визначений інтеграл $\int_0^1 (2x-1)^6\,dx$.

■ $\int_0^1 (2x-1)^6\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^7}{7}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1^7}{7} - \frac{(-1)^7}{7}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}$. *Відповідь.* $\frac{1}{7}$. ■

Приклад 9. Знайти визначений інтеграл $\int_1^e \ln x\,dx$.

■ Оскільки $(x\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$, то $\ln x = (x\ln x)' - 1$. $\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e \left((x\ln x)' - 1\right)dx =$

$= (x\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e 1\cdot dx = (e\ln e - 1\cdot\ln 1) - x\Big|_1^e = e - (e-1) = 1$. *Відповідь.* 1. ■

Приклад 10. Знайти визначений інтеграл $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin 2x \sin x\,dx$.

■ $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin 2x \sin x\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{2}(\cos x - \cos 3x)\,dx = \frac{1}{2}\sin x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sin 3x\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{6}\left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}(0-1) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3\sqrt{3}-1}{12}$. *Відповідь.* $\frac{3\sqrt{3}-1}{12}$. ■

Приклад 11. Установити відповідність між інтегралами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\int_1^3 (x^2+2)\,dx$

2 $\int_1^e \frac{3}{x}\,dx$

3 $\int_{\pi/8}^{\pi/2} \sin^2 2x\,dx$

А $\frac{3\pi+2}{16}$

Б 3

В $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{8}$

Г 1/8

Д $12\frac{2}{3}$

■ 1. $\int_1^3 (x^2+2)\,dx = \left(\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3} + 6 - \frac{1}{3} - 2 = 12\frac{2}{3}$, тому Д;

2. $\int_1^e \frac{3}{x}\,dx = 3\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 3\ln|x|\Big|_1^e = 3(\ln e - \ln 1) = 3$, тому **Б**;

3. $\int_{\pi/8}^{\pi/2} \sin^2 2x\,dx = \int_{\pi/8}^{\pi/2} \frac{1-\cos 4x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{\pi/8}^{\pi/2} (1-\cos 4x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\int_{\pi/8}^{\pi/2} 1\,dx - \int_{\pi/8}^{\pi/2} \cos 4x\,dx\right] = \frac{1}{2}\left[x\Big|_{\pi/8}^{\pi/2} - \frac{1}{4}\sin 4x\Big|_{\pi/8}^{\pi/2}\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\left(\sin\left(4\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(4\cdot\frac{\pi}{8}\right)\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\left(\sin 2\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{3\pi}{8} + \frac{1}{4}\right] = \frac{3\pi+2}{16}$, тому **А**.

Відповідь.

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2		☒			
3	☒				

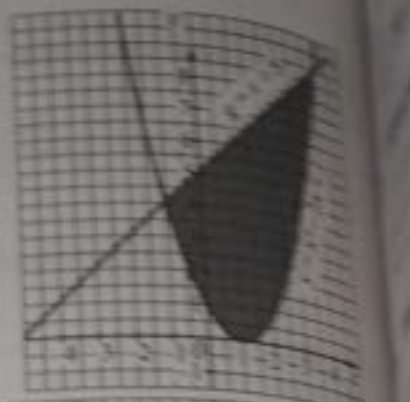
■

Приклад 12. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x + 1$, $g = x + 5$.

■ Розв'яжемо рівняння: $x^2 - 2x + 1 = x + 5$; $x^2 - 3x - 4 = 0$; $x_1 = 4$, $x_2 = -1$. Отже, абсциси точок перетину графіків даних функцій (межі інтегрування): 4 і –1. На відрізку $[-1; 4]$ $g(x) \geq y(x)$ (див. рис.). Тому площа фігури, обмеженої графіками функцій дорівнює:

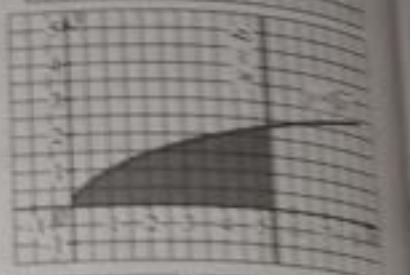
$$S = \int_{-1}^{4} \left(x + 5 - \left(x^2 - 2x + 1\right)\right) dx = \int_{-1}^{4} \left(-x^2 + 3x + 4\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right)\Bigg|_{-1}^{4} = \frac{64}{3} - \frac{1}{3} + 24 - \frac{3}{2} + 16 + 4 = 20\frac{5}{6}. \text{ Відп. } 20\frac{5}{6}. \blacksquare$$



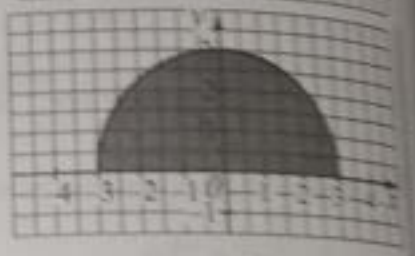
Приклад 13. За яких значень b площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = b$ дорівнює 18?

■ $S = \int_0^b \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^b = \frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}}$. За умовою, $S = 18$: $\frac{2}{3}b^{\frac{3}{2}} = 18$;



$b^{\frac{3}{2}} = 27$; $b = 27^{\frac{2}{3}}$; $b = 9$. *Відповідь.* 9. ■

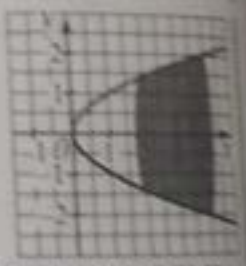
Приклад 14. Обчислити значення інтеграла $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$.



■ Значення визначеного інтеграла $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx$ можна розглядати як площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{9 - x^2}$, $x = -3$, $x = 3$.

Піднесемо обидві частини функції $y = \sqrt{9 - x^2}$ до квадрату, врахувавши, що $y \geq 0$ і $-3 \leq x \leq 3$: $y^2 = 9 - x^2$; звідси $x^2 + y^2 = 9$. Це є рівняння півкола з центром у точці (0; 0) і радіусом $R = 3$. Отже, досить знайти площу відповідного півкруга: $\int_{-3}^{3} \sqrt{9 - x^2}\, dx = S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot 3^2 = 4{,}5\pi$. *Відповідь.* $4{,}5\pi$. ■

Приклад 15. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо вісі x фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 2$ і $x = 4$.



■ $V = \pi\int_2^4 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_2^4 x\,dx = \pi \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_2^4 = \pi(8 - 2) = 6\pi$. *Відповідь.* 6π. ■

Завдання 26.1–26.23 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

26.1. Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x) = x^{10} - x^8 + x + 13$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = 10x^9 - 8x^7 + 1 + C$	$F(x) = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^2}{2} + 13x + C$	$F(x) = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^9}{9} + \frac{x^2}{2} + 13 + C$	$F(x) = 11x^{11} - 9x^9 + 2x^2 + 13x + C$	$F(x) = -\frac{x^{11}}{11} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^2}{2} - 13x + C$

26.2. Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x) = -4\cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = -4\sin x + C$	$F(x) = 4\sin x + C$	$F(x) = -4\cos x + C$	$F(x) = 4\cos x + C$	$F(x) = -16\cos x + C$

26.3. Яка з функцій задовольняє рівняння $y'(x) = \frac{10}{\sin^2 x}$?

А	Б	В	Г	Д
$y(x) = 10\operatorname{tg} x$	$y(x) = -10\operatorname{ctg} x$	$y(x) = -10$		

26.4. Для функції $f(x) = \sin x$ знайти первісну $F(x)$, графік якої проходить через точку $O(0; 0)$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x) = \sin x$	$F(x) = \cos x$	$F(x) = \cos x + 1$	$F(x) = 1 - \cos x$	$F(x) = \cos x - 1$

26.5. Обчислити інтеграл $\int_0^1 x^{20} dx$.

А	Б	В	Г	Д
19	21	20	1/20	1/21

26.6. Обчислити $\int_0^1 (x^2 - 4x) dx$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	2	$-\frac{5}{3}$	$\frac{7}{3}$

26.7. Обчислити $\int_0^1 2x^3 dx$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{4}$

26.8. $\int_0^{\pi} \sin\frac{x}{2} dx = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$2\cos x\Big\|_0^{\pi}$	$-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\Big\|_0^{\pi}$	$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\Big\|_0^{\pi}$	$-2\cos\frac{x}{2}\Big\|_0^{\pi}$	$2\cos\frac{x}{2}\Big\|_0^{\pi}$

26.9. Обчислити: $80\left(\sqrt{3}+1\right)\int_{\frac{\pi}{20}}^{\frac{\pi}{10}} \sin\left(10x + \frac{\pi}{3}\right) dx$.

А	Б	В	Г	Д
0,8	$\frac{1-\sqrt{3}}{20}$	–0,8	8	–8

26.10. Тіло рухається прямолінійно зі швидкістю $v(t) = 2t + 1$. Знайти закон руху тіла $S(t)$, якщо $S(1) = 3$.

А	Б	В	Г	Д
$S(t) = t^2 + t + 3$	$S(t) = t^2 + t$	$S(t) = t^2 + t + 1$	$S(t) = t^2 + t + 2$	$S(t) = t^2 + t - 1$

26.11. Указати інтеграл для обчислення площі фігури, обмеженої лініями $y = x^2$, $y = 0$ і $x = 2$.

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^4 x^2 dx$	$\int_0^2 (x^2 - x) dx$	$\int_0^2 2x dx$	$\int_0^2 \frac{x^3}{3} dx$	$\int_0^2 x^2 dx$

26.12. Указати формулу для обчислення площі S фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = x$.

А	Б	В	Г	Д
$S = \int_0^1 (x^2 - x) dx$	$S = \int_0^1 (x^2 + x) dx$	$S = \int_0^1 (x - x^2) dx$	$S = \int_0^1 x^2 dx$	$S = \int_0^1 x dx$

26.13. Указати формулу для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$S=\int_1^4 f(x)dx$	$S=2\int_1^4 f(x)dx$	$S=\int_1^2 f(x)dx-\int_2^4\lvert f(x)\rvert dx$	$S=\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx$	$S=\int_1^2 f(x)dx-\int_2^4 f(x)dx$

26.14. Знайти загальний вигляд первісних для функції $f(x)=\cos^2 x$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x)=-\sin^2 x+C$	$F(x)=\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$	$F(x)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$	$F(x)=\frac{x}{2}+\sin 2x+C$	$F(x)=\frac{1+\cos 2x}{2}+C$

26.15. Обчислити інтеграл $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

А	Б	В	Г	Д
3	1,5	6	2	0,75

26.16. Використовуючи геометричний зміст інтеграла, обчислити $\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}dx$.

А	Б	В	Г	Д
8	16	8π	16π	32π

26.17. Указати формулу для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням навколо осі абсцис фігури, утвореної лініями $y=\sqrt{\cos x}$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{\pi}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
$V=\pi\sin x\Big\rvert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V=\pi\cos x\Big\rvert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V=\frac{\pi}{2\sqrt{\cos x}}\Big\rvert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V=\pi\sqrt{\cos x}\Big\rvert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$	$V=\pi\sqrt{\sin x}\Big\rvert_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$

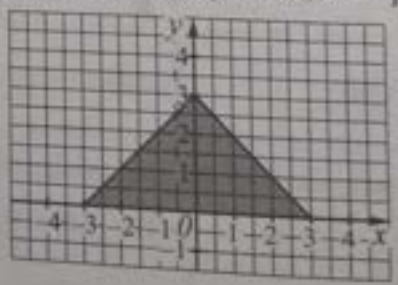
26.18. Указати первісну функцію для функції $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$.

А	Б	В	Г	Д
$F(x)=\operatorname{ctg}^2 x+C$	$F(x)=\operatorname{tg}x-x$	$F(x)=\operatorname{ctg}x-x$	$F(x)=\operatorname{ctg}x+x$	$F(x)=\operatorname{tg}x+x$

26.19. Указати формулу для обчислення площі фігури, обмеженої частинами параболи $y=x^2-4$ й осі абсцис.

А	Б	В	Г	Д
$S=\int_{-4}^{4}(x^2-4)dx$	$S=\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx$	$S=-\int_{-2}^{2}\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)dx$	$S=-\int_{-4}^{4}(x^2-4)dx$	$S=-\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx$

26.20. Указати формулу для обчислення площі трикутника, заштрихованого на рисунку.



А	Б	В	Г	Д
$S=\int_{-3}^{3}(\lvert x\rvert-3)dx$	$S=\int_{-3}^{3}(\lvert x\rvert+3)dx$	$S=\int_{-3}^{3}(3-\lvert x\rvert)dx$	$S=\int_{-3}^{3}\lvert 3-x\rvert dx$	$S=\int_{-3}^{3}\lvert x+3\rvert dx$

26.21. Серед наведених інтегралів вказати той, значення якого найменше.

А	Б	В	Г	Д
$\int_0^1 dx$	$\int_0^1 x dx$	$\int_0^1 x^2 dx$	$\int_0^1 x^3 dx$	$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

26.22. Обчислити інтеграл $\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x dx$.

А	Б	В	Г	Д
-4π	4π	-2π	2π	0

26.23. Яка з наведених функцій є первісною для функції $y=2|x|$?

А	Б	В	Г	Д
$y=x^2$	$y=\lvert x^2\rvert$	$y=-x^2$	$y=x\lvert x\rvert$	$y=-x\lvert x\rvert$

Завдання 26.24–26.32 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

26.24. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–3) та їхніми значеннями (А–Д).

1 $\int_0^1 2x^3 dx$

2 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 2x\, dx$

3 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos x\, dx$

А $\frac{1}{2}$

Б $\frac{1}{4}$

В 2

Г $1\frac{1}{2}$

Д 1

26.25. Установити відповідність між функціями $f(x)$ (1–3) та їх первісними $F(x)$ (А–Д).

1 $f(x)=x^3$

2 $f(x)=\frac{1}{x^3}$

3 $f(x)=6x$

А $F(x)=3x^2+C$

Б $F(x)=6\ln|x|+C$

В $F(x)=\frac{6}{x^2}+C$

Г $F(x)=\frac{x^4}{4}+C$

Д $F(x)=-\frac{1}{2x^2}+C$

26.26. Установити відповідність між функціями $f(x)$ (1–3) та їх первісними $F(x)$ (А–Д).

1 $f(x)=\cos\frac{x}{4}+\sin 4x$

2 $f(x)=\cos 4x+\sin\frac{x}{4}$

3 $f(x)=\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}+4\sin 4x$

А $F(x)=\sin\frac{x}{4}-\cos 4x+C$

Б $F(x)=\sin 4x-\cos\frac{x}{4}+C$

В $F(x)=16\sin 4x-\frac{1}{16}\cos\frac{x}{4}+C$

Г $F(x)=\frac{1}{4}\sin 4x-4\cos\frac{x}{4}+C$

Д $F(x)=4\sin\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\cos 4x+C$

26.27*. Установити відповідність між функціями (1–3), заданими на проміжку $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, та їх первісними (А–Д) на цьому відрізку.

1 $f(x)=\operatorname{tg}x$
2 $f(x)=\operatorname{ctg}x$
3 $f(x)=\frac{2}{\sin 2x}$

А $F(x)=\ln\operatorname{tg}x+C$
Б $F(x)=\ln\operatorname{ctg}x+C$
В $F(x)=\ln\sin x+C$
Г $F(x)=-\ln\sin x+C$
Д $F(x)=-\ln\cos x+C$

26.28. Установити відповідність між похідними (1–3) та відповідними їм функціями (А–Д).

1 $f'(x)=\frac{4}{\cos^2 4x}$
2 $f'(x)=\frac{16}{\cos^2 4x}$
3 $f'(x)=-\frac{16\cos 4x\operatorname{ctg}4x}{\sin^2 4x}$

А $f(x)=4\operatorname{ctg}4x+C$
Б $f(x)=\frac{4}{\cos^2 4x}+C$
В $f(x)=4\operatorname{tg}4x+C$
Г $f(x)=-\operatorname{ctg}4x+C$
Д $f(x)=\operatorname{tg}4x+C$

26.29. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\int_0^1 x^3dx$
2 $\int_0^1 x^2dx$
3 $\int_0^1 xdx$

А 1/10
Б 1/5
В 1/4
Г 1/3
Д 1/2

26.30. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}dx$
2 $\int_0^2 \frac{e^x}{2}dx$
3 $\int_0^1 e^{2x}dx$

А $\frac{e}{4}-\frac{1}{4}$
Б $\frac{e}{2}-\frac{1}{2}$
В $e-1$
Г $2e-2$
Д $4e-4$

26.31. Установити відповідність між визначеними інтегралами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$
2 $\int_0^{\pi}\sin 2xdx$
3 $\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}dx$

А –2
Б –1
В 0
Г 1
Д 2

26.32. Установити відповідність між лініями, заданими рівняннями (1–3), та об'ємами тіл (А–Д), утворених у результаті обертання цих ліній навколо осі x.

1 $y=\sqrt{|x|}$, де $x\in[-2;\,2]$

2 $y=\sqrt{\sin x}$, де $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

3 $y=\frac{1}{\cos x}$, де $x\in\left[0;\frac{\pi}{3}\right]$

А $0{,}5\pi$

Б π

В $1{,}5\pi$

Г $\sqrt{3}\pi$

Д 4π

Розв'яжіть завдання 26.33–26.42. Відповідь запишіть десятковим дробом.

26.33. Точка рухається прямолінійно з прискоренням $a(t)=12t^2+4$. Знайти:

1) миттєву швидкість $v(t)$;

2) закон руху $S(t)$ точки, якщо в момент часу $t=1$ с її швидкість дорівнювала 10 м/с, а $S(1)=12$ м. У відповідь записати **1)** $v(3)$ і **2)** $S(3)$.

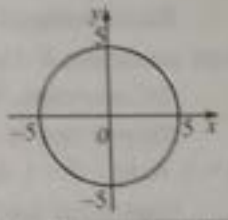
26.34. Обчислити інтеграл $12\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}}\frac{1-x^4}{1-x}\,dx$.

26.35. Обчислити інтеграл $3\int\limits_{4}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}$.

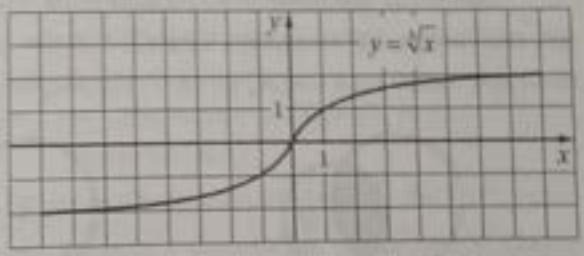
26.36. Знайти площу фігури, обмеженої лініями $y=8x-6x^2$, $x=\frac{1}{2}$, $x=1$, $y=0$.

26.37. Обчислити площу фігури, обмежену лініями $y=6-2x$, $y=6+x-x^2$.

26.38. (ЗНО–2012) Обчислити $\frac{1}{\pi}\int\limits_{-5}^{0}\sqrt{25-x^2}\,dx$, використовуючи рівняння кола $x^2+y^2=25$, зображеного на рисунку.



26.39. (ЗНО–2015) Визначити додатне значення параметра a, за якого площа фігури, обмежена лініями $y=\sqrt[3]{x}$ (див. рисунок), $y=0$ та $x=a$, дорівнює 192 кв. од.



26.40. Знайти об'єм V тіла обертання, утвореного при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y=\sqrt{x}$ і $y=x$. У відповідь записати $\frac{3V}{\pi}$.

26.41. Знайти найменше значення інтеграла $\int\limits_{0}^{a}\cos\frac{x}{2}\,dx$, $a\in R$.

26.42. Знайти меншу з площ кожної з фігур, на які пряма $y=x+4$ ділить фігуру, обмежену лініями $y=\frac{1}{2}x^2$ і $y=8$.

Тема 27. Елементи комбінаторики

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— поняття множини;
— поняття перестановок, комбінацій, розміщення (без повторень), їх властивості;
— комбінаторні правила суми та добутку;
— розв'язувати задачі, використовуючи перестановки, комбінації, розміщення (без повторень), комбінаторні правила суми та добутку.

Множини. Поняття множини належить до основних понять математики.

Множину вважають заданою, якщо вказано властивість, яку мають усі її елементи і не мають жодні інші об'єкти.

Наприклад, множина учнів даного класу, множина дерев у даному саду, множина парних чисел.

Кожний об'єкт, який входить до множини, називають *елементом* цієї множини. Множину, яка не містить жодного елемента, називають *порожньою* множиною.

Множини позначають великими буквами латинського алфавіту, а їхні елементи — малими літерами латинського алфавіту. Порожню множину позначають символом «$\varnothing$». Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A, а запис $b \notin A$ означає, що елемент b не належить множині A.

Множини бувають скінченні та нескінченні. Наприклад, множина літер українського алфавіту скінченна. Для скінченної множини A через $m(A)$ позначають число її елементів. Число елементів порожньої множини дорівнює 0. Множина натуральних чисел, множина простих чисел, множина точок прямої — нескінченні множини.

Іноді множину записують, вказуючи на властивість кожного її елемента: $B = \{x | P(x)\}$.

Наприклад, $A = \left\{ x \middle| x = 5k, \atop k \in Z \right\}$ — множина всіх цілих чисел, кратних 5.

Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, то множину A називають *підмножиною* множини B. Позначають: $A \subset B$ або $B \supset A$.

Дві множини називають *рівними*, якщо вони складаються з однакових елементів.

Наприклад, A — множина коренів рівняння $x^2 = 36$, B — множина коренів рівняння $|x| = 6$. Тоді $A = \{-6; 6\}$ і $B = \{-6; 6\}$. Отже, множини A та B рівні ($A = B$).

Перерізом (*добутком*) множин A та B називають множину C, яка складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать кожній з даних множин. Позначають: $C = A \cap B$. Якщо $x \in C$, то $x \in A$ і $x \in B$, і навпаки, якщо $x \in A$ і $x \in B$, то $x \in C$. На рисунку 1 затушована частина відповідає множині $C = A \cap B$.

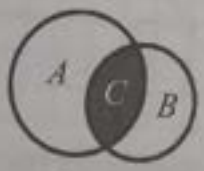


Рис. 1





Рис. 2

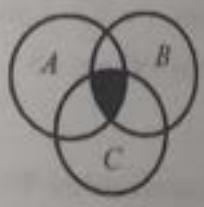


Рис. 3

Якщо множини A та B не мають спільних елементів, то перерізом цих множин є порожня множина (рис. 2): $A \cap B = \varnothing$. Наприклад, якщо A, B і C — множини учнів класу, які розв'язали відповідно задачу з алгебри, з геометрії, з хімії, то перерізом цих трьох множин є множина учнів класу, які розв'язали всі три задачі (рис. 3).

Об'єднанням (*сумою*) множин A та B називають множину C, яка складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать хоча б одній із множин A або B. Позначають: $C = A \cup B$.

Наприклад, об'єднанням множин гострокутних, тупокутних і прямокутних трикутників є множина всіх трикутників. На рис. 4 об'єднанням множин A та B є заштрихована множина. Якщо множини A та B мають спільні елементи, то кожен з них входить до об'єднання лише один раз.

Різницею двох множин A та B називають таку множину C, яка складається лише з усіх тих елементів множини A, які не належать множині B. Позначають

На рис. 5 заштрихована множина C — різниця множин A та B.

Якщо множини A та B такі, що $B \subset A$, то множину C, яка містить лише усі елементи множини A, що не належать множині B, називають *доповненням* множини B до множини A.

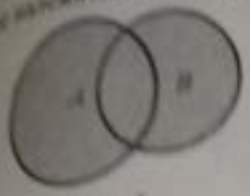


Рис. 4

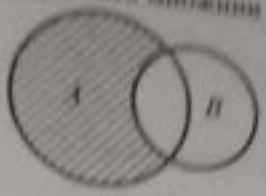


Рис. 5



Рис. 6

На рис. 6 заштрихована частина — доповнення множини B до A: $C_A B$. Тоді $C \cup B = A$, $C \cap B = \varnothing$.

Доповнення множини B до множини A позначають ще й так: $\overline{B}$. Тоді $B \cup \overline{B} = A$, $B \cap \overline{B} = \varnothing$.

Комбінаторика. Задачі, у яких доводиться відповідати на запитання: скільками різними способами можна виконати те, що вимагається, називають *комбінаторними*.

Скінченні впорядковані множини — це скінченні множини, для яких суттєвим є порядок розміщення їх елементів. Для позначення впорядкованих множин використовують круглі дужки.

Наприклад, $(a; b; c)$, $(1; 5; 9)$ — скінченні впорядковані множини. Множини $(1; 5; 9)$ і $(9; 5; 1)$ є різними впорядкованими множинами.

Добуток n перших натуральних чисел називають *n-факторіалом*:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0; 1, \\ n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1, & n > 1. \end{cases}$$

Наприклад, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ (читають: «П'ять факторіал дорівнює сто двадцять»).

Таблиця деяких факторіалів:

$1! = 1$	$6! = 720$
$2! = 1 \cdot 2 = 2$	$7! = 5040$
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$	$8! = 40320$
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$	$9! = 362880$
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$	$10! = 3628800$

Увага!
За означенням,
$0! = 1$

Перестановками з n елементів (P_n) називають будь-які впорядковані множини, кожна з яких містить усі n цих елементів, і які відрізняються одна від одної лише порядком розміщення елементів. Кількість усеможливих перестановок з n елементів обчислюють за формулою: $P_n = n!$.

Наприклад, з елементів множини $A = \{3; 8; 5\}$ можна утворити перестановки $(5; 8; 3)$, $(5; 3; 8)$, $(3; 8; 5)$, $(3; 5; 8)$, $(8; 3; 5)$, $(8; 5; 3)$, усього $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ перестановок.

Розміщеннями (A_m^n), утвореними з множини m різних елементів по n елементів ($0 < n \le m$), називають будь-які впорядковані підмножини цієї множини, які містять n елементів. Розміщення відрізняються одне від одного або елементами, або порядком розташування елементів. Кількість розміщень з m елементів по n обчислюють за формулою $A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1) = \dfrac{m!}{(m-n)!}$.

Кількість розміщень з m елементів по n може бути обчислена за формулами:

$A_m^1 = m$,

$A_m^2 = m(m-1)$,

$A_m^3 = m(m-1)(m-2)$,

.....

$A_m^n = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(n-1))$, $0 < n \le m$, тобто кількість можливих розміщень з m елементів по n дорівнює добутку n послідовних чисел натурального ряду, найбільшим з яких є m.

Наприклад, $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$, $A_6^4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. Очевидно, що $A_m^m = P_m$.

Комбінацією з m елементів по n (C_m^n) називають n-елементну підмножину m-елементної множини ($0 < n \le m$). Кількість комбінацій з m елементів по n обчислюють за формулою

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!} \text{ або } C_m^n = \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}.$$

Комбінації мають такі властивості:

1. $C_m^n = C_m^{m-n}$ — властивість індексів. Наприклад, $C_{30}^{28} = C_{30}^{30-28} = C_{30}^2 = \frac{30\cdot 29}{1\cdot 2} = 435$.

2. $C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^m = 2^m$.

Правило суми. Якщо елемент A можна вибрати m способами, а елемент B — n способами, то вибір елемента A або елемента B можна здійснити $(m + n)$ способами.

Правило добутку. Якщо елемент A можна вибрати m способами, а після кожного такого вибору елемент B можна вибрати n способами, то вибір пари $(A; B)$ в указаному порядку можна виконати $m \cdot n$ способами.

Приклад 1. Знайти переріз множин: **а)** A і B, якщо $A = \{7; 15; 20; 48; 60\}$, $B = \{12; 15; 18; 20; 100\}$; **б)** C та D, якщо C — множина прямокутників, D — множина ромбів.

■ **а)** $C = A \cap B = \{15; 20\}$; **б)** $P = C \cap D$, де P — множина квадратів. ■

Приклад 2. Числовими проміжками задано множини $A = [1; 3]$, $B = [2; 5]$, $C = [3; 8]$, $D = [0; 6]$. Знайти: **а)** $A \cap B$; **б)** $C \cap D$; **в)** $B \cup D$; **г)** $A \setminus B$; **д)** $(A \cup D) \cap (B \setminus C)$; **е)** $(A \setminus B) \cap (B \cup D)$.

■ **а)** $A \cap B = [1; 3] \cap [2; 5] = [2; 3]$;

б) $C \cap D = [3; 8] \cap [0; 6] = [3; 6]$;

в) $B \cup D = [2; 5] \cup [0; 6] = [0; 6]$;

г) $A \setminus B = [1; 3) \setminus [2; 5] = [1; 5)$;

д) $(A \cup D) \cap (B \setminus C) = ([1; 3] \cup [0; 6]) \cap ([2; 5) \setminus [3; 8]) = [0; 6] \cap [2; 8) = [2; 6)$;

е) $(A \setminus B) \cap (B \cup D) = ([1; 3) \cup [2; 5]) \cap ([2; 5) \cup [0; 6]) = [1; 5) \cap [0; 6] = [1; 5]$. ■

Приклад 3. Знайти різницю множин A та B, якщо:

а) $A = \{3; 4; 13; 20; 25\}$, $B = \{13; 20\}$;

б) $A = \{7; 8; 9\}$, $B = \{2; 3\}$;

в) $A = \{3; 6\}$, $B = \{3; 6; 13\}$.

■ **а)** $C = A \setminus B = \{3; 4; 25\}$;

б) $C = A \setminus B = \{7; 8; 9\}$;

в) $C = A \setminus B = \varnothing$. ■

Приклад 4. Скільки семицифрових чисел, кратних 5, можна скласти з цифр 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, щоб цифри в числі не повторювались.

■ Щоб число, складене із заданих цифр, ділилось на 5, необхідно і достатньо, щоб цифра 5 була на останньому місці. Решта — шість цифр — можуть розміщуватися в будь-якому порядку на місцях, що залишились. Отже, шукана кількість семицифрових чисел, кратних 5, дорівнює числу перестановок із 6 елементів, тобто $P = 6! = 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$. *Відповідь.* 720. ■

Приклад 5. На книжковій полиці розміщують 20 томів енциклопедії. Скількома способами їх можна розмістити так, щоб томи 12 і 13 не стояли поруч?

■ Усього книги можна розмістити 20! способами. Том 12 і 13 можна поставити поряд $P_2 = 2$ способами. Усі інші 18 томів разом з цією парою можна розмістити P_{19} способами. Тоді за правилом добутку є $2\cdot P_{19}$ таких способів. Отже, шукане число дорівнює: $P_{20} - 2P_{19} = 20! - 2\cdot19! = 20\cdot19! - 2\cdot19! = (20 - 2)\cdot19! = 18\cdot19!$. *Відповідь.* $18\cdot19!$ способів. ■

Приклад 6. Обчислити: **а)** $\frac{P_{12} - 10P_9}{P_{10}}$; **б)** $\frac{P_k}{P_{k-3}}$.

■ **а)** $\frac{P_{12} - 10P_9}{P_{10}} = \frac{12! - 10\cdot9!}{10!} = \frac{12\cdot11\cdot10! - 10!}{10!} = \frac{10!(12\cdot11 - 1)}{10!} = 131$;

б) $\frac{P_k}{P_{k-3}} = \frac{k!}{(k-3)!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-3)(k-2)(k-1)k}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(k-3)} = (k-2)(k-1)k$. *Відповідь.* **а)** 131; **б)** $(k-2)(k-1)k$. ■

Приклад 7. Скільки різних чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, якщо цифри не повторюються?

■ Маємо розміщення із 7 елементів по 4: $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$. *Відповідь.* 840. ■

Приклад 8. Розв'язати рівняння: **а)** $A_x^4 = 18A_{x-2}^4$; **б)** $A_{x-1}^2 = 20$.

■ **а)** $A_x^4 = 18A_{x-2}^4$, $x \geq 5$, $x - 2 \geq 4$. Отже, $x \geq 6$, $x \in N$.

$x(x-1)(x-2)(x-3) = 18(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$; $(x-2)(x-3)(x-4)(x(x-1) - 18(x-5)) = 0$.

Оскільки $x \geq 6$, то $x \neq 2$, $x \neq 3$, $x \neq 4$, то маємо: $x^2 - x - 18x + 90 = 0$; $x^2 - 19x + 90 = 0$; $x_1 = 10$, $x_2 = 9$.

x_1 і x_2 задовольняють умову $x \geq 6$, $x \in N$. Отже, корені рівняння — 10 і 9.

б) $x - 1 \geq 2$, $x \geq 3$, $x \in N$. $A_{x-1}^2 = 20$; $(x-1)(x-2) = 20$; $x^2 - 3x - 18 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 6$. $x_1 = -3$ не задовольняє умову $x \geq 3$. Отже, $x = 6$ — корінь рівняння. *Відповідь.* **а)** 9; 10; **б)** 6. ■

Приклад 9. Скількома різними способами з класу, в якому навчається 24 учні, можна вибрати для чергування 4 учні?

■ Різними будуть ті групи учнів, які відрізнятимуться хоча б однією особою, порядок у групі не істотний. Отже, маємо справу з кількістю комбінацій із 24 елементів по 4: $C_{24}^4 = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 10626$ способів вибрати учнів для чергування. *Відповідь.* 10626 способів. ■

Приклад 10. Множина M складається з трьох елементів: {■; ▲; ●}. Знайти P_3; A_3^2; C_3^2.

■ Усеможливих перестановок цієї множини існує $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$:

(■, ▲, ●), (■, ●, ▲), (▲, ■, ●), (▲, ●, ■), (●, ■, ▲), (●, ▲, ■).

Розміщень з множини M по два елементи існує $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$:

(■, ▲), (■, ●), (▲, ■), (▲, ●), (●, ■), (●, ▲).

Комбінацій з множини M по два елементи існує $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$: {■, ▲}, {■, ●}, {▲, ●}. ■

Приклад 11. Скільки п'ятизначних чисел, не кратних п'яти, можна скласти з цифр 3, 4, 5, 6, 7 без повторень цифр у кожному з них?

А	Б	В	Г	Д
96	156	120	5	24

■ Усіх таких чисел, разом з кратними 5, є $P_5 = 5!$. Для чисел, кратних 5, цифра 5 є останньою цифрою. Таких чисел є $P_4 = 4!$. Отже, шуканих чисел є $5! - 4! = 96$. *Відповідь.* **А.** ■

Приклад 12. Із 8 чоловіків і 6 жінок потрібно утворити таку комісію, щоб до її складу входило 2 чоловіки і 3 жінки. Скількома способами це можна зробити?

■ C_8^2 — кількість способів утворення чоловічої частини комісії;

C_6^3 — кількість способів утворення жіночої частини комісії. За правилом добутку:

$C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2} = 560$ — способів утворення комісії. *Відповідь.* 560 способами. ■

Приклад 13. Спростити вираз $\frac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1} \cdot P_{2x-n}}$.

■ Використаємо формулу $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$, тоді $A_{2x-1}^{n-1} = \frac{(2x-1)!}{((2x-1)-(n-1))!} = \frac{(2x-1)!}{(2x-n)!}$.

Урахувавши, що x та n можуть набувати лише натуральних значень і те, що $(2x - n) \in N$, одержимо:

$$\frac{P_{2x+1}}{A_{2x-1}^{n-1} \cdot P_{2x-n}} = \frac{(2x+1)! \cdot \cancel{(2x-n)!}}{(2x-1)! \cdot \cancel{(2x-n)!}} = \frac{(2x+1)!}{(2x-1)!} = \frac{(2x+1) \cdot 2x \cdot \cancel{(2x-1)!}}{\cancel{(2x-1)!}} = 2x(2x+1).$$

Відповідь. $2x(2x+1)$. ■

Приклад 14. Розв'язати рівняння $\frac{A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{n-n}}{P_n} = 110$.

■ Виконаємо перетворення лівої частини рівняння:

$\frac{A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{x-n}}{P_n} = \frac{(x+2)!(x-n)!}{(x-n)!\,x!} = \frac{(x+2)!}{x!} = \frac{(x+2)(x+1)\cdot x!}{x!} = (x+2)(x+1)$. Урахувавши, що x та n можуть набувати лише натуральних значень і те, що $(x-n) \in N$, одержимо: $(x+2)(x+1) = 110$;

$x^2 + 3x - 108 = 0$; $x_1 = -12$, $x_2 = 9$. $x_1 = -12$ — не задовольняє умову. Отже, $x = 9$, якщо $n \in N$ і $n < 9$; рівняння не має коренів, якщо $n \in N$ і $n \geq 9$. *Відповідь.* 9, якщо $n \in N$ і $n < 9$; ∅, якщо $n \in N$ і $n \geq 9$. ■

Приклад 15. Розв'язати рівняння: **а)** $\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} = 0{,}6$; **б)** $C_{20}^{x} = C_{20}^{3x-12}$.

■ **а)** $C_{2x}^{x+1} = C_{2x}^{2x-(x+1)} = C_{2x}^{x-1} = \frac{(2x)!}{(x-1)!(2x-(x-1))!} = \frac{(2x)!}{(x-1)!(x+1)!}$. $C_{2x+1}^{x-1} = \frac{(2x+1)!}{(x-1)!(x+2)!}$.

Урахувавши, що x може набувати лише натуральних значень і $2x > x+1$; $x > 1$, одержимо:

$\frac{C_{2x}^{x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}} = \frac{(2x)!}{(x-1)!(x+1)!} : \frac{(2x+1)!}{(x-1)!(x+2)!} = \frac{(2x)!\,(x-1)!(x+2)!}{(x-1)!(x+1)!(2x+1)!} = \frac{(2x)!\,(x+1)!(x+2)}{(x+1)!(2x+1)(2x)!} = \frac{x+2}{2x+1}$.

Тоді: $\frac{x+2}{2x+1} = 0{,}6$. Отже, $5x + 10 = 6x + 3$, $x = 7$;

б) $C_{20}^{x} = C_{20}^{3x-12}$. Урахувавши, що x може набувати лише натуральних значень і $x < 20$; $3x - 12 < 20$; $x < 10\frac{2}{3}$, одержимо: 1) $x = 3x - 12$, $x = 6$; 2) Урахувавши властивість $C_n^m = C_n^{n-m}$, можемо записати 1) $x = 3x - 12$; $x = 6$; 2) $3x - 12 = 20 - x$, $4x = 32$, $x = 8$. $x_1 = 6$ і $x_2 = 8$ задовольняють умови задачі. Отже, корені рівняння — 6 і 8. *Відповідь.* **а)** 7; **б)** 6; 8. ■

Завдання 27.1–27.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

27.1. Є 5 різних олівців і 7 різних ручок. Скількома різними способами можна утворити набір з однієї ручки й одного олівця?

А	Б	В	Г	Д
$7! + 5!$	5^7	7^5	$5 \cdot 7$	$7 + 5$

27.2. **(ЗНО–2014)** Студент на першому курсі повинен вибрати одну з трьох іноземних мов, яку вивчатиме, та одну з п'яти спортивних секцій, що відвідуватиме. Скільки всього існує варіантів вибору студентом іноземної мови та спортивної секції?

А	Б	В	Г	Д
5	8	10	15	28

27.3. Скількома способами можна скласти список з 8 учнів?

А	Б	В	Г	Д
8^2	8^8	8	$1 + 2 + 3 + \ldots + 8$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 8$

27.4. Скількома способами можна з 30 учнів вибрати трьох чергових?

А	Б	В	Г	Д
P_{30}	$30 \cdot 3$	$30 + 29 + 28$	A_{30}^3	C_{30}^3

27.5. Із класу, в якому навчається 18 учнів, вибирають трьох делегатів на шкільну конференцію. Скількома способами це можна зробити?

А	Б	В	Г	Д
4896	2448	816	1224	1632

27.6. Скількома способами можна розсадити 6 учнів за круглим столом?

А	Б	В	Г	Д
720	36	120	5040	60

27.7. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 3, 5, 7 і 9, якщо цифри в числі не повторюються?

А	Б	В	Г	Д
A_5^4	C_5^4	P_5	P_4	4^5

27.8. Скільки існує звичайних правильних дробів, у яких чисельники і знаменники прості числа — 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 і 23?

А	Б	В	Г	Д
19	18	144	72	36

27.9. Скількома способами групу із 15 осіб можна розділити на дві групи так, щоб в одній було 11 осіб, а в іншій — 4?

А	Б	В	Г	Д
C_{15}^4	A_{15}^{11}	A_{11}^4	$A_{15}^{11} - P_4$	$C_{15}^{11} \cdot C_{15}^4$

27.10. Скільки існує різних телефонних номерів, які містять п'ять цифр?

А	Б	В	Г	Д
5!	$1 + 2 + 3 + 4 + 5$	5^5	9^5	10^5

27.11. Скільки існує різних телефонних номерів, які містять сім цифр і не починаються з нуля?

А	Б	В	Г	Д
9!	9^7	10^7	$9 \cdot 10^6$	10!

27.12. Скільки є чисел, кратних 5, серед п'ятицифрових чисел, складених з цифр 1, 3, 5, 7 і 9 без повторення?

А	Б	В	Г	Д
3!	A_5^4	C_5^4	5!	4!

27.13. Скільки існує точок у координатному просторі, координати яких є цілими одноцифровими додатними числами?

А	Б	В	Г	Д
3^{10}	3^9	9^3	10^3	A_9^3

27.14. Скільки існує шестицифрових чисел, усі цифри в яких непарні?

А	Б	В	Г	Д
5^6	6^5	5!	6!	A_6^5

27.15. Скільки чотирицифрових чисел, кратних 5, у яких усі цифри різні, можна записати, використовуючи цифри 5, 6, 7, 8 і 9?

А	Б	В	Г	Д
120	60	6	24	720

27.16. З п'яти різних томів прози і шести різних томів віршів потрібно вибрати 2 томи прози і 4 томи віршів. Скількома способами можна це зробити?

А	Б	В	Г	Д
A_4^6	$A_5^2 \cdot C_6^4$	$C_5^2 \cdot C_6^4$	$A_5^2 \cdot A_6^4$	$C_5^2 + C_6^4$

27.17. Збори з 20 осіб обирають голову, секретаря і трьох членів редакційної комісії. Скількома способами можна це зробити?

А	Б	В	Г	Д
$C_{20}^2 \cdot C_{18}^3$	$A_{20}^2 \cdot C_{18}^3$	$A_{20}^2 \cdot A_{18}^3$	$A_{20}^2 + A_{18}^3$	$A_{20}^2 + C_{18}^3$

27.18. Автомобільний номер складається з двох букв (усього 30 букв) і чотирьох цифр (10 цифр). Скільки існує таких номерів?

А	Б	В	Г	Д
$30^2 \cdot 4^{10}$	$2^{30} \cdot 10^4$	$2^{30} \cdot 4^{10}$	$30^2 \cdot 10^4$	$30^4 \cdot 10^2$

27.19. У шкільному розкладі на понеділок є 6 різних уроків, серед них є алгебра та геометрія. Скільки способами можна скласти розклад уроків на цей день, щоб уроки математики були поруч?

А	Б	В	Г	Д
C_6^2	P_5	P_6	$P_5 \cdot P_2$	A_6^2

27.20. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4 і 5 без повторення, щоб парні цифри не були поруч?

А	Б	В	Г	Д
P_5	$P_4 \cdot P_2$	$P_5 - P_4 \cdot P_2$	$P_4 - P_3 \cdot P_2$	$P_5 \cdot P_2$

27.21. Скількома способами 5 хлопчиків і 5 дівчат можуть зайняти в театрі в одному ряді місця з 1 по 10 так, щоб хлопчики сиділи на непарних місцях, а дівчата — на парних?

А	Б	В	Г	Д
$5! \cdot 5!$	$10!$	$5!$	$10! \cdot 5!$	$5! + 5!$

27.22. Поїзд, у якому їдуть 300 пасажирів, робить k зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажири на цих зупинках?

А	Б	В	Г	Д
$300k$	300^2	k^{300}	$300 + k$	$300k!$

27.23. У ліфт 12-поверхового будинку зайшло на першому поверсі 10 осіб. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

А	Б	В	Г	Д
12^{10}	10^{11}	10^{12}	12^{10}	11^{10}

27.24. У стандартному вигляді розкладу бінома $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^6$ вказати коефіцієнт біля x.

А	Б	В	Г	Д
40	80	20	240	160

Завдання 27.25–27.33 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

27.25. Установити відповідність між задачами (1–3) та відповідями до них (А–Д).

1 Скількома способами можна вибрати двох чергових із шести учнів класу?
2 Скількома способами можна вибрати із 6 учнів класу голову зборів і секретаря?
3 Скількома способами можна вишикувати в ряд 6 учнів класу?

А $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}$
Б $6 \cdot 5$
В $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$
Г 6^2
Д $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

27.26. Установити відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\frac{10!}{8!}$
2 $\frac{5!}{2}$
3 $4 \cdot 4! - 4^2$

А 30
Б 40
В 60
Г 80
Д 90

27.27. Установити відповідність між позначеннями кількостей сполук (1–3) та виразами, за якими їх обчислюють (А–Д).

1 A_n^k	А $\frac{n!}{(n-k)!}$
2 C_n^k	Б $k! \cdot n!$
3 $\frac{P_k}{P_n}$	В $\frac{n!}{k!}$
	Г $\frac{k!}{n!}$
	Д $\frac{n!}{(n-k)!k!}$

27.28. Установити відповідність між заданими позначеннями кількостей сполук (1–3) та їх числовими значеннями (А–Д).

1 C_5^2	А 36
2 A_5^2	Б 30
3 C_{30}^{29}	В 24
	Г 20
	Д 10

27.29. Установити відповідність між записами (1–3) та їх доповненнями (А–Д) до правильних тверджень.

1 Якщо є 5 видів конвертів без марок та 4 види марок, то вибір одного конверта та марки можна здійснити ... способами	А 9
2 Якщо на тарілці є 6 різних груш і 3 різних яблука, то вибір одного фрукту можна здійснити ... способами	Б 18
3 Якщо на полиці є 12 різних підручників з алгебри, 6 різних підручників з геометрії та 7 різних підручників з фізики, то вибір одного підручника з математики можна здійснити ... способами	В 20
	Г 25
	Д 72

27.30. Установити відповідність між записами (1–3) та їх доповненнями (А–Д) до правильних тверджень.

1 Множину $\{a, b, c\}$ можна впорядкувати ... способами	А 5
2 Із множини $\{a, b, c, d\}$ можна утворити ... упорядкованих пар елементів	Б 6
3 Із множини $\{a, b, c, d, e\}$ можна утворити ... чотириелементних множин	В 10
	Г 12
	Д 15

27.31. Установити відповідність між множинами (1–3), заданими характеристичними властивостями, та кількістю елементів у цих множинах (А–Д).

1 Множина трицифрових чисел, у яких усі цифри різні	А 96
2 Множина трицифрових чисел, які утворені з цифр 1, 2, 3,..., 8, 9 і в яких усі цифри різні	Б 120
3 Множина чотирицифрових чисел, у яких усі цифри різні й які утворені з непарних цифр	В 504
	Г 576
	Д 648

27.32. Установити відповідність між рівняннями (1–3) та їх коренями (А–Д).

1 $A_{x+2}^2 = 110$

2 $C_{x-1}^2 = 55$

3 $C_{x+2}^2 = 45$

А 12
Б 11
В 10
Г 9
Д 8

27.33. Установити відповідність між виборами об'єктів (1–3) та записами (А–Д) кількості можливих способів їх виконання.

1 З 10 осіб вибирають голову, секретаря і 4 членів комісії

2 Для формування посилки необхідно вибрати два підручники з алгебри з 10 різних або 2 підручники з геометрії з 8 різних

3 Для складання коду необхідно вибрати з 10 літер дві різні і з 8 цифр чотири різні

А $A_{10}^2 \cdot A_8^4$
Б $C_{10}^2 + C_8^2$
В $C_{10}^2 + C_8^4$
Г $A_{10}^2 + A_8^4$
Д $A_{10}^2 \cdot C_8^4$

Розв'яжіть завдання 27.34–27.47. Відповідь запишіть десятковим дробом.

27.34. Обчислити $15 \cdot \frac{6!}{A_{10}^3}\left(C_7^3 + C_7^3\right)$.

27.35. Розв'язати рівняння $C_{x-3}^2 = 21$.

27.36. Знайти коефіцієнт четвертого члена розкладу двочлена $(x^2 - y)^6$.

27.37. Знайти коефіцієнт п'ятого члена розкладу степеня двочлена $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9$.

27.38. Скільки всього існує трицифрових чисел, у яких усі цифри різні й непарні?

27.39. Скільки трицифрових чисел, кратних 3, можна записати, використовуючи лише цифри 1, 2, 3, 4, 5 і 6, якщо в цих числах цифри можуть повторюватися?

27.40. Із цифр 1, 2, 3, 4 і 5 складають різні п'ятицифрові числа, які не містять однакових цифр. Скільки серед цих чисел є таких, які не починаються з числа 45?

27.41. **(ЗНО–2015)** У школі є два одинадцятих класи. В 11-А класі навчається 12 хлопців та 8 дівчат, а в 11-Б — 9 хлопців та 15 дівчат. З учнів цих двох класів потрібно обрати двох ведучих для проведення святкового вечора, причому хлопець має бути з 11-А класу, а дівчина — з 11-Б. Скільки всього існує варіантів вибору таких пар ведучих?

27.42. В одного учня 6 різних книжок з математики, а в іншого — 7. Скількома способами можна обміняти 3 книжки першого учня на 3 книжки другого учня?

27.43. Знайти член розкладу степеня двочлена $\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^{12}$, який не залежить від x.

27.44. Скількома способами можна розташувати на полиці 3 чорні, 2 сині і 3 червоні кулі?

27.45. З 10 різних троянд і 8 різних жоржин потрібно скласти букет, у якому повинно бути не менше 8 троянд і 7 жоржин. Скількома способами це можна зробити?

27.46. Серед членів шахового гуртка 2 дівчинки і 7 хлопчиків. Для участі в змаганнях необхідно скласти команду з чотирьох осіб, у яку обов'язково повинна увійти хоча б одна дівчина. Скількома способами можна це зробити?

27.47. Установити кількість трицифрових чисел, у яких усі цифри різні:
1) якщо використовувати лише непарні цифри; 2) якщо використовувати лише парні цифри.

Тема 38. Початки теорії ймовірностей та елементи статистики

Зміст матеріалу і компетентності: поняття вміє вимагає програма НМО

- вміння означення ймовірності події;
- обчислювати ймовірності випадкових подій, користуючись означенням і комбінаторними схемами;
- поняття генеральної та вибіркової сукупностей;
- означення вибіркових характеристик ряда даних;
- графічні, табличні, текстові та інші форми подання статистичних даних;
- обчислювати та аналізувати вибіркові характеристики;
- обчислювати та аналізувати вибіркові характеристики ряда даних (розмах вибірки, моду, медіану, середнє значення).

Теорія ймовірностей — математична наука, яка вивчає закономірності випадкових явищ. До основних понять теорії ймовірностей належать поняття стохастичного експерименту та події.

Експеримент (дослід, випробування) називають спостереження, яке за певних умов його можна повторювати необмежену кількість разів. Результат стохастичного експерименту — це подія.

Випробування — це певні дії за незмінних умов, в результаті яких відбувається (або не відбувається) подія.

Наприклад: 1) підкидання монети — випробування, поява «герба» — подія; 2) покупка білетів лотереї — випробування, поява виграшу на певний білет — подія.

Якщо випадковий експеримент проведено n разів і в $n(A)$ випадків відбулася подія A, то число $n(A)$ називається *частотою* події A. *Відносною частотою* випадкової події називають відношення числа появи цієї події до загального числа проведених експериментів $\frac{n(A)}{n}$.

Неможливою називають подію, яка внаслідок даного випробування не може відбутися.

Вірогідною називають подію, яка внаслідок даного випробування обов'язково має відбутися.

Випадковою називають подію, яка може відбутися або не відбутися під час випробування (табл. 1).

Таблиця 1

Випробування	Подія	Вид події
Підкидаємо гральний кубик	З'явиться число 10	Неможлива
Підкидаємо гральний кубик	З'явиться число, менше від 7	Вірогідна
Підкидаємо гральний кубик	З'явиться число, менше від 5	Випадкова

Імовірністю випадкової події називають відношення кількості подій, які сприяють цій події, до кількості всіх рівноможливих подій під час певного випробування: $P(A) = \frac{m}{n}$; $P(A)$ — імовірність появи події A, n — загальна кількість рівноможливих подій, m — кількість подій, які сприяють події A.

Імовірність вірогідної події U приймають як таку, яка дорівнює 1, оскільки для вірогідної події $m = n$: $P(U) = m / n = 1$.

Імовірність неможливої події (її часто позначають $\varnothing$) дорівнює 0, бо для неможливих подій число m подій, які сприяють їм, дорівнює нулю: $P(\varnothing) = \frac{m}{n} = \frac{0}{n} = 0$.

Якщо A — випадкова подія, то ймовірність її появи задовольняє умову $0 < P(A) < 1$, бо в цьому випадку $0 < m < n$. Імовірність будь-якої події B задовольняє умову $0 \le P(B) \le 1$.

Імовірність має обмежену область застосування через те, що ймовірність випадкової події у багатьох реальних випадках наперед визначити неможливо. У таких випадках для наближеного визначення ймовірності події використовують її статистичне означення. Нехай n — кількість усіх випробувань в окремій серії випробувань, $n(A)$ — кількість тих випробувань, за яких відбудеться подія A. $W = \frac{n(A)}{n}$ — відносна частота події A в даній серії випробувань або статистична частота появи події A.

Наприклад: а) відділ контролю виявив чотири нестандартних деталі ($m(A) = 4$) у партії з 97 ($n = 97$) випадково вибраних деталей. Статистична частота W появи нестандартних деталей дорівнює $W = \frac{m(A)}{n} = \frac{4}{97}$; б) по мішені зробили 25 пострілів ($n = 25$), до того ж було зареєстровано 19 влучень ($m(A) = 19$). Статистична частота W влучання у ціль дорівнює: $W = \frac{m(A)}{n} = \frac{19}{25}$.

У різних серіях випробувань відповідні частоти $\frac{m(A)}{n}$ для великих n практично збігаються, коливаючись біля деякого постійного значення $P(A)$, яке називають *статистичною ймовірністю події*. У першому прикладі $P(A) = \frac{4}{97}$, у другому — $P(A) = \frac{19}{25}$.

Для значної кількості випробувань статистична частота буде близькою до ймовірності події A:

$$W = \frac{m(A)}{n} \to P(A) \text{ або } P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m(A)}{n}.$$

Наприклад, багаторазово проводились досліди підкидання монети, у яких підраховувалася кількість появи герба. Результати деяких дослідів наведено в таблиці 2.

Таблиця 2

Число підкидань	Число появи герба	Відносна частота
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Тут відносні частоти мало відрізняються від числа 0,5, до того ж що більше дослідів, то менше відхилення.

У теорії ймовірностей розрізняють прості та складені події.

Складеною називатимемо подію, поява якої залежить від появи інших подій, які називатимемо простими.

Наприклад, під час кидання двох кубиків випало 11 очок. Ця подія є складеною, бо вона складається з різних можливостей для двох простих подій: 1) на першому кубику випало 5, а на другому — 6 очок; 2) на першому кубику випало 6, а на другому — 5 очок.

Сумою подій A та B називають подію C, яка полягає у виконанні під час одиничного випробування події A *або* події B, *або* обох подій разом (хоча б однієї з них). Наприклад, подія A — влучення в ціль з першого пострілу, подія B — влучення з другого пострілу. Тоді $C = A + B$ — подія, яка означає влучення у ціль із двох пострілів хоча б одного разу. Позначають суму подій: $C = A + B$ або $C = A \cup B$.

Події називають *сумісними* в даному випробуванні, якщо поява однієї з них не виключає можливості появи інших (не обов'язково одночасно). Наприклад, три стрільці стріляють у мішень. Розглянемо випадкові події: A — перший стрілець влучив у мішень, B — другий стрілець влучив у мішень, C — третій стрілець влучив у мішень. A, B, C — сумісні випадкові події.

Теорема про ймовірність суми двох несумісних подій (теорема додавання). Ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій: $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Подію $\overline{A}$ називають *протилежною* до події A, якщо вона відбувається тоді й тільки тоді, коли не відбувається подія A. Якщо A — деяка подія, то протилежну їй подію позначають $\overline{A}$.

Наприклад: а) влучення в ціль під час пострілу і промах — протилежні події. Якщо A — влучення, то $\overline{A}$ — промах; б) з ящика з деталями вибирають деталь. Подія A — вибрали стандартну деталь, $\overline{A}$ — вибрали нестандартну деталь. Події A та $\overline{A}$ — протилежні.

З теореми додавання випливають такі наслідки:

1. Якщо події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ попарно несумісні, то $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$.

2. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює 1, тобто $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Якщо ймовірність однієї з протилежних подій позначити через p, а іншої — через q, то $p + q = 1$.

Добутком двох подій A та B називають подію C, яка полягає у здійсненні від час одиничного випробування події A і події B. Добуток позначають $C = AB$ або $C = A \cap B$.

Дві події називають *залежними*, якщо ймовірність появи однієї з них залежить від того, відбулася чи не відбулася інша подія.

Наприклад, у коробці лежить 80 деталей: 50 стандартних і 30 нестандартних. З ящика навмання беруть одну деталь і не повертають її назад. Якщо вийняли стандартну деталь (подія A), то ймовірність появи стандартної деталі при другому випробуванні (подія B) дорівнює $P(B) = \frac{49}{79}$. Якщо в першому випробуванні вийнята нестандартна деталь, то ймовірність $P(B)$ дорівнює $P(B) = \frac{50}{79}$. Отже, ймовірність появи події B залежить від того, відбулася чи не відбулася подія A. Події A і B — залежні.

Подію B називають *незалежною* від події A, якщо поява події A не змінює ймовірності появи події B.

Умовною ймовірністю події A, залежної від події B, називають ймовірність, обчислену для події A в припущенні, що подія B вже відбулася. Позначають $P_B(A)$.

Наприклад, нехай в урні є дві білі й одна чорна кульки. Дві особи виймають навмання з урни по одній кульці. Розглянемо події: A — поява білої кулі у першої особи; B — поява білої кулі у другої особи. Якщо стало відомо, що подія A відбулася, то ймовірність події B дорівнюватиме $\frac{1}{2}$. Якщо ж подія A не відбудеться, то ймовірність події B (друга особа взяла білу кульку) дорівнює $\frac{2}{2} = 1$. Отже, ймовірність події B залежить від події A і є умовною. Умовну ймовірність події B за умови, що подія A вже відбулася, обчислюють за формулою $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, $P(A) \neq 0$. (1)

Імовірність події AB (обидві особи взяли білі кульки) можна обчислити за класичним означенням імовірності, врахувавши, що всеможливих варіантів є три (*бб*, *бч*, *чб*), а сприяє настанню події AB лише один варіант (*бб*). Тому $P(AB) = \frac{1}{3}$, $P(A) = \frac{2}{3}$, отже, $P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.

З формули (1) слідує: $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$.

Оскільки подія BA не відрізняється від події AB і $P(BA) = P(B) \cdot P_B(A)$, то одержимо:

$$P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Імовірність появи добутку двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Взаємно незалежними називають такі випробування, у яких імовірність результату кожного з них не залежить від того, які результати має чи матиме решта випробувань.

Наприклад, кілька послідовних виймань кульок з урни, в якій міститься 12 зелених і 9 синіх кульок є незалежними випробуваннями за умови, що вийняту кульку щоразу повертають назад до урни. Якщо кульку не повертати, то випробування будуть залежними.

Якщо виконують n незалежних випробувань, у кожному з яких подія A відбувається з імовірністю p і не відбувається з імовірністю q, то ймовірність того, що подія A відбудеться m разів, визначається за формулою:

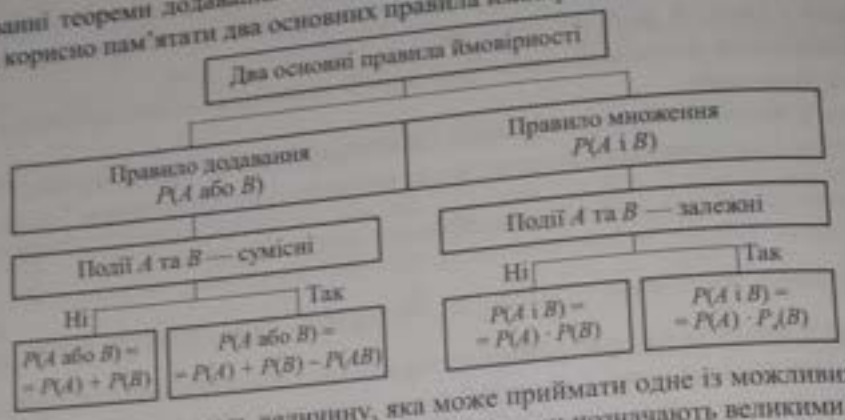
$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m} \text{ — } \textit{формула Бернуллі.}$$

Відомо, що $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, тому формула Бернуллі має вигляд: $P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}$.

Інколи замість символу $P_{m,n}$ використовують символ $P_n(m)$.

Тоді формула Бернуллі матиме вигляд: $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$.

При застосуванні теореми додавання і множення, які дають змогу простіше визначати шукану ймовірність події, корисно пам'ятати два основних правила ймовірностей.



Випадковою величиною називають величину, яка може приймати одне із можливих числових значень причому заздалегідь невідомо, яке саме. Випадкові величини позначають великими літерами X, Y.

Законом розподілу випадкової величини називають відповідність, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини та відповідними їм імовірностями. Найзручніше описувати за допомогою ряду розподілу — таблиці, де наведено всі можливі значення цієї випадкової величини та відповідні їм імовірності:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

де $p_i = P(x_i)$, до того ж $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Кожне з можливих значень випадкової величини є випадковою подією.

Ламану з вершинами в точках (x_i, p_i) називають многокутником розподілу (рис. 1).

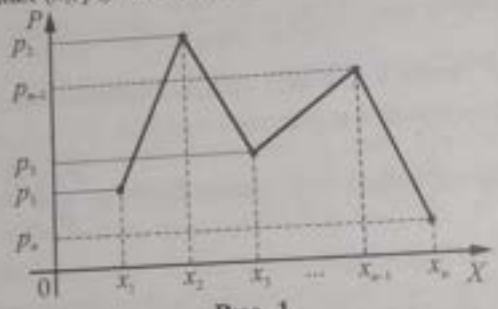


Рис. 1

Інший спосіб задання розподілу випадкової величини — аналітичний —задання функції від x для обчислення ймовірності події.

Елементи статистики. *Статистикою* називають науку, яка збирає, обробляє і вивчає різні дані, пов'язані з масовими явищами, процесами та подіями.

Усю сукупність, з якої роблять вибір об'єктів спостереження, називають *генеральною*.

Наприклад, зі 100 деталей для спостереження вибирають 10. 100 деталей — генеральна сукупність.

Сукупність об'єктів, дібраних для вибіркового спостереження, називають *вибіркою*. Для того щоб за вибіркою можна було зробити висновок про властивості генеральної сукупності, вибірка має бути представницькою (репрезентативною).

Якщо у вибірці присутні всі значення випадкової величини в тих самих пропорціях, що й у генеральній сукупності, то цю вибірку називають *репрезентативною*.

Нехай, наприклад, потрібно утворити вибірку з генеральної сукупності великого обсягу, якою є виготовлені заводом трактори. Кожному трактору присвоюють номер, який заносять до таблиці. Якщо у вибірці має бути 30 тракторів, то з таблиці навмання вибирають 30 чисел і трактори з відповідними номерами підпадають під проведення контролю. Після того як вибірка утворена, всі її об'єкти обстежують щодо властивості, яку досліджують, і в результаті отримують дані. Оскільки номери в таблиці (а значить і відповідні трактори) вибрані випадково, то репрезентативність вибірки буде забезпеченою.

Обробка результатів спостережень, яка полягає, наприклад, у тому, що отримані наслідки спостережень розташовують у порядку неспадання, називають *ранжуванням даних*, а одержаний при цьому ряд чисел називають *ранжованим рядом*. Наприклад, відділ технічного контролю заводу вимірив ширину пазів у 20 однотипних деталях. Одержали такий результат (у см): 2,1; 3; 1; 1; 2; 3; 1; 1; 2,2; 3; 1; 2,1; 3,2; 2,2; 3; 2,3; 1; 2; 2; 3,3. Такий ряд не дозволяє робити висновки про закономірності, наявні в цих даних. Розташуємо дані ряду в порядку неспадання. Одержимо ранжований ряд: 1; 1; 1; 1; 1; 2; 2; 2; 2,1; 2,1; 2,2; 2,2; 2,3; 3; 3; 3; 3; 3,2; 3,3. Можемо зробити висновок, що 6 деталей мають ширину пазу 1 см, 3 деталі — 2 см, 2 деталі — 2,1 см і т. д. Тепер легше встановити: навколо якої величини групується більшість показників, яка загальна картина розподілу.

Числове значення кількісної ознаки заданого члена статистичної сукупності називають *варіантою*. Позначають: x_i, де i — індекс варіанти. Варіантами у наведеному вище прикладі є: 1; 2; 2,1; 2,2; 2,3; 3; 3,2; 3,3. *Розмах вибірки (варіації)* — це різниця між найбільшою і найменшою варіантами: $R = 3{,}3 - 1 = 2{,}3$.

Частота — це число, яке показує, скільки разів трапляється кожна варіанта. Позначають n_i, де i — індекс варіанти. Загальна сума частот *(обсяг вибірки)* дорівнює: $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Частотами у наведеному вище прикладі є: $n_1 = 6$; $n_2 = 3$; $n_3 = 2$; $n_4 = 2$; $n_5 = 1$; $n_6 = 4$; $n_7 = 1$; $n_8 = 1$.

Гістограмою називають послідовність стовпців, кожний з яких спирається на один розрядний інтервал завдовжки $h = x_{i+1} - x_i$, а висота його H обчислюється за формулою $H = \frac{n_i}{h}$. Наприклад, у таблиці 3 подано розподіл кількості робітників за кількістю виготовлених ними деталей за зміну.

Таблиця 3

Кількість деталей, шт. $[x_i; x_{i+1})$	*Кількість робітників, осіб* (n_i)
20–25	80
25–30	116
30–35	350
35–40	120
40–45	60
45–50	50
Усього	776

За даними таблиці 3 на рисунку 2 зображена гістограма частот. $h = x_{i+1} - x_i = 25 - 20 = 5$. $H_1 = \frac{80}{5} = 16$; $H_2 = \frac{116}{5} = 23{,}2$; $H_3 = \frac{350}{5} = 70$; $H_4 = \frac{120}{5} = 24$; $H_5 = \frac{60}{5} = 12$; $H_6 = \frac{50}{5} = 10$. Основна властивість гістограми частот: сума площ усіх прямокутників гістограми дорівнює обсягу вибірки.

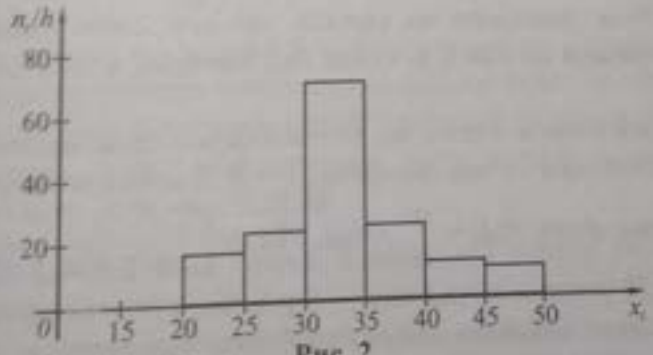


Рис. 2

Полігоном частот називають ламану, відрізки якої сполучають точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$, де x_i — варіанти, n_i — частоти.

Для побудови полігону частот на осі абсцис відкладають варіанти x_i, а на осі ординат — відповідні їм частоти n_i. Точки $(x_i; n_i)$ сполучають відрізками. Наприклад, графічне зображення розподілу

справа у суді за терміном їх розгляду (за табл. 4) ілюструє полігон розподілу, зображений на рис. 3.

Таблиця 4

Термін розподілу, міс.	Кількість справ, шт.
1	7
2	8
3	6
4	5

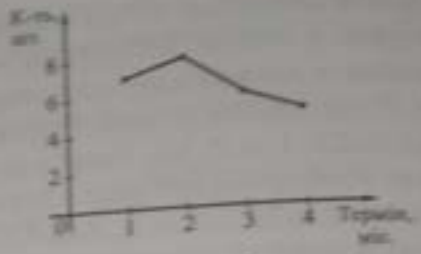


Рис. 3

При оцінюванні даних за розподілом частот використовують моду, медіану та середні значення.

Модою називають значення ознаки варіанти, яке трапляється найчастіше в даному ряді розподілу. Позначають: Mo.

Наприклад, за результатами написання контрольної роботи учні отримали такі бали: 5 балів — 2 учні; 6 б. — 3 уч.; 7 б. — 8 уч.; 8 б. — 10 уч.; 9 б. — 2 уч.; 10 б. — 4 уч.; 11 б. — 3 уч.; 12 б. — 2 уч. Модальним номером є 8 балів, оскільки він має найбільшу чисельність — 10 учнів. Отже, $Mo = 8$.

У групі значень 2; 4; 4; 4; 5; 7; 7; 10; 10; 10 модами є $Mo = 4$, $Mo = 10$.

Медіаною вибірки називають число, яке поділяє наявні упорядковану (у порядку зростання чи спадання ознаки) сукупність усіх значень вибірки. Позначають Me.

Наприклад, медіана групи значень 5, 7, 11, 13, 19 буде 11. $Me = 11$.

Медіана групи значень 3, 4, 8, 16, 17, 19 дорівнює 12 ((8 + 16) : 2 = 12). $Me = 12$.

Середнім значенням (*середнім арифметичним*) називають таке число $\overline{x}$, яке отримують діленням суми всіх даних вибірки $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ на кількість цих даних n: $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Приклад 1. З колоди, яка містить 36 карт, навмання витягають одну карту. Яка ймовірність того, що вибраною картою є туз?

■ Нехай подія A — «вибрана карта — туз». Оскільки в колоді є 4 тузи, то настанню події A сприяють 4 випадки вибору карти. Усіх можливих випадків є 36. Тому $P(A) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$. ■

Приклад 2. В урні є 5 синіх, 7 червоних і 10 білих кульок однакового розміру та маси. Кульки перемішують і навмання виймають одну. Яка ймовірність того, що вийнята кулька буде білою?

■ Нехай A — подія, яка полягає в тому, що навмання вийнята кулька буде білою. Усього є кульок (випадків) $n = 5 + 7 + 10 = 22$, а випадків, які сприяють події A, — 10, $m = 10$.

Отже, $P(A) = \dfrac{10}{22} = \dfrac{5}{11}$. *Відповідь.* $\dfrac{5}{11}$. ■

Приклад 3. З п'яти букв, написаних на картках, складене слово «пісня». Хлопчик перемішав картки і потім, беручи навмання по одній, їх склав. Яка ймовірність того, що він знову складе слово «пісня»?

■ Нехай A — подія, яка полягає в тому, що хлопчик складе слово «пісня». Усього може бути 5! елементарних подій (перестановки з п'яти елементів), $n = 5!$. З них один випадок сприяє події A, $m = 1$ (кожна буква буде на своєму місці). $P(A) = \dfrac{m}{n}$. Отже, $P(A) = \dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \dfrac{1}{120}$. *В-дь.* $\dfrac{1}{120}$. ■

Приклад 4. В учня є 20 зошитів. Серед них — 5 у лінію, а решта — у клітинку. Яка ймовірність того, що серед шести випадково вибраних зошитів усі будуть у клітинку?

■ Нехай подія A — «усі 6 вибраних зошитів є зошитами у клітинку». Оскільки учень має 20 – 5 = = 15 зошитів у клітинку, то сприяють настанню події A число комбінацій з 15 по 6. Усіх можливих варіантів вибору шести зошитів із двадцяти існує C_{20}^6. Тому ймовірність настання події A дорівнює:

$$P(A) = \frac{C_{15}^6}{C_{20}^6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6!} : \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15}{6!} \approx 0{,}13.$$ *Відповідь.* 0,13. ■

Приклад 5. Набираючи номер телефону, дівчинка забула дві останні цифри і, пам'ятаючи тільки те, що ці цифри парні, набрала їх навмання. Яка ймовірність того, що номер з першого ж разу буде набраний правильно?

■ Нехай подія A — номер набрано правильно. Дві останні цифри можна набрати $5 \cdot 5 = 25$ способами. Тоді можливих подій $n = 25$. Події A сприяє тільки одна з них, $m = 1$. Отже, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{25}$. *Відповідь.* 1/25. ■

Приклад 6. З якою ймовірністю круг, зображений на рисунку, який обертається навколо свого центру, зупиниться «чорним» сектором навпроти стрілки?



■ Оскільки круг поділено на 8 рівних секторів, з яких 2 чорні, то відношення довжин дуг і шукана ймовірність дорівнюватимуть: $P = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

Відповідь. 0,25. ■

Приклад 7. Світлана й Олександр домовились зустрітись у центральному парку з 12 год до 13 год. Той, хто прийде першим, чекає другого протягом 30 хв, після чого йде з парку. Яка ймовірність того, що вони зустрінуться?

■ Позначимо час приходу в парк Світлани через x, а Олександра через y (для зручності виражатимемо час у хвилинах, які пройшли після 12 год). Очевидно, що $0 \le x \le 60$; $0 \le y \le 60$.

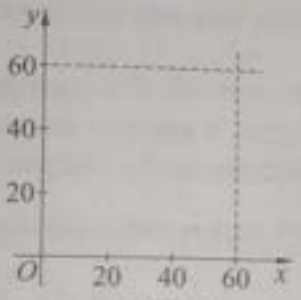


Рис. 4

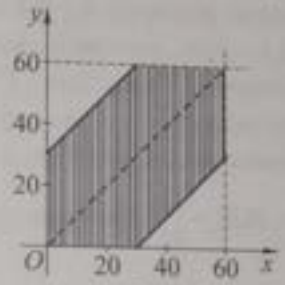


Рис. 5

Кожна точка $(x; y)$ квадрата (рис. 4) — це один з можливих випадків (подія). Експеримент завершиться зустріччю, якщо виконається умова $|x - y| \le 30$. Множина таких точок заштрихована на рис. 5.

Знайдемо площу заштрихованої частини квадрата:

$$S = 60^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 = 3600 - 900 = 2700. \; S_{кв} = 60^2 = 3600.$$

Шукану ймовірність зустрічі знаходимо як відношення площі частини квадрата, яка сприяє зустрічі, до площі всього квадрата: $P = \frac{2700}{3600} = \frac{3}{4}$. *Відповідь.* 0,75. ■

Приклад 8. Імовірність того, що перший баскетболіст зробить влучний кидок, становить 0,8, а другий — 0,85. Яка ймовірність того, що, виконавши по одному кидку, обидва спортсмени влучать?

■ Нехай подія A — «перший баскетболіст зробив влучний кидок», а подія B — «другий баскетболіст зробив влучний кидок». Події A та B незалежні. Тому ймовірність виконання кожної з них дорівнює $P(AB) = 0{,}8 \cdot 0{,}85 = 0{,}68$. *Відповідь.* 0,68. ■

Приклад 9. У коробці є 30 курчат: 17 білих, 9 рябих та 4 чорних. Яка ймовірність того, що навмання вибране курча не чорне?

■ Нехай подія A — «вибране курча не чорне». Тоді згідно правила суми цій події сприяють $m = 17 + 9 = 26$ випадки. Тоді ймовірність події A дорівнює: $P(A) = \frac{26}{30} = \frac{13}{15}$.

Відповідь. $\frac{13}{15}$. ■

Приклад 10. Мисливець стріляє у мішень, поділену на чотири області. Імовірність влучення в першу область дорівнює 0,29, у другу — 0,23, у третю — 0,4. Знайти ймовірність того, що мисливець влучить у першу або в другу, або у третю область.

■ Нехай D — подія, ймовірність якої потрібно знайти, A — мисливець влучить у першу область, B — мисливець влучить у другу область, C — мисливець влучить у третю область. Події A, B і C — несумісні, тому за теоремою про ймовірність суми несумісних подій маємо: $P(D) = P(A) + P(B) + P(C)$; $P(D) = 0,29 + 0,23 + 0,4 = 0,92$. *Відповідь.* 0,92. ■

Приклад 11. Імовірність того, що біатлоніст не влучить у мішень становить 0,2. Знайти ймовірність того, що п'ять пострілів поспіль будуть влучними.

■ Нехай події A_i — «i-й постріл біатлоніста — влучний» ($i = 1; 2; 3; 4; 5$), подія A — «біатлоніст у вдалася серія із п'яти влучних пострілів».

За умовою, $P(A_i) = 1 - 0,2 = 0,8$. Оскільки події A_i — незалежні, то ймовірність події A дорівнює:

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) \cdot P(A_5) = 0,8^5 = 0,3277 = 33\% .$$ *Відповідь.* ≈33%. ■

Приклад 12. Імовірність того, що Оленка розв'яже задачу, дорівнює 0,8, а ймовірність того, що її розв'яже Остап — 0,7. Знайти імовірність того, що задачу не розв'яже жоден з учнів.

А	Б	В	Г	Д
0,06	0,3	0,2	0,56	0,44

■ Імовірність того, що Оленка не розв'яже задачу, дорівнює $1 - 0,8 = 0,2$; імовірність того, що Остап не розв'яже задачу, дорівнює $1 - 0,7 = 0,3$; імовірність того, що задачу не розв'яжуть Оленка й Остап, дорівнює $0,2 \cdot 0,3 = 0,06$. *Відповідь.* **А**. ■

Приклад 13. У токаря є 13 конусних і 17 циліндричних деталей. Він навмання взяв одну деталь, а потім іншу. Знайди ймовірність того, що перша деталь конусна, а друга — циліндрична.

■ Нехай A — перша деталь конусна, а друга — циліндрична; B — перша деталь конусна; C — друга — циліндрична. $P(B) = \frac{13}{30}$. Імовірність того, що друга деталь циліндрична, обчислимо за умови, що перша взята деталь конусна: $P_B(C) = \frac{17}{29}$. Тоді $P(A) = P(B) \cdot P_B(C) = \frac{13}{30} \cdot \frac{17}{29} = \frac{221}{870}$. *В-дь.* $\frac{221}{870}$. ■

Приклад 14. Кожен із трьох робітників виготовив по 15 деталей. Під час перевірки виявилося, що серед деталей, виготовлених першим, другим і третім робітником окремо, стандартних деталей було 12, 10 і 11 відповідно. У кожного робітника навмання взяли по одній деталі. Яка ймовірність того, що всі три взяті деталі будуть стандартними?

■ Нехай A — усі три взяті деталі будуть стандартними; B — навмання взята деталь у першого робітника є стандартною; C — навмання взята деталь у другого робітника є стандартною; D — навмання взята деталь у третього робітника є стандартною. $P(B) = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$; $P(C) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$; $P(D) = \frac{11}{15}$.

Події B, C і D — незалежні в сукупності. $P(A) = P(B) \cdot P(C) \cdot P(D) = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{11}{15} = \frac{88}{225}$. *В-дь.* $\frac{88}{225}$. ■

Приклад 15. Із двох гармат стріляють по цілі. Імовірності влучення у ціль першою і другою гарматою відповідно дорівнюють 0,6 і 0,9. Знайти ймовірність того, що при одному залпі по цілі влучать тільки з однієї гармати.

■ Нехай A_1 — влучення у ціль першою гарматою; A_2 — влучення в ціль другою гарматою; B_1 — відбулася тільки подія A_1; B_2 — відбулася тільки подія A_2.

Поява події B_1 рівносильна появі події $A_1\overline{A_2}$ (відбулася перша подія і не відбулася друга). Поява події B_2 рівносильна появі події $\overline{A_1}A_2$ (не відбулася перша подія і відбулася друга).

Отже, щоб знайти ймовірність появи тільки однієї з подій A_1 й A_2, досить знайти ймовірність появи однієї (не важливо якої) з подій B_1 чи B_2. Події B_1 і B_2 несумісні, тому $P(B_1 + B_2) = P(B_1) + P(B_2) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = 0,6(1 - 0,9) + (1 - 0,6)0,9 = 0,06 + 0,36 = 0,42$. *Відповідь.* 0,42. ■

Приклад 16. У ворота одночасно кидають два м'ячі. Імовірність влучення першого м'яча дорівнює 0,4, а другого — 0,7. Яка ймовірність влучення у ворота хоча б одного з двох м'ячів?

■ Нехай A — у ворота влучив хоча б один з двох м'ячів. Тоді $\overline{A}$ — жоден м'яч не влучив. $P(\overline{A}) = (1-0,4)(1-0,7) = 0,18$; $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,18 = 0,82$. *Відповідь.* 0,82. ■

Приклад 17. У дитини є 7 шоколадних та 8 карамельних цукерок. Вона навмання бере три цукерки. Скласти закон розподілу ймовірностей випадкової величини — числа шоколадних цукерок із навмання взятих, а також визначити найбільш ймовірну кількість шоколадних цукерок із трьох навмання взятих.

■ Випадкова подія X — «кількість шоколадних цукерок серед трьох навмання взятих» може набувати значення: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Побудуємо закон розподілу випадкової величини X. Щоб обчислити ймовірності можливих значень, використаємо означення ймовірностей $P(A) = m/n$ та, врахувавши, що порядок вибору цукерок несуттєвий, використаємо формули для обчислення числа комбінацій:

X	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$
p	$\frac{C_8^3}{C_{15}^3} = \frac{8}{65}$	$\frac{C_7^1 \cdot C_8^2}{C_{15}^3} = \frac{28}{65}$	$\frac{C_7^2 \cdot C_8^1}{C_{15}^3} = \frac{24}{65}$	$\frac{C_7^3}{C_{15}^3} = \frac{5}{65}$

Отже, найбільш ймовірно, що серед 3 навмання взятих цукерок буде одна шоколадна. *Відповідь.* 1. ■

Приклад 18. Дано ранжований ряд урожайності зернових культур у 20 господарствах (у ц/га): 28, 29, 29, 29, 30, 30, 31, 31, 31, 31, 32, 35, 35, 35, 35, 35, 38, 38, 40, 41. Вказати варіанти, частоту та відносну частоту кожної варіанти.

■ Обсяг вибірки $n = 20$. Згрупуємо дані по варіантах: $\widehat{28}$, $\widehat{29,29,29}$, $\widehat{30,30}$, $\widehat{31,31,31,31}$, $\widehat{32}$, $\widehat{35,35,35,35,35}$, $\widehat{38,38}$, $\widehat{40}$, $\widehat{41}$. Маємо такі варіанти: $x_1 = 28$, $x_2 = 29$, $x_3 = 30$, $x_4 = 31$, $x_5 = 32$, $x_6 = 35$, $x_7 = 38$, $x_8 = 40$, $x_9 = 41$.

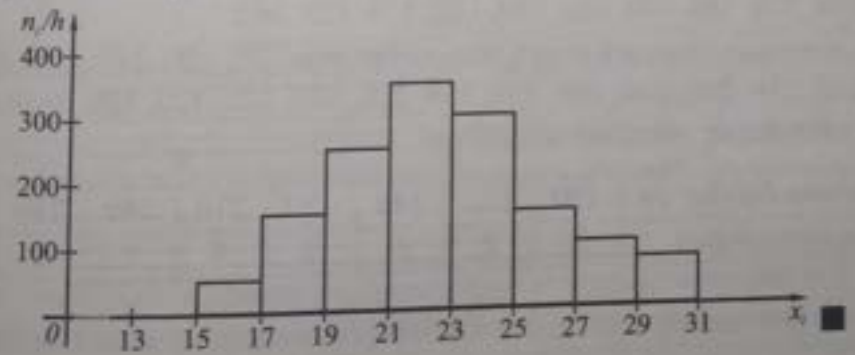
Частоти цих варіант відповідно дорівнюють: $n_1 = 1$, $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, $n_4 = 4$, $n_5 = 1$, $n_6 = 5$, $n_7 = 2$, $n_8 = 1$, $n_9 = 1$, а відносні частоти — $w_1 = \frac{1}{20}$, $w_2 = \frac{3}{20}$, $w_3 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, $w_4 = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$, $w_5 = \frac{1}{20}$, $w_6 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$, $w_7 = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$, $w_8 = \frac{1}{20}$, $w_9 = \frac{1}{20}$. ■

Приклад 19. З метою вивчення середньої врожайності пшениці на площі 500 тис. га проведено вибіркове вимірювання врожайності на полях загальною площею 2850 га (див. таблицю).

Урожайність, ц/га	[15; 17)	[17; 19)	[19; 21)	[21; 23)	[23; 25)	[25; 27)	[27; 29)	[29; 31]
Площа, га	100	300	500	700	600	300	200	150

За даними таблиці побудуй гістограму частот врожайності пшениці на площі 2850 га.

■ На осі абсцис відкладаємо врожайність (у ц/га), а на осі ординат — кількість гектарів, поділену на довжину проміжку (17 – 15 = 2).

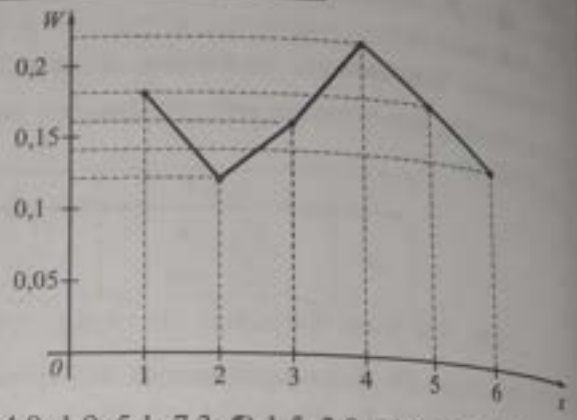


■

Приклад 20. Проведено 50 підкидань грального кубика. Результати випробувань занесені в таблицю. Побудуй полігон відносних частот випадання певного числа очок.

Кількість очок	*Частота*	*Відносна частота*
1	9	$9/50 = 0{,}18$
2	6	$6/50 = 0{,}12$
3	8	$8/50 = 0{,}16$
4	11	$11/50 = 0{,}22$
5	9	$9/50 = 0{,}18$
6	7	$7/50 = 0{,}14$

■ Побудуємо точки, координати яких є парами чисел варіаційного ряду (1; 0,18), (2; 0,12) і т. д. З'єднавши утворені точки відрізками, одержимо полігон відносних частот випадання певного числа очок. ■



Приклад 21. Знайти медіану сукупності даних: **а)** 2,1; 4,8; 1,9; 5,1; 7,3; **б)** 1,5; 2,8; 11,3; 12,1; 4,5; 5,7.

■ **а)** Розмістимо дані сукупності в порядку зростання: 1,9; 2,1; 4,8; 5,1; 7,3. Оскільки $n = 5$ — непарне число, то $Me = 4{,}8$;

б) розмістимо дані сукупності в порядку зростання: 1,5; 2,8; 4,5; 5,7; 11,3; 12,1, $n = 6$ — парне число. $Me = \frac{4{,}5 + 5{,}7}{2} = \frac{10{,}2}{2} = 5{,}1$. *Відповідь.* **а)** 4,8; **б)** 5,1. ■

Приклад 22. Із двох воротарів потрібно вибрати одного для участі в чемпіонаті з футболу. Кількості «взяття» ними м'яча при кожних десяти штрафних ударах під час тренувань подані в таблиці.

Номер тренування		1	2	3	4	5
Кількість «взяття»	*I воротар*	7	5	9	8	9
	II воротар	8	10	8	8	5

Кого з воротарів слід запросити на гру?

■ Знайдемо середню кількість «взяття» м'ячів.

Для першого воротаря: $\overline{x_1} = \frac{7+5+9+8+9}{5} = 7{,}6$. Для другого: $\overline{x_2} = \frac{8+10+8+8+5}{5} = 7{,}8$.

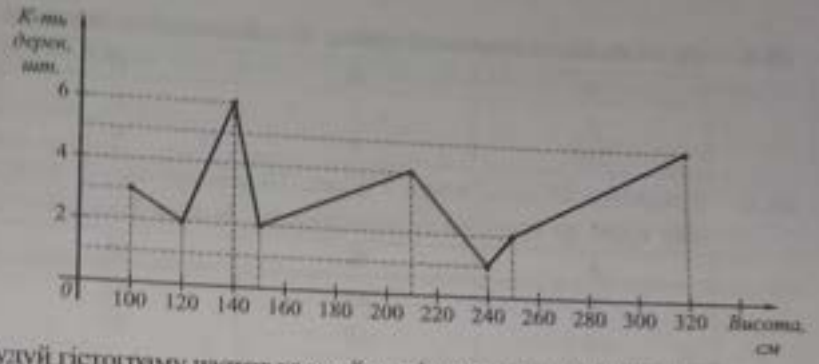
$\overline{x_2} > \overline{x_1}$. Отже, на чемпіонат слід запросити другого воротаря. *Відповідь.* Другого воротаря. ■

Приклад 23. Побудуй закон розподілу дискретного варіаційного ряду й накресли полігон частот розподілу вимірювання висоти 25 дерев (у см): 140, 210, 320, 150, 140, 210, 210, 120, 100, 140, 320, 150, 100, 210, 250, 240, 320, 140, 100, 250, 320, 140, 320, 120, 140.

■ Розташуємо значення ознаки в неспадному порядку: 100, 100, 100, 120, 120, 140, 140, 140, 140, 140, 140, 150, 150, 210, 210, 210, 210, 240, 250, 250, 320, 320, 320, 320, 320. Знайдемо для кожного значення його частоту і результат занесемо до таблиці.

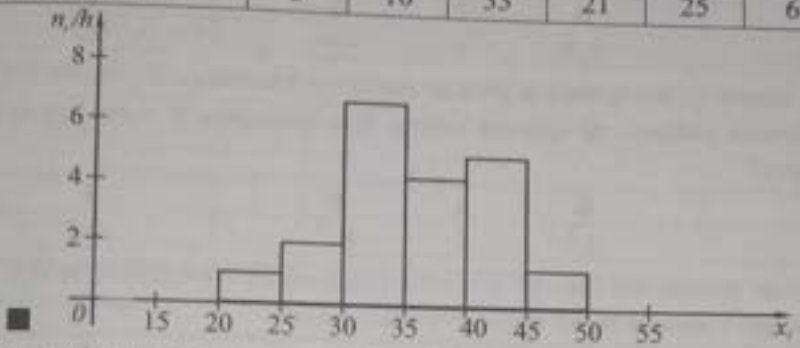
Висота дерева, см	100	120	140	150	210	240	250	320
Кількість дерев	3	2	6	2	4	1	2	5

На осі абсцис системи координат відкладаємо значення висот дерев, а на осі ординат — відповідні частоти. Будуємо точки, координатами яких є парами чисел з дискретного варіаційного ряду: (100; 3), (120; 2) і т. д. З'єднавши утворені точки відрізками, отримаємо полігон розподілу 25 дерев за висотою (див. рис.). ■



Приклад 24. За даними таблиці побудуй гістограму частот врожайності пшениці на різних ділянках.

Врожайність, ц/га	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50
Площа ділянки, %	5	10	33	21	25	6



■ На рис. побудована гістограма частот врожайності пшениці на різних ділянках посівних площ. ■

Завдання 28.1–28.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

28.1. У лотереї 10 виграшних квитків і 240 квитків без виграшу. Яка ймовірність виграти в цю лотерею, купивши один квиток?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{25}$

28.2. У ящику з 25 деталей 23 стандартні. Яка ймовірність, що перша навмання взята деталь буде нестандартною?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{23}{25}$	$\frac{25}{23}$	$\frac{25}{2}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{2}{23}$

28.3. З шухляди, у якій лежить 8 червоних, 3 сині та 20 зелених олівців, навмання вийняли один олівець. Яка ймовірність того, що це не зелений олівець?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{31}$	$\frac{8}{31}$	$\frac{20}{31}$	$\frac{11}{20}$	$\frac{11}{31}$

28.4. Зі слова «математика» навмання вибирають одну літеру. Яка ймовірність того, що виберуть літеру «а»?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$

28.5. Імовірність того, що стрілець одним пострілом влучає у ціль, дорівнює 0,4. Стрілець виконав два постріли. Знайти ймовірність того, що обома пострілами стрілець влучив у ціль.

А	Б	В	Г	Д
0,4	0,8	0,16	1,6	0,6

28.6. Тричі кидають гральний кубик. Яка ймовірність того, що тричі випаде «4»?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{216}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{216}$

28.7. У коробці 10 куль, з них 7 білих. Навмання беруть одну за одною дві кулі, до того ж узяту першу кулю до коробки не повертають. Знайти ймовірність того, що обидві кулі будуть білі.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{10}$	$\frac{49}{100}$	$\frac{42}{90}$	$\frac{49}{90}$	$\frac{42}{100}$

28.8. Стрілець цілясе по мішені та влучає в десятку з імовірністю 0,2, а в дев'ятку — з імовірністю 0,3. Виконано один постріл. Яка ймовірність того, що вибито не менше дев'яти очок?

А	Б	В	Г	Д
0,06	0,3	0,6	0,9	0,5

28.9. Імовірність закинути в корзину м'яч для першого хлопчика дорівнює 0,6, а для другого — 0,5. Обидва хлопчики роблять по одному кидку. Яка ймовірність того, що хоча б один з них закине м'яч у корзину?

А	Б	В	Г	Д
1,1	0,3	0,7	0,8	0,2

28.10. При увімкненні запалення двигун починає працювати з імовірністю 0,8. Яка ймовірність того, що двигун почав працювати за другого увімкнення?

А	Б	В	Г	Д
0,16	0,64	0,04	0,8	0,2

28.11. Імовірність виготовлення стандартної деталі дорівнює 0,9. Визначити ймовірність того, що з шести навмання взятих деталей 4 виявляться стандартними.

А	Б	В	Г	Д
$6 \cdot 0{,}9^4$	$0{,}9^4 \cdot 0{,}1^2$	$C_6^4 \cdot 0{,}9^4$	$C_6^4 \cdot 0{,}9^4 \cdot 0{,}1^2$	$C_6^4 \cdot 0{,}1^2$

28.12. У коробці є шість однакових занумерованих кубиків. Навмання дістають по одному всі кубики. Яка ймовірність того, що номери вийнятих кубиків з'являтимуться в порядку зростання?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6!}$	$\frac{6}{6!}$	$\frac{1}{12}$

28.13. У ящику 100 деталей, з них 6 пофарбовані. Навмання виймають 2 деталі. Яка ймовірність того, що обидві деталі будуть пофарбовані?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{A_6^2 \cdot A_{100}^2}$	$\frac{1}{C_6^2 \cdot C_{100}^2}$	$\frac{C_6^2}{A_{100}^2}$	$\frac{A_6^2}{A_{100}^2}$	$\frac{C_6^2}{C_{100}^2}$

28.14. Набираючи номер телефону, абонент забув останні дві цифри і, пам'ятаючи, що цифри різні, набрав їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрано потрібні цифри.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{A_{10}^2}$	$\frac{1}{C_{10}^2}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{2 \cdot 10!}$	$\frac{1}{A_9^2}$

28.15. У мішку лежать 20 однакових на дотик куль: 12 білих та 8 чорних. З мішка навмання витягнуто 8 куль. Яка ймовірність того, що рівно 3 з них чорні?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{C_8^3 \cdot C_{20}^5}{C_{20}^8}$	$\frac{C_{20}^8}{C_8^3 \cdot C_{12}^5}$	$\frac{C_8^3 + C_{12}^5}{C_{20}^8}$	$\frac{A_8^3 \cdot A_{12}^5}{A_{20}^8}$	$\frac{C_8^3 \cdot C_{12}^5}{C_{20}^8}$

28.16. В одному класі з 20 учнів є 8 хлопчиків, а в іншому з 25 учнів — 15 хлопчиків. За жеребкуванням вибирають двох учнів з кожного класу. Яка ймовірність того, що з кожного класу виберуть тільки дівчат?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2}+\frac{C_{10}^2}{A_{25}^2}$	$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2}\cdot\frac{A_{10}^2}{A_{25}^2}$	$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}+\frac{C_{10}^2}{C_{25}^2}$	$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}\cdot\frac{C_{10}^2}{C_{25}^2}$	$\frac{C_{12}^4}{C_{45}^4}$

28.17. У скриньці є 12 білих і 8 чорних куль. Навмання вибрали 2 кулі. Яка ймовірність того, що вони одного кольору?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}\cdot\frac{C_8^2}{C_{20}^2}$	$\frac{C_{12}^2}{C_{20}^2}+\frac{C_8^2}{C_{20}^2}$	$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2}\cdot\frac{A_8^2}{A_{20}^2}$	$\frac{A_{12}^2}{A_{20}^2}+\frac{A_8^2}{A_{20}^2}$	$\frac{2}{C_{20}^2}$

28.18. У ящику лежить 31 деталь першого сорту та 6 деталей другого сорту. Навмання вибирають три деталі. Яка ймовірність того, що хоча б одна з деталей першого сорту?

А	Б	В	Г	Д
$\frac{C_6^3}{C_{37}^3}$	$1-\frac{C_6^3}{C_{37}^3}$	$\frac{C_{31}^3}{C_{37}^3}$	$1-\frac{C_{31}^3}{C_{37}^3}$	$\frac{A_6^3}{A_{37}^3}$

28.19. Механізм складається з трьох виробів. Імовірність браку при виготовленні першого виробу дорівнює 0,1, другого — 0,2, третього — 0,3. Яка ймовірність браку при виготовленні механізму?

А	Б	В	Г	Д
$0,9+0,8107-0,9\cdot0,8\cdot0,7$	$1-0,1\cdot0,2\cdot0,3$	$0,1\cdot0,2\cdot0,3$	$0,9\cdot0,8\cdot0,7$	$1-0,9\cdot0,8\cdot0,7$

28.20. У сім'ї троє дітей. Знайти ймовірність того, що серед них є хоча б один хлопчик.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0,875	0,125	0,5

28.21. У результаті експерименту відбуваються рівноможливі події, які виключають одна одну. Імовірність появи кожної з них дорівнює 0,05. Яка кількість цих подій?

А	Б	В	Г	Д
500	50	20	200	1000

28.22. **(ЗНО–2013)** На діаграмі відображено нараховану фірмою загальну суму заробітної плати усім своїм працівникам у січні, лютому та березні 2011 року. У січні на фірмі працювало 15 співробітників, у лютому — 18, а в березні — 25. Як змінилася середня нарахована заробітна плата в цій фірмі в березні порівняно з січнем?



А	Б	В	Г	Д
Зменшилася більше ніж на 100 грн	зменшилася менше ніж на 100 грн	не змінилася	збільшилася менше ніж на 1000 грн	збільшилася більше ніж на 1000 грн

28.23. Велосипедист проїхав 20 км зі швидкістю 10 км/год і 15 км — зі швидкістю 5 км/год. Знайти середню швидкість руху велосипедиста.

А	Б	В	Г	Д
7,5 км/год	7 км/год	5 км/год	12,5 км/год	8 км/год

28.24. (ЗНО–2011) О шостій годині ранку визначено температуру на десяти метеостанціях. Отримані дані відображено в таблиці.

Температура (у градусах Цельсія)	1	3	4	x
Кількість метеостанцій	2	3	4	1

Визначити x, якщо середнє арифметичне всіх цих даних дорівнює 3,5 °С.

А	Б	В	Г	Д
$x = 5$	$x = 6$	$x = 7$	$x = 8$	$x = 9$

Завдання 28.25–28.35 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

28.25. Установити відповідність між завданнями (1–3) та відповідями до них (А–Д).
У коробці є 5 червоних, 5 жовтих, 5 синіх і 5 зелених кульок — усього 20. Яка ймовірність, що навмання вийнята кулька буде...

1 жовтою

2 зеленою або червоною

3 не жовтою

А 0,75

Б 0

В 0,5

Г 1

Д 0,25

28.26. Установити відповідність між подіями (1–3) та їхніми ймовірностями (А–Д).

1 У ящику є 8 білих і 12 червоних куль. Подія: навмання вийнята куля — біла

2 Серед 40 електричних лампочок 4 зіпсованих. Подія: навмання вибрана лампочка — якісна

3 У лотереї 50 білетів, з них 5 — із грошовими виграшами, 15 — з речовими, решта — без виграшу. Подія: вибраний першим білет без виграшу

А 0,9

Б 0,8

В 0,6

Г 0,4

Д 0,2

28.27. У ящику є 6 червоних, 8 синіх, 12 зелених і 14 білих куль. Установити відповідність між заданими подіями (1–3) та їхніми ймовірностями (А–Д).

1 Перша навмання вийнята куля — червона або біла

2 Перша навмання вийнята куля — червона або зелена

3 Перша навмання вийнята куля — не червона

А $\frac{9}{20}$

Б $\frac{11}{20}$

В $\frac{13}{20}$

Г $\frac{17}{20}$

Д 0,5

28.28. Установити відповідність між заданими подіями (1–3) та їхніми ймовірностями (А–Д).

1 Двічі кидають монету. Подія: обидва рази випадає «герб»

2 Двічі кидають гральний кубик. Подія: обидва рази випадає число «4»

3 У сім'ї троє дітей. Подія: усі діти — хлопці

А 1/8

Б 1/27

В 1/16

Г 1/36

Д 1/4

28.29. Установити відповідність між подіями (1–3) та їхніми ймовірностями (А–Д).

1 У коробці є 5 пронумерованих кубиків. Подія: послідовно вийняті кубики будуть впорядковані за зростанням їхніх номерів

2 Дівчинка забула останні дві цифри телефонного номера подруги, але пам'ятає, що вони різні. Подія: при першому наборі був набраний правильний номер

3 На 7 аркушах паперу написали літери А, Б, В, Г, К, Р, Л. Подія: послідовно взяті три аркуші утворили слово «РАК»

А $\frac{1}{45}$

Б $\frac{1}{60}$

В $\frac{1}{90}$

Г $\frac{1}{120}$

Д $\frac{1}{210}$

28.30. Виконали два постріли по мішені. Подія A — влучення при першому пострілі, подія B — влучання при другому пострілі. Установити відповідність між заданими подіями (1–3) та їх виразами (А–Д) через операції над подіями A та B.

1 Жодного разу не влучили

2 Влучили в мішень хоча б одним пострілом

3 З першого пострілу не влучили, а з другого — влучили

А $A \cdot B$

Б $\overline{A} \cdot B$

В $A \cdot \overline{B}$

Г $\overline{A} \cdot \overline{B}$

Д $A + B$

28.31. М'яч тричі кидають у баскетбольну корзину. Подія A_1 — м'яч влучив у корзину з першого кидка, подія A_2 — м'яч влучив у корзину з другого кидка, подія A_3 — м'яч влучив у корзину з третього кидка. Установити відповідність між заданими подіями (1–3) та їх виразами (А–Д) через операції над подіями A_1, A_2 та A_3.

1 М'яч не влучив у корзину жодного разу

2 М'яч хоча б один раз не влучив у корзину

3 М'яч хоча б один раз влучив у корзину

А $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$

Б $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$

В $A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}$

Г $A_1 + A_2 + A_3$

Д $\overline{A_1} + \overline{A_2} + \overline{A_3}$

28.32. Два спортсмени стріляють по одному разу в одну й ту ж ціль. Імовірність влучання у ціль для першого спортсмена дорівнює 0,8, а для другого — 0,7. Установити відповідність між заданими подіями (1–3) та їхніми ймовірностями (А–Д).

1 Перший спортсмен влучив у ціль, а другий — не влучив

2 Другий спортсмен влучив у ціль, а перший — не влучив

3 У ціль влучив хоча б один спортсмен

А 0,94

Б 0,56

В 0,5

Г 0,24

Д 0,14

28.33. У ящику є 12 чорних і 8 білих куль. З нього навмання виймають дві кулі, не повертаючи їх до ящика. Установити відповідність між заданими записами (1–3) та їх доповненнями (А–Д) до правильних тверджень.

1 Імовірність того, що перша вийнята куля буде чорною, дорівнює ...

2 Якщо перша вийнята куля чорна, то ймовірність того, що друга куля чорна, дорівнює ...

3 Якщо перша вийнята куля чорна, то ймовірність того, що друга куля — біла, дорівнює ...

А 8/19

Б 11/19

В 12/19

Г 3/5

Д 1/2

28.34. Гральний кубик кидають 10 разів. Установити відповідність між подіями (1–3) та виразами (А–Д) для обчислення їх ймовірностей.

1 Рівно 4 рази випаде число «1»

2 Рівно 4 рази випаде парне число

3 Рівно 4 рази випаде число, кратне 3

А $C_{10}^4\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^6$

Б $C_{10}^4\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right)^6$

В $C_{10}^4\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{5}{6}\right)^6$

Г $C_{10}^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^6$

Д $C_{10}^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^6$

28.35. Ряд даних вибірки має вигляд: 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9. Установити відповідність між заданими статистичними характеристиками ряду даних (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 Розмах вибірки

2 Мода

3 Медіана

А 4

Б 5

В $5\frac{1}{3}$

Г 6

Д 7

Розв'яжіть завдання 28.36–28.51. Відповідь запишіть десятковим дробом.

28.36. У партії з 10 деталей 7 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед 6 взятих навмання деталей виявиться 4 стандартних.

28.37. Підкидають три гральні кубики. Знайти імовірність того, що добуток чисел, які випадуть на верхній грані, буде парним числом.

28.38. Імовірність того, що Петро розв'яже задачу, дорівнює 0,7, а ймовірність того, що задачу розв'яже Михайло, дорівнює 0,8. Знайти ймовірність того, що жоден з них не розв'яже задачу.

28.39. Два стрільці намагаються влучити в одну мішень. Імовірність влучення в мішень першим стрільцем дорівнює 0,6, а другим — 0,9. Знайти ймовірність того, що в мішень влучить тільки один з них.

28.40. У кожній із двох партій є 100 деталей. У першій партії є 5 бракованих деталей, а в другій — 4. Навмання вибирають по одній деталі з кожної партії. Яка ймовірність того, що хоча б одна деталь виявиться бракованою?

28.41. У конверті серед 100 карток є потрібна картка. З конверта навмання витягують 10 карток. Яка ймовірність того, що серед вибраних карток є потрібна?

28.42. **(ЗНО–2013)** В автобусному парку налічується n автобусів, шосту частину яких було обладнано інформаційними табло. Інформаційні табло встановили ще на 4 автобуси з наявних у парку. Після проведення переобладнання навмання вибирають один з n автобусів парку. Ймовірність того, що це буде автобус з інформаційним табло, становить 0,25. Визначити n. Уважати, що кожен автобус обладнується лише одним табло.

28.43. На деякій прямій узято 3 точки, а на паралельній до неї — 4 точки. Навмання вибирають 3 точки. Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що вони будуть вершинами трикутника.

28.44. В урні 10 куль. Скільки в урні білих куль, якщо ймовірність того, що 3 навмання вибрані кулі будуть білими, дорівнює $\frac{1}{6}$?

28.45. Імовірність хоча б одного влучення в ціль із чотирьох пострілів дорівнює 0,9984. Знайти ймовірність влучення у ціль одним пострілом.

28.46. Під час тестування з математики учень має відповісти на 5 запитань. Імовірність того, що він правильно відповість на одне запитання, дорівнює 0,8. Щоб скласти тест, учневі потрібно дати правильну відповідь не менше ніж на 3 запитання. Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що учень складе тест.

28.47. Монету кидають 6 разів. Знайти з точністю до 0,01 ймовірність того, що випаде більше разів «герб», ніж «число».

28.48. Два гравці по черзі кидають монету. Переможе той, у кого раніше з'явиться «герб». Знайти з точністю до 0,01 ймовірність виграшу для того, хто починає гру.

28.49. Імовірність виграшу в лотереї на кожен квиток дорівнює 0,5. Скільки найменше потрібно купити лотерейних квитків, щоб з імовірністю не менше ніж 0,999 отримати виграш принаймні по одному квитку?

28.50. Імовірність того, що в результаті чотирьох незалежних випробувань подія A настане хоча б один раз, дорівнює 0,8704. Знайти ймовірність ненастання події A за одного випробування, якщо вона під час усіх випробувань однакова.

28.51. Куб, усі грані якого пофарбовано, розрізали на 1000 однакових кубиків. Знайти ймовірність того, що взятий навмання кубик має: **1)** дві пофарбовані грані; **2)** одну пофарбовану грань.

ГЕОМЕТРІЯ

Тема 29. Найпростіші геометричні фігури на площині

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— застосовувати означення, ознаки та властивості елементарних геометричних фігур для розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту;

— знаходити довжини відрізків, градусні та радіанні міри кутів, площі геометричних фігур.

Точка та пряма. *Точка та пряма* — основні, неозначувані фігури на площині (рис. 1).

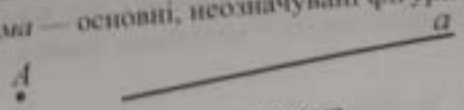


Рис. 1

Точки позначають великими буквами латинського алфавіту: A, B, C, D, … (рис. 2 а), а прямі — малими буквами латинського алфавіту: a, b, c, … або двома великими: NP, RS, KL, … (рис. 2 б).

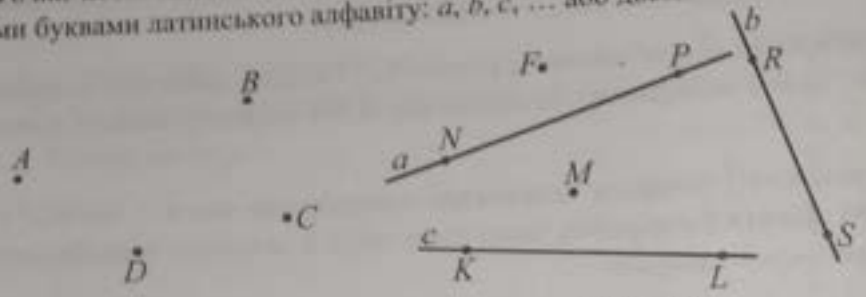


Рис. 2 а) **Рис. 2 б)**



Рис. 2 в)

Будь-яка пряма розбиває площину, в якій вона лежить, на дві частини, які називають *півплощинами*, межею яких є ця пряма (рис. 2 в).

Властивості належності точок і прямих площині

1. *Яка б не була пряма, існують точки, які належать цій прямій, і точки, які їй не належать.*

2. *Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.*

На рис. 3 точки A, C та K лежать на прямій, а точки B та M — не лежать на прямій a. Коротко це можна записати так: $A \in a$, $C \in a$, $K \in a$, $B \notin a$, $M \notin a$. Знак «$\in$» означає *належить*, а «$\notin$» — *не належить*.

Якщо дві прямі мають спільну точку, то вони перетинаються в цій точці (рис. 4). O — точка перетину прямих a і b. Дві прямі можуть перетинатися не більше ніж в одній точці.

Властивість розміщення точок на прямій

Із трьох будь-яких точок прямої одна й тільки одна точка лежить між двома іншими.

На рисунку 5 точка B лежить між точками T й E. Можна сказати також, що точки T й E лежать по різні боки від точки B або що точки B й E лежать з одного боку від точки T.

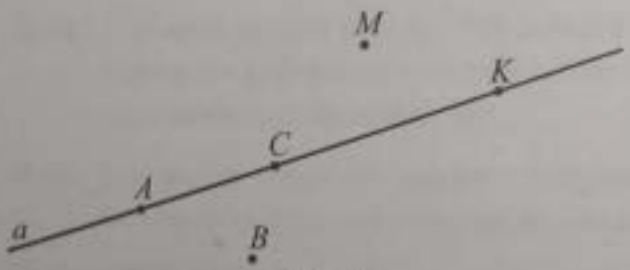


Рис. 3

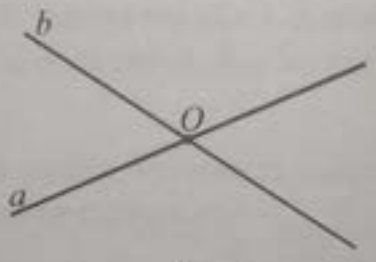


Рис. 4

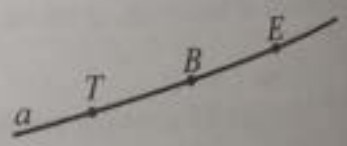


Рис. 5

Промінь. *Променем* називають частину прямої, що складається з точки на прямій, яку називають *початком променя*, а також з усіх точок прямої, які лежать з одного боку від указаної точки. Будь-яка точка прямої розбиває пряму на два промені (рис. 6).

Промінь, зазвичай, позначають двома великими латинськими літерами, перша з яких позначає початок променя, а друга — будь-яку іншу точку променя. На рисунку 7 промінь OP можна назвати променем OB, променем OK, променем OA.

Два промені, які мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називають *доповнювальними*. На рисунку 8 промені OB й OP — доповнювальні. Точка O є спільним початком цих променів.



Рис. 6

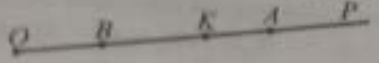


Рис. 7

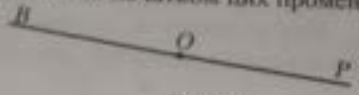


Рис. 8

Відрізок. *Відрізком* називають частину прямої, яка складається із двох точок на прямій та всіх її точок, що лежать між даними точками (рис. 9 а).

Згадувані дві точки називають *кінцями відрізка*. Інші точки відрізка називають його *внутрішніми точками*. Відрізок позначають двома великими латинськими літерами, якими позначено його кінці. Наприклад, на рисунку 9 б) зображено відрізок MN або NM.



Рис. 9 а)



Рис. 9 б)

Довжиною відрізка називають відстань між його кінцями.

Властивості вимірювання відрізків

1. *Довжина будь-якого відрізка — додатне число* (на рис. 10 довжина відрізка AB дорівнює 4 см).

2. *Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які його розбиває будь-яка його внутрішня точка* (на рис. 11 $AB = AC + CB$).

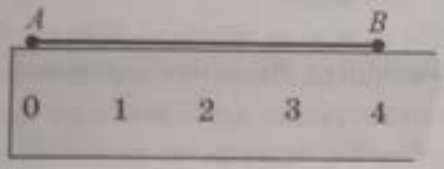


Рис. 10



Рис. 11

Щоб знайти відстань між точками A та B, потрібно виміряти довжину відрізка AB.

Точку, яка ділить відрізок на два відрізки рівної довжини, називають *серединою відрізка*. Наприклад, точка C на рис. 12 є серединою відрізка AB, бо $AC = 2{,}5$ см і $CB = 2{,}5$ см. Записують: $AC = CB$.

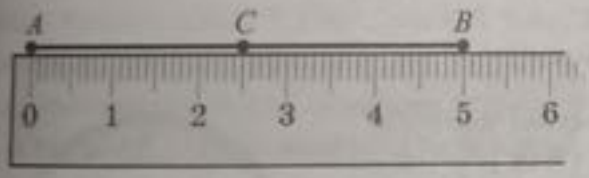


Рис. 12

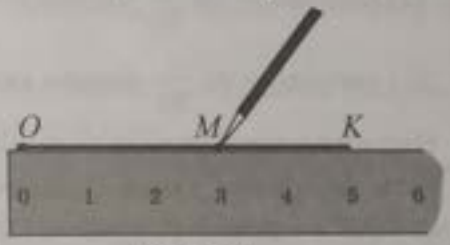


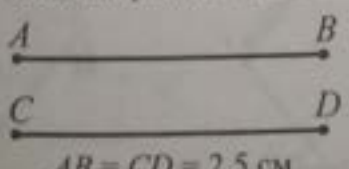
Рис. 13

Властивість відкладання відрізків. *На будь-якому промені від його початку завжди можна відкласти відрізок заданої довжини, і до того ж лише один.*

На рис. 13 показано, як на промені OK від його початку O відкладено відрізок OM завдовжки 3 см.

Відрізки називають *рівними*, якщо при накладанні вони суміщаються. Рівні відрізки мають однакові довжини, і навпаки, якщо довжини відрізків рівні, то рівні й самі відрізки (рис. 14).

Рівні відрізки позначають на рисунках однаковою кількістю рисок (засічок). На рисунку 15 зображено рівні між собою відрізки BM і DK та AO і CP.



$AB = CD = 2{,}5$ см

Рис. 14

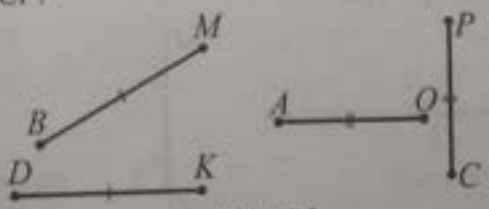


Рис. 15

Щоб установити, чи лежить точка C між точками A та B, потрібно перевірити правильність рівності $AB = AC + CB$ (рис. 16). Ця рівність виражає основну властивість вимірювання відрізків.

Щоб установити, чи лежать на одній прямій три точки A, B і C, потрібно переконатись у правильності однієї з рівностей: або $AB = AC + CB$, або $AC = AB + BC$, або $BC = BA + AC$ (рис. 16–18).

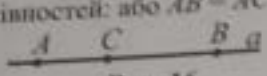


Рис. 16

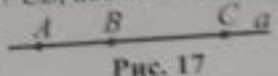


Рис. 17

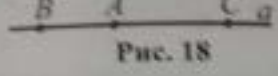


Рис. 18

Кут. Два промені (наприклад, OM і ON) зі спільним початком — точкою O — ділять площину на дві частини. На рисунку 19 ці частини зафарбовані по-різному.

Кутом називають частину площини, обмежену двома променями зі спільним початком. Промені OA й OB, або промені m і n, називають *сторонами кута*, а точку O — *вершиною кута* (рис. 20).

На рисунку 21 зображено два кути — кут 1 і кут 2. Чим вони відрізняються? Ми розглядатимемо лише ті кути, які містять будь-який відрізок з кінцями на його сторонах. На рис. 21 це кут 1.

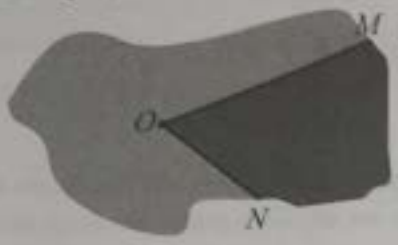


Рис. 19

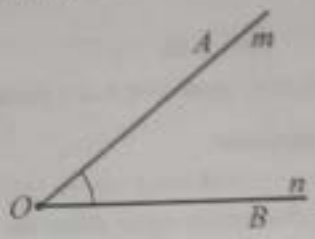


Рис. 20

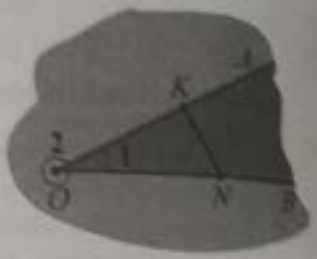


Рис. 21

Кут позначають або назвою його вершини, або назвою променів — його сторін, або назвою трьох точок: вершини і двох точок, які лежать на сторонах кута. Якщо кут позначають трьома буквами, то серединою в запису має бути буква, якою позначена вершина кута. Знак «$\angle$» заміняє слово *кут*. Записують: $\angle O$, $\angle AOB$, $\angle BOA$, $\angle(mn)$ (рис. 20). Кут також позначають маленькими буквами грецького алфавіту: α, β, γ тощо, тоді знак кута не пишуть. Кут можна позначати цифрами: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ тощо.

Є такі одиниці вимірювання кутів:

1) 1 градус. Записують 1°. У перекладі з латинської *«gradus»* означає *«ступінь, крок»*;

2) 1 хвилина — це $\frac{1}{60}$ частина градуса. Записують 1′;

3) 1 секунда — це $\frac{1}{60}$ частина хвилини. Записують 1″.

Наприклад, кут 6 градусів 7 хвилин і 9 секунд записують так: 6°7′9″.

Кути вимірюють також у радіанах (1 радіан ≈ 57°18′); у градах (1 град = 0,9°); у румбах (1 румб ≈ 11,29°).

Кути вимірюють транспортиром. Так, на рис. 22 $\angle ACK = 45°$.



Рис. 22

Види кутів

Кут, сторони якого є доповняльними променями, називають *розгорнутим*. На рис. 23 кут KOC — розгорнутий. $\angle KOC = 180°$.

Кут, який дорівнює 90°, називають *прямим* (рис. 24). $\angle MOD$ — прямий, $\angle MOD = 90°$.

Кут, менший від прямого, називають *гострим* (рис. 25). $\angle AOK$ — гострий, $\angle AOK < 90°$.

Кут, більший від прямого, але менший від розгорнутого, називають *тупим* (рис. 26). $\angle MDK$ — тупий, $90° < \angle MDK < 180°$.

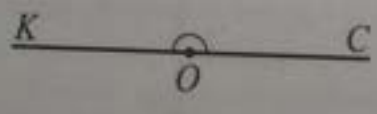


Рис. 23

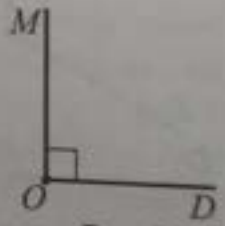
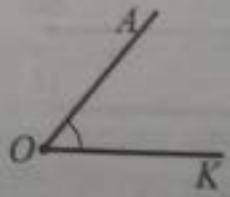
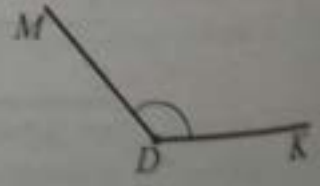


Рис. 24





Кути називатимемо *рівними*, якщо вони при накладанні суміщаються. Кути порівнюють за їхніми градусними мірами. Рівні кути мають однакові градусні міри, і навпаки, якщо градусні міри кутів однакові, то й кути рівні. Наприклад, якщо $\angle NOZ = 65°$, $\angle LFR = 65°$, то $\angle NOZ = \angle LFR$. Рівні кути позначають на рисунку однаковою кількістю «засічок». На рис. 27 $\angle ABC = \angle MDK$, $\angle FMN = \angle LOZ$.

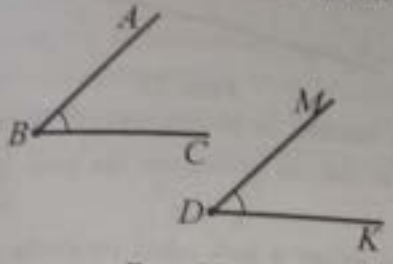


Рис. 27 а)

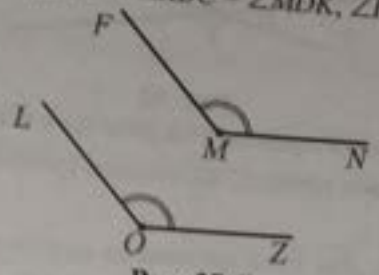


Рис. 27 б)

Вважають, що промінь проходить між сторонами кута, якщо він виходить з вершини цього кута, належить цьому куту і не збігається з жодною з його сторін. На рис. 28 а) промінь OB проходить між сторонами кута AOC, а на рисунку 28 б) промінь LP проходить між сторонами кута KLM.

Промінь, який проходить між сторонами кута, ділить його на два кути. Наприклад, на рис. 28 а) промінь OB ділить кут AOC на два кути: AOB і BOC.

Бісектрисою кута називають промінь, який проходить між сторонами кута і ділить його навпіл. На рис. 29 OC — бісектриса кута AOB, бо $\angle AOC = \angle COB$.

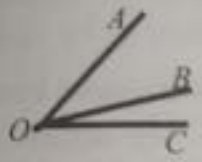


Рис. 28 а)

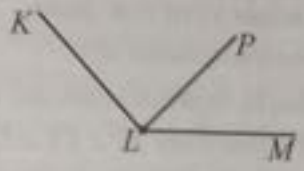


Рис. 28 б)

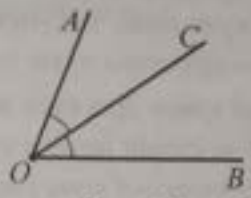


Рис. 29

Властивості вимірювання кутів

1. *Кожен кут має певну градусну міру, більшу від нуля.*

2. *Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які його ділить будь-який промінь, що проходить між його сторонами.*

Щоб установити, чи проходить промінь OB між сторонами кута AOC, достатньо перевірити правильність рівності $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$ (рис. 28 а).

Властивість відкладання кутів. *Від будь-якого променя в один бік від нього (або ще кажуть: «у задану півплощину») можна відкласти тільки один кут даної градусної міри.*

На рисунках 30 а), б) показано, як за допомогою транспортира та лінійки від променя OP в один бік від нього можна відкласти кут KOP, який дорівнює 85°.

На рисунку 31 від променя OC відкладено кут AOC в одну півплощину, а кут BOC такої ж градусної міри — в іншу півплощину.

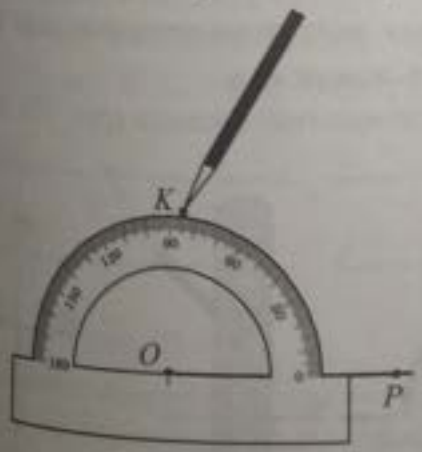


Рис. 30 а)

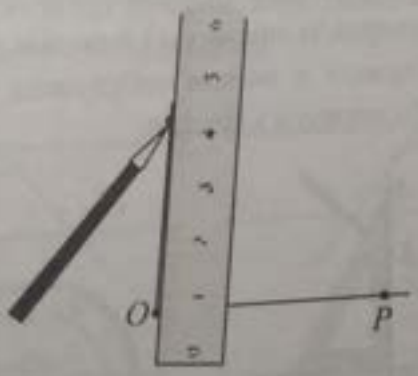


Рис. 30 б)

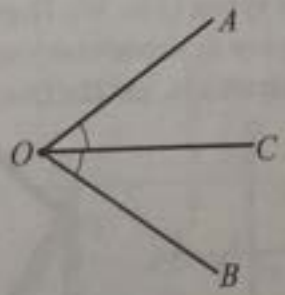


Рис. 31

Розміщення прямих на площині

Прямі на площині можуть або перетинатися (рис. 32), або не перетинатися (рис. 33).

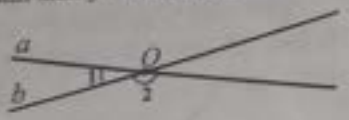


Рис. 32

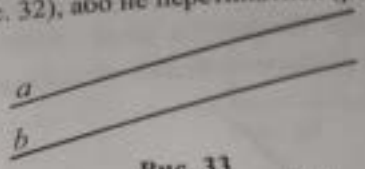


Рис. 33

При перетині двох прямих утворюються 4 кути, менші за розгорнутий. Менший з кутів, утворених при перетині двох прямих, називають *кутом між двома прямими*. На рис. 32 $\angle 1$ — кут між прямими a і b.

Суміжні кути. Два кути називають *суміжними*, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші — доповняльні промені. На рис. 34 $\angle AOC$ і $\angle BOC$ — суміжні.

Теорема. *Сума суміжних кутів дорівнює 180°.*

Наприклад, кути AOC й BOC — суміжні (рис. 34). Тоді $\angle AOC + \angle COB = 180°$.

Наслідки з теореми про суміжні кути.

З теореми про суміжні кути випливають такі наслідки:

1) якщо один із суміжних кутів гострий, то інший тупий і навпаки;

2) якщо два суміжні кути рівні, то вони прямі;

3) якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути теж рівні;

4) бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут.

Вертикальні кути. Два кути називають *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями до сторін іншого кута. На рисунку 35 $\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$ — вертикальні.

Теорема. *Вертикальні кути рівні.*

Наприклад, кути AOC й BOD — вертикальні (рис. 35). Тоді $\angle AOC = \angle BOD$.

Наслідки з теореми про вертикальні кути:

1) якщо два кути рівні, то й вертикальні з ними кути теж рівні;

2) бісектриси вертикальних кутів утворюють розгорнутий кут.

При перетині двох прямих (рис. 35) утворюються дві пари вертикальних кутів — $\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$, і чотири пари суміжних кутів — $\angle 1$ і $\angle 2$, $\angle 2$ і $\angle 3$, $\angle 3$ і $\angle 4$, $\angle 1$ і $\angle 4$.

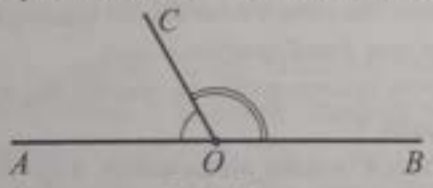


Рис. 34

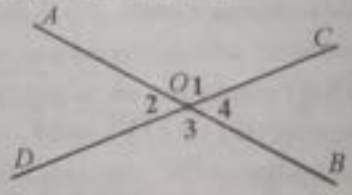


Рис. 35

Перпендикулярні прямі. Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом (рис. 36). Перпендикулярність прямих a і b позначають знаком «$\perp$».

Пряму b, перпендикулярну до прямої a, можна побудувати за допомогою косинця (рис. 37), або транспортира та лінійки (рис. 38), або циркуля і лінійки.

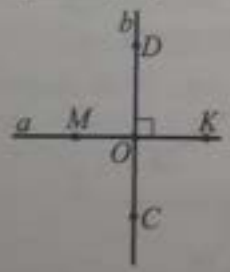


Рис. 36

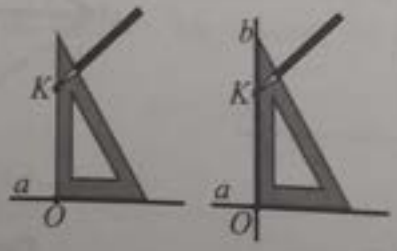


Рис. 37

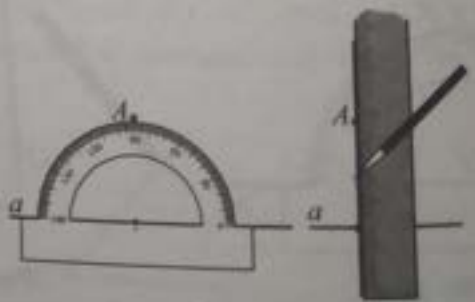


Рис. 38

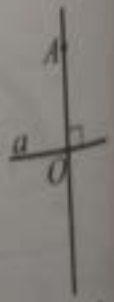


Рис. 39

Перпендикуляром до даної прямої називають відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, один з кінців якого належить даній прямій. На рис. 39 AO — перпендикуляр до прямої a.

Довжину перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної прямої, називають відстанню від даної точки до даної прямої. Відрізок AO — найкоротший з усіх відрізків, які сполучають точку A з точками прямої a (рис. 39).

Теорема (про єдиність перпендикулярної прямої). *Через будь-яку точку прямої можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної прямої.*

Наприклад, нехай маємо пряму AC і точку O на ній. Побудуємо $BO \perp AC$ (рис. 40). Тоді пряма BO, яка проходить через точку O і перпендикулярна до прямої AC, — єдина.

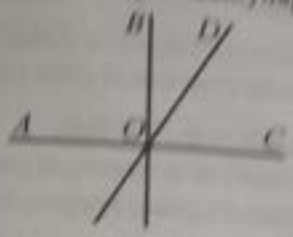


Рис. 40



Рис. 41

Пряму, яка перетинає дві дані прямі, називають їх *січною*.

При перетині прямих a та b січною c утворюються такі види кутів (див. рис. 41):

$\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ — внутрішні кути; $\angle 5, \angle 6, \angle 7, \angle 8$ — зовнішні кути;

$\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$ — пари внутрішніх різносторонніх кутів;

$\angle 1$ і $\angle 4$, $\angle 2$ і $\angle 3$ — пари внутрішніх односторонніх кутів;

$\angle 5$ і $\angle 7$, $\angle 6$ і $\angle 8$ — пари зовнішніх різносторонніх кутів;

$\angle 5$ і $\angle 8$, $\angle 6$ і $\angle 7$ — пари зовнішніх односторонніх кутів;

$\angle 4$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 6$; $\angle 1$ і $\angle 8$, $\angle 2$ і $\angle 7$ — пари відповідних кутів.

Паралельні прямі. Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються (рис. 33). Паралельність прямих позначають знаком «$\parallel$». Записують: $a \parallel b$.

Ознаки паралельності прямих

1-ша ознака паралельності прямих. Якщо при перетині двох прямих третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні.

На рис. 42 прямі a і b перетнуті січною c, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Тоді прямі a та b паралельні.

2-га ознака паралельності прямих. Якщо при перетині двох прямих третьою внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.

На рис. 43 прямі a і b перетнуті січною c, $\angle 1 = \angle 2$. Тоді прямі a і b — паралельні.

3-тя ознака паралельності прямих. Якщо при перетині двох прямих третьою відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

На рис. 44 прямі a і b перетнуті січною c, $\angle 1 = \angle 2$. Тоді прямі a і b — паралельні.

4-та ознака паралельності прямих. Якщо дві прямі перпендикулярні до третьої, то вони паралельні.

На рис. 45 $a \perp c$, $b \perp c$. Тоді прямі a і b — паралельні.

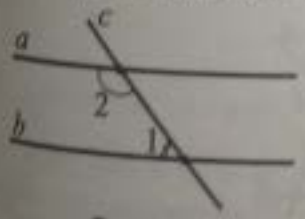


Рис. 42

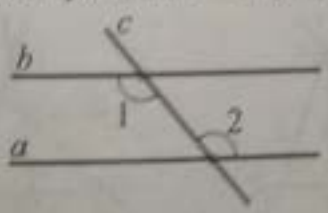


Рис. 43

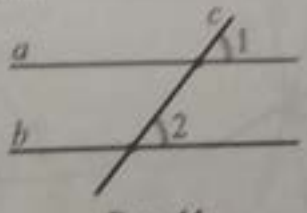


Рис. 44

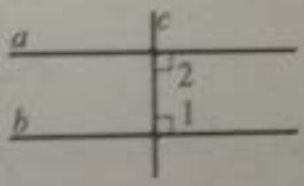


Рис. 45

Властивості паралельних прямих

1-ша властивість паралельних прямих. Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

На рис. 42 $a \parallel b$, c — січна, кути 1 і 2 — внутрішні односторонні. Тоді $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

2-га властивість паралельних прямих. Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою, то внутрішні різносторонні кути рівні.

На рис. 43 $a \parallel b$, c — січна, кути 1 і 2 — внутрішні різносторонні. Тоді $\angle 1 = \angle 2$.

3-тя властивість паралельних прямих. Якщо дві паралельні прямі перетнуті третьою, то відповідні кути рівні.

На рис. 44 $a \parallel b$, c — січна, кути 1 і 2 — відповідні. Тоді $\angle 1 = \angle 2$.

4-та властивість паралельних прямих. Якщо пряма перпендикулярна до однієї із двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна й до іншої прямої.

На рис. 45 $a \parallel b$, $c \perp a$. Тоді $c \perp b$.

Теорема Фалеса. *Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на іншій його стороні.*

На рис. 46: якщо $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, то $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.

Теорема Фалеса буде справедливою й у випадку, якщо замість сторін кута взяти дві довільні прямі.

Наприклад, якщо на прямій a взяти рівні відрізки і через їх кінці провести паралельні прямі, то і на прямій b одержимо рівні відрізки (рис. 47).

Узагальнена теорема Фалеса. *Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.* Наприклад, на рис. 48, якщо $FD \parallel AK$, то $\frac{BF}{FA} = \frac{BD}{DK}$ або $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

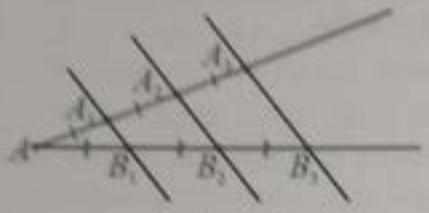


Рис. 46

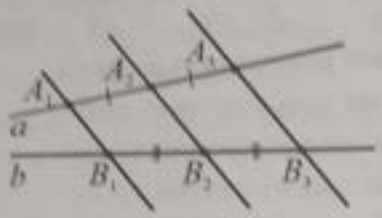


Рис. 47

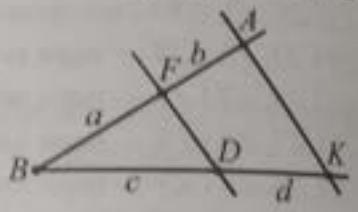


Рис. 48

Відрізок x називають середнім пропорційним відрізків a і b, якщо виконується рівність $a : x = x : b$, звідки $x^2 = ab$. Отже, квадрат середнього пропорційного двох відрізків дорівнює їх добутку.

Приклад 1. Дано п'ять точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Через кожні дві точки проведено пряму. Скільки прямих проведено?

А	Б	В	Г	Д
5	20	10	40	4

■ Через кожну з даних п'яти точок можна провести чотири прямі, що проходять через кожну з інших даних точок. Загальна кількість прямих дорівнює $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$, оскільки кожну з прямих порахо-вано двічі. *Відповідь.* В. ■

Приклад 2. Провести чотири прямі, кожні дві з яких перетинаються. Скільки точок перетину може утворитися?

■ Може утворитися одна (рис. 49), чотири (рис. 50), шість (рис. 51) точок перетину. ■

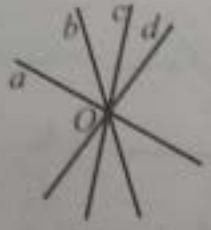


Рис. 49

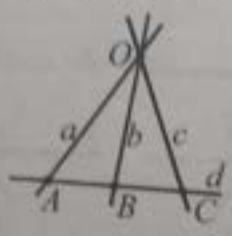


Рис. 50

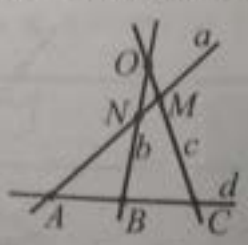


Рис. 51

Приклад 3. Назвати всі промені, зображені на рисунку 52. Які з них є доповняльними?

■ На рисунку 52 зображено промені CA, CB, KA, KB, FA, FB. Доповняльними є промені CA і CB, KA і KB, FA і FB. ■

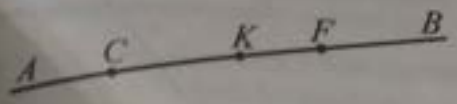


Рис. 52

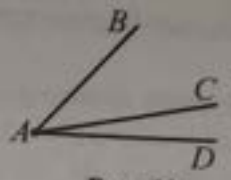


Рис. 53

Приклад 4. Промінь AC проходить між сторонами кута BAD, який дорівнює 72° (рис. 53). Чому дорівнює кут BAC, якщо він у 5 разів більший за кут CAD?

■ Оскільки промінь AC проходить між сторонами кута BAD, то за властивістю вимірювання кутів $\angle BAC + \angle CAD = \angle BAD = 72°$. Нехай $\angle CAD = x$, тоді $\angle BAC = 5x$. Складемо й розв'яжемо рівняння: $x + 5x = 72°$; $6x = 72°$; $x = 12°$. Тоді $5x = 60°$. Отже, $\angle BAC = 60°$. *Відповідь.* 60°. ■

Приклад 5. Точка K ділить відрізок MT завдовжки 35 см на частини, різниця яких дорівнює 13 см. Знайти довжину кожної частини.

■ За властивістю вимірювання відрізків $MK + KT = MT$ (рис. 54). Нехай MK дорівнює x см, тоді KT дорівнюватиме $(x + 13)$ см. Складемо й розв'яжемо рівняння: $x + x + 13 = 35$; $2x = 22$; $x = 11$. Тоді $x + 13 = 11 + 13 = 24$. Отже, $MK = 11$ см, $KT = 24$ см. *Відповідь.* 11 см, 24 см. ■

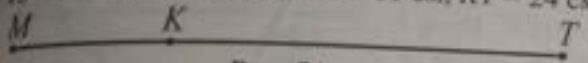


Рис. 54

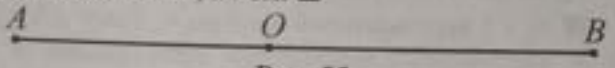


Рис. 55

Приклад 6. Точка O належить відрізку AB. Знайти довжини відрізків AO й OB, якщо вони відносяться як 3 : 4, а $AB = 49$ см.

■ За властивістю вимірювання відрізків $AB = AO + OB$ (рис. 55). Нехай $AO = 3x$, тоді OB — $4x$. Складемо й розв'яжемо рівняння: $3x + 4x = 49$ см; $7x = 49$ см; $x = 7$ см; $3x = 21$ см; $4x = 28$ см . Отже, $AO = 21$ см; $OB = 28$ см. *Відповідь.* 21 см, 28 см. ■

Приклад 7. Із двох пунктів L і N прийшли в пункт P два туристи. Відстань, пройдена першим туристом, дорівнює 9,7 км, а відстань, пройдена другим туристом, — 8,3 км. Якою може бути відстань LN, якщо пункти L, N і P розміщені на одній прямій?

■ Розглянемо два випадки.

1-й випадок

Пункт P лежить між пунктами L і N (рис. 56). Тоді $LN = LP + PN$, тому $LN = 9,7 + 8,3 = 18$ (км).



Рис. 56

2-й випадок

Пункт P не лежить між пунктами L і N. Тоді можливим є лише випадок, що пункт N лежить між пунктами L і P (рис. 57). Отже, $LP = LN + NP$, звідси $LN = LP - NP$, $LN = 9,7 - 8,3 = 1,4$ (км).

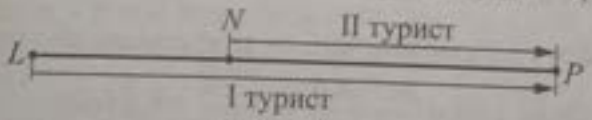


Рис. 57

Відповідь. 18 км або 1,4 км. ■

Приклад 8. Сума двох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 270°. Під яким кутом перетинаються ці прямі?

■ Будь-які два нерозгорнуті кути, що утворюються при перетині двох прямих, або суміжні, або вертикальні. Оскільки сума даних кутів не дорівнює 180°, то вони вертикальні. Кожен з них дорівнює $270° : 2 = 135°$. Оскільки за кут між прямими, що перетинаються, приймають менший з утворених кутів, то прямі перетинаються під кутом $180° - 135° = 45°$.

Відповідь. 45°. ■

Приклад 9. На рисунку 58 $\angle 1 = 52°$, $\angle 2 = 128°$, $\angle 3 = 110°$. Знайти $\angle 4$.

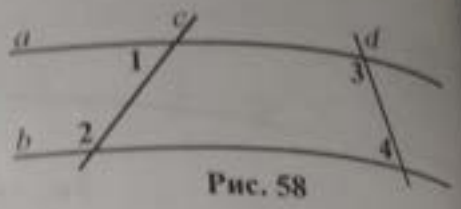


Рис. 58

■ $\angle 1$ і $\angle 2$ — внутрішні односторонні при прямих a та b і січній c. Оскільки $\angle 1 + \angle 2 = 52° + 128° = 180°$, то за 1-ою ознакою паралельності прямих $a \parallel b$. $\angle 3$ і $\angle 4$ — внутрішні односторонні при паралельних прямих a та b і січній d.

Тому $\angle 3 + \angle 4 = 180°$, звідки $\angle 4 = 180° - \angle 3 = 180° - 110° = 70°$. *Відповідь.* 70°. ■

Приклад 10. Кути DOC і KOC — суміжні, промінь OA — бісектриса кута DOC, кут KOC на 33° менший за кут AOC. Знайти кути DOC і KOC.

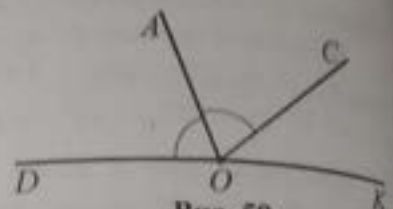


Рис. 59

■ Нехай $\angle KOC = x$ (рис. 59), тоді $\angle AOC = x + 33°$, а $\angle DOC = 2\angle AOC$, оскільки OA — бісектриса. За теоремою про суміжні кути $\angle DOC + \angle KOC = 180°$, тому $2\angle AOC + \angle KOC = 180°$. Складемо і розв'яжемо рівняння: $2(x + 33°) + x = 180°$; $3x = 114°$; $x = 38°$.

Отже, $\angle KOC = 38°$, $\angle DOC = 180° - 38° = 142°$. *Відповідь.* 142°, 38°. ■

Приклад 11. За рисунком 60 знайти кут 2.

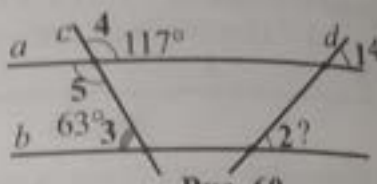


Рис. 60

■ Кут 5 вертикальний з кутом 4. Тому $\angle 5 = \angle 4 = 117°$. Кути 5 і 3 — внутрішні односторонні при прямих a і b та січній c. $\angle 5 + \angle 3 = 117° + 63° = 180°$. Отже, за ознакою паралельності прямих, $a \parallel b$. Кути 1 і 2 — відповідні при паралельних прямих a і b та січній d: $\angle 2 = \angle 1 = 45°$ (як відповідні). *Відповідь.* 45°. ■

Приклад 12. Знайти градусні міри кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, якщо сума трьох з них дорівнює 303°. Скільки розв'язків має задача?

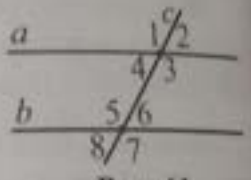


Рис. 61

■ Нехай $\angle 1 = \alpha$, $\angle 2 = \beta$ (рис. 61). Тоді $\angle 1 = \angle 3$ (як вертикальні); $\angle 3 = \angle 5$ (як внутрішні різносторонні); $\angle 5 = \angle 7$ (як вертикальні).

Отже, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = \alpha$. Аналогічно $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = \beta$.

Розглянемо два випадки.

1-й випадок. $2\alpha + \beta = 303°$. За теоремою про суміжні кути $\alpha + \beta = 180°$, $2\alpha + \beta = \alpha + (\alpha + \beta)$; $\alpha = 2\alpha + \beta - (\alpha + \beta)$. Отже, $\alpha = 303° - 180°$; $\alpha = 123°$. Тоді $\beta = 180° - \alpha = 180° - 123° = 57°$.

Отже, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 123°$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 57°$.

2-й випадок. $3\alpha = 303°$, $\alpha = 303° : 3 = 101°$. Тоді $\beta = 180° - \alpha = 180° - 101° = 79°$.

Отже, $\angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 101°$, $\angle 2 = \angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 79°$.

Відповідь. 123°, 57°, 123°, 57°, 123°, 57°, 123°, 57° або 101°, 79°, 101°, 79°, 101°, 79°, 101°, 79° — два розв'язки. ■

Приклад 13. На рисунку 62 $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$. Знайти довжину відрізка AB, якщо $BC = 12$ см, $A_1B_1 = 8$ см, $B_1C_1 = 10$ см.

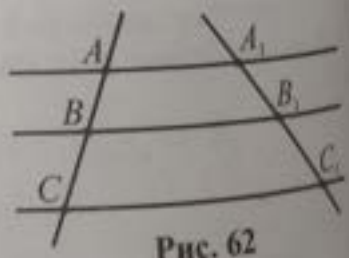


Рис. 62

■ Оскільки прямі AA_1, BB_1 і CC_1 паралельні, то за узагальненою теоремою Фалеса $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$. Отже, $AB = \frac{BC \cdot A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{12 \cdot 8}{10} = 9{,}6$ (см).

Відповідь. 9,6 см. ■

Приклад 14. На рис. 63 $DK \parallel AC$, $\frac{MD}{AD} = \frac{7}{3}$, $MC = 30$ см. Знайти KC (у см).

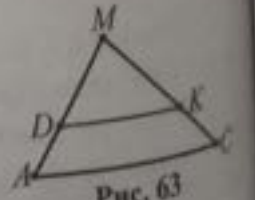


Рис. 63

■ Оскільки $DK \parallel AC$, то за теоремою про пропорційні відрізки одержимо: $\frac{MK}{KC} = \frac{MD}{AD} = \frac{7}{3}$. Нехай $MK = 7x$, тоді $KC = 3x$. За властивістю вимірювання відрізків маємо: $MC = MK + KC$. Складемо і розв'яжемо рівняння: $7x + 3x = 30$ см; $10x = 30$ см; $x = 3$ см; $3x = 9$ см. Отже, $KC = 9$ см. *Відповідь.* 9. ■

Завдання 29.1–29.19 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

29.1. Дано чотири точки, жодні три з яких не лежать на одній прямій. Через кожні дві точки проведено пряму. Скільки прямих проведено?

А	Б	В	Г	Д
Три	чотири	п'ять	шість	вісім

29.2. На прямій позначено чотири точки. Скільки утворилося променів з початком у цих точках?

А Чотири Б п'ять В шість Г сім Д вісім

29.3. На прямій позначено чотири точки. Скільки всього утворилося відрізків з кінцями у цих точках?

А Три Б чотири В шість Г сім Д вісім

29.4. Точка C лежить між точками A та B. Указати спільну частину променів AB та BC.

А Відрізок BC Б відрізок AB В промінь AB Г точка B Д $\varnothing$

29.5. На відрізку AB позначено точку M таку, що $AM = 5$ см, $MB = 15$ см. Знайти відношення $AM : AB$.

А $\frac{1}{4}$ Б $\frac{1}{3}$ В $\frac{1}{2}$ Г $\frac{1}{5}$ Д $\frac{1}{6}$

29.6. На відрізку MK завдовжки 26 см вибрано точку O. Знайти відстань між точками M та O, якщо вона на 12 см більша за відстань між точками O та K.

А 7 см Б 13 см В 12 см Г 19 см Д 14 см

29.7. На відрізку AB завдовжки 20 см позначено точки C та D такі, що $AC = 15$ см, $BD = 17$ см. Знайти довжину відрізка CD.



А 10,5 см Б 12,5 см В 14 см Г 18 см Д 12 см

29.8. Який кут утворюють стрілки годинника о 16 годині?

А 100° Б 110° В 120° Г 130° Д 150°

29.9. Між сторонами кута AOB проведено промінь OC так, що $\angle AOC = 2\angle BOC$. Знайти кут AOC, якщо $\angle AOB = 54°$.

А 9° Б 18° В 27° Г 36° Д 40°

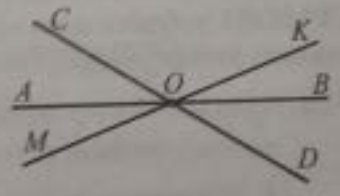
29.10. Бісектриса кута A утворює з його стороною кут, що дорівнює 30°. Знайти кут, суміжний з кутом A.

А 150° Б 120° В 165° Г 140° Д 170°

29.11. Сума двох кутів, суміжних з кутом B, дорівнює 80°. Знайти кут B.

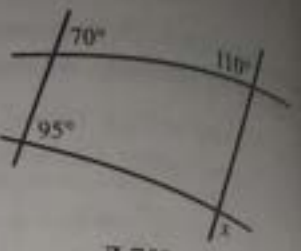
А 50° Б 100° В 80° Г 70° Д 140°

29.12. На рисунку прямі AB, CD і MK перетинаються у точці O. Знайти кут BOK, якщо $\angle AOC = 30°$, $\angle MOD = 110°$.



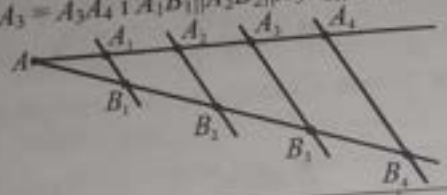
А 70° Б 60° В 20° Г 40° Д 50°

29.13. За даними рисунка знайти градусну міру кута x.



А 70° **Б** 95° **В** 110° **Г** 85° **Д** 75°

29.14. На рисунку $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$ і $A_1B_1 \| A_2B_2 \| A_3B_3 \| A_4B_4$. Знайти AB_2, якщо $B_1B_4 = 24$ см.



А	Б	В	Г	Д
12 см	8 см	16 см	18 см	визначити неможливо

29.15. Точка C належить відрізку AB завдовжки 9 см. Знайти довжину відрізка BC, якщо $4AC + 3BC = 32$ см.

А 6 см **Б** 5 см **В** 4 см **Г** 3 см **Д** 7 см

29.16. Відрізок завдовжки 72 см поділили на 6 рівних частин. Знайти відстань між серединами крайніх частин.

А 62,5 см **Б** 60,6 см **В** 58,6 см **Г** 63 см **Д** 60 см

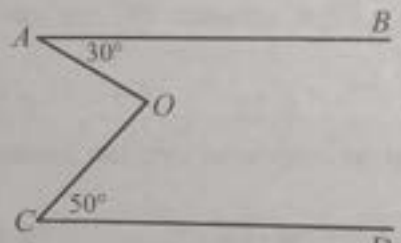
29.17. Промінь OD ділить прямий кут AOB на кути AOD і BOD так, що виконується рівність $4\angle AOD + 3\angle BOD = 280°$. Знайти градусну міру кута AOD.

А 10° **Б** 20° **В** 30° **Г** 70° **Д** 80°

29.18. Який кут утворюють стрілки годинника о 15 годині 30 хвилин?

А 80° **Б** 70° **В** 65° **Г** 75° **Д** 85°

29.19. На рисунку прямі AB і CD — паралельні. Знайти градусну міру кута AOC, якщо $\angle BAO = 30°$, $\angle OCD = 50°$.



А	Б	В	Г	Д
30°	50°	80°	100°	визначити неможливо

Завдання 29.20–29.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

29.20. Точки A, B та C лежать на одній прямій. Установити відповідність між характерними властивостями множин (1–3) та фігурами (А–Д).

1 Множина всіх точок прямої, що лежать разом з точкою B між точками A та C

2 Множина всіх точок прямої, які лежать з точкою C по один бік від точки A

3 Множина всіх точок прямої, які лежать з точкою A по один бік від точки C

А Промінь CA
Б Відрізок BC
В Відрізок AB
Г Відрізок AC
Д Промінь AC

29.21. Установити відповідність між рівностями (1–3) та розміщенням точок на площині (А–Д).

1 $AC = 7$ см, $BC = 3$ см, $AB = 10$ см

2 $AC = 7$ см, $BC = 3$ см, $AB = 9$ см

3 $AC = 12$ см, $BC = 4$ см, $AB = 8$ см

А Точка B лежить між точками A та C

Б Точка A лежить між точками B та C

В Жодна з точок A, B та C не лежить між двома іншими

Г Точка C лежить між точками A та B

Д Кожна з точок A, B та C лежить на прямій між двома іншими

29.22. З точки A проведено промені AB, AC та AD. Установити відповідність між градусними мірами утворених кутів (1–3) та розміщеннями променів (А–Д).

1 $\angle BAC = 30°$, $\angle BAD = 70°$, $\angle CAD = 40°$

2 $\angle BAC = 30°$, $\angle BAD = 70°$, $\angle CAD = 100°$

3 $\angle BAD = \angle BAC - \angle CAD$

А Промінь AD проходить між сторонами кута BAC

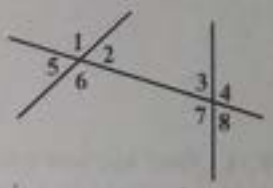
Б Жоден з променів не проходить між сторонами кута, утвореного двома іншими променями

В Промінь AB проходить між сторонами кута CAD

Г Промінь AC проходить між сторонами кута BAD

Д Кожен з променів проходить між сторонами кута, утвореного двома іншими променями

29.23. Установити відповідність між парами кутів (1–3), зображеними на рисунку, та їх назвами (А–Д).



1 $\angle 1$ і $\angle 4$

2 $\angle 6$ і $\angle 8$

3 $\angle 6$ і $\angle 7$

А Внутрішні односторонні

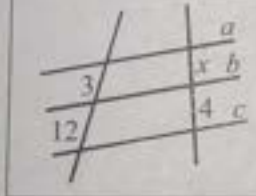
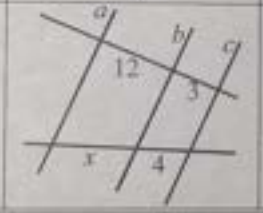
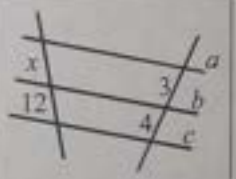
Б Внутрішні різносторонні

В Відповідні

Г Зовнішні односторонні

Д Зовнішні різносторонні

29.24. Установити відповідність між рисунками (1–3) та довжинами відрізків x на них, якщо прямі a, b та c — паралельні (А–Д).

1	2	3
		

А	Б	В	Г	Д
12	9	36	16	1

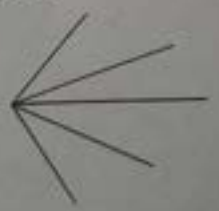
Розв'яжіть завдання 29.25–29.34. Відповідь запишіть десятковим дробом.

29.25. На прямій позначили п'ять точок.

1) Скільки всього відрізків утворилося? **2)** Скільки всього променів утворилося?

29.26. Відрізок завдовжки 24 см поділили на чотири нерівні відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 20 см. Знайти відстань між серединами середніх відрізків.

29.27. Скільки кутів, менших за розгорнутий, зображено на рисунку?



29.28. З даної точки проведено три промені так, що будь-які два кути, утворені цими променями, рівні. Яка градусна міра кожного з цих кутів?

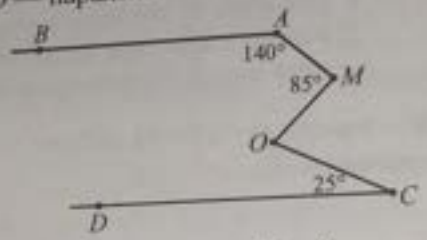
29.29. Різниця двох суміжних кутів менша за їхню суму на 20°. Знайти градусну міру меншого з цих кутів.

29.30. Один з кутів, що утворилися в результаті перетину двох прямих, дорівнює сумі двох інших кутів. Знайти градусну міру кута між прямими.

29.31. Через точку перетину двох перпендикулярних прямих проведено третю пряму. Знайти найменший з тупих кутів, що утворився в результаті перетину, якщо найбільший з кутів дорівнює 165°. Записати його градусну міру.

29.32. Знайти градусну міру кута, під яким січна перетинає паралельні прямі, якщо різниця внутрішніх односторонніх кутів відноситься до їх суми як 2 : 3.

29.33. На рисунку прямі AB та CD — паралельні. Знайти градусну міру кута MOC.



29.34. Який кут утворюють стрілки годинника о 9 год 15 хв?

Тема 30. Трикутник

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:
— застосовувати означення, ознаки та властивості елементарних геометричних фігур для розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту;
— знаходити довжини відрізків, градусні та радіанні міри кутів, площі геометричних фігур;
— використовувати формули площ геометричних фігур для розв'язування планіметричних задач і задач практичного змісту;
— відношення площ подібних трикутників.

Означення трикутника. Елементи трикутника

Трикутником називають геометричну фігуру, яка складається із трьох точок, що не лежать на одній прямій, трьох відрізків, які сполучають ці точки, й обмеженої ними частини площини (рис. 1).

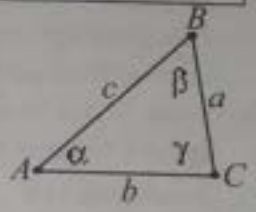


Рис. 1

Точки A, B і C називають *вершинами*, а відрізки AB, BC і AC — *сторонами* трикутника. Трикутник, зображений на рис. 1, позначають так: ΔABC.

Кути ABC, BAC, ACB — *кути* трикутника ABC. Їх можна позначати й однією буквою: $\angle B$, $\angle A$, $\angle C$.

Сторони трикутника ABC можна позначати маленькими буквами a, b і c, а кути — α, β і γ. При цьому дотримуються такого порядку: проти кута A (або α) лежить сторона BC (або a); проти кута B (або β) лежить сторона AC (або b); проти кута C (або γ) лежить сторона AB (або c).

Кут B називають кутом, протилежним до сторони AC, а кути A і C — прилеглими до цієї сторони.

Периметр трикутника. Суму довжин усіх сторін трикутника називають його *периметром*:

$$P = a + b + c.$$

Види трикутників.

1. Трикутник, у якого всі сторони мають різні довжини, називають *різностороннім* (рис. 2). Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають *рівнобедреним*. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю його сторону — *основою* (рис. 3). Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають *рівностороннім* (рис. 4).

Різносторонній ($ZS \neq SQ \neq ZQ$)



Рис. 2

Рівнобедрений ($ZD = ZN$)



Рис. 3

Рівносторонній ($CD = DF = CF$)

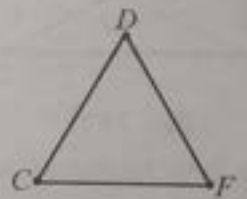


Рис. 4

2. *Гострокутним* називають трикутник, у якого всі кути гострі (рис. 5). *Прямокутним* називають трикутник, у якого один з кутів є прямим (рис. 6). *Тупокутним* називають трикутник, у якого один з кутів є тупим (рис. 7).

Гострокутний (кути менші 90°)

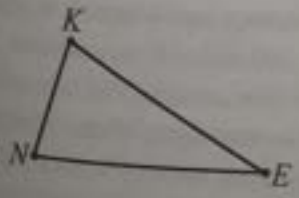


Рис. 5

Прямокутний ($\angle C = 90°$)

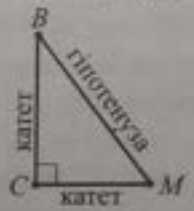


Рис. 6

Тупокутний ($\angle D > 90°$)

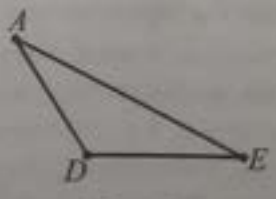


Рис. 7

Властивості сторін і кутів

Будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін і більша за їх різницю:

$$|c - b| < a < c + b.$$

Щоб перевірити, чи можна з трьох відрізків a, b і c утворити трикутник, досить перевірити, чи буде найдовший з цих відрізків меншим від суми двох інших.

Проти більшої сторони трикутника лежить більший кут: якщо $b > a$, то $\beta > \alpha$; і навпаки, якщо $\beta > \alpha$, то $b > a$; а також, якщо $a = b$, то $\alpha = \beta$.

Теорема. *Сума кутів трикутника дорівнює 180°.*

З теореми про суму кутів трикутника випливають такі наслідки:

1) трикутник може мати лише один прямий або тупий кут. Якщо один з кутів трикутника прямий або тупий, то два інші кути — гострі;

2) сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Зовнішній кут

Кут, суміжний з кутом трикутника, називають *зовнішнім кутом* трикутника. При кожній вершині є два зовнішніх кути.

Наприклад, при вершині A зовнішніми є кути 1 і 4.

Сума зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360°$ (рис. 8).

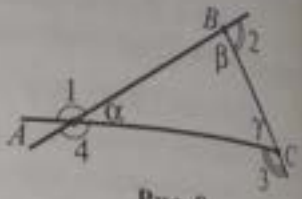


Рис. 8

Теорема. *Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.*

На рис. 8 $\angle 1$, $\angle 2$ і $\angle 3$ — зовнішні кути трикутника ABC. Тоді $\angle 1 = \gamma + \beta$; $\angle 2 = \alpha + \gamma$; $\angle 3 = \alpha + \beta$.

Медіани трикутника. *Медіаною* трикутника називають відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

На рис. 9 $CK = KB$, AK — медіана.

Кожен трикутник — гострокутний, прямокутний і тупокутний — має три медіани. Медіани будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, яка міститься усередині трикутника (рис. 10).

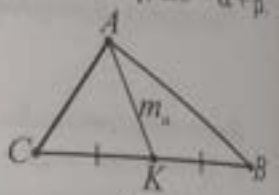


Рис. 9



Рис. 10 а)



Рис. 10 б)

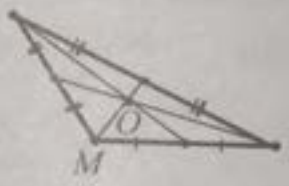


Рис. 10 в)

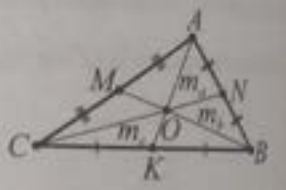


Рис. 11

Медіани, проведені до сторін a, b і c, відповідно позначають так: m_a, m_b і m_c (рис. 11).

Медіани точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини трикутника: $AO : OK = BO : OM = CO : ON = 2 : 1$. Для медіан справедливі такі формули:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}\,,\quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}\,,\quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}\,,\quad m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$$

Медіана ділить трикутник на два рівновеликі трикутники. *Рівновеликими* називають трикутники, які мають рівні площі. На рис. 9 $S_{\Delta AKC} = S_{\Delta ABK}$. Усі медіани трикутника ділять його на 6 рівновеликих трикутників. На рис. 11 $S_{\Delta COM} = S_{\Delta MOA} = S_{\Delta AON} = S_{\Delta NOB} = S_{\Delta BOK} = S_{\Delta KOC}$.

Висоти трикутника. *Висотою трикутника* називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, яка містить його протилежну сторону. На рис. 12 $AN \perp BC$, AN — висота.

Кожен трикутник — гострокутний, прямокутний і тупокутний — має три висоти. Висоти, проведені до сторін a, b і c, відповідно позначають так: h_a, h_b і h_c (рис. 13 а–в). Висоти будь-якого трикутника або їх продовження перетинаються в одній точці. У гострокутному трикутнику точка O перетину висот розміщена всередині трикутника (рис. 13 а); у прямокутному (точка C) — у вершині прямого кута (рис. 13 б); у тупокутному (точка F) — поза трикутником (рис. 13 в).



Рис. 12

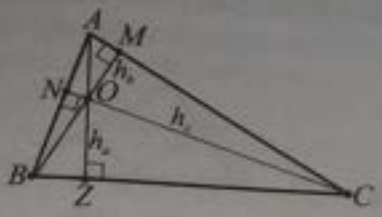


Рис. 13 а)

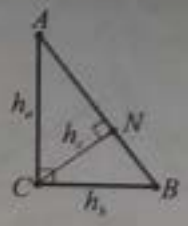


Рис. 13 б)

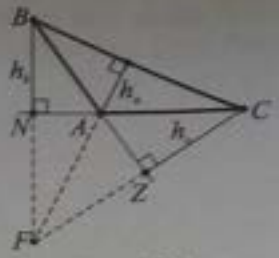


Рис. 13 в)

Для висот справедливі такі формули: $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$; $\frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$, де r — радіус вписаного кола. Будь-яку висоту трикутника можна знайти за формулами $h_a = c\sin\beta$, $h_a = \frac{2S}{a}$, де S — площа трикутника.

Бісектриси трикутника. *Бісектрисою трикутника* називають відрізок бісектриси кута трикутника, який сполучає його вершину з точкою на протилежній стороні трикутника. На рис. 14 $\angle BAN = \angle NAC$, AN — бісектриса.

Кожен трикутник — гострокутний, прямокутний і тупокутний — має три бісектриси. Бісектриси будь-якого трикутника перетинаються в одній точці, яка міститься усередині трикутника (рис. 15).

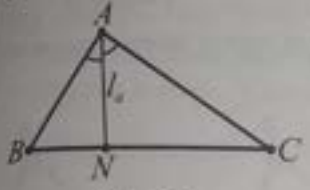


Рис. 14

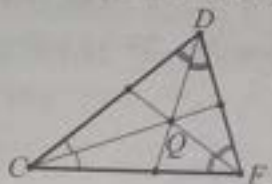


Рис. 15 а)

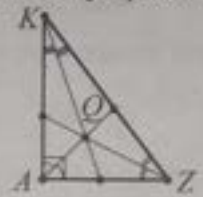


Рис. 15 б)

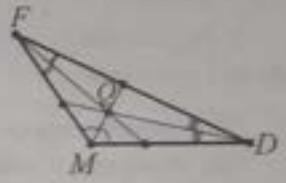


Рис. 15 в)

Бісектриси, проведені до сторін a, b і c, відповідно позначають так: l_a, l_b і l_c (рис. 16).

Властивість бісектриси трикутника. Бісектриса поділяє протилежну сторону на відрізки, пропорційні до прилеглих сторін. На рис. 14 AN — бісектриса, тоді $\frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC}$.

У нерівнобедреному трикутнику кожна бісектриса лежить між медіаною і висотою, проведеними з цієї ж вершини: $h_a < l_a < m_a$ (рис. 17).

Для бісектрис справедливі такі формули (рис. 18): $l_a = \sqrt{bc - b_1c_1}$; $l_a = \frac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}$.

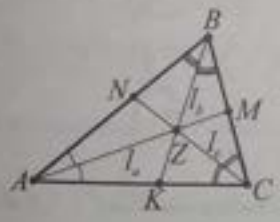


Рис. 16

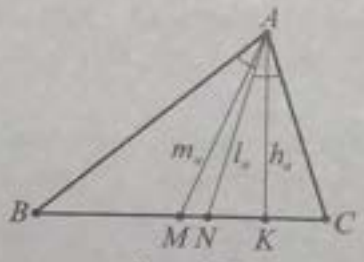


Рис. 17

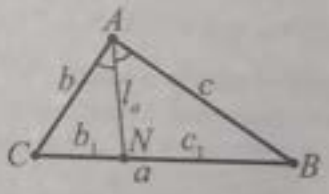


Рис. 18

Середня лінія трикутника

Середня лінія трикутника — це відрізок, який з'єднує середини двох його сторін.

На рис. 19 а) $AM = MB$, $BN = NC$, MN — середня лінія. У кожному трикутнику можна провести три середні лінії. У трикутнику ABC MN, MP і NP — середні лінії (рис. 19 б).

Теорема. *Середня лінія трикутника паралельна до однієї з його сторін і дорівнює її половині.*

Наприклад, на рис. 19 а) MN — середня лінія, тому $MN \parallel AC$ і $MN = \frac{1}{2}AC$.

Середні лінії трикутника ділять його на 4 рівні трикутники. Наприклад, рівними є трикутники *AMP*, *NPM*, *PNC* і *MBN* (рис. 19 б).

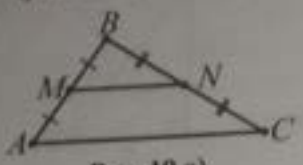


Рис. 19 а)

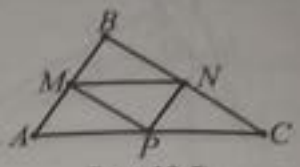


Рис. 19 б)

Визначні точки трикутника

Точка перетину медіан (центр мас)	Точка перетину висот або їх продовжень (ортоцентр)	Точка перетину бісектрис — центр вписаного кола (інцентр)	Точка перетину серединних перпендикулярів до сторін — центр описаного кола

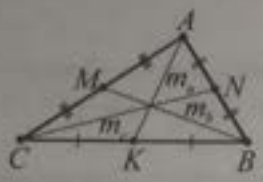


Рис. 20 а)

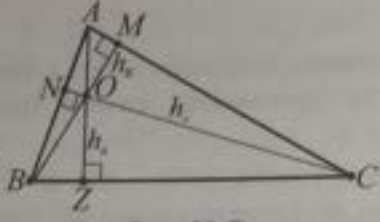


Рис. 20 б)

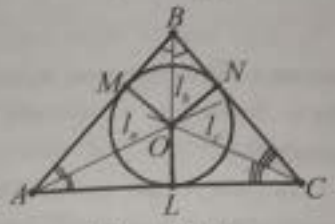


Рис. 20 в)



Рис. 20 г)

У будь-який трикутник можна вписати коло (рис. 20 в) і навколо будь-якого трикутника можна описати коло (рис. 20 г).

Рівні трикутники

Два трикутники називають *рівними*, якщо при накладанні вони суміщаються. На рис. 21 $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, тому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

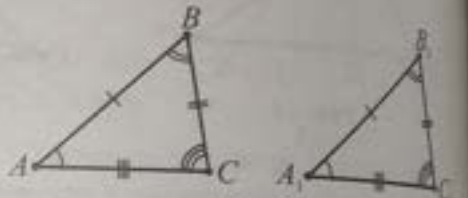


Рис. 21

У позначенні вершин рівних трикутників має значення порядок запису літер: літери, які відповідають рівним кутам, потрібно записувати в обох трикутниках на однакових місцях. У рівних трикутників проти рівних сторін лежать рівні кути, проти рівних кутів — рівні сторони.

На рис. 21 $BC = B_1C_1$, тому $\angle A = \angle A_1$, і навпаки, $\angle C = \angle C_1$, тому $AB = A_1B_1$.

Ознаки рівності трикутників

Два трикутники рівні між собою ($\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$), якщо в них відповідно рівні:

1) дві сторони та кут між ними. На рис. 21 $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$;

2) сторона та прилеглі до неї кути. На рис. 21 $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$;

3) три сторони. На рис. 21 $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

Подібні трикутники

Два трикутники називають *подібними*, якщо в них відповідні кути рівні й відповідні сторони пропорційні. На рис. 22 $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = k$, тому трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ — подібні (коефіцієнт подібності дорівнює k).

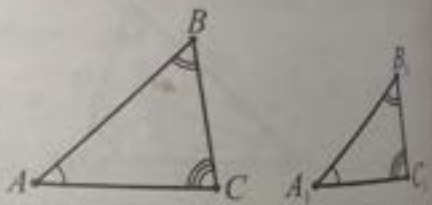


Рис. 22

Подібність трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ коротко записують так: $\Delta ABC - \Delta A_1B_1C_1$. Якщо коефіцієнт подібності відомий, то записують: $\Delta ABC \overset{k}{\sim} \Delta A_1B_1C_1$.

Для подібних трикутників має значення порядок запису вершин.

Щоб скласти відношення відповідних сторін подібних трикутників, потрібно: 1) визначити рівні кути трикутників; 2) з'ясувати, які сторони є відповідними; 3) записати відповідні рівності.

Ознаки подібності трикутників

Два трикутники подібні між собою ($\Delta ABC - \Delta A_1B_1C_1$), якщо:

1) два кути одного трикутника відповідно дорівнюють двом кутам іншого трикутника.

На рис. 22 $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$;

2) дві сторони одного трикутника відповідно пропорційні до двох сторін іншого трикутника, а кути, утворені цими сторонами, рівні. На рис. 22 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k$, $\angle A = \angle A_1$;

3) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого трикутника.

На рис. 22 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = k$.

Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності: $\frac{P_{\Delta ABC}}{P_{\Delta A_1B_1C_1}} = k$. Відношення відповідних лінійних елементів (медіан, бісектрис, висот тощо) подібних трикутників теж дорівнює коефіцієнту подібності.

Відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату відношення відповідних сторін (квадрату коефіцієнта подібності): $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2$.

Пряма, яка паралельна до сторони трикутника і перетинає дві інші його сторони, відтинає від нього подібний йому трикутник. Наприклад, на рис. 19 а) $MN \parallel AC$, тому $\Delta ABC - \Delta MBN$.

Співвідношення між сторонами та кутами трикутника

Теорема синусів. *Сторони трикутника пропорційні до синусів протилежних кутів.* Наприклад, у трикутнику ABC (рис. 23): $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$.

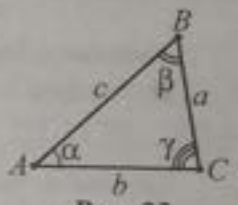


Рис. 23

Наслідок з теореми синусів. У будь-якому трикутнику відношення сторони до синуса протилежного кута дорівнює діаметру кола, описаного навколо цього трикутника: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = D = 2R$, де D — діаметр, R — радіус описаного кола.

Теорема косинусів. *Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін та косинуса кута між ними.* Наприклад, у трикутнику ABC (рис. 23) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$; $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Площа трикутника

$S = \frac{1}{2}ah_a$; $S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $S = \frac{abc}{4R}$, $S = pr$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$ — півпериметр, R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола.

Радіуси вписаного й описаного кіл $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2S}{a+b+c}$.

Приклад 1. Сторони трикутника дорівнюють 4 см і 8 см. Яке найменше ціле значення повинна мати третя сторона, щоб кут між двома даними сторонами був тупим?

А	Б	В	Г	Д
81 см	6 см	10 см	9 см	13 см

■ Якщо сторони трикутника a, b і c, то для них справджується нерівність $|a-b| < c < a+b$, тобто $8-4 < c < 8+4$; $4 < c < 12$. За теоремою косинусів $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$. Оскільки γ — тупий кут, то $\cos\gamma < 0$. Тому $c^2 > a^2 + b^2$. Маємо: $c^2 > 4^2 + 8^2$; $c^2 > 80$. Тоді $\begin{cases} 4 < c < 12, \\ c > \sqrt{80}. \end{cases}$ Отже, найменше ціле значення, яке задовольняє систему, — $c = 9$ см. *Відповідь.* Г. ■

Приклад 2. Знайти найбільший кут трикутника, якщо градусні міри всіх кутів відносяться як 3 : 4 : 5.

■ Нехай $\angle 1 = 3x$, тоді $\angle 2 = 4x$, $\angle 3 = 5x$. За теоремою про суму кутів трикутника одержимо: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. $3x + 4x + 5x = 180°$; $12x = 180°$; $x = 15°$; $\angle 3 = 5x = 5 \cdot 15° = 75°$. *Відповідь.* 75°. ■

Приклад 3. У трикутнику CKA бісектриси кутів K і A при перетині утворюють кут 115° (рис. 24). Знайти кут C.

■ Оскільки KB й AE — бісектриси кутів K і A, то $\angle BKA = \frac{\angle K}{2}$, $\angle EAK = \frac{\angle A}{2}$. З ΔOKA за теоремою про суму кутів трикутника одержимо: $\frac{\angle K}{2} + \frac{\angle A}{2} + \angle KOA = 180°$. Звідси: $\frac{\angle K}{2} + \frac{\angle A}{2} = 180° - 115°$; $\frac{\angle A + \angle K}{2} = 65°$, тоді $\angle K + \angle A = 65° \cdot 2 = 130°$. З трикутника CKA за теоремою про суму кутів трикутника: $\angle C + \angle K + \angle A = 180°$. Звідси: $\angle C = 180° - (\angle K + \angle A)$; $\angle C = 180° - 130° = 50°$. *Відповідь.* 50°. ■

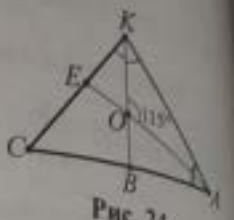


Рис. 24

Приклад 4. Трикутники MCK і NDA подібні (див. рис. 25). Знайти сторону MK, якщо $MC = 32$ см, $ND = 16$ см, $NA = 10{,}5$ см.

■ Складемо відношення відповідних сторін: $\frac{MC}{ND} = \frac{MK}{NA}$. Підставимо в одержану рівність відомі довжини сторін. Одержимо пропорцію: $\frac{32}{16} = \frac{MK}{10{,}5}$. Маємо: $MK = \frac{32 \cdot 10{,}5}{16} = 21$ (см). *Відповідь.* 21 см. ■

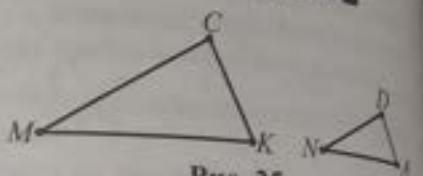


Рис. 25

Приклад 5. Знайти невідомі кути подібних трикутників KFB і $K_1F_1B_1$, якщо $\angle K = 50°$, $\angle F_1 = 60°$.

■ Оскільки $\Delta KFB \sim \Delta K_1F_1B_1$, то $\angle F = \angle F_1 = 60°$, $\angle K_1 = \angle K = 50°$. З трикутника KFB $\angle B = 180° - (50° + 60°) = 70°$. $\angle B_1 = \angle B = 70°$. *Відповідь.* 60°, 70°; 50°, 70°. ■

Приклад 6. Чи можуть сторони подібних трикутників мати довжини: **1)** 4 см, 6 см, 5 см і 12 см, 18 см, 15 см; **2)** 20 мм, 30 мм, 50 мм і 200 мм, 120 мм, 100 мм?

■ Якщо трикутники подібні, то їхні відповідні сторони пропорційні. Маємо:

1) $\frac{4}{12} = \frac{6}{18} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$. Отже, трикутники подібні;

2) розташуємо сторони трикутників у порядку зростання і складемо відповідні відношення: 20 мм, 30 мм, 50 мм і 100 мм, 120 мм, 200 мм. Тоді $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$; $\frac{50}{200} = \frac{1}{4}$ — відношення найкоротших сторін не дорівнюють відношенням найдовших сторін трикутників. Отже, трикутники не будуть подібними. *Відповідь.* **1)** Можуть; **2)** не можуть. ■

Приклад 7. Сторони деякого трикутника пропорційні числам 2, 5 і 6. Знайти сторони подібного йому трикутника, якщо його периметр дорівнює 78 см.

■ Оскільки трикутники подібні, то відношення сторін трикутника, подібного даному, дорівнюватиме 2 : 5 : 6. Нехай сторони подібного трикутника дорівнюватимуть $2x$ см, $5x$ см і $6x$ см. Зважаючи на те, що периметр трикутника дорівнює 78 см, складемо і розв'яжемо рівняння: $2x + 5x + 6x = 78$; $13x = 78$, $x = 6$. Тоді $2x = 6 \cdot 2 = 12$, $5x = 6 \cdot 5 = 30$, $6x = 6 \cdot 6 = 36$. Отже, сторони подібного трикутника дорівнюватимуть 12 см, 30 см, 36 см. *Відповідь.* 12 см, 30 см, 36 см. ■

Приклад 8. Знайти сторону a трикутника ABC, якщо дві інші його сторони і кут між ними відповідно дорівнюють $\sqrt{2}$ см, 1 см, 45°.

■ За теоремою косинусів $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. $a^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45° = 2 + 1 - 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$; $a^2 = 1$. Отже, $a = 1$ см. *Відповідь.* 1 см. ■

Приклад 9. Знайти кут M трикутника MNK, якщо $MN = 8$ см, $NK = 7$ см, $MK = 3$ см.

■ Нехай на рис. 26 зображено трикутник, у якому за теоремою косинусів ма-

$NK^2 = MN^2 + MK^2 - 2MN \cdot MK \cdot \cos M$. Звідси $\cos M = \dfrac{MN^2 + MK^2 - NK^2}{2MN \cdot MK}$;

$\cos M = \dfrac{8^2 + 3^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 3} = \dfrac{64 + 9 - 49}{2 \cdot 8 \cdot 3} = \dfrac{24}{48} = \dfrac{1}{2}$; $\angle M = 60°$.

Відповідь. 60°. ■



Рис. 26

Приклад 10. У трикутнику MKD $\angle K = 60°$. Радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо трикутника MOD, де O — точка перетину бісектрис трикутника MKD?

■ Нехай MKD — заданий трикутник (рис. 27), у якого $MK = d$, $KD = m$, $DM = k$, $\angle K = 60°$, R — радіус описаного кола, $R = 2$ см, O — точка перетину бісектрис. За наслідком з теореми синусів $\dfrac{k}{\sin \angle K} = 2R$. Отримаємо: $k = 2R\sin\angle K =$

$= 2 \cdot 2\sin 60° = 2\sqrt{3}$ (см), тобто $MD = 2\sqrt{3}$ см. Нехай $\angle M = 2x°$, $\angle D = 2y°$. За теоремою про суму кутів трикутника $\angle M + \angle D + \angle K = 180$; $2x + 2y + 60 = 180$;

$2x + 2y = 120$; $x + y = 60$. Оскільки MO і DO — бісектриси кутів M і D відповідно, то $\angle OMD = x°$, $\angle ODM = y°$. З трикутника MOD: $x + y + \angle MOD = 180°$; $\angle MOD = 180° - 60° = 120°$. За наслідком з теореми синусів $\dfrac{MD}{\sin \angle MOD} = 2R_1$, де R_1 — радіус кола, описаного навколо трикутника MOD.

$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 120°} = 2R_1$, $R_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 2$ (см).

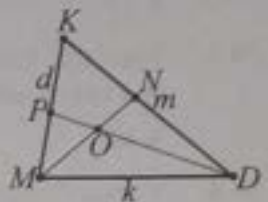


Рис. 27

Відповідь. 2 см. ■

Приклад 11. Знайти радіуси кола, вписаного в трикутник, і кола, описаного навколо трикутника, якщо його сторони дорівнюють 15 см, 28 см, 41 см.

■ Нехай у трикутнику $a = 15$ см, $b = 28$ см, $c = 41$ см, r — радіус вписаного, R — радіус описаного кола. $S = pr$, $S = \dfrac{abc}{4R}$, де S — площа трикутника, p — півпериметр. $p = \dfrac{15 + 28 + 41}{2} = 42$ (см).

$S = \sqrt{42(42-15)(42-28)(42-41)} = \sqrt{42 \cdot 27 \cdot 14} = \sqrt{3 \cdot 14 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 14} = 14 \cdot 9 = 126$ (см^2).

$r = \dfrac{S}{p} = \dfrac{126}{42} = 3$ (см). $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{15 \cdot 28 \cdot 41}{4 \cdot 126} = \dfrac{5 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 41}{7 \cdot 3 \cdot 6} = 34\dfrac{1}{6}$ (см).

Відповідь. 3 см, $34\dfrac{1}{6}$ см. ■

Приклад 12. Знайти площу трикутника, у якому бісектриса кута, що дорівнює 120°, ділить протилежну сторону на відрізки завдовжки 35 см і 21 см.

■ Нехай у ΔADF (рис. 29) $\angle D = 120°$, DK — бісектриса. $AK = 21$ см, $FK = 35$ см. За властивістю бісектриси $\dfrac{DA}{DF} = \dfrac{AK}{FK} = \dfrac{21}{35} = \dfrac{3}{5}$. Нехай $DA = 3x$ см, тоді $DF = 5x$ см. За теоремою косинусів

$AF^2 = DA^2 + DF^2 - 2DA \cdot DF \cdot \cos D$. Або: $(21 + 35)^2 = 9x^2 + 25x^2 - 2 \cdot 15x^2 \cdot \cos 120°$; $56^2 = 34x^2 + 30x^2 \cdot 0{,}5$;

$56^2 = 49x^2$; $56^2 = (7x)^2$; $x = 8$; $3x = 24$; $5x = 40$. Тоді $DA = 24$ см, $DF = 40$ см. Обчислимо площу трикутника ADF: $S = \dfrac{1}{2} DA \cdot DF \cdot \sin D = \dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 40 \cdot \sin 120° = \dfrac{1}{2} \cdot 24 \cdot 40 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 240\sqrt{3}$ (см^2).

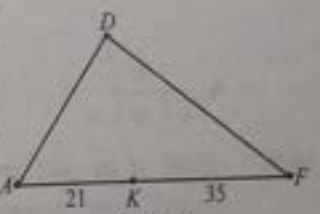


Рис. 29

Відповідь. $240\sqrt{3}$ см^2. ■

Завдання 30.1–30.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

30.1. У трикутнику ABC сторони AB і AC відповідно дорівнюють 6 см і 10 см. Указати всі можливі значення довжини сторони BC.

А	Б	В	Г	Д
$BC < 16$ см	6 см $< BC < 16$ см	6 см $< BC < 10$ см	4 см $< BC < 16$ см	5 см $< BC < 15$ см

30.2. Градусні міри кутів трикутника відносяться як 3 : 2 : 10. Знайти градусну міру найменшого кута трикутника.

А 12° **Б** 20° **В** 24° **Г** 36° **Д** 18°

30.3. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють 70° і 150°. Знайти внутрішній кут при третій вершині.

А 40° **Б** 50° **В** 60° **Г** 100° **Д** 140°

30.4. У трикутнику ABC $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$. Визначити гострий кут, утворений бісектрисами даних кутів.

А 25° **Б** 30° **В** 55° **Г** 35° **Д** 60°

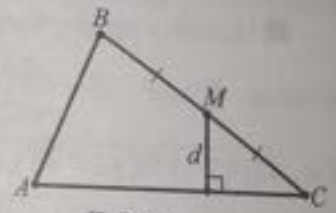
30.5. У трикутнику ABC $\angle A = 30°$ і $\angle B = 105°$. Знайти відношення $\frac{BC}{AB}$.

А $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Б** $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **В** $\frac{1}{2}$ **Г** $\sqrt{2}$ **Д** $\frac{1}{\sqrt{2}}$

30.6. У трикутнику ABC $AB = \sqrt{3}$ см, $AC = 2$ см і $\angle A = 30°$. Знайти довжину (у сантиметрах) медіани BM.

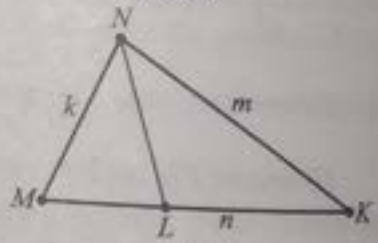
А 7 **Б** $\sqrt{7}$ **В** 1 **Г** $\sqrt{13}$ **Д** $\sqrt{11}$

30.7. **(ЗНО–2013)** У трикутнику ABC точка M — середина сторони BC, $AC = 24$ см (див. рисунок). Знайти відстань d від точки M до сторони AC, якщо площа трикутника ABC дорівнює 96 см^2.



А 2 см **Б** 3 см **В** 4 см **Г** 6 см **Д** 8 см

30.8. У трикутнику MNK $MN = k$, $NK = m$ і $MK = n$, NL — бісектриса трикутника. Знайти довжину відрізка ML.



А $\frac{k}{k+m+n}$ **Б** kmn **В** $\frac{kn}{m}$ **Г** $\frac{kn}{k+m}$ **Д** $\frac{mn}{k+m}$

30.9. Одна зі сторін трикутника дорівнює 7 см. Знайти висоту, проведену до цієї сторони, якщо площа трикутника дорівнює 35 см^2.

А 2,5 см **Б** 5 см **В** 7,5 см **Г** 10 см **Д** 12,5 см

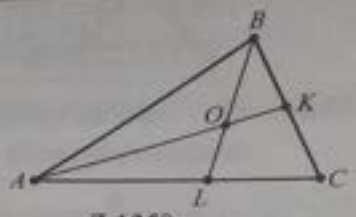
30.10. Два кути трикутника дорівнюють α і β, а радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює R. Визначити площу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$4R^2\sin(\alpha+\beta)$	$2R^2\sin(\alpha+\beta)$	$2R^2\sin\alpha\sin\beta$	$4R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$	$2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$

30.11. Дві сторони трикутника дорівнюють 48 см і 28 см. Указати всі можливі значення периметра трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$20\text{ см} < P < 76\text{ см}$	$76\text{ см} < P < 152\text{ см}$	$20\text{ см} < P < 152\text{ см}$	$96\text{ см} < P < 152\text{ см}$	$76\text{ см} < P < 96\text{ см}$

30.12. O — точка перетину бісектрис AK і BL трикутника ABC. Знайти $\angle AOB$, якщо $\angle C = 50°$.



А 100° Б 115° В 120° Г 130° Д 135°

30.13. Градусні міри зовнішніх кутів трикутника ABC при вершинах A, B і C відносяться як 3 : 4 : 5. Як відносяться градусні міри внутрішніх кутів трикутника при вершинах A, B і C?

А 3 : 4 : 5 Б 5 : 4 : 3 В 3 : 2 : 1 Г 7 : 8 : 9 Д 9 : 8 : 7

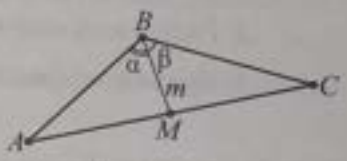
30.14. Кути трикутника відносяться як 1 : 2 : 3. Знайти відношення протилежних їм сторін.

А 1 : 2 : 3 Б 3 : 2 : 1 В 1 : 3 : 2 Г $1 : \sqrt{3} : 2$ Д $1 : \sqrt{2} : 2$

30.15. Сторони трикутника дорівнюють 7 см, 8 см і 10 см. Знайти косинус найбільшого кута цього трикутника.

А $\frac{29}{140}$ Б $\frac{23}{112}$ В $\frac{19}{140}$ Г $\frac{13}{112}$ Д $\frac{13}{56}$

30.16. У трикутнику ABC BM — медіана, $\angle ABM = \alpha$, $\angle MBC = \beta$, $BM = m$. Визначити сторону AB.

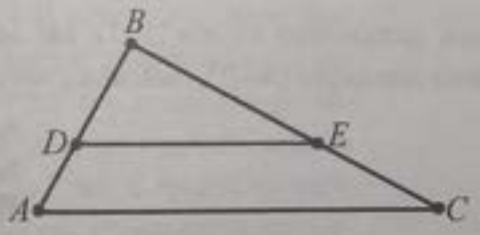


А	Б	В	Г	Д
$\frac{2m\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$	$2m\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$	$\frac{2m\sin\beta}{\sin\alpha}$	$2m\sin\alpha\sin\beta$	$\frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

30.17. Два трикутники подібні. Сторони одного з них дорівнюють 7 см, 12 см і 16 см, а сторони іншого — 40 см, 30 см та x см. Знайти x.

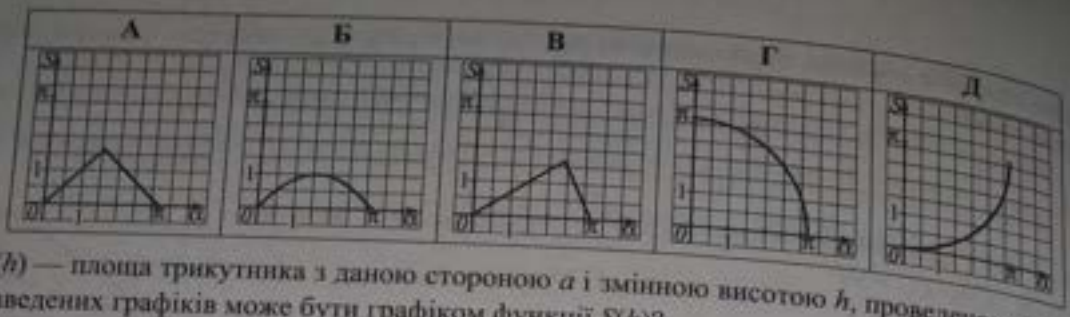
А 18 см Б 17,5 см В 20 см Г 24 см Д 18,5 см

30.18. У трикутнику ABC відрізок DE з кінцями на сторонах AB і BC паралельний до сторони AC. $S_{DBE} = 4\text{ см}^2$, $S_{ADEC} = 5\text{ см}^2$, $DE = 7$ см. Знайти довжину AC.



А 9,5 см Б $9\frac{2}{3}$ см В 12 см Г 10,5 см Д 9 см

30.19. $S(\alpha)$ — площа трикутника з даними сторонами a і b та змінним кутом α між ними. Який з наведених графіків може бути графіком функції $S(\alpha)$?



30.20. $S(h)$ — площа трикутника з даною стороною a і змінною висотою h, проведеною до неї. Який з наведених графіків може бути графіком функції $S(h)$?



Завдання 30.21–30.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

30.21. Установити відповідність між елементами (1–3) рівностороннього трикутника зі стороною a та їхніми величинами (А–Д).

1 Висота

2 Радіус вписаного кола

3 Кут між медіанами

А $\frac{\sqrt{3}}{6}a$

Б $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

В $120°$

Г $60°$

Д $\frac{\sqrt{3}}{3}a$

30.22. Установити відповідність між коефіцієнтами подібності (1–3) двох трикутників і відношенням їх площ (А–Д).

1 $k_1 = 2$

2 $k_2 = 3$

3 $k_3 = 4$

А 25

Б 9

В 16

Г 36

Д 4

30.23. Встановити відповідність між довжинами сторін (1–3), які лежать проти кута $30°$ у прямокутних трикутниках, і довжинами діаметрів (А–Д), описаних навколо трикутників кіл.

1 2 см

2 4 см

3 10 см

А 8 см

Б 20 см

В 4 см

Г 10 см

Д 30 см

30.24. Установити відповідність між сторонами трикутників (1–3) та їх площами (А–Д).

1 4 см, 5 см, 3 см

2 8 см, 10 см, 6 см

3 16 см, 20 см, 12 см

А 96 см^2

Б 48 см^2

В 6 см^2

Г 54 см^2

Розв'язання завдання 30.25–30.40. Відповідь запишіть десятковим дробом.

30.25. Величини кутів трикутника ABC при вершинах A, B і C відносяться, як $5 : 6 : 7$. Знайти в градусах величину кута між висотою CD і бісектрисою кута A трикутника.

30.26. Знайти площу S гострокутного трикутника у квадратних сантиметрах, якщо дві його сторони дорівнюють 2 см і 1 см, а квадрат косинуса кута між ними дорівнює $\frac{1}{4}$. У відповідь записати $\sqrt{3}S$.

30.27. У трикутнику ABC висота BK поділяє сторону AC на відрізки 1 і 3. Знайти квадрат медіани BM трикутника ABC, якщо $BK = 2$.

30.28. У трикутнику ABC проведено медіану AK, яка дорівнює $\frac{13\sqrt{2}}{4}$ й утворює зі стороною AC кут $30°$. Знайти BC, якщо $\angle BCA = 45°$.

30.29. Периметр трикутника дорівнює 50, а його бісектриса ділить протилежну сторону на відрізки завдовжки 15 і 5. Знайти найменшу сторону трикутника.

30.30. Сторона трикутника дорівнює 10. Знайти квадрат довжини відрізка прямої, яка паралельна до цієї сторони та ділить площу трикутника навпіл.

30.31. Одна зі сторін трикутника дорівнює 2, а прилеглі до неї кути дорівнюють $30°$ і $45°$. Знайти площу трикутника з точністю до 0,01.

30.32. Знайти площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 28 і 30, а медіана, яка проведена до третьої сторони, дорівнює $\sqrt{673}$.

30.33. На сторонах AB і AC трикутника ABC відповідно позначено такі точки M і K, що $\angle AMK = \angle C$, $AM = 4$, $MB = 2$ і $AK = 3$. Знайти довжину відрізка KC.

30.34. Відношення двох внутрішніх кутів трикутника дорівнює $2 : 3$, а зовнішніх кутів при цих же вершинах $11 : 9$. Знайти в градусах третій внутрішній кут трикутника.

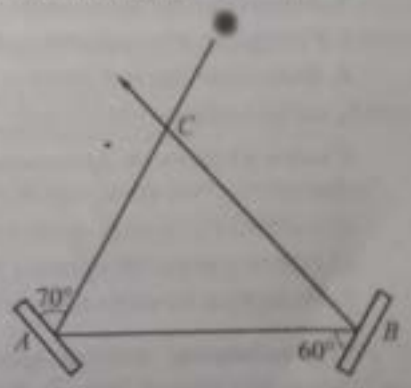
30.35. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 5 см і 6 см. Знайти з точністю до 0,01 см довжину медіани, проведеної до сторони завдовжки 5 см.

30.36. Одна зі сторін трикутника дорівнює 10, а медіани, що проведені до двох інших сторін, дорівнюють 9 і 12. Знайти площу трикутника.

30.37. Дві сторони трикутника дорівнюють b і c, а бісектриса кута між ними дорівнює l. Визначити третю сторону трикутника й обчислити її значення, якщо $b = 1$, $c = 4$, $l = 1{,}2$.

30.38. У трикутнику, дві сторони якого дорівнюють a і b, сума висот, опущених на ці сторони, дорівнює третій висоті. Визначити третю сторону й обчислити її значення, якщо $a = 4$, $b = 6$.

30.39. Промінь світла падає від ліхтарика на поверхню дзеркала A під кутом $70°$, а відбитий від нього промінь падає на поверхню іншого дзеркала B під кутом $60°$ і відбивається від нього. Дзеркала розміщені так, що всі падаючі та відбиті промені лежать в одній площині (див. рис.). Знайти градусну міру найменшого внутрішнього кута утвореного променями трикутника ABC.



30.40. Відповідні сторони подібних трикутників дорівнюють 14 см і 21 см. Периметр і площа більшого трикутника відповідно дорівнюють 63 см і 180 см^2. Знайти:

1) периметр меншого трикутника;

2) площу меншого трикутника.

Тема 31. Прямокутний трикутник

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— застосовувати означення, ознаки та властивості елементарних геометричних фігур для розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту;
— знаходити довжини відрізків, градусні та радіанні міри кутів, площі геометричних фігур;
— використовувати формули площ геометричних фігур для розв'язування планіметричних задач і задач практичного змісту;
— пропорційні відрізки прямокутного трикутника;
— відношення площ подібних трикутників.

Прямокутним називають трикутник, у якого один з кутів є прямим.

На рис. 1 $\angle C = 90°$, тому трикутник ABC — прямокутний. a, b — катети, c — гіпотенуза.

Властивості прямокутного трикутника

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°: $\alpha + \beta = 90°$.

2. У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша від кожного катета: $c > a$, $c > b$.

3. Катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Справедливе й обернене твердження: якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, протилежний цьому катету, дорівнює 30°.

Описане та вписане кола

Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою гіпотенузи: $AO = BO = CO = R = \frac{1}{2}AB$ (рис. 2 а). Радіус вписаного кола: $r = \frac{a+b-c}{2}$, $r = \frac{ab}{a+b+c}$ (рис. 2 б).

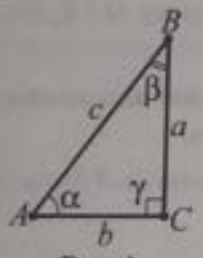


Рис. 1



Рис. 2 а)

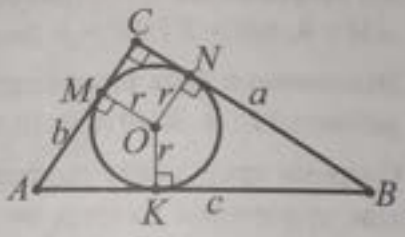


Рис. 2 б)

Ознаки рівності прямокутних трикутників

1. Якщо катети одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

2. Якщо катет і гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

3. Якщо гіпотенуза й гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

4. Якщо гіпотенуза й катет одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й катету іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Ознаки подібності прямокутних трикутників

Два прямокутні трикутники подібні між собою, якщо:

1) гострий кут одного трикутника дорівнює гострому куту іншого трикутника;

2) катети одного трикутника пропорційні катетам іншого трикутника;

3) гіпотенуза та катет одного трикутника пропорційні гіпотенузі та катету іншого трикутника.

Перпендикуляр, похила, проекція похилої. Нехай точка A не лежить на прямій a, AC — перпендикуляр до цієї прямої (рис. 3). Будь-який відрізок, який сполучає точку A з точкою прямої a і не збігається з перпендикуляром, називають *похилою* до прямої a. На рис. 3 AB — похила до прямої a, точка B — основа похилої, точка C — основа перпендикуляра. Відрізок, який сполучає основу похилої й основу перпендикуляра, називають *проекцією похилої*. На рис. 3 BC — проекція похилої AB на пряму a.

Властивості похилих

Якщо з даної точки до прямої проведено перпендикуляр і похилі, то:

1) будь-яка похила більша за перпендикуляр і більша за її проекцію на дану пряму (рис. 4);

2) рівні похилі мають рівні проекції, і навпаки: якщо проекції двох похилих рівні, то рівні й самі похилі (рис. 5);

3) більша похила має більшу проекцію, і навпаки: із двох похилих більша та, яка має більшу проекцію (рис. 6).

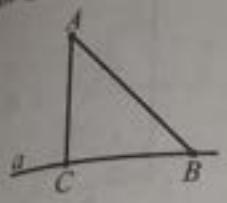
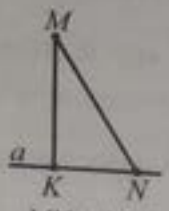


Рис. 3



$MN > MK$

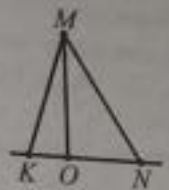
$MN > NK$

Рис. 4



Якщо $MK = MN$, то $ON = OK$, і навпаки

Рис. 5



Якщо $MN > MK$, то $ON > OK$, і навпаки

Рис. 6

Тригонометричні функції гострого кута прямокутного трикутника

Нехай задано прямокутний трикутник ABC з катетами a і b, гіпотенузою c та гострим кутом α (рис. 7). *Синусом* гострого кута α прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$. *Косинусом* гострого кута α прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$. *Тангенсом* гострого кута α прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$. *Котангенсом* гострого кута α прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до протилежного: $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.

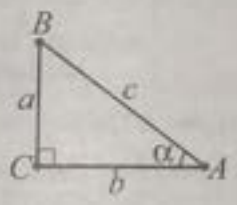


Рис. 7

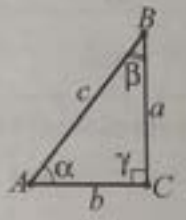


Рис. 8

Тригонометричні функції гострого кута залежать тільки від величини кута і не залежать від розмірів трикутника. Кожному значенню тригонометричної функції відповідає єдиний гострий кут.

Співвідношення між сторонами і кутами прямокутного трикутника

У прямокутному трикутнику ABC (рис. 8) справедливими є такі співвідношення:

$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\operatorname{tg}\alpha = b\operatorname{ctg}\beta$, $b = c\sin\beta = c\cos\alpha = a\operatorname{tg}\beta = a\operatorname{ctg}\alpha$.

Висоти прямокутного трикутника

$h_a = b$, $h_b = a$, $h_c = \frac{ab}{c}$. Висоти h_a і h_b збігаються з катетами b та a.

Медіани прямокутного трикутника

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2 + a^2}$; $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2 + b^2}$; $m_c = \frac{1}{2}c = R$; $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$.

Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє навпіл кут між висотою і медіаною, проведеними з цієї ж вершини: $\angle NCK = \angle OCK$ (рис. 9).



Рис. 9

У прямокутному трикутнику:

1) висота, проведена з вершини прямого кута, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу;

2) катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і його проекцією на гіпотенузу.

Наприклад, у трикутнику ABC (рис. 10) $\angle C = 90°$, $AC = b$, $BC = a$, $DB = a_c$, $CD = h_c$, $AD = b_c$.

Тоді: 1) $h_c^2 = a_c \cdot b_c$; 2) $a^2 = c \cdot a_c$, $b^2 = c \cdot b_c$.

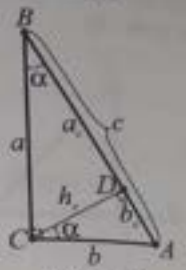


Рис. 10

Теорема Піфагора. Квадрат гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює сумі квадратів катетів:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема, обернена до теореми Піфагора. Якщо квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін, то цей трикутник — прямокутний.

Площа прямокутного трикутника: $S = \frac{1}{2}ab$, $S = \frac{1}{2}ch_c$, $S = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\beta$, $S = \frac{1}{2}b^2 \operatorname{tg}\alpha$.

Приклад 1. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють 5 см і 12 см.

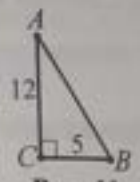


Рис. 11

■ Нехай $AC = 5$ см, $BC = 12$ см. З прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) (рис. 11) за теоремою Піфагора маємо: $AB^2 = AC^2 + BC^2$; $AB^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$; $AB = \sqrt{169} = 13$ (см). *Відповідь.* 13 см. ■

Приклад 2. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює h, а гострий кут — β. Знайти гіпотенузу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{h}{\sin\beta}$	$h\operatorname{ctg}\beta$	$h\operatorname{tg}\beta$	$\frac{h}{\sin\beta\cos\beta}$	$\frac{h}{\cos\beta}$

■ Нехай CNB — прямокутний трикутник ($\angle N = 90°$) (рис. 12).

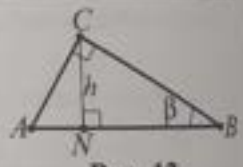


Рис. 12

За співвідношеннями між елементами прямокутного трикутника маємо:

$CB = \frac{CN}{\sin B} = \frac{h}{\sin\beta}$. Із прямокутного трикутника ACB ($\angle C = 90°$) маємо:

$AB = \frac{CB}{\cos B}$, тобто $AB = \frac{h}{\sin\beta\cos\beta}$. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 3. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, проведена до іншого катета, — 13 см. Знайти гіпотенузу трикутника.

А	Б	В	Г	Д
5 см	$2\sqrt{61}$ см	25 см	22 см	26 см

■ Із прямокутного трикутника ACD ($\angle C = 90°$) (рис. 13) за теоремою Піфагора маємо: $CD = \sqrt{AD^2 - CA^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ (см). За означенням медіани $BC = 2CD = 10$ (см). З прямокутного трикутника ACB за теоремою Піфагора: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$ (см). *В-дь.* **Б.** ■

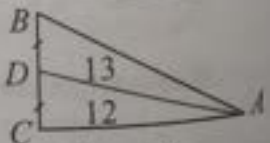


Рис. 13

***Приклад* 4.** Навколо прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C описано коло (рис. 14). Знайти радіус кола, якщо $AC = 12$ см, $\angle B = 30°$.

■ Нехай ABC — прямокутний трикутник (рис. 14). За властивістю катета, який лежить проти кута $30°$, $AB = 2AC = 2 \cdot 12 = 24$ (см). $R = \frac{1}{2} AB = 12$ (см). *В-дь.* 12 см. ■



Рис. 14

***Приклад* 5.** Визначити, чи є прямокутним трикутник, сторони якого дорівнюють

1) 5, 12, 13; **2)** 7, 4, 11; **3)** 5, 4, $\sqrt{41}$; **4)** 3, $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$.

■ Щоб визначити, чи є трикутник прямокутним, застосуємо теорему, обернену до теореми Піфагора.

1) $13^2 = 12^2 + 5^2$; $169 = 144 + 25$; $169 = 169$ (істинно). Отже, трикутник прямокутний;

2) $11^2 = 7^2 + 4^2$; $121 = 49 + 16$; $121 = 65$ (хибно). Отже, трикутник не прямокутний;

3) $\left(\sqrt{41}\right)^2 = 5^2 + 4^2$; $41 = 25 + 16$; $41 = 41$ (істинно). Отже, трикутник прямокутний;

4) $\left(\sqrt{13}\right)^2 = \left(\sqrt{7}\right)^2 + 3^2$; $13 = 7 + 9$; $13 = 16$ (хибно). Отже, трикутник не прямокутний.

Відповідь. **1), 3)** — так; **2), 4)** — ні. ■

***Приклад* 6.** Катет прямокутного трикутника дорівнює $5\sqrt{3}$ см, а протилежний до нього кут — $60°$. Знайти бісектрису трикутника, проведену з цього кута.

■ Нехай ABC — прямокутний трикутник ($\angle C = 90°$) (рис. 15), $\angle A = 60°$, $BC = 5\sqrt{3}$ см, AN — бісектриса. За співвідношеннями між елементами прямокутного трикутника: $AC = BC : \operatorname{tg} A = 5\sqrt{3} : \sqrt{3} = 5$ (см). Оскільки AN — бісектриса кута A, то $\angle CAN = 0{,}5\angle A = 30°$. У прямокутному трикутнику NCA за співвідношеннями між елементами прямокутного трикутника $AN = \frac{AC}{\cos 30°} = 5 : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ (см). *Відповідь:* $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ см. ■



Рис. 15

***Приклад* 7.** У прямокутному трикутнику бісектриса гострого кута ділить протилежний катет на відрізки завдовжки 8 м і 10 м. Знайти гіпотенузу трикутника.

■ Нехай ΔABC — прямокутний ($\angle C = 90°$) (рис. 16), $CK = 8$ м, $BK = 10$ м. За властивістю бісектриси $CK : BK = AC : AB = 8 : 10 = 4 : 5$. Нехай $AC = 4x$ м, тоді $AB = 5x$ м. За властивістю вимірювання відрізків $CB = CK + BK = 18$ (м). За теоремою Піфагора $AB^2 = AC^2 + CB^2$; $(4x)^2 + 18^2 = (5x)^2$; $16x^2 + 324 = 25x^2$; $9x^2 = 324$, $x^2 = 36$, $x = 6$; $5x = 5 \cdot 6 = 30$. Отже, $AB = 30$ м. *Відповідь.* 30 м. ■

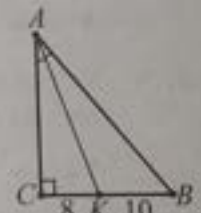


Рис. 16

***Приклад* 8.** З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 11 м і 16 м. Знайти довжини проекцій цих похилих, якщо одна з проекцій на 9 м більша за іншу.

■ Нехай AC і AB — похилі; $OA \perp a$, $AC = 16$ м, $AB = 11$ м, $CO - BO = 9$ м (рис. 17). Нехай $BO = x$ м. Тоді $CO = (x + 9)$ м. Із прямокутних трикутників OAB і OAC за теоремою Піфагора маємо: $AO^2 = AB^2 - BO^2 = AC^2 - OC^2$ або $11^2 - x = 16^2 - (x + 9)^2$; $121 - x^2 = 256 - x^2 - 18x - 81$; $18x = 54$; $x = 3$; $x + 9 = 3 + 9 = 12$. *Відповідь.* 3 м і 12 м. ■

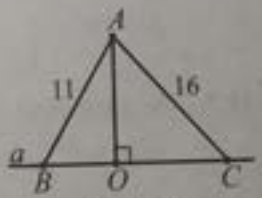


Рис. 17

***Приклад* 9.** Знайти площу прямокутного трикутника, якщо радіуси вписаного в нього й описаного навколо нього кіл відповідно дорівнюють 2 м і 5 м.

■ Нехай трикутник ABC — заданий (рис. 18). У нього: $\angle C = 90°$, r — радіус вписаного кола, $r = 2$ м, R — радіус описаного кола, $R = 5$ м. У прямокутному трикутнику центр описаного кола D є серединою гіпотенузи і його радіус дорівнює половині гіпотенузи. Отже, $DA = DB = R = 5$ м.

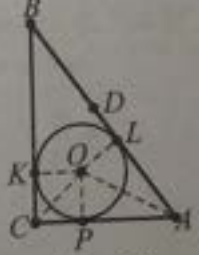


Рис. 18

Нехай точка O — центр вписаного в трикутник кола; OK, OP і OL — радіуси, проведені в точки дотику кола зі сторонами трикутника. Тоді $OK \perp BC$, $OP \perp CA$, $\angle C = 90°$ і $OK = OP$, то $CPOK$ — квадрат. Тому $OK = PO = CP = KC = r = 2$ м. За властивістю дотичних до кола відрізки дотичних, проведених з однієї точки до точок дотику, рівні. Тому $BK = BL$, $AP = AL$ і $CP = CK$. Знайдемо периметр трикутника ABC: $P = KB + BL + LA + AP + PC + CK = 2BL + 2LA + 2PC = 2(BL + LA) + 2PC = 2BA + 2PC = 2 \cdot 2R + 2r = 4R + 2r$; $P = 4 \cdot 5 + 2 \cdot 2 = 24$ (м). Знайдемо площу трикутника $S = pr$. Маємо: $S_{ABC} = 0{,}5 \cdot 24 \cdot 2 = 24$ (м^2). *Відповідь.* 24 м^2. ■

Завдання 31.1–31.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

31.1. Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 18° більший від іншого. Знайти більший з цих кутів.

А	Б	В	Г	Д
66°	68°	36°	54°	48°

31.2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b ($a > b$). Визначити довжину медіани, проведеної до меншого катета.

А $\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{2}}$ Б $\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{2}}$ В $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ Г $\sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$ Д $\sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$

31.3. Катет прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а медіана, що проведена до нього, дорівнює 8 см. Знайти інший катет трикутника.

А 8 см Б $2\sqrt{7}$ см В $4\sqrt{5}$ см Г 12 см Д $8\sqrt{5}$ см

31.4. Один з катетів і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 5 см і 13 см. Знайти площу трикутника.

А 65 см^2 Б 32,5 см^2 В 30 см^2 Г 60 см^2 Д 130 см^2

31.5. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 60 см і 80 см. Знайти висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

А 24 см Б 36 см В 48 см Г 56 см Д 96 см

31.6. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 10 см і 26 см. Знайти проекцію цього катета на гіпотенузу.

А 8 см Б 5,2 см В $7\frac{8}{13}$ см Г 2,6 см Д $3\frac{11}{13}$ см

31.7. Знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, у якого висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює $6\sqrt{3}$ см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу дорівнює 6 см.

А 12 см Б 18 см В 24 см Г 28 см Д 32 см

31.8. Довжина гіпотенузи прямокутного трикутника дорівнює $2/\sqrt{5}$. Обчислити площу круга, описаного навколо трикутника.

А $\frac{\pi}{5}$ Б 4π В $\frac{4\pi}{5}$ Г 5π Д π^2

31.9. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює b, а протилежний до нього кут — β. Визначити радіус кола, описаного навколо трикутника.

А $\frac{b}{2\sin\beta}$ Б $\frac{b}{2\cos\beta}$ В $\frac{b\sin\beta}{2}$ Г $\frac{2b}{\sin\beta}$ Д $\frac{2b}{\cos\beta}$

31.10. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α. Визначити катет, прилеглий до цього кута, якщо радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює r.

А $r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ Б $r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ В $r\left(1+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$ Г $r\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$ Д $2r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$

31.11. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник.

А 4 см Б 2 см В 8 см Г 8,5 см Д 6 см

31.12. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює α, а висота, що проведена до гіпотенузи, дорівнює h. Визначити площу трикутника.

А $\frac{h^2}{2\sin\alpha}$ Б $2h^2\sin 2\alpha$ В $h^2\sin 2\alpha$ Г $\frac{h^2}{2\sin 2\alpha}$ Д $\frac{h^2}{\sin 2\alpha}$

31.13. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як 1 : 2. Знайти відношення протилежних їм катетів.

А 1 : 2 Б 1 : 3 В 1 : $\sqrt{2}$ Г 1 : $\sqrt{3}$ Д 1 : $\sqrt{5}$

31.14. Один із катетів прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а гіпотенуза дорівнює 20 см. Знайти менший з відрізків, на які поділяє гіпотенузу бісектриса прямого кута.

А $8\frac{4}{7}$ см Б $6\frac{5}{12}$ см В 6 см Г 5 см Д $4\frac{2}{7}$ см

31.15. Бісектриси двох кутів прямокутного трикутника утворюють при перетині кут 79°. Знайти менший гострий кут трикутника.

А 11° Б 17° В 22° Г 34° Д 44°

31.16. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 27°. Знайти кут між бісектрисою і висотою трикутника, проведеними з вершини прямого кута.

А 8° Б 16° В 32° Г 28° Д 18°

31.17. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 32°. Знайти кут між висотою і медіаною, проведеними з вершини прямого кута.

А 32° Б 26° В 36° Г 33° Д 23°

31.18. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки у відношенні 3 : 4. У якому відношенні ділить гіпотенузу висота?

А 3 : 4 Б $\sqrt{3}$: 2 В 9 : 16 Г 2 : 3 Д 1 : 2

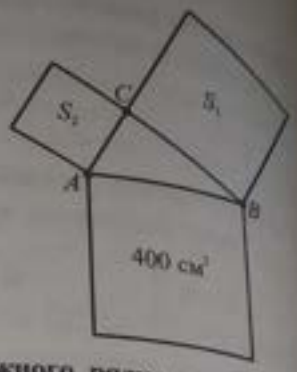
31.19. Знайти площу прямокутного трикутника, у якого бісектриса прямого кута ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4 см і 8 см.

А 32 см^2 Б 16 см^2 В 57,6 см^2 Г 28,8 см^2 Д 14,4 см^2

31.20. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 10 см. Якою найбільшою може бути площа трикутника?

А 75 см^2 Б 100 см^2 В 50 см^2 Г 25 см^2 Д 12,5 см^2

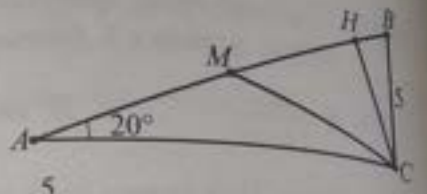
31.21. На сторонах прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) побудовані квадрати. Площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює 400 см^2, а різниця площ квадратів, побудованих на катетах, дорівнює 112 см^2. Знайти площу трикутника.



А 168 см^2
Б 84 см^2
В 96 см^2
Г 192 см^2
Д 48 см^2

Завдання 31.22–31.25 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

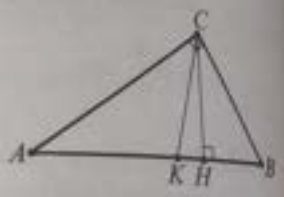
31.22. На рисунку зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), його висоту CH, медіану CM і позначено величини деяких його елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–3) та їхніми величинами (А–Д).



1 $\angle MCH$
2 $\angle CMH$
3 CM

А $\dfrac{5}{2\sin 20°}$
Б $5\sin 20°$
В $50°$
Г $5\sin 70°$
Д $40°$

31.23. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведено бісектрису CK та висоту CH. Установити відповідність між значеннями кута при вершині A (1–3), розміщеній зі сторони бісектриси, і кутом KCH (А–Д).



1 8°
2 32°
3 28°

А 27°
Б 33°
В 37°
Г 13°
Д 17°

31.24. Установити відповідність між катетами a й b (1–3) прямокутних трикутників і значеннями гострого кута, протилежного до катета a (А–Д).

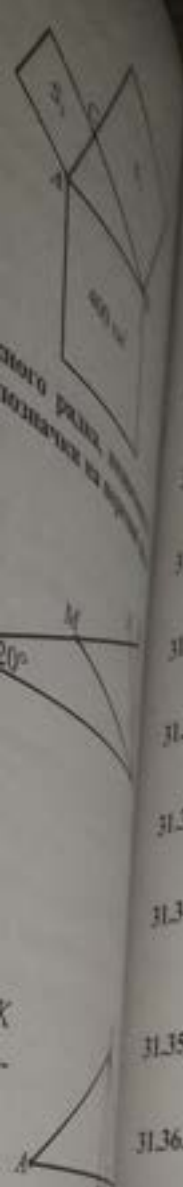
1 2 см, 2 см
2 1 см, $\sqrt{3}$ см
3 $\sqrt{3}$ см, 1 см

А 22,5°
Б 45°
В 60°
Г 90°
Д 30°

31.25. Установити відповідність між довжинами гіпотенуз і катетів (1–3) прямокутних трикутників і їх площами (А–Д).

1 5 см, 3 см
2 13 см, 5 см
3 10 см, 8 см

А 84 см^2
Б 6 см^2
В 24 см^2
Г 48 см^2
Д 30 см^2



Розв'яжіть завдання 31.26–31.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

31.26. Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника утворює з протилежною стороною кути, один з яких дорівнює 70°. Знайти у градусах менший гострий кут трикутника.

31.27. Катети прямокутного трикутника відносяться як 2 : 1, а гіпотенуза дорівнює $5\sqrt{5}$ см. Знайти у сантиметрах більший катет.

31.28. Катет прямокутного трикутника дорівнює 28 см, різниця двох інших його сторін дорівнює 8 см. Знайти в сантиметрах гіпотенузу.

31.29. У прямокутному трикутнику висота і медіана, проведені до гіпотенузи, відповідно дорівнюють 24 см і 25 см. Знайти у сантиметрах периметр трикутника.

31.30. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 12, а тангенс прилеглого кута дорівнює 5/6. Знайти квадрат довжини гіпотенузи.

31.31. Проекції катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу дорівнюють 4 см і 21 см. Знайти у сантиметрах менший катет.

31.32. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює $\sqrt{5}$ см, а проекція іншого катета на гіпотенузу дорівнює 4 см. Знайти у сантиметрах гіпотенузу.

31.33. Точка дотику вписаного в прямокутний трикутник кола ділить гіпотенузу на відрізки 3 см і 10 см. Знайти у квадратних сантиметрах площу трикутника.

31.34. **(ЗНО–2013)** У прямокутний трикутник ABC вписано коло, яке дотикається до катетів AC та BC у точках K і M відповідно. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника ABC (у см), якщо $AK = 4{,}5$ см, $MB = 6$ см.

31.35. Знайти у квадратних сантиметрах площу прямокутного трикутника, якщо його висота ділить гіпотенузу на відрізки 18 см і 32 см.

31.36. Бісектриса прямого кута прямокутного трикутника поділяє гіпотенузу на відрізки, що дорівнюють m і n. Визначити: **1)** висоту, проведену з вершини прямого кута; **2)** площу трикутника. Обчислити їх значення, якщо $m = 3$, $n = 4$.

31.37*. У прямокутному трикутнику висота і бісектриса, проведені з вершини прямого кута, відповідно дорівнюють h і l. Визначити площу трикутника й обчислити її значення, якщо $h = 0{,}5$; $l = 0{,}7$.

31.38. У прямокутний трикутник вписано коло радіуса r. Визначити синус меншого гострого кута трикутника, якщо довжина гіпотенузи $5r$.

31.39*. Висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює h, а відстань від вершини прямого кута до точки перетину бісектриси меншого гострого кута з меншим катетом дорівнює d. Визначити довжину меншого катета (з точністю до 0,01) й обчислити її значення, якщо $h = 7$, $d = 4$.

31.40. У прямокутному трикутнику катет дорівнює 12, а гіпотенуза — 13. Знайти квадрат довжини бісектриси трикутника, проведеної з вершини меншого кута.

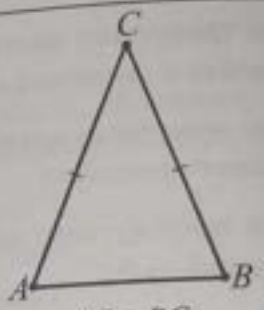
31.41. Від високої тополі падає тінь завдовжки 9 м, а від вертикальної жердини заввишки 2 м — тінь завдовжки 1,2 м. Знайти висоту тополі.

Тема 32. Рівнобедрений трикутник

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

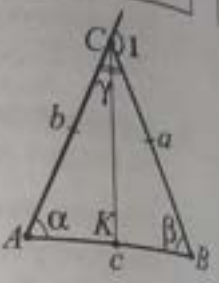
— застосовувати означення, ознаки та властивості елементарних геометричних фігур для розв'язування планіметричних задач та задач практичного змісту;
— знаходити довжини відрізків, градусні та радіанні міри кутів, площі геометричних фігур;
— використовувати формули площ геометричних фігур для розв'язування планіметричних задач і задач практичного змісту;
— пропорційні відрізки прямокутного трикутника;
— відношення площ подібних трикутників.

Трикутник, у якого дві сторони рівні, називають *рівнобедреним*. У трикутнику ABC (рис. 1) $AC = BC$, тому він рівнобедрений. AC і BC — бічні сторони, AB — основа.



$AC = BC$

Рис. 1



$CK = l_c = m_c = h_c$

Рис. 2

Властивості рівнобедреного трикутника

1. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

2. Бісектриса, проведена до основи рівнобедреного трикутника, є його медіаною і висотою.

Наприклад, якщо ABC — рівнобедрений, то CK — його бісектриса, медіана та висота (рис. 2).

3. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є одночасно його медіаною і бісектрисою.

4. Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є одночасно його висотою і бісектрисою.

5. Медіани, бісектриси та висоти, проведені до бічних сторін рівнобедреного трикутника, рівні.

6. Зовнішній кут при вершині між бічними сторонами рівнобедреного трикутника удвічі більший за кут при основі. На рис. 2 $\angle 1$ — зовнішній, то $\angle 1 = 2\alpha = 2\beta$.

Ознаки рівнобедреного трикутника

Трикутник є рівнобедреним, якщо:

1) у нього є два рівні кути;
2) одна з медіан є висотою або бісектрисою;
3) одна з висот є бісектрисою або медіаною;
4) одна з бісектрис є медіаною або висотою;
5) дві медіани (висоти, бісектриси) рівні.

Подібність рівнобедрених трикутників

1. Рівнобедрені трикутники подібні, якщо вони мають по рівному куту при: **а)** основі; **б)** вершині між бічними сторонами.

2. Усі рівнобедрені прямокутні трикутники подібні.

Основні співвідношення для рівнобедреного трикутника

Для будь-якого рівнобедреного трикутника (рис. 3) мають місце такі співвідношення:

1) $h_a = h_b = \dfrac{2S}{a}$;

2) $h_c = m_c = l_c = \dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2 - c^2}$.

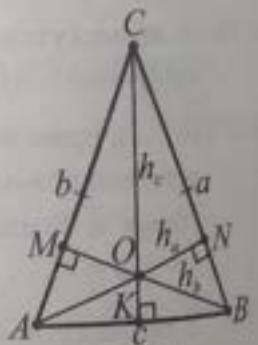


Рис. 3

Для прямокутного рівнобедреного трикутника (рис. 4) мають місце такі співвідношення:

1) $a = b = \dfrac{c\sqrt{2}}{2}$;

2) $\alpha = \beta = 45°$, $\gamma = 90°$;

3) $S = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{c^2}{4}$;

4) $m_a = m_b = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, $m_c = h_c = l_c = \dfrac{c}{2}$.

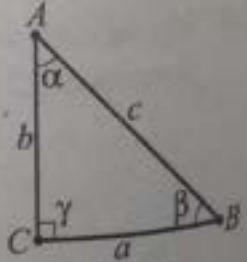


Рис. 4

Рівносторонній трикутник

Трикутник, у якого всі сторони рівні, називають *рівносторонім*. Наприклад, на рис. 5 трикутник ABC — рівносторонній, тому $AB = BC = AC = a$.

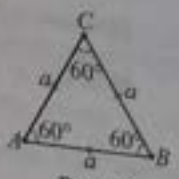


Рис. 5

Властивості рівностороннього трикутника

1. Будь-який рівносторонній трикутник має всі властивості рівнобедреного трикутника.

2. Усі кути рівностороннього трикутника рівні (рис. 5): $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

3. Будь-яка бісектриса рівностороннього трикутника є його медіаною і висотою: $h_a = m_a = l_a = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

4. Центри вписаного й описаного кіл збігаються (рис. 6).

5. Сума радіусів описаного та вписаного кіл дорівнює висоті ($h = R + r$) (рис. 6).



Рис. 6

Радіус вписаного й описаного кіл для рівностороннього трикутника

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{3} = 2r,\quad r = \frac{a\sqrt{3}}{6};\quad R = 2r.$$

Площа рівностороннього трикутника. $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Ортоцентр, центр мас, центр вписаного й описаного кіл у рівносторонньому трикутнику збігаються.

Усі рівносторонні трикутники подібні.

Сума відстаней від будь-якої точки рівностороннього трикутника до його сторін дорівнює висоті трикутника (рис. 7) $FX + FN + FK = h$.

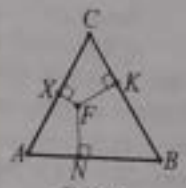


Рис. 7

Приклад 1. Кут при основі рівнобедреного трикутника учетверо більший від кута при вершині між бічними сторонами. Знайти кут при вершині між бічними сторонами.

А	Б	В	Г	Д
20°	40°	15°	140°	10°

■ Нехай трикутник ABC — заданий (рис. 8). У ньому $AC = BC$, $\angle A = 4\angle C$. Оскільки $\angle A = \angle B$ і $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, то: $4\angle C + 4\angle C + \angle C = 180°$; $9\angle C = 180°$; $\angle C = 20°$.

Відповідь. **А.** ■



Рис. 8

Приклад 2. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 82°. Знайти кут при основі трикутника.

А	Б	В	Г	Д
82°	90°	49°	51°	98°

■ Нехай MKP — рівнобедрений трикутник з основою MP (рис. 9). За теоремою про суму кутів трикутника $\angle K + \angle M + \angle P = 180°$. За властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника $\angle M = \angle P$. Складемо і розв'яжемо рівняння: $82° + 2\angle M = 180°$. Отже, $\angle M = 49°$.

Відповідь. **В.** ■

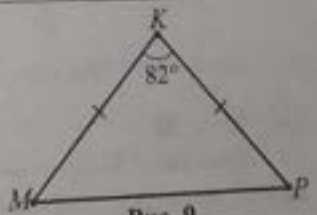


Рис. 9

Приклад 3. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12 см. Знайти периметр трикутника, якщо його бісектриса, проведена до основи, дорівнює 8 см.

■ Нехай трикутник MBK рівнобедрений з основою MK (рис. 10), BC — бісектриса, а значить медіана та висота. Тому $MC = KC = \dfrac{1}{2}MK = 6$ (см). У ΔMCB за теоремою Піфагора $MB^2 = MC^2 + BC^2$. Маємо: $MB^2 = 6^2 + 8^2 = 100$; $MB = 10$ (см). $KB = MB = 10$ см (бічні сторони). $P = 10 + 10 + 12 = 32$ (см).

Відповідь. 32 см.■

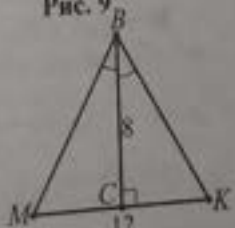


Рис. 10

Приклад 4. Кут, протилежний основі рівнобедреного трикутника, дорівнює 120°. Знайти основу трикутника, якщо висота, проведена до бічної сторони дорівнює 7 см.

■ Нехай у рівнобедреному трикутнику ABC (рис. 11) AC — основа, AO — висота, проведена до продовження сторони BC, тому $\angle O = 90°$ і трикутник AOB прямокутний. Оскільки в трикутнику $ABC \angle C = \frac{180° - 120°}{2} = 30°$, то в прямокутному трикутнику AOC за властивістю катета, який лежить проти кута 30°, тоді $AC = 2AO$; $AC = 2 \cdot 7 = 14$ (см). *Відповідь.* 14 см. ■

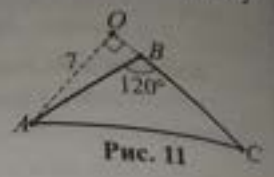


Рис. 11

Приклад 5. Знайти кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його зовнішніх кутів дорівнює: **а)** 48°; **б)** 116°. Скільки розв'язків має задача?

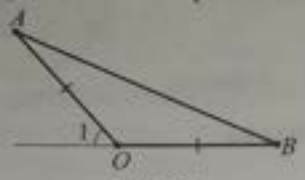


Рис. 12

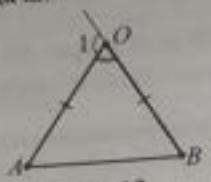


Рис. 13

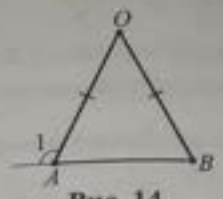


Рис. 14

Нехай $\angle 1$ — зовнішній кут трикутника.

а) Якщо зовнішній кут при деякій вершині трикутника гострий, то кут трикутника при цій вершині — тупий. Трикутник може мати лише один тупий кут. У рівнобедреному трикутнику це кут між бічними сторонами. На рис. 12 це кут O. $\angle 1$ і $\angle O$ — суміжні, тому $\angle O = 180° - 48° = 132°$. За властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника $\angle A = \angle B$. За теоремою про зовнішній кут трикутника $\angle 1 = \angle A + \angle B$. Тому $\angle A = \angle B = 48° : 2 = 24°$. У цьому випадку задача має один розв'язок;

б) якщо зовнішній кут при деякій вершині трикутника тупий, то кут трикутника при цій вершині — гострий. У рівнобедреному трикутнику це може бути:

1) кут між бічними сторонами (рис. 13); 2) кут при основі (рис. 14). Маємо:

1) $\angle 1$ і $\angle O$ — суміжні, $\angle O = 180° - 116° = 64°$; $\angle A = \angle B = (180° - 64°) : 2 = 58°$;

2) $\angle 1$ і $\angle A$ — суміжні, тому $\angle A = \angle B = 180° - 116° = 64°$. $\angle O = 180° - 64° - 64° = 52°$. У цьому випадку задача має два розв'язки.

Відповідь. **а)** Один розв'язок: 132°, 24°, 24°; **б)** два розв'язки: 64°, 58°, 58° або 64°, 64°, 52°.

Приклад 6. З вершини A рівнобедреного трикутника ABC з основою AB проведена медіана завдовжки 90 см. Ця медіана утворює з бісектрисою кута C кут 60°. Знайти довжину бісектриси кута C.

■ Нехай трикутник ABC — заданий рівнобедрений трикутник (рис. 15) з основою AB, $AC = CB$, AK — медіана, $AK = 90$ см, CN — бісектриса кута C, O — точка перетину AK і CN, $\angle AON = 60°$. За властивістю бісектриси, проведеної до основи рівнобедреного трикутника, CN — медіана та висота. За властивістю медіан трикутника $AO : OK = 2 : 1$. $OA = \frac{2}{3} AK = \frac{2}{3} \cdot 90 = 60$ (см). Оскільки CN — висота, $\angle AON = 60°$, то $\angle OAN = 30°$. Маємо: $ON = \frac{AO}{2} = \frac{60}{2} = 30$ (см). $CN = 3ON$; $CN = 90$ см. *Відповідь.* 90 см. ■

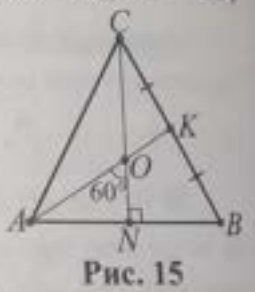


Рис. 15

Приклад 7. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 13 см, а основа — 10 см. Знайти висоту, проведену до бічної сторони.

■ Нехай ABC — заданий рівнобедрений трикутник (рис. 16), у якому $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см, AN — висота. Обчислимо площу трикутника за формулою Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = \frac{a+b+c}{2}$, a, b, c — сторони трикутника. $p = \frac{13+13+10}{2} = 18$ (см). $S = \sqrt{18(18-13)(18-13)(18-10)} = 5\sqrt{18 \cdot 8} = 60$ (см^2). Оскільки AN — висота трикутника ABC, то $S = \frac{BC \cdot AN}{2}$. Звідси $AN = \frac{2S}{BC} = \frac{120}{13} = 9\frac{3}{13}$ (см). *Відповідь.* $9\frac{3}{13}$ см. ■

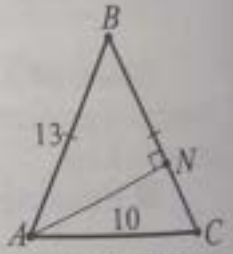


Рис. 16

Приклад 8. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до бічної сторони як 4 : 3, а висота, проведена до основи, дорівнює 30 см. Знайти відрізки, на які ця висоту ділить бісектриса кута при основі.

■ Нехай ABC — заданий рівнобедрений трикутник ($AB = BC$), $AC : AB = 4 : 3$, $BK \perp AC$, $BK = 30$ см (рис. 17). Нехай $AC = 4x$ см, тоді $AB = 3x$ см. За властивістю висоти, проведеної з вершини рівнобедреного трикутника, BK — медіана, тому $AK = \frac{1}{2}AC = 2x$ (см). У трикутнику AKB AM — бісектриса. За властивістю бісектриси $MK : MB = AK : AB = 2 : 3$. Нехай $MK = 2y$ см, тоді маємо: $MB = 3y$ см. $BK = BM + MK = 3y + 2y = 5y$ (см). Маємо: $5y = 30$; $y = 6$; $3y = 3 \cdot 6 = 18$; $2y = 2 \cdot 6 = 12$. Отже, $BM = 18$ см, $MK = 12$ см. *Відповідь.* 18 см, 12 см. ■

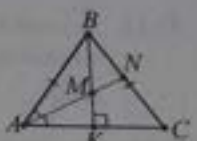


Рис. 17

Завдання 32.1–32.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

32.1. Знайти периметр рівнобедреного трикутника зі сторонами 3 см і 7 см.

А	Б	В	Г	Д
20 см	10 см	13 см	17 см	17 см або 13 см

32.2. У рівнобедреному трикутнику ABC кут C дорівнює 104°. Знайти кут B.

А 66° **Б** 76° **В** 38° **Г** 28° **Д** 48°

32.3. Знайти площу рівнобедреного трикутника, у якого бічна сторона дорівнює $4\sqrt{2}$ см, а кут між бічними сторонами дорівнює 30°.

А $8\sqrt{2}$ см^2 **Б** $16\sqrt{3}$ см^2 **В** $8\sqrt{3}$ см^2 **Г** 16 см^2 **Д** 8 см^2

32.4. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 10 см, а висота, що проведена до основи, — 6 см. Знайти площу трикутника.

А 48 см^2 **Б** 24 см^2 **В** 96 см^2 **Г** 30 см^2 **Д** 60 см^2

32.5. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до бічної сторони, поділяє її на відрізки 8 см і 2 см, починаючи від вершини кута між бічними сторонами. Знайти площу трикутника.

А 78 см^2 **Б** 64 см^2 **В** 60 см^2 **Г** 30 см^2 **Д** 32 см^2

32.6. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює 6 см, а радіус кола, описаного навколо трикутника, — 5 см. Знайти висоту, проведену до основи.

А 8 см **Б** 9 см **В** 10 см **Г** 11 см **Д** 12 см

32.7. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює α, а радіус кола, вписаного в трикутник, дорівнює r. Визначити бічну сторону трикутника.

А $r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$ **Б** $r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$ **В** $\frac{r\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$ **Г** $r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$ **Д** $\frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$

32.8. Знайти площу рівностороннього трикутника зі стороною $2\sqrt{3}$ см.

А 3 см^2 **Б** $\sqrt{3}$ см^2 **В** $3\sqrt{3}$ см^2 **Г** $4\sqrt{3}$ см^2 **Д** $2\sqrt{3}$ см^2

32.9. Радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайти сторону трикутника.

А 12 см **Б** 16 см **В** 24 см **Г** 36 см **Д** 48 см

32.10. Сторона правильного трикутника дорівнює $20\sqrt{3}$ см. Знайти проекцію однієї медіани на іншу.

А 15 см Б 20 см В 30 см Г 40 см Д $10\sqrt{3}$ см

32.11. У рівнобедреному трикутнику бісектриси кутів при основі утворюють при перетині кут 52°. Знайти кут між бічними сторонами трикутника.

А 72° Б 74° В 76° Г 78° Д 84°

32.12. O — точка перетину висот AM і CK рівнобедреного трикутника ABC з основою AC. Знайти кут B, якщо $\angle AOC = 110°$.

А 70° Б 80° В 60° Г 50° Д 35°

32.13. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 55 см, а висота, що проведена до основи, — 44 см. Знайти відношення відрізків, на які поділяє бічну сторону бісектриса кута при основі.

А 2 : 3 Б 3 : 4 В 4 : 5 Г 5 : 6 Д 6 : 7

32.14. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайти радіус кола, яке проходить через середини сторін трикутника.

А 2 см Б 8 см В 4 см Г $4\sqrt{3}$ см Д $2\sqrt{3}$ см

32.15. Знайти радіус кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 160 м, а висота, проведена до неї, — 60 м.

А $26\frac{2}{3}$ м Б $13\frac{1}{3}$ м В 40 м Г $17\frac{1}{7}$ м Д $8\frac{4}{7}$ м

32.16. Знайти відстань від точки перетину медіан до центра кола, вписаного в рівнобедрений трикутник з основою 160 м і бічною стороною 100 м.

А $13\frac{1}{3}$ м Б $3\frac{1}{3}$ м В $23\frac{6}{7}$ м Г $6\frac{2}{3}$ м Д $7\frac{2}{3}$ м

32.17. Центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, поділяє висоту, що проведена до основи, у відношенні 10 : 3. Знайти периметр трикутника, якщо бічна сторона дорівнює 20 см.

А 64 см Б 49 см В 43 см Г 46 см Д 52 см

32.18. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють 16 см і 10 см. Знайти висоту трикутника, проведену до бічної сторони.

А 34 см Б 6 см В 8 см Г 9,6 см Д 4,8 см

32.19. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 48 см. За якого значення висоти, проведеної до основи, площа трикутника буде найбільшою?

А 24 см Б $24\sqrt{2}$ см В $12\sqrt{2}$ см Г $12\sqrt{3}$ см Д $8\sqrt{3}$ см

32.20. S — площа рівностороннього трикутника. Серед наведених графіків указати графік залежності площі S від периметра P: $S = S(P)$.

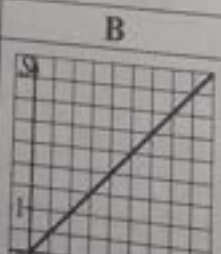
А



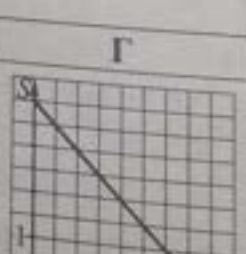
Б



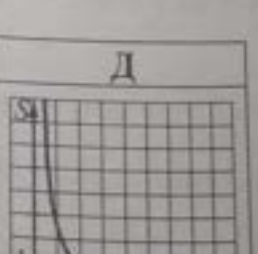
В



Г

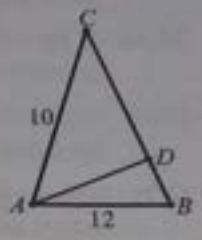


Д



Завдання 32.21–32.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

32.21. На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC ($AC = BC$), його висоту AD і позначено величини деяких елементів. Установити відповідність між елементами трикутника (1–3) та їхніми величинами (А–Д).



1 AD	А 9,6
2 S	Б 6,25
3 Радіус вписаного кола	В 3
	Г 48
	Д 32

32.22. Установити відповідність між заданими довжинами основ (1–3) рівнобедрених трикутників з кутами 120° при вершинах, протилежних до основ, та висотами (А–Д) до цих основ.

1 4 м	А 4 м
2 $8\sqrt{3}$ м	Б $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ м
3 10 м	В 6 м
	Г 16 м
	Д $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ м

32.23. Установити відповідність між довжинами бічних сторін рівнобедрених трикутників (1–3), кут між якими дорівнює 30°, та площами (А–Д) цих трикутників.

1 20 см	А 196 см^2
2 24 см	Б 100 см^2
3 28 см	В 256 см^2
	Г 625 см^2
	Д 144 см^2

32.24. Установити відповідність між довжинами сторін рівнобедрених трикутників (1–3) та радіусами описаних навколо них кіл (А–Д).

1 29 см, 29 см, 42 см	А 21,025 см
2 30 см, 30 см, 48 см	Б 20 см
3 5 см, 5 см, 8 см	В 25 см
	Г $\frac{25}{6}$ см
	Д $\frac{50}{3}$ см

Розв'яжіть завдання 32.25–32.37. Відповідь запишіть десятковим дробом.

32.25. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20. Знайти його основу, якщо вона на 2 більша від бічної сторони.

32.26. Кут при основі AB рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Висоти трикутника, проведені до бічних сторін, перетинаються в точці O. Знайти в градусах величину кута AOB.

32.27*. У рівнобедреному трикутнику ABC основа AC дорівнює 18. Через точку O — середину висоти BD — проведено промені AO і CO, які перетинають бічні сторони в точках M і K. Знайти довжину відрізка MK.

32.28. У рівнобедреному трикутнику основа і бічна сторона відповідно дорівнюють 5 і 20. Знайти менший з відрізків, на які поділяє бічну сторону бісектриса кута при основі.

32.29. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола ділить висоту, проведену до основи, у відношенні 12 : 5, а бічна сторона дорівнює 60. Знайти периметр трикутника.

32.30. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 108 см, а основа — 30 см. Знайти: **1)** площу трикутника (у см^2); **2)** радіус вписаного кола (у см).

32.31. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 12, а висота, що проведена до основи, — 8. Знайти: **1)** площу трикутника; **2)** радіус кола, вписаного в цей трикутник.

32.32. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a, радіус вписаного кола — r. Визначити бічну сторону трикутника й обчислити її значення, якщо $a = 6$, $r = 2$.

32.33. У рівнобедреному трикутнику основа дорівнює a, висота, що проведена до основи, — h. Визначити відстань від середини основи до бічної сторони й обчислити її значення, якщо $a = 3$, $h = 2$.

32.34. Знайти в градусах кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо бісектриса кута при основі відтинає від нього трикутник, подібний даному.

32.35. Знайти площу рівнобедреного трикутника з точністю до 0,01 см^2, якщо висота, яка проведена до бічної сторони, дорівнює 12 см, а інша висота — 9 см.

32.36. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, медіана, яка проведена до бічної сторони, дорівнює m. Визначити квадрат основи трикутника й обчислити його значення, якщо $b = 3$, $m = 2{,}5$.

32.37. У правильному трикутнику зі стороною 6 на одній зі сторін узято точку на відстані 1 від вершини. Знайти квадрат відстані від цієї точки до центра трикутника.

Тема 33. Чотирикутники

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:
— чотирикутник та його елементи, сума кутів чотирикутника;
— паралелограм, його властивості й ознаки;
— прямокутник, ромб, квадрат та їх властивості;
— трапеція, середня лінія трапеції та її властивості;
— вписані в коло та описані навколо кола чотирикутники;
— застосовувати означення, ознаки та властивості різних видів чотирикутників до розв'язування планіметричних задач і задач практичного змісту.

Означення й елементи чотирикутника. *Чотирикутником* називають фігуру, яка складається з чотирьох точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, чотирьох відрізків, які послідовно з'єднують ці точки, й обмеженої ними частини площини (рис. 1).

Чотирикутник позначають, послідовно записуючи його вершини.

Чотирикутники бувають *опуклі й неопуклі*. Чотирикутник називають *опуклим*, якщо він лежить з одного боку від кожної прямої, яка містить його сторону (рис. 2). Чотирикутник називають *неопуклим*, якщо він не лежить з одного боку від кожної прямої, яка містить його сторону (рис. 3). Далі ми розглядатимемо лише опуклі чотирикутники.

Елементами чотирикутника є його вершини, сторони та кути. На рис. 1 A, B, C і D — вершини чотирикутника, AB, BC, CD і DA — сторони чотирикутника, кути DAB, ABC, BCD і CDA — кути чотирикутника. Кути позначають і так: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ і $\angle D$ відповідно.

Відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника, називають його *діагоналлю*. Кожен чотирикутник має дві діагоналі, які перетинаються. Кожна діагональ розбиває чотирикутник на два трикутники. На рис. 4 діагоналі AC і BD розбивають чотирикутник $ABCD$ на трикутники ABC і ADC та BAD і BCD відповідно. Діагоналі позначають d_1 і d_2.

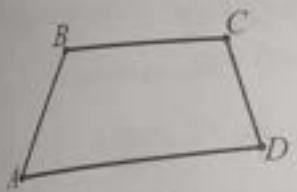


Рис. 1

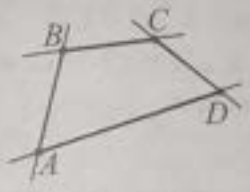


Рис. 2

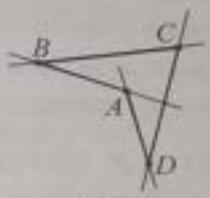


Рис. 3

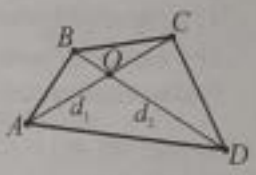


Рис. 4

Периметр чотирикутника — це сума довжин усіх його сторін: $P = a + b + c + d$ (рис. 5).

Кожна сторона чотирикутника менша за суму трьох інших його сторін. Щоб установити, чи можна з чотирьох відрізків утворити чотирикутник, потрібно перевірити, чи буде найдовший з них меншим за суму трьох інших: $a < b + c + d$.

Сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює 360°.

Кут, суміжний з кутом чотирикутника, називають *зовнішнім*. При кожній вершині чотирикутника є два зовнішні кути, які рівні між собою. $\angle 1$ і $\angle 2$ — зовнішні кути при вершині A, $\angle 1 = \angle 2$. *Сума зовнішніх кутів* чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.

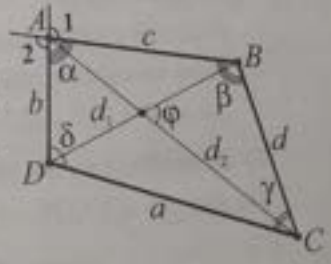


Рис. 5

Площа чотирикутника. $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$.

Чотирикутник, вписаний у коло

Чотирикутник, усі вершини якого лежать на колі, називають *вписаним* у це коло, а коло називають *описаним* навколо чотирикутника. На рис. 6 чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло.

Навколо чотирикутника можна описати коло тоді й тільки тоді, коли суми його протилежних кутів дорівнюють 180°: $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$ (рис. 6).

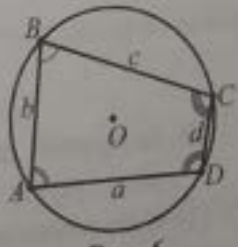


Рис. 6

Чотирикутник, описаний навколо кола.

Чотирикутник, усі сторони якого дотикаються до кола, називають *описаним* навколо цього кола, а коло називають *вписаним* у чотирикутник. На рис. 7 чотирикутник $ABCD$ описаний навколо кола.

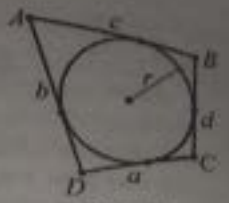


Рис. 7

У чотирикутник можна вписати коло тоді й тільки тоді, коли суми його протилежних сторін рівні: $a + c = b + d$ (рис. 7).

Площу чотирикутника, описаного навколо кола радіуса r, можна обчислити за формулою:

$$S = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r = pr,$$

Паралелограм. *Паралелограмом* називають чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні. На рис. 8: $AB \| CD$, $AD \| BC$, тому $ABCD$ — паралелограм.

Висотою паралелограма називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї сторони до протилежної сторони або до її продовження.

На рис. 9: $BN = h_a$ і $BK = h_b$ — висоти паралелограма, проведені з вершини B до сторін AD і CD.

Діагоналлю паралелограма називають відрізок, який сполучає протилежні вершини.

На рис. 10 $BD = d_1$ і $AC = d_2$ — діагоналі.

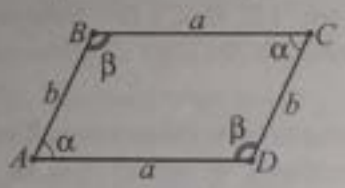


Рис. 8

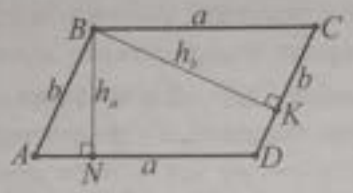


Рис. 9

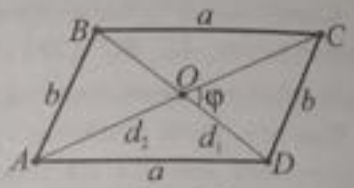


Рис. 10

Властивості паралелограма:

1) у паралелограма протилежні сторони рівні. На рис. 8: $AB = CD = a$, $BC = AD = b$;

2) у паралелограма протилежні кути рівні. На рис. 8: $\angle A = \angle C = \alpha$, $\angle B = \angle D = \beta$;

3) діагоналі паралелограма при перетині діляться навпіл.

На рис. 10: $BO = OD = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} d_1$; $AO = OC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} d_2$;

4) точка перетину діагоналей паралелограма є центром його симетрії;

5) кожна діагональ паралелограма ділить його на два рівні трикутники.

На рис. 10: $\Delta ABD = \Delta CDB$, $\Delta ABC = \Delta CDA$;

6) сума кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°: $\alpha + \beta = 180°$ (рис. 8);

7) у паралелограмі кут між його висотами, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює його гострому куту, а з вершини гострого кута — тупому куту. На рис. 9: $\angle NBK = \angle A = \angle C$;

8) сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін:

$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$ (рис. 10);

9) бісектриси кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, взаємно перпендикулярні.

На рис. 11 AN і DK — бісектриси кутів A та D відповідно, тоді $\angle AOD = 90°$;

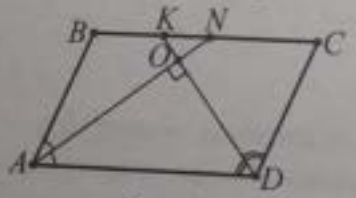


Рис. 11

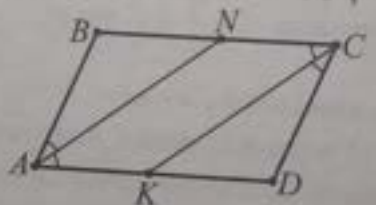


Рис. 12

10) бісектриси двох протилежних кутів паралелограма паралельні. На рис. 12 AN і CK — бісектриси кутів A та C відповідно, тоді $AN \| CK$;

11) якщо в паралелограм вписано коло, то він є ромбом;

12) якщо паралелограм вписаний у коло, то він є прямокутником.

Ознаки паралелограма

Чотирикутник $ABCD$ буде паралелограмом, якщо:

1) $AB = CD$ і $AB \| CD$; 2) $AB = CD$ і $BC = AD$;

3) $\angle A = \angle C$ і $\angle B = \angle D$. 4) $AO = OC$ і $BO = OD$ (O — точка перетину діагоналей чотирикутника);

Площа паралелограма

$S = ah_a = bh_b$; $S = ab\sin\alpha$, де α — кут між сторонами; $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$, де φ — кут між діагоналями.

Ромб

Ромбом називають паралелограм, у якого всі сторони рівні.

На рис. 13 $ABCD$ — паралелограм, у якого $AB = BC = CD = DA$, тому $ABCD$ — ромб. $BF = h$ — висота ромба.

Оскільки ромб — це паралелограм, то він має всі властивості паралелограма, а також властивості, характерні лише для нього.

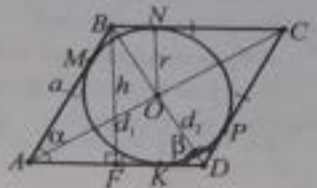


Рис. 13

Властивості, притаманні для ромба:

1) діагоналі ромба перпендикулярні. На рис. 13 $d_1 \perp d_2$;

2) діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.

На рис. 13: $\angle BAC = \angle CAD = \angle BCA = \angle ACD = \frac{\alpha}{2}$; $\angle ABD = \angle DBC = \angle ADB = \angle BDC = \frac{\beta}{2}$.

Ознака ромба

1. Паралелограм, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є ромбом.

2. Паралелограм, діагоналі якого є бісектрисами його кутів, є ромбом.

У будь-який ромб можна вписати коло. Центр кола, вписаного в ромб, є точкою перетину його діагоналей. $r = \frac{1}{2}h$. Якщо ромб вписаний у коло, то він є квадратом.

Площа ромба

$S = a^2\sin\alpha$; $S = ah$; $S = \frac{1}{2}d_1d_2$; $S = 2ra$, де a — сторона ромба, r — радіус вписаного кола, h — висота, d_1 і d_2 — діагоналі, α — кут між сторонами.

Прямокутник

Паралелограм, у якого всі кути прямі, називають *прямокутником*.

На рис. 14 $ABCD$ — паралелограм, у якого $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, тому $ABCD$ — прямокутник.

Властивості прямокутника

Оскільки прямокутник — це окремий вид паралелограма, то він має всі властивості паралелограма. Крім цих властивостей, прямокутник має характерну лише для нього властивість: *діагоналі прямокутника рівні*. Наприклад, у прямокутнику $ABCD$ (рис. 14) AC і BD — діагоналі. Тоді $AC = BD$.

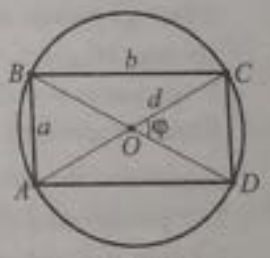


Рис. 14

Ознака прямокутника

Якщо діагоналі паралелограма рівні, то такий паралелограм є прямокутником.

Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло. Центром кола, описаного навколо прямокутника, є точка перетину його діагоналей. $R = \frac{1}{2}d$; $R = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. Якщо в прямокутник вписане коло, то він є квадратом.

Площа прямокутника: $S = ab$; $S = \frac{1}{2}d^2\sin\varphi$.

Квадрат

Квадрат — це ромб, у якого всі кути прямі.

На рис. 15 $ABCD$ — ромб, $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90°$, тому $ABCD$ — квадрат.



Рис. 15

Властивості квадрата

Оскільки квадрат — це ромб, прямокутник і паралелограма, то він має всі їхні властивості.

Ознака квадрата

Якщо діагоналі чотирикутника рівні та є бісектрисами його кутів, то такий чотирикутник — квадрат.

У будь-який квадрат можна вписати коло й навколо квадрата можна описати коло (рис. 15).

Центром вписаного й описаного кіл є точка перетину діагоналей квадрата:

$r = \frac{1}{2}a$, $R = \frac{1}{2}d$, $R = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, де a — сторона квадрата, r — радіус вписаного кола, R — радіус описаного кола.

Площа квадрата: $S = a^2$; $S = \frac{1}{2}d^2$.

Трапеція

Трапецією називають чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші — непаралельні. Паралельні сторони трапеції називають її *основами*, а непаралельні — *бічними сторонами*.

На рис. 16 $BC \| AD$, AB і CD — не паралельні, тому $ABCD$ — трапеція. AD і BC — основи, AB і CD — бічні сторони. AC і BD — діагоналі трапеції.

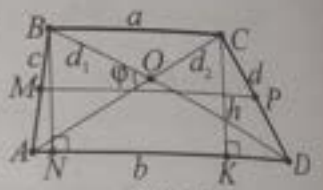


Рис. 16

Висотою трапеції називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї основи до іншої або до її продовження. На рис. 16 $BN \perp AD$, $CK \perp AD$, BN, CK — висоти.

Прямокутною називають трапецію, один з кутів якої прямий.

На рис. 17 а) у трапеції $ABCD$ $\angle A = 90°$, тому вона прямокутна.

Рівнобічною називають трапецію, у якої бічні сторони рівні.

На рис. 17 б) $AB = CD$, тому трапеція рівнобічна.

Властивість трапеції

Сума градусних мір кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°.

На рис. 16 $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$.

У трапецію можна вписати коло, якщо сума її основ дорівнює сумі бічних сторін.

Навколо трапеції можна описати коло, якщо вона рівнобічна.

Властивості рівнобічної трапеції

1. У рівнобічній трапеції кути при кожній основі рівні. На рис. 17 б) $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$.

2. Сума протилежних кутів рівнобічної трапеції дорівнює 180°. На рис. 17 б) $\angle A + \angle C = 180°$, $\angle B + \angle D = 180°$.

3. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні. На рис. 18 $AC = BD$.

4. Якщо BK і CM — висоти рівнобічної трапеції $ABCD$ (рис. 19), то:

1) $\Delta ABK = \Delta DCM$; 2) $AK = DM = \frac{1}{2}(AD - BC)$; 3) $KD = MA = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

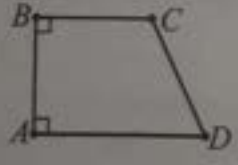


Рис. 17 а)

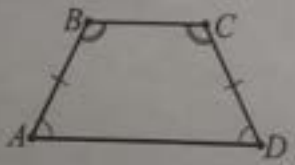


Рис. 17 б)

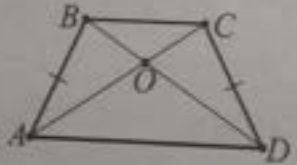


Рис. 18

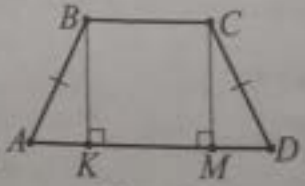


Рис. 19

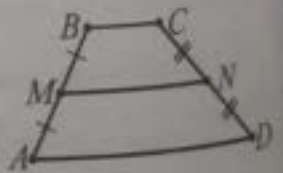


Рис. 20

Ознаки рівнобічної трапеції

1. Якщо кути при основі трапеції рівні, то трапеція рівнобічна.
2. Якщо в трапеції сума протилежних кутів дорівнює 180°, то трапеція рівнобічна.
3. Якщо діагоналі трапеції рівні, то трапеція рівнобічна.

Середня лінія трапеції

Середньою лінією трапеції називають відрізок, який сполучає середини її бічних сторін. $AM = MB$, $CN = ND$, тому MN — середня лінія трапеції $ABCD$ (рис. 20).

Теорема. *Середня лінія трапеції паралельна до основ і дорівнює їх півсумі.*

На рис. 20 MN — середня лінія трапеції $ABCD$, тому $MN \parallel BC$, $MN \parallel AD$ і $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Площа трапеції

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \frac{d_1 d_2 \sin\alpha}{2}$; $S = lh$, де a і b — основи трапеції, d_1 і d_2 — діагоналі трапеції, α — кут між діагоналями, h — висота трапеції, l — середня лінія.

Приклад 1. Знайти кути чотирикутника, якщо відомо, що три з них, взяті послідовно, відносяться як 5 : 3 : 4 і навколо цього чотирикутника можна описати коло.

А	Б	В	Г	Д
50°, 110°, 130°, 70°	80°, 20°, 130°, 130°	100°, 60°, 80°, 120°	80°, 120°, 110°, 50°	110°, 90°, 80°, 80°

■ Нехай коло $(O; R)$ описане навколо чотирикутника $MNKD$ (рис. 21). $\angle M : \angle N : \angle K = 5 : 3 : 4$. Оскільки навколо чотирикутника описане коло, то $\angle M + \angle K = 180°$, $\angle N + \angle D = 180°$. Нехай $\angle M = 5x°$, тоді $\angle N = 3x°$, $\angle K = 4x°$. $5x + 4x = 180$; $9x = 180$; $x = 20$. Тоді $5x = 5 \cdot 20 = 100$; $3x = 3 \cdot 20 = 60$; $4x = 4 \cdot 20 = 80$. Отже, $\angle M = 100°$, $\angle N = 60°$, $\angle K = 80°$, $\angle D + \angle N = 180°$, $\angle D = 180° - 60° = 120°$. *Відповідь.* **В.** ■

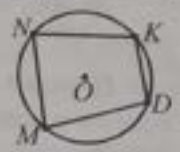


Рис. 21

Приклад 2. O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ (рис. 22). Знайти сторону AB, якщо периметр трикутника COD дорівнює 15 см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см.

А	Б	В	Г	Д
15 см	10 см	8 см	6 см	4 см

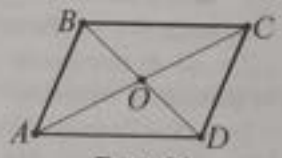


Рис. 22

■ За властивістю діагоналей паралелограма: $AO = OC = \frac{AC}{2} = 10 : 2 = 5$ (см). $BO = OD = \frac{BD}{2} = 8 : 2 = 4$ (см). $P_{\Delta COD} = CD + OC + OD$; $CD = P_{\Delta COD} - (OC + OD) = 15 - (5 + 4) = 6$ (см). За властивістю протилежних сторін паралелограма $AB = CD = 6$ см. *Відповідь.* **Г.** ■

Приклад 3. Знайти сторони чотирикутника, якщо перша з них на 9 см менша за другу, на 2 см більша за третю й удвічі більша за четверту, а периметр чотирикутника дорівнює 147 см.

■ Нехай четверта сторона дорівнює x см. Тоді перша дорівнює $2x$ см, друга — $(2x + 9)$ см, третя — $(2x - 2)$ см. Складемо й розв'яжемо рівняння: $2x + 2x + 9 + 2x - 2 + x = 147$; $7x = 140$; $x = 20$; $2x = 2 \cdot 20 = 40$, $2x + 9 = 40 + 9 = 49$, $2x - 2 = 40 - 2 = 38$. Отже, перша сторона чотирикутника дорівнює 40 см, друга — 49 см, третя — 38 см, четверта — 20 см.

Відповідь. 40 см, 49 см, 38 см, 20 см. ■

Приклад 4. Знайти кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 7, 8, 9 і 12.

■ Нехай кути чотирикутника відповідно дорівнюють $7x°$, $8x°$, $9x°$ і $12x°$. Використавши теорему про суму кутів чотирикутника, складемо й розв'яжемо рівняння: $7x + 8x + 9x + 12x = 360$; $36x = 360$; $x = 10$; $7x = 7 \cdot 10 = 70$, $8x = 8 \cdot 10 = 80$, $9x = 9 \cdot 10 = 90$, $12x = 12 \cdot 10 = 120$. Отже, кути чотирикутника дорівнюють 70°, 80°, 90° і 120°.

Відповідь. 70°, 80°, 90° і 120°. ■

Приклад 5. Градусні міри двох кутів паралелограма відносяться як 5 : 7. Знайти кути паралелограма.

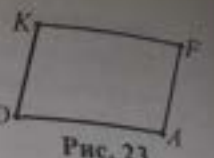


Рис. 23

■ Оскільки протилежні кути паралелограма рівні, то кути, про які йдеться в умові задачі, будуть прилеглими до однієї сторони. Нехай це $\angle D$ і $\angle K$ (рис. 23). Нехай $\angle D = 5x°$, тоді $\angle K = 7x°$. За властивістю кутів паралелограма, прилеглих до однієї сторони, маємо: $\angle D + \angle K = 180°$. Складемо й розв'яжемо рівняння: $5x + 7x = 180$; $12x = 180$; $x = 15$; $5x = 5 \cdot 15 = 75$; $7x = 7 \cdot 15 = 105$. Отже, $\angle F = \angle D = 75°$, $\angle A = \angle K = 105°$. *В-дь.* 75°, 105°, 75°, 105°. ■

Приклад 6. Бісектриса тупого кута паралелограма $MNDP$ поділяє сторону MP на відрізки 8 см і 10 см, рахуючи від вершини гострого кута. Знайти периметр паралелограма.



Рис. 24

■ Нехай $MNDP$ — паралелограм, про який ідеться в умові задачі (рис. 24). Оскільки $ND \parallel MP$, то $\angle DNK = \angle MKN$ як внутрішні рівносторонні. NK — бісектриса кута N, отже, $\angle DNK = \angle MNK$. Тому $\angle MKN = \angle MNK$ і трикутник MNK — рівнобедрений з основою NK. Отже, $MN = MK = 8$ см. $MP = MK + KP = 8 + 10 = 18$ (см). $P = 2(MN + MP) = 2(8 + 18) = 52$ (см). *Відповідь.* 52 см. ■

Приклад 7. Знайти площу паралелограма, периметр якого дорівнює 24 см, а висоти — 10 см і 14 см.

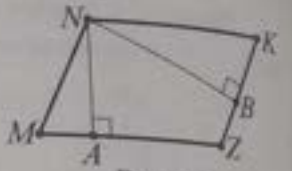


Рис. 25

■ Нехай $MNKZ$ — паралелограм, про який ідеться в умові задачі (рис. 25). $MZ + ZK = 24 : 2 = 12$ (см). Нехай $MZ = x$ см, тоді $ZK = (12 - x)$ см.

$S = MZ \cdot NA = 10x$ (см^2); $S = ZK \cdot NB = 14 \cdot (12 - x)$.

Звідки: $10x = 14(12 - x)$; $10x = 168 - 14x$; $24x = 168$; $x = 7$.

Отже, $MZ = 7$ см. $S = 7 \cdot 10 = 70$ (см^2). *Відповідь.* 70 см^2. ■

Приклад 8. Бісектриса кута N прямокутника $MNFK$ ділить сторону MK на відрізки у відношенні 5 : 2, починаючи від вершини M. Знайти сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 72 см.

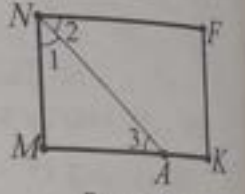


Рис. 26

■ Нехай $MNFK$ — прямокутник, про який ідеться в умові задачі (рис. 26). Оскільки NA — бісектриса кута N, то $\angle 1 = \angle 2$. $NF \parallel MK$, NA — січна, тому $\angle 2 = \angle 3$ як внутрішні різносторонні. Отже, $\angle 1 = \angle 3$ і трикутник NMA — рівнобедрений з основою NA. Отже, $MN = MA$. Нехай $MA = 5x$ см, тоді $AK = 2x$ см. $MK = MA + AK = 5x + 2x = 7x$ (см). Маємо: $2 \cdot (7x + 5x) = 72$; $12x = 36$; $x = 3$; $7x = 7 \cdot 3 = 21$; $5x = 5 \cdot 3 = 15$. $MK = 21$ см, $MN = 15$ см. Отже, $MK = NF = 21$ см, $MN = FK = 15$ см. *Відповідь.* 15 см, 21 см, 15 см, 21 см. ■

Приклад 9. Сторона ромба утворює з діагоналями кути, градусні міри яких відносяться як 4 : 5. Знайти кути ромба.

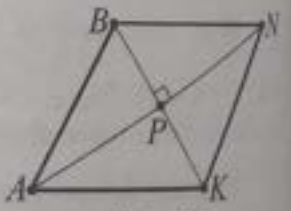


Рис. 27

■ Нехай $ABNK$ — ромб, про який ідеться в умові задачі (рис. 27). Нехай $\angle KAP = 4x°$, тоді $\angle AKP = 5x°$. За властивістю діагоналей ромба $BK \perp AN$, тому трикутник APK — прямокутний ($\angle APK = 90°$). У ньому за властивістю гострих кутів прямокутного трикутника $\angle KAP + \angle AKP = 90°$. Складемо й розв'яжемо рівняння: $4x + 5x = 90$; $9x = 90$, $x = 10$; $4x = 40$; $5x = 50$. Отже, $\angle KAP = 40°$, $\angle AKP = 50°$. Оскільки діагоналі ромба — бісектриси його кутів, то $\angle A = 2\angle KAP = 2 \cdot 40° = 80°$, $\angle K = 2\angle AKP = 2 \cdot 50° = 100°$. *Відповідь.* 80°, 100°, 80°, 100°. ■

Приклад 10. Діагональ ромба, що виходить з вершини кута 60°, дорівнює 24 см. Знайти радіус кола, вписаного в ромб.

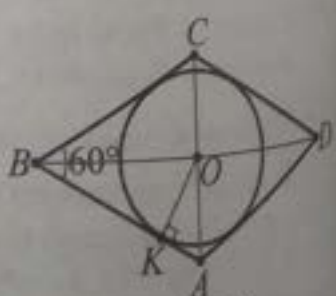


Рис. 28

■ Нехай $ABCD$ — ромб, про який ідеться в умові задачі (рис. 28). За властивістю діагоналей ромба: $BO = DO = \frac{24}{2} = 12$ (см). $\angle ABO = \angle CBO = 60° : 2 = 30°$. Проведемо $KO \perp AB$. KO — радіус вписаного кола. Трикутник BKO — прямокутний, бо $KO \perp AB$. За властивістю катета, який лежить проти кута 30°, $KO = \frac{BO}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (см). *В-дь.* 6 см. ■

Приклад 11. Відстань від точки перетину діагоналей квадрата до однієї з його сторін дорівнює 7 см. Знайти периметр квадрата.

■ Нехай $MNKC$ — квадрат, про який ідеться в умові задачі (рис. 29). $MN \perp MC$, $OB \perp MC$, отже, $MN \parallel OB$. За властивістю діагоналей квадрата точка O — середина NC. Тоді за теоремою Фалеса точка B — середина сторони MC. Отже, OB — середня лінія трикутника MNC. За теоремою про середню лінію $MN = 2OB = 2 \cdot 7 = 14$ (см). $P = 4 \cdot MN = 4 \cdot 14 = 56$ (см). *Відповідь.* 56 см. ■

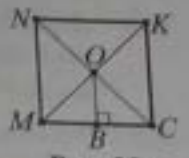


Рис. 29

Приклад 12. Середня лінія трапеції дорівнює 12 см, а більша основа — 14 см. Знайти меншу основу.

■ Нехай $ABCD$ — трапеція, про яку йдеться в умові задачі (рис. 30), $NK = 12$ см — середня лінія, AD і BC — основи, $AD = 14$ см. За теоремою про середню лінію трапеції маємо: $NK = \dfrac{AD + BC}{2}$. Звідки:

$BC = 2NK - AD = 2 \cdot 12 - 14 = 10$ (см). *Відповідь.* 10 см. ■

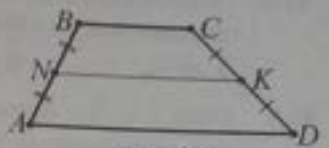


Рис. 30

Приклад 13. Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її гострий кут, який дорівнює 60°. Знайти периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 12 см.

■ Нехай $ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AB = CD$), про яку йдеться в умові задачі, $\angle A = 60°$, $BC = 12$ см (рис. 31). Оскільки AC — бісектриса, то $\angle 1 = \angle 2$. $\angle 2 = \angle 3$ (як внутрішні різносторонні при $BC \parallel AD$ і січній AC). Отже, $\angle 1 = \angle 3$, тому трикутник ABC — рівнобедрений з основою AC. $AB = BC = 12$ см. $CD = AB = 12$ см (як бічні сторони рівнобічної трапеції). Проведемо висоти BK і CN, $BK = CN$. $\Delta ABK = \Delta DCN$ за гіпотенузою і катетом. Отже, $AK = DN$. У прямокутному трикутнику AKB $\angle A = 60°$, тому $\angle B = 30°$. $AK = \dfrac{1}{2}AB$ (як катет, який лежить проти кута 30°). $AK = ND = 12 : 2 = 6$ (см). $KN = BC = 12$ см (як протилежні сторони прямокутника $KBCN$). $AD = AK + KN + ND = 6 + 12 + 6 = 24$ (см).

$P = 12 + 12 + 12 + 24 = 60$ (см). *Відповідь.* 60 см. ■

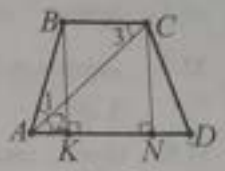


Рис. 31

Приклад 14. У прямокутній трапеції менша основа дорівнює 21 см. Обчислити площу трапеції, якщо довжина кола, вписаного в неї, дорівнює 24π см.

■ Нехай $ABCD$ ($AD \parallel BC$) — задана прямокутна трапеція, у яку вписано коло $(O; r)$ завдовжки 24π см, $BC = 21$ см (рис. 32). Тоді $2\pi r = 24\pi$, $r = 12$ (см). Проведемо висоту CN. Оскільки трапеція прямокутна, то $CN = AB = 2r = 24$ (см). За властивістю сторін описаного чотирикутника $BC + AD = AB + CD$; $21 + AD = 24 + CD$; $AD - CD = 3$ (см). Нехай $CD = x$ см, тоді $AD = (x + 3)$ см. $ABCN$ — прямокутник, тому $AN = BC = 21$ (см). Оскільки $AD = AN + ND$, то $ND = AD - AN = (x + 3) - 21 = (x - 18)$ см. З трикутника CND ($\angle N = 90°$) за теоремою Піфагора $CD^2 = CN^2 + ND^2$; $x^2 = 24^2 + (x - 18)^2$; $x^2 = 576 + x^2 - 36x + 324$; $36x = 900$; $x = 25$ (см). Отже, $CD = 25$ см. $AD = 25 + 3 = 28$ (см). $S_{ABCD} = \dfrac{BC + AD}{2} \cdot CN$; $S_{ABCD} = \dfrac{21 + 28}{2} \cdot 24 = 588$ (см^2).

Відповідь. 588 см^2. ■

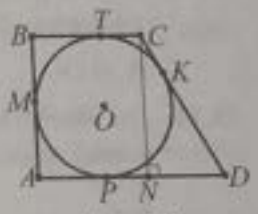


Рис. 32

Завдання 33.1–33.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

33.1. **(ЗНО–2010)** Сума градусних мір двох кутів паралелограма дорівнює 150°. Знайти градусну міру більшого кута паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
75°	95°	105°	115°	120°

33.2. Периметр паралелограма дорівнює 84 см, а сума двох його сторін — 58 см. Знайти меншу сторону паралелограма.

А 11 см Б 29 см В 17 см Г 23 см Д 13 см

33.3. Бісектриса гострого кута паралелограма поділяє сторону на відрізки завдовжки 7 см і 10 см, починаючи від вершини тупого кута. Знайти периметр паралелограма.

А 48 см Б 54 см В 96 см Г 68 см Д 56 см

33.4. У чотирикутнику діагоналі дорівнюють 8 см і 5 см. Обчислити периметр чотирикутника, вершинами якого є середини сторін даного чотирикутника.

А 40 см Б 13 см В 26 см Г 3 см Д 20 см

33.5. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 8 см. Знайти площу прямокутника, якщо площа круга, описаного навколо нього, дорівнює 25π см^2.

А 80 см^2 Б 48 см^2 В 40 см^2 Г 24 см^2 Д 200 см^2

33.6. У прямокутнику $ABCD$ O — точка перетину діагоналей, $\angle BOC = 108°$. Знайти $\angle ABD$.

А 72° Б 45° В 30° Г 54° Д 18°

33.7. Діагональ ромба утворює з однією зі сторін кут, що дорівнює 54°. Знайти менший кут ромба.

А 36° Б 26° В 72° Г 62° Д 27°

33.8. Одна з діагоналей ромба дорівнює 30 см. Знайти іншу діагональ ромба, якщо його периметр дорівнює 68 см.

А 20 см Б 24 см В 30 см Г 16 см Д 19 см

33.9. Сторона ромба дорівнює 6 см, а його площа — 18 см^2. Знайти більший кут ромба.

А 105° Б 120° В 130° Г 135° Д 150°

33.10. **(ЗНО–2015)** На діагоналі AC квадрата $ABCD$ задано точку, відстань від якої до сторін AB і BC дорівнює 2 см і 6 см відповідно. Визначити периметр квадрата $ABCD$.

А 16 см Б 24 см В 32 см Г 48 см Д 64 см

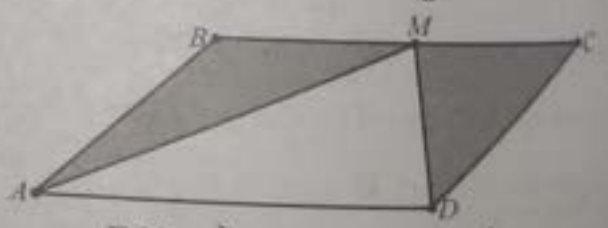
33.11. Висота рівнобічної трапеції, яка проведена з вершини тупого кута, поділяє основу на відрізки завдовжки 5 см і 11 см. Знайти периметр трапеції, якщо її висота дорівнює 12 см.

А 50 см Б 43 см В 48 см Г 47 см Д 53 см

33.12. Дві менші сторони прямокутної трапеції дорівнюють a, а один з її кутів — 45°. Визначити площу трапеції.

А a^2 Б $\frac{5}{2}a^2$ В $2a^2$ Г $3a^2$ Д $\frac{3}{2}a^2$

33.13. **(ЗНО–2012)** На рисунку зображено паралелограм $ABCD$, площа якого дорівнює 60 см^2. Точка M належить стороні BC. Визначити площу фігури, що складається з двох зафарбованих трикутників.



А 45 см^2 Б 40 см^2 В 35 см^2 Г 30 см^2 Д 20 см^2

33.14. Діагоналі прямокутника утворюють кут 50°. Знайти кут між діагоналлю прямокутника та бісектрисою кута, проведеними з однієї вершини.

А 50° Б 30° В 25° Г 15° Д 20°

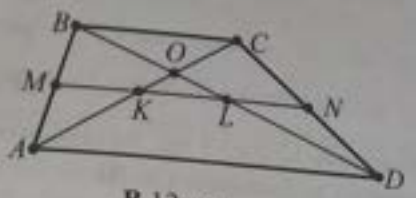
33.15. Точка O, яка є перетином діагоналей трапеції $ABCD$ ($AD \| BC$), ділить діагональ AC на відрізки $AO = 8$ см і $OC = 4$ см. Знайти основу BC, якщо $AD = 14$ см.

А 5 см Б 6 см В 7 см Г 8 см Д 4 см

33.16. Менша основа трапеції дорівнює 20 см. Точка перетину діагоналей віддалена від основ на 5 см і 6 см. Знайти площу трапеції.

А 110 см² Б 363 см² В 121 см² Г 242 см² Д 484 см²

33.17. Відстань між серединами діагоналей трапеції дорівнює 7 см, а менша її основа — 6 см. Знайти середню лінію трапеції.



А 9 см Б 6,5 см В 12 см Г 26 см Д 13 см

33.18. У рівнобічну трапецію вписане коло. Знайти у квадратних сантиметрах площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 2 см і 8 см.

А 40 см² Б 5 см² В 20 см² Г 16 см² Д 8 см²

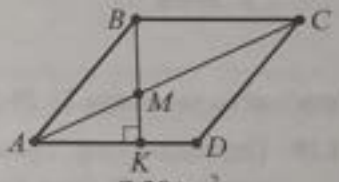
33.19. Діагоналі рівнобічної трапеції перпендикулярні. Знайти площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 8 см і 20 см.

А 196 см² Б 392 см² В 784 см² Г 588 см² Д 98 см²

33.20. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює d і поділяє його гострий кут на кути α і β. Визначити площу паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
$d^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$	$\frac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}$	$\frac{d^2\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$	$\frac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$	$\frac{d^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$

33.21. У ромбі $ABCD$ більша діагональ AC поділяє висоту BK на відрізки $BM = 5$ см і $MK = 3$ см. Знайти площу ромба.



А 40 см² Б 80 см² В 120 см² Г 140 см² Д 20 см²

33.22*. Діагональ трапеції поділяє її на два подібні трикутники. Знайти цю діагональ, якщо основи трапеції дорівнюють 50 см і 72 см.

А 90 см Б 30,5 см В 30 см Г 61 см Д 60 см

33.23. У рівнобічній трапеції діагональ є бісектрисою гострого кута й утворює з більшою основою кут 30°. Знайти периметр трапеції, якщо більша основа дорівнює 8 см.

А 18 см Б 24 см В 16 см Г 20 см Д 32 см

33.24. Периметр паралелограма більший від однієї з його сторін на 23 і більший на 19 від іншої його сторони. Знайти периметр паралелограма.

А 42 Б 28 В 34 Г 36 Д 32

Завдання 33.25–33.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

33.25. Установити відповідність між фігурами (1–3) та їхніми характерними властивостями (А–Д).

1 Описаний навколо кола чотирикутник
2 Вписаний у коло чотирикутник
3 Паралелограм

А Сума протилежних кутів дорівнює 180°
Б Діагоналі рівні
В Суми протилежних сторін рівні
Г Сума кутів при кожній стороні дорівнює 180°
Д Діагоналі є бісектрисами кутів

33.26. Діагональ ромба утворює зі стороною кут 60°. Установити відповідність між довжинами сторін (1–3) ромба і площами (А–Д) прямокутників з вершинами на серединах сторін ромба.

1 20 см	А $441\sqrt{3}$ см^2
2 36 см	Б $100\sqrt{3}$ см^2
3 42 см	В $529\sqrt{3}$ см^2
	Г $625\sqrt{3}$ см^2
	Д $324\sqrt{3}$ см^2

33.27. Сторони паралелограма дорівнюють 12 см і 5 см. Установити відповідність між величинами гострих кутів (1–3) паралелограмів і їх площами (А–Д).

1 30°	А $30\sqrt{3}$ см^2
2 45°	Б 30 см^2
3 60°	В $15\sqrt{3}$ см^2
	Г $30\sqrt{2}$ см^2
	Д $60\sin\frac{4\pi}{9}$ см^2

33.28. У рівнобічних трапеціях діагональ є бісектрисою гострого кута й утворює з більшою основою кут 30°. Установити відповідність між довжинами більших основ (1–3) та периметрами трапецій (А–Д).

1 4 см	А 20 см
2 8 см	Б 60 см
3 24 см	В 10 см
	Г 30 см
	Д 50 см

Розв'яжіть завдання 33.29–33.47. Відповідь запишіть десятковим дробом.

33.29. Перпендикуляр, проведений з вершини прямокутника на діагональ, дорівнює 12 і поділяє діагональ на відрізки, різниця яких дорівнює 7. Знайти площу прямокутника.

33.30. Одна з діагоналей паралелограма дорівнює $6\sqrt{6}$ й утворює зі стороною паралелограма кут 60°. Знайти іншу діагональ, якщо вона утворює з тією ж стороною кут 45°.

33.31. Одна з діагоналей трапеції, яка дорівнює $3\sqrt{6}$, утворює з основою трапеції кут 60°. Обчислити довжину другої діагоналі, якщо вона утворює з цією ж основою кут 45°.

33.32. Висоти паралелограма дорівнюють 4 і 6, а його периметр — 40. Знайти:
1) площу паралелограма; 2) гострий кут паралелограма (у градусах).

33.33. Одна сторона паралелограма на 2 більша за іншу, а його діагоналі дорівнюють 8 і 14. Знайти периметр паралелограма.

33.34. Діагоналі ромба відносяться як 3 : 4. Знайти висоту ромба, якщо його периметр дорівнює 80.

33.35. Сума довжин діагоналей ромба дорівнює l, а площа ромба — S. Визначити сторону ромба й обчислити її значення, якщо $l = 14$, $S = 24$.

33.36. Визначити:
1) більшу сторону паралелограма;
2) площу паралелограма
за його висотами h_1 і h_2 та периметром P й обчислити їх значення, якщо $h_1 = 3$, $h_2 = 7$, $P = 20$.

33.37. Основи трапеції дорівнюють 10 і 24, а бічні сторони — 15 і 13. Знайти площу трапеції.

13.38. (ЗНО–2015) У прямокутному трикутнику ABC точка M є серединою гіпотенузи AB, довжина якої дорівнює 26 см. Точка O віддалена від вершин B і C на 15 см, а від сторони BC — на $10\sqrt{2}$ см. З точки O на катет BC опущено перпендикуляр OK, точка K належить відрізку OM.

1. Довести, що чотирикутник $KMAC$ є трапецією.
2. Визначити площу трапеції $KMAC$ (у см^2).

13.39. Основи трапеції дорівнюють 5 і 15, а діагоналі — 12 і 16. Знайти площу трапеції.

13.40. (ЗНО–2014) Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута і ділить середню лінію трапеції на відрізки довжиною 13 см і 23 см. Обчислити (у см^2) площу трапеції.

13.41. Площі трикутників, утворених основами трапеції та відрізками діагоналей, дорівнюють S_1 і S_2. Визначити площу трапеції й обчислити її значення, якщо $S_1 = 4$, $S_2 = 1$.

13.42. Квадрат зі стороною a повернуто навколо свого центра на 45°. Знайти площу спільної частини цих квадратів й обчислити її значення з точністю до 0,01, якщо $a = 1$.

13.43*. Знайти квадрат площі паралелограма, якщо його більша діагональ дорівнює $2\sqrt{7}$, а висоти дорівнюють $\sqrt{3}$ і $2\sqrt{3}$.

13.44. Висота ромба дорівнює 24, а менша діагональ — 30. Знайти більшу діагональ ромба.

13.45*. Знайти площу паралелограма з точністю до 0,1, якщо його більша діагональ дорівнює 5, а висоти дорівнюють 2 і 3.

13.46. Канал з Дніпра до Кривого Рогу в районі села Червоні Поди має у поперечному перерізі форму рівнобедреної трапеції, у якої довжина більшої основи дорівнює 12 м, висота 3 м, а бічні сторони нахилені до основи під кутом 45°. Середня швидкість руху води в каналі дорівнює 3 м/хв. Скільки кубічних метрів води забирається з Дніпра за 1 хв?

13.47. Скільки потрібно листів бляхи завширшки 3 м, щоб обгородити земельну ділянку прямокутної форми під будівництво офісного центру, площа якої дорівнює 480 м^2, а одна зі сторін — 16 м?

Тема 34. Многокутники

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— многокутник та його елементи, периметр многокутника;
— правильний многокутник та його властивості;
— вписані в коло та описані навколо кола многокутники;
— застосовувати означення та властивості многокутників до розв'язування планіметричних задач і задач практичного змісту;
— опуклий многокутник, сума кутів опуклого многокутника.

Нехай задано точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$, жодні три сусідні з яких не лежать на одній прямій, і відрізки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$, жодні два з яких не перетинаються. Одержану таким чином фігуру називають *многокутником* (*n-кутником*) (рис. 1).

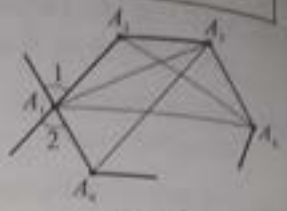


Рис. 1

Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називають *вершинами* многокутника, відрізки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_1$ — *сторонами* многокутника.

Кутом многокутника при даній вершині називають кут, утворений його сторонами, які сходяться в цій вершині. $\angle A_1, \angle A_2, \ldots, \angle A_n$ — *кути* многокутника.

Кут, суміжний із внутрішнім кутом многокутника, називають *зовнішнім кутом* многокутника.

Многокутник позначають назвами його вершин.

Многокутник називають *опуклим*, якщо він лежить з одного боку від будь-якої прямої, що містить його сторону.

Довжина кожної сторони многокутника менша за суму довжин усіх інших сторін.

Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін.

Діагоналлю многокутника називають відрізок, який сполучає дві несусідні його вершини.

Многокутник називають *вписаним* у коло, якщо всі його вершини лежать на цьому колі.

Многокутник називають *описаним* навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до кола.

Властивості опуклого n-кутника

1. Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°\cdot(n-2)$.

2. Сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює $360°$.

3. З однієї вершини опуклого многокутника виходить $(n-3)$ діагоналі.

4. В опуклому многокутнику є $n(n-3)/2$ діагоналі.

5. Многокутник буде опуклим, якщо сума його внутрішніх кутів кратна $180°$.

Правильні многокутники

Правильним називають опуклий многокутник, у якого всі сторони й усі кути рівні.

Величина кута α_n правильного n-кутника: $\alpha_n = \dfrac{180°(n-2)}{n}$.

Навколо будь-якого правильного многокутника можна описати коло; у будь-який правильний многокутник можна вписати коло, до того ж центри вписаного й описаного кіл збігаються.

$R = \dfrac{a}{2\sin(180°/n)}$, $r = \dfrac{a}{2\operatorname{tg}(180°/n)}$, $R^2 - r^2 = \dfrac{a^2}{4}$, де R — радіус описаного кола, r — радіус вписаного кола, a — сторона правильного n-кутника.

Формули для сторони a_n, радіусів описаного R та вписаного r кіл для правильних n-кутників

n	R через a_n	r через a_n	a_n через R	a_n через r	R через r	r через R
3	$a_3/\sqrt{3}$	$a_3/(2\sqrt{3})$	$R\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$	$2r$	$R/2$
4	$a_4/\sqrt{2}$	$a_4/2$	$R\sqrt{2}$	$2r$	$r\sqrt{2}$	$R\sqrt{2}/2$
6	a_6	$a_6\sqrt{3}/2$	R	$2r/\sqrt{3}$	$2r/\sqrt{3}$	$R\sqrt{3}/2$
n	$\dfrac{a_n}{2\sin(180°/n)}$	$\dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}(180°/n)}$	$2R\sin(180°/n)$	$2r\operatorname{tg}(180°/n)$	$\dfrac{r}{\cos(180°/n)}$	$R\cos(180°/n)$

Спільний центр описаного і вписаного кіл називають *центром* правильного многокутника.

Апофемою правильного многокутника називають перпендикуляр, проведений з центра правильного многокутника до його сторони. Апофема — це радіус вписаного кола. На рис. 2 OK, OM, ON, ... — апофеми.



Рис. 2

Правильні n-кутники подібні. Відношення їхніх периметрів, радіусів вписаних й описаних кіл дорівнюють відношенню їхніх сторін, а відношення їх площ — відношенню квадратів сторін.

Центральним кутом правильного многокутника називають кут, утворений двома радіусами, проведеними до сусідніх вершин.

Наприклад, кути AOB, BOC, COD, ... — центральні кути.

Центральний кут правильного n-кутника дорівнює $\beta = 360° / n$.

Приклад 1. Знайти зовнішній кут AMN многокутника $ABCDM$, зображеного на рис. 3.

А	Б	В	Г	Д
150°	45°	160°	140°	135°

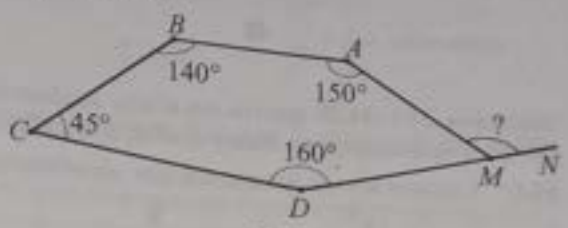


Рис. 3

■ Сума кутів п'ятикутника дорівнює:
$180° \cdot (5 - 2) = 180° \cdot 3 = 540°$.
$\angle AMD = 540° - (150° + 140° + 45° + 160°) = 45°$. Оскільки AMN — зовнішній кут при вершині M, то $\angle AMN = 180° - \angle AMD = 180° - 45° = 135°$. *Відповідь.* Д. ■

Приклад 2. Скільки сторін має многокутник, якщо в ньому можна провести 20 діагоналей?

А	Б	В	Г	Д
10	15	5	8	6

■ У n-кутнику можна провести $\frac{n(n-3)}{2}$ діагоналі. Маємо: $\frac{n(n-3)}{2} = 20$; $n^2 - 3n - 40 = 0$; $n_1 = -5$ — не задовольняє умову задачі, $n_2 = 8$. *Відповідь.* Г. ■

Приклад 3. Знайти найбільший кут п'ятикутника, якщо градусні міри його внутрішніх кутів відносяться як 3 : 2 : 4 : 4 : 5.

■ Нехай кути п'ятикутника дорівнюють $3x°$, $2x°$, $4x°$, $4x°$ і $5x°$. Сума кутів опуклого п'ятикутника дорівнює $180° \cdot (5 - 2) = 540°$. Складемо й розв'яжемо рівняння: $3x + 2x + 4x + 4x + 5x = 540$; $18x = 540$; $x = 30$; $5x = 5 \cdot 30 = 150$. Отже, найбільший кут дорівнює 150°. *Відповідь.* 150°. ■

Приклад 4. Скільки вершин має опуклий многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює 2160°?

■ Опуклий многокутник має стільки вершин, скільки й кутів. Сума кутів опуклого многокутника дорівнює $180° \cdot (n - 2)$. Складемо та розв'яжемо рівняння: $180 \cdot (n - 2) = 2160$; $n - 2 = 12$; $n = 14$. *Відповідь.* 14. ■

Приклад 5. Скільки вершин у правильного многокутника, якщо його внутрішній кут відноситься до зовнішнього кута як 5 : 2?

■ Нехай внутрішній кут дорівнює $5x°$, тоді зовнішній — $2x°$. Маємо: $5x + 2x = 180$; $7x = 180$; $x = \frac{180}{7}$. Тоді зовнішній кут многокутника дорівнює $2 \cdot \frac{180°}{7} = \frac{360°}{7}$. Сума зовнішніх кутів многокутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°, а кожен зовнішній кут — $\frac{360°}{n}$. Маємо: $\frac{360°}{n} = \frac{360°}{7}$; $n = 7$. Отже, у многокутнику є 7 вершин. *Відповідь.* 7. ■

Приклад 6. Три кути опуклого n-кутника дорівнюють по 80°, а решта по 160°. Визначити кількість кутів n-кутника.

■ Нехай $\angle A_1$, $\angle A_2$, $\angle A_3$, ..., $\angle A_n$ — кути n-кутника. $\angle A_1 = \angle A_2 = \angle A_3 = 80°$. Тому $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 = 80° \cdot 3 = 240°$. У даному n-кутнику ще є $(n - 3)$ кути по 160°, їх сума дорівнює $160° \cdot (n - 3)$. Отже, сума всіх кутів даного n-кутника дорівнює $240° + 160° \cdot (n - 3)$, а сума кутів опук-

ного n-кутника дорівнює $180°(n-2)$. Складемо рівняння: $240 + 160 \cdot (n-3) = 180 \cdot (n-2)$; $12 + 8 \cdot n - 24 = 9 \cdot n - 18$; $n = 6$. Отже, в n-кутнику 6 кутів. *Відповідь.* 6. ■

Приклад 7 Знайти радіус кола, описаного навколо правильного восьмикутника, сторона якого дорівнює a.

■ Нехай $AB...MF$ — правильний восьмикутник, вписаний у коло (рис. 4). Радіус кола, описаного навколо восьмикутника, дорівнює $R = \frac{a}{2\sin(180°/8)} = \frac{a}{2\sin(45°/2)}$.

$\sin\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Отже, $R = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Відповідь. $a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$. ■



Рис. 4

Завдання 34.1–34.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

34.1. Скільки всього діагоналей має десятикутник?

А	Б	В	Г	Д
10	50	75	70	35

34.2. Чому дорівнює сума внутрішніх кутів опуклого дванадцятикутника?

А 1800° **Б** 1980° **В** 2160° **Г** 1620° **Д** 2520°

34.3. Скільки вершин має опуклий многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює 900°?

А П'ять **Б** шість **В** сім **Г** вісім **Д** дев'ять

34.4. Якщо в опуклому многокутнику всі кути гострі, то він...

А	Б	В	Г	Д
трикутник	чотирикутник	п'ятикутник	трикутник або чотирикутник	стокутник

34.5. Чому дорівнює внутрішній кут правильного восьмикутника?

А 36° **Б** 45° **В** 54° **Г** 135° **Д** 126°

34.6. Скільки сторін має правильний многокутник, якщо його внутрішній кут дорівнює 156°?

А 13 **Б** 14 **В** 15 **Г** 16 **Д** 17

34.7. Скільки вершин має правильний многокутник, якщо його зовнішній кут дорівнює 20°?

А 9 **Б** 12 **В** 16 **Г** 18 **Д** 20

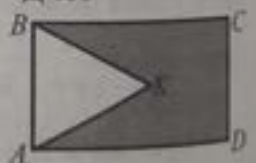
34.8. Якщо в правильного многокутника всі діагоналі рівні, то він...

А	Б	В	Г	Д
трикутник	восьмикутник	шестикутник	чотирикутник або п'ятикутник	чотирикутник або шестикутник

34.9. Кути п'ятикутника пропорційні до чисел 3, 5, 5, 6 і 8. Знайти найбільший кут п'ятикутника.

А 160° **Б** 150° **В** 140° **Г** 130° **Д** 155°

34.10. **(ЗНО–2010)** На рисунку зображено прямокутник $ABCD$ і рівносторонній трикутник ABK, периметри яких відповідно дорівнюють 20 см і 12 см. Знайти периметр п'ятикутника $AKBCD$.



А 23 см **Б** 24 см **В** 26 см **Г** 28 см **Д** 32 см

34.11. Сторона правильного шестикутника дорівнює 10 см. Знайти його найбільшу діагональ.

А $10\sqrt{3}$ см **Б** $20\sqrt{3}$ см **В** 10 см **Г** 40 см **Д** 20 см

34.12. Сторона правильного шестикутника дорівнює a. Визначити меншу діагональ.

А $2a\sqrt{3}$ Б a В $2a\sqrt{2}$ Г $a\sqrt{3}$ Д $2a$

34.13. Сторона правильного шестикутника дорівнює 2 см. Знайти його площу.

А $6\sqrt{3}$ см^2 Б $12\sqrt{3}$ см^2 В $3\sqrt{3}$ см^2 Г 32 см^2 Д 64 см^2

34.14. Знайти периметр правильного шестикутника, якщо довжина кола, описаного навколо нього, дорівнює 18π см.

А 108 см Б 54 см В 27 см Г $27\sqrt{3}$ см Д $54\sqrt{3}$ см

34.15. Знайти меншу діагональ правильного шестикутника, якщо більша його діагональ $2\sqrt{3}$ см.

А $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см Б $\sqrt{3}$ см В 3 см Г 2 см Д 1 см

34.16. Радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, дорівнює $8\sqrt{3}$ см. Знайти периметр шестикутника.

А 24 см Б 48 см В 96 см Г 192 см Д 72 см

34.17. Чому дорівнює найбільший кут між двома діагоналями, проведеними з однієї вершини правильного шестикутника?

А 45° Б 60° В 80° Г 90° Д 120°

34.18. Скільки сторін має опуклий многокутник, у якого сума внутрішніх кутів дорівнює сумі його зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині?

А Три Б чотири В п'ять Г шість Д вісім

34.19. Скільки сторін має опуклий многокутник, якщо сума всіх його внутрішніх кутів і всіх зовнішніх дорівнює 2520°?

А 10 Б 11 В 12 Г 13 Д 14

34.20. Скільки вершин має правильний многокутник, у якого внутрішній кут у 8 разів більший від зовнішнього?

А 12 Б 14 В 16 Г 18 Д 20

Завдання 34.21–34.23 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

34.21. Установити відповідність між кількістю кутів (1–3) многокутника і кількістю його діагоналей (А–Д).

1 12	А 14
2 15	Б 5
3 7	В 54
	Г 20
	Д 90

34.22. Установити відповідність між величиною внутрішнього кута (1–3) правильного многокутника та кількістю його сторін (А–Д).

1 156°	А 9
2 108°	Б 12
3 150°	В 5
	Г 7
	Д 15

34.23. Сторона правильного многокутника дорівнює 2 см. Установити відповідність між кількістю сторін (1–3) цього многокутника та його площею (А–Д).

1 6	А $12\operatorname{ctg}15^\circ$ см^2
2 9	Б $6\sqrt{3}$ см^2
3 12	В $9\operatorname{ctg}20^\circ$ см^2
	Г $12\operatorname{ctg}12^\circ$ см^2
	Д $15\operatorname{ctg}12^\circ$ см^2

Розв'яжіть завдання 34.24–34.35. Відповідь запишіть десятковим дробом.

34.24. Сума внутрішніх кутів многокутника удвічі більша від суми зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині. Знайти число сторін многокутника.

34.25. Кожний із трьох внутрішніх кутів многокутника дорівнює 80°, а кожний з решти кутів — 150°. Скільки сторін має многокутник?

34.26. Два кути многокутника прямі, а решта дорівнюють по 135°. Скільки вершин має многокутник?

34.27. На скільки градусів збільшиться сума внутрішніх кутів многокутника, якщо число його сторін збільшити на 5?

34.28. Внутрішній кут правильного многокутника на 144° більший від зовнішнього.
1) Знайти величину внутрішнього кута (у градусах); **2)** скільки сторін має многокутник?

34.29. Радіус кола, описаного навколо правильного восьмикутника, дорівнює $4\sqrt{2}$. Знайти найменшу діагональ восьмикутника.

34.30. Менша діагональ правильного шестикутника дорівнює $\sqrt{3}$. Визначити:
1) його більшу діагональ; **2)** периметр шестикутника.

34.31. R — радіус кола, описаного навколо правильного шестикутника. Визначити радіус кола, вписаного в правильний шестикутник, якщо $R=\sqrt{3}$.

34.32. Під яким кутом (у градусах) перетинаються дві діагоналі правильного п'ятикутника, проведені з різних вершин?

34.33. За стороною a правильного дванадцятикутника визначити його апофему (перпендикуляр, опущений з центра до сторони), якщо $a=2-\sqrt{3}$.

34.34. Виразити сторону a правильного дванадцятикутника через радіус R описаного кола й обчислити її довжину, якщо $R=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

34.35. На клумбі, як має форму правильного восьмикутника зі стороною 1 м, потрібно посадити квіти. Скільки найбільше квітів можна посадити на такій клумбі, якщо для однієї рослини потрібно 160 см^2 землі?

Тема 35. Коло, круг та їх елементи

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО

— обчислювати довжину кола та його дуг, площу круга та сектора;
— використовувати формули площ геометричних фігур для розв'язування планіметричних задач і задач практичного змісту;
— властивості двох хорд, що перетинаються;
— площа сегмента.

Коло. *Колом* називають геометричну фігуру, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Цю точку називають *центром кола*. *Радіусом кола* називають відрізок, який сполучає будь-яку точку кола з його центром. На рис. 1 а) OA — радіус. Коло позначають так: $K(O; R)$. Читають: *«Коло з центром O і радіусом r»*.

Круг. *Кругом* називають частину площини, обмежену колом (рис. 1 б). Точки круга радіуса R віддалені від його центра O на відстань, яка менша або дорівнює R. Центр круга збігається з центром кола, яке його обмежує, а радіус круга дорівнює радіусу кола. Коло, яке обмежує круг, належить кругові. Круг позначають так: $Kp(O; R)$. Читають: *«Круг з центром O й радіусом r»*.

Усі точки круга, крім точок кола, яке його обмежує, називають *внутрішніми*.

Хордою називають відрізок, який сполучає будь-які дві точки кола. На рис. 2 AB і CD — хорди.

Діаметром називають хорду, яка проходить через центр кола. Діаметр кола зазвичай позначають буквою D. На рис. 2 MN — діаметр кола, $MN = D$. Діаметр дорівнює двом радіусам: $D = 2R$.

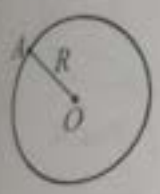


Рис. 1 а)



Рис. 1 б)

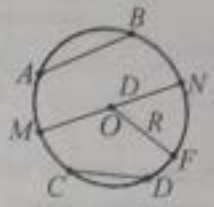


Рис. 2

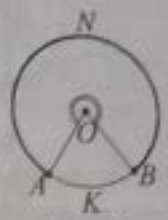


Рис. 3

Центральний кут і дуга кола. *Центральним* називають кут з вершиною в центрі кола. На рис. 3 кут AOB — центральний, він спирається на дугу AKB. Частину кола, розміщену всередині центрального кута, називають *дугою кола*, що відповідає цьому центральному куту. Кут і дуга мають однакові градусні міри.

Градусну міру дуги, як і саму дугу, позначають знаком «$\cup$». Наприклад: запис $\cup NK$ читають: дуга NK, запис $\cup CD = 35°$ читають: градусна міра дуги CD дорівнює 35°, або дуга CD дорівнює 35°.

Центральному куту AOB відповідають дві дуги з кінцями A і B (рис. 3). Одна з них менша за півколо — це дуга AKB (на ній позначена проміжна точка K), а інша більша за півколо — це дуга ANB (на ній позначена проміжна точка N). Дугу можна називати і без проміжної точки, якщо зрозуміло, про яку з двох дуг ідеться. Наприклад, дугу AKB можна назвати дугою AB.

Градусною мірою дуги кола називають градусну міру відповідного центрального кута.

Наприклад, якщо $\angle BOA = 110°$, то $\cup ALB = 110°$ (рис. 4). І навпаки, градусною мірою центрального кута є градусна міра відповідної дуги. Наприклад, якщо $\cup AB = 110°$, то $\angle AOB = 110°$.

Довжина кола й дуги. Довжину кола обчислюють за формулами: $C = \pi D$, $C = 2\pi R$; довжину дуги обчислюють за формулою $l_n = \dfrac{\pi R}{180°} \cdot n°$, де $\pi \approx 3{,}1415...$, R — радіус кола, D — діаметр, n — градусна міра відповідного центрального кута. Кути й дуги вимірюють у градусах й радіанах.

Вписаний кут. Кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло, називають вписаним кутом. На рис. 5 кут PNM — вписаний у коло. Вписаний у коло кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається: $\angle PNM = \dfrac{1}{2} \cup PM$. Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, рівні: $\angle PNM = \angle PAM$ (рис. 5), бо вони спираються на дугу PM. Вписані кути, які спираються на діаметр, прямі: $\angle BDC = 90°$ (рис. 6). І навпаки, будь-який прямий кут, вписаний у коло, спирається на діаметр.

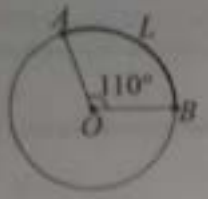


Рис. 4

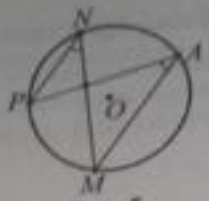


Рис. 5

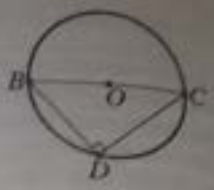


Рис. 6

Кут з вершиною всередині кола вимірюється півсумою дуг, на які спирається даний кут і кут, вертикальний з ним. На рис. 7 $\angle ABC = \dfrac{\cup AC + \cup DK}{2}$.

Кут, вершина якого лежить зовні кола, а сторони перетинають коло, вимірюється півріжницею більшої та меншої дуг, які містяться між його сторонами. На рис. 8 $\angle ABC = \dfrac{\cup AC - \cup DK}{2}$.

Кут між дотичною і хордою, яка проходить через точку дотику, вимірюється половиною дуги, що лежить між його сторонами. На рис. 9 $\angle ABC = \dfrac{1}{2}\cup BC$.

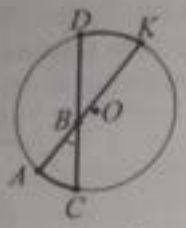


Рис. 7



Рис. 8

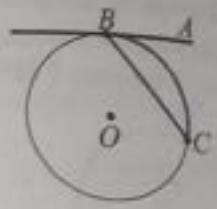


Рис. 9

Пряму, що перетинає коло у двох точках, називають *січною*.

Теорема про січні. Якщо з точки, що лежить зовні кола, проведені дві січні, то добуток довжини однієї січної на довжину її зовнішньої частини дорівнює такому ж добутку довжин для будь-якої іншої січної. На рис. 8 $BK \cdot BC = BD \cdot BA$.

Радіанна міра кута. Радіанною мірою кута (α) називають відношення довжини відповідної дуги кола, на яку спирається центральний кут, до радіуса кола: $\alpha = \dfrac{l}{R}$. Для переходу від градусної міри (n°) до радіанної (α) використовують формулу $\alpha = \dfrac{\pi}{180^\circ} \cdot n^\circ$; $1^\circ \approx 0{,}0175$ рад. Формула переходу від радіанної міри (α) до градусної (n°) має вигляд $n^\circ = \dfrac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi}$, 1 рад $= 57{,}3^\circ$.

Площа круга. Площу круга обчислюють за формулами: $S = \pi R^2$, $S = \dfrac{\pi D^2}{4}$.

Круговий сектор. *Круговим сектором* називають частину круга, яка лежить усередині відповідного центрального кута. На рис. 10 сектор AOC затушований, AC — дуга сектора, $\angle AOC$ — центральний кут, який відповідає сектору AOC. Площу сектора з центральним кутом в 1° визначають за формулою $S_{сек.} = \dfrac{\pi R^2}{360^\circ}$. Площу сектора з центральним кутом n° визначають за формулою $S_{сек.} = \dfrac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$.

Круговий сегмент. *Круговим сегментом* називають частину круга, яка лежить з одного боку від прямої, що перетинає даний круг. На рис. 11 круговий сегмент затушований. Будь-яка пряма розбиває круг на два кругових сегменти. Площу кругового сегмента, який не дорівнює півкругу, обчислюють за формулою $S_{сег.} = \dfrac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} \pm S_{\Delta AOB}$ (рис. 11). Знак «+» ставлять у випадку, якщо $n > 180^\circ$, а знак «–» — якщо $n < 180^\circ$.



Рис. 10



Рис. 11

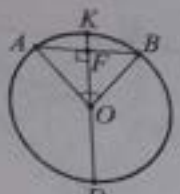


Рис. 12

Властивість хорди та діаметра. Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її і дугу, яку вона стягує, навпіл. На рис. 12 $DK \perp AB$, тому $AF = FB$ і $\cup AK = \cup KB$. Справедливе й обернене твердження: якщо діаметр кола проходить через середину хорди, яка не є діаметром, чи через середину дуги, то цей діаметр перпендикулярний до даної хорди.

Дуги й хорди. Рівні дуги стягуються рівними хордами, а рівні хорди стягують рівні дуги. На рис. 13 $AB = CD$, тому $\cup AB = \cup CD$. Дуги, які лежать між паралельними хордами, рівні. На рис. 14 $MN \parallel KD$, тоді $\cup ND = \cup MK$.

Взаємне розміщення прямої й кола. Три випадки взаємного розміщення прямої й кола:

1) пряма та коло не мають спільних точок (рис. 15);

2) пряма та коло мають одну спільну точку (рис. 16);

3) пряма та коло мають дві спільні точки (рис. 17).

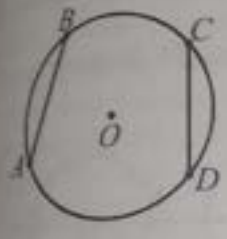


Рис. 13

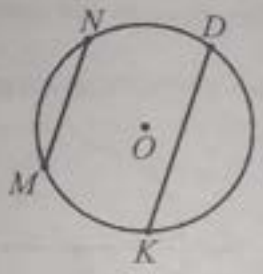


Рис. 14

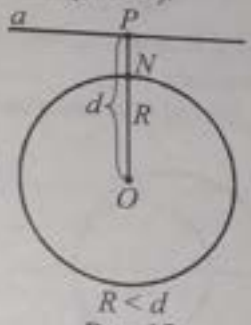


Рис. 15

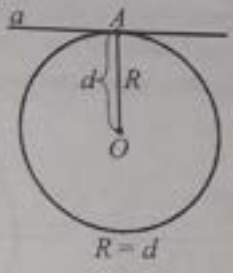


Рис. 16

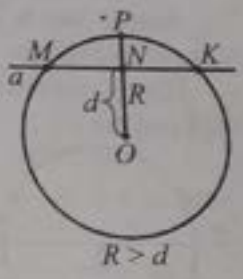


Рис. 17

Дотична до кола. Пряму, яка має з колом лише одну спільну точку, називають *дотичною* до кола. На рис. 16 пряма a — дотична до кола, A — точка дотику.

Ознака дотичної. *Якщо пряма проходить через точку кола й перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона є дотичною до кола.* Наприклад, на рис. 16 зображено $K(O; R)$, OA — радіус, пряма a проходить через точку A, $a \perp R$. Тоді a — дотична до кола.

З ознаки дотичної випливає наслідок: *Якщо відстань від центра кола до деякої прямої дорівнює радіусу ($d = R$), то ця пряма є дотичною до даного кола* (рис. 16).

Також справедливі твердження: *Якщо відстань від центра кола до деякої прямої більша від радіуса ($d > R$), то ця пряма з колом не мають спільних точок (рис. 15); якщо відстань від центра кола до деякої прямої менша від радіуса ($d < R$), то ця пряма з колом мають дві спільні точки, тобто перетинаються (рис. 17).*

Властивість дотичної. *Дотична до кола перпендикулярна до радіуса, проведеного в точку дотику.* Наприклад, на рис. 16 пряма a дотична до кола, $a \perp OA$.

Властивість дотичних, проведених до кола з однієї точки. *Якщо з даної точки до кола провести дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.*

Наприклад, на рис. 18 зображено $K(O; R)$, CM і CK — дотичні до кола. Тоді $CM = CK$.

Взаємне розміщення двох кіл. Два кола можуть бути розміщені так:

1) кола не мають спільних точок. Вони лежать або а) одне поза кругом іншого (рис. 19), у цьому випадку відстань між центрами буде більша від суми радіусів, або б) одне всередині круга іншого (рис. 20), у цьому випадку відстань між центрами буде меншою від різниці радіусів;

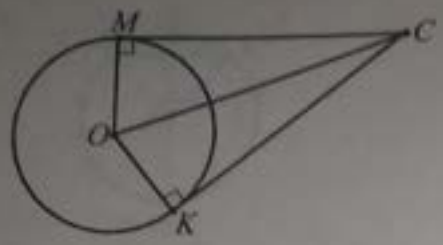
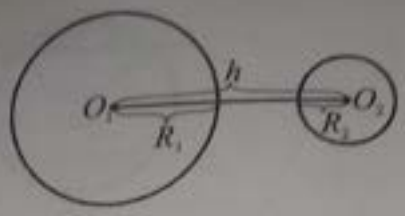


Рис. 18



$h > R_1 + R_2$

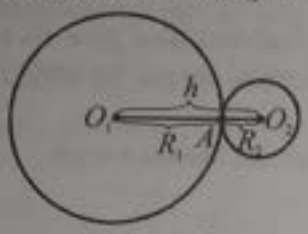
Рис. 19



$h < R_1 - R_2$

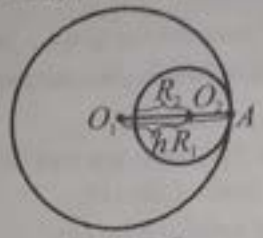
Рис. 20

2) кола мають одну спільну точку (рис. 21, 22). Кола, які мають одну спільну точку, називають *дотичними*. Спільну точку називають *точкою дотику*. На рис. 21 і 22 точка A — точка дотику. Дотик кіл може бути зовнішнім (рис. 21) ($h = R_1 + R_2$) або внутрішнім (рис. 22) ($h = R_1 - R_2$):



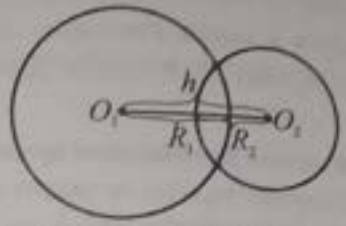
$h = R_1 + R_2$

Рис. 21



$h = R_1 - R_2$

Рис. 22



$R_1 - R_2 < h < R_1 + R_2$

Рис. 23

3) кола мають дві спільні точки (рис. 23), у цьому випадку відстань між центрами буде меншою від суми їх радіусів, але більшою від їх різниці.

Пряму, яка проходить через центри двох кіл, називають *лінією центрів*. На рис. 24–26 пряма a — лінія центрів.

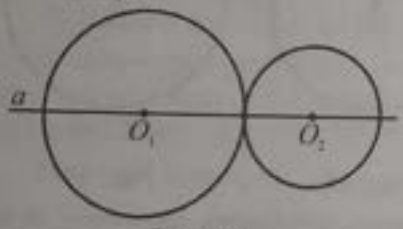


Рис. 24

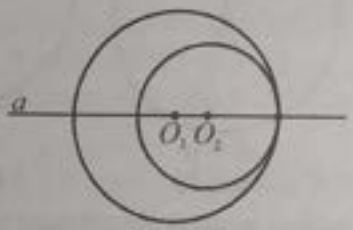


Рис. 25

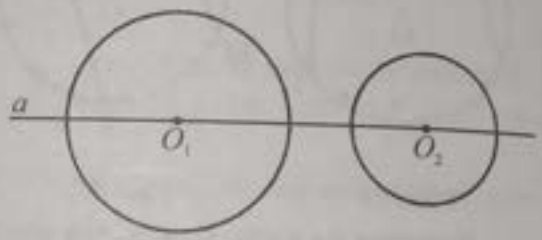


Рис. 26

Приклад 1. Знайти площу частини круга, яка лежить поза вписаним у коло радіуса R правильним шестикутником.

А	Б	В	Г	Д
$\pi R^2 + 1{,}5\pi^2\sqrt{3}$	$2\pi R^2 - 1{,}5\pi^2\sqrt{3}$	$\frac{2\pi R^2 + 3\pi^2\sqrt{3}}{12}$	$\frac{2\pi R^2 - 3\pi^2\sqrt{3}}{12}$	$\pi R^2 - 1{,}5R^2\sqrt{3}$

■ Шукана площа є різницею між площею круга і шестикутника (рис. 27). Знайдемо їх площі: $S_{кр} = \pi R^2$; $S_{шестк.} = 6S_{\Delta AOB} = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = 1{,}5R^2\sqrt{3}$. Шукана площа дорівнюватиме: $S = \pi R^2 - 1{,}5R^2\sqrt{3}$. *Відповідь.* Д. ■

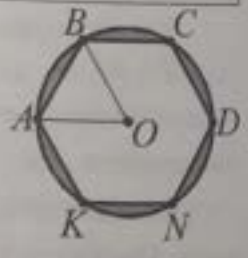


Рис. 27

Приклад 2. У колі з центром O проведено діаметр KM і хорду KA (рис. 28). Знайти кут AOM, якщо $\angle OAK = 48°$.

А	Б	В	Г	Д
48°	86°	96°	90°	24°

■ Розглянемо трикутник KOA. У ньому $OK = OA = R$. Отже, ΔKOA — рівнобедрений з основою KA. За властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника $\angle OAK = \angle OKA = 48°$. Кут AOM — зовнішній кут трикутника KOA. За теоремою про зовнішній кут $\angle AOM = \angle OAK + \angle OKA = 48° + 48° = 96°$. *Відповідь.* В. ■

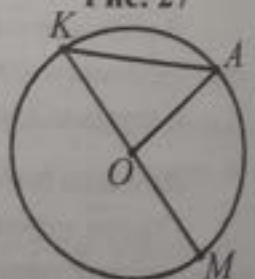


Рис. 28

Приклад 3. У колі з центром O проведено хорду MK і дотичну в точці K (рис. 29). Знайти кут між хордою і дотичною, якщо $\angle MOK = 80°$.

■ За властивістю дотичної $AB \perp OK$, отже, $\angle OKA = 90°$. Трикутник MOK рівнобедрений ($OM = OK = R$). За властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника $\angle M = \angle K = (180° - 80°) : 2 = 50°$. За властивістю вимірювання кутів $\angle MKA = 90° - 50° = 40°$. *Відповідь.* 40°. ■

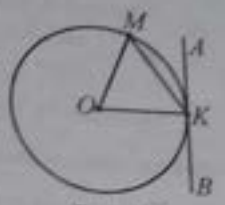


Рис. 29

Приклад 4. Через кінці хорди KM, яка дорівнює радіусу, проведено дві дотичні, які перетинаються в точці P (рис. 30). Знайти кут KPM.

■ Трикутник OKM — рівносторонній, тому $\angle O = \angle K = \angle M = 60°$. $PK = PM$ за властивістю дотичних, проведених до кола з однієї точки. Тоді трикутник PKM — рівнобедрений з основою KM і $\angle MKP = \angle KMP$. За властивістю дотичної маємо, що $\angle OKP = \angle OMP = 90°$. $\angle MKP = \angle OKP - \angle OKM = 90° - 60° = 30°$. За теоремою про суму кутів трикутника маємо: $\angle KPM = 180° - (\angle MKP + \angle KMP) = 180° - (30° + 30°) = 120°$. *Відповідь.* 120°. ■



Рис. 30

Приклад 5. Як розміщені два кола, якщо: 1) радіуси дорівнюють 7 см і 13 см, а відстань між центрами — 20 см; 2) радіуси дорівнюють 5 см і 8 см, а відстань між центрами — 14 см; 3) радіуси дорівнюють 6 см і 15 см, а відстань між центрами — 9 см; 4) радіуси дорівнюють 8 см і 10 см, а відстань між центрами — 1,5 см; 5) радіуси дорівнюють 4 см і 9 см, а відстань між центрами — 7 см?

■ 1) $7 + 13 = 20$, $20 = 20$ — відстань між центрами дорівнює сумі радіусів, отже, кола дотикаються (зовнішній дотик); 2) $5 + 8 = 13$, $14 > 13$ — відстань між центрами більша від суми радіусів, отже, кола не мають спільних точок; 3) $15 - 6 = 9$, $9 = 9$ — відстань між центрами дорівнює різниці радіусів, отже, кола дотикаються (внутрішній дотик); 4) $10 - 8 = 2$, $1{,}5 < 2$ — відстань між центрами менша від різниці радіусів, отже, кола не мають спільних точок (одне всередині іншого); 5) $9 + 4 = 13$, $9 - 4 = 5$, $5 < 7 < 13$ — відстань між центрами більша від різниці радіусів і менша від їх суми, отже, кола перетинаються.

Відповідь. 1), 3) — дотикаються; 2), 4) — не мають спільних точок; 5) — перетинаються. ■

Приклад 6. Хорди кола NK і KZ утворюють кут 30° (рис. 31). Знайти хорду NZ, якщо діаметр кола дорівнює 38 см.

■ За умовою, $\angle NKZ = 30°$. Проведемо діаметр ZM і сполучимо точки N і M. $\angle NMZ = \angle NKZ$ як вписані, що спираються на дугу NZ. Отже, $\angle NMZ = 30°$. Кут MNZ спирається на діаметр кола, тому $\angle MNZ = 90°$. У прямокутному трикутнику MNZ за властивістю катета, який лежить проти кута 30°, $NZ = \dfrac{MZ}{2} = \dfrac{38}{2} = 19$ (см). *Відповідь.* 19 см. ■



Рис. 31

Приклад 7. За даними на рис. 32 знайти кут x.

■ Оскільки центральний кут AOB спирається на дугу AB, то $\cup AB = \angle AOB = 80°$. За теоремою про вписаний кут $\angle AKB = \dfrac{1}{2} \cup AB = \dfrac{1}{2} \cdot 80° = 40°$. *Відповідь.* 40°. ■



Рис. 32

Приклад 8. Трикутник AKC вписаний у коло, центр якого належить стороні AK. Знайти: 1) $\angle K$, якщо $\angle A = 46°$; 2) медіану, проведену з вершини C, якщо $AK = 14$ см.

■ Нехай ABC — трикутник, про який ідеться в умові задачі (рис. 33). 1) Оскільки центр кола лежить на стороні трикутника, то такий трикутник прямокутний ($\angle C = 90°$). За властивістю гострих кутів прямокутного трикутника $\angle K = 90° - 46° = 44°$; 2) $AK = D = 14$ см; $R = \dfrac{D}{2} = \dfrac{14}{2} = 7$ (см). $CO = R = 7$ см.

Відповідь. 1) 44°; 2) 7 см. ■



Рис. 33

Приклад 9. Знайти площу сектора круга радіуса 5 см з центральним кутом 72°.

■ $S=\frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$, $S=\frac{\pi\cdot 25\cdot 72^\circ}{360^\circ}=5\pi$ (см^2). *Відповідь.* 5π см^2. ■

Приклад 10. Площа кругового сектора становить $\frac{5}{9}$ площі круга (рис. 34). Знайти площу цього сектора, якщо довжина дуги, на яку він спирається, дорівнює 20π см.

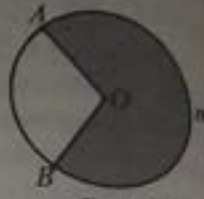


Рис. 34

■ Площа сектора $S_{сект.}=\frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}$, $S_{кр.}=\pi R^2$. Маємо: $\frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ}=\frac{5}{9}\pi R^2$, $\frac{n}{360}=\frac{5}{9}$, $n=\frac{360\cdot 5}{9}=200$. Довжину дуги визначають за формулою $l=\frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$. Маємо: $\frac{\pi R\cdot 200^\circ}{180^\circ}=20\pi$. Звідси $R=18$ см. $S_{сект.}=\frac{5}{9}\pi 18^2=180\pi$ (см^2). *В-дь.* 180π см^2. ■

Приклад 11. Сторона правильного трикутника дорівнює a. З його центра радіусом, утричі меншим від сторони, проведено коло. Знайти площу частини трикутника, розміщеної поза кругом. У відповідь записати значення $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{S}$, якщо $a=3$.

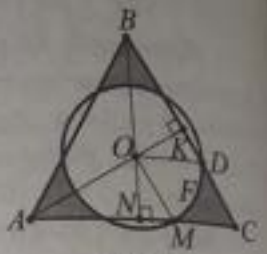


Рис. 35

■ Нехай ABC — рівносторонній трикутник зі стороною $AB=a$ і центром O (рис. 35). Знайдемо площу фігури $MFDC$. У прямокутному трикутнику BNC ($\angle N=90^\circ$) $BN=\frac{a\sqrt{3}}{2}$; $ON=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. $OM=\frac{a}{3}$, звідки $\sin\angle OMN=\frac{ON}{OM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle OMN=60^\circ$. Аналогічно $\angle ODK=60^\circ$. $\angle MCD=60^\circ$. Маємо: $\angle ODK=\angle MCD=60^\circ$, а вони є відповідними при прямих OD і MC та січній DC. Отже, $OD\|MC$, аналогічно $OM\|DC$. $MO=OD=R$. Тому $MODC$ — ромб. $\angle MOD=\angle MCD=60^\circ$. $S_{MFDC}=S_{OMCD}-S_{сект.\ MOD}$. $S_{OMCD}=MO^2\cdot\sin\angle C=\frac{a^2}{9}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{a^2\sqrt{3}}{18}$. $S_{сект.\ MOD}=\frac{\pi a^2\cdot 60}{9\cdot 360}=\frac{\pi a^2}{54}$. $S_{MFDC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{18}-\frac{\pi a^2}{54}=\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{54}$. Шукана площа утричі більша за S_{MFDC}, тому $S=3\cdot\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{54}=\frac{a^2}{18}\left(3\sqrt{3}-\pi\right)$. У відповідь необхідно записати $\frac{3\sqrt{3}-\pi}{S}$. Тоді одержимо: $(3\sqrt{3}-\pi):\frac{a^2\left(3\sqrt{3}-\pi\right)}{18}=\frac{18}{a^2}$. Якщо $a=3$, то $\frac{18}{a^2}=\frac{18}{9}=2$. *Відповідь.* 2. ■

Приклад 12. На рис. 36 зображено вписаний у коло правильний трикутник (а) і описаний навколо кола правильний чотирикутник (б). Знайти площу затушованих частин фігур, якщо радіус кола дорівнює 3 см.


Рис. 36 а)


Рис. 36 б)

■ Площу затушованих частин позначимо через $S_{фігур}$.

а) $S_{фігур}=S_{кр.}-S_{\Delta}$. $S_{кр.}=\pi R^2=9\pi$ см^2. Площа правильного трикутника, вписаного в коло, дорівнює $S_{\Delta}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, де $a=R\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ см. $S_{\Delta}=\frac{(3\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{3}}{4}$ (см^2). $S_{фігури}=9\pi-\frac{27\sqrt{3}}{4}=\frac{36\pi-27\sqrt{3}}{4}$ (см^2);

б) $S_{кр.}=9\pi$ см^2. Сторона квадрата, описаного навколо кола, дорівнює $a=2R=2\cdot 3=6$ (см) $S_{кв.}=a^2=36$ см^2. $S_{фігури}=(36-9\pi)$ см^2. *Відповідь.* **а)** $\frac{36\pi-27\sqrt{3}}{4}$ см^2; **б)** $(36-9\pi)$ см^2. ■

Завдання 35.1–35.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

35.1. Знайти довжину кола, якщо його діаметр дорівнює 20 см.

А	Б	В	Г	Д
10π см	40π см	20π см	100π см	50π см

35.2. Знайти радіус кола, якщо довжина кола дорівнює 24π см.

А 4π см Б 12 см В 24 см Г 48π см Д 96 см

35.3. Знайти довжину дуги кола, радіус якого дорівнює 10, якщо її кутова величина дорівнює $30°$.

А $\frac{4}{3}\pi$ Б $\frac{10}{3}\pi$ В $\frac{5}{6}\pi$ Г $\frac{6}{5}\pi$ Д $\frac{5}{3}\pi$

35.4. Знайти радіус кола, в якого кутова величина дуги завдовжки π см дорівнює $45°$.

А 6 см Б 3 см В π см Г 2 см Д 4 см

35.5. Яка кутова величина дуги завдовжки $\frac{\pi}{2}$ см у колі радіуса 3 см?

А $15°$ Б $30°$ В $45°$ Г $60°$ Д $75°$

35.6. Знайти площу круга, у який вписано трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см.

А 10π см^2 Б 36π см^2 В 64π см^2 Г 25π см^2 Д 49π см^2

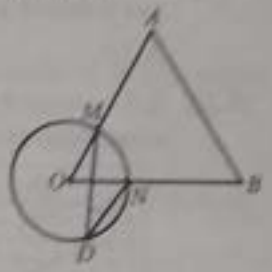
35.7. Знайти діаметр круга, площа якого дорівнює π см^2.

А 2 см Б 4 см В 3 см Г 5 см Д 6 см

35.8. Знайти площу кругового сектора радіуса 3 см з центральним кутом $120°$.

А 2π см^2 Б 3π см^2 В 4π см^2 Г 5π см^2 Д 6π см^2

35.9. **(ЗНО–2011)** На рисунку зображено коло з центром у точці O і рівносторонній трикутник AOB, що перетинає коло в точках M і N. Точка D належить колу. Знайти градусну міру кута MDN.



А $15°$ Б $30°$ В $45°$ Г $60°$ Д $120°$

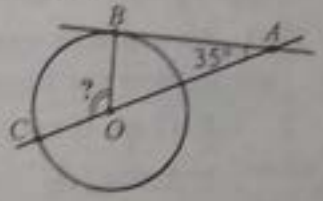
35.10. При збільшенні радіуса круга його площа збільшилась у 9 разів. У скільки разів збільшилася довжина кола цього круга?

А 1,5 Б 27 В 9 Г 2 Д 3

35.11. З точки кола проведено дві перпендикулярні хорди, довжини яких дорівнюють 12 і 16. Знайти довжину кола.

А 20π Б 40π В 50π Г 60π Д 35π

35.12. **(ЗНО–2010)** До кола проведено дотичну AB (B — точка дотику) та січну AC, що проходить через центр O кола (див. рисунок). Знайти градусну міру кута COB, якщо $\angle OAB = 35°$.



А $105°$ Б $115°$ В $120°$ Г $125°$ Д $145°$

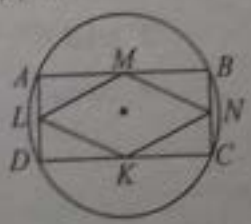
35.13. Коло, радіус якого дорівнює 9, розігнуто в дугу, радіус кола якої дорівнює 24. Знайти центральний кут, який стягує утворену дугу.

А $100°$ Б $120°$ В $135°$ Г $150°$ Д $180°$

35.14. Точки A, B і C ділять коло на дуги у відношенні 2 : 3 : 4. Знайти найбільший кут трикутника ABC.

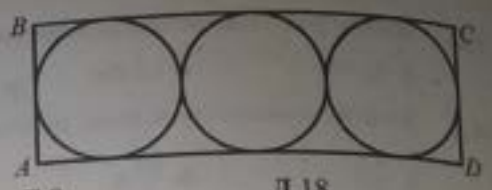
А $160°$ Б $80°$ В $120°$ Г $100°$ Д $70°$

35.15. У коло, довжина якого дорівнює 6π см, вписано прямокутник $ABCD$. M, N, K і L — середини сторін прямокутника. Чому дорівнює периметр чотирикутника $MNKL$?



А 6 см Б 9 см В 12 см Г 14 см Д 18 см

35.16. (ЗНО–2011) У прямокутник $ABCD$ вписано три круги одного й того самого радіуса (див. рисунок). Визначити довжину сторони BC, якщо загальна площа кругів дорівнює 3π.



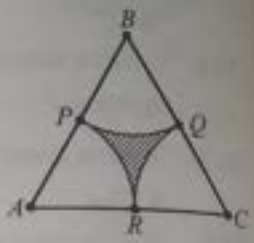
А 2 Б 3 В 6 Г 9 Д 18

35.17. На рисунку зображено квадрат зі стороною 1 і дуги кіл радіуса 1. Знайти площу заштрихованої частини.



А $\pi+1$ Б $\pi-2$ В $\frac{\pi}{2}+1$ Г $\pi-1$ Д $\frac{\pi}{2}-1$

35.18. Довжина сторони правильного трикутника ABC дорівнює 6. Точки P, Q і R — середини його сторін. PR, PQ і QR — дуги кіл з центрами відповідно в точках A, B і C. Знайти площу криволінійного трикутника PQR.

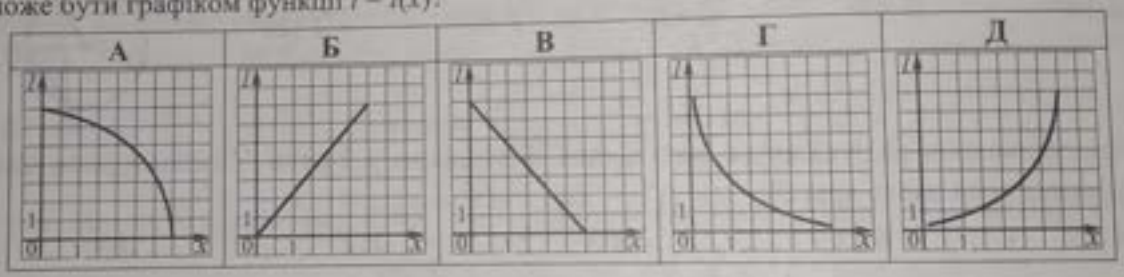


А 1 Б 2 В $\frac{\pi}{2}-1$ Г $6(\pi-3)$ Д $9\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}\right)$

35.19. Три кола, радіуси яких дорівнюють 2, 3 і 10, попарно дотикаються зовні. Знайти радіус кола, яке вписане в трикутник, утворений центрами цих кіл.

А 3,5 Б 3 В 2,5 Г 2 Д 1,5

35.20. $l(x)$ — довжина хорди, проведеної на відстані x від центра кола. Який із наведених графіків може бути графіком функції $l = l(x)$?



Завдання 35.21–35.23 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

35.21. З точки кола проведено дві перпендикулярні хорди a та b. Установити відповідність між довжинами цих хорд (1–3) та довжиною кола (А–Д).

1 12 см, 16 см
2 5 см, 12 см
3 3 см, 4 см

А 5π см
Б 20π см
В 10π см
Г 13π см
Д 12π см

35.22. Установити відповідність між довжинами сторін квадрата (1–3) та радіусами вписаних у квадрати кіл (А–Д).

1 2 см
2 6 см
3 10 см

А 3 см
Б 15 см
В 1 см
Г 4 см
Д 5 см

35.23. Установити відповідність між заданими відношеннями радіусів двох концентричних кругів (1–3) та відношенням площі першого круга до площі кільця (А–Д).

1 $2:1$	А $9:5$
2 $3:2$	Б $16:7$
3 $5:3$	В $4:3$
	Г $16:5$
	Д $25:16$

Розв'яжіть завдання 35.24–35.34. Відповідь запишіть десятковим дробом.

35.24. Знайти довжину кола l, вписаного в ромб, діагоналі якого дорівнюють 15 і 20. У відповідь записати $\frac{l}{\pi}$.

35.25. У рівнобедрену трапецію вписано коло. Основи трапеції дорівнюють 9 і 25. Знайти:

1) бічну сторону; 2) довжину l вписаного кола. У відповідь записати $\frac{l}{\pi}$.

35.26. Периметр правильного трикутника дорівнює 36. На стороні трикутника як на діаметрі побудовано коло. Знайти довжину l дуги, розміщеної у внутрішній області трикутника. У відповідь записати $\frac{l}{\pi}$.

35.27. Знайти площу S круга, описаного навколо правильного трикутника зі стороною 9. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

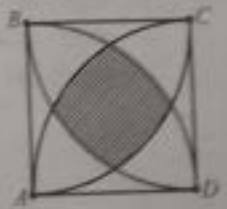
35.28. Знайти площу S круга, вписаного в правильний шестикутник зі стороною 6. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

35.29. **(ЗНО–2010)** Два кола дотикаються, причому менше з кіл проходить через центр більшого кола (див. рисунок). Знайти площу зафарбованої фігури (у $см^2$), якщо менше з кіл обмежує круг площею 64 $см^2$.



35.30. Знайти відношення площ кругів, вписаного й описаного навколо квадрата.

35.31. На рисунку сторона квадрата дорівнює 5. Кожна його вершина є центром кола радіуса 5. Знайти периметр P замальованого криволінійного чотирикутника, обмеженого цими колами. У відповідь записати $\frac{3P}{\pi}$.



35.32. У прямокутну трапецію з основами 1 і 3 вписано коло. Знайти радіус вписаного кола.

35.33. На висоті рівностороннього трикутника як на діаметрі побудовано круг. Довжина сторони трикутника дорівнює 1. Знайти з точністю до 0,01 площу тієї частини трикутника, яка лежить поза даним кругом.

35.34. Клумбу діаметром 6 м потрібно розбити на 6 рівних секторів для квітів різних видів. Скільки квітів одного виду можна посадити, якщо для кожної квітки необхідно 1 $дм^2$ землі?

Тема 36. Аксіоми стереометрії. Прямі та площини в просторі

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— аксіоми та теореми стереометрії;
— взаємне розміщення в просторі: прямих, прямої та площини, площин;
— паралельність прямих, прямої та площини, площин, паралельне проектування;
— перпендикулярність прямих, прямої та площини, двох площин, теорема про три перпендикуляри;
— відстань від точки до площини, від прямої до паралельної площини, між паралельними площинами;
— кут між прямими, прямою та площиною, площинами, двогранний кут, лінійний кут двогранного кута;
— застосовувати означення, ознаки та властивості паралельних і перпендикулярних прямих та площин для розв'язування стереометричних задач і задач практичного змісту;
— знаходити відстані та величини кутів у просторі;
— ознаки мимобіжних прямих, відстань між мимобіжними прямими;
— ортогональна проекція.

Розділ геометрії, в якому вивчають властивості фігур у просторі, називають *стереометрією*. Основними фігурами у просторі є точка, пряма та площина.

Властивості всіх фігур, які вивчали в планіметрії, справджуються і в кожній площині простору.

Аксіоми стереометрії та наслідки з них:

1. *Яка б не була площина, існують точки, що належать цій площині, і точки, які не належать їй.*

На рис. 1 $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \notin \alpha$.

2. *Якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій.*

На рис. 2 $A \in \alpha$, $A \in \beta$, тому $\alpha \cap \beta = a$.

3. *Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж лише одну (рис. 3).*

4. *Якщо дві точки прямої належать площині, то й уся пряма, якій належать ці точки, належить цій площині.* На рис. 4 $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, тому $AB \subset \alpha$.



Рис. 1

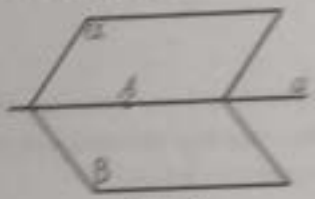


Рис. 2

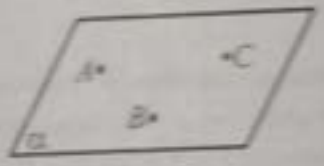


Рис. 3

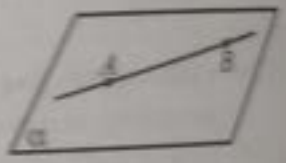


Рис. 4

Одну площину можна провести:

— через дві прямі, що перетинаються (рис. 5);
— через пряму і точку, що не належить цій прямій (рис. 6);
— через дві паралельні прямі (рис. 7).

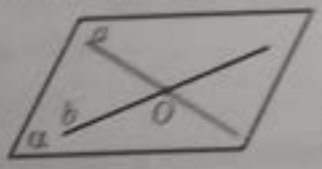


Рис. 5

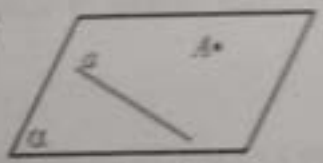


Рис. 6

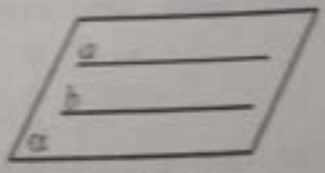


Рис. 7

Прямі в просторі. *Прямі в просторі можуть:* перетинатися (рис. 8); лежати в одній площині й не перетинатися (рис. 9) (прямі *паралельні*); не лежати в одній площині й не перетинатися (рис. 10). Такі прямі називають *мимобіжними*.

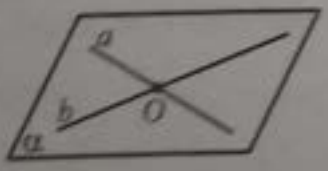


Рис. 8



Рис. 9

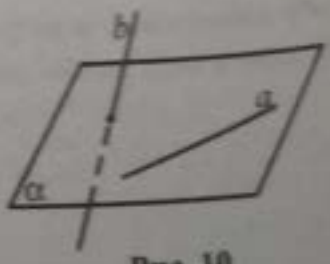


Рис. 10

Через будь-яку точку простору можна провести безліч прямих (рис. 11).
Через будь-які дві точки простору можна провести одну пряму (рис. 12).
Оскільки пряму визначають дві точки, то через будь-які дві точки у просторі можна провести безліч площин (рис. 13).

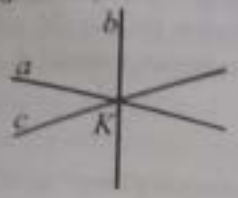


Рис. 11



Рис. 12

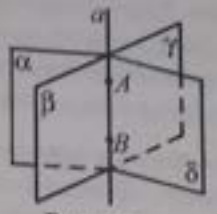


Рис. 13

Взаємне розміщення прямої та площини. Пряма може:
— перетинати площину (рис. 14), A — єдина спільна точка;
— лежати в площині (рис. 15);
— не мати з площиною спільних точок (рис. 16).

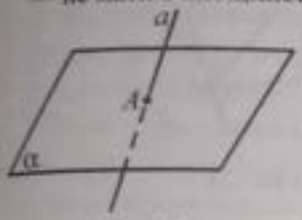


Рис. 14

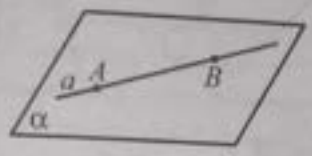


Рис. 15

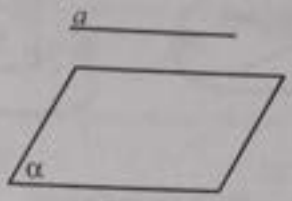


Рис. 16

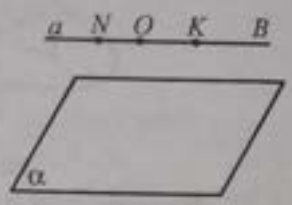


Рис. 17

Паралельність прямих і площин

Пряму й площину називають *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок. На рис. 16 $a \| \alpha$.

Відрізок або промінь називають *паралельними* до площини, якщо вони є частиною прямої, паралельної до цієї площини. На рис. 17 $a \| \alpha$, тому $OK \| \alpha$, $ON \| \alpha$, $OB \| \alpha$.

Ознака паралельності прямої та площини

Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна до якої-небудь прямої у цій площині, то вона паралельна і до самої площини. На рис. 18: якщо $a \| b$, $b \subset \alpha$, то $a \| \alpha$.

Якщо площина проходить через пряму, паралельну іншій площині й перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна даній прямій. На рис. 19 $a \in \alpha$, $a \| \beta$, $\alpha \cap \beta = b$, тому $a \| b$.

У просторі через точку, що не належить площині, можна провести безліч прямих, паралельних до площини. На рис. 20 $A \notin \alpha$, $A \in a$, $A \in b$, $A \in c$, $a \| \alpha$, $b \| \alpha$, $c \| \alpha$.

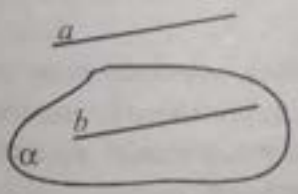


Рис. 18

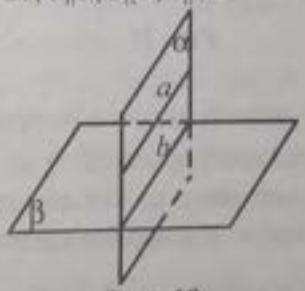


Рис. 19

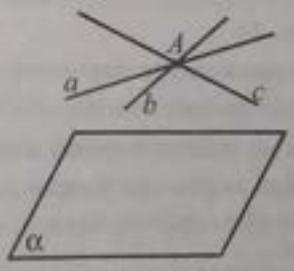


Рис. 20

Перпендикулярність прямих і площин

Пряму a називають *перпендикулярною* до площини, якщо вона перетинає цю площину і перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у цій площині й проходить через точку перетину a і α.

Ознака перпендикулярності прямої та площини. Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, що проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна і до самої площини. На рис. 21 $a \cap \alpha$, $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$, $a \perp b$, $a \perp c$, $O \in a$, $O \in b$, $O \in c$, тому $a \perp \alpha$.

Перпендикуляр і похила. *Перпендикуляром*, проведеним з точки до площини, називають відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини.

Кінець перпендикуляра, який лежить у площині, називають *основою перпендикуляра*. На рис. 22 AC — перпендикуляр, проведений з точки A до площини α, точка C — основа перпендикуляра.

Відстанню від точки до площини називають довжину перпендикуляра, проведеного з цієї точки на площину. На рис. 22 AC — відстань від точки A до площини α.

Похилою, проведеною з даної точки до даної площини, називають будь-який відрізок, який сполучає дану точку з точкою площини і не є перпендикуляром до площини. На рис. 22 AB — похила.

Відрізок, який сполучає основи перпендикуляра і похилої, проведених з однієї й тієї ж точки, називають *проекцією похилої*. На рис. 22 CB — проекція похилої AB.

Теорема про три перпендикуляри

Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до її проекції, то вона перпендикулярна до похилої (рис. 23). Навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна й до проекції похилої на цю площину. На рис. 23 $AB \perp \alpha$, AC — похила, BC — проекція похилої AC на площину α, $a \perp BC$, тоді $a \perp AC$, і навпаки, якщо $a \perp AC$, тоді $a \perp BC$.

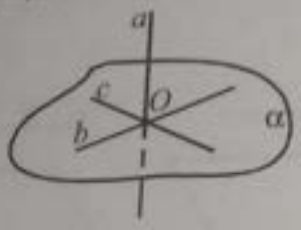


Рис. 21

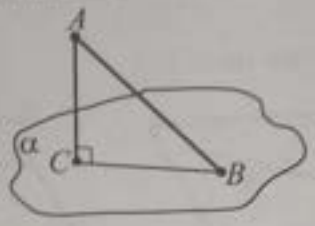


Рис. 22

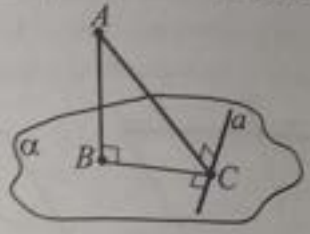


Рис. 23

Відстань між мимобіжними прямими

Відстанню між мимобіжними прямими називають довжину їх спільного перпендикуляра. На рис. 24 прямі a і b мимобіжні, $AB \perp a$, $AB \perp b$, тому AB — відстань між прямими a та b.

Кут між мимобіжними прямими. *Кутом між мимобіжними* прямими називають кут між прямими, які перетинаються й паралельні до мимобіжних прямих: $a \| a_1$, $b \| b_1$, $\angle(ab) = \angle(a_1 b_1) = \beta$ (рис. 25).

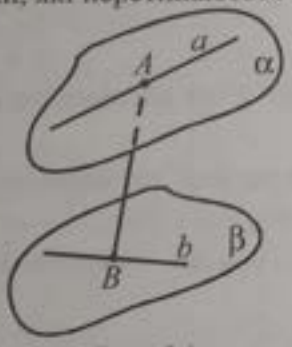


Рис. 24

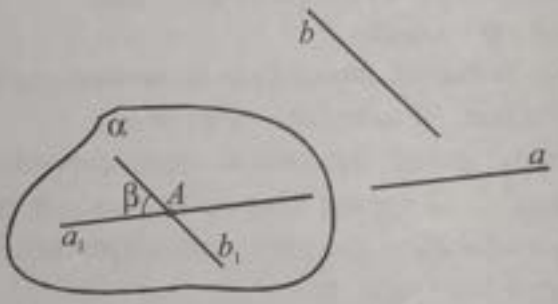


Рис. 25

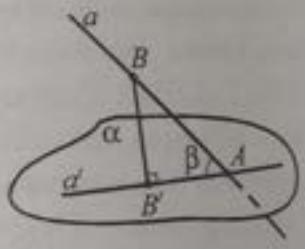


Рис. 26

Кут між прямою та площиною

Кутом між прямою та площиною називають кут між прямою і її проекцією на цю площину. На рис. 26 пряма a' — проекція прямої a на площину α, $\angle BAB'$ — кут між прямою a і площиною α.

Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між нею й площиною вважається таким, що дорівнює 90°, а між паралельними прямою та площиною таким, що дорівнює 0°.

Взаємне розміщення площин. Дві площини можуть або не перетинатися (рис. 27), або перетинатися (рис. 28).

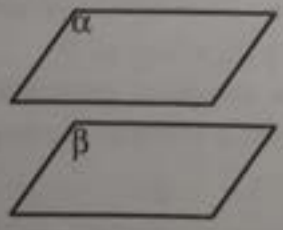


Рис. 27

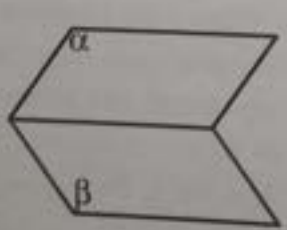


Рис. 28

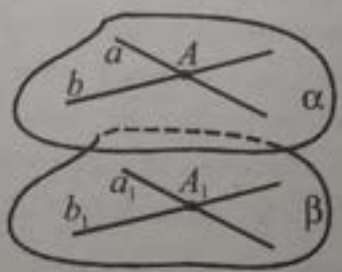


Рис. 29

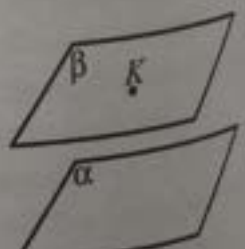


Рис. 30

Паралельність площин. Дві площини, які не перетинаються, називають *паралельними*. На рис. 27 площини α і β — паралельні. Записують: $\alpha \| \beta$.

Ознака паралельності площин. Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини, відповідно паралельні двом прямим іншої площини, то такі площини паралельні.

На рис. 29 $a \cap b = A$, $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a_1 \subset \beta$, $b_1 \subset \beta$, $a \| a_1$, $b \| b_1$, тоді $\alpha \| \beta$.

Основна властивість паралельних площин. Через точку, що не належить площині, можна провести площину, паралельну до даної, і до того ж лише одну.

На рис. 30 $K \notin \alpha$, $K \in \beta$, $\beta \| \alpha$, β — єдина.

Відношення паралельності має такі властивості:

1) кожна площина паралельна сама собі (рефлексивність);

2) якщо $\alpha \| \beta$, то $\beta \| \alpha$ (симетричність);

3) якщо $\alpha \| \beta$ і $\beta \| \gamma$, то $\alpha \| \gamma$ (транзитивність).

Для паралельних площин справедливі такі твердження:

1) дві паралельні площини перетинаються третьою площиною по паралельних прямих.

На рис. 31 $\alpha \| \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$, тоді $a \| b$;

2) відрізки паралельних прямих, що відтинаються паралельними площинами, рівні.

На рис. 32 $A_1 \in \alpha$, $A_2 \in \alpha$, $B_1 \in \beta$, $B_2 \in \beta$, $A_1B_1 \| A_2B_2$, $\alpha \| \beta$, тоді $A_1B_1 = A_2B_2$.

Властивості площин, що перетинаються

1. Якщо одна з двох площин, що перетинаються, проходить через пряму, паралельну іншій площині, то пряма їх перетину паралельна даній прямій. На рис. 33 $\alpha \cap \beta = b$, $a \subset \alpha$, $a \| \beta$, тоді $a \| b$.

2. Якщо пряма паралельна кожній з двох площин, що перетинаються, тоді вона паралельна прямій їх перетину. На рис. 34 $\alpha \cap \beta = b$, $a \| \alpha$, $a \| \beta$, тоді $a \| b$.

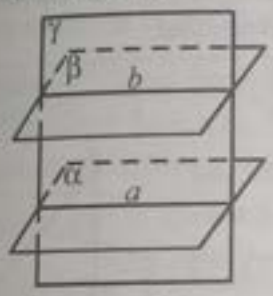


Рис. 31

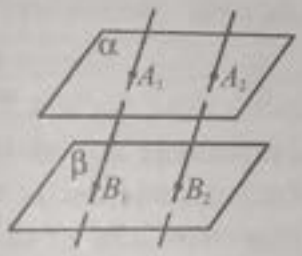


Рис. 32

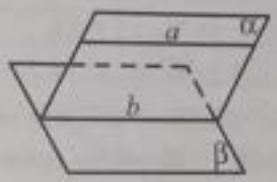


Рис. 33

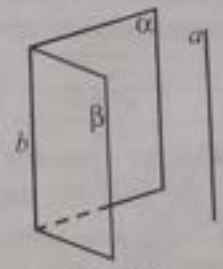


Рис. 34

Кут між площинами. Нехай площини α і β перетинаються (див. рис. 35). Проведемо площину, перпендикулярну до прямої їх перетину. Ця площина перетинає дані площини по двох прямих. Кут між цими прямими називають *кутом між даними площинами*. Означений таким чином кут між площинами не залежить від вибору січної площини.

На рис. 35 $\alpha \cap \beta = c$, $\gamma \perp c$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$, тоді $\Rightarrow \angle(\alpha; \beta) = \angle(a; b)$ — кут між площинами α і β. Міра кута між площинами може змінюватися від $0°$ до $90°$. Кут між паралельними площинами $0°$.

Двогранний кут. *Двогранний кут* — це фігура, утворена двома півплощинами, які мають спільну пряму, що їх обмежує. Півплощини називаються *гранями кута*, а спільну пряму — *ребром кута*. Мірою двогранного кута є міра відповідного йому лінійного кута.

На рис. 36 α і β — грані двогранного кута, c — ребро.

Лінійний кут двогранного кута — це кут, утворений двома півпрямими, по яких площина, перпендикулярна до ребра двогранного кута, перетинає даний двогранний кут. Міра двогранного кута не залежить від вибору лінійного кута. На рис. 36 $\angle(a; b)$ — лінійний кут двогранного кута. Міра двогранного кута може змінюватися від $0°$ до $360°$.

Перпендикулярність площин

Дві площини, що перетинаються, називають *перпендикулярними*, якщо третя площина, перпендикулярна до прямої перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих.

На рис. 37 $\alpha \cap \beta = c$, $\gamma \perp c$, $\alpha \cap \gamma = a$, $\beta \cap \gamma = b$, $a \perp b$, тоді $\alpha \perp \beta$, $\angle(a; b) = 90°$.

Ознака перпендикулярності площин

Якщо одна з двох площин проходить через пряму, перпендикулярну до іншої площини, то ці площини перпендикулярні. На рис. 37 $b \subset \beta$, $b \perp \alpha$, тоді $\beta \perp \alpha$.



Рис. 35



Рис. 36

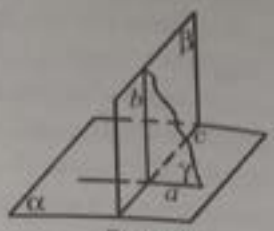


Рис. 37

Справедливими є такі твердження:

1. Якщо пряма, яка лежить в одній із двох перпендикулярних площин, перпендикулярна до лінії їх перетину, то вона перпендикулярна і до іншої площини.

2. Через точку поза площиною можна провести безліч площин, перпендикулярних до цієї площини і всі вони пройдуть через перпендикулярну до цієї площини пряму, яка проходить через дану точку.

3. Якщо площина й пряма, що не належить цій площині, перпендикулярні до однієї й тієї ж площини, то ці площина й пряма паралельні.

4. Через довільну пряму, яка не перпендикулярна до даної площини, можна провести єдину площину, перпендикулярну до даної.

5. Якщо дві площини перпендикулярні, то пряма, яка є перпендикулярною до однієї з цих площин і проходить через їх спільну точку, лежатиме в іншій площині.

Приклад 1. З даної точки до площини проведено перпендикуляр і похилу. Довжина перпендикуляра дорівнює довжині проекції похилої. Знайти кут між перпендикуляром і похилою.

А	Б	В	Г	Д
45°	60°	30°	40°	20°

■ Нехай з точки A до площини α проведено перпендикуляр AB ($AB \perp \alpha$) і похилу AC (рис. 38). Тоді BC — проекція похилої AC на площину α. $AB = BC$. $\angle CAB$ — кут між перпендикуляром і похилою. Трикутник ABC прямокутний ($\angle B = 90°$) і рівнобедрений. Отже, $\angle CAB = 45°$. *Відповідь.* А. ■

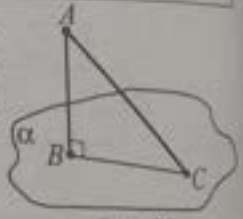


Рис. 38

Приклад 2. Визначити вид перерізу куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, яка проходить через середини ребер AB, BC і DD_1.

А	Б	В	Г	Д
Трикутник	Трапеція	Паралелограм	П'ятикутник	Прямокутник

■ Будуємо точку $L = KM \cap DC$, точку $F = ZL \cap CC_1$, точку N таку, що $N \in AA_1$, $N = ZN \cap AA_1$, $ZN \| FM$ (рис. 39). Отже, перерізом є п'ятикутник $NKMFZ$. *Відповідь.* **Г.** ■

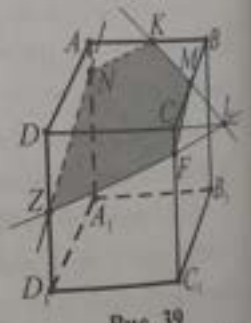


Рис. 39

Приклад 3. Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 40).

а) Чи перетинаються прямі BB_1 і CC_1, AB і CD? Як називають ці прямі?

б) Чи перетинаються прямі BC і AA_1, CD і BB_1? Як називають ці прямі?

■ **а)** Прямі BB_1 і CC_1 лежать в одній площині (BCC_1) і не перетинаються. Вони паралельні. Прямі AB і CD лежать у площині (ABC) і не перетинаються. Вони паралельні;

б) прямі BC і AA_1 лежать в різних площинах і не перетинаються. Вони мимобіжні. Прямі CD і BB_1 лежать в різних площинах і не перетинаються. Вони мимобіжні. ■

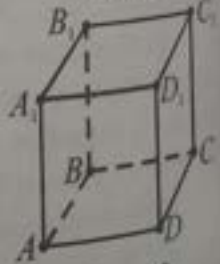


Рис. 40

Приклад 4. Дано зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 41). Визначити взаємне розміщення площини ABC і прямих: **а)** A_1B_1; **б)** BB_1; **в)** DB_1; **г)** CD.

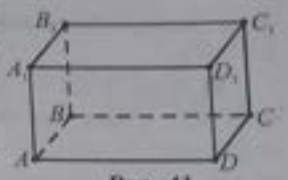


Рис. 41

■ Позначимо площину ABC через α.

а) Оскільки $A_1B_1 \parallel AB$, $AB \in \alpha$, то $A_1B_1 \parallel \alpha$;

б) оскільки $BB_1 \perp AB$, $BB_1 \perp BC$ і $AB \in \alpha$, $BC \in \alpha$, то $BB_1 \perp \alpha$;

в) оскільки пряма DB_1 і площина α мають спільну точку D, то пряма DB_1 перетинає площину α;

г) пряма CD належить площині α. ■

Приклад 5. Пряма a перпендикулярна до площини α і перетинає її в точці O (рис. 42). Точка K лежить на даній прямій і віддалена від площини α на 32 см, а від точки N цієї площини — на 40 см. Знайти NO.

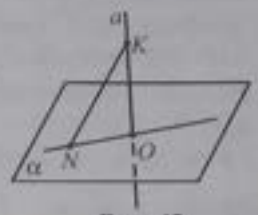


Рис. 42

■ Оскільки $a \perp \alpha$, $NO \in \alpha$, то $a \perp NO$ і ΔNOK — прямокутний ($\angle O = 90°$).

Маємо: $NO = \sqrt{NK^2 - KO^2}$, $NO = \sqrt{40^2 - 32^2} = \sqrt{8 \cdot 72} = 24$ (см).

Відповідь. 24 см. ■

Приклад 6. Дано зображення прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 43). Користуючись рисунком, визначити: **а)** площини, які перетинають площину ABC; **б)** площини, які паралельні до площини ABC.

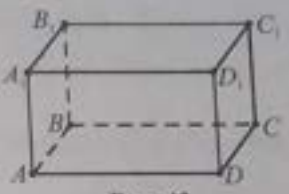


Рис. 43

■ **а)** Площина (ABB_1) перетинає площину (ABC) по прямій AB;
площина (B_1BC) перетинає площину (ABC) по прямій BC;
площина (D_1DC) перетинає площину (ABC) по прямій DC;
площина (A_1AD) перетинає площину (ABC) по прямій AD;

б) площина $(A_1B_1C_1)$ паралельна до площини (ABC). ■

Приклад 7. Дано рівносторонній трикутник ABC, $AB = 2$ см, $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, $CA_1 = 3$ см, $CB_1 = 7$ см, $A_1D = DB_1$ (рис. 44). Знайти довжину CD.

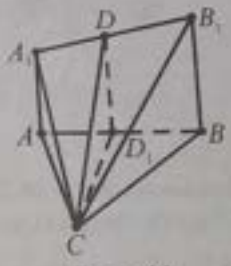


Рис. 44

■ $AA_1 \perp (ABC)$, тому $AA_1 \perp AB$ і $AA_1 \perp AC$. З ΔA_1AC знайдемо довжину AA_1: $AA_1 = \sqrt{CA_1^2 - AC^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ (см). $BB_1 \perp (ABC)$, тому $BB_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AB$. З ΔCB_1B знайдемо довжину BB_1: $BB_1 = \sqrt{CB_1^2 - BC^2} = \sqrt{49-4} = 3\sqrt{5}$ (см).

$AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, тоді $AA_1 \parallel BB_1$. Чотирикутник AA_1B_1B — трапеція, точка D — середина відрізка A_1B_1. Проведемо $DD_1 \perp (ABC)$, тоді $DD_1 \parallel AA_1$ і $DD_1 \parallel BB_1$. Отже, DD_1 — середня лінія трапеції. $DD_1 = \dfrac{AA_1 + BB_1}{2} = \dfrac{\sqrt{5} + 3\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$ (см).

У рівносторонньому трикутнику ABC медіана CD_1 є висотою. $CD_1 = \dfrac{AC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см).

З ΔCD_1D знайдемо CD: $CD = \sqrt{CD_1^2 + DD_1^2}$, $CD = \sqrt{3 + 20} = \sqrt{23}$ (см). *Відповідь.* $\sqrt{23}$ см. ■

Приклад 8. Через точку O перетину діагоналей квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр MO до його площини, сторона квадрата дорівнює $2a$ (рис. 45). Знайти відстань між прямими AB і MO.

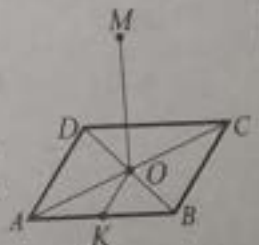


Рис. 45

■ Прямі AB й MO мимобіжні. Відстанню від точки O до AB є $OK \perp AB$. $MO \perp (ABC)$, тому $MO \perp KO$. Отже, KO — спільний перпендикуляр до мимобіжних прямих MO і AB, KO — шукана відстань. $KO = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{2a}{2} = a$. *Відповідь.* a. ■

Приклад 9. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при вершині між бічними сторонами. Через основу трикутника проведено переріз перпендикулярно до протилежного бічного ребра, який утворює з площиною основи кут β. Висота піраміди дорівнює H й усі її бічні ребра

рівні. Знайти площу перерізу. У відповідь записати значення площі перерізу, якщо $H = 4$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$.

■ Нехай $SABC$ — задана піраміда, $AB = BC$, $\angle B = \alpha$, SO — висота піраміди, $SO = H$ (рис. 46). Оскільки похилі SA, SB і SC рівні, то рівними будуть і їх проекції OA, OB і OC. Тому O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Нехай площина, проведена через сторону AC перпендикулярно до ребра SB, перетинає ребро в точці K. $\Delta SBA = \Delta SBC$ за трьома сторонами. Отже, $\Delta KBA = \Delta KBC$ за двома сторонами і кутом між ними. Тому $AK = CK$ і трикутник AKC — рівнобедрений. Проводимо $KD \perp AC$. Оскільки $AK = KC$, то $AD = DC$. Точки D, O і B рівновіддалені від кінців відрізка AC, тому вони лежать на серединному перпендикулярі до цього відрізка. Отже, $O \in BD$, $BD \perp AC$. Кут KDB — лінійний кут двогранного кута між площинами AKC і ABC. За умовою, $\angle KDB = \beta$. Оскільки $SB \perp (AKC)$, то $DK \perp SB$. З ΔDKB ($\angle K = 90°$): $\angle KBD = 90° - \beta$. З ΔSOB ($\angle O = 90°$): $OB = R = SO\operatorname{ctg}(90° - \beta) = H\operatorname{ctg}\beta$. З трикутника ABC за наслідком з теореми синусів $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$, крім того, $R = H\operatorname{ctg}\beta$. Отже, $AC = 2H\operatorname{tg}\beta\sin\alpha$. Оскільки BD — висота, а отже, медіана та бісектриса трикутника ABC, то $DC = H\operatorname{tg}\beta\sin\alpha$, $\angle CBD = \frac{\alpha}{2}$. З прямокутного трикутника BDC ($\angle D = 90°$): $DB = DC\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = H\operatorname{tg}\beta\sin\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. З прямокутного трикутника DKB ($\angle K = 90°$) маємо: $DK = DB\cos\beta = H\operatorname{tg}\beta\sin\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cos\beta = H\sin\beta\sin\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. $S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2}AC \cdot DK$;

$S_{\Delta AKC} = \frac{1}{2} \cdot 2H\operatorname{tg}\beta\sin\alpha \cdot H\sin\beta\sin\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = H^2\sin^2\alpha\sin\beta\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Якщо $H = 4$, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$, то

$S_{\Delta AKC} = 4^2\sin^2 60°\sin 30°\operatorname{tg}30°\operatorname{ctg}\frac{60°}{2} = 16 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 6$. *Відповідь.* 6. ■



Рис. 46

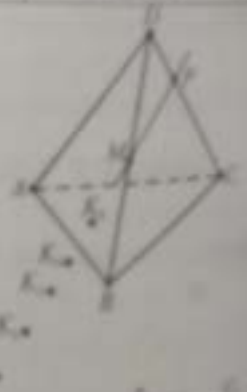
Завдання 36.1–36.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

36.1. Шість точок не лежать в одній площині. Яке найбільше число цих точок може лежати на одній прямій?

А	Б	В	Г	Д
Дві	три	чотири	п'ять	шість

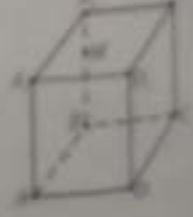
36.2. На рисунку зображено тетраедр $ABCD$. Точка M належить ребру DB, а точка P — ребру DC. Точки K_1, K_2, K_3, K_4 і K_5 належать площині ABC. У якій з цих точок пряма PM перетинає площину ABC?

А K_1 Б K_2 В K_3 Г K_4 Д K_5



36.3. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і точку M на ребрі BB_1. Якій із прямих належить точка перетину прямої MC із площиною $A_1B_1C_1$?

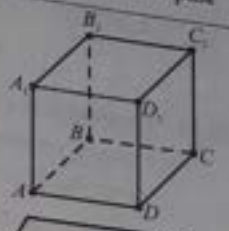
А A_1B_1 Б B_1C_1 В C_1D_1 Г A_1C_1 Д B_1D_1



36.4. Яка з наведених фігур не може бути паралельною проекцією прямокутної трапеції?

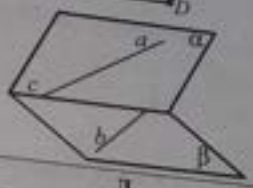
А	Б	В	Г	Д
Трапеція з тупим кутом при більшій основі	прямокутна трапеція	рівнобічна трапеція	відрізок	паралелограм

36.5. **(ЗНО–2015)** На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Яка з наведених прямих паралельна площині (AA_1B_1)?



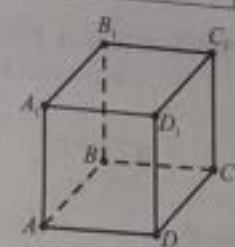
А BC **Б** BD **В** C_1D **Г** CB_1 **Д** A_1B

36.6. На рисунку площини α і β перетинаються по прямій c. Пряма a належить площині α, пряма b — площині β. Яке з наведених тверджень правильне?



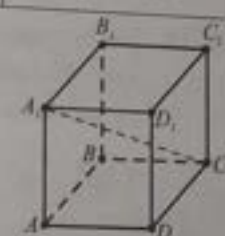
А	Б	В	Г	Д
Прямі a і b перетинаються	прямі a і b паралельні	прямі a і b мимобіжні	прямі a і b лежать в одній площині	прямі a і b паралельні або перетинаються

36.7. **(ЗНО–2010)** На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Перерізом куба площиною, що проходить через точки A, C, C_1, є...



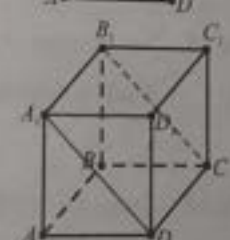
А	Б	В	Г	Д
прямокутний трикутник	рівносторонній трикутник	прямокутник	ромб	трапеція

36.8. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Указати кут між прямою A_1C і площиною DCC_1.



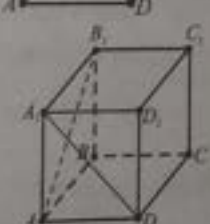
А $\angle A_1CC_1$ **Б** $\angle A_1CD$ **В** $\angle A_1CD_1$ **Г** $\angle ACB_1$ **Д** $\angle A_1CA$

36.9. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $ABCD$ — квадрат зі стороною 1, а бічне ребро $AA_1 = \sqrt{3}$. Чому дорівнює кут між площинами AA_1B_1 і A_1B_1C?



А 30° **Б** 45° **В** 60° **Г** 75° **Д** 90°

36.10. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти кут між прямими AB_1 і A_1D.



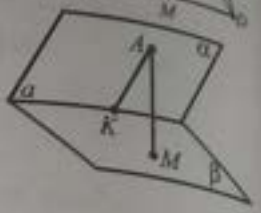
А 30° **Б** 45° **В** 60° **Г** 75° **Д** 90°

36.11. На рисунку $ABCD$ — прямокутна трапеція з прямим кутом B, точка M — середина сторони AD. PB — перпендикуляр до площини ABC. Визначити кут між площинами ABC і APD.



А $\angle PMC$ Б $\angle PMD$ В $\angle PDB$ Г $\angle PAD$ Д $\angle PAB$

36.12. Площини α і β перетинаються по прямій a під кутом 60°. Точка A належить площині α. Довжина відрізка AM є відстанню від точки A до площини β, а довжина відрізка AK — відстанню від точки A до прямої a. Знайти довжину відрізка AK, якщо $AM = \sqrt{3}$.



А 2 Б 1 В $\frac{\sqrt{3}}{2}$ Г $\sqrt{3}$ Д 3

36.13. Точка A віддалена від площини на відстань $6\sqrt{3}$. Обчислити довжину проекції похилої, проведеної з цієї точки під кутом 60° до площини.

А 18 Б $3\sqrt{3}$ В 3 Г $2\sqrt{3}$ Д 6

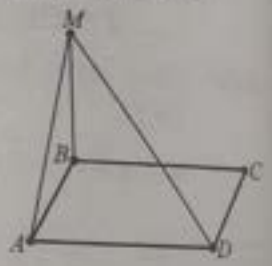
36.14. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює a. Точка A розміщена від кожної вершини трикутника на відстані b. Визначити відстань від точки A до площини трикутника.

А $\sqrt{b^2+\frac{a^2}{3}}$ Б $\sqrt{b^2-a^2}$ В $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{12}}$ Г $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$ Д $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{9}}$

36.15. Точка M розміщена на відстані m від кожної сторони правильного трикутника і на відстані h від площини трикутника. Визначити сторону трикутника.

А $2\sqrt{m^2+h^2}$ Б $2\sqrt{m^2-h^2}$ В $2\sqrt{3(m^2-h^2)}$ Г $\sqrt{3(m^2-h^2)}$ Д $\sqrt{3(m^2+h^2)}$

36.16. На рисунку $ABCD$ — квадрат, MB — перпендикуляр до площини ABC. Похила AM нахилена до площини ABC під кутом 45°. Під яким кутом нахилена до площини ABC похила MD?



А 30° Б 60° В $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$ Г $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$ Д $\operatorname{arctg}2$

36.17. З вершини A квадрата $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр AK завдовжки 6 см. Знайти відстань від точки K до вершини C квадрата, якщо його сторона дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

А 9 см Б 10,5 см В 17 см Г 14 см Д 10 см

36.18. Сторони трикутника ABC дорівнюють 10 см, 17 см і 21 см. З вершини найбільшого кута трикутника проведено перпендикуляр AD до його площини, $AD = 15$ см. Знайти відстань від точки D до сторони BC трикутника.

А $\sqrt{241}$ см Б 17 см В $\sqrt{31}$ см Г 23 см Д $\sqrt{335}$ см

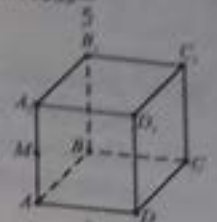
36.19. Знайти кут між площинами, якщо точка, яка лежить на одній з них, віддалена від прямої перетину площин утричі далі, ніж від іншої площини.

А $\arccos\frac{1}{2\sqrt{2}}$ Б $\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}$ В $\arcsin\frac{1}{3}$ Г $\operatorname{arcctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}$ Д $\arccos\frac{1}{3}$

...відрізок завдовжки 10 м перетинає площину, його кінці розміщені на відстані 2 м і 3 м від площини. Знайти кут між даним відрізком і площиною.

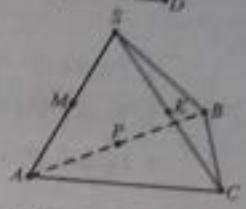
А 30° Б 45° В 60° Г $\arcsin\frac{2}{3}$ Д $\arccos\frac{2}{5}$

36.21. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром $2a$. Точка M — середина ребра AA_1. Установити вид многокутника, який є перерізом куба площиною MBC, визначити його площу.



А $2a^2\sqrt{3}$ Б a^2 В $2a^2$ Г $2a^2\sqrt{5}$ Д $5a^2$

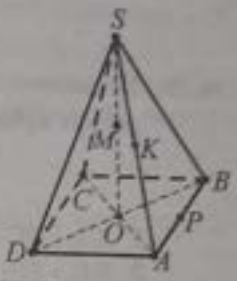
36.22. На рисунку зображено правильний тетраедр $SABC$ з ребром a. Точки M, K і P — відповідно середини ребер AS, SC і AB. Установити вид многокутника, який є перерізом тетраедра площиною MKP, визначити його периметр.



А $3a$ Б $\frac{3}{2}a$ В a Г $2a$ Д $4a$

Завдання 36.23–36.29 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

36.23. Дано піраміду $SABCD$, SO — висота піраміди, M — середина висоти, K — середина ребра SA, P — середина ребра AB. Установити відповідність між прямими і площинами (1–3) та їхнім взаємним розміщенням (А–Д).



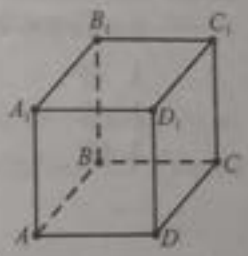
1 Пряма MK і площина ABC

2 Прямі OP і MK

3 Пряма MP і площина SDC

А Площини перетинаються
Б Пряма і площина перетинаються
В Пряма паралельна площині
Г Прямі паралельні
Д Прямі мимобіжні

36.24.(ЗНО–2012) На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. До кожного початку речення (1–4) добрати його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення

1 Пряма CB

2 Пряма CD_1

3 Пряма AC

4 Пряма A_1B

Закінчення речення

А паралельна площині AA_1B_1B.
Б перпендикулярна площині AA_1B_1B.
В належить площині AA_1B_1B.
Г має з площиною AA_1B_1B лише дві спільні точки.
Д утворює з площиною AA_1B_1B кут 45°.

36.25. Дано піраміду $SABCD$, в основі якої паралелограм. SO — висота піраміди. Точки M, N і P — середини відрізків OC, SC і SB відповідно. Установити відповідність між прямими і площинами (1–3) та їх взаємним розміщенням (А–Д).



1 Пряма MN і площина ABC	А Не можна встановити
2 Прямі MN і SO	Б Перпендикулярні
3 Прямі MN і SD	В Перетинаються, але не перпендикулярні
	Г Мимобіжні
	Д Паралельні

36.26. Дано правильну чотирикутну піраміду $SABCD$, у якої SO — висота, M — середина ребра SC, діагональні перерізи — рівносторонні трикутники. Установити відповідність між точками, прямими, площинами (1–3) та відстанями між ними (А–Д).

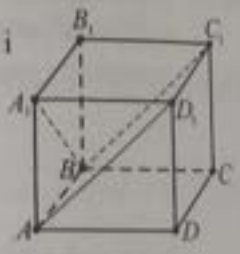


1 Точка D і пряма SB	А BD
2 Точка M і площина ABC	Б AB
3 Прямі AD і BC	В AM
	Г $AM / 2$
	Д $SO / 2$

36.27*. Установити відповідність між кількостями точок, які не лежать в одній площині (1–3), та найбільшою з них кількістю точок (А–Д), які можуть лежати на одній прямій.

1 6	А 6
2 8	Б 4
3 12	В 16
	Г 10
	Д 18

36.28. Установити відповідність між відрізками (1–3), побудованими на гранях і ребрах куба, та величинами кутів між ними (А–Д).



1 AD_1 і BC_1	А 60°
2 BA_1 і AD_1	Б 0°
3 AB і AD_1	В 45°
	Г 90°
	Д 30°

36.29. Установити відповідність між кутами нахилу (1–3) відрізка завдовжки 10 см до площини та довжиною його проекції на площину (А–Д).

1 30°	А 5 см
2 45°	Б $5\sqrt{3}$ см
3 60°	В $5\sqrt{2}$ см
	Г 0 см
	Д 10 см

Розв'яжіть завдання 36.30–36.44. Відповідь запишіть десятковим дробом.

36.30. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Через кінець B і точку C відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають площину α відповідно в точках M і N. Знайти довжину відрізка CN, якщо $AC : CB = 2 : 3$, $BM = 12$.

36.31. Площина α перетинає сторони кута ABC у точках A_1 і C_1, а паралельна їй площина β — у точках A_2 і C_2. Знайти BC_1, якщо $A_1B : A_1A_2 = 1 : 3$, $BC_2 = 12$.

36.32. З точки A до площини проведено дві похилі $AB = 30$ і $AC = 40$. Проекції похилих відносяться як $9 : 16$. Знайти:

1) довжину проекції меншої похилої;
2) відстань від точки A до площини.

36.33. З точки B, яка розміщена від площини на відстані 1, проведено дві похилі, які утворюють із площиною кути 45°, а між собою — кут 60°. Знайти квадрат відстані між кінцями похилих.

36.34. Один з катетів прямокутного трикутника ABC дорівнює 6, а гострий кут B, прилеглий до цього катета, дорівнює 30°. Через вершину прямого кута C проведено відрізок CD, перпендикулярний до площини цього трикутника, $CD = 4$. Визначити:
1) відстань від точки D до прямої AB; **2)** довжину AD з точністю до 0,01.

36.35. З точки A, яка розміщена на колі, радіус якого дорівнює 2, побудований перпендикуляр AK завдовжки 1 до площини круга. З точки A проведено діаметр AB, а з точки B під кутом 45° до діаметра — хорду BC. Знайти відстань від точки K до хорди BC.

36.36. Основи трапеції дорівнюють 18 см і 12 см. Через більшу основу проведено площину на відстані 5 см від меншої основи. Знайти у сантиметрах відстань від точки перетину діагоналей трапеції до цієї площини.

36.37. З точок A і B, які лежать у двох перпендикулярних площинах, опущено перпендикуляри AA_1 і BB_1 на лінію перетину площин. Знайти AB, якщо $AB_1 = 7$, $BA_1 = 5$, $A_1B_1 = \sqrt{10}$.

36.38. Рівнобедрені трикутники ABC і ABD зі спільною основою AB лежать у різних площинах, кут між якими дорівнює α. Знайти в градусах кут α, якщо $AB = 6$, $CD = \sqrt{21}$, $AC = AD = 4$.

36.39. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти площу перерізу куба площиною, яка проходить через вершини B_1 і C_1 та середину ребра DD_1, якщо ребро куба дорівнює $\sqrt{5\sqrt{5}}$.

36.40. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайти площу перерізу куба площиною, яка проходить через вершини B_1 і D та середину ребра CC_1, якщо ребро куба дорівнює $\sqrt{6\sqrt{6}}$.

36.41. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ Знайти площу перерізу куба з точністю до 0,01 площиною, яка проходить через центр куба і середини ребер AB і AD, якщо ребро куба дорівнює 1.

36.42. Через центр основи правильної трикутної піраміди паралельно до двох ребер, які не перетинаються, проведено площину. Визначити площу утвореного перерізу, якщо бічне ребро піраміди дорівнює 9, а ребро основи — 7.

36.43. У правильній чотирикутній піраміді проведено площину через діагональ основи паралельно до бічного ребра. Сторона основи дорівнює $\sqrt{2}$, а бічне ребро — 5. Визначити площу утвореного перерізу.

36.44. У правильній чотирикутній піраміді $SABCD$ через середини сторін AB і AD проведено площину, яка паралельна бічному ребру SA. Знайти площу утвореного перерізу, якщо сторона основи дорівнює $\sqrt{2}$, а бічне ребро — 5.

Тема 37. Призма

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту на обчислення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл;

— розрізняти розгортки основних видів призм та розрізняти на розгортках елементи.

n-кутною *призмою* називають многогранник, у якого дві грані — рівні *n*-кутники, що лежать у паралельних площинах, а решта *n* граней — паралелограми, вершини яких є вершинами *n*-кутників. Поверхня призми складається з основ і бічної поверхні. На рис. 1 $ABCDNA_1B_1C_1D_1N_1$ — призма, $A, B, C, \ldots$ — вершини призми, $ABCDN$, $A_1B_1C_1D_1N_1$ — основи призми, AA_1, $BB_1, \ldots$ — бічні ребра; $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel \ldots$; $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \ldots$; ABB_1A_1, BCC_1B_1, $DCC_1D_1, \ldots$ — бічні грані.

Висотою призми називають відстань між площинами її основ. На рис. 1 HH_1 — висота.

Діагоналлю призми називають відрізок, який сполучає дві вершини, які не належать одній грані.

На рис. 2 A_1C, AC_1, B_1D, BD_1 — діагоналі призми.

Пряма призма — призма, бічні ребра якої перпендикулярні до площин основи (рис. 2). Висота прямої призми дорівнює довжині бічного ребра.

Похила призма — призма, бічні ребра якої не перпендикулярні до площин основи (рис. 1).

Правильна призма — пряма призма, основи якої — правильні многокутники. Усі бічні грані правильної призми — рівні прямокутники.

Паралелепіпед — призма, основами якої є паралелограми.

Усі діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці й цією точкою діляться навпіл.

Прямокутний паралелепіпед — паралелепіпед, основами якого є прямокутники.

У прямокутному паралелепіпеді квадрат будь-якої діагоналі дорівнює сумі квадратів його вимірів: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Площину, яка проходить через бічне ребро і діагональ основи, називають *діагональною площиною*, а переріз призми цією площиною — *діагональним перерізом*. На рис. 3 AA_1C_1C — діагональний переріз.

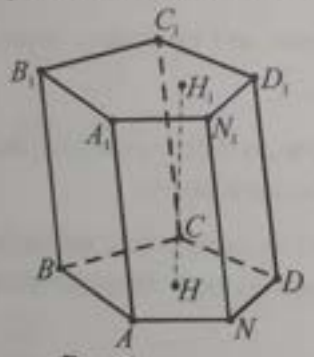


Рис. 1

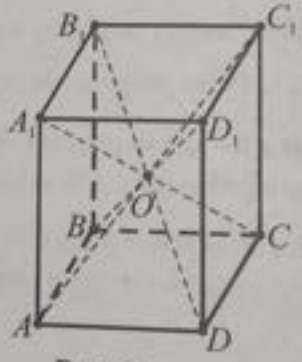


Рис. 2

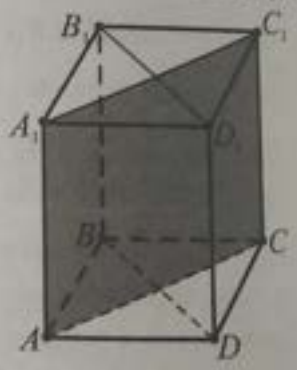


Рис. 3

Площа поверхні й об'єм

Пряма призма

Площа бічної поверхні: $S_б = P_{осн} \cdot H$, де H — висота призми.

Площа повної поверхні: $S_п = S_б + 2S_{осн}$

Об'єм: $V = S_{осн} \cdot H$.

Похила призма

Площа бічної поверхні: $S_б = P_{пер} \cdot AA_1$, де $P_{пер}$ — периметр перерізу, перпендикулярного до бічного ребра, AA_1 — бічне ребро.

Площа повної поверхні: $S_п = S_б + 2S_{осн}$

Об'єм: $V = S_{осн} \cdot H$.

Прямокутний паралелепіпед

Площа бічної поверхні: $S_б = P_{осн} \cdot H = 2(a + b)c$.

Площа повної поверхні: $S_п = S_б + 2S_{осн} = 2(ab + bc + ac)$.

Об'єм: $V = S_{осн} \cdot H = abc$.

Куб

Площа бічної поверхні: $S_б = P_{осн} \cdot H = 4a^2$. Площа повної поверхні: $S_п = S_б + 2S_{осн} = 6a^2$.

Об'єм: $V = S_{осн} \cdot H = a^3$.

Приклад 1. Знайти площу бічної поверхні й об'єм правильної шестикутної призми, якщо сторона основи дорівнює 8 см, а висота — 9 см (рис. 4).

■ $S_б = P_{осн} \cdot H$, $P_{осн} = 6a = 6 \cdot 8 = 48$ (см), $H = BB_1 = 9$ см.

$S_б = 48 \cdot 9 = 432$ (см^2). $V = S_{осн} \cdot H$, $S_{осн} = 6 \cdot S_{\Delta AOB}$.

ΔAOB — рівносторонній, $S_{\Delta AOB} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

$S_{\Delta AOB} = \dfrac{64\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$ (см^2). $S_{осн} = 6 \cdot 16\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$ (см^2).

$V = 96\sqrt{3} \cdot 9 = 864\sqrt{3}$ (см^3). *Відповідь.* 432 см^2, $864\sqrt{3}$ см^3. ■

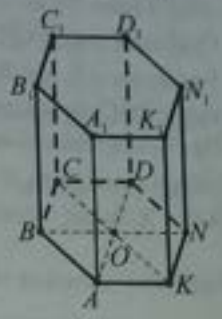


Рис. 4

Приклад 2. Основою прямої призми є паралелограм зі сторонами 9 см і 14 см і кутом між ними 30°, висота призми — 15 см (рис. 5). Обчислити площу повної поверхні й об'єм призми.

■ $S_п = S_б + 2S_{осн}$. $S_{осн} = 9 \cdot 14 \sin 30° = 126 \cdot \dfrac{1}{2} = 63$ (см^2).

$P_{осн} = 2(AB + AD) = 2 \cdot (9 + 14) = 46$ (см).

$S_б = 46 \cdot 15 = 690$ (см^2). $S_п = 2 \cdot 63 + 690 = 816$ (см^2).

$V = S_{осн} \cdot H = 63 \cdot 15 = 945$ (см^3). *Відповідь.* 816 см^2, 945 см^3. ■

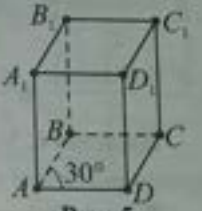


Рис. 5

Приклад 3. Основою прямої призми є ромб з тупим кутом 150°. Площа бічної поверхні призми дорівнює 96 см^2, а площа її повної поверхні — 132 см^2. Знайти висоту призми.

■ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — пряма призма (рис. 6), $ABCD$ — ромб, $\angle ADC = 150°$, $S_б = 96$ см^2, $S_п = 132$ см^2, $S_п - S_б = 2S_{ABCD} = 132 - 96 = 36$ (см^2), звідки $S_{ABCD} = 18$ см^2. Отже, $S_{ABCD} = AD^2 \cdot \sin\angle ADC$.

Звідки $AD = \sqrt{\dfrac{S_{ABCD}}{\sin\angle ADC}} = \sqrt{\dfrac{18}{\sin 150°}} = 6$ (см). $S_б = P_{осн} \cdot H$,

$S_б = 4AD \cdot DD_1$, звідки $DD_1 = \dfrac{S_б}{4AD} = \dfrac{96}{4 \cdot 6} = 4$ (см). *Відповідь.* 4 см. ■

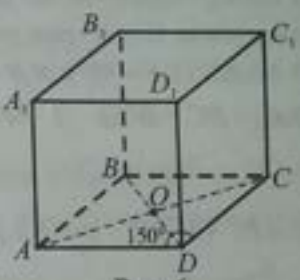


Рис. 6

Приклад 4. Сторони основи прямокутного паралелепіпеда відносяться як 1 : 7, довжини діагоналей бічних граней дорівнюють 13 см та 37 см. Визначити площу повної поверхні паралелепіпеда.

■ Оскільки протилежні грані прямокутного паралелепіпеда — рівні прямокутники, то в задачі заданими є довжини діагоналей суміжних бічних граней. Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 7) відрізки D_1A та D_1C — діагоналі суміжних бічних граней; $D_1A = 13$ см, $D_1C = 37$ см. Сторони основи DA і DC є ортогональними проекціями на площину основи діагоналей D_1A та D_1C відповідно. Оскільки довший похилий відповідає довша проекція, то $AD < CD$ і згідно з умовою $AD : CD = 1 : 7$. Нехай $AD = k$ см, тоді $CD = 7k$ см ($k > 0$), $D_1D = H$ см. Тоді з ΔD_1DA ($\angle D = 90°$) і ΔD_1DC ($\angle D = 90°$) за теоремою Піфагора отримаємо: $\begin{cases} 13^2 = H^2 + k^2, \\ 37^2 = H^2 + 49k^2, \end{cases}$ звідки

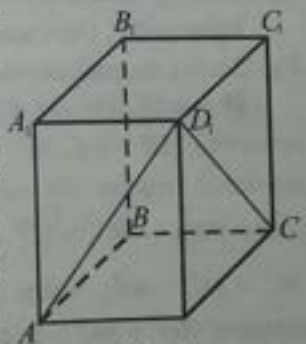


Рис. 7

$37^2 - 13^2 = 48k^2$, $k = 5$. Отже, $AD = 5$ см, $CD = 35$ см, $H = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см). Тоді:
$S_{осн} = AD \cdot CD = 5 \cdot 35 = 175$ (см^2); $P = 2(AD + CD) = 2(5 + 35) = 80$ (см); $S_б = P \cdot H = 80 \cdot 12 = 960$ (см^2);
$S_п = S_б + 2S_{осн} = 960 + 2 \cdot 175 = 1310$ (см^2). *Відповідь.* 1310 см^2. ■

Приклад 5. В основі прямої призми лежить прямокутник, діагоналі якого утворюють між собою кут φ. Діагональ однієї з бічних граней дорівнює b й утворює з площиною основи кут α. Обчислити об'єм призми.

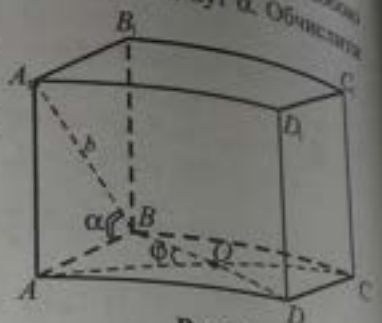


Рис. 8

■ Нехай основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник $ABCD$ (рис. 8), O — точка перетину діагоналей основи AC і BD. Оскільки $AA_1 \perp (ABC)$, то проекцією діагоналі A_1B на площину основи є сторона AB. $\angle A_1BA = \alpha$, $A_1B = b$. Нехай $\angle AOB = \varphi$ (якщо це буде кут $\angle BOC$, то у відповіді потрібно буде замінити кут φ на $180° - \varphi$). Протилежними бічними гранями призми є рівні прямокутники, діагоналі яких рівні. З ΔA_1AB ($\angle A = 90°$): $AB = A_1B\cos\alpha = b\cos\alpha$; $AA_1 = A_1B\sin\alpha = b\sin\alpha$. Діагоналі прямокутника рівні й точкою перетину діляться навпіл. Тому $OA = OB$ і $\angle ABO = \dfrac{180° - \varphi}{2} = 90° - \dfrac{\varphi}{2}$. З ΔBAD ($\angle A = 90°$): $AD = AB\operatorname{tg}\angle ABD = b\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\left(90° - \dfrac{\varphi}{2}\right) = b\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$. Тоді $V = AD\cdot AB\cdot AA_1 = b\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}\, b\cos\alpha\cdot b\sin\alpha =$

$= \dfrac{b^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$. Якщо заданим кутом буде $\angle BOC$, то $V = \dfrac{b^3}{2}\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{180° - \varphi}{2} =$

$= \dfrac{b^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$. *Відповідь.* $\dfrac{b^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$ або $\dfrac{b^3\sin 2\alpha\cos\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$. ■

Приклад 6. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з площиною основи кут α, а з площиною бічної грані — кут β. Знайти об'єм паралелепіпеда.

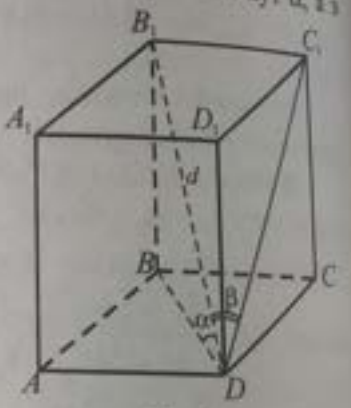


Рис. 9

■ Нехай у прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ діагональ $B_1D = d$ (рис. 9). Оскільки $B_1B \perp (ABC)$, а $B_1C_1 \perp (DC_1C)$, то $\angle B_1DB$ і $\angle B_1DC_1$ — це кути, які діагональ B_1D утворює з площиною основи і з площиною бічної грані відповідно: $\angle B_1DB = \alpha$, а $\angle B_1DC_1 = \beta$. З ΔB_1BD ($\angle B = 90°$): $B_1B = H = d\sin\alpha$; $BD = d\cos\alpha$. З ΔB_1C_1D ($\angle C_1 = 90°$): $B_1C_1 = BC = d\sin\beta$. З ΔBCD ($\angle C = 90°$): $BC^2 + CD^2 = BD^2$; $d^2\sin^2\beta + CD^2 = d^2\cos^2\alpha$; $CD = d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. Тоді маємо:

$$V = BC\cdot CD\cdot BB_1 = d\sin\beta\, d\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}\, d\sin\alpha = d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}.$$

Відповідь. $d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\beta}$. ■

Приклад 7. Основою прямого паралелепіпеда є паралелограм, сторони якого дорівнюють 3 м і 4 м. Одна з діагоналей цього паралелепіпеда дорівнює 5 м, а інша — 7 м. Знайти об'єм паралелепіпеда.

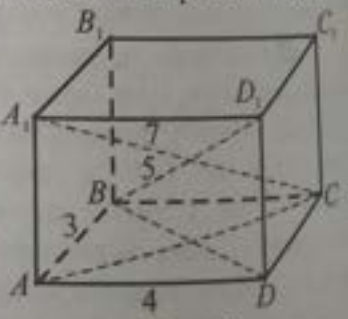


Рис. 10

■ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямий паралелепіпед, $ABCD$ — паралелограм, $AB = 3$ м, $AD = 4$ м, $BD_1 = 5$ м, $A_1C = 7$ м (рис. 10). Позначимо діагоналі основи $BD = d_1$, $AC = d_2$. Нехай $H = AA_1 = x$ м. Тоді з ΔD_1DB ($\angle D = 90°$): $BD^2 = BD_1^2 - DD_1^2$, $d_1^2 = 25 - x^2$. З ΔA_1AC ($\angle A = 90°$): $AC^2 = A_1C^2 - AA_1^2$, тобто $d_2^2 = 49 - x^2$. За властивістю діагоналей паралелограма $BD^2 + AC^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, тобто $(25 - x^2) + (49 - x^2) = 2(9 + 16)$. Звідки $74 - 2x^2 = 50$; $2x^2 = 74 - 50$; $x^2 = 12$; $x = 2\sqrt{3}$ (м).

$d_1^2 = BD^2 = 25 - x^2 = 25 - 12 = 13$ (м^2), $d_1 = \sqrt{13}$ (м). З ΔABD за теоремою косинусів одержимо: $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB\cdot AD\cdot\cos\angle A$. Звідки $\cos\angle A = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB\cdot AD} = \dfrac{3^2 + 4^2 - 13}{2\cdot 3\cdot 4} = \dfrac{1}{2}$. Тому $\angle A = 60°$.

$S_{осн} = AB\cdot AD\sin\angle A = 3\cdot 4\cdot\sin 60° = 12\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (м^2). Отже, $V = S_{осн}\cdot H = 6\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3} = 36$ (м^3). *Відповідь.* 36 м^3. ■

Приклад 8. Ребро куба дорівнює a. Знайти відстань від діагоналі куба до ребра, яке її не перетинає.

■ Нехай маємо куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром a (рис. 11). Розглянемо діагональ A_1C і ребро D_1D, яке її не перетинає. Потрібно знайти відстань l між мимобіжними прямими A_1C і D_1D. Ця відстань дорівнює відстані від деякої точки прямої D_1D до площини, що проходить через A_1C паралельно до DD_1. Оскільки $D_1D \parallel C_1C$, то площина A_1C_1C паралельна прямій D_1D і містить пряму A_1C. Тому l дорівнює відстані, наприклад, від точки D_1 до площини A_1C_1C. Нехай M — точка перетину діагоналей A_1C_1 і B_1D_1 грані $A_1B_1C_1D_1$. Оскільки $(D_1A_1C_1) \perp (A_1C_1C)$ і $D_1M \perp A_1C_1$, то $D_1M \perp (A_1C_1C)$. Отже, D_1M — перпендикуляр до площини A_1C_1C, а тому $l = D_1M = D_1B_1 / 2 = a\sqrt{2} / 2$.

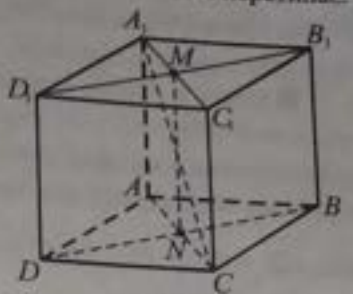


Рис. 11

Відповідь. $a\sqrt{2} / 2$. ■

Приклад 9. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнюють S і Q. Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.

■ Нехай в основі прямого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежить ромб, ACC_1A_1 і BDD_1B_1 — діагональні перерізи цього паралелепіпеда, $S_{ACC_1A_1} = S$, $S_{BDD_1B_1} = Q$ (рис. 12). Позначимо через H бічне ребро паралелепіпеда. Тоді $AC \cdot H = S$, $BD \cdot H = Q$, звідки $AC = \dfrac{S}{H}$, $BD = \dfrac{Q}{H}$. Діагоналі AC і BD ромба $ABCD$ взаємно перпендикулярні й точкою перетину M діляться навпіл. Тому

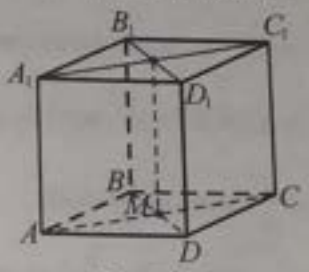


Рис. 12

$$\Delta MCD\ (\angle M = 90^\circ,\ MC = \frac{S}{2H},\ MD = \frac{Q}{2H}):\ CD = \sqrt{MC^2 + MD^2} = \sqrt{\frac{S^2}{4H^2} + \frac{Q^2}{4H^2}} = \frac{\sqrt{S^2 + Q^2}}{2H}.$$

$$S_б = P \cdot H = 4CD \cdot H = 4\sqrt{S^2 + Q^2} / (2H) \cdot H = 2\sqrt{S^2 + Q^2}.$$

Відповідь. $2\sqrt{S^2 + Q^2}$. ■

Приклад 10. В основі прямої призми лежить трикутник з кутами α і β. Діагональ бічної грані, що містить сторону, для якої дані кути є прилеглими, дорівнює d й утворює з площиною основи кут γ. Знайти об'єм призми.

■ Нехай в основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить трикутник ABC, у якому $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ (рис. 13). Тоді заданою є діагональ грані AA_1B_1B: $A_1B = d$. Оскільки ребро AA_1 перпендикулярне до площини ABC, то проекцією діагоналі A_1B на цю площину є сторона AB трикутника ABC. Тому за умовою задачі $\angle A_1BA = \gamma$. Об'єм призми $V = S_{осн} \cdot H$. З ΔA_1AB $(\angle A = 90^\circ)$: $H = AA_1 = d\sin\gamma$, $AB = d\cos\gamma$. За теоремою синусів для трикутника ABC маємо: $\dfrac{AB}{\sin\angle C} = \dfrac{AC}{\sin\angle B}$, $AC = \dfrac{AB\sin\angle B}{\sin\angle C} = \dfrac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \dfrac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

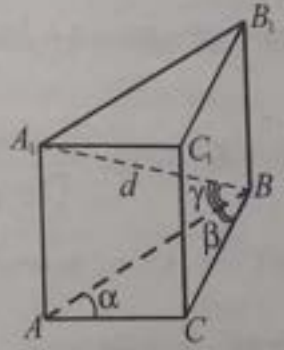


Рис. 13

Тоді: $S_{осн} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC\sin\alpha = \dfrac{1}{2} d\cos\gamma \dfrac{d\cos\gamma\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} \sin\alpha = \dfrac{d^2\cos^2\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}$.

$V = \dfrac{d^2\cos^2\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)} d\sin\gamma = \dfrac{d^3\cos^2\gamma\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}$.

Відповідь. $\dfrac{d^3\cos^2\gamma\sin\gamma\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}$. ■

Приклад 11. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник. Дві діагоналі суміжних бічних граней, що мають спільну вершину, дорівнюють l і утворюють між собою кут α. Площина, що проходить через ці діагоналі, нахилена до площини основи під кутом β. Знайти об'єм призми.

■ Нехай в основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) (рис. 14). Бічними гранями прямої призми є прямокутники. Оскільки $AB = BC$, то прямокутники AA_1B_1B і CC_1B_1B рівні, а тому мають рівні діагоналі. Проведемо діагоналі AB_1 і CB_1. За умовою, $AB_1 = CB_1 = l$ і $\angle AB_1C = \alpha$. $S_{AB_1C} = \frac{l^2\sin\alpha}{2}$. З точки B_1 проведемо перпендикуляр B_1N до сторони AC. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $BN \perp AC$. Тому $\angle B_1NB$ є лінійним кутом двогранного кута, утвореного площинами AB_1C та ABC, і, згідно з умовою задачі, $\angle B_1NB = \beta$. Оскільки $B_1B \perp (ABC)$, то $S_{ABC} = S_{AB_1C}\cos\beta = \frac{l^2\sin\alpha}{2}\cos\beta$. Об'єм призми: $V = S_{осн.} \cdot H$. Висота B_1N рівнобедреного трикутника AB_1C є його бісектрисою. Тому $\angle AB_1N = \frac{\alpha}{2}$. З ΔAB_1N ($\angle N = 90°$): $B_1N = AB_1\cos\angle AB_1N = l\cos\frac{\alpha}{2}$.

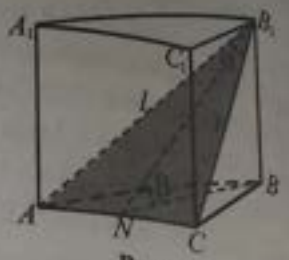


Рис. 14

З ΔNB_1B ($\angle B = 90°$) одержимо: $H = B_1B = B_1N \cdot \sin\beta = l\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\beta$. Тоді $V = \frac{1}{2}l^2\sin\alpha\cos\beta \cdot l\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\beta =$

$= \frac{1}{4}l^3\sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\sin2\beta$.

Відповідь. $\frac{1}{4}l^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin2\beta$. ■

Приклад 12. У правильній трикутній призмі сума ребер, що виходять з однієї вершини, дорівнює 2 см. При якій величині кута, утвореного діагоналлю бічної грані з площиною основи призми, площа бічної поверхні буде найбільшою?

■ Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — правильна трикутна призма, у якої $AB = AC = BC = a$ см, $AA_1 = b$ см (рис. 15). За умовою $2a + b = 2$. Ребро основи AB є проекцією на площину основи ABC діагоналі AB_1 бічної грані ABB_1A_1. Отже, $\angle B_1AB$ — кут, утворений цією діагоналлю з площиною основи. Нехай $\angle B_1AB = \varphi$ ($0° < \varphi < 90°$). Виразимо площу бічної поверхні через φ. З ΔABB_1 ($\angle B = 90°$): $BB_1 = b = AB\operatorname{tg}\varphi = a\operatorname{tg}\varphi$. Отже, $2a + a \cdot \operatorname{tg}\varphi = 2$, звідки $a = \frac{2}{2 + \operatorname{tg}\varphi}$.

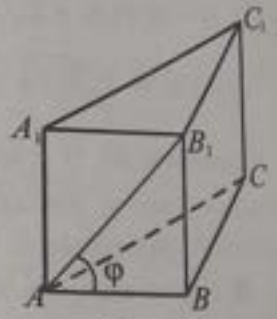


Рис. 15

$S_б = 3ab = 3a^2\operatorname{tg}\varphi = \frac{12\operatorname{tg}\varphi}{(2 + \operatorname{tg}\varphi)^2}$. Проведемо заміну змінної, поклавши $\operatorname{tg}\varphi = x$. Оскільки $\varphi = \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $x \in (0; +\infty)$. Отже, задача звелася до знаходження значення змінної x, за якого функція $S(x) = \frac{12x}{(2+x)^2}$ набуває найбільшого значення на проміжку $(0; +\infty)$. Знаходимо критичні точки функції: $S'(x) = 12\frac{(2+x)^2 - x \cdot 2(2+x)}{(2+x)^4} = \frac{12(2-x)}{(2+x)^3}$; $S'(x) = 0$, якщо $x = 2$. Якщо $0 < x < 2$, то $S'(x) > 0$, а якщо $x > 2$, то $S'(x) < 0$. Тому точка $x_0 = 2$ — точка максимуму функції $S(x)$. Отже, бічна поверхня призми буде найбільшою, якщо $\operatorname{tg}\varphi = x_0 = 2$, звідки $\varphi = \operatorname{arctg}2$.

Відповідь. $\operatorname{arctg}2$. ■

Приклад 13. Сторона основи правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнює $8\sqrt{3}$ см. На ребрі BB_1 позначено точку K так, що $BK : KB_1 = 3 : 5$. Знайти тангенс кута між площинами ABC і AKC, якщо відстань між прямими BC й A_1C_1 дорівнює 16 см.

■ Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — правильна трикутна призма (рис. 16). Прямі BC і A_1C_1 — мимобіжні, CC_1 — їх спільний перпендикуляр, бо призма — і її бічне ребро перпендикулярне до основ, а значить, і до сторін основ BC і A_1C_1. Отже, $CC_1 = BB_1 = 16$ см. Нехай $BK = 3x$ см, тоді $KB_1 = 5x$ см. Звідки $3x + 5x = 16$; $x = 2$. $BK = 3x = 6$ (см). Позначимо точку D — середину сторони AC. Очевидно, що $BD \perp AC$, а значить, $KD \perp AC$ за теоремою про три перпендикуляри. Оскільки $KD \perp AC$ і $BD \perp AC$, то кут KDB — лінійний кут двогранного кута, утвореного площинами ABC і AKC. З рівностороннього ΔABC: $BD = \dfrac{BC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{8\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 12$ (см).

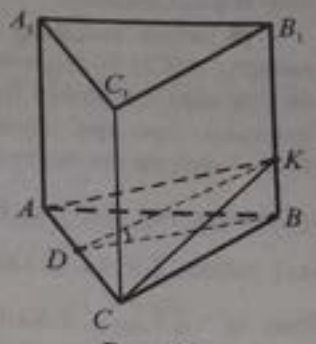


Рис. 16

Із прямокутного трикутника KBD: $\operatorname{tg}\angle KDB = \dfrac{KB}{BD} = \dfrac{6}{12} = 0{,}5$.

Відповідь. 0,5. ■

Приклад 14. Бічне ребро похилої трикутної призми дорівнює 6 см, дві бічні грані її взаємно перпендикулярні та їх площі дорівнюють 24 см^2 і 30 см^2. Знайти об'єм призми.

■ Нехай маємо похилу трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$ з бічним ребром $A_1A = 6$ см, площини бічних граней ACC_1A_1 та BCC_1B_1 якої взаємно перпендикулярні, $S_{ACC_1A_1} = 24$ см^2, $S_{BCC_1B_1} = 30$ см^2 (рис. 17). Проведемо перпендикулярний переріз $A'B'C'$. Тоді: $A_1A \cdot A'C' = S_{ACC_1A_1}$, $6A'C' = 24$, $A'C' = 4$ (см); $B_1B \cdot B'C' = S_{BCC_1B_1}$, $6B'C' = 30$, $B'C' = 5$ см. Оскільки $(A'B'C') \perp C_1C$ і площини (A_1C_1C) та (B_1C_1C) взаємно перпендикулярні, то $\angle A'C'B' = 90°$. Отже, $S_{\Delta A'B'C'} = \dfrac{1}{2}A'C' \cdot B'C' = \dfrac{1}{2}\cdot 4 \cdot 5 = 10$ (см^2) і об'єм $V = S_{\Delta A'B'C'} \cdot A_1A = 10 \cdot 6 = 60$ (см)^3.

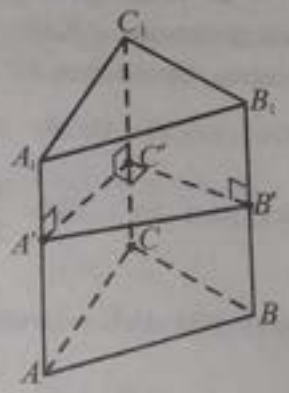


Рис. 17

Відповідь. 60 см^3. ■

Приклад 15. Основою похилого паралелепіпеда є паралелограм $ABCD$, у якого $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм і $BD = 6$ дм. Діагональний переріз AA_1C_1C перпендикулярний до площини основи і його площа дорівнює 1 м^2. Обчислити об'єм паралелепіпеда.

■ Нехай маємо похилий паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якому площина діагонального перерізу ACC_1A_1 перпендикулярна до площини основи (рис. 18). Крім того, за умовою, $AB = 3$ дм, $AD = 7$ дм, $BD = 6$ дм, $S_{ACC_1A_1} = 1$ м^2 $= 100$ дм^2. За властивістю сторін і діагоналей паралелограма $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$, звідки: $AC^2 = 2(9 + 49) - 36 = 80$; $AC = 4\sqrt{5}$ (дм). Проведемо висоту $A_1N = H$ паралелепіпеда ($N \in AC$) і визначимо її з паралелограма ACC_1A_1: $H = \dfrac{S_{ACC_1A_1}}{AC} = \dfrac{100}{4\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}$ (дм).

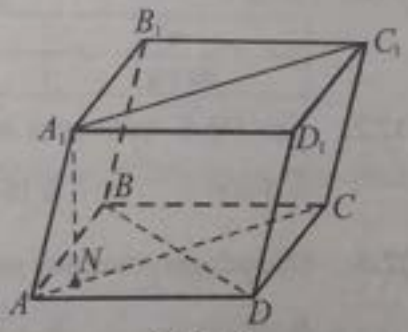


Рис. 18

$V_{\text{пр}} = 2S_{\Delta ABD}$. Площу трикутника ABD знайдемо за формулою Герона: $p = \dfrac{(3+7+6)}{2} = 8$ (дм); $S_{\Delta ABD} = \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2} = 4\sqrt{5}$ (дм^2). Тому $S_{\text{осн.}} = 8\sqrt{5}$ дм^2. $V = S_{\text{осн.}} \cdot H = 8\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5} = 200$ (дм^3) $= 0{,}2$ (м^3).

Відповідь. 0,2 м^3. ■

Приклад 16. Основа похилого паралелепіпеда — квадрат зі стороною a. Одна з вершин другої основи проектується в центр цього квадрата. Висота паралелепіпеда дорівнює H. Знайти бічну поверхню паралелепіпеда.

■ Нехай основою похилого паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є квадрат $ABCD$ зі стороною a, O — центр цього квадрата, $A_1O = H$ — висота паралелепіпеда (рис. 19). Проведемо $OK \perp AD$, $OM \perp AB$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $A_1K \perp AD$, $A_1M \perp AB$, тобто A_1K і A_1M — висоти бічних граней ADD_1A_1 та ABB_1A_1 відповідно. Прямокутні трикутники A_1OK та A_1OM рівні ($OK = OM = \frac{a}{2}$ і A_1O — спільний катет), звідки $A_1K = A_1M$. Оскільки, крім того, $AD = AB$, то $S_{ADD_1A_1} = S_{ABB_1A_1}$. Тому $S_б = 4S_{ABB_1A_1}$. З ΔA_1OM ($\angle O = 90°$): $A_1M = \sqrt{A_1O^2 + OM^2} = \sqrt{H^2 + (a/2)^2}$. Отже, $S_б = 4S_{ABB_1A_1} = 4a\sqrt{H^2 + (a/2)^2} = 2a\sqrt{4H^2 + a^2}$. *Відповідь.* $2a\sqrt{4H^2 + a^2}$. ■

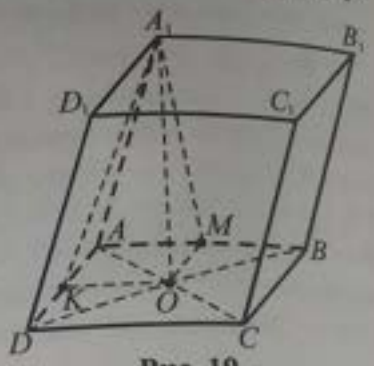


Рис. 19

Приклад 17. В основі похилого паралелепіпеда лежить прямокутник. Бічне ребро утворює із суміжними сторонами основи кути, кожний з яких дорівнює по 60°. Знайти кут, який утворює це бічне ребро з площиною основи паралелепіпеда.

■ Нехай $AB...C_1D_1$ — заданий похилий паралелепіпед, $ABCD$ — прямокутник, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = 60°$ (рис. 20). A_1K — висота паралелепіпеда. Проведемо $KN \perp AD$ і $KM \perp AB$. У трикутника A_1NA ($\angle N = 90°$): $\angle AA_1N = 30°$. Отже, $AN = \frac{1}{2}AA_1$. Аналогічно у ΔA_1MA $AM = \frac{1}{2}AA_1$. Оскільки $AN = AM = \frac{1}{2}AA_1$, то $AMKN$ — квадрат і прямокутний трикутник ANK — рівнобедрений. Звідки $AK = \sqrt{2}AN = \frac{\sqrt{2}}{2}AA_1$; $\frac{AK}{AA_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. З ΔA_1KA ($\angle K = 90°$): $\cos\angle A_1AK = \frac{AK}{AA_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отже, $\angle A_1AK = 45°$. *Відповідь.* 45°. ■

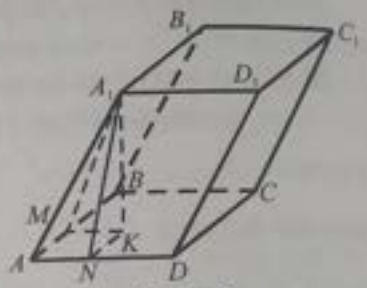


Рис. 20

Завдання 37.1–37.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

37.1. Сторона куба дорівнює 10 см. Знайти площу поверхні куба.

А	Б	В	Г	Д
80 см^2	800 см^2	400 см^2	360 см^2	600 см^2

37.2. Діагональ грані куба дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайти об'єм куба.

А 4 см^3 **Б** 16 см^3 **В** $12\sqrt{3}$ см^3 **Г** 64 см^3 **Д** 48 см^3

37.3. Обчислити довжину ребра куба, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{3}$.

А $\sqrt{6}$ **Б** $\sqrt{3}$ **В** 1 **Г** $\sqrt{2}$ **Д** 2

37.4. Знайти діагональ прямокутного паралелепіпеда, виміри якого дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см.

А 5,5 см **Б** 49 см **В** 36 см **Г** 11 см **Д** 7 см

37.5. **(ЗНО–2013)** Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а периметр її бічної грані — 22 см. Знайти площу бічної поверхні цієї призми.

А 66 см^2 **Б** 72 см^2 **В** 96 см^2 **Г** 114 см^2 **Д** 264 см^2

37.6. **(ЗНО–2011)** Діагональним перерізом правильної чотирикутної призми є прямокутник, площа якого дорівнює 40 см^2. Периметр основи призми дорівнює $20\sqrt{2}$ см. Визначити висоту призми.

А $\sqrt{2}$ см **Б** $2\sqrt{2}$ см **В** 4 см **Г** 1 см **Д** 2 см

37.7. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 4 см, а бічне ребро дорівнює $2\sqrt{3}$ см. Знайти об'єм призми.

А $96\sqrt{3}$ см^3 **Б** 96 см^3 **В** $24\sqrt{3}$ см^3 **Г** 24 см^3 **Д** $12\sqrt{3}$ см^3

37.8. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 12 см, а діагональ бічної грані дорівнює 13 см. Знайти бічну поверхню призми.

А 60 см^2 **Б** 195 см^2 **В** 360 см^2 **Г** 180 см^2 **Д** 468 см^2

37.9. Знайти площу повної поверхні правильної чотирикутної призми, сторона основи якої дорівнює a, а висота — H.

А $4aH$ **Б** $3aH$ **В** $4a(a + H)$ **Г** $a(a + 4H)$ **Д** $2a(a + 2H)$

37.10. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з основами 4 см і 10 см і бічною стороною 5 см. Бічне ребро призми дорівнює 10 см. Обчислити повну поверхню призми.

А 170 см^2 **Б** 176 см^2 **В** 186 см^2 **Г** 190 см^2 **Д** 296 см^2

37.11. Основою похилої призми є паралелограм зі сторонами 6 см і 3 см і гострим кутом 45°. Бічне ребро призми дорівнює 4 см і нахилене до площини основи під кутом 30°. Знайти об'єм призми.

А $18\sqrt{6}$ см^3 **Б** $12\sqrt{6}$ см^3 **В** $18\sqrt{2}$ см^3 **Г** $9\sqrt{2}$ см^3 **Д** $36\sqrt{2}$ см^3

37.12. Бічне ребро похилої чотирикутної призми дорівнює 12 см, а перпендикулярним перерізом є ромб зі стороною 5 см. Знайти площу бічної поверхні призми.

А 60 см^2 **Б** 80 см^2 **В** 180 см^2 **Г** 240 см^2 **Д** 300 см^2

37.13. Куб з ребром 1 м поділили на кубики з ребром 1 см й усі ці кубики поставили в стовпець. Чому дорівнює висота стовпця?

А 1 км **Б** 10 км **В** 100 км **Г** 1000 км **Д** 10000 км

37.14. Площа діагонального перерізу куба дорівнює $4\sqrt{2}$ см^2 Знайти площу поверхні куба.

А $36\sqrt{2}$ см^2 **Б** 16 см^2 **В** 24 см^2 **Г** 192 см^2 **Д** 32 см^2

37.15. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі його діагональних перерізів дорівнюють S_1 і S_2. Визначити висоту паралелепіпеда, якщо його об'єм дорівнює V.

А $\frac{2S_1S_2}{V}$ **Б** $\frac{S_1S_2}{V}$ **В** $\frac{S_1S_2}{2V}$ **Г** $\frac{V}{S_1S_2}$ **Д** $\frac{V}{2S_1S_2}$

37.16. Діагональ правильної чотирикутної призми дорівнює 13 см, а діагональ бічної грані дорівнює 12 см. Знайти площу основи призми.

А $\sqrt{313}$ см^2 **Б** 25 см^2 **В** 50 см^2 **Г** 144 см^2 **Д** 169 см^2

37.17. У правильній чотирикутній призмі площа діагонального перерізу дорівнює S. Визначити площу бічної поверхні.

А $2\sqrt{S}$ **Б** $\sqrt{2S}$ **В** $2\sqrt{2S}$ **Г** $2S$ **Д** $2\sqrt{2S}$

37.18. Діагональним перерізом правильної чотирикутної призми є квадрат, площа якого дорівнює S. Визначити об'єм призми.

А $S\sqrt{2S}$ **Б** $\frac{S\sqrt{S}}{\sqrt{2}}$ **В** $2S\sqrt{S}$ **Г** $S\sqrt{S}$ **Д** $\frac{S\sqrt{S}}{2}$

37.19. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, площа якого дорівнює S, а площі діагональних перерізів паралелепіпеда — S_1 і S_2. Визначити висоту паралелепіпеда.

А $\sqrt{\frac{S_1S_2}{2S}}$ Б $\sqrt{\frac{2S_1S_2}{S}}$ В $\sqrt{\frac{S_1S_2}{S}}$ Г $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{S_1S_2}{S}}$ Д $\sqrt{\frac{S}{2S_1S_2}}$

37.20. Бічна поверхня правильної чотирикутної призми дорівнює Q, а її об'єм — V. Визначити сторону основи призми.

А $\frac{2V}{Q}$ Б $\frac{V}{2Q}$ В $\frac{V}{4Q}$ Г $\frac{V}{Q}$ Д $\frac{4V}{Q}$

37.21. Розгорткою бічної поверхні правильної чотирикутної призми є квадрат зі стороною 8 дм. Знайти об'єм призми.

А 16 дм^3 Б 24 дм^3 В 32 дм^3 Г 48 дм^3 Д 64 дм^3

37.22. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1, S_2 і S_3. Визначити об'єм паралелепіпеда.

А $\sqrt{S_1S_2S_3}$ Б $2\sqrt{S_1S_2S_3}$ В $\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{2}$ Г $8\sqrt{S_1S_2S_3}$ Д $\frac{\sqrt{S_1S_2S_3}}{8}$

Завдання 37.23–37.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

37.23. Установити відповідність між сторонами основи та діагоналями (1–3) бічних граней правильних трикутних призм та площами їх бічних поверхонь (А–Д).

1 3 см, 5 см
2 6 см, 10 см
3 5 см, 13 см

А 180 см^2
Б 504 см^2
В 36 см^2
Г 144 см^2
Д 164 см^2

37.24. Установити відповідність між площами діагональних перерізів (1–3), які є квадратами в правильних чотирикутних призм, та об'ємами цих призм (А–Д).

1 64 см^2
2 16 см^2
3 36 см^2

А 32 см^3
Б 234 см^3
В 108 см^3
Г 256 см^3
Д 4 см^3

Розв'яжіть завдання 37.25–37.37. Відповідь запишіть десятковим дробом.

37.25. Сторона основи правильної трикутної призми дорівнює 12, а висота призми — 6. Знайти площу перерізу цієї призми площиною, яка проходить через сторону нижньої основи і протилежну вершину.

37.26. Діагональ правильної чотирикутної призми утворює з площиною основи кут 45°. Знайти у градусах кут, утворений цією діагоналлю з площиною бічної грані.

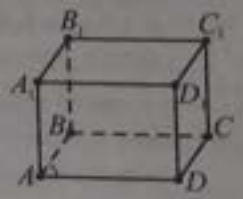
37.27. Основою прямокутного паралелепіпеда є ромб. Діагоналі паралелепіпеда дорівнюють 8 см і 5 см, а висота — 2 см. Знайти: **1)** сторону основи (у см); **2)** площу бічної поверхні (у см^2).

37.28. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда мають довжини 2; 2 і $2\sqrt{6}$. Визначити діагональ паралелепіпеда.

37.29. Визначити: **1)** площу бічної поверхні і **2)** об'єм прямокутного паралелепіпеда, основою якого є прямокутник зі сторонами 3 і 4, а площа діагонального перерізу 20.

37.30. У прямому паралелепіпеді сторони основи 2 і 8, а кут між ними 30°. Бічна поверхня паралелепіпеда дорівнює 20. Визначити об'єм паралелепіпеда.

37.31. Периметри двох граней правильної трикутної призми дорівнюють 48 см і 30 см. Знайти об'єм V призми в кубічних сантиметрах. У відповідь записати $V/\sqrt{3}$.



37.32. Знайти у кубічних сантиметрах об'єм похилої трикутної призми, якщо відстані між її бічними ребрами дорівнюють 3,7 см, 1,3 см і 3 см, а площа бічної поверхні — 480 см^2.

37.33. Основою похилого паралелепіпеда є ромб зі стороною 4 см і гострим кутом 60°. Бічне ребро паралелепіпеда дорівнює 4 см й утворює з ребрами основи, які виходять з цієї ж вершини, кути 45°. Знайти об'єм паралелепіпеда у кубічних сантиметрах.

37.34. **(ЗНО–2015)** Основою прямої чотирикутної призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник зі сторонами 4 см і $4\sqrt{3}$ см. Площина, що проходить через вершини A, B_1 і C призми, утворює з площиною її основи кут 60°. Визначити висоту призми (у см).

37.35. Основою призми є правильний трикутник зі стороною 4. Одна з бічних граней перпендикулярна до основи і є ромбом, діагональ якого дорівнює 6. Знайти об'єм V призми. У відповідь записати $\sqrt{21}V$.

37.36. Основою похилого паралелепіпеда є прямокутник зі сторонами 4 і 6. Бічне ребро дорівнює 2 й утворює із суміжними сторонами основи кути в 60°. Знайти об'єм V паралелепіпеда. У відповідь записати $\sqrt{2}V$.

37.37. Для зберігання 1,8 м^3 води на присадибній ділянці виготовили резервуар у формі прямокутного паралелепіпеда з квадратним дном, сторона якого дорівнює 1,2 м. Обчислити висоту (у м) резервуару.

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— піраміда її елементи, розгортка піраміди;
— розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту на обчислення об'ємів і площ поверхонь;
— розрізняти розгортки пірамід та розрізняти на розгортках елементи;
— зрізана піраміда.

n-кутною *пірамідою* називають многогранник, одна з граней якого — довільний *n*-кутник, а решта граней — трикутники (бічні грані), що мають спільну вершину.

Спільну вершину бічних граней називають *вершиною* піраміди, а *n*-кутник — *основою* піраміди. Відрізки, які сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називають *бічними ребрами*. *Висотою* піраміди називають перпендикуляр, опущений з її вершини на площину основи.

На рис. 1 зображено піраміду *SABCDM*, *ABCDM* — основа піраміди, *S* — вершина, *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SM* — бічні ребра, *SO* — висота, $SO \perp (ABC)$.

Властивості

1. Якщо всі бічні ребра нахилені до площини основи під однаковим кутом, то вони рівні й вершина піраміди проектується в центр кола, описаного навколо основи піраміди.

2. Якщо всі бічні грані піраміди нахилені до площини основи під одинаком кутом α, то вершина піраміди проектується в центр кола, вписаного в основу піраміди, а площа основи піраміди дорівнює добутку площі бічної поверхні та косинуса кута α: $S_{осн.} = S_{б.} \cdot \cos\alpha$.

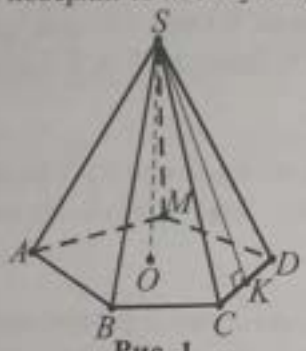


Рис. 1

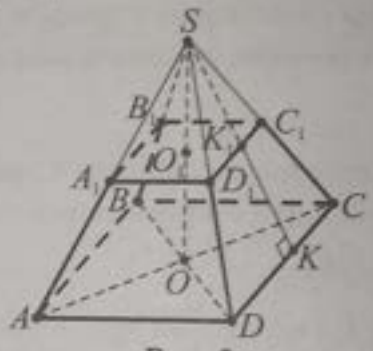


Рис. 2

Правильна піраміда. Піраміду називають *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника. У правильній піраміді висоту бічної грані, проведену з її вершини, називають *апофемою*. На рис. 1 *SK* — апофема.

Площа поверхні й об'єм

Площа бічної поверхні правильної піраміди: $S_{б.} = \frac{1}{2} P_{осн} \cdot l$, де l — апофема.

Площа повної поверхні будь-якої піраміди: $S_{п.} = S_{б.} + S_{осн.}$

Об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$.

Зрізана піраміда. Якщо довільну *n*-кутну піраміду перетнути площиною, паралельною до основи, то ця площина відітне від піраміди многогранник, дві грані якого є подібними *n*-кутниками, а решта *n* граней — трапеціями. Такий многогранник називають *зрізаною пірамідою*, паралельні грані — *основами*, а всі інші грані — *бічними гранями*. На рис. 2 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — зрізана піраміда, *ABCD* — нижня основа, $A_1B_1C_1D_1$ — верхня. Висота OO_1 — відрізок прямої, перпендикулярної до основ й обмежений ними.

Для зрізаної піраміди мають місце такі рівності: $\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}} = \frac{SO_1^2}{SO^2}$; $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{SC_1}{SC} = \frac{SD_1}{SD}$.

Правильна зрізана піраміда. Правильною називають зрізану піраміду, якщо вона є частиною правильної піраміди. У неї основи — правильні многокутники; відрізок, який з'єднує центри основ, є висотою. Площа бічної поверхні: $S_{б.} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot m$, де P_1 і P_2 — периметри основ, m — апофема, на рис. 2 $m = K_1K$.

Площа повної поверхні: $S_п = S_б + S_1 + S_2$, де S_1 і S_2 — площі основ.

Об'єм: $V = \frac{1}{3}\left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right) \cdot H$, де H — висота.

Приклад 1. Обчислити об'єм піраміди, в основі якої лежить ромб з діагоналями 8 см і 6 см, якщо висота піраміди дорівнює 16 см.

А	Б	В	Г	Д
128 см^3	32 см^3	256 см^3	64 см^3	512 см^3

■ В основі піраміди лежить ромб з діагоналями $d_1 = 8$ см і $d_2 = 6$ см. Обчислимо його площу: $S_{осн} = \frac{1}{2} d_1 d_2 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ (см^2). Об'єм піраміди: $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 16 = 128$ (см^3). *Відповідь.* А. ■

Приклад 2. В основі піраміди лежить прямокутний трикутник з катетом 8 см. Основа висоти піраміди — центр описаного навколо трикутника основи кола радіуса 5 см. Знайти об'єм піраміди, якщо її висота дорівнює 7 см.

■ Нехай на рис. 3 зображено піраміду, основою якої є прямокутний трикутник ABC, SO — висота піраміди. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, — середина гіпотенузи. $AB = 2R = 10$ см. Із прямокутного трикутника ABC одержимо: $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см).

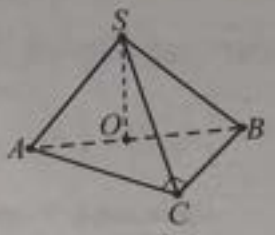


Рис. 3

$S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = 24$ (см^2). $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 7 = 56$ (см^3). *Відповідь.* 56 см^3. ■

Приклад 3. У правильній трикутній піраміді бічне ребро дорівнює $4\sqrt{2}$ см й утворює з площиною основи кут 45°. Знайти об'єм піраміди (у см^3).

■ Нехай $SABC$ — правильна піраміда, $SA = 4\sqrt{2}$ см, $SO \perp (ABC)$, $\angle SAO = 45°$ (рис. 4). З рівнобедреного прямокутного ΔAOS ($\angle O = 90°$) маємо: $OA = \frac{SA}{\sqrt{2}} = 4$ (см); $SO = H = OA = 4$ см. Проведемо апофему $SE \perp BC$.

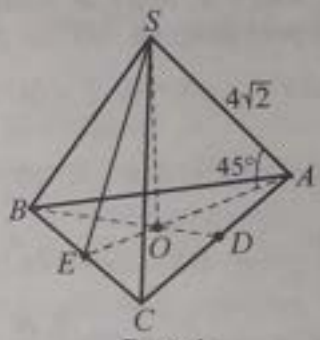


Рис. 4

Оскільки $SB = SC$, то $BE = EC$ і тому $AE \perp BC$. Оскільки вершина правильної трикутної піраміди проектується в точку перетину медіан, то $OA = \frac{2}{3} AE$, тому $AE = \frac{3OA}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ (см). AE висота рівностороннього трикутника прямокутного ABC, тому $AE = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$, звідки $AB = \frac{2AE}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ (см).

$S_{\Delta} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(4\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$ (см^2). Тоді об'єм піраміди: $V = \frac{S_{\Delta} H}{3} = \frac{12\sqrt{3} \cdot 4}{3} = 16\sqrt{3}$ (см^3). *В-дь.* $16\sqrt{3}$. ■

Приклад 4. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює зі стороною основи кут β. Відрізок, що сполучає центр вписаного в бічну грань кола з вершиною основи цієї грані, дорівнює l. Визначити бічну поверхню піраміди.

■ Нехай $SABCD$ — задана правильна піраміда (рис. 5). Проведемо бісектриси SN і DK трикутника SCD. Точка O перетину цих бісектрис є центром кола, вписаного в трикутник SCD. За умовою задачі, $OD = l$, $\angle SDC = \beta$.

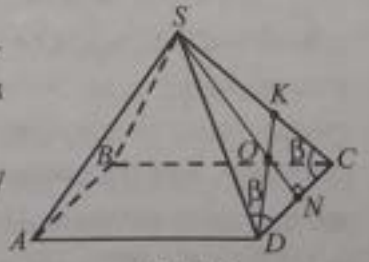


Рис. 5

Бісектриса SN є одночасно висотою та медіаною трикутника SCD. Тому $\angle SND = 90°$ і $DN = NC$. З ΔOND ($\angle N = 90°$, $\angle D = \beta/2$) маємо:

$DN = OD \cdot \cos\angle D = l \cos\frac{\beta}{2}$. З ΔSND ($\angle N = 90°$): $SN = DN \operatorname{tg}\angle SDN = l\cos\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\beta$. Враховуючи, що

$DN = NC$, знаходимо: $S_б = 4S_{\Delta DSC} = 4 \cdot \frac{1}{2} DC \cdot SN = 4 \cdot DN \cdot SN = 4l\cos\frac{\beta}{2} \cdot l\cos\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\beta = 4l^2 \cos^2\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\beta$.

Відповідь. $4l^2 \cos^2\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\beta$. ■

Приклад 5. Двогранний кут при основі правильної чотирикутної піраміди дорівнює 30°, а відрізок, який сполучає середину апофеми й основу висоти, — 2 дм. Знайти об'єм піраміди.

■ Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, SO — її висота (рис. 6). Проведемо $SM \perp DC$. За теоремою про три перпендикуляри, $OM \perp DC$. Тоді $\angle SMO$ — лінійний кут двогранного кута при основі й $\angle SMO = 30°$. K — середина апофеми, $OK = 2$ дм. Оскільки OK — медіана прямокутного трикутника SOM ($\angle O = 90°$), то $OK = \frac{SM}{2}$. Отже, $SM = 2OK = 4$ (дм). З ΔSOM ($\angle O = 90°$): $SO = \frac{SM}{2} = 2$ (дм).

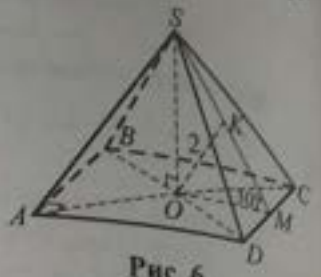


Рис. 6

$OM = SM\cos 30° = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (дм). Сторона основи дорівнює: $AD = 2OM = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ (дм).

$V = \frac{1}{3} S_{осн} H = \frac{1}{3} AD^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot 2 = 32$ (дм^3). *Відповідь.* 32 дм^3. ■

Приклад 6. У правильній трикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут α. Визначити об'єм піраміди, якщо відстань від середини висоти до бічного ребра дорівнює a.

■ Нехай $SABC$ — задана правильна піраміда, SO — її висота, $\angle ASO = \alpha$, точка M — середина висоти (рис. 7). Проведемо з цієї точки перпендикуляр MN до ребра SA. Згідно з умовою задачі, $MN = a$. З ΔSNM ($\angle N = 90°$): $SM = \frac{a}{\sin\alpha}$. Тоді $H = SO = 2SM = \frac{2a}{\sin\alpha}$. З ΔSOA ($\angle O = 90°$): $OA = SO\operatorname{tg}\alpha = \frac{2a\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2a}{\cos\alpha}$. У правильному трикутнику $\frac{AC\sqrt{3}}{3} = AO$; $AC = AO\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{\cos\alpha}$. $S_o = \frac{AC^2\sqrt{3}}{4} = \frac{12a^2\sqrt{3}}{4\cos^2\alpha} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{\cos^2\alpha}$.

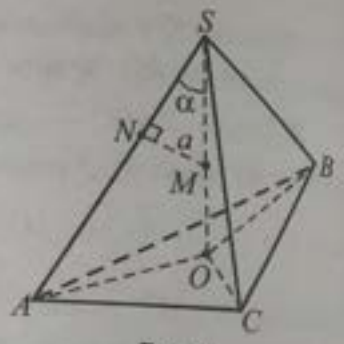


Рис. 7

Об'єм піраміди $V = \frac{S_o H}{3} = \frac{3a^2\sqrt{3} \cdot 2a}{3\cos^2\alpha \cdot \sin\alpha} = \frac{4\sqrt{3}a^3}{\sin 2\alpha \cos\alpha}$. *Відповідь.* $\frac{4\sqrt{3}a^3}{\sin 2\alpha \cos\alpha}$. ■

Приклад 7. В основі піраміди лежить рівнобедрений трикутник з кутом α при основі. Усі бічні ребра піраміди утворюють із площиною основи кут β. Визначити об'єм піраміди, якщо відстань від основи її висоти до бічного ребра дорівнює d. У відповідь записати значення об'єму, якщо $d = 3$ см, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$.

■ Нехай $SABC$ — задана піраміда, основа якої — рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$), $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ (рис. 8). Проведемо висоту SO. OA, OB і OC — відповідно проекції ребер SA, SB і SC на площину основи. $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \beta$. Прямокутні трикутники SOA, SOB і SOC мають спільний катет SO та рівні гострі кути. Тому $\Delta SOA = \Delta SOB = \Delta SOC$. У рівних трикутників відповідні елементи рівні, тому їх висоти, проведені до гіпотенуз, будуть рівними. Це означає, що відстані від точки O до бічних ребер будуть рівними. Проведемо $OK \perp SB$. За умовою, $OK = d$. З трикутника OKB ($\angle K = 90°$): $OB = OK / \sin\beta = d / \sin\beta$.

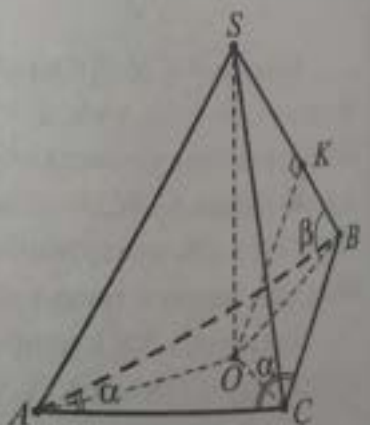


Рис. 8

Із трикутника SOB ($\angle O = 90°$): $H = SO = OB\operatorname{tg}\angle B = \frac{d}{\sin\beta} \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{d}{\cos\beta}$. Оскільки $OA = OB = OC$, то точ-

O — центр кола, описаного навколо трикутника ABC, $OB = R$. За наслідком з теореми синусів для трикутника ABC: $\frac{BC}{\sin\alpha} = 2OB$; $BC = 2OB\sin\alpha = \frac{2d\sin\alpha}{\sin\beta}$. Оскільки в трикутнику ABC $AB = BC$ і $\angle B = 180° - 2\alpha$, то $S_{\triangle} = \frac{AB \cdot BC}{2}\sin\angle B = \frac{BC^2}{2}\sin(180° - 2\alpha) = \frac{2d^2\sin^2\alpha\sin2\alpha}{\sin^2\beta}$. $V = \frac{S_{\triangle}H}{3} = \frac{2d^2\sin^2\alpha\sin2\alpha \cdot d}{3\sin^2\beta\cos\beta} = \frac{4d^3\sin^2\alpha\sin2\alpha}{3\sin\beta\sin2\beta}$. Якщо $d = 3$ см, $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$, то $V = \frac{4 \cdot 27 \cdot 0{,}5 \cdot 1}{3 \cdot 0{,}5 \cdot \sqrt{3}/2} = 24\sqrt{3}$ (см^3). *В-дь.* $24\sqrt{3}$ см^3. ■

Приклад 8. Основа піраміди — ромб з гострим кутом α. Дві бічні грані піраміди, що містять сторони цього кута, перпендикулярні до основи. Дві інші бічні грані нахилені до неї під кутом β, а відстань від основи висоти піраміди до цих граней дорівнює d. Визначити об'єм піраміди.

■ Нехай $PABCD$ — задана піраміда, $ABCD$ — ромб, $\angle DAB = \alpha < 90°$ (рис. 9). Тоді, згідно з умовою задачі, перпендикулярними до площини основи є грані PAD і PAB, а отже, і пряма PA їх перетину. Тому відрізок PA — висота піраміди. Проведемо висоту PK грані PDC. За теоремою про три перпендикуляри $AK \perp CD$. Згідно з умовою задачі, $\angle PKA = \beta$. Проведемо з точки A перпендикуляр AN до грані PDC; $AN = d$.

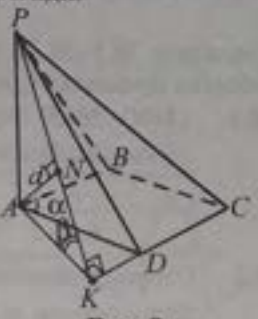


Рис. 9

Покажемо, що точка N належить висоті PK грані PDC. Справді, пряма CD перпендикулярна до висоти PK і її проекції AK на площину основи. Тому пряма CD перпендикулярна до площини PKA. Оскільки площина PDC містить пряму CD, то вона також перпендикулярна до площини PKA. Тоді перпендикуляр AN до площини PDC лежить у площині PKA, а тому його основа N належить висоті PK. З ΔANK ($\angle N = 90°$): $AK = \frac{d}{\sin\beta}$. З ΔPAK ($\angle A = 90°$): $H = PA = AK \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{d}{\sin\beta} \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{d}{\cos\beta}$. Оскільки $AB \parallel CD$, то $\angle ADK = \alpha$. З ΔAKD ($\angle K = 90°$): $AD = \frac{AK}{\sin\alpha} = \frac{d}{\sin\beta\sin\alpha}$. Тоді $S_{\square} = AD^2 \cdot \sin\alpha = \frac{d^2}{\sin^2\beta\sin\alpha}$. Отже,

$V = \frac{1}{3}S_{\square} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{d^2}{\sin^2\beta\sin\alpha} \cdot \frac{d}{\cos\beta} = \frac{d^3}{3\sin^2\beta\cos\beta\sin\alpha} = \frac{2d^3}{3\sin2\beta\sin\beta\sin\alpha}$. *Відповідь.* $\frac{2d^3}{3\sin2\beta\sin\beta\sin\alpha}$. ■

Приклад 9. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди відносяться як 1 : 2, висота піраміди дорівнює 3 см, бічне ребро утворює з більшою основою кут 45°. Знайти площі основ піраміди.

■ Нехай $ABCA_1B_1C_1$ — задана правильна зрізана піраміда, $A_1C_1 : AC = 1 : 2$, O і O_1 — центри основ (рис. 10). Тоді O_1O — висота піраміди, $OO_1 = 3$ см.

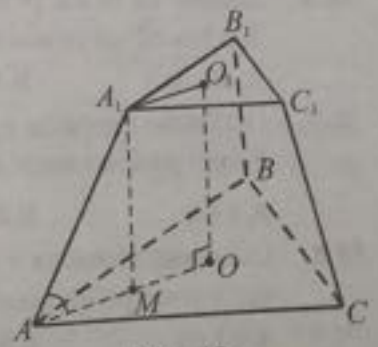


Рис. 10

Площина AOO_1 проходить через вершину повної піраміди, а тому містить бічне ребро A_1A зрізаної піраміди, звідки випливає, що AA_1O_1O — плоский чотирикутник. Крім того, ця площина перетинає паралельні площини основ піраміди по прямих A_1O_1 та AO і містить її висоту, а тому $A_1O_1 \parallel AO$ і $AO \perp O_1O$. Таким чином, AA_1O_1O — прямокутна трапеція. Проведемо висоту A_1M цієї трапеції. Оскільки $A_1M \parallel O_1O$, то $A_1M \perp (ABC)$. Тоді відрізок MA є ортогональною проекцією бічного ребра A_1A на площину ABC. За умовою, $\angle A_1AM = 45°$. З ΔA_1MA ($\angle M = 90°$): $AM = A_1M = O_1O = 3$ см. Трикутники $A_1B_1C_1$ і ABC подібні, а тому відношення радіусів O_1A_1 і OA кіл, описаних навколо цих трикутників, дорівнює відношенню сторін: $OA = 2O_1A_1$. З цієї рівності, врахувавши, що $O_1A_1 = OM$, маємо: $OA = 2OM$. Отже, точка M — середина відрізка OA. Тому $AO = 2AM = 6$ см. Знаходимо площу більшої основи через радіус OA описаного кола: $S_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4}OA^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot 6^2 = 27\sqrt{3}$ (см^2). Оскільки $A_1C_1 : AC = 1 : 2$, то $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{4}S_{\triangle ABC} = \frac{27\sqrt{3}}{4}$ (см^2).

Відповідь. $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ см^2 і $27\sqrt{3}$ см^2. ■

Приклад 10. Сторони основ правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 4 см і 2 см, а гострий кут бічної грані — 60°. Знайти висоту зрізаної піраміди.

■ Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — задана правильна зрізана піраміда, $AD = 4$ см, $A_1D_1 = 2$ см, $\angle A_1AD = 60°$, O_1 і O — центри основ (рис. 11). Тоді O_1O — висота повної піраміди. Добудуємо зрізану піраміду до повної з вершиною S. Бічні грані повної піраміди — правильні трикутники (кути A, B, C, D по 60°). Отже, $AS = AB =$ $= 4$ см. Оскільки, $A_1D_1 = 2$ см, $AD = 4$ см, то трикутник ASD вдвічі більший за трикутник A_1SD_1. Аналогічно $\Delta\ AOS$ вдвічі більший за ΔA_1O_1S. $AC = AD\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ (см); $AO = 2\sqrt{2}$ (см). Висота повної піраміди $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} =$ $= \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$ (см). $SO_1 = \sqrt{2}$ (см). Тоді: $OO_1 = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ (см). *Відповідь.* $\sqrt{2}$ см. ■



Рис. 11

Завдання 38.1–38.22 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

38.1. **(ЗНО–2015)** Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, а сторона її основи — 12 см. Знайти довжину бічного ребра піраміди.

А	Б	В	Г	Д
6 см	$3\sqrt{5}$ см	$5\sqrt{3}$ см	9 см	15 см

38.2. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Бічна грань нахилена до площини основи під кутом β. Визначити апофему піраміди.

А $\frac{a}{2\sin\beta}$ **Б** $\frac{a}{2\operatorname{tg}\beta}$ **В** $\frac{a\cos\beta}{2}$ **Г** $\frac{a\sin\beta}{2}$ **Д** $\frac{a}{2\cos\beta}$

38.3. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює 6 см, а бічне ребро — 5 см. Знайти бічну поверхню піраміди.

А 30 см^2 **Б** 12 см^2 **В** 36 см^2 **Г** 72 см^2 **Д** 45 см^2

38.4. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 6 см. Знайти об'єм піраміди з основою BDD_1 і вершиною C.

А 36 см^3 **Б** 48 см^3 **В** $24\sqrt{2}$ см^3 **Г** $36\sqrt{2}$ см^3 **Д** $108\sqrt{2}$ см^3

38.5. **(ЗНО–2012)** Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 4 см, а її апофема — 5 см. Визначити косинус кута між площиною бічної грані піраміди і площиною основи.

А $\frac{1}{5}$ **Б** $\frac{3}{5}$ **В** $\frac{3}{4}$ **Г** $\frac{4}{5}$ **Д** $\frac{4}{3}$

38.6. Висота та бічне ребро правильної чотирикутної піраміди відповідно дорівнюють 3 см і 5 см. Знайти об'єм піраміди.

А 48 см^3 **Б** 128 см^3 **В** 64 см^3 **Г** 96 см^3 **Д** 32 см^3

38.7. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 5 см, 12 см і 13 см. Знайти висоту піраміди, якщо бічні грані нахилені до площини основи під кутом 45°.

А 1 см **Б** 4 см **В** 2 см **Г** $2\sqrt{2}$ см **Д** $4\sqrt{2}$ см

38.8. Основою піраміди є трикутник зі сторонами 6 см, 8 см і 10 см. Знайти висоту піраміди, якщо всі її бічні ребра рівні та дорівнюють 13 см.

А 12 см **Б** 9 см **В** 10 см **Г** 11 см **Д** 8 см

38.9. Основа піраміди — квадрат зі стороною a. Висота піраміди дорівнює H і проходить через одну з вершин основи. Визначити площу бічної поверхні піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$2aH$	$4aH$	$2a(H + \sqrt{a^2 + H^2})$	$a(H + \sqrt{a^2 + H^2})$	$a(H + \sqrt{a^2 - H^2})$

38.10. Висота піраміди поділена на 4 рівні частини і через точки поділу проведено перерізи, паралельні до основи. Знайти площу найбільшого перерізу, якщо площа основи дорівнює 800 см^2.

А 600 см^2 **Б** 400 см^2 **В** 450 см^2 **Г** 350 см^2 **Д** 150 см^2

38.11. Знайти висоту правильної чотирикутної зрізаної піраміди, у якої сторони основ дорівнюють a і b ($a > b$), а кут нахилу бічного ребра до більшої основи дорівнює α.

А $(a-b)\operatorname{tg}\alpha$ Б $\frac{a-b}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\alpha$ В $\frac{a-b}{\sqrt{2}}\sin\alpha$ Г $\frac{a-b}{\sqrt{2}}\cos\alpha$ Д $(a-b)\sin\alpha$

38.12. У правильній зрізаній чотирикутній піраміді сторони основи a і b ($a > b$), двогранний кут при більшій основі — β. Знайти висоту піраміди.

А $\frac{a-b}{2}\operatorname{tg}\beta$ Б $(a-b)\operatorname{tg}\beta$ В $(a-b)\sin\beta$ Г $\frac{a-b}{2}\sin\beta$ Д $(a-b)\cos\beta$

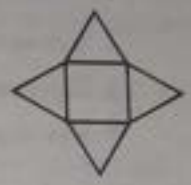
38.13. Ребро правильного тетраедра дорівнює a. Визначити об'єм тетраедра.

А $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$ Б $\frac{a^3\sqrt{2}}{4}$ В $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$ Г $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$ Д $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$

38.14. У правильній трикутній піраміді бічне ребро нахилено до площини основи під кутом 60°. Під яким кутом нахилена до площини основи бічна грань?

А $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$ Б $\operatorname{arctg}\left(2\sqrt{3}\right)$ В $\arcsin\sqrt{3}$ Г $\arcsin(2\sqrt{3})$ Д $\arccos\sqrt{3}$

38.15. **(ЗНО–2014)** На рисунку зображено розгортку піраміди, що складається з квадрата, сторона якого дорівнює 10 см, і чотирьох правильних трикутників. Визначити площу бічної поверхні цієї піраміди (у см^2).



А $100\sqrt{3}$ Б 100 В $400\sqrt{3}$ Г $100\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)$ Д 200

38.16. Площа основи правильної трикутної піраміди дорівнює S, а площа бічної поверхні — Q. Визначити двогранний кут при основі.

А $\arcsin\frac{S}{Q}$ Б $\arccos\frac{S}{Q}$ В $\arccos\frac{Q}{S}$ Г $\arccos(QS)$ Д $\arcsin\frac{Q}{S}$

38.17. Повна поверхня правильної чотирикутної піраміди дорівнює S. Двогранний кут при ребрі основи — 60°. Визначити бічну поверхню піраміди.

А $\frac{4}{9}S$ Б $\frac{1}{2}S$ В $\frac{5}{6}S$ Г $\frac{3}{4}S$ Д $\frac{2}{3}S$

38.18. Діагональним перерізом правильної чотирикутної піраміди є прямокутний трикутник, площа якого дорівнює Q. Знайти площу основи піраміди.

А $2Q$ Б $4Q$ В Q Г $\frac{Q}{2}$ Д $\frac{Q}{4}$

38.19. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а площа перерізу піраміди площиною, яка проходить через бічне ребро і перпендикулярна до основи, дорівнює Q. Знайти об'єм піраміди.

А Qa Б $Q\cdot\frac{a}{3}$ В $3Qa$ Г $Q\cdot\frac{a}{4}$ Д $4Qa$

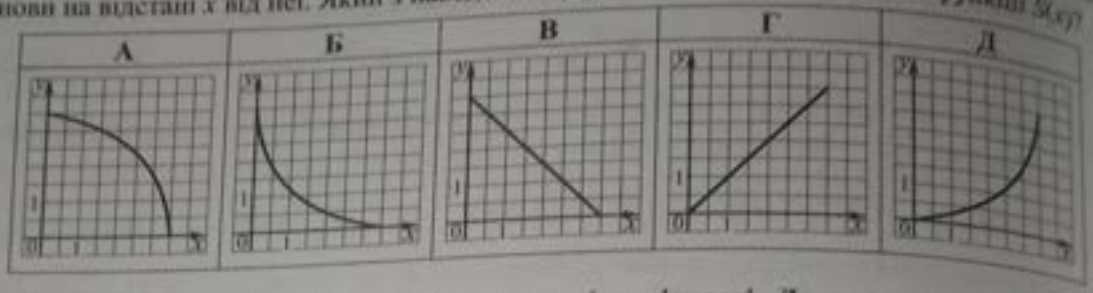
38.20. Усередині призми з об'ємом V взято довільну точку O й побудовано дві піраміди з вершиною O, що мають основами основи призми. Знайти суму об'ємів цих пірамід.

А $\frac{1}{9}V$ Б $\frac{1}{4}V$ В $\frac{2}{3}V$ Г $\frac{1}{6}V$ Д $\frac{1}{3}V$

38.21. Бічні ребра трикутної піраміди попарно перпендикулярні й дорівнюють a, b і c. Визначити об'єм піраміди.

А $6abc$ Б abc В $\frac{1}{12}abc$ Г $\frac{1}{6}abc$ Д $\frac{1}{3}abc$

38.22. $y = S(x)$ — площа перерізу правильної чотирикутної піраміди, проведеного паралельно до основи на відстані x від неї. Який з наведених графіків може бути графіком функції $S(x)$?



Завдання 38.23–38.27 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).



38.23. На рисунку зображено правильну піраміду $SABCD$, висота якої дорівнює діагоналі основи. Установити відповідність між кутами (1–3) та їхніми градусними мірами (А–Д).

1 Кут нахилу бічного ребра до площини основи

2 Кут нахилу апофеми до площини основи

3 Кут між прямими SA і DC

А $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$

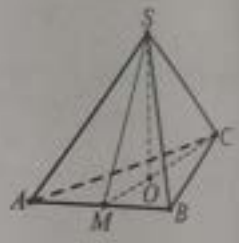
Б $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}}{10}$

В $\operatorname{arctg}2$

Г $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$

Д $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$

38.24. На рисунку зображено правильну трикутну піраміду $SABC$, у якої: SO — висота; SM — апофема; сторона основи дорівнює a; бічна грань нахилена до площини основи під кутом α. Установити відповідність між елементами піраміди (1–3) та їхніми величинами (А–Д).



1 SM 2 SB 3 SO

А $\frac{\sqrt{3}}{3}a$ Б $\frac{\sqrt{3}a}{6\cos\alpha}$ В $\frac{a\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2\sqrt{3}\cos\alpha}$ Г $\frac{\sqrt{3}}{2}a\sin\alpha$ Д $\frac{\sqrt{3}}{6}a\operatorname{tg}\alpha$

38.25. Установити відповідність між пірамідами (1–3) та ортогональними проекціями їх вершин на площину основи (А–Д).

1 Усі бічні грані піраміди рівнонахилені до площини основи

2 Усі бічні ребра піраміди рівнонахилені до площини основи

3 Дві сусідні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи

А Вершина многокутника основи

Б Середина сторони основи

В Точка перетину діагоналей основи

Г Центр кола, вписаного в многокутник основи

Д Центр кола, описаного навколо многокутника основи

38.26. Установити відповідність між довжиною ребра (1–3) тетраедра та його об'ємом (А–Д).

1 6 см

2 12 см

3 18 см

А $144\sqrt{2}$ см^3

Б $1152\sqrt{2}$ см^3

В $18\sqrt{2}$ см^3

Г $26\sqrt{2}$ см^3

Д $486\sqrt{2}$ см^3

38.27. Площа діагонального перерізу правильної чотирикутної піраміди дорівнює S і є прямокутним трикутником. Установити відповідність між площею перерізу (1–3) та площею бічної поверхні (А–Д) піраміди.

1 4 см^2
2 8 см^2
3 $2\sqrt{3}\text{ см}^2$

А $16\sqrt{3}\text{ см}^2$
Б 12 см^2
В $10\sqrt{3}\text{ см}^2$
Г $14\sqrt{3}\text{ см}^2$
Д $8\sqrt{3}\text{ см}^2$

Розв'яжіть завдання 38.28–38.41. Відповідь запишіть десятковим дробом.

38.28. Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з висотою 9 см й основою 6 см. Кожне з бічних ребер піраміди дорівнює 13 см. Знайти у сантиметрах висоту піраміди.

38.29. У правильній чотирикутній піраміді бічне ребро утворює з висотою кут 30°. Відрізок, що сполучає основу висоти з серединою бічного ребра, дорівнює $\sqrt{3}$. Знайти об'єм піраміди.

38.30. Площа основи піраміди дорівнює 72 см^2. Площі двох перерізів, які паралельні до основи, дорівнюють 18 см^2 і 50 см^2. Знайти у сантиметрах висоту піраміди, якщо відстань між перерізами дорівнює 8 см.

38.31. Сторони основ правильної зрізаної трикутної піраміди дорівнюють 2 см і 5 см, бічне ребро — 2 см. Знайти у сантиметрах висоту піраміди.

38.32. Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює 1 і нахилена до площини основи під кутом 60°. Визначити: **1)** повну поверхню S піраміди; **2)** об'єм піраміди V. У відповідь записати S і $\sqrt{3}V$.

38.33. У правильній піраміді площа основи становить $\frac{1}{3}$ площі повної поверхні. Знайти у градусах двогранний кут при основі піраміди.

38.34. **(ЗНО–2010)** Основою піраміди є ромб, гострий кут якого дорівнює 30°. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під кутом 60°. Знайти площу бічної поверхні піраміди (у см^2), якщо радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює 3 см.

38.35. У правильній чотирикутній піраміді відстань від центра основи до бічної грані дорівнює 3. Бічні грані нахилені до основи під кутом 60°. Визначити:
1) об'єм піраміди; **2)** площу бічної поверхні піраміди.

38.36. Основою піраміди є ромб зі стороною $\sqrt{3}$ і кутом 30°. Дві бічні грані, що проходять через сторони гострого кута ромба, перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутом 60°. Знайти об'єм піраміди.

38.37. Бічні ребра правильної трикутної піраміди взаємно перпендикулярні й дорівнюють $7\sqrt{2}$. Знайти відстань між мимобіжними ребрами піраміди.

38.38. У правильній чотирикутній піраміді $PABCD$ з вершиною P проведено переріз через сторону AB і середину бічного ребра PC. У якому відношенні цей переріз поділяє об'єм піраміди?

38.39. Основою піраміди є рівносторонній трикутник зі стороною $\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{3}}$. Одна з бічних граней є рівностороннім трикутником і перпендикулярна до площини основи. Визначити бічну поверхню піраміди.

38.40. У трикутній піраміді всі чотири грані — рівні рівнобедрені трикутники з основою $\sqrt{14}$ й бічною стороною 4. Визначити об'єм піраміди.

38.41. Основою піраміди є прямокутник, площа якого дорівнює 9. Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші — нахилені до неї під кутами 30° і 60°. Визначити об'єм піраміди.

Тема 39. Циліндр

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:
— циліндр, його елементи, перерізи циліндра: осьові перерізи, перерізи площинами, паралельними основі;
— розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту на обчислення об'ємів і площ.

Циліндром називають тіло, утворене внаслідок обертання прямокутника навколо його сторони. На рисунку зображено циліндр, який отримали внаслідок обертання прямокутника DCO_1O навколо сторони OO_1.

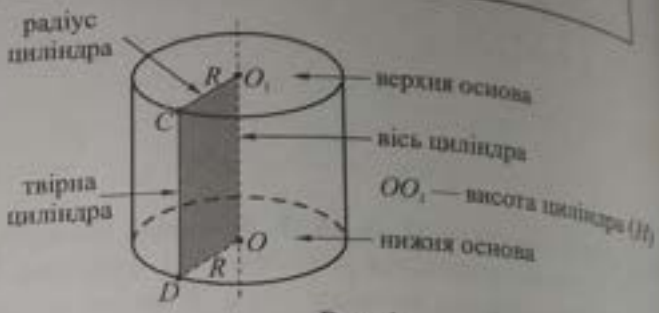


Рис. 1

Циліндр складається із двох кругів, які лежать у паралельних площинах, і бічної поверхні (рис. 1). Круги називають *основами* циліндра, їх радіуси — *радіусом* циліндра.

Основи циліндра паралельні й рівні. Відрізки, які утворюють, внаслідок обертання прямокутника, бічну поверхню циліндра (вони сполучають точки кіл основ), називають *твірними* циліндра. Відстань між площинами основ є *висотою* циліндра і дорівнює твірній.

Пряма a — вісь симетрії циліндра, проходить через центри основ. $H = OO_1$ — висота циліндра (рис. 2). Твірні й вісь циліндра перпендикулярні до площин основ.

Якщо поверхню циліндра розрізати по колах основ і будь-якій твірній, а потім розгорнути на площині, то одержимо *розгортку циліндра*. Розгорткою циліндра є прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює висоті циліндра, а інша — довжині кола основи, та два рівні круги (рис. 3).

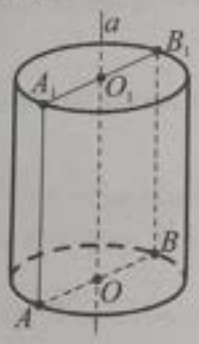


Рис. 2

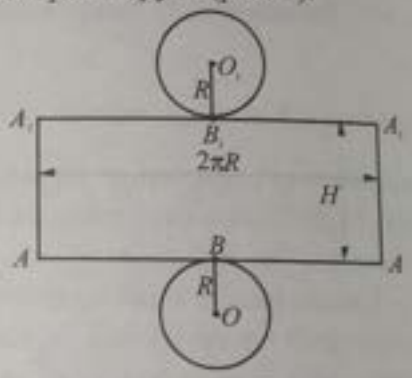


Рис. 3

Площа бічної поверхні циліндра: $S_б = 2\pi RH$.

Площа повної поверхні циліндра: $S_{повн.} = S_б + 2S_о = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(R + H)$.

Об'єм циліндра: $V = S_о \cdot H = \pi R^2 H$.

Переріз циліндра площиною, паралельною до його осі, — прямокутник. Дві сторони прямокутника — твірні циліндра, а дві інші — паралельні хорди основ (рис. 4). *Осьовий переріз циліндра* — переріз, який проходить через його вісь (рис. 5). Переріз циліндра площиною, паралельною до його основ, є кругом, який дорівнює основам циліндра (рис. 6).

Дотична площина до циліндра — площина, яка проходить через твірну циліндра і перпендикулярна до осьового перерізу, проведеного через цю твірну. На рис. 7 дотична площина $\alpha \perp (ABC)$.

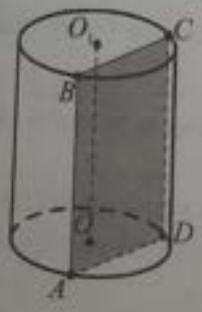


Рис. 4

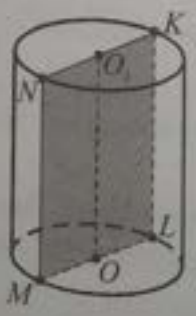


Рис. 5

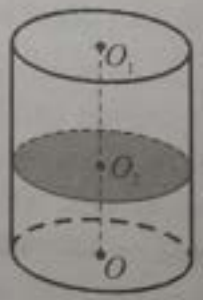


Рис. 6



Рис. 7

Приклад 1. Знайти площу повної поверхні циліндра радіуса 3 см, висота якого дорівнює 5 см.

■ На рис. 8 зображено циліндр, у якого $R = OA = 3$ см, $H = AB = 5$ см. $S_{пов} = 2\pi R(R + H)$. Отже, $S_{пов} = 2\pi \cdot 3(3 + 5) = 48\pi$ (см^2). *Відповідь.* 48π см^2. ■

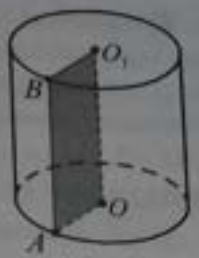


Рис. 8

Приклад 2. Знайти площу бічної поверхні циліндра, утвореного обертанням квадрата з діагоналлю $5\sqrt{2}$ см навколо сторони.

■ На рис. 9 зображено циліндр, утворений обертанням квадрата $ABCD$ навколо сторони CD. Проведемо діагональ квадрата BD, $BD = 5\sqrt{2}$ см. Нехай $H = AB = AD = R$ як сторони квадрата. Сторона квадрата $AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = 5$ (см). $S_б = 2\pi RH$. Отже, $S_б = 2\pi \cdot 5 \cdot 5 = 50\pi$ (см^2). *Відповідь.* 50π см^2. ■

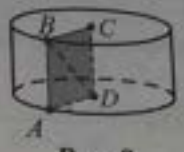


Рис. 9

Приклад 3. Знайти об'єм циліндра, якщо його висота дорівнює 4 см, а відрізок, який сполучає центр верхньої основи з точкою кола нижньої основи, дорівнює 6 см.

■ На рис. 10 зображено циліндр, у якого $R = OK$, $H = OO_1 = 4$ см, $O_1K = 6$ см. У прямокутному трикутнику O_1OK ($\angle O = 90°$) за теоремою Піфагора одержимо: $OK = \sqrt{O_1K^2 - O_1O^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (см). $V_ц = \pi R^2 H =$ $= \pi \cdot \left(2\sqrt{5}\right)^2 \cdot 4 = 80\pi$ (см^3). *Відповідь.* 80π см^3. ■

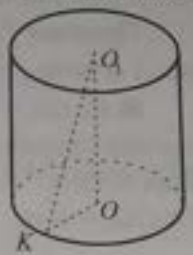


Рис. 10

Приклад 4. Об'єм циліндра дорівнює $8\pi\sqrt{5}$ см^3, а його висота — $2\sqrt{5}$ см. Знайти діагональ осьового перерізу.

А	Б	В	Г	Д
6 см	4 см	36 см	8 см	20 см

■ На рис. 11 зображено циліндр, осьовим перерізом якого є прямокутник $ABCD$, у якому $AB = H = 2\sqrt{5}$ см, $O_1B = R$. $V = \pi R^2 H$. Тоді одержимо: $8\pi\sqrt{5} = \pi R^2 2\sqrt{5}$, звідки $R^2 = 4$; $R = 2$ см. $AD = 2R = 4$ см. Проведемо діагональ BD. У трикутнику BAD ($\angle A = 90°$) за теоремою Піфагора маємо: $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} =$ $= \sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2 + 4^2} = \sqrt{36} = 6$ (см). *Відповідь.* А. ■

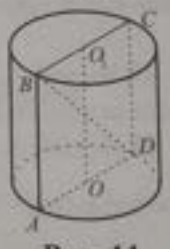


Рис. 11

Приклад 5. Перерізом циліндра площиною, яка паралельна до його осі, є квадрат, що відтинає від кола основи дугу 90°. Висота циліндра дорівнює 6 см. Знайти відстань від осі циліндра до цього перерізу.

■ На рис. 12 зображено циліндр, OO_1 — його висота, $OO_1 = 6$ см, $ABCD$ — заданий переріз (квадрат), $\cup AmB = 90°$, тому $\angle AOB = 90°$. $OO_1 = AD$, $AB = AD$, тому $AB = OO_1 = 6$ см. У рівнобедреному прямокутному трикутнику AOB ($AO = BO$) $AO = 6 / \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ (см). $(ABC) \perp$ (пл. осн.). AB — лінія їх перетину. Проведемо $OM \perp AB$. Оскільки OM — висота, а значить і медіана рівнобедреного прямокутного трикутника, тому $OM = AB / 2 = 3$ (см). Оскільки $OO_1 \perp$ (пл. осн.), то $OO_1 \perp OM$. Отже, OM — відстань від осі циліндра OO_1 до площини перерізу ABD. *Відповідь.* 3 см. ■

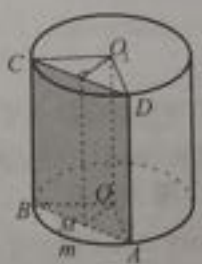


Рис. 12

Приклад 6. У циліндрі паралельно до його осі проведено площину, що перетинає нижню основу по хорді, яку видно із центра цієї основи під кутом 2α. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи циліндра під кутом β. Визначити об'єм циліндра, якщо площа перерізу дорівнює Q.

■ Перерізом циліндра площиною, яка паралельна до його осі OO_1 і перетинає основу, є прямокутник (рис. 13). Нехай це прямокутник AA_1B_1B із площею Q. AB — хорда нижньої основи; $\angle AOB = 2\alpha$. Оскільки $AA_1 \perp (AOB)$, то ортогональною проекцією діагоналі A_1B на площину основи є хорда AB. Тому $\angle A_1BA = \beta$. Об'єм циліндра $V = \pi R^2 H$, де $R = OA$, $H = AA_1$. З ΔA_1AB ($\angle A = 90°$): $AB = AA_1 \cdot \operatorname{ctg}\beta = H \cdot \operatorname{ctg}\beta$. Оскільки $AB \cdot AA_1 = Q$, то: $H\operatorname{ctg}\beta \cdot H = Q$; $H^2 = Q\operatorname{tg}\beta$; $H = \sqrt{Q\operatorname{tg}\beta}$. Виразимо радіус R основи через висоту H. Для цього проведемо висоту ON трикутника AOB. Оскільки ΔAOB рівнобедрений, то висота ON є одночасно його бісектрисою і медіаною. Тому $\angle AON = \alpha$, $AN = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}H\operatorname{ctg}\beta$. З ΔANO ($\angle N = 90°$):



Рис. 13

$R = OA = \dfrac{AN}{\sin\angle AON} = \dfrac{H\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\alpha}$. Отже, $V = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot \left(\dfrac{H\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\alpha}\right)^2 \cdot H = \dfrac{\pi H^3 \operatorname{ctg}^2\beta}{4\sin^2\alpha} = \dfrac{\pi Q\operatorname{tg}\beta\sqrt{Q\operatorname{tg}\beta}\operatorname{ctg}^2\beta}{4\sin^2\alpha} =$

$= \dfrac{\pi Q\sqrt{Q\operatorname{ctg}\beta}}{4\sin^2\alpha}$. *Відповідь.* $\dfrac{\pi Q\sqrt{Q\operatorname{ctg}\beta}}{4\sin^2\alpha}$. ■

Приклад 7. В основі циліндра проведено хорду, що стягує дугу α. Відрізок, який сполучає центр іншої основи із серединою хорди, дорівнює l й утворює з основою кут β. Визначити об'єм циліндра.

■ Нехай у циліндрі з віссю OO_1: AB — задана хорда, $\cup AmB = \alpha$; точка N — середина хорди AB, $O_1N = l$ (рис. 14). Оскільки відрізок ON — ортогональна проекція похилої O_1N на площину основи, то $\angle O_1NO = \beta$. З ΔO_1ON ($\angle O = 90°$): $H = OO_1 = l\sin\beta$; $ON = l\cos\beta$. Оскільки трикутник AOB рівнобедрений, то медіана ON є його висотою і бісектрисою. Тому $\angle ONA = 90°$, $\angle AON = \dfrac{\alpha}{2}$. З ΔONA:

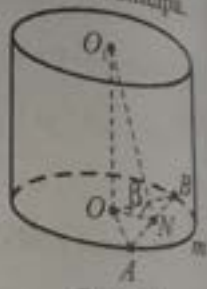


Рис. 14

$R = OA = \dfrac{ON}{\cos\angle AON} = \dfrac{l\cos\beta}{\cos(\alpha/2)}$.

Отже, $V = \pi \cdot R^2 \cdot H = \pi \cdot \left(\dfrac{l\cos\beta}{\cos(\alpha/2)}\right)^2 \cdot l\sin\beta = \dfrac{\pi l^3 \cos^2\beta\sin\beta}{\cos^2(\alpha/2)}$. *Відповідь.* $\dfrac{\pi l^3 \cos^2\beta\sin\beta}{\cos^2(\alpha/2)}$. ■

Приклад 8. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює половині площі його повної поверхні. Діагональ осьового перерізу дорівнює 5 см. Знайти повну поверхню циліндра.

■ Нехай осьовим перерізом циліндра з віссю OO_1 є прямокутник AA_1B_1B, $A_1B = 5$ см (рис. 15). Позначимо: $OA = R$, $AA_1 = H$. Виходячи з рівності $S_б = \frac{1}{2}S_{п.}$, матимемо: $2S_б = S_п$; $2S_б = S_б + 2S_{осн.}$; $S_б = 2S_{осн.}$; $2\pi RH = 2\pi R^2$; $H = R$. Тоді $AB = 2R = 2H$. З ΔA_1AB ($\angle A = 90°$): $AA_1^2 + AB^2 = A_1B^2$; $H^2 + (2H)^2 = 5^2$; $H^2 = 5$. Враховуючи, що $R = H$, знаходимо повну поверхню: $S_п = 2\pi R(R + H) = 4\pi H^2 = 20\pi$ (см^2).

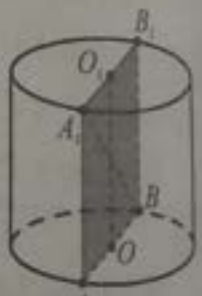


Рис. 15

Відповідь. 20π см^2. ■

Приклад 9. Основою прямої призми є ромб з гострим кутом α. Діагональ бічної грані дорівнює l й утворює з площиною основи кут β. Знайти бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму.

■ Нехай в основі прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежить ромб $ABCD$, у якому $\angle A = \alpha < 90°$; $AB_1 = l$ (рис. 16). Проекцією діагоналі AB_1 грані AA_1B_1B на площину основи є сторона AB ромба, а тому, за умовою задачі, $\angle B_1AB = \beta$.

Висота H циліндра, вписаного в дану призму, дорівнює висоті призми, а радіус R основи — радіусу кола, вписаного в ромб $ABCD$. Бічна поверхня вписаного циліндра дорівнює $S_б = 2\pi RH$.

З ΔABB_1 ($\angle B = 90°$): $H = BB_1 = l\sin\beta$; $AB = l\cos\beta$. З формули для площі

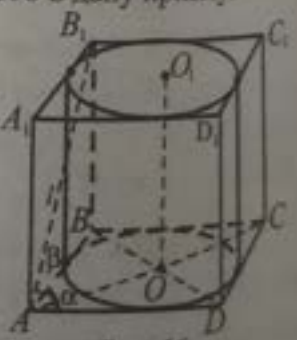


Рис. 16

...ла $S = pR$, де $p = 2AB$ — його півпериметр: $R = \frac{S}{p} = \frac{AB^2 \cdot \sin\alpha}{2AB} = \frac{1}{2}AB\sin\alpha = \frac{1}{2}l\cos\beta \cdot \sin\alpha$.

Отже, $S_0 = 2\pi \cdot \frac{1}{2} l \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot l \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}\pi l^2 \sin 2\beta \sin\alpha$. *Відповідь.* $\frac{1}{2}\pi l^2 \sin 2\beta \sin\alpha$. ■

Завдання 39.1–39.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

39.1. Знайти повну поверхню циліндра з радіусом 5 см і висотою 15 см.

А	Б	В	Г	Д
375π см^2	100π см^2	400π см^2	200π см^2	150π см^2

39.2. Прямокутник зі сторонами a і b ($a > b$) обертається навколо більшої сторони. Визначити об'єм тіла обертання.

А $2\pi a^2 b$ Б $\pi a^2 b$ В πab^2 Г $2\pi ab^2$ Д $4\pi a^2 b$

39.3. Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює l і утворює з площиною основи кут α. Визначити радіус циліндра.

А $2l\cos\alpha$ Б $l\sin\alpha$ В $\frac{l\sin\alpha}{2}$ Г $l\cos\alpha$ Д $\frac{l\cos\alpha}{2}$

39.4. У циліндрі паралельно до його осі проведено площину на відстані 3 см від неї. Ця площина перетинає основу циліндра по хорді, яка дорівнює 8 см. Знайти радіус циліндра.

А $\sqrt{73}$ см Б 5 см В $\sqrt{55}$ см Г $\sqrt{7}$ см Д $\sqrt{5}$ см

39.5. Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 10 см. Знайти площу бічної поверхні циліндра.

А 100 см^2 Б 50π см^2 В 150π см^2 Г 100π см^2 Д 200π см^2

39.6. Діагональ розгортки бічної поверхні циліндра дорівнює d й утворює з висотою розгортки кут α. Знайти радіус циліндра.

А $\frac{d\sin\alpha}{2}$ Б $\frac{d\sin\alpha}{2\pi}$ В $\frac{d\cos\alpha}{\pi}$ Г $\frac{d\sin\alpha}{\pi}$ Д $\frac{d\cos\alpha}{2}$

39.7. Площа бічної поверхні циліндра дорівнює S. Визначити площу осьового перерізу.

А $\frac{S}{4\pi}$ Б $\frac{S}{2}$ В πS Г $\frac{S}{2\pi}$ Д $\frac{S}{\pi}$

39.8. Відро циліндричної форми вміщує 10 л води. Іграшкове відро має розміри в 10 разів менші. Скільки літрів води вміщує іграшкове відро?

А 1 л Б 0,1 л В 0,01 л Г 0,001 л Д 0,0001 л

39.9. Відрізок, який сполучає центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи, утворює з площиною основи кут α. Даний відрізок розміщений на відстані d від центра нижньої основи. Визначити висоту циліндра.

А $\frac{d}{\sin\alpha}$ Б $\frac{d}{\cos\alpha}$ В $d\sin\alpha$ Г $d\cos\alpha$ Д $d\,\mathrm{tg}\,\alpha$

39.10. Паралельно до осі циліндра проведено площину, яка відтинає від кола основи дугу α. Діагональ утвореного перерізу нахилена до площини основи під кутом β. Визначити площу перерізу, якщо радіус циліндра дорівнює R.

А	Б	В	Г	Д
$R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\beta$	$4R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\beta$	$4R^2\sin^2\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{ctg}\beta$	$R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\beta$	$4R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\mathrm{tg}\beta$

39.11. Діагоналі осьового перерізу циліндра утворюють при перетині кут φ, який лежить проти діаметра основи. Визначити площу бічної поверхні циліндра, якщо площа його основи дорівнює S.

А $4S\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$ Б $4S\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ В $4S\sin\frac{\varphi}{2}$ Г $4S\cos\frac{\varphi}{2}$ Д $\frac{4S}{\sin\varphi/2}$

39.12. Радіус основи циліндра R. Площина перетинає бічну поверхню циліндра, але не перетинає основи й утворює кут α з площиною основи. Знайти площу перерізу циліндра цією площиною.

А $\pi R^2\operatorname{tg}\alpha$ Б $\pi R^2\cos\alpha$ В $\pi R^2\sin\alpha$ Г $\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}$ Д $\frac{\pi R^2}{\sin\alpha}$

39.13. Осьовий переріз циліндра — квадрат $ABCD$ зі стороною $2a$. Визначити найкоротшу відстань між точками A і C по поверхні циліндра.

А $2a^2\sqrt{2}$ Б $4a^2\sqrt{2}$ В $a\sqrt{\pi^2+4}$ Г πa Д $a\sqrt{\pi+4}$

39.14. Через твірну циліндра проведено два взаємно перпендикулярні перерізи циліндра, площі яких дорівнюють 60 см^2 і 80 см^2. Знайти площу осьового перерізу.

А 70 см^2 Б 80 см^2 В 90 см^2 Г 100 см^2 Д 200 см^2

39.15. У куб, ребро якого дорівнює a, вписано циліндр. Визначити повну поверхню циліндра.

А $\frac{\pi a^2}{2}$ Б $\frac{3}{2}\pi a^2$ В $\frac{5}{2}\pi a^2$ Г $3\pi a^2$ Д $12\pi a^2$

39.16. У циліндр вписано куб, об'єм якого дорівнює 8 см^3. Знайти об'єм циліндра.

А 2π см^3 Б 4π см^3 В $4\sqrt{2}\pi$ см^3 Г 8π см^3 Д $2\sqrt{2}\pi$ см^3

39.17. Знайти радіус циліндра, описаного навколо прямокутного паралелепіпеда зі сторонами основи 9 см та 12 см і висотою 8 см.

А 7,5 см Б 15 см В 34 см Г 8,5 см Д 17 см

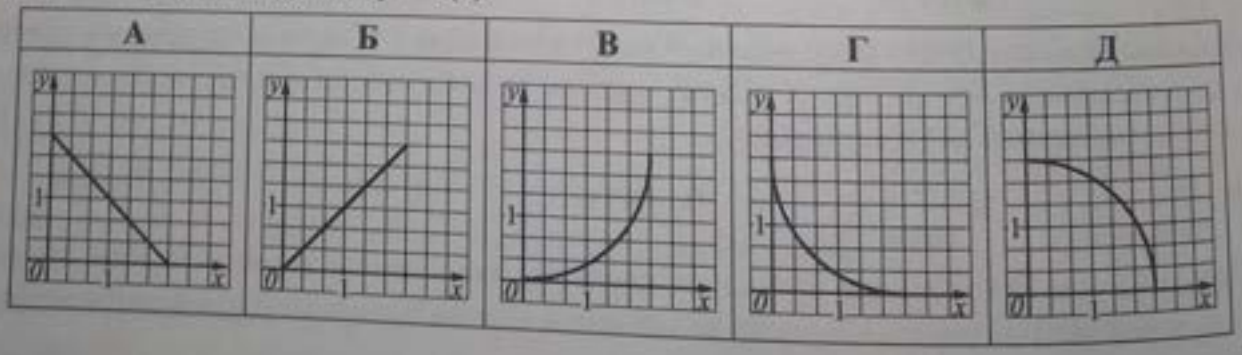
39.18. Об'єм правильної трикутної призми дорівнює V. Визначити об'єм циліндра, вписаного в призму.

А $\frac{\pi V}{3\sqrt{3}}$ Б $\frac{4\pi V}{3\sqrt{3}}$ В $\frac{\pi V}{12\sqrt{3}}$ Г $\frac{\pi V}{\sqrt{3}}$ Д $\sqrt{3}\pi V$

39.19. У циліндр вписано правильну трикутну призму, а в призму — циліндр. Знайти відношення об'ємів циліндрів.

А 1 : 8 Б 1 : 4 В 1 : 2 Г 3 : 4 Д 3 : 8

39.20. Дано циліндр з радіусом 2 і висотою 0,5. $S(x)$ — площа перерізу циліндра площиною, паралельною до його осі, де x — відстань від осі циліндра до площини перерізу. Який з наведених графіків є графіком функції $y = S(x)$?



Завдання 39.21–39.23 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, добудьте один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри і літери (букви).

39.21. Площа осьового перерізу циліндра дорівнює S, а висота циліндра — H. Установити відповідність між величинами S і H (1–3) та об'ємом циліндра (А–Д).

1 $8\ см^2$, 4 см

2 $6\ см^2$, 3 см

3 $12\ см^2$, 6 см

А $3\pi\ см^3$

Б $5\pi\ см^3$

В $4\pi\ см^3$

Г $8\pi\ см^3$

Д $6\pi\ см^3$

39.22. Площа основи циліндра дорівнює S, а діагоналі осьового перерізу утворюють при перетині кут φ, який лежить проти діаметра основи. Установити відповідність між величинами S і φ (1–3) та площею бічної поверхні циліндра (А–Д).

1 $4\ см^2$, 60°

2 $3\ см^2$, 90°

3 $6\ см^2$, 120°

А $8\sqrt{3}\ см^2$

Б $16\sqrt{3}\ см^2$

В $20\sqrt{3}\ см^2$

Г $12\ см^2$

Д $14\ см^2$

39.23. Установити відповідність між об'ємами правильних трикутних призм (1–3) та об'ємами вписаних у них циліндрів (А–Д).

1 $18\ см^3$

2 $9\ см^3$

3 $36\ см^3$

А $4\sqrt{3}\pi\ см^3$

Б $\sqrt{3}\pi\ см^3$

В $5\sqrt{3}\pi\ см^3$

Г $2\sqrt{3}\pi\ см^3$

Д $3\sqrt{3}\pi\ см^3$

Розв'яжіть завдання 39.24–39.35. Відповідь запишіть десятковим дробом.

39.24. Площа основи циліндра відноситься до площі осьового перерізу як $\sqrt{3}\pi : 4$. Знайти в градусах кут між діагоналлю осьового перерізу циліндра і площиною основи.

39.25. Висота циліндра дорівнює 12, а радіус основи дорівнює 10. Циліндр перетнуто площиною, паралельною до його осі так, що в перерізі утворився квадрат. Знайти відстань від осі циліндра до січної площини.

39.26. Площина, паралельна до осі циліндра, відтинає від кола основи дугу 120°. Знайти площу перерізу, якщо висота дорівнює 10, а відстань від осі циліндра до січної площини дорівнює $\sqrt{3}$.

39.27. Кут між твірною циліндра і діагоналлю осьового перерізу дорівнює 60°, площа основи циліндра дорівнює $\sqrt{3}$. Визначити площу бічної поверхні циліндра.

39.28. Із квадрата, діагональ якого дорівнює $2\sqrt{\pi}$, згорнута бічна поверхня циліндра. Визначити площу основи циліндра.

39.29. Площина, паралельна до осі циліндра, відтинає від кола основи дугу 60°. Твірна циліндра дорівнює $10\sqrt{3}$, а відстань від осі до січної площини — 2. Знайти площу перерізу.

39.30. Знайти об'єм циліндра, якщо розгорткою його бічної поверхні є квадрат, сторона якого дорівнює $\sqrt[3]{\pi}$.

39.31. У циліндр вписано призму, основою якої є прямокутний трикутник з катетом 1 і прилеглим до нього кутом 60°. Висота призми дорівнює $1/\pi$. Визначити:
1) площу бічної поверхні циліндра; **2)** об'єм циліндра.

39.32. Основою прямої призми є рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 8 і 2. Висота призми дорівнює $10/\pi$. Знайти об'єм циліндра, вписаного в цю призму.

39.33. У циліндрі проведено два перерізи $ABCD$ і $ABEF$, де AB — твірна циліндра. Площа кожного з цих перерізів дорівнює $1/2$ площі осьового перерізу. Знайти у градусах кут між площинами ABC й ABE.

39.34. На присадибній ділянці воду для поливу рослин зберігають у циліндричному резервуарі, діаметр основи якого дорівнює 2,5 м. Обчислити висоту резервуару з точністю до 0,01 м, якщо його місткість дорівнює 3 м^3.

39.35. Криниця має форму циліндра, діаметр основи якого дорівнює 1,2 м, а глибина — 3 м. Він наповнений водою на $\frac{2}{3}$ глибини. Обчислити з точністю до 0,01 м^3 об'єм води у криниці.

Тема 40. Конус

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— конус, його елементи, перерізи конуса: осьові перерізи, перерізи площинами, паралельними основі;
— розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту на обчислення об'ємів і площ;
— зрізаний конус.

Тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета, називають *конусом* (рис. 1). Конус складається із круга основи й бічної поверхні. Круг називають *основою* конуса, його радіус — *радіусом* конуса. Відрізки, що сполучають вершину конуса з точками кола основи, називають *твірними* конуса. Усі твірні конуса рівні (рис. 2). Пряму, яка проходить через вершину конуса і центр основи, називають *віссю* конуса. Вісь конуса перпендикулярна до площини основи. Відрізок осі, що сполучає вершину конуса з центром основи, називають *висотою* конуса.

Якщо бічну поверхню конуса розрізати по будь-якій твірній і розгорнути на площині, то одержимо його *розгортку* (рис. 3). Розгорткою конуса є круговий сектор круга, радіус якого дорівнює твірній конуса l, а довжина дуги — довжині кола основи, і круг, радіус якого дорівнює радіусу основи конуса.

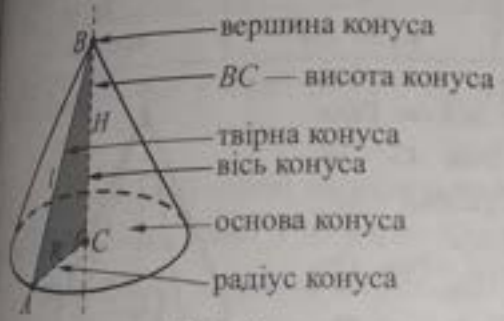


Рис. 1



Рис. 2

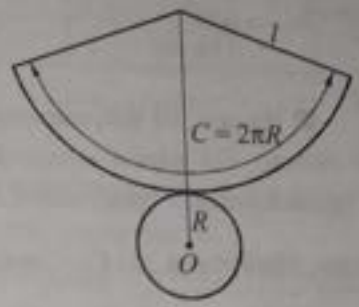


Рис. 3

Площа бічної поверхні конуса: $S = \pi Rl$, де R — радіус основи, l — твірна.

Площа повної поверхні конуса: $S_{\text{повн.}} = S_б + S_о = \pi Rl + \pi R^2 = \pi R(l + R)$.

Об'єм конуса: $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Зрізаний конус. Якщо конус перетнути площиною, паралельною до основи, то вона перетне його по кругу. При цьому одержимо два тіла обертання: зрізаний конус і конус (рис. 4). На рис. 5 зображено зрізаний конус, у якого $OA = R$, $O_1A_1 = r$ — радіуси основ, $AA_1 = l$ — твірна, $OO_1 = h$ — висота.

Осьовий переріз зрізаного конуса — рівнобічна трапеція AA_1B_1B.

Площа бічної поверхні зрізаного конуса: $S = \pi(R + r)l$.

Площа повної поверхні зрізаного конуса:

$S_{\text{повн.}} = S_б + S_1 + S_2 = \pi(R + r)l + \pi(R^2 + r^2)$, де S_1 і S_2 — площі основ.

Об'єм: $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$.

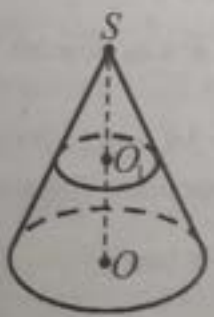


Рис. 4



Рис. 5

Перерізом конуса площиною, що проходить через його вершину, є рівнобедрений трикутник, у якого бічні сторони — твірні конуса (рис. 6). *Осьовий переріз конуса* — переріз, який проходить через його вісь (рис. 7). Переріз конуса площиною, паралельною до його основи, є кругом (рис. 8).

Дотична площина до конуса — площина, яка проходить через твірну конуса та перпендикулярна до площини осьового перерізу, проведеного через цю твірну. На рис. 9 α — дотична площина до конуса, $\alpha \perp (ASB)$.



Рис. 6



Рис. 7



Рис. 8



Рис. 9

Приклад 1. Обчислити площу бічної поверхні конуса, висота якого дорівнює $3\sqrt{3}$ см, а радіус основи удвічі менший від твірної.

А	Б	В	Г	Д
18π см^2	36π см^2	54π см^2	$9\sqrt{3}\pi$ см^2	48π см^2

■ На рис. 10 зображено конус, висота якого SO дорівнює $3\sqrt{3}$ см. Радіус основи OA вдвічі менший від твірної AS. Нехай $OA = R$, тоді $AS = 2R$. У прямокутному трикутнику SOA $SA = 2AO$, тому $\angle ASO = 30°$, $\angle ASB = 60°$. Отже, трикутник SOA — правильний. $SO = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$; $3\sqrt{3} = \frac{2R\sqrt{3}}{2}$; $R = 3$ см. Отже, $AS = 2R = 6$ (см). $S_б = \pi Rl$; $S_б = \pi R \cdot AS$; $S_б = \pi \cdot 3 \cdot 6 = 18\pi$ (см^2). *В-дь.* А.■

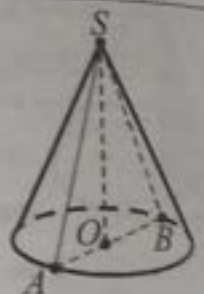


Рис. 10

Приклад 2. Кут між висотою і твірною конуса дорівнює 45°, а висота конуса — $3\sqrt{2}$ см. Знайти площу бічної поверхні конуса.

■ На рис. 11 зображено конус, у якому SA — твірна, $SO = 3\sqrt{2}$ см — висота, $\angle ASO = 45°$. Трикутник SOA — прямокутний ($\angle O = 90°$) і рівнобедрений, $OA = SO = 3\sqrt{2}$ см і $R = OA = 3\sqrt{2}$ см. $SA = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$ (см). $S_б = \pi Rl$; $S_б = \pi \cdot 3\sqrt{2} \cdot 6 = 18\sqrt{2}\,\pi$ (см^2). *Відповідь.* $18\sqrt{2}\,\pi$ см^2. ■



Рис. 11

Приклад 3. Висота конуса дорівнює 8 см, довжина кола основи — 12π см. Знайти площу повної поверхні конуса.

■ На рис. 11 зображено конус, у якому $SO = 8$ см — висота. Маємо: $2\pi R = 12\pi$, звідси $R = 6$ см. У прямокутному трикутнику SOA ($\angle O = 90°$) за теоремою Піфагора маємо: $SA = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см). $S_п = \pi R(l + R)$. Отже, $S_п = \pi \cdot 6(10 + 6) = 96\pi$ (см^2). *Відповідь.* 96π см^2. ■

Приклад 4. Площа бічної поверхні конуса втричі більша від площі основи. Знайти об'єм конуса, якщо радіус основи дорівнює 2 см.

■ На рис. 11 зображено конус, у якому $OA = R = 2$ см. $S_б = 3S_о$. $\pi Rl = 3\pi R^2$; $l = 3R = 6$ см. Тому $SA = 6$ см. З прямокутного трикутника SOA ($\angle O = 90°$) за теоремою Піфагора маємо: $H = SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$ (см). $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi = \frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ (см^3).

Відповідь. $\frac{16\sqrt{2}}{3}\pi$ см^3. ■

Приклад 5. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає його основу радіуса R по хорді, яку видно з центра цієї основи під кутом α, а з вершини — під кутом β. Визначити площу S перерізу. У відповідь записати значення виразу $S/\sqrt{3}$, якщо $R = 2$ см, $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$.

■ Нехай S — вершина конуса, O — центр його основи, SO — висота, $OA = R$ — радіус (рис. 12). Через вершину конуса проведемо площину, що перетинає його основу по хорді AB, яку видно з центра основи під кутом $\angle AOB = \alpha$, а з вершини — під кутом $\angle ASB = \beta$. Оскільки $SA = SB$, то трикутник ASB — рівнобедрений. У трикутнику ASB проведемо медіану SK. Вона буде висотою і бісектрисою. Отже, $SK \perp AB$, $\angle ASK = \angle BSK = \frac{1}{2}\angle ASB = \frac{\beta}{2}$. Із рівнобедреного трикутника AOB, у якому $\angle AOB = \alpha$, медіана OK буде висотою і бісектрисою: $\angle AOK = \alpha/2$, тому



Рис. 12

$AK = R\sin\frac{\alpha}{2}$; $AB = 2AK = 2R\sin\frac{\alpha}{2}$. Із трикутника AKS, у якому $\angle K = 90°$, $\angle ASK = \frac{\beta}{2}$, отримаємо: $SK = AK\operatorname{ctg}\angle ASK = R\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. $S = \frac{1}{2}AB \cdot SK = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\frac{\alpha}{2}\cdot R\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$. Якщо $R = 2$ см, $\alpha = 90°$, $\beta = 60°$, то $S = 2^2\sin^2 45°\operatorname{ctg}30° = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ (см^2). $\frac{S}{\sqrt{3}} = 2$ (см^2). *Відповідь.* 2 см^2. ■

Приклад 6. В основі конуса проведено хорду, яку видно із центра основи під кутом α, а з вершини конуса — під кутом β. Визначте бічну поверхню конуса, якщо його радіус дорівнює R.

■ Нехай SO — висота конуса, AB — задана хорда, $\angle AOB = \alpha$, $\angle ASB = \beta$, $OA = R$ (рис. 12). Проведемо $SK \perp AB$, тоді $OK \perp AB$. Оскільки трикутники AOB і ASB рівнобедрені, то $\angle AOK = \alpha/2$, $\angle ASK = \beta/2$. З ΔOKA ($\angle OKA = 90°$) маємо: $AK = R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. З ΔSKA: $l = SA = \frac{AK}{\sin(\beta/2)} = \frac{R\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)}$.

$S_б = \pi Rl = \frac{\pi R^2\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)}$.

Відповідь. $\frac{\pi R^2\sin(\alpha/2)}{\sin(\beta/2)}$. ■

Приклад 7. Через вершину конуса проведено площину, яка перетинає основу конуса по хорді. Цю хорду видно із центра основи під кутом 60°. Відстань від центра основи до середини висоти перерізу дорівнює 4 см. Знайти, під яким кутом площина перерізу нахилена до площини основи, якщо радіус основи конуса дорівнює 8 см.

■ Нехай задана площина перетинає основу конуса по хорді AB, SO — висота конуса, $\angle AOB = 60°$, $OA = 8$ см (рис. 13). Проведемо $SN \perp AB$, M — середина SN, $OM = 4$ см. Оскільки $SN \perp AB$, то $ON \perp AB$. Потрібно знайти $\angle SNO$. $\angle AON = 30°$. З ΔONA ($\angle N = 90°$): $ON = OA\cdot\cos30° = 4\sqrt{3}$ (см). OM — медіана прямокутного трикутника SON, тому $SN = 2OM$; $SN = 2\cdot 4 = 8$ (см).

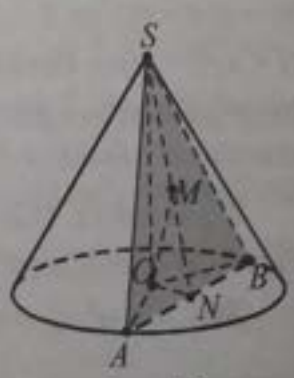


Рис. 13

$\operatorname{tg}\angle SNO = \frac{ON}{SN} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\angle SNO = 30°$.

Відповідь. 30° ■

Приклад 8. У конусі з центра основи до твірної проведено перпендикуляр, який нахилений до площини основи під кутом α. Знайти об'єм конуса, якщо довжина перпендикуляра дорівнює a.

■ Нехай SO — висота конуса, SA — твірна, ON — перпендикуляр до твірної SA; $ON = a$ (рис. 14). Оскільки площина SOA перпендикулярна до площини основи конуса, то проекцією прямої ON на площину основи є пряма OA. Тому $\angle NOA = \alpha$.



Рис. 14

З ΔANO ($\angle N = 90°$): $R = OA = \dfrac{a}{\cos\alpha}$. $\angle NSO = 90° - \angle NAO = \angle NOA = \alpha$.

З ΔSNO ($\angle N = 90°$): $H = SO = \dfrac{a}{\sin\alpha}$. Отже, $V = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H = \dfrac{\pi a^3}{3\cos^2\alpha\sin\alpha} =$

$= \dfrac{2\pi a^3}{3\sin 2\alpha\cos\alpha}$. *Відповідь.* $\dfrac{2\pi a^3}{3\sin 2\alpha\cos\alpha}$. ■

Приклад 9. Твірна зрізаного конуса нахилена до площини більшої основи під кутом α. Радіуси основ R і r ($R > r$). Знайти площу бічної поверхні зрізаного конуса.

■ Нехай A_1A — твірна заданого зрізаного конуса, O_1O — його вісь, $OA = R$ і $O_1A_1 = r$ ($R > r$) (рис. 15). Прямі AA_1 і OO_1 перетинаються (у вершині повного конуса), а тому точки A, A_1, O_1 і O лежать в одній площині. Оскільки ця площина перетинає паралельні площини основ зрізаного конуса по прямих AO та A_1O_1 і містить його висоту O_1O, то $AO \parallel A_1O_1$ і $O_1O \perp AO$. Отже, AA_1O_1O — прямокутна трапеція і O_1O — її висота. Проведемо висоту A_1N трапеції. Тоді $A_1N \parallel O_1O$, звідки A_1N перпендикулярна до площини нижньої основи. Ортогональною проекцією твірної



Рис. 15

A_1A на площину нижньої основи є відрізок NA, а тому $\angle A_1AN = \alpha$. $AN = AO - NO = R - r$. З ΔA_1NA ($\angle N = 90°$): $l = A_1A = \dfrac{AN}{\cos\alpha} = \dfrac{R-r}{\cos\alpha}$. Тоді $S_б = \pi(R+r)l = \dfrac{\pi(R+r)(R-r)}{\cos\alpha} = \dfrac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$.

Відповідь. $\dfrac{\pi(R^2-r^2)}{\cos\alpha}$. ■

Приклад 10. У зрізаному конусі діагоналі осьового перерізу взаємно перпендикулярні, а твірна l утворює з площиною більшої основи кут α. Знайти площу бічної поверхні конуса.

■ Нехай AA_1B_1B — осьовий переріз зрізаного конуса, AB і A_1B_1 — діаметри відповідно більшої та меншої основ, O_1 і O — центри основ (рис. 16). Тоді O_1O — висота зрізаного конуса, $A_1A = B_1B$ — його твірні. Оскільки площина AA_1B_1 перетинає паралельні площини основ конуса по паралельних прямих AB та A_1B_1, то AA_1B_1B — рівнобічна трапеція, O_1O — її висота. $A_1A = l$, $A_1B \perp AB_1$. Проведемо висоту A_1N трапеції. Тоді $A_1N \parallel O_1O$, а тому A_1N перпендикулярна до площини основ. Ортогональною проекцією твірної A_1A



Рис. 16

на площину нижньої основи є відрізок NA. За умовою задачі, $\angle A_1AN = \alpha$. Площа бічної поверхні $S_б = \pi(R+r)l$, де $R = OA$, $r = O_1A_1$. Із прямокутного трикутника A_1NA знаходимо висоту A_1N трапеції: $H = A_1N = l\sin\alpha$. Нехай K — точка перетину діагоналей A_1B і B_1A. Тоді ΔAKB прямокутний ($\angle K = 90°$) і рівнобедрений. З рівнобедреного трикутника OKB $OK = OB = R$. Аналогічно $KO_1 = r$. Отже, висота трапеції $H = l\sin\alpha = r + R$. Знаходимо: $S_б = \pi(R+r)l = \pi l\sin\alpha \cdot l = \pi l^2\sin\alpha$. *Відповідь.* $\pi l^2\sin\alpha$. ■

Приклад 11. Площі основ зрізаного конуса дорівнюють 4 м^2 і 16 м^2. Через середину висоти проведено площину паралельно до основи. Знайти площу перерізу.

■ $S_1 = 4$ м^2, $S_2 = 16$ м^2. $S = \pi R^2$; $R_1 = \sqrt{S_1/\pi} = 2/\sqrt{\pi}$; $R_2 = \sqrt{S_2/\pi} = 4/\sqrt{\pi}$ — радіуси основ. Радіус серединного перерізу $R = (R_1 + R_2)/2 = 3/\sqrt{\pi}$ (м). Площа перерізу: $S = \pi R^2 = 9$ (м^2).

Відповідь. 9 м^2. ■

Приклад 12. Конус вписано в кулю, радіус якої дорівнює R. Знайти площу бічної поверхні конуса, якщо кут при вершині між бічними сторонами його осьового перерізу дорівнює α.

■ На рис. 17 зображено осьовий переріз конуса і кулі, SO — висота конуса, $SA = SB$ — його твірні, O_1 — центр кулі, $O_1S = R$, $\angle ASB = \alpha$.



Рис. 17

За наслідком з теореми синусів для трикутника ASB маємо: $\frac{AB}{\sin\alpha} = 2R$; $AB = 2R\sin\alpha$. У рівнобедреному трикутнику ASB висота SO є його медіаною і бісектрисою. Тому $\angle OSB = \frac{\alpha}{2}$, $OB = \frac{AB}{2} = R\sin\alpha$. З ΔSOB ($\angle O = 90°$):

$SB = \frac{OB}{\sin(\alpha/2)} = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha/2)} = 2R\cos\frac{\alpha}{2}$. Отже, $S_б = \pi \cdot OB \cdot SB = 2\pi R^2 \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. *Відповідь.* $2\pi R^2 \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}$. ■

Приклад 13. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом φ. Відстань від вершини конуса до центра вписаної в нього кулі дорівнює d. Визначити площу бічної поверхні конуса.

■ На рис. 18 зображено осьовий переріз конуса та кулі, SO — висота конуса, $SA = SB$ — його твірні, $\angle SAB = \varphi$, O_1 — центр кулі, $SO_1 = d$.

У рівнобедреному трикутнику ASB центр O_1 вписаного кола лежить на висоті SO. Врахувавши, що промінь AO_1 є бісектрисою кута SAB, знаходимо кути трикутника ASO_1: $\angle A = \frac{\varphi}{2}$; $\angle S = 90° - \varphi$, $\angle O_1 = 180° - \angle A - \angle S = 90° + \frac{\varphi}{2}$. З ΔASO_1 за теоремою синусів: $\frac{SA}{\sin(90° + \varphi/2)} = \frac{SO_1}{\sin(\varphi/2)}$;



Рис. 18

$SA = \frac{SO_1 \cdot \cos(\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} = d\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}$. З ΔSOA: $OA = SA\cos\varphi$. Отже, $S_б = \pi Rl$; $S_б = \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot SA^2 \cdot \cos\varphi = \pi d^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi$. *Відповідь.* $\pi d^2 \operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi$. ■

Приклад 14. Трикутник зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см обертається навколо сторони 14 см. Знайти площу поверхні й об'єм тіла обертання.

■ Нехай у трикутнику ABC $AB = 15$ см, $BC = 14$ см, $CA = 13$ см, T — тіло, утворене обертанням цього трикутника навколо сторони BC (рис. 19). Проведемо висоту AN трикутника ABC. Покажемо, що N — внутрішня точка сторони BC. Для цього досить довести, що найбільший кут трикутника — гострий. Таким кутом є кут $\angle C$, що лежить проти найбільшої сторони. За теоремою косинусів $AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2BC \cdot CA\cos\angle C$, звідки: $15^2 = 14^2 + 13^2 - 2 \cdot 14 \cdot 13\cos\angle C$; $364\cos\angle C = 140$; $\cos\angle C = 5/13$. Оскільки $\cos\angle C > 0$, то $\angle C$ — гострий. Отже, N — внутрішня точка сторони BC. У такому випадку тіло T є об'єднанням двох конусів зі спільною основою радіуса $R = NA$ та висотами CN і BN. Знайдемо радіус NA з трикутника CNA: $NA = CA\sin\angle C = CA \cdot \sqrt{1 - \cos^2\angle C} = 13 \cdot \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = 13 \cdot \frac{12}{13} = 12$ (см). Площа S поверхні тіла T дорівнює сумі площ бічних поверхонь зазначених конусів: $S_б = \pi \cdot NA \cdot CA + \pi \cdot NA \cdot BA = \pi \cdot NA \cdot (CA + BA) = \pi \cdot 12 \cdot (13 + 15) = 336\pi$ (см^2). Об'єм V тіла T дорівнює сумі об'ємів конусів: $V = \frac{1}{3}\pi NA^2 \cdot CN + \frac{1}{3}\pi NA^2 \cdot BN = \frac{1}{3}\pi NA^2 \cdot (CN + NB) = \frac{1}{3}\pi NA^2 \cdot CB = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 12^2 \cdot 14 = 672\pi$ (см^3).

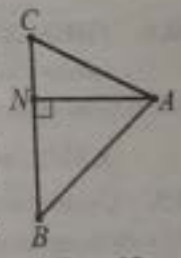


Рис. 19

Відповідь: 336π см^2; 672π см^3. ■

Приклад 15. Рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 16 см і бічна сторона — 10 см, обертається навколо бічної сторони. Знайти площу поверхні та об'єм тіла обертання.

■ Нехай у трикутнику ABC $AC = 16$ см, $BC = BA = 10$ см (рис. 20). Проведемо висоти BK і AN трикутника. Тоді BK — його медіана і бісектриса. $CK = \frac{1}{2}AC = 8$ см. З ΔCKB ($\angle K = 90°$): $BK = \sqrt{BC^2 - CK^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ (см). Оскільки $\operatorname{tg}\angle CBK = \frac{CK}{BK} = 8/6 > 1$, то $\angle CBK > 45°$, а тому $\angle CBA > 90°$. Отже, об'єм V тіла T, утвореного обертанням ΔABC навколо сторони BC, дорівнює різниці об'ємів конусів зі спільною основою (радіус $R = NA$) та висотами CN і BN. Площа S поверхні тіла T дорівнює сумі площ бічних поверхонь цих конусів. Знайдемо радіус основи конусів: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BK = \frac{1}{2}CB \cdot NA$; $NA = \frac{AC \cdot BK}{CB} = \frac{16 \cdot 6}{10} = 9{,}6$ (см). Тоді

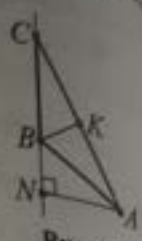


Рис. 20

$S = \pi \cdot NA(CA + BA) = 249{,}6\pi$ (см^2). $V = \frac{1}{3}\pi NA^2(CN - BN) = \frac{\pi NA^2 \cdot BC}{3} = \frac{\pi \cdot 9{,}6^2 \cdot 10}{3} = 307{,}2\pi$ (см^3).

Відповідь. $249{,}6\pi$ см^2, $307{,}2\pi$ см^3. ■

Завдання 40.1–40.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

40.1. Діаметр основи конуса 8 см, а його висота 3 см. Знайти твірну конуса.

А	Б	В	Г	Д
10 см	$\sqrt{73}$ см	2 см	10 см	5 см

40.2. Твірна конуса дорівнює l, а кут між твірною і висотою — β. Визначити площу бічної поверхні конуса.

А $\pi l^2 \cos\beta$ **Б** $\pi l^2 \sin\beta$ **В** $2\pi l^2 \cos\beta$ **Г** $\frac{\pi l^2}{\sin\beta}$ **Д** $\frac{\pi l^2}{\cos\beta}$

40.3. Знайти площу повної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 10 см, а радіус основи дорівнює 6 см.

А 160π см^2 **Б** 96π см^2 **В** 320π см^2 **Г** 192 см^2 **Д** 48π см^2

40.4. **(ЗНО–2012)** Прямокутний трикутник із катетами 9 см і 12 см обертається навколо більшого катета (див. рис.). Визначити площу повної поверхні отриманого тіла обертання.



А 324π см^2 **Б** 216π см^2 **В** 180π см^2 **Г** 135π см^2 **Д** 81π см^2

40.5. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Радіус основи конуса дорівнює 6. Знайти площу осьового перерізу конуса.

А 72 **Б** 9 **В** 12 **Г** 18 **Д** 36

40.6. Радіус основи конуса дорівнює 8 см, а його твірна — 10 см. Знайти площу осьового перерізу конуса.

А 48 см^2 **Б** 24 см^2 **В** 96 см^2 **Г** 60 см^2 **Д** 72 см^2

40.7. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює 9 см, а дуга — 120°. Знайти радіус конуса.

А 4,5 см **Б** 1,5 см **В** 6 см **Г** 3 см **Д** 9 см

40.8. Висоту конуса поділено на чотири рівні відрізки і через точки поділу паралельно основі проведено площини. Визначити площу найбільшого перерізу, якщо площа основи дорівнює S.

А $\frac{1}{4}S$ **Б** $\frac{3}{4}S$ **В** $\frac{3}{16}S$ **Г** $\frac{1}{16}S$ **Д** $\frac{9}{16}S$

4.9. Хорду основи конуса, довжина якої a, видно з центра основи під кутом α. Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом β. Визначити висоту конуса.

А $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$ Б $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ В $\frac{a\operatorname{ctg}\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ Г $\frac{a\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$ Д $\frac{a\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

4.10. Радіус основи конуса дорівнює r. Визначити площу перерізу, який проходить через вершину конуса і хорду основи, яка стягує дугу 60°, якщо площина перерізу утворює з площиною основи конуса кут 30°.

А $\frac{r^2}{\sqrt{3}}$ Б $\frac{3}{2}r^2$ В $2r^2$ Г r^2 Д $\frac{r^2}{2}$

4.11. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 7 см і 15 см, а його твірна — 10 см. Знайти висоту конуса.

А 3 см Б $4\sqrt{21}$ см В $2\sqrt{21}$ см Г 6 см Д 12 см

4.12. Два конуси мають однакову площу бічної поверхні. Знайти відношення площ їх основ, якщо твірна першого конуса утричі більша від твірної другого.

А 1 : 9 Б 1 : 3 В 1 : 81 Г 2 : 3 Д 4 : 9

4.13. Осьовим перерізом конуса є правильний трикутник зі стороною $2r$. Визначити площу перерізу, проведеного через дві твірні, кут між якими дорівнює 30°.

А r^2 Б $2r^2$ В $3r^2$ Г $4r^2$ Д $r^2/2$

4.14. Найбільший кут між твірними конуса дорівнює 60°. Знайти відношення бічної поверхні до площі основи конуса.

А 1 Б 2 В 3 Г 4 Д 5

4.15. Відношення площі основи конуса до площі осьового перерізу дорівнює π. Знайти кут нахилу твірної до основи.

А 15° Б 30° В 45° Г 60° Д 75°

4.16. Півкруг згорнули в конус. Знайти кут при вершині осьового перерізу цього конуса.

А 30° Б 45° В 60° Г 90° Д 120°

4.17. Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор з дугою α. Знайти α, якщо висота конуса дорівнює 4 см, а радіус основи — 3 см.

А 54° Б 72° В 58° Г 216° Д 108°

4.18. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює a. Бічна грань утворює з площиною основи кут α. Визначити об'єм конуса, вписаного в піраміду.

А $\frac{\pi a^3\operatorname{tg}\alpha}{8}$ Б $\frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\alpha}{8}$ В $\frac{\pi a^3\sin\alpha}{8}$ Г $\frac{\pi a^3\operatorname{ctg}\alpha}{24}$ Д $\frac{\pi a^3\operatorname{tg}\alpha}{24}$

4.19. Бічне ребро правильної чотирикутної піраміди дорівнює b й утворює з площиною основи кут α. Визначити об'єм конуса, описаного навколо піраміди.

А $\pi b^3\operatorname{tg}^3\alpha$ Б $\pi b^3\sin^2\alpha\cos\alpha$ В $\pi b^3\cos^2\alpha\sin\alpha$ Г $\frac{\pi b^3}{3}\sin^2\alpha\cos\alpha$ Д $\frac{\pi b^3}{3}\cos^2\alpha\sin\alpha$

4.20. Трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см обертається навколо найбільшої сторони. Знайти площу поверхні обертання.

А 10π см^2 Б $12{,}6\pi$ см^2 В $14{,}4\pi$ см^2 Г $16{,}8\pi$ см^2 Д $20{,}2\pi$ см^2

40.21. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють R і r, а твірна — l. Знайти твірну повного конуса, від якого відокремлений зрізаний конус.

А $\frac{Rl}{r}$ Б $\frac{Rl}{R-r}$ В $\frac{Rl}{R+r}$ Г $\frac{R+r}{Rl}$ Д $\frac{R-r}{Rl}$

Завдання 40.22–40.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

40.22. Установити відповідність між кутом при вершині осьового перерізу конуса (1–3) та відношенням площ його бічної поверхні та основи (А–Д).

1 30°

2 90°

3 60°

А $\sqrt{2}$

Б 2

В $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Г $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Д $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

40.23. Установити відповідність між довжинами висоти та радіуса основи (1–3) конуса і кутом (А–Д) сектора, який є розгорткою бічної поверхні конуса.

1 4 см, 3 см

2 3 см, 4 см

3 12 см, 5 см

А $\frac{8\pi}{5}$

Б $\frac{10\pi}{13}$

В $\frac{24\pi}{13}$

Г $\frac{6\pi}{5}$

Д $\frac{14\pi}{25}$

40.24. Установити відповідність між кутом нахилу твірної до основи конуса (1–3) та відношенням площ його основи та осьового перерізу (А–Д).

1 30°

2 45°

3 60°

А $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

Б $\pi\sqrt{3}$

В $\pi\left(2+\sqrt{3}\right)$

Г π

Д $2\pi\sqrt{3}$

Розв'яжіть завдання 40.25–40.37. Відповідь запишіть десятковим дробом.

40.25. Радіус основи конуса дорівнює 5. Осьовим перерізом конуса є прямокутний трикутник. Знайти: **1)** площу S бічної поверхні конуса; **2)** об'єм конуса. У відповідь записати **1)** $\frac{S\sqrt{2}}{\pi}$; **2)** $\frac{3V}{\pi}$.

40.26. Площа осьового перерізу конуса дорівнює 0,6. Висота конуса дорівнює 1,2. Обчислити площу S повної поверхні конуса. У відповідь записати $\frac{S}{\pi}$.

4.27. Твірна конуса утворює з його основою кут 30°, а площа перерізу, що проходить через твірні, кут між якими 120°, дорівнює $\sqrt{3}$. Знайти об'єм V конуса. У відповідь записати $\frac{V}{\pi}$.

4.28. Бічна поверхня конуса дорівнює 10 см^2 і розгортається в сектор з кутом 36°. Знайти у квадратних сантиметрах повну поверхню конуса.

4.29. Висота конуса дорівнює 6. Розгорткою бічної поверхні цього конуса є сектор з центральним кутом 120°. Визначити об'єм V конуса. У відповідь записати $\frac{V}{\pi}$.

4.30. Знайти об'єм V тіла, яке утворюється при обертанні ромба зі стороною 1 і гострим кутом 60° навколо меншої діагоналі. У відповідь записати $\frac{V}{\pi}$.

4.31. Ромб, площа якого дорівнює Q, обертається навколо сторони. Визначити площу S поверхні одержаного тіла. У відповідь записати значення виразу $\frac{S}{\pi Q}$.

4.32. Рівнобічну трапецію, основи якої дорівнюють 8 і 18, обертають навколо більшої основи. Знайти площу S поверхні тіла обертання, якщо відомо, що в цю трапецію можна вписати коло. У відповідь записати S/π.

4.33. У конус із радіусом $\sqrt{3}$ і висотою 3 вписано правильну трикутну призму, всі ребра якої рівні. Визначити ребро призми.

4.34. У конус із твірною $\frac{12\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$, яка нахилена до площини його основи під кутом 60°, вписано кулю. Знайти об'єм кулі.

4.35. Визначити бічну поверхню конуса, вписаного в правильний тетраедр з ребром $\frac{5}{\sqrt{\pi}}$.

4.36. Бічна поверхня конуса розгортається у чверть круга. Визначити повну поверхню цього конуса, якщо площа його осьового перерізу дорівнює $\frac{\sqrt{15}}{\pi}$.

4.37. У правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині піраміди дорівнює 60°. Визначити площу бічної поверхні конуса, описаного навколо піраміди, якщо її висота дорівнює $\sqrt{\sqrt{2}/\pi}$.

Тема 41. Сфера і куля

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— сфера і куля: обчислення об'єму кулі, площі сфери;

— переріз кулі площиною;

— розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту, на обчислення об'ємів і площ поверхонь.

Кулею називають тіло, утворене внаслідок обертання півкруга навколо діаметра. На рис. 1 зображено кулю, утворену обертанням півкола навколо його діаметра AB. AB — *діаметр кулі*, O — центр кулі. Пряма, яка містить діаметр кулі, є *віссю кулі*. Поверхню кулі називають *сферою*.

Діаметральна площина — площина, яка проходить через центр кулі (рис. 2). Переріз кулі діаметральною площиною — великий круг, а переріз сфери — велике коло. Будь-який переріз кулі площиною є кругом. Центр цього круга — основа перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину.

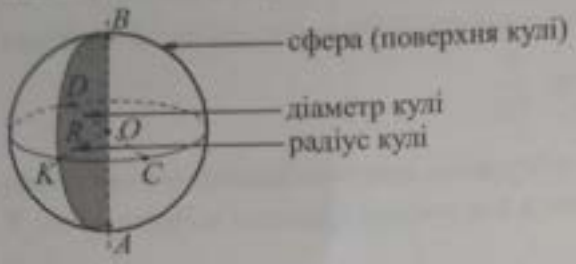


Рис. 1

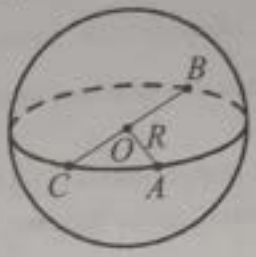


Рис. 2

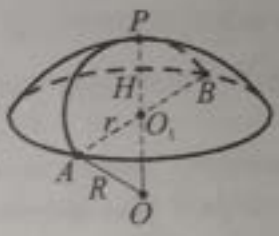


Рис. 3

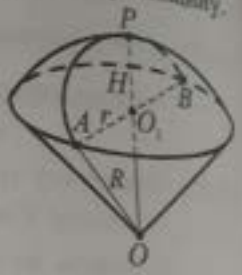


Рис. 4

Площа сфери. *Площу сфери* обчислюють за формулою $S = 4\pi R^2$. Площі двох сфер відносяться як квадрати їх радіусів або діаметрів: $S_1 : S_2 = R_1^2 : R_2^2 = D_1^2 : D_2^2$.

Об'єм кулі. *Об'єм кулі* обчислюють за формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Об'єми двох куль відносяться як куби їх радіусів або діаметрів: $V_1 : V_2 = R_1^3 : R_2^3 = D_1^3 : D_2^3$.

Кульовий сегмент. *Кульовий сегмент* — частина кулі, яка відтинається від неї площиною (рис. 3). $OA = R$ — радіус кулі, $O_1A = r$ — радіус основи сегмента, $O_1P = H$ — висота сегмента.

Площа бічної поверхні кульового сегмента: $S_б = 2\pi RH$.

Об'єм кульового сегмента: $V = \pi H^2\left(R - \frac{1}{3}H\right)$; $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$.

Кульовий сектор. *Кульовий сектор* складається із кульового сегмента та відповідного конуса (рис. 4). $R = OA$ — радіус кулі, $H = O_1P$ — висота сегмента.

Площа бічної поверхні кульового сектора: $S = \pi R\left(2H + \sqrt{2RH - H^2}\right)$.

Об'єм кульового сектора: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Кульовий шар (кульовий пояс)

Частину кулі, яка міститься між двома паралельними січними площинами, називають *кульовим шаром*. Поверхню кульового шару називають *кульовим поясом*. Перпендикуляр, проведений з точки однієї січної площини до площини іншої, називають *висотою* кульового шару (кульового поясу). На рис. 5. $O_1O_2 = H$ — висота.

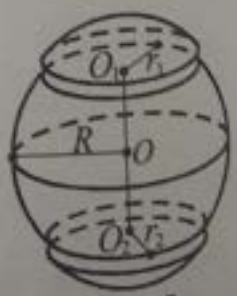


Рис. 5

Площа бічної поверхні кульового шару: $S_б = 2\pi RH$.

Об'єм кульового шару: $V = \frac{1}{6}\pi H^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)H$.

Взаємне розміщення двох сфер

Якщо дві сфери мають лише одну спільну точку, то кажуть, що вони *дотикаються одна до одної*. Дотик сфер може бути *зовнішнім* (рис. 6) і *внутрішнім* (рис. 7). При зовнішньому дотику $O_1O_2 = R_1 + R_2$, при внутрішньому — $O_1O_2 = R_1 - R_2$, де O_1O_2 — відстань між центрами, R_1 і R_2 — радіуси сфер. Якщо $R_1 - R_2 < O_1O_2 < R_1 + R_2$, то сфери *перетинаються по колу* (рис. 8). Якщо $O_1O_2 > R_1 + R_2$, то сфери не мають спільних точок (рис. 9).

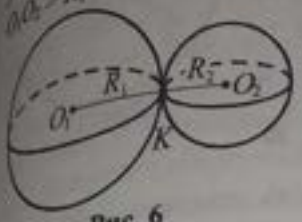


Рис. 6



Рис. 7

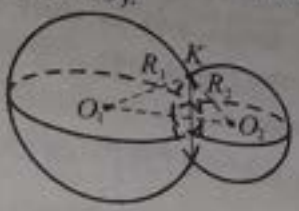


Рис. 8

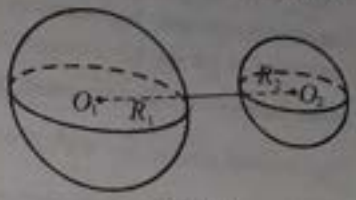


Рис. 9

Розміщення сфери та площини в просторі

Нехай відстань OK від центра сфери O до площини α дорівнює d, а радіус сфери — R. Тоді:

1) якщо $d > R$, то сфера й площина не мають спільних точок (рис. 10);

2) якщо $d = R$, то сфера й площина мають одну спільну точку (рис. 11). У цьому випадку площина є дотичною до сфери, K — точка дотику;

3) якщо $d < R$, то площина перетинає сферу по кругу радіуса $KM = r$, $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ (рис. 12).

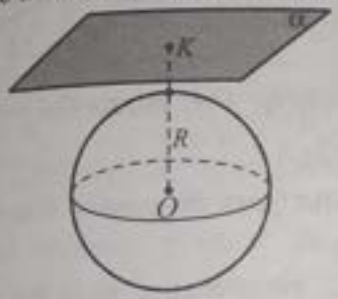


Рис. 10

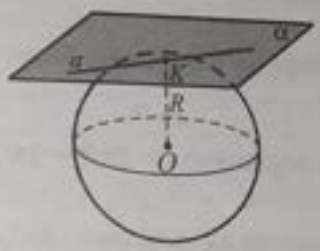


Рис. 11



Рис. 12

Дотичні площина і пряма до кулі (сфери)

Дотична площина (пряма) має з кулею (сферою) тільки одну спільну точку (рис. 11).

Дотична площина (пряма) перпендикулярна до радіуса кулі (сфери), проведеного в точку дотику, і навпаки: якщо площина (пряма) проходить через точку кулі (сфери) і перпендикулярна до радіуса, проведеного в цю точку, то вона дотикається до кулі (сфери).

Рівняння сфери. Рівняння сфери $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, де $(a; b; c)$ — координати центра сфери, R — радіус сфери. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ — рівняння сфери з центром у початку координат.

Приклад 1. Обчислити площу поверхні кулі, якщо її радіус дорівнює 2 см.

■ $S_{сф.} = 4\pi R^2$. $S_{сф.} = 4\pi \cdot 2^2 = 16\pi$ (см^2). *Відповідь.* 16π см^2. ■

Приклад 2. Знайти об'єм кулі, якщо її обмежує сфера, площа якої дорівнює 100π см^2.

■ $S_{сф.} = 4\pi R^2$. $4\pi R^2 = 100\pi$, $R^2 = 25$, $R = 5$ см. $V_к = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = \frac{500}{3}\pi$ (см^3).

Відповідь. $\frac{500}{3}\pi$ см^3. ■

Приклад 3. У скільки разів потрібно збільшити радіус кулі, щоб її об'єм збільшився у 8 разів?

■ Нехай радіус даної кулі дорівнює R_1, а радіус кулі після збільшення — R_2. Тоді: $V_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3$, $V_2 = \frac{4}{3}\pi R_2^3$. Маємо: $V_2 = 8V_1$, $\frac{4}{3}\pi R_2^3 = 8 \cdot \frac{4}{3}\pi R_1^3$, $R_2^3 = 8R_1^3$, $R_2^3 = (2R_1)^3$. Отже, $R_2 = 2R_1$, тобто радіус кулі потрібно збільшити удвічі.

Приклад 4. Площина перетинає кулю. Діаметр кулі, проведений з однієї з точок лінії перетину, утворює з площиною кут 45°. Знайти площу перерізу, якщо діаметр кулі дорівнює $4\sqrt{3}$ см.

■ Нехай площина перетинає кулю по кругу з центром у точці O_1, O_1A — радіус круга, AB — діаметр кулі, а точка O — її центр (рис. 13). За умовою, $AB = 4\sqrt{3}$ см, радіус $OA = AB/2 = 2\sqrt{3}$ (см). Оскільки центр O_1 круга є основою перпендикуляра, опущеного з центра кулі на січну площину, то проекцією прямої OA на цю площину є пряма O_1A, а тому $\angle OAO_1 = 45°$. Отже, ΔOO_1A — рівнобедрений прямокутний, звідки $O_1A = OA/\sqrt{2} = 2\sqrt{3}/\sqrt{2} = \sqrt{6}$ (см).



Рис. 13

Тоді площа круга: $S = \pi R^2$; $S = \pi \cdot O_1A^2 = \pi\left(\sqrt{6}\right)^2 = 6\pi$ (см^2). *Відповідь.* 6π см^2. ■

Приклад 5. Радіуси двох куль дорівнюють 25 дм і 29 дм, а відстань між їх центрами — 36 дм. Визначити довжину лінії, по якій перетинаються їх поверхні.

■ На рис. 14 зображено переріз куль площиною, що проходить через їх центри O_1 і O_2. Нехай $R_1 = 25$ дм і $R_2 = 29$ дм — радіуси куль відповідно з центрами O_1 і O_2, $O_1O_2 = 36$ дм. Оскільки $R_1 + R_2 > O_1O_2$, а $R_2 - R_1 < O_1O_2$, то поверхні куль перетинаються по колу. На рисунку AB — діаметр цього кола, висота AO трикутника O_1AO_2 — його радіус. Знайдемо радіус кола, використавши формулу Герона для обчислення площі трикутника O_1AO_2. $p = (25 + 29 + 36)/2 = 45$ (см).

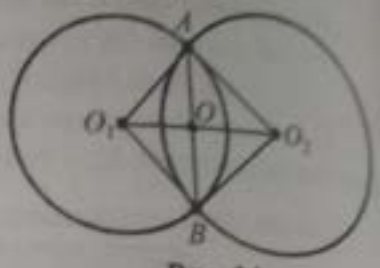


Рис. 14

$S = \sqrt{45(45-25)(45-29)(45-36)} = 360$ (дм^2). З іншого боку, $S = \frac{1}{2} O_1O_2 \cdot OA$, звідки $OA = \frac{2S}{O_1O_2} = \frac{2 \cdot 360}{36} = 20$ (дм). Тоді довжина кола дорівнює: $l = 2\pi R = 2\pi OA = 40\pi$ (дм). *Відповідь.* 40π дм. ■

Приклад 6. Визначити об'єм меншого кульового сектора кулі, якщо радіус кола його основи дорівнює 60 см, а радіус кулі — 75 см.

■ Нехай O — центр кулі, C — центр кола основи сектора, CB — радіус цього кола; $CB = r = 60$ см, $OA = OB = R = 75$ см (рис. 15).

Об'єм кульового сектора дорівнює: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$. $H = CA$. З ΔOCB ($\angle C = 90°$):

$OC = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{75^2 - 60^2} = 45$ (см). $CA = OA - OC = 75 - 45 = 30$ (см).

Отже, $V = \frac{2}{3}\pi \cdot 75^2 \cdot 30 = 112500\pi$ (см^3). *Відповідь.* 112500π см^3. ■

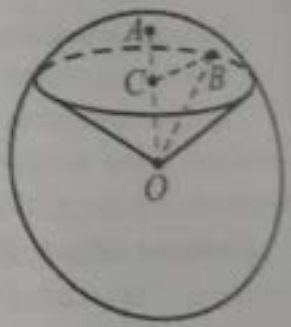


Рис. 15

Приклад 7. Радіуси основ кульового пояса дорівнюють 10 см і 12 см, а його висота — 11 см. Знайти бічну поверхню сферичного пояса, якщо паралельні площини, які перетинають кулю, розміщені з різних боків від центра кулі.

■ На рис. 16 зображено переріз сфери, $O_1A = 10$ см, $O_2B = 12$ см, $H = O_1O_2 = 11$ см. Площа поверхні пояса: $S = 4\pi R^2 - (S_1 + S_2)$, де R — радіус кулі, S_1, S_2 — площі поверхонь сферичних сегментів з висотами $H_1 = O_1M$ і $H_2 = O_2K$. $S = 4\pi R^2 - (2\pi RH_1 + 2\pi RH_2) = 2\pi R(2R - H_1 - H_2) = 2\pi RH$. Знайдемо R:

$O_1O + OO_2 = O_1O_2$; $\sqrt{R^2 - 10^2} + \sqrt{R^2 - 12^2} = 11$; $R^2 - 10^2 = \left(11 - \sqrt{R^2 - 12^2}\right)^2$;

$22\sqrt{R^2 - 12^2} = 11^2 + 10^2 - 12^2$; $2\sqrt{R^2 - 12^2} = 7$; $4R^2 = 625$; $R = 12{,}5$ (см).

Отже, $S = 2\pi \cdot 12{,}5 \cdot 11 = 275\pi$ (см^2).

Відповідь. 275π см^2. ■

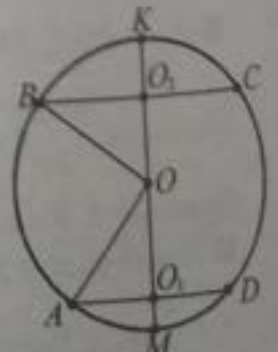


Рис. 16

Приклад 8. **На якій відстані від центра кулі радіуса 12 см повинна міститися точка, яка світиться, щоб вона освітлювала 1/3 її поверхні?**

■ Нехай M — точка, яка освітлює $\frac{1}{3}$ поверхні кулі радіуса $R = 12$ см. На рис. 17 зображено осьовий переріз кулі площиною, що проходить через точку M; O — центр кулі. Потрібно знайти довжину відрізка OM.

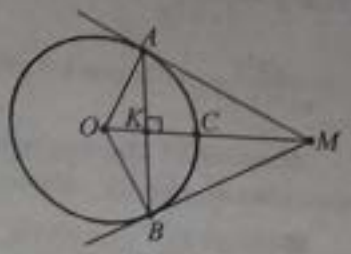


Рис. 17

Проведемо через точку M дотичні MA й MB до кола, що обмежує осьовий переріз, і нехай C — точка перетину цього кола з відрізком OM. Точка M освітлюватиме дугу ACB цього кола і сферичний сегмент, утворений обертанням дуги AC навколо осі OM.

Проведемо висоту AK трикутника OAM. Тоді $KC = H$ — висота сферичного сегмента; його площа $S = 2\pi RH$. Оскільки ця площа становить третину площі поверхні кулі, то: $2\pi RH = \frac{1}{3} \cdot 4\pi R^2$;

$H = \frac{2}{3}R = 8$ см. Тоді $OK = OC - KC = 12 - 8 = 4$ (см). $\Delta OAM \sim \Delta OKA$ (як прямокутні і кут O — спільний): $\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OK}$; $OM = \frac{OA^2}{OK} = \frac{12^2}{4} = 36$ (см). *Відповідь.* 36 см. ■

Приклад 9. Навколо циліндра описана куля. Площа основи циліндра дорівнює 64π см^2, а його висота — 30 см. Знайти радіус кулі.

А	Б	В	Г	Д
15 см	3 см	9 см	17 см	20 см

■ Нехай циліндр, у якого круги $(O_1; r)$ і $(O_2; r)$ — основи, $O_1O_2 = 30$ см, $S_o = 64\pi$ см^2, вписано в кулю $(O; R)$, $R = OA$ (рис. 18). Оскільки площа основи циліндра дорівнює 64π см^2, то $\pi r^2 = 64\pi$; $r = 8$ см. Із трикутника AO_1O ($\angle O_1 = 90°$), у якому $AO_1 = r = 8$ см, $OO_1 = 30 : 2 = 15$ (см), за теоремою Піфагора маємо: $OA = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$ (см). *Відповідь.* **Г.** ■



Рис. 18

Приклад 10. У кулю вписано правильну чотирикутну піраміду, сторона основи якої дорівнює a. Визначити площу поверхні кулі, якщо бічне ребро піраміди нахилене до площини основи під кутом α. У відповідь записати значення виразу S / π, якщо $a = 4$ см, $\alpha = 45°$.

■ Нехай $SABCD$ — задана правильна чотирикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює a (рис. 19). Проведемо діагоналі основи AC і BD. Вони перетинаються в точці F. Оскільки піраміда правильна, то її вершина — точка S — проектується у центр кола, описаного навколо основи піраміди — точку F. Отже, SF — перпендикуляр до площини основи, SA — похила, FA — її проекція. $\angle SAF = \alpha$ — кут нахилу бічного ребра до площини основи. У трикутнику SFA побудуємо серединний перпендикуляр MO до гіпотенузи SA.

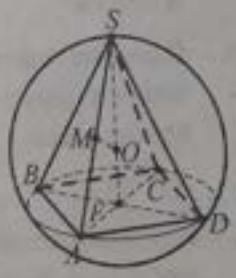


Рис. 19

Тоді $SO = AO$. Аналогічно можна довести, що точка O рівновіддалена від інших вершин піраміди, тобто є центром кулі, описаної навколо піраміди. Тому $SO = AO = R$. Площина, проведена через діагональ основи AC і вершину S піраміди, перетинає кулю по великому кругу, описаному навколо діагонального перерізу піраміди — трикутнику ASC, у якому $\angle SAC = \angle SCA = \alpha$, $\angle ASC = 180° - 2\alpha$. За наслідком з теореми синусів $\frac{AC}{\sin(180° - 2\alpha)} = 2R$; $R = \frac{AC}{2\sin 2\alpha}$. Оскільки, $ABCD$ квадрат, то $AC = a\sqrt{2}$.

Тоді $R = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha}$. Площа поверхні кулі $S = 4\pi R^2$. $S = 4\pi\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2\sin 2\alpha}\right)^2 = \dfrac{2\pi a^2}{\sin^2 2\alpha}$. Якщо $a = 4$ см, $\alpha = 45°$, то $S = \dfrac{2\pi \cdot 4^2}{\sin^2(2\cdot 45°)} = 32\pi$ (см^2). Тоді $S/\pi = 32$ (см^2). *Відповідь.* 32 см^2. ■

Приклад 11. Навколо правильної трикутної призми описано кулю. Радіус кулі, проведений до вершини призми, утворює з бічним ребром кут γ. Визначити об'єм кулі, якщо бічне ребро призми дорівнює b.

■ Нехай K — центр кулі, описаної навколо правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$, $AA_1 = b$, $\angle KAA_1 = \gamma$ (рис. 20). Об'єм кулі $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, де R — її радіус. Проведемо радіуси KA і KA_1 описаної кулі та висоту KN утвореного трикутника KAA_1. Оскільки $KA = KA_1 = R$, то ΔKAA_1 — рівнобедрений, а тому його висота KN є одночасно медіаною, звідки $AN = \dfrac{b}{2}$. З ΔANK ($\angle N = 90°$):

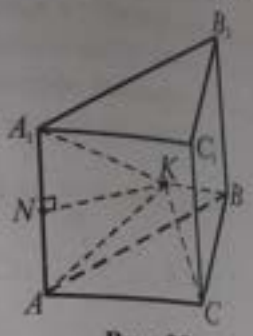


Рис. 20

$R = KA = \dfrac{AN}{\cos\gamma} = \dfrac{b}{2\cos\gamma}$. Отже, $V = \dfrac{4}{3}\pi\left(\dfrac{b}{2\cos\gamma}\right)^3 = \dfrac{\pi b^3}{6\cos^3\gamma}$. *В-дь.* $\dfrac{\pi b^3}{6\cos^3\gamma}$. ■

Завдання 41.1–41.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

41.1. Кулю, радіус якої 5 см, перетнуто площиною, що розміщена на відстані 3 см від центра. Знайти площу перерізу.

А	Б	В	Г	Д
4π см^2	8π см^2	12π см^2	16π см^2	32π см^2

41.2. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Точка A лежить на дотичній площині на відстані 4 см від точки дотику. Знайти відстань від точки A до поверхні кулі.

А 0,5 см **Б** 1 см **В** 2 см **Г** 3 см **Д** 4 см

41.3. Площа великого круга кулі дорівнює 4π см^2. Знайти об'єм кулі.

А $\dfrac{64}{3}\pi$ см^3 **Б** 16π см^3 **В** 32π см^3 **Г** $\dfrac{32}{3}\pi$ см^3 **Д** 64π см^3

41.4. Діаметр кулі дорівнює 6 см. Знайти площу поверхні кулі.

А 18π см^2 **Б** 36π см^2 **В** 54π см^2 **Г** 72π см^2 **Д** 108π см^2

41.5. Площина перетинає сферу. Довжина лінії перетину дорівнює 10π см, а діаметр сфери, проведений в одну з точок лінії перетину, утворює з площиною перетину кут 60°. Знайти площу поверхні сфери.

А 40π см^2 **Б** 100π см^2 **В** 25π см^2 **Г** 1600π см^2 **Д** 400π см^2

41.6. Відстань між рівновеликими паралельними перерізами кулі, радіус якої становить 10 см, дорівнює 12 см. Знайти площу цих перерізів.

А 22π см^2 **Б** 16π см^2 **В** 64π см^2 **Г** 128π см^2 **Д** 100π см^2

41.7. Об'єми двох куль відносяться як 27 : 125. Як відносяться площі їх поверхонь?

А 9 : 25 **Б** 3 : 5 **В** $\sqrt{27} : \sqrt{125}$ **Г** 27 : 125 **Д** $\sqrt[3]{27} : \sqrt[3]{125}$

41.8. Діаметр одного кавуна вдвічі більший від діаметра іншого. У скільки разів перший кавун важчий від другого?

А 2 **Б** 3 **В** 4 **Г** 8 **Д** 16

41.9. М'яч, площа поверхні якого дорівнює 400π см^2, зробив один повний оберт по прямій. Знайти довжину шляху, яку він при цьому подолав.

А 10π см Б 20π см В 30π см Г 40π см Д 60π см

41.10. На поверхні кулі радіуса r дано дві точки, відстань між якими дорівнює радіусу кулі. Визначити найкоротшу відстань між цими точками по поверхні кулі.

А $\frac{2\pi}{3r}$ Б $\frac{\pi r}{12}$ В $\frac{\pi r}{6}$ Г $\frac{\pi r}{3}$ Д $\frac{\pi r}{4}$

41.11. Металеву кулю переплавлено на 8 рівних куль. Як змінилася при цьому загальна поверхня?

А	Б	В	Г	Д
Збільшилася у 4 рази	збільшилася удвічі	зменшилася удвічі	зменшилася у 8 разів	не змінилася

41.12. Дві рівні кулі радіуса R розміщені так, що центр однієї з них лежить на поверхні іншої. Знайти радіус кола, по якому перетинаються їхні поверхні.

А R Б $\frac{R}{2}$ В $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ Г $\frac{R}{\sqrt{2}}$ Д $\sqrt{2}R$

41.13. Вершини трикутника лежать на сфері радіуса 13 см. Знайти відстань від центра сфери до площини трикутника, якщо сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см.

А $4\sqrt{11}$ см Б $\sqrt{165}$ см В 6 см Г 24 см Д 12 см

41.14. Вершини прямокутника лежать на сфері радіуса 10 см. Знайти відстань від центра сфери до площини прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 16 см.

А $2\sqrt{41}$ см Б 6 см В 3 см Г 7 см Д 5 см

41.15. Через точку, що лежить на поверхні сфери, проведено дві взаємоперпендикулярні площини, які перетинають сферу по колах з радіусами r_1 і r_2. Визначити площу поверхні сфери.

А $\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$ Б $4\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$ В $\frac{\pi(r_1^2+r_2^2)}{4}$ Г $2\pi\left(r_1^2+r_2^2\right)$ Д $\frac{\pi(r_1^2+r_2^2)}{2}$

41.16. Через точку, що не лежить на сфері, проведено дві площини, які дотикаються до сфери. Знайти відстань від центра сфери до лінії перетину площин, якщо кут між площинами дорівнює 60°, а площа поверхні сфери — 32π см^2.

А $4\sqrt{2}$ см Б $8\sqrt{2}$ см В 4 см Г $2\sqrt{2}$ см Д $16\sqrt{2}$ см

41.17. Знайти відношення площ поверхні куба і вписаної в нього кулі.

А $\frac{2}{\pi}$ Б $\frac{3}{\pi}$ В $\frac{4}{\pi}$ Г $\frac{6}{\pi}$ Д $\frac{12}{\pi}$

41.18. **(ЗНО–2013)** Для розігрівання в мікрохвильовій печі рідких страв використовують посудину у формі циліндра, радіус основи якого дорівнює 9 см. Посудина ставиться на горизонтальний диск у формі круга і накривається кришкою, що має форму півсфери (див. рисунок). Радіус півсфери дорівнює 12 см і є меншим за радіус круга. Указати найбільше з наведених значень, якому може дорівнювати висота посудини, якщо посудина не торкається кришки.



А 3 см Б 5 см В 6 см Г 7 см Д 8 см

41.19. Знайти відношення об'ємів кулі та вписаного в неї куба.

А $\frac{\pi}{2}$ Б $\sqrt{3}\pi$ В $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ Г $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$ Д $\frac{3\pi}{4}$

41.20. Знайти відношення площі поверхні кулі, описаної навколо конуса, осьовим перерізом якого є рівносторонній трикутник, до площі поверхні кулі, вписаної в цей конус.

А 2 Б 3 В 4 Г 6 Д 8

41.21. Навколо кулі описана правильна трикутна призма. Знайти відношення об'ємів призми і кулі.

А $\frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ Б $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$ В $\frac{9\sqrt{3}}{\pi}$ Г $\frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$ Д $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$

Завдання 41.22–41.26 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

41.22. Установити відповідність між геометричними тілами (1–3) та формулами для відшукання їх об'ємів (А–Д).

1 Циліндр
2 Куля
3 Конус

А $\pi r^2 H$
Б $\pi r l$
В $\frac{1}{3}\pi r^2 H$
Г $\frac{4}{3}\pi r^3$
Д a^3

41.23. Установити відповідність між геометричними тілами (1–3) та формулами для відшукання їх площ поверхонь (А–Д).

1 Циліндр
2 Куля
3 Конус

А $\pi r(r+l)$
Б $4\pi r^2$
В $a(a+2l)$
Г $2\pi r(r+l)$
Д $2\pi r l$

41.24. Установити відповідність між відношеннями об'ємів двох куль (1–3) та відношеннями площ їх поверхонь (А–Д).

1 27 : 125
2 8 : 27
3 27 : 64

А 4 : 9
Б 9 : 16
В 9 : 25
Г 49 : 64
Д 25 : 16

41.25. Дві площини, які перетинаються під кутом 60°, дотикаються до сфери. Установити відповідність між площею поверхні сфери (1–3) та відстанню від її центра до лінії перетину цих площин (А–Д).

1 36π см^2
2 12π см^2
3 48π см^2

А $8\sqrt{3}$ см
Б 6 см
В $2\sqrt{3}$ см
Г $5\sqrt{3}$ см
Д $4\sqrt{3}$ см

41.26. Кулю радіуса r вписали в конус висотою H і радіусом основи R. Установити відповідність між висотою H і радіусом основи R конуса (1–3) та радіусом r кулі (А–Д).

1 4 см, 3 см	А 6 см
2 16 см, 12 см	Б 3 см
3 24 см, 7 см	В 1,5 см
	Г 5,25 см
	Д 3 см

Розв'яжіть завдання 41.27–41.36. Відповідь запишіть десятковим дробом.

41.27. Перерізи кулі двома паралельними площинами, між якими лежить центр кулі, мають площі 144π см^2 і 25π см^2. Відстань між площинами дорівнює 17 см. Знайти: **1)** площу S поверхні кулі (у см^2); **2)** об'єм V кулі (у см^3). У відповідь записати **1)** $\frac{S}{\pi}$; **2)** $\frac{3V}{10\pi}$.

41.28. Перерізи сфери двома паралельними площинами мають довжини 10π см і 24π см. Знайти у квадратних сантиметрах площу S поверхні сфери, якщо відстань між площинами дорівнює 7 см і центри перерізів лежать на одному радіусі сфери. У відповідь записати S/π.

41.29. Основою прямої призми є трикутник зі сторонами 6, 8 і 10. Висота призми дорівнює 24. Знайти радіус кулі, описаної навколо призми.

41.30. Сторона основи і висота правильної чотирикутної піраміди дорівнюють 4. Знайти радіус описаної навколо піраміди кулі.

41.31. Навколо конуса з радіусом основи 9 і висотою 3 описано кулю. Визначити радіус кулі.

41.32. У пряму чотирикутну призму, основою якої є ромб з діагоналями 3 і 4, вписано кулю. Визначити радіус кулі.

41.33. У циліндр, об'єм якого дорівнює 16π, вписано кулю. Визначити радіус кулі.

41.34. Висота конуса дорівнює 8 см, а його твірна дорівнює 10 см. Знайти у сантиметрах радіус кулі, вписаної в конус.

41.35. Основою піраміди є правильний трикутник зі стороною 6 см. Одне з бічних ребер піраміди є перпендикулярним до площини основи і дорівнює 4 см. Знайти у сантиметрах радіус кулі, описаної навколо піраміди.

41.36. Ребро правильного тетраедра дорівнює $3\sqrt{6}$. Визначити радіус сфери, яка дотикається до бічних граней тетраедра, якщо центр цієї сфери лежить на основі тетраедра.

Тема 42. Координати на площині та в просторі

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— прямокутна система координат на площині та в просторі, координати точки;
— обчислення відстані між двома точками та обчислення координат середини відрізка;
— рівняння прямої та рівняння кола на площині;
— симетрія відносно початку координат та координатних площин
— рівняння сфери;
— використання аналогії між векторами й координатами на площині та в просторі для розв'язування стереометричних задач і задач практичного змісту.

КООРДИНАТИ НА ПЛОЩИНІ

Координатна площина. *Координатна площина* — площина, на якій уведена прямокутна система координат. Прямокутну систему координат утворюють дві взаємно перпендикулярні числові осі, які мають спільну точку O — *початок координат* (рис. 1). Одну з осей, як правило горизонтальну, називають *віссю абсцис* (вісь x), а іншу — вертикальну — *віссю ординат* (вісь y).

Кожній точці площини відповідає впорядкована пара чисел — *координати точки*. Перша координата — *абсциса* точки (позначають x), друга координата — *ордината* точки (позначають y). Тоді $M(x; y)$ — позначення точки на координатній площині.

Наприклад, координати точок на рис. 2 є такими: $A(1; 3)$, $B(3; 1)$, $C(-2; 1)$, $D(1; 0)$, $K(0; -2)$.

Координатні осі розбивають площину на чотири *чверті* (*квадранти*). У межах однієї чверті знаки координат точок не змінюються (рис. 3).

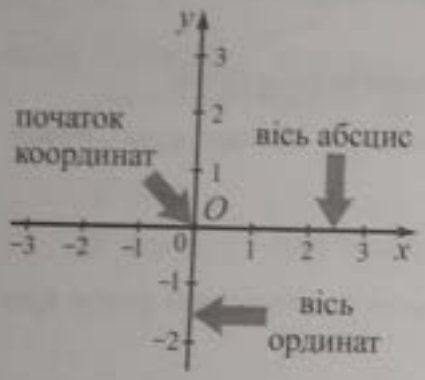


Рис. 1

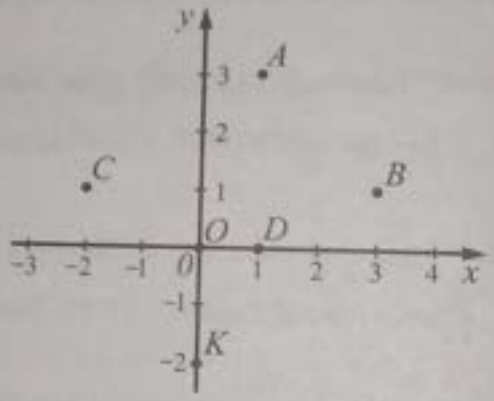


Рис. 2

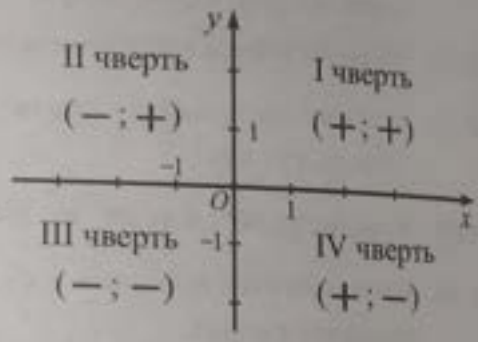


Рис. 3

Відстань між двома точками. Відстань d між точками $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$:

$$d = AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Середина відрізка. Координати точки $C(x; y)$ — середини відрізка AB, де $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$, обчислюють за формулами: $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Рівняння фігур на площині. *Рівнянням фігури* F у прямокутній системі координат називають рівняння з двома змінними, якщо:

1) координати будь-якої точки фігури F задовольняють це рівняння;
2) будь-які два числа, що задовольняють це рівняння, є координатами деякої точки фігури F.

Наприклад:

1) $y = x$ — рівняння прямої (рис. 4);
2) $y = x^2$ — рівняння параболи (рис. 5);
3) $y = \dfrac{3}{x}$ — рівняння гіперболи (рис. 6).

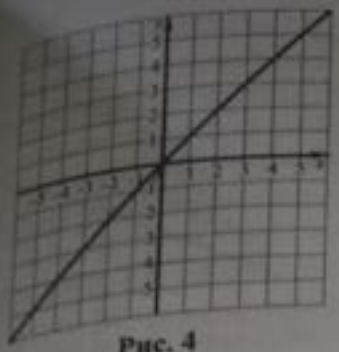


Рис. 4

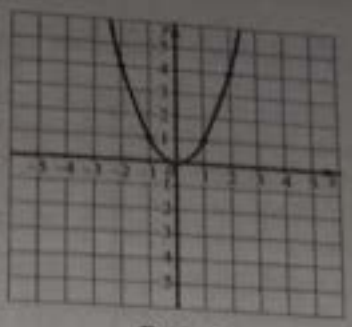


Рис. 5

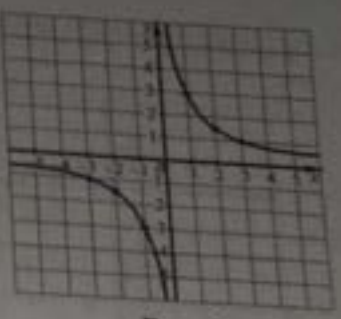


Рис. 6

Рівняння кола. У прямокутній системі координат (рис. 7) рівняння кола має вигляд:

$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, де $K(a;\ b)$ — координати центра, R — радіус кола.

Наприклад, $x^2+y^2=R^2$ — рівняння кола з центром у початку координат.

Рівняння прямої. Пряма, яка проходить через початок координат, задається рівнянням $y=kx$, де k — кутовий коефіцієнт прямої, $k=\operatorname{tg}\alpha$, α — кут нахилу прямої до осі абсцис.



Рис. 7

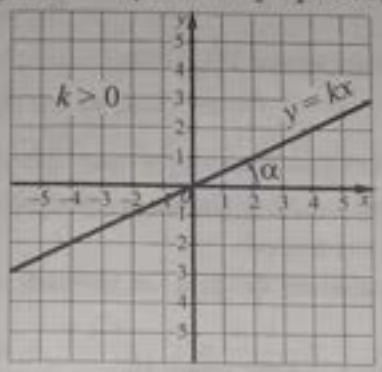


Рис. 8

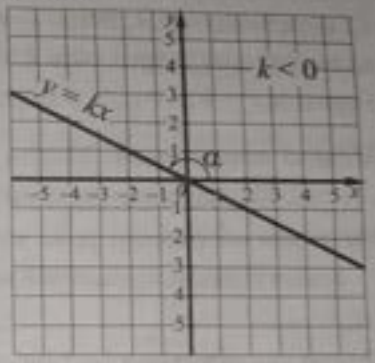


Рис. 9

На рис. 8 зображено графік рівняння $y=kx$, для $k>0$, на рис. 9 для $k<0$.

Рівняння прямої в прямокутній системі координат можуть мати вигляд:

1) рівняння виду $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ рівнянням прямої, що проходить через точки $(x_1;\ y_1)$, $(x_2;\ y_2)$;

2) рівняння $ax+by+c=0$, де a, b, c — деякі числа, a та b не дорівнюють одночасно 0, називають *загальним рівнянням прямої*;

3) рівняння $y=kx+b$ називають рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом k.

Одна й та сама пряма може задатися рівнянням кожного з видів 1–3.

Наприклад, якщо пряма проходить через точки $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 3)$, то її можна задати рівнянням виду 1): $\dfrac{x-1}{4-1}=\dfrac{y-1}{3-1}$ або $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-1}{2}$. Виконавши перетворення, одержимо рівняння виду 2): $2x-3y+1=0$.

Виразивши з рівності $2x-3y+1=0$ y через x, одержимо рівняння виду 3), а саме $y=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{1}{3}$.

Пряма у прямокутній системі координат. Пряма $ax+by+c=0$, ($a\neq 0$ або $b\neq 0$) у прямокутній системі координат може бути розміщена такими трьома способами:

1. $a=0$, $b\neq 0$. Маємо $by+c=0$, $y=-\dfrac{c}{b}$. Пряма $y=-\dfrac{c}{b}$ паралельна до осі абсцис (якщо $c\neq 0$) (рис. 10) або збігається з нею (якщо $c=0$). *Рівняння $y=0$ — рівняння осі абсцис.*

2. $a\neq 0$, $b=0$. Маємо $ax+c=0$, $x=-\dfrac{c}{a}$. Пряма $x=-\dfrac{c}{a}$ паралельна до осі ординат (якщо $c\neq 0$) (рис. 11) або збігається з нею (якщо $c=0$). *Рівняння $x=0$ — рівняння осі ординат.*

3. $a \neq 0, b \neq 0$. $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ або $y = kx + m$ — рівняння прямої (рис. 12).

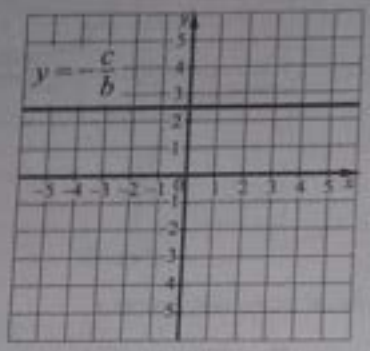


Рис. 10

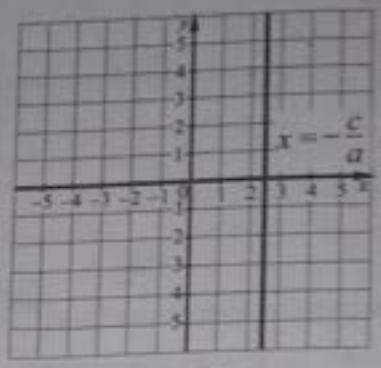


Рис. 11

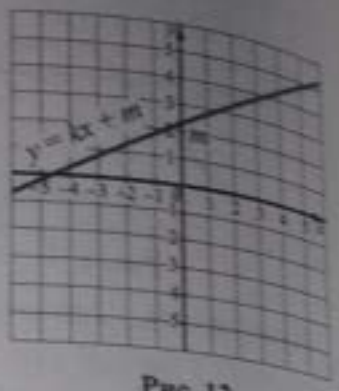


Рис. 12

Взаємне розміщення прямих. Якщо прямі задані рівняннями $y = k_1x + m_1$ і $y = k_2x + m_2$, то вони:

а) паралельні тоді й тільки тоді, коли $k_1 = k_2$ і $m_1 \neq m_2$, тобто коли їх кутові коефіцієнти будуть рівними;

б) перетинаються, якщо $k_1 \neq k_2$;

в) перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли $k_1k_2 = -1$.

Прямі $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ і $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ збігаються, якщо $a_1 = ka_2$; $b_1 = kb_2$; $c_1 = kc_2$.

Метод координат. Метод дослідження геометричних фігур та їхніх властивостей засобами алгебри (із застосуванням системи координат) називають *методом координат*.

Методом координат розв'язують такі задачі:

1) знаючи деякі геометричні властивості фігури, знаходять її рівняння і досліджують інші властивості;

2) знаючи рівняння фігури, знаходять її властивості.

Щоб розв'язати задачу методом координат, слід:

1) сформулювати задачу мовою координат. Для цього вводять декартову систему координат і вказують спосіб розміщення в ній даної фігури. Доцільно вибрати систему координат так, щоб якнайбільше координат вершин фігури дорівнювали нулю або одному й тому самому числу;

2) визначити координати деяких точок даної фігури;

3) використати відомі співвідношення і формули;

4) перекласти отримані результати на мову геометрії.

КООРДИНАТИ У ПРОСТОРІ

Декартова система координат у просторі задається трійкою попарно перпендикулярних осей: *вісь абсцис* (вісь x), *вісь ординат* (вісь y), *вісь аплікат* (вісь z), які мають спільний початок — точку O (*початок координат*) й одиничні відрізки вздовж осей. Прямі x, y і z називають *координатними осями*. Точка O розбиває кожну з осей на дві півосі: додатну, позначену стрілкою, і від'ємну (рис. 13). Якщо через кожну пару координатних осей провести площину, то одержимо площини xy, yz і xz (рис. 14).

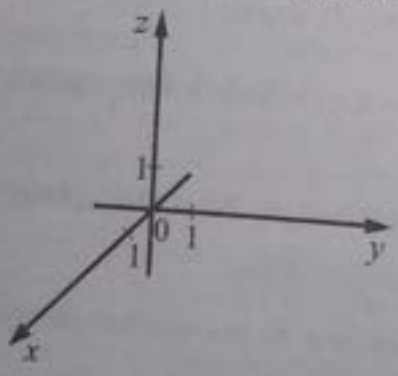


Рис. 13

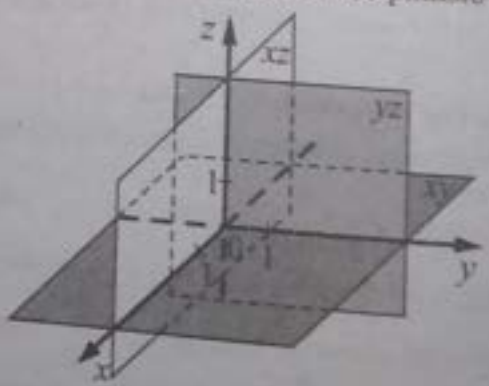


Рис. 14

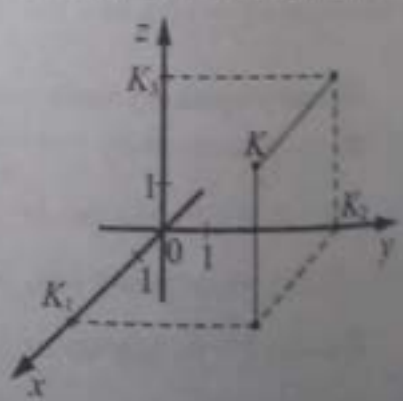


Рис. 15

У прямокутній системі координат кожній точці K простору відповідає трійка чисел $(x; y; z)$, які називають *координатами точки*.

Узагалі, координати точки $K(x; y; z)$ — це координати проекцій даної точки на координатні осі.

На рис. 16 задано точку $A(2; 4; 4)$. Якщо точка лежить у координатній площині або на координатній осі, то деякі її координати дорівнюють нулю. Якщо точка лежить у площині xy, то $z = 0$, якщо в площині xz, то $x = 0$, якщо в площині xz, то $y = 0$; якщо точка лежить на осі x, то $y = 0$ і $z = 0$, якщо на осі y, то $x = 0$ і $z = 0$, якщо на осі z, то $x = 0$ і $y = 0$. Наприклад, на рис. 16 позначено точки $B(5; 5; 0)$, $C(0; -3; 3)$, $D(-2; 0; 5)$, $E(0; 6; 0)$.

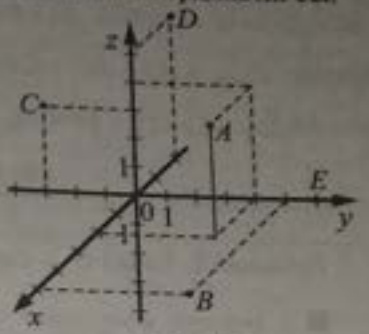


Рис. 16

Рівняння площини. Площину в декартовій системі координат можна задати *загальним рівнянням площини* $ax + by + cz + d = 0$.

Рівняння прямої. Оскільки пряма у просторі є лінією перетину двох площин, то її *рівняння* можна записати так: $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0; \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases}$ Цю систему рівнянь задовольняють координати будь-якої точки заданої прямої, і навпаки, будь-який розв'язок системи $(x; y; z)$ — це координати точки, яка лежить на даній прямій.

Нехай задано точки $M(x_1; y_1; z_1)$ і $N(x_2; y_2; z_2)$, де $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$. Тоді *рівняння прямої* MN, яка не паралельна жодній з координатних осей, можна записати так: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Нехай задано точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. Тоді координати середини відрізка AB:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Відстань d між точками A та B обчислюють за формулою $d = AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.

Відстань від точки $M(x; y; z)$ до координатних площин xy, xz, yz відповідно дорівнює $|z|$, $|y|$, $|x|$. Відстань від точки $M(x; y; z)$ до початку координат — точки $O(0; 0; 0)$ — дорівнює $MO = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Теорема Піфагора (у просторі). Квадрат довжини будь-якого відрізка дорівнює сумі квадратів довжин його проекцій на взаємно перпендикулярні прямі.

На рис. 17 $AB^2 = A_xB_x^2 + A_yB_y^2 + A_zB_z^2$, де A_xB_x — проекція відрізка на вісь абсцис, A_yB_y — проекція відрізка на вісь ординат, A_zB_z — проекція відрізка на вісь аплікат.

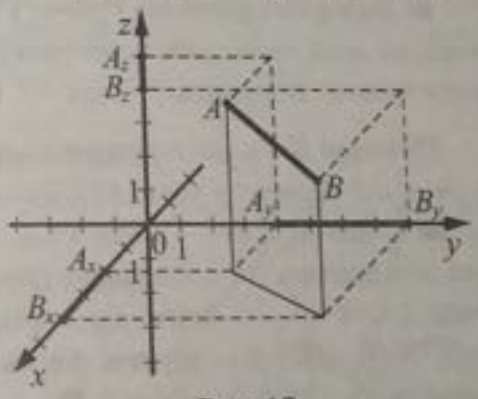


Рис. 17

Приклад 1. Знайти довжину відрізка DK, якщо $D(9; 1)$, $K(5; -2)$.

■ Скориставшись формулою $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, маємо:

$DK = \sqrt{(9-5)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$. *Відповідь.* 5. ■

Приклад 2. На осі ординат знайти точку, рівновіддалену від точок $A(1; 2)$ і $B(2; 3)$.

■ Нехай точка $C(0; y)$ — шукана точка. За формулою $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ маємо: $AC^2 = (0-1)^2 + (y-2)^2$; $BC^2 = (0-2)^2 + (y-3)^2$. Оскільки $AC = BC$, то: $1 + y^2 - 4y + 4 = 4 + y^2 - 6y + 9$; $2y = 8$; $y = 4$. Отже, точка $C(0; 4)$ рівновіддалена від точок A та B і лежить на осі y. *Відповідь.* $(0; 4)$. ■

Приклад 3. Знайти периметр і площу трикутника з вершинами $A(-3; 1)$, $B(-1; 3)$ і $C(1; 1)$.

■ За формулою $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ знайдемо довжини сторін трикутника: $AB = \sqrt{(-3+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$; $BC = \sqrt{(-1-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$; $CA = \sqrt{(-3-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16} = 4$. Маємо: $P_{\Delta ABC} = AB + BC + CA$; $P_{\Delta ABC} = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 4 = 4\sqrt{2} + 4$. Для сторін трикутника ABC маємо: $4^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$; $16 = 16$, тобто виконується рівність: $CA^2 = AB^2 + BC^2$. Отже, ΔABC прямокутний з гіпотенузою CA. $S_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 4$. *Відповідь.* $\left(4\sqrt{2} + 4\right)$; 4. ■

Приклад 4. Точка O — середина відрізка AB. Знайти координати точки A, якщо $O(5; -5)$, $B(7; -12)$.

■ З формул координат середини відрізка $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$; маємо: $5 = \frac{x_1 + 7}{2}$; $-5 = \frac{y_1 - 12}{2}$; $x_1 = 3$; $y_1 = 2$. $A(3; 2)$ — шукана точка. *Відповідь.* (3; 2). ■

Приклад 5. Вершини чотирикутника $KDCM$ мають координати $K(1; 1)$, $D(3; 3)$, $C(8; 3)$, $M(6; 1)$. Довести, що $KDCM$ — паралелограм.

■ За ознакою паралелограма, чотирикутник, діагоналі якого діляться навпіл, — паралелограм. Знайдемо координати середин діагоналей KC і DM чотирикутника $KDCM$ за формулами $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$. Координати середини сторони KC: $x = \frac{1+8}{2} = 4{,}5$; $y = \frac{1+3}{2} = 2$; координати середини сторони DM: $x = \frac{3+6}{2} = 4{,}5$; $y = \frac{3+1}{2} = 2$. Отже, діагоналі мають спільну середину — точку (4,5; 2). Тому чотирикутник $KDCM$ — паралелограм. ■

Приклад 6. Визначити центр і радіус кола, заданого рівнянням $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 26 = 0$.

■ Запишемо рівняння у вигляді $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$: $x^2 - 6x + y^2 - 2y - 26 = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) - 36 = 0$; $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 6^2$. (3; 1) — центр кола, $R = 6$ — радіус кола. *В-дь.* (3; 1); 6. ■

Приклад 7. Скласти рівняння прямої, паралельної до прямої $5x + y - 1 = 0$, яка проходить через точку $A(1; 2)$.

■ Запишемо рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$: $y = -5x + 1$. Тоді $y = -5x + m$ — шукана пряма. Оскільки вона проходить через точку $A(1; 2)$, то: $2 = -5 \cdot 1 + m$, $m = 7$. Отже, $y = -5x + 7$ — шукане рівняння прямої. Відповідь. $y = -5x + 7$. ■

Приклад 8. Скласти рівняння кола з центром на прямій $x = 3$, що дотикається до осі ординат у точці $K(0; 2)$.

■ Точка $N(a; b)$ — центр кола. Оскільки вона лежить на прямій $x = 3$ і коло дотикається до осі ординат (рис. 18), то $a = 3$; $b = 2$. За властивістю дотичної, $R = 3$. Формула рівняння кола $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$ — шукане рівняння кола. *Відповідь.* $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 9$. ■

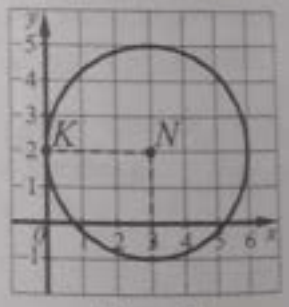


Рис. 18

Приклад 9. Відстань між населеними пунктами A та B, розміщеними з одного боку від залізничної колії, становить 13 км, а від них до колії — відповідно 6 км і 11 км. Де слід побудувати залізничну станцію, щоб вона була однаково віддалена від пунктів A та B? Знайти відстань від станції до пункту A. Результат округлити до цілих.

■ Уведемо систему координат так, щоб вісь x збігалася із залізничною колією, а пункт A розмістився на осі y (рис. 19). Тоді $OA = 6$ км, $BK = 11$ км. $A(0; 6)$, $B(m; 11)$. $AB = 13$ км. Оскільки $AB = 13$, то за формулою відстані між точками на координатній площині одержимо: $(m-0)^2 + (11-6)^2 = 13^2$; $m^2 = 169 - 25$; $m^2 = 144$; $m = \pm 12$. $m = -12$ не підходить. Отже, $B(12; 11)$. Знайдемо точку $M(x; 0)$, рівновіддалену від точок $A(0; 6)$ і $B(12; 11)$. $AM^2 = (0-x)^2 + (6-0)^2 = x^2 + 36$.

$AM^2 = (12-x)^2 + (11-0)^2 = 144 - 24x + x^2 + 121$. З рівності $AM^2 = BM^2$ одержимо: $x^2 + 36 = 144 - 24x + x^2 + 121$; $24x = 229$; $x = \frac{229}{24} = 9\frac{13}{24}$ (км). Отже, $M(9\frac{13}{24}; 0)$ — точка, у якій має розміститися залізнична станція. Тоді $AM = \sqrt{\left(\frac{229}{24}\right)^2 + 36} \approx 11$ (км).

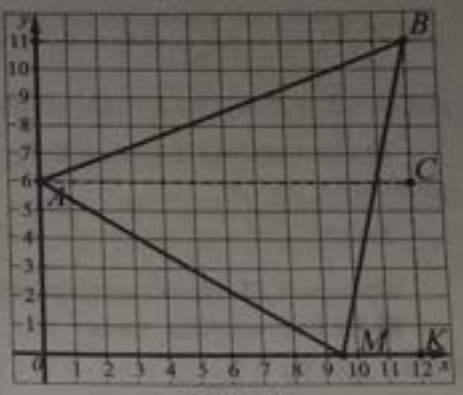


Рис. 19

Відповідь. 11 км. ■

Приклад 10. Довести, що трикутник з вершинами $A(2; 0; 5)$, $B(3; 4; 0)$ і $C(2; 4; 0)$ прямокутний. Знайти координати центра кола, описаного навколо трикутника ABC. У відповідь записати суму координат центра.

■ $AB^2 = (3-2)^2 + (4-0)^2 + (0-5)^2 = 42$; $BC^2 = (3-2)^2 + (4-4)^2 + (0-0)^2 = 1$; $CA^2 = (2-2)^2 + (4-0)^2 + (0-5)^2 = 41$. $42 = 41 + 1$. Отже, за теоремою, оберненою до теореми Піфагора, трикутник ABC прямокутний з гіпотенузою AB. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою гіпотенузи. Її координати: $x = \frac{2+3}{2} = 2{,}5$; $y = \frac{0+4}{2} = 2$; $z = \frac{0+5}{2} = 2{,}5$. Отже, точка $(2{,}5; 2; 2{,}5)$ — центр кола. Тоді $2{,}5 + 2 + 2{,}5 = 7$. *Відповідь.* 7. ■

Приклад 11. Знайти точки перетину сфери, заданої рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - x = 20$, з віссю x.

■ Якщо сфера перетинає вісь x, то координати точок перетину мають вигляд $(x; 0; 0)$. Маємо: $x^2 + 0^2 + 0^2 - x = 20$; $x^2 - x - 20 = 0$; $x_1 = -4$, $x_2 = 5$. Отже, $(-4; 0; 0)$ і $(5; 0; 0)$ — точки перетину.

Відповідь. $(-4; 0; 0)$ і $(5; 0; 0)$. ■

Приклад 12. Скласти рівняння площини, яка проходить через точки $M(3; 4; -1)$, $N(-2; 0; 3)$ і $K(0; 0; -1)$.

■ Площина у просторі задається рівнянням $ax + by + cz + d = 0$. Оскільки площина проходить через точки M, N і K, то їх координати задовольняють рівняння площини. Тому $\begin{cases} 3a + 4b - c + d = 0; \\ -2a + 3c + d = 0; \\ -c + d = 0. \end{cases}$

З третього рівняння маємо, що $c = d$. Тоді $-2a + 3c + d = 0$; $2a = 4d$; $a = 2d$; $3a + 4b - c + d = 0$; $3 \cdot 2d + 4b - d + d = 0$; $6d + 4b = 0$; $b = -1{,}5d$. Отже, маємо: $2dx - 1{,}5dy + dz + d = 0$; $2x - 1{,}5y + z + 1 = 0$; $4x - 3y + 2z + 2 = 0$.

Відповідь. $4x - 3y + 2z + 2 = 0$. ■

Приклад 13. Дано точку $C(2; 3; -4)$ (рис. 20). Провести перпендикуляри до: 1) координатних осей; 2) координатних площин. Знайти координати основ цих перпендикулярів.

■ 1) На рис. 20 CC_x, CC_y і CC_z — перпендикуляри, проведені до координатних осей x, y і z відповідно. Тоді $C_x(2; 0; 0)$, $C_y(0; 3; 0)$, $C_z(0; 0; -4)$ — основи цих перпендикулярів;

2) CC_{xy}, CC_{yz} і CC_{xz} — перпендикуляри, проведені до координатних площин xy, yz і xz відповідно. Тоді $C_{xy}(2; 3; 0)$, $C_{yz}(0; 3; -4)$, $C_{xz}(2; 0; -4)$ — основи цих перпендикулярів. ■

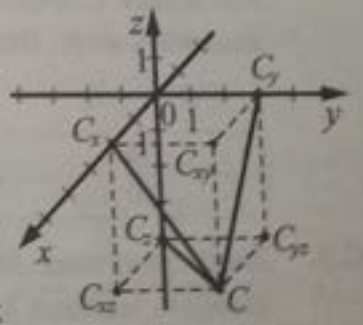


Рис. 20

Приклад 14. Знайти відстані від точки $A(1; 3; -2)$ до: 1) координатних осей; 2) координатних площин; 3) початку координат.

■ 1) На рис. 21 $AA_{xy} \perp (xy)$, AA_x — похила, A_xA_{xy} — проекція похилої. За теоремою про три перпендикуляри $AA_x \perp Ox$, тому AA_x — відстань від точки A до осі x. $AA_{xy} = |-2| = 2$, $A_xA_{xy} = 3$. У прямокутному трикутнику $AA_{xy}A_x$ $(\angle A_{xy} = 90^\circ)$ за теоремою Піфагора $AA_x^2 = A_xA_{xy}^2 + AA_{xy}^2$, звідки одержимо:

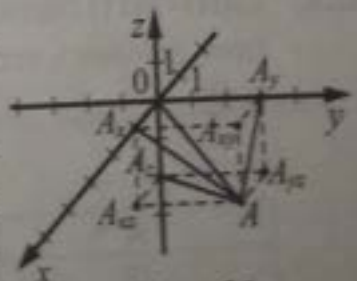


Рис. 21

$AA_1 = \sqrt{A_1A_0^2 + AA_0^2}$; $AA_1 = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$. Аналогічно в трикутнику AA_2A_0 $AA_2 = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$; у трикутнику AA_3A_0 $AA_3 = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$;

2) відстань від точки $A(1; 3; -2)$ до площини xy дорівнює $|z| = 2$, до площини yz — $|x| = 1$, до площини xz — $|y| = 3$;

3) $OA = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{1^2+3^2+(-2)^2} = \sqrt{14}$. *Відповідь.* **1)** $\sqrt{13}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; **2)** 2; 1; 3; **3)** $\sqrt{14}$. ■

Приклад 15. На осі аплікат знайти точку A, рівновіддалену від точок $M(-2; 3; 5)$ і $N(3; -5; 1)$.

■ Нехай шукана точка має координати $A(0; 0; z)$. За умовою, $AM = AN$, звідки $AM^2 = AN^2$. $4 + 9 + (z-5)^2 = 9 + 25 + (z-1)^2$; $13 + (z-5)^2 = 34 + (z-1)^2$; $8z = 3$; $z = 3/8$. Отже, $A(0; 0; 3/8)$.

Відповідь. $(0; 0; 3/8)$. ■

Приклад 16. Скласти рівняння сфери з центром у точці $(-1; 5; 3)$, яка дотикається до площини: **а)** xy; **б)** yz.

■ **а)** Сфера задається рівнянням $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$, де a, b і c — координати центра сфери, R — радіус. **а)** Оскільки сфера дотикається до площини xy, то $R = z = 3$. Отже, рівняння сфери: $(x+1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 9$; **б)** $R = |x| = 1$. Отже, рівняння сфери: $(x+1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 1$.

Відповідь. **а)** $(x+1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 9$; **б)** $(x+1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 1$. ■

Приклад 17. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(3; 5; 7)$ паралельно до площини xy.

■ Оскільки шукана площина паралельна до площини xy, то для всіх її точок координата z однакова. Точка $M(3; 5; 7)$ належить цій площині й $z = 7$. Тому рівняння шуканої площини $z = 7$.

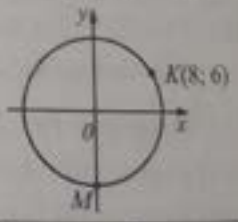
Відповідь. $z = 7$. ■

Завдання 42.1–42.21 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

42.1. Точки $A(2; -4; -8)$ і $B(10; -20; 6)$ симетричні відносно точки C. Знайти координати точки C.

А	Б	В	Г	Д
$(-10; 20; -6)$	$(3; -4; -0{,}5)$	$(12; -24; -1)$	$(6; -12; -1)$	$(-2; 4; -8)$

42.2. **(ЗНО–2013)** На координатній площині xy зображено коло, центр якого збігається з початком координат (див. рисунок). Точки $K(8; 6)$ і $M(x; y)$ належать колу. Визначити координати точки M.

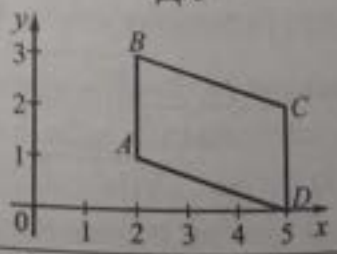


А	Б	В	Г	Д
$(-10; 0)$	$(10; 0)$	$(0; -14)$	$(0; -10)$	$(0; 10)$

42.3. Дано трикутник ABC, вершини якого мають координати $A(-2; 6)$, $B(-2; -2)$ і $C(4; -2)$. Знайти довжину медіани BM.

А 2 Б 3 В 4 Г 5 Д 6

42.4. **(ЗНО–2011)** Обчислити площу чотирикутника $ABCD$ (див. рисунок), сторони AB і CD якого паралельні вісі Oy.



А	Б	В	Г	Д
10	5	3	6	7

42.5. Знайти координати точки, яка симетрична точці $A(1; 2; 3)$ відносно площини xy.

А $(-1; -2; -3)$ **Б** $(-1; -2; 3)$ **В** $(1; -2; 3)$ **Г** $(-1; 2; 3)$ **Д** $(1; 2; -3)$

42.6. Знайти координати точки, яка симетрична точці $M(10; 20; 30)$ відносно осі аплікат.

А $(-10; -20; 30)$ **Б** $(10; 20; 30)$ **В** $(10; 20; 0)$ **Г** $(-10; -20; -30)$ **Д** $(10; 20; -30)$

42.7. При паралельному перенесенні точка $A(1; 2; 6)$ переходить у точку $A_1(6; 7; 0)$. Указати координати точки, у яку при цьому переходить точка $B(7; 9; 1)$.

А $(21; 31{,}5; 0)$ **Б** $(2; 4; 7)$ **В** $(12; 14; -5)$ **Г** $(12; 14; 7)$ **Д** $(-12; -14; 5)$

42.8. Знайти відстань від точки $M(5; 4; 12)$ до осі ординат.

А 5 **Б** 4 **В** 12 **Г** 13 **Д** 21

42.9. Знайти відстань від точки $P(3; -6; 8)$ до площини yz.

А 3 **Б** 4 **В** 6 **Г** 8 **Д** 10

42.10. Скласти рівняння сфери, яка проходить через початок координат із центром у точці $S(-1; 2; -3)$.

А	Б	В	Г	Д
$(x-1)^2+(y+2)^2+$ $+(z-3)^2=14$	$(x+1)^2+(y-2)^2+$ $+(z+3)^2=2$	$(x+1)^2+(y-2)^2+$ $+(z+3)^2=14$	$(x-1)^2+(y+2)^2+$ $+(z-3)^2=2$	$(x+1)^2+(y-2)^2+$ $+(z+3)^2=10$

42.11. Указати рівняння кола, яке на площині xy симетричне до кола $(x-4)^2+(y+5)^2=9$ відносно осі y.

А	Б	В	Г	Д
$(x+5)^2+(y-4)^2=9$	$(x-5)^2+(y+4)^2=9$	$(x+4)^2+(y-5)^2=9$	$(x-4)^2+(y-5)^2=9$	$(x+4)^2+(y+5)^2=9$

42.12. Скласти рівняння кола з центром у точці $C(5; -2)$, яка дотикається до осі ординат.

А	Б	В	Г	Д
$(x+5)^2+(y+2)^2=25$	$(x+5)^2+(y-2)^2=4$	$(x-5)^2+(y+2)^2=4$	$(x-5)^2+(y+2)^2=5$	$(x-5)^2+(y+2)^2=25$

42.13. Скласти рівняння сфери з центром у точці $A(-1; 3; 2)$, яка дотикається до площини xy.

А	Б	В	Г	Д
$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=10$	$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=4$	$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=13$	$(x+1)^2+(y-3)^2+$ $+(z-2)^2=2$	$(x-1)^2+(y+3)^2+$ $+(z+2)^2=2$

42.14. Знайти координати центра кола $x^2-4x+y^2+10y+20=0$.

А $(2; 5)$ **Б** $(-2; 5)$ **В** $(-2; -5)$ **Г** $(2; -5)$ **Д** $(4; -10)$

42.15. Знайти радіус сфери $x^2+y^2-2y+z^2+6z-6=0$.

А 2 **Б** 3 **В** 4 **Г** 5 **Д** 6

42.16. Дано $ABCD$ — паралелограм. $A(-4; 1; 5)$, $B(-5; 4; 2)$, $C(3; -2; -1)$. Знайти координати вершини D.

А $(12; 7; -8)$ **Б** $(6; -3; -6)$ **В** $(-6; 3; 6)$ **Г** $(-12; 7; 8)$ **Д** $(4; -5; 2)$

42.17. Дано $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. $A(7; 0; 0)$, $B(5; 0; 0)$, $C_1(5; 2; 2)$. Знайти координати вершини D_1.

А $(7; 5; 2)$ **Б** $(5; 2; 0)$ **В** $(2; 2; 2)$ **Г** $(7; 2; 2)$ **Д** $(7; 0; 2)$

42.18. Дано трикутник ABC з вершинами $A(2; 2; -4)$, $B(2; -1; -1)$, $C(3; -1; -2)$. Знайти зовнішній кут при вершині B.

А 60° **Б** 90° **В** 120° **Г** 135° **Д** 45°

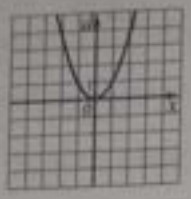
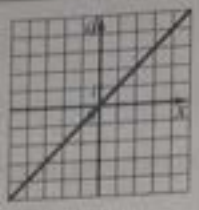
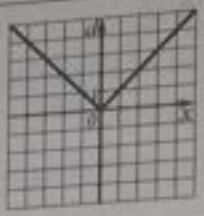
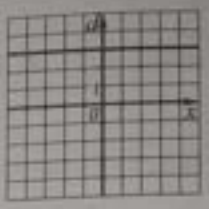
42.19. Точки $A(2; 4)$ і $C(5; 8)$ є вершинами квадрата $ABCD$. Знайти площу цього квадрата.

А 2,5 Б 5 В 12,5 Г 25 Д 20

42.20. Точки $A(-1; 0; 2)$ і $B(0; 1; 1)$ є вершинами правильного трикутника. Знайти площу трикутника.

А $\frac{3}{4}$ Б $3\sqrt{3}$ В $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ Г 3 Д 9

42.21. $d(x)$ — відстань від точки $M(x; 0; 0)$ до площини yz. Який з наведених графіків є графіком функції $d = d(x)$?

А	Б	В	Г	Д
				

Завдання 42.22–42.24 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

42.22. При паралельному перенесенні точка $A(1; 3; 2)$ переходить у точку $A'(3; 0; 1)$. Установити відповідність між точками (1–3) та точками (А–Д), утвореними при цьому паралельному перенесенні.

1 $M_1(1; 3; 0)$
2 $M_2(6; 8; -1)$
3 $M_3(0; 1; -2)$

А $M'(2; -2; -3)$
Б $M'(8; 5; -2)$
В $M'(3; 0; -1)$
Г $M'(2; -3; -1)$
Д $M'(1; -1; 2)$

42.23. Установити відповідність між центрами і радіусами сфер (1–3) та їх рівняннями (А–Д).

1 $C_1(1; 2; 0); 4$
2 $C_2(3; 0; -1); 3$
3 $C_3(0; 4; 1); 5$

А $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 1 = 0$
Б $x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 2z - 8 = 0$
В $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 2 = 0$
Г $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 11 = 0$
Д $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z - 86 = 0$

42.24. Установити відповідність між парами точок (1–3), та відстанями між цими точками (А–Д).

1 $M_1(1; 3; 4), N_1(2; 1; 2)$
2 $M_2(3; 5; 1), N_2(0; 1; 1)$
3 $M_3(-2; 3; 4), N_3(6; 3; -2)$

А 3
Б 13
В 5
Г 7
Д 10

Розв'яжіть завдання 42.25–42.32. Відповідь запишіть десятковим дробом.

42.25. На осі ординат знайти ординату точки, рівновіддаленої від точки $A(-4; 2)$ і початку координат.

42.26. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-2; 5)$ й утворює з додатним напрямом осі абсцис кут 45°. У відповідь записати абсцису точки перетину прямої з віссю абсцис.

42.27. Знайти: **1)** площу трикутника; **2)** периметр трикутника, обмеженого осями координат і прямою $4x + 3y = 24$.

42.28. Знайти квадрат довжини медіани AA_1 трикутника ABC, якщо $A(3; -2; 1)$, $B(3; 1; 5)$ і $C(4; 0; 3)$.

12.29. Знайти: 1) радіус R сфери; 2) площу S сфери, заданої рівнянням $x^2+y^2+z^2-2x+2y-2=0$.

У відповідь записати 1) R; 2) $\frac{S}{\pi}$.

12.30. Скласти рівняння кола з центром на осі ординат, яке проходить через точки $A(-3;\,0)$, $B(0;\,9)$. У відповідь записати довжину радіуса кола.

12.31. Точка $M(2;\,6;\,3)$ — середина відрізка, кінці якого лежать на осі x і на площині yz. Знайти довжину відрізка.

12.32. На ділянці, яка обмежена з двох боків взаємно перпендикулярними дорогами, посадили сад. Відстань від яблуні до першої дороги становить 3 м, а до другої — 4 м. Відстань від груші до першої дороги дорівнює 6 м, а до другої — 8 м. Знайти відстань (у м) між цими деревами.

Тема 43. Вектори на площині та в просторі

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— вектор, нульовий вектор, модуль вектора, колінеарні і протилежні вектори, рівні вектори, координати вектора;
— додавання і віднімання векторів, множення вектора на число;
— скалярний добуток векторів, кут між векторами;
— розклад вектора за двома неколінеарними векторами;
— властивості скалярного добутку векторів, знаходження кута між векторами, що задані координатами;
— умови колінеарності та перпендикулярності векторів;
— використання аналогії між векторами й координатами на площині та в просторі для розв'язування стереометричних задач і задач практичного змісту.

ВЕКТОРИ НА ПЛОЩИНІ

Вектор. *Вектором* називають напрямлений відрізок, тобто відрізок, для якого вказано його початок і його кінець.

На рис. 1 зображено вектор $\overrightarrow{AB}$, A — початок вектора, B — кінець вектора. Позначають $\overrightarrow{AB}$ або $\overline{AB}$. Стрілка або риска над назвою вектора заміняють слово *вектор*. Вектори позначають також малими латинськими буквами: $\vec{a}$ або $\bar{a}$ (рис. 2). При позначенні вектора двома буквами на першому місці ставлять його початок. Щоб задати вектор, достатньо вказати його початок і кінець.

Координати вектора. *Координатами вектора* з початком $A(x_1; y_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2)$ називають числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ (рис. 3). Отже, координати вектора дорівнюють різниці відповідних координат його кінця і початку. Записують: $\overrightarrow{AB}(a_1; a_2)$, або $\vec{a}(a_1; a_2)$, або $\overline{(a_1; a_2)}$.

Довжина вектора. *Довжиною* (модулем) вектора називають довжину відрізка, що зображає цей вектор. На рис. 1 довжина вектора AB дорівнює 3 см. Записують $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$ см.

Довжину вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ обчислюють за формулою $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Довжина і напрям вектора не залежать від розміщення його початку в системі координат.



Рис. 1

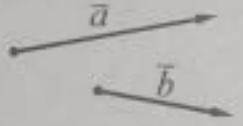


Рис. 2

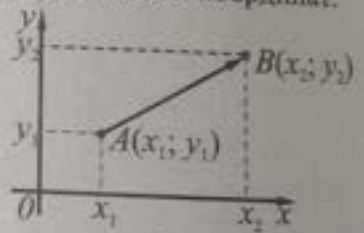


Рис. 3

Нуль-вектором (нульовим вектором) називають вектор, початок і кінець якого збігаються. Позначають: $\vec{0}$ або $\bar{0}$. Довжина нуль-вектора дорівнює нулю: $\left|\vec{0}\right| = 0$. Будь-яку точку X площини можна вважати нульовим вектором $\overrightarrow{XX}$.

Одиничним вектором називають вектор, довжина якого дорівнює 1. Позначають $\vec{e}$. За означенням, $\left|\vec{e}\right| = 1$.

Колінеарність векторів

Ненульові вектори називають *колінеарними*, якщо вони паралельні до однієї прямої.

На рис. 4 $a \| b$, вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{MK}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{MK}$ — колінеарні. Нульовий вектор вважають колінеарним будь-якому вектору.

Вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ називають *однаково напрямленими* (*співнапрямленими*), якщо промені AB і CD однаково напрямлені. На рис. 5 вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ однаково напрямлені. Позначають: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{KF}$ називають *протилежно напрямленими*, якщо промені $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{KF}$ протилежно напрямлені. На рис. 6 вектори MN і KF протилежно напрямлені. Позначають: $\overrightarrow{MN} \uparrow\downarrow \overrightarrow{KF}$.

Вектори називають *протилежними*, якщо вони мають рівні довжини (модулі) і протилежно напрямлені. На рис. 7 вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$ — протилежні: $\vec{m} = -\vec{n}$, тому що $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{n}$ і $|\vec{m}| = |\vec{n}|$.

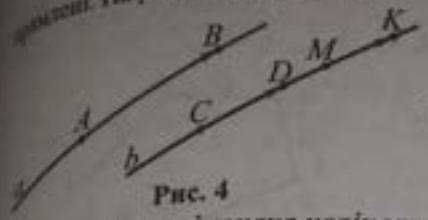


Рис. 4

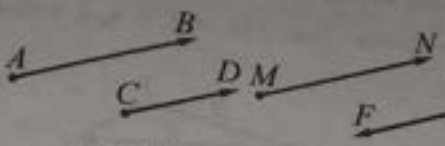


Рис. 5

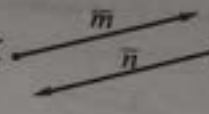


Рис. 6

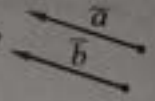


Рис. 7

Рис. 8

Властивість і ознака колінеарних векторів. Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ колінеарні, то $\vec{a} = k\vec{b}$, і навпаки, якщо $\vec{a} = k\vec{b}$, то вектори колінеарні. Вектори *протилежно напрямлені*, якщо $k < 0$, і *однаково напрямлені*, якщо $k > 0$.

Рівність векторів. Вектори називають *рівними*, якщо вони співнапрямлені та мають однакові довжини (модулі).

На рис. 8 вектори a і b рівні $\vec{a} = \vec{b}$, тому що $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ і $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Можна сказати й так: два вектори будуть рівними, якщо рівними є їхні відповідні координати: $\vec{a}(a_1; a_2) = \vec{b}(b_1; b_2)$, якщо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$.

Сума векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$. Якщо від довільної точки A відкласти вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, потім від точки B — вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ і сполучити початок вектора $\overrightarrow{AB}$ з кінцем вектора $\overrightarrow{BC}$, то одержимо вектор $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, який називають *сумою* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 9). Записують: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Щоб додати вектори, можна додати їх відповідні координати.

Наприклад, сумою векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ є вектор $\vec{c}(c_1; c_2)$ з координатами $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$. Отже, $\overrightarrow{(a_1; a_2)} + \overrightarrow{(b_1; b_2)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1; a_2 + b_2)}$.

Для будь-яких векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$; $\vec{b}(b_1; b_2)$ і $\vec{c}(c_1; c_2)$ виконуються властивості:

1) переставна: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

2) сполучна: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;

3) додавання нульового вектора: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) додавання протилежних векторів: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Для будь-яких точок A, B і C справджується векторна рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 9).

Побудувати вектор-суму неколінеарних векторів (або додати вектори) можна за:

1) *правилом трикутника*. Якщо будувати суму двох неколінеарних ненульових векторів, виходячи з означення, то утвориться трикутник (рис. 10). Цей спосіб знаходження суми двох векторів називають *додаванням векторів за правилом трикутника*: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Побудова суми векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у випадку, коли вони колінеарні, показано на рис. 11;

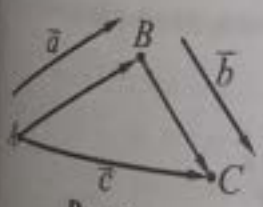


Рис. 9

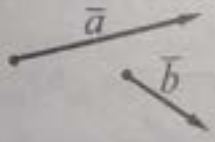


Рис. 10 а)

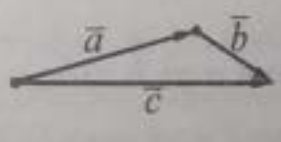


Рис. 10 б)

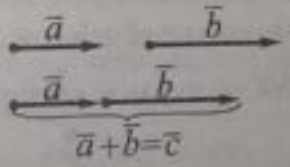


Рис. 11 а)

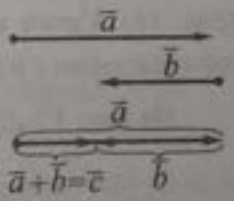


Рис. 11 б)

2) *правилом паралелограма*. Щоб додати вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 12 а) за правилом паралелограма, потрібно від довільної точки A відкласти вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, потім побудувати на цих векторах

як на сторонах паралелограм $ABCD$. Діагональ цього паралелограма, що виходить з точки, яка є початком векторів, — вектор $\overrightarrow{AC}$ — є сумою $\vec{c}$ векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ (рис. 12 б);

3) правилом многокутника. Щоб додати кілька векторів за правилом многокутника, потрібно вектори-доданки відкладати так, щоб початок другого вектора збігався з кінцем першого, початок третього — з кінцем другого і т. д. Тоді вектор, початок якого є початком першого вектора, а кінець — кінцем останнього, буде *вектором-сумою* (рис. 13): $\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + \ldots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}$.



Рис. 12 а)

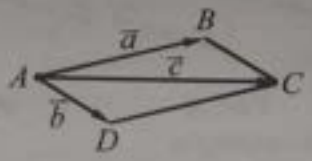


Рис. 12 б)

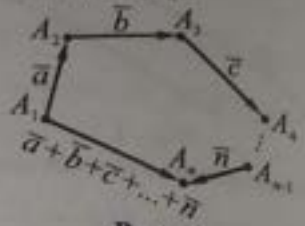


Рис. 13

Різниця векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$

Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають такий вектор $\vec{c}$ ($\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$), який у сумі з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$, тобто $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Щоб побудувати вектор-різницю, або відняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 14 а), потрібно: відкласти вектори від однієї точки (рис. 14 б). Вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець — з кінцем вектора $\vec{a}$, буде різницею $\vec{a} - \vec{b}$.

Добуток вектора на число. *Добутком* ненульового вектора $\vec{a}$ на число $k \neq 0$ називають вектор $\vec{b}$, довжина якого дорівнює добутку довжини вектора $\vec{a}$ на модуль числа k. Напрям вектора $\vec{b}$ збігається з напрямом вектора $\vec{a}$, коли $k > 0$, і протилежний до напряму вектору $\vec{a}$, коли $k < 0$ (рис. 15). Записують: $\vec{b} = k\vec{a}$.

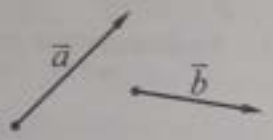


Рис. 14 а)

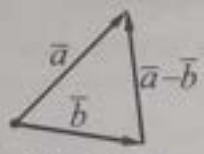


Рис. 14 б)

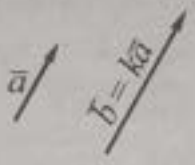


Рис. 15 а)

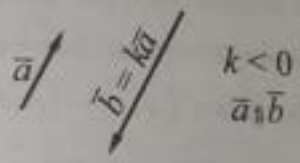


Рис. 15 б)

Щоб помножити вектор на число, можна помножити його координати на це число.

Наприклад, добутком вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ на число k буде вектор $\vec{b}(b_1; b_2)$ з координатами $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$. Отже, $\vec{b} = k\overrightarrow{(a_1; a_2)} = \overrightarrow{(ka_1; ka_2)}$.

Множення вектора на число має такі властивості:

1. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

2. $-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

3. $k \cdot \vec{0} = 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

4. Переставний закон: $k \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot k$.

5. Сполучний закон: $k \cdot (m \cdot \vec{a}) = (km) \cdot \vec{a}$.

6. Розподільний закон: $k \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{a} = (k + m) \cdot \vec{a}$; $k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b} = k(\vec{a} + \vec{b})$.

Кут між векторами. *Кутом* між ненульовими векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ називають кут BAC (рис. 16). Кутом між довільними векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ називають кут між векторами, що дорівнюють даним векторам і мають спільний початок.

На рис. 17 $\angle MNK$ — кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$. Позначають $\angle(\vec{a}, \vec{b})$.

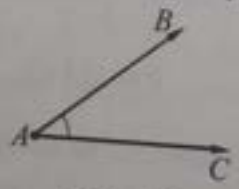


Рис. 16

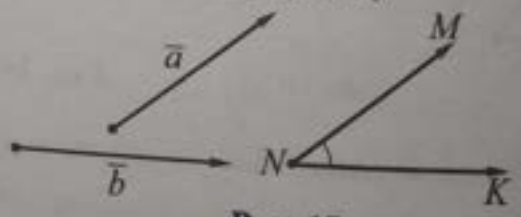


Рис. 17

1. Якщо $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Якщо $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180°$.

2. Якщо $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90°$, то вектори називають *перпендикулярними* (пишуть $\vec{a} \perp \vec{b}$).

Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$. *Скалярним добутком* двох ненульових векторів називають число, що дорівнює добутку їх довжин та косинуса кута між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{ab})$.

Звідси $\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ дорівнює сумі добутків відповідних координат цих векторів: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Скалярний добуток векторів має такі властивості:

1. Переставну: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. Сполучну: $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ (відносно скалярного множника).

3. Розподільну: $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Скалярним квадратом вектора $\vec{a}$ називають скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ і позначають $\vec{a}^2$:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2.$$

Косинус кута між ненульовими векторами: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

Властивість і ознака перпендикулярних ненульових векторів. Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ і навпаки.

Координатні вектори. Одиничні вектори, які мають напрями додатних координатних півосей прямокутної системи координат, називають координатними векторами (або ортами) (рис. 18). Позначають $\vec{e_1}(1; 0)$ на осі Ox та $\vec{e_2}(0; 1)$ на осі Oy.

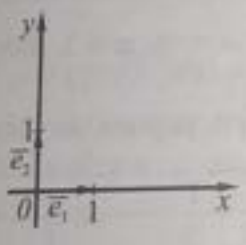


Рис. 18

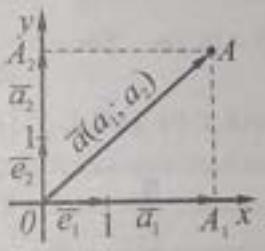


Рис. 19

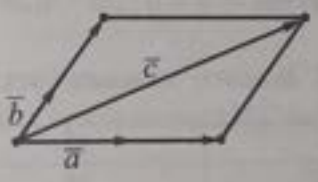


Рис. 20

Розклад вектора за двома координатними векторами

Рівність $\vec{a} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$ називають розкладом вектора $\vec{a}$ за двома координатними векторами $\vec{e_1}$ та $\vec{e_2}$, а числа a_1 і a_2 — коефіцієнтами розкладу (рис. 19).

Коефіцієнти розкладу даного вектора за координатними векторами називають координатами вектора в певній системі координат. Наприклад, якщо $\overrightarrow{AB} = 7\vec{e_1} + 9\vec{e_2}$, то $\overrightarrow{AB}(7; 9)$.

Увага! *Якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — неколінеарні вектори, то для будь-якого вектора $\vec{c}$ існує розклад $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$, де m і n — деякі числа, до того ж такий розклад єдиний (рис. 20).*

Указану властивість використовують під час розв'язування задач, у яких доцільно вибрати на площині неколінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ та визначити через них інші вектори, що розглядаються.

Координати вектора. $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$; $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Модуль (довжина) вектора $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

Колінеарність векторів Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ колінеарні, то $\vec{a} = k\vec{b}$.

Рівність векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3) = \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, якщо $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$.

Сума векторів. Сумою векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ є вектор $\vec{c}(c_1; c_2; c_3)$, такий що $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, $c_3 = a_3 + b_3$, тобто $\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} + \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)}$.

Різниця векторів $\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} - \overrightarrow{(b_1; b_2; b_3)} = \overrightarrow{(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)}$.

Множення вектора на число $\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)} \cdot \lambda = \overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)}$.

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ ***і*** $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$**:**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, де φ — кут між векторами.

Множення вектора на число й скалярний добуток мають такі самі властивості, як і на площині.

Косинус кута між ненульовими векторами $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

Властивість і ознака перпендикулярних ненульових векторів. Якщо $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, і навпаки, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Приклад 1. За якого значення m вектори $\vec{a}(2; -4)$ і $\vec{b}(m; 2m - 1{,}5)$ будуть перпендикулярними?

А	Б	В	Г	Д
1	–1	2	1,5	–6

■ $\vec{a} \perp \vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. $2m - 4(2m - 1{,}5) = 0$; $2m - 8m + 6 = 0$; $-6m = -6$; $m = 1$. *Відповідь.* **А.** ■

Приклад 2. За якого значення t вектори $\vec{a}(8; t; 6)$ і $\vec{d}(4; 2; 3)$ будуть перпендикулярними?

А	Б	В	Г	Д
–23	25	–5	5	–25

■ Ненульові вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ будуть перпендикулярними лише тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто коли $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ або $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. Для векторів $\vec{a}(8; t; 6)$ і $\vec{d}(4; 2; 3)$ отримаємо: $8 \cdot 4 + t \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 0$; $2t + 50 = 0$; $t = -25$. *Відповідь.* **Д.** ■

Приклад 3. Знайти координати вектора $\overrightarrow{CD}$ і вектора, йому протилежного, якщо: **а)** $C(3; -2)$, $D(-2; 5)$; **б)** $C(-5; 7)$, $D(4; -6)$.

■ **а)** $a_1 = -2 - 3 = -5$, $a_2 = 5 - (-2) = 7$. Отже, $\overrightarrow{CD} = (-5; 7)$ $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{CD} = (5; -7)$;

б) $a_1 = 4 - (-5) = 9$, $a_2 = -6 - 7 = -13$. Отже, $\overrightarrow{CD} = (9; -13)$; $\overrightarrow{DC} = (-9; 13)$.

Відповідь. **а)** $(-5; 7)$, $(5; -7)$; **б)** $(9; -13)$, $(-9; 13)$. ■

Приклад 4. Модуль вектора $\vec{a}(12; n)$ дорівнює 13. Знайти n.

■ $\left|\vec{a}\right|^2 = a_1^2 + a_2^2$; $13^2 = 12^2 + n^2$; $n^2 = 169 - 144 = 25$; $n = \pm 5$. *Відповідь.* -5; 5. ■

Приклад 5. Дано точки $A(3; 5)$, $B(-1; -2)$ і $C(0; 4)$. Знайти таку точку D, щоб вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ були рівними.

■ Знайдемо координати вектора $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{(-1-3; -2-5)} = \overrightarrow{(-4; -7)}$. Якщо вектори рівні, то їх відповідні координати рівні: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(-4; -7)}$. Знаючи координати вектора $\overrightarrow{CD}$, знайдемо координати точки $D(x; y)$: $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{(-4; -7)} = \overrightarrow{(x-0; y-4)}$; $x = -4$; $y = -3$. Отже, $D(-4; -3)$. *Відповідь.* $(-4; -3)$. ■

Приклад 6. За якого значення n вектори $\vec{a}\,(n+5; -8)$ і $\vec{b}\,(5; 1-n)$ колінеарні?

■ Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ будуть колінеарними, якщо їхні координати пропорційні. Тоді $\frac{n+5}{5} = \frac{-8}{1-n}$. Звідси: $(n+5)(1-n) = -40$; $n + 5 - n^2 - 5n = -40$; $n^2 + 4n - 45 = 0$; $n_1 = -9$, $n_2 = 5$. Отже, вектори будуть колінеарними, якщо $n = -9$ або $n = 5$. *Відповідь.* -9; 5. ■

Приклад 7. Знайти координати та довжину вектора $\vec{c}$, який дорівнює $\vec{a} + \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (-10; 5)$, $\vec{b} = (25; 3)$.

■ $\vec{c} = \overrightarrow{(-10; 5)} + \overrightarrow{(25; 3)} = \overrightarrow{(15; 8)}$. Отже, $|\vec{c}| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$. *Відповідь.* $\overrightarrow{(15; 8)}$; 17. ■

Приклад 8. Спростити вираз $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM}$.

■ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}) + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{MM} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}$. *В-дь.* $\overrightarrow{PQ}$. ■

Приклад 9. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $\varphi = 60°$, де φ — кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти: **а)** скалярний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a}$; **б)** модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$; **в)** косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{a} + \vec{b}$.

■ **а)** $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 + \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 4 + 2 \cdot 1 \cdot \cos 60° = 4 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5$;

б) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{4 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cos 60° + 1} = \sqrt{4 + 2 + 1} = \sqrt{7}$;

в) якщо α — кут між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a}$, то $\cos\alpha = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}}{|\vec{a} + \vec{b}| \cdot |\vec{a}|}$, $\cos\alpha = \frac{5}{2\sqrt{7}}$.

Відповідь. **а)** 5; **б)** $\sqrt{7}$; **в)** $\frac{5}{2\sqrt{7}}$. ■

Приклад 10. Знайти в градусах зовнішній кут при вершині A трикутника AMK, якщо $A(2; -2; -3)$, $M(4; -2; -1)$, $K(2; 2; 1)$.

■ Кут KAM — кут між векторами $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AM}$ (рис. 21).

Знайдемо модулі цих векторів. $\overrightarrow{AK}\,(2-2; 2+2; 1+3) = (0; 4; 4)$, тоді $|\overrightarrow{AK}| = \sqrt{0^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. $\overrightarrow{AM}\,(4-2; -2+2; -1+3) = (2; 0; 2)$, тоді $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. $\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 8$.

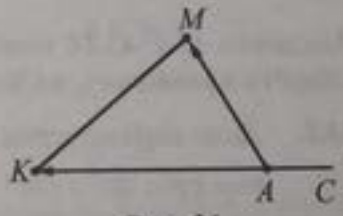


Рис. 21

$\cos\angle KAM = \frac{\overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AK}| \cdot |\overrightarrow{AM}|} = \frac{8}{4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$; $\angle KAM = 60°$. Тоді $\angle CAM = 180° - 60° = 120°$. *В-дь.* 120. ■

Приклад 11. Дано точки $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(0; 2; -1)$. Знайти на осі z таку точку D, щоб вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ були перпендикулярними.

■ Якщо вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярні, то $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Якщо точка D лежить на осі z, то вона має координати $D(0; 0; z)$. Тому маємо: $\overrightarrow{AB}\,(-2; 1; 1)$; $\overrightarrow{CD}\,(0; -2; z+1)$. Далі маємо: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + (z+1) \cdot 1 = z - 1$, звідки $z - 1 = 0$; $z = 1$. Отже, $D(0; 0; 1)$.

Відповідь. $D(0; 0; 1)$. ■

Приклад 12. Знайти абсолютну величину вектора $\vec{a} = 5\vec{m} + \frac{1}{7}\vec{n}$, якщо $\vec{m}\left(-1; 2; \frac{3}{5}\right)$, $\vec{n}(14; -7; 21)$.

■ $5\vec{m}\left(-1\cdot 5; 2\cdot 5; \frac{3}{5}\cdot 5\right) = 5\vec{m}(-5; 10; 3)$; $\frac{1}{7}\vec{n}\left(\frac{1}{7}\cdot 14; \frac{1}{7}\cdot(-7); \frac{1}{7}\cdot 21\right) = \frac{1}{7}\vec{n}(2; -1; 3)$;

$\vec{a}(-5+2; 10+(-1); 3+3) = \vec{a}(-3; 9; 6)$; $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 9^2 + 6^2} = \sqrt{9+81+36} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$. *Відповідь.* $3\sqrt{14}$. ■

Приклад 13. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ (8; 4; 1) і $\overrightarrow{AD}$ (2; –2; 1) як на сторонах.

■ Нехай на рис. 22 зображено заданий паралелограм. Тоді маємо: $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin A$. Знайдемо довжини сторін паралелограма.

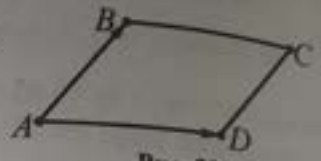


Рис. 22

$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{64+16+1} = \sqrt{81} = 9$;

$AD = |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$. $\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AD}|}$. Тоді $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 8\cdot 2 + 4\cdot(-2) + 1\cdot 1 = 9$;

$\cos A = \frac{9}{9\cdot 3} = \frac{1}{3}$. Оскільки $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$, то $\sin A = \sqrt{1-\cos^2 A}$; $\sin A = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Отже, $S_{ABCD} = 9\cdot 3\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3} = 18\sqrt{2}$. *Відповідь.* $18\sqrt{2}$. ■

Приклад 14. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{MA_1}$, де M — середина ребра AD.

■ Задамо в просторі систему координат, початком якої є вершина A куба, а осі x, y і z містять відповідно ребра AB, AD, AA_1 (рис. 23). Приймемо довжину ребра куба за одиницю. Тоді:

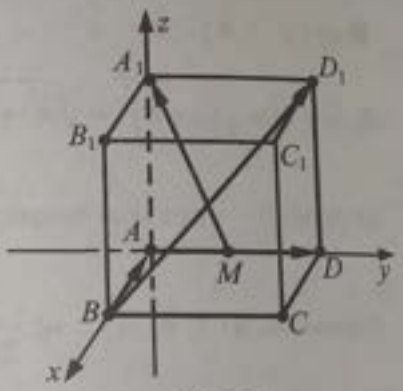


Рис. 23

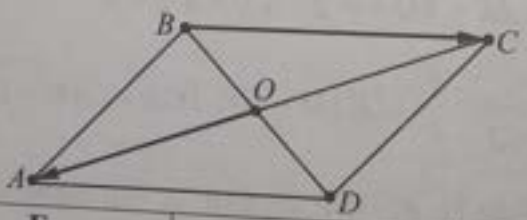
$B(1; 0; 0)$, $D_1(0; 1; 1)$, $M(0; 0{,}5; 0)$, $A_1(0; 0; 1)$; $\overrightarrow{BD_1}(-1; 1; 1)$, $\overrightarrow{MA_1}(0; -0{,}5; 1)$. Знаходимо кут φ між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{MA_1}$:

$\cos\varphi = \frac{(-1)\cdot 0 + 1\cdot(-0{,}5) + 1\cdot 1}{\sqrt{1+1+1}\cdot\sqrt{0{,}25+1}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{3\cdot 1{,}25}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{3\cdot 0{,}25\cdot 5}} = \frac{0{,}5}{0{,}5\cdot\sqrt{15}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{15}}$; $\varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$. *Відповідь.* $\arccos\frac{1}{\sqrt{15}}$. ■

Завдання 43.1–43.24 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

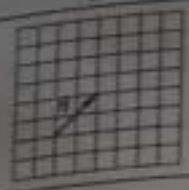
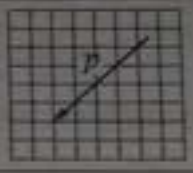
43.1. Дано паралелограм $ABCD$. O — точка перетину діагоналей. Який з наведених векторів дорівнює сумі $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OA}$?



А	Б	В	Г	Д
$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{OC}$	$\overrightarrow{OB}$	$\overrightarrow{OD}$	$\overrightarrow{AD}$

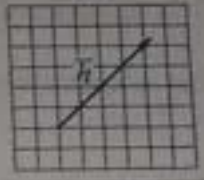
43.2. Дано вектор $\vec{a}$. Який з наведених векторів дорівнює $-\frac{2}{3}\vec{a}$?



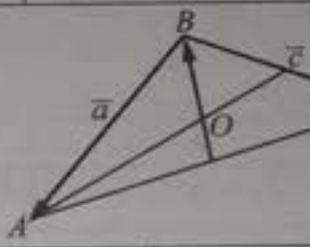
А	Б	В	Г	Д
				

Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Який з наведених векторів дорівнює різниці $\vec{a}-\vec{b}$?



А	Б	В	Г	Д
				

O — точка перетину медіан трикутника ABC. $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. Виразити вектор $\overrightarrow{OB}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$.



А	Б	В	Г	
$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB}=-\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{c}$	$\overrightarrow{OB}=$

Дано точки $A(5;-6;7)$ і $B(8;-2;7)$. Знайти абсолютну величину вектора $\overrightarrow{AB}$.

А 5 Б 25 В $\sqrt{133}$ Г $9\sqrt{2}$ Д 4

Знайти довжину вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(-1;1;-1)$, $B(-1;1;1)$.

А $\sqrt{2}$ Б 2 В $2\sqrt{2}$ Г 3 Д 1

Серед векторів $\vec{a}(4;14;2)$, $\vec{b}(2;7;-1)$, $\vec{c}(0;0;3)$, $\vec{d}(-6;-21;3)$ знайти колінеарні.

А $\vec{a}$ і $\vec{b}$ Б $\vec{a}$ і $\vec{c}$ В $\vec{a}$ і $\vec{d}$ Г $\vec{b}$ і $\vec{c}$ Д $\vec{b}$ і $\vec{d}$

За якого значення n вектори $\vec{a}(n+5;-8;n+1)$ і $\vec{b}(5;1-n;3)$ колінеарні?

А ± 5 Б $\pm 5;9$ В -9 Г 5 Д 5; 9

Дано вектори $\vec{a}(3;-6;2)$ і $\vec{b}(8;4;5)$. Знайти скалярний добуток $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

А -17 Б 0 В -5760 Г 10 Д -3

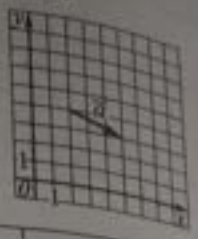
Обчислити квадрат довжини вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\vec{b}$ і їх скалярний добуток дорівнює 34.

А 17 Б $\sqrt{17}$ В 2 Г 4,5 Д 68

43.13. Знайти кут між векторами $\vec{a}(1; 0; -1)$ і $\vec{b}(0; -1; 1)$.

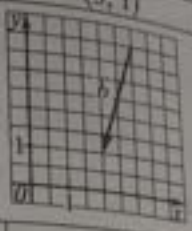
А 60° Б 120° В 45° Г 135° Д 150°

43.14. Знайти координати вектора $\vec{a}$, зображеного на рисунку.



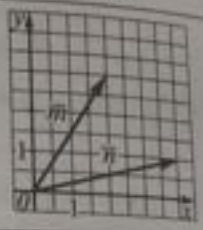
А	Б	В	Г	Д
(–3; –1)	(2; 4)	(5; 3)	(3; –1)	(3; 1)

43.15. Знайти абсолютну величину вектора $\vec{b}$, зображеного на рисунку.



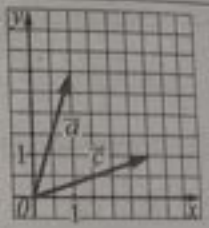
А	Б	В	Г	Д
3	$\sqrt{3}$	$\sqrt{10}$	2	$\sqrt{7}$

43.16. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$.



А	Б	В	Г	Д
9	10	11	12	14

43.17. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{c}$.



А	Б	В	Г	Д
0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

43.18. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 135°, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2\sqrt{2}$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

А $2\sqrt{2}$ Б $2\sqrt{5}$ В 5 Г $4\sqrt{2}$ Д 4

43.19. Дві сили $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ утворюють між собою кут 120°. $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = 10$ Н. Знайти модуль рівнодійної цих сил.

А 5 Н Б 10 Н В $5\sqrt{3}$ Н Г 20 Н Д $10\sqrt{2}$ Н

43.20. $\vec{a}$ і $\vec{b}$ — ненульові вектори. $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А 30° Б 60° В 45° Г 90° Д 120°

43.21. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ такі, що $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 3$. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

А 1 Б 2 В 4 Г 6 Д 8

43.22. Знайти модуль вектора $2\vec{a}+3\vec{b}$, якщо $\vec{a}(1;2)$, $\vec{b}(1;0)$.

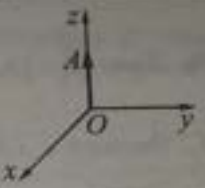
А $\sqrt{41}$ Б 3 В $\sqrt{17}$ Г 1 Д 9

43.23. Дано квадрат $ABCD$. Який з наведених векторів дорівнює сумі $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$?



А	Б	В	Г	Д
$2\overrightarrow{AB}$	$2\overrightarrow{BC}$	$\vec{0}$	$2\overrightarrow{AC}$	$2\overrightarrow{AD}$

43.24. **(ЗНО–2014)** Вектор $\overrightarrow{OA}$ лежить на осі z прямокутної декартової системи координат у просторі (див. рисунок), і його початок збігається з початком координат. Визначити координати вектора $\overrightarrow{OA}$, якщо його довжина дорівнює 3.



А	Б	В	Г	Д
(1; 1; 1)	(0; 3; 0)	(0; 0; 3)	(3; 0; 0)	(3; 3; 3)

Завдання 43.25–43.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

43.25. Установити відповідність між назвами формул для векторів $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ і $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ (1–3) та формулами (А–Д).

1 Довжина вектора $|\vec{a}|$

2 Скалярний добуток векторів $\vec{a}\cdot\vec{b}$

3 Умова перпендикулярності векторів $\vec{a}\perp\vec{b}$

А $\overline{(a_1b_1;a_2b_2;a_3b_3)}$

Б $\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

В $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$

Г $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

Д $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

43.26. Установити відповідність між векторами (1–3) та їх скалярними добутками (А–Д).

1 $\vec{a}_1(1;5;14)$, $\vec{b}_1(3;4;-1)$

2 $\vec{a}_2(3;0;-4)$, $\vec{b}_2(5;-7;2)$

3 $\vec{a}_3(4;-2;9)$, $\vec{b}_3(-3;1;4)$

А 7
Б 9
В –6
Г 22
Д 5

43.27. Установити відповідність між значеннями числа x (1–3) та парами векторів (А–Д), які за цих значень взаємно перпендикулярні.

1 8

2 6

3 5

А $\vec{a}_1(2;x;-1)$, $\vec{b}_1(-3;2;x)$

Б $\vec{a}_2(-4;5;2x)$, $\vec{b}_2(6;x;-1)$

В $\vec{a}_3(-x;4;2)$, $\vec{b}_3(6;3;-3x)$

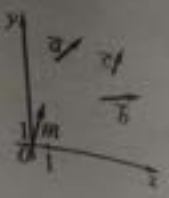
Г $\vec{a}_4(2;3x;1)$, $\vec{b}_4(x;1;-25)$

Д $\vec{a}_5(x;-10;1)$, $\vec{b}_5(4;1;-30)$

43.28. Установити відповідність між векторами (1–3) та їх координатами (А–Д).

1 $\vec{a}$
2 $\vec{b}$
3 $\vec{c}$

А (1; 2)
Б (4; 1)
В (2; 2)
Г (3; 1)
Д (1; 3)



Розв'яжіть завдання 43.29–43.43. Відповідь запишіть десятковим дробом.

43.29. Відомо, що $|\vec{x}| = 3$, $|\vec{y}| = 6$, $\varphi = 60°$, де φ — кут між векторами $\vec{x}$ і $\vec{y}$. Знайти:

1) $\vec{x} \cdot (\vec{x} + \vec{y})$; **2)** $\sqrt{7}|\vec{x} + \vec{y}|$.

43.30. Дано $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

43.31. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 120°. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$. Обчислити: **1)** $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$; **2)** $\sqrt{7}|\vec{a} + \vec{b}|$.

43.32. $\vec{a}(4; -2; -4)$, $\vec{b}(6; -3; 2)$. Обчислити $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} - 2\vec{b})$.

43.33. Дано $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, а кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$ дорівнює 120°. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{m}$ і $\vec{m} + \vec{n}$ і знайти його значення з точністю до 0,01.

43.34. Знайти довжину вектора $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$, якщо $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $|\vec{c}| = 4$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60°$, $\angle(\vec{a}; \vec{c}) = 120°$, $\angle(\vec{b}; \vec{c}) = 90°$ й обчислити його значення з точністю до 0,01.

43.35. Знайти косинус кута між векторами $-5\vec{a}$ і $\frac{1}{5}\vec{b}$ з точністю до 0,01, якщо $\vec{a}(-1; 1; 4)$ і $\vec{b}(1; 0; -1)$.

43.36. Дано вектори $\vec{a}(-2; 0)$, $\vec{b}(1; -1)$ і $\vec{c}(2; 3)$. За якого значення k вектори $2\vec{a} - k\vec{b}$ та $\vec{c}$ будуть колінеарними?

43.37. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}(3; 0; -4)$ і $\overrightarrow{AD}(0; 5; 0)$.

43.38. Дано трикутник MPK, $M(-3; -2)$, $P(1; 4)$, $K(2; -1)$. Знайти у градусах величину кута M.

43.39. Дано вектор $\vec{a}(2; 1; -3)$. Знайти квадрат довжини вектора $\vec{b}$, якщо $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$ і вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$.

43.40. Дано $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60°$. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$.

43.41. Знайти косинус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}(3; 2)$ і $\vec{b}(1; -2)$ з точністю до 0,01.

43.42. Знайти косинус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = 4\vec{m} + 2\vec{n}$ і $\vec{b} = 4\vec{m} + \vec{n}$ з точністю до 0,01, якщо $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $\varphi = \angle(\vec{m}; \vec{n}) = 60°$.

43.43. На озері від пристані одночасно відпливають два катери. Один з них рухається зі швидкістю 25 км/год під кутом 30° до берега, а інший — зі швидкістю 30 км/год перпендикулярно до берега. Якою буде відстань між човнами через 6 хв? Відповідь округлити до сотих кілометра.

Тема 44. Геометричні переміщення (рух) і перетворення фігур

Зміст матеріалу і компетентності, знання яких вимагає програма ЗНО:

— рух, симетрія відносно точки та відносно прямої, поворот, паралельне перенесення;
— рівність фігур;
— використання властивостей геометричних переміщень для розв'язування задач.

Перетворення фігур. Якщо кожній точці фігури F поставити у відповідність деяку точку площини, то всі відповідні точки утворюють деяку фігуру F'. Кажуть, що фігуру F' одержали у результаті перетворення фігури F. Фігуру F' називають *образом* фігури F.

Наприклад: 1) поставимо у відповідність кожній точці X півкола основу перпендикуляра, опущеного з точки X на діаметр — точку X' (рис. 1). Ця відповідність буде перетворенням півкола в діаметр. Діаметр — образ півкола; 2) поставимо у відповідність кожній точці кола K протилежну їй точку K'. Ця відповідність буде перетворенням кола в коло (рис. 2) або кола в себе. Образом кола буде те саме коло.

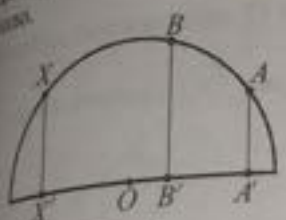


Рис. 1

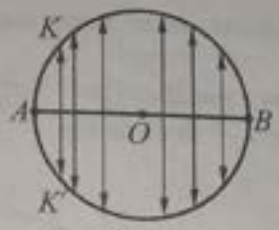


Рис. 2

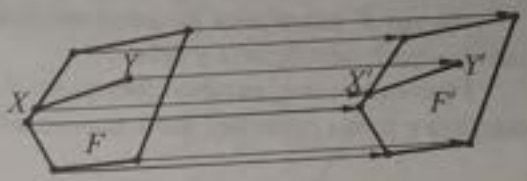
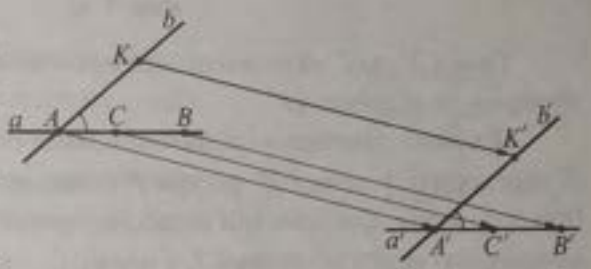


Рис. 3

Переміщення. Перетворення фігури F, яке зберігає відстані між точками, називають *переміщенням (рухом)* фігури F. Наприклад, перетворенням фігури F у фігуру F' (рис. 3) — переміщення, оскільки $X \to X'$, $Y \to Y'$, $XY \to X'Y'$.

Властивості переміщення (руху):

1. Унаслідок переміщення точки, які лежать на прямій, переходять у точки, які лежать на прямій, до того ж зберігається порядок їх взаємного розташування. На рисунку $A \to A'$, $C \to C'$, $B \to B'$, до того ж, якщо точка C лежить між точками A та B, то точка C' лежить між точками A' та B'.



2. Унаслідок переміщення прямі переходять у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки. На рисунку: $a \to a'$, $b \to b'$, промінь AK — у промінь $A'K'$, пряма $AC \to$ у пряму $A'C'$, відрізок $BC \to$ у відрізок $B'C'$.

3. Унаслідок переміщення кут переходить у рівний йому кут. На рисунку $\angle A \to \angle A'$.

4. Унаслідок переміщення паралельні прямі переходять у паралельні прямі.

Дві фігури називають *рівними*, якщо існує переміщення, яке переводить одну фігуру в іншу.

Симетрія. Дві точки X та X' називають *симетричними* відносно даної точки O, якщо точка O — середина відрізка XX' (рис. 4). Точку O вважають симетричною самій собі й називають центром симетрії.

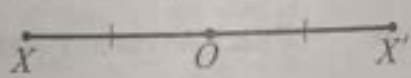


Рис. 4

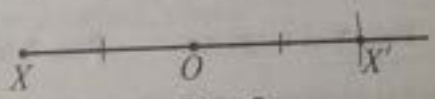


Рис. 5

Щоб побудувати точку X', симетричну до точки X відносно точки O, потрібно:

1) провести промінь XO;

2) відкласти на ньому з другого боку від точки O відрізок $OX' = OX$ (рис. 5).

Перетворення, за якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну відносно даної точки O, називають *перетворенням симетрії* відносно точки O. Фігури F і F' називають симетричними відносно точки O.

На рисунках 6 показано побудову фігури, симетричної даній відносно точки O:



Рис. 6 а) відрізка

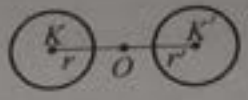


Рис. 6 б) кола

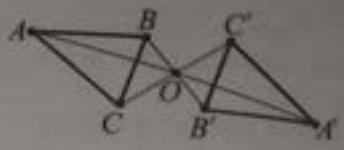


Рис. 6 в) трикутника

Властивості центральної симетрії:

1) центральна симетрія є переміщенням, тому вона має всі властивості переміщення;

2) образом прямої, що проходить через центр симетрії, є сама ця пряма, а образом прямої, яка не проходить через центр симетрії, є паралельна їй пряма.

Образом довільної точки $M(x; y)$ при центральній симетрії з центром у початку координат є точка $M'(-x; -y)$.

Фігуру F називають *центрально-симетричною*, якщо існує така точка O, при симетрії відносно якої фігура F переходить у себе.

Прикладом центрально-симетричної фігури є квадрат (рис. 7 а), коло (рис. 7 б). Центром симетрії квадрата є точка перетину його діагоналей, а кола — його центр.

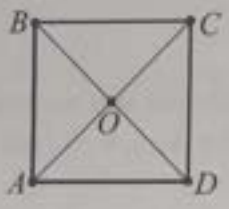


Рис. 7 а)



Рис. 7 б)

Точки X та X' називають *симетричними* відносно прямої l, якщо пряма l є серединним перпендикуляром до відрізка XX'.

Осьовою симетрією відносно прямої l називають перетворення, при якому кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F', симетричну відносно прямої l. Осьова симетрія є переміщенням (рухом). Якщо при симетрії відносно прямої l фігура переходить сама в себе, то фігуру називають *симетричною* відносно прямої l, а пряму l — віссю симетрії фігури. Симетрію з віссю l називають *осьовою симетрією*.

На рис. 8 показано побудову фігури, симетричної даній відносно прямої l:

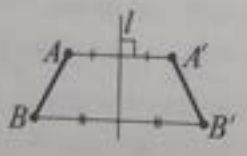


Рис. 8 а) відрізка

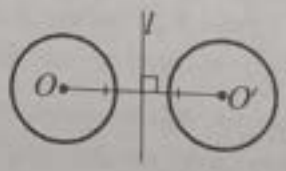


Рис. 8 б) кола

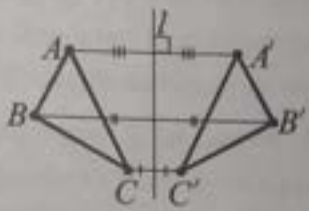


Рис. 8 в) трикутника

Точки, симетричні відносно осі x, мають однакові абсциси та протилежні ординати. Точки, симетричні відносно осі y, мають однакові ординати та протилежні абсциси.

Поворот. *Поворотом* фігури F навколо точки O на кут α за (проти) годинниковою стрілкою називають перетворення фігури F у фігуру F', при якому кожній точці X фігури F ставиться у відповідність така точка X' фігури F', що $OX' = OX$ і $\angle XOX' = \alpha$. Точку O називають *центром повороту*, а кут α — *кутом повороту* (рис. 9). Центр повороту переходить у себе. Поворот є переміщенням.

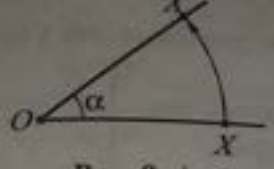


Рис. 9 а)

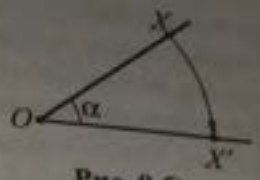


Рис. 9 б)

Поворот задається **1)** центром повороту; **2)** кутом повороту; **3)** напрямом повороту.

Щоб побудувати точку X', у яку перейде точка X унаслідок повороту навколо точки O на кут α, потрібно:

1) провести промінь OX (рис. 10);

2) від променя OX відкласти кут XOA, що дорівнює куту α — на рис. 10 **а)** — проти годинникової стрілки, на рис. 10 **б)** — за годинниковою стрілкою;

3) на промені OA знайти точку X', яка лежить на відстані OX від центру повороту O.

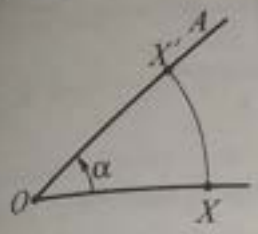


Рис. 10 а)

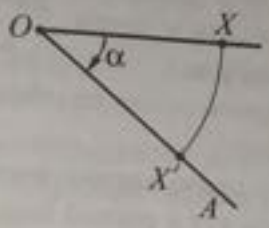


Рис. 10 б)

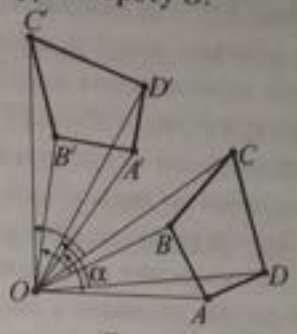


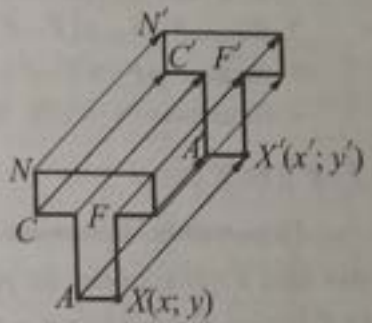
Рис. 11

Послідовне виконання двох поворотів навколо однієї й тієї ж точки є поворотом.

Щоб виконати поворот фігури F навколо точки O на кут α, потрібно кожну точку X фігури F змістити по дузі кола з центром O радіуса OX на кут α (рис. 11).

Паралельне перенесення

Паралельним перенесенням фігури F називають таке перетворення фігури F у фігуру F', при якому всі точки фігури F зміщуються на один і той же вектор (в одному й тому ж напрямі та на одну й ту ж відстань). По-іншому кажуть, що всі точки фігури зміщуються уздовж паралельних прямих або прямих, які збігаються, в одному й тому ж напрямі й на одну й ту ж відстань.



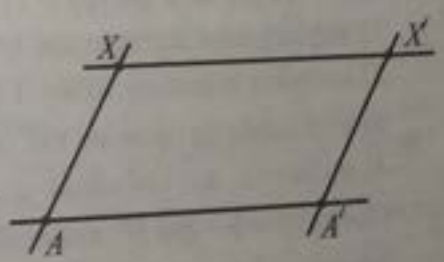
На рисунку: $XX' \| AA' \| CC' \| NN'$, $XX' = AA' = CC' = NN'$. Кожну точку фігури F змістили в одному й тому ж напрямку на одну й ту ж відстань: $I \to X'$, $A \to A'$, $C \to C'$, $N \to N'$. Отже, фігура F перейде у фігуру F' унаслідок паралельного перенесення на вектор $\overrightarrow{XX'}$.

Властивості паралельного перенесення:

1) паралельне перенесення є переміщенням, оскільки має усі його властивості;

2) при паралельному перенесенні пряма переходить у паралельну їй пряму або в себе;

3) переміщення, обернене до паралельного перенесення, є паралельним перенесенням;



4) послідовне виконання двох паралельних перенесень є паралельним перенесенням.

Щоб побудувати точку A', у яку перейде точка A при паралельному перенесенні, що переводить точку X у точку X', потрібно:

1) провести пряму XX' (див. рис.);

2) через точку A провести пряму $AA' \| XX'$;

3) на прямій AA' відкласти відрізок $AA' = XX'$ так, щоб промені AA' і XX' були співнапрямлені. Точка A' — шукана.

Задання паралельного перенесення:

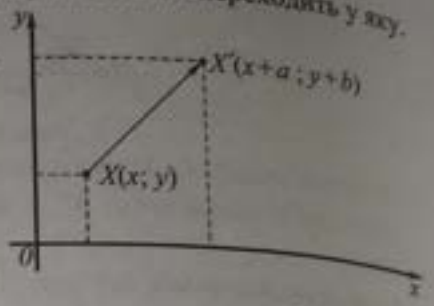
1. Паралельне перенесення можна задати парою точок, указавши, яка з точок переходить у яку.

2. Паралельне перенесення можна задати формулами.

У прямокутній системі координат паралельне перенесення, яке переводить точку $X(x; y)$ у точку $X'(x'; y')$, задається формулами:

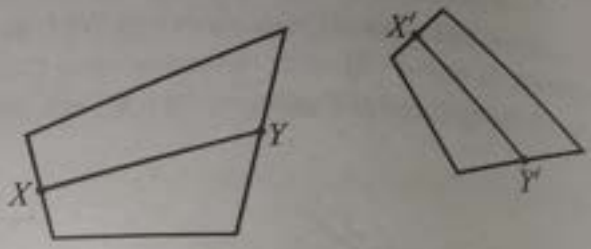
$$x' = x + a,\ y' = y + b,$$

де a та b — координати вектора перенесення (див. рис.).



Перетворення подібності

Перетворенням подібності з коефіцієнтом $k > 0$ називають перетворення фігури F у фігуру F', при якому довільним точкам X та Y фігури F ставлять у відповідність такі точки X' та Y' фігури F', що $X'Y' = kXY$. Коефіцієнт k ($k > 0$) називають коефіцієнтом подібності.



Це означає: якщо довільні точки X та Y фігури F унаслідок перетворення подібності переходять у точки X' і Y' фігури F', то $X'Y' = kXY$, де $k > 0$ (див. рис.).

Переміщення є окремим випадком перетворення подібності, якщо $k = 1$.

Властивості перетворення подібності:

1. Перетворення подібності переводить прямі в прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки.

2. Перетворення подібності переводить кут у рівний йому кут.

Дві фігури називають *подібними*, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності. Запис $F \sim F'$ означає: фігура F подібна до фігури F'. Інколи вказують коефіцієнт подібності, наприклад, якщо $k = 3$, пишуть $F \overset{3}{\sim} F'$. Коефіцієнт подібності k дорівнює відношенню довжин відповідних лінійних елементів фігур F' і F.

Властивості подібних фігур:

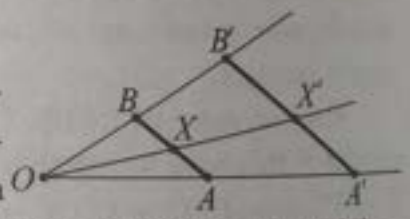
1. Будь-яка фігура подібна сама собі: $F \sim F$.

2. Якщо $F_1 \sim F_2$, то $F_2 \sim F_1$.

3. Якщо $F_1 \sim F_2$, а $F_2 \sim F_3$, то $F_1 \sim F_3$.

4. Відношення площ подібних фігур дорівнює квадрату коефіцієнта подібності, тобто якщо $F \overset{k}{\sim} F'$, то $S'/S = k^2$.

Гомотетія. *Гомотетією* з центром O і коефіцієнтом $k \neq 0$ називають таке перетворення фігури F у фігуру F', унаслідок якого кожна точка X фігури F переходить у точку X' фігури F' так, що точка X' лежить на промені OX, якщо $k > 0$, або на доповняльному до нього промені OX'', якщо $k < 0$, і $OX' = |k| \cdot OX$ (k — будь-яке число, відмінне від нуля, O — фіксована точка) (див. рис.). Точку O називають *центром* гомотетії, а число k — *коефіцієнтом* гомотетії. На рисунку відрізок $A'B'$ гомотетичний відрізку AB з центром гомотетії O і $k = 2$.



Щоб побудувати фігуру F', гомотетичну фігуру F, потрібно:

1) зафіксувати на площині точку O;

2) вибрати довільну точку X фігури F;

3) відкласти на промені OX (або на доповняльному промені) відрізок OX', що дорівнює $|k| \cdot OX$;

4) провести такі побудови для кожної точки фігури F.

Одержимо фігуру F', яка є образом фігури F, отриманим у результаті гомотетії.

На рис. 12 показано побудову чотирикутника, гомотетичного чотирикутнику $ABCD$ з центром гомотетії O і коефіцієнтом гомотетії: **а)** $k = 2$; **б)** $k = -2$.

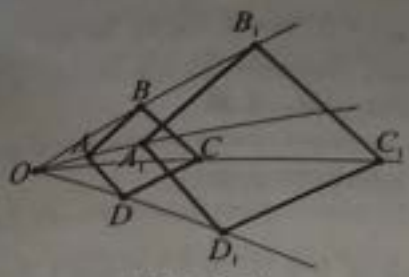


Рис. 12 а)

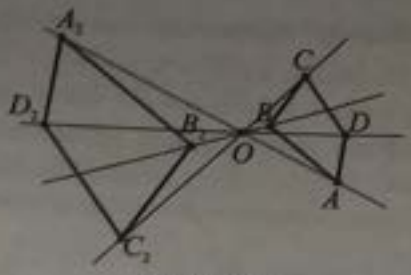


Рис. 12 б)

Властивості гомотетії:

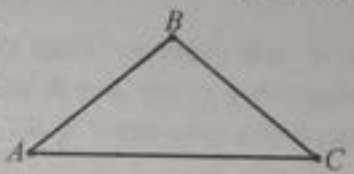
Гомотетія є перетворенням подібності й вона має всі властивості перетворення подібності, а також властивості:

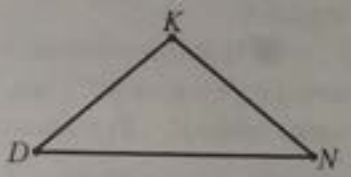
1) гомотетія переводить пряму в паралельну їй пряму або в саму себе, якщо дана пряма проходить через центр гомотетії;

2) на координатній площині гомотетія з центром у початку координат задається формулами $\begin{cases} x_1 = kx; \\ y_1 = ky; \end{cases}$ де $(x; y)$ — координати точки A, а $(x_1; y_1)$ — координати образу цієї точки при гомотетії.

Приклад 1. Трикутник ABC — образ трикутника DKN, отриманий у результаті переміщення. Знайти кути трикутника DKN, якщо $DK = KN$, а найбільший кут трикутника ABC дорівнює 120°.

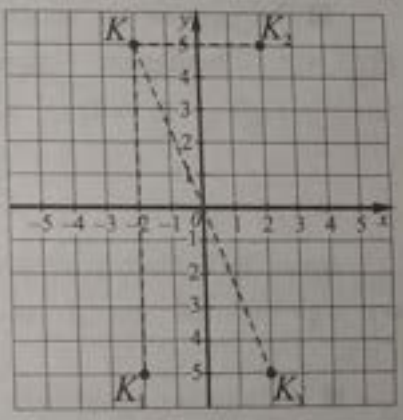
■ Переміщення переводить фігуру у рівну їй фігуру, тому якщо трикутник DKN рівнобедрений, то трикутник ABC теж рівнобедрений. $\angle A = \angle C$ — за властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника.





Оскільки в трикутнику не може бути два тупі кути, то $\angle B = 120°$. Тоді $\angle A = \angle C = (180° - 120°) : 2 = 30°$. $\angle D = \angle A = 30°$, $\angle N = \angle C = 30°$, $\angle K = \angle B = 120°$. *Відповідь.* 30°, 30°, 120°. ■

Приклад 2. Побудувати точку, симетричну до точки $K(-2; 5)$ відносно: **а)** осі x; **б)** осі y; **в)** початку координат. Записати координати одержаних точок.



■ **а)** Точка $K_1(-2; -5)$ — симетрична точці $K(-2; 5)$ відносно осі x (див. рис.);

б) точка $K_2(2; 5)$ симетрична точці $K(-2; 5)$ відносно осі y;

в) точка $K_3(2; -5)$ симетрична точці $K(-2; 5)$ відносно початку координат.

Відповідь. **а)** $(-2; -5)$; **б)** $(2; 5)$; **в)** $(2; -5)$. ■

Приклад 3. Дано коло $(x + 7)^2 + (y - 3)^2 = 49$. Установити рівняння образу кола, утвореного при симетрії відносно початку координат.

А	Б	В	Г	Д
$x^2 + y^2 = 49$	$(x + 7)^2 + (y + 3)^2 = 49$	$(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 49$	$(x - 7)^2 + (y - 3)^2 = 49$	$(x - 3)^2 + (y + 7)^2 = 49$

■ При симетрії відносно початку координат точка з координатами $(x; y) \to (-x; -y)$. Задане коло перейде в коло $(-x + 7)^2 + (-y - 3)^2 = 49$ або $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 49$ — рівняння образу. *Відповідь.* В. ■

Приклад 4. Установити рівняння образу параболи $y = x^2$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(-5; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -x^2 + 10x - 26$	$y = x^2 - 4$	$y = x^2 - 5x + 1$	$y = x^2 - 10x + 26$	$y = x^2 + 10x + 26$

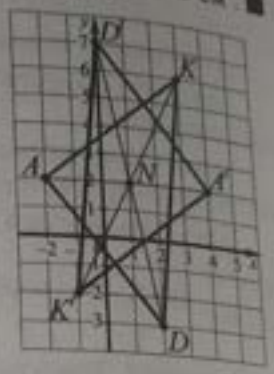
■ При паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(-5;1)$ точка $(x;y)$ фігури F перейде в точку $(x_1;y_1) = (x-5;y+1)$. Звідки $x = x_1 + 5$; $y = y_1 - 1$. Отже, рівняння фігури-образу $y_1 - 1 = (x_1+5)^2$, або, опустивши індекси, $y = (x+5)^2 + 1$; $y = x^2 + 10x + 26$. *Відповідь.* Д. ■

Приклад 5. Сторони двох подібних правильних многокутників відносяться як 6 : 5, а різниця їх площ дорівнює 77 см^2. Знайти площу меншого з цих многокутників.

■ Позначимо сторону меншого многокутника через $5x$, тоді сторона більшого — $6x$. Тоді:

$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$; $S_2 = \frac{36}{25}S_1 = 1{,}44S_1$. $S_2 - S_1 = 77$; $S_2 - S_1 = 0{,}44 \cdot S_1 = 77$; $S_1 = 175$ (см^2). *Відповідь.* 175 см^2. ■

Приклад 6. Побудувати трикутник, симетричний трикутнику AKD відносно точки N, де $A(-2;2)$, $K(3;6)$, $D(2;-3)$, $N(1;2)$.

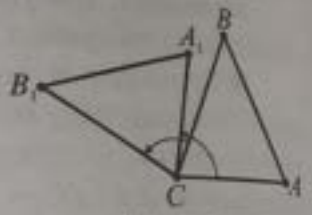


■ Побудова зображена на рисунку. $\Delta A'K'D'$ симетричний ΔAKD відносно точки N. Знайдемо точку $A'(x';y')$ симетричну до точки $A(x;y)$ відносно точки $N(1;2)$. Тоді точка N є серединою відрізка $A'A$:

$\left(\frac{x'+x}{2};\frac{y'+y}{2}\right) = (1;2)$; $(x';y') = 2(1;2) - (x;y)$; $(x';y') = (2;4) - (-2;2) = (4;2)$.

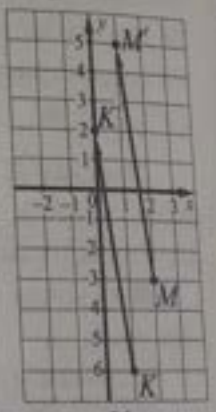
Аналогічно $K'(3;6) = (2;4) - (3;6) = (-1;-2)$; $D' = (2;4) - (2;-3) = (0;7)$. ■

Приклад 7. Побудувати фігуру, у яку перейде рівнобедрений трикутник ABC внаслідок повороту навколо точки C на 80° проти годинникової стрілки.



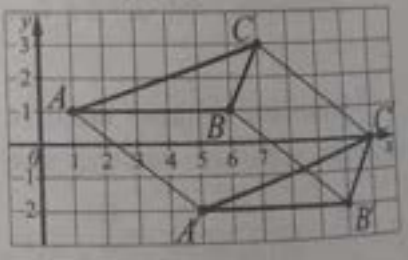
■ Виконаємо поворот точок A та B навколо точки C проти годинникової стрілки на 80° (див. рис.), одержимо точки A_1 і B_1 відповідно. Сполучимо точки A_1 і B_1 з точкою C. Одержимо трикутник A_1B_1C. ■

Приклад 8. При паралельному перенесенні точка $M(2;-3)$ переходить у точку $M'(1;5)$. Побудувати точку K', у яку перейде точка $K(1;-6)$ при такому паралельному перенесенні. Знайти координати точки K'.



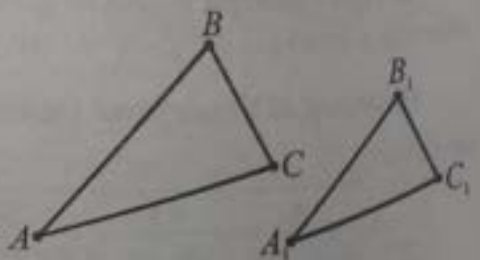
■ Побудуємо на координатній площині точки $M(2;-3)$, $M'(1;5)$ і $K(1;-6)$. Знайдемо координати точки $K'(x;y)$: $\overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{MM'}$; $(x'-1;y'+6) = (1-2;5+3)$; $(x';y') = (0;2)$. Отже, $K'(0;2)$. *Відповідь.* $(0;2)$. ■

Приклад 9. Побудувати трикутник ABC, у якому $A(1;1)$, $B(6;1)$, $C(7;3)$. Побудувати фігуру, у яку перейде цей трикутник унаслідок паралельного перенесення, заданого формулами $x' = x+4$, $y' = y-3$.



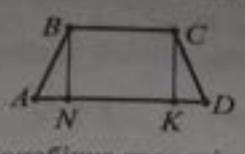
■ Побудуємо трикутник ABC (див. рис.). Знайдемо координати точок A', B', C', у які перейдуть точки A, B, C відповідно при даному паралельному перенесенні: $A'(1+4;1-3)$, $B'(6+4;1-3)$, $C'(7+4;3-3)$, тобто $A'(5;-2)$, $B'(10;-2)$, $C'(11;0)$. Сполучимо точки A', B' і C'. Одержимо трикутник $A'B'C'$, у який перейде трикутник ABC внаслідок даного паралельного перенесення. ■

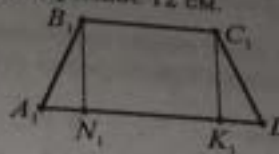
Приклад 10. $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Знайти невідомі сторони трикутників, якщо $AB = 18$ см, $AC = 16{,}4$ см, $A_1B_1 = 9$ см, $B_1C_1 = 7$ см.



■ $k = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$. Отже, $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{1}{2}$. Звідси $BC = 2B_1C_1 = 2 \cdot 7 = 14$ (см). $A_1C_1 = AC : 2 = 16{,}4 : 2 = 8{,}2$ (см). *Відповідь.* $BC = 14$ см; $A_1C_1 = 8{,}2$ см. ■

Приклад 11. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 20 см і 28 см, а бічна сторона — 5 см. Знайти площу трапеції, подібної до даної, висота якої дорівнює 12 см.

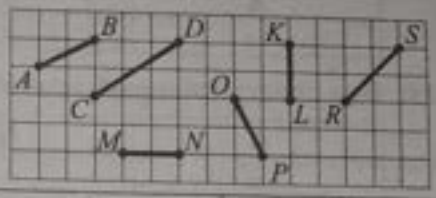




■ Нехай $ABCD$ — дана рівнобічна трапеція, у якої $BC = 20$ см, $AD = 28$ см, $AB = 5$ см. Проведемо $BN \perp AD$, тоді $AN = (28 - 20) : 2 = 4$ (см). Із прямокутного трикутника ABN за теоремою Піфагора $BN = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ (см). Тоді $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot BN$, $S_{ABCD} = \frac{28 + 20}{2} \cdot 3 = 72$ (см^2). Оскільки $A_1B_1C_1D_1 \sim ABCD$ і $k = \frac{B_1N_1}{BN} = \frac{12}{3} = 4$, то $S_{A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot k^2 = 72 \cdot 16 = 1152$ (см^2). *Відповідь.* 1152 см^2. ■

Завдання 44.1–44.20 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДНА ПРАВИЛЬНА. Оберіть правильну, на Вашу думку, відповідь.

44.1. Який з відрізків є образом відрізка AB при русі?



А	Б	В	Г	Д
CD	MN	OP	KL	RS

44.2. Знайти координати точки, симетричної точці (3; 5) відносно початку координат.

А (–5; 3) Б (5; –3) В (3; 5) Г (–3; –5) Д (–3; 5)

44.3. Яка з указаних фігур має центр симетрії?

А Трапеція Б трикутник В кут Г промінь Д відрізок

44.4. Знайти координати точки, симетричної точці (–3; 4) відносно осі x.

А (4; –3) Б (3; 4) В (3; –4) Г (–3; –4) Д (–4; 3)

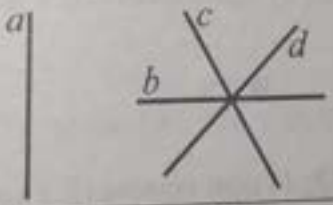
44.5. Яка з указаних фігур має лише одну вісь симетрії?

А Квадрат Б коло В відрізок Г парабола Д ромб

44.6. Дано точку $C(1; 3)$. Знайти координати точки C', у яку перейде точка C при повороті навколо початку координат на 90° проти годинникової стрілки.

А (–3; 1) Б (3; –1) В (–1; 3) Г (–2; 2) Д (–2; 3)

44.7. Яка з прямих, зображених на рисунку, може бути образом прямої a при паралельному перенесенні?



А	Б	В	Г	Д
Жодна	b	c	d	a

44.8. При паралельному перенесенні точка $A(2; 3)$ переходить у точку $A'(5; 1)$. У яку точку перейде при цьому паралельному перенесенні точка $B(–2; 1)$?

А (–5; 3) Б (1; –1) В (–1; 1) Г (5; –3) Д (9; 3)

44.9. *Точка $A'(-8; 12)$ — образ точки $A(x; -3)$ при гомотетії з центром у початку координат. Знайти x.*

А -17 Б -2 В 2 Г -7 Д 5

44.10. *Площі двох подібних трикутників дорівнюють 27 см^2 і 48 см^2. Одна зі сторін першого трикутника дорівнює 6 см. Знайти відповідну їй сторону другого трикутника.*

А $10\frac{2}{3}$ см Б 8 см В 20,25 см Г 9 см Д 7,25 см

44.11. *Установити образ прямої $y = 2x + 3$ при симетрії відносно початку координат.*

А	Б	В	Г	Д
$y = -2x - 3$	$y = -2x + 3$	$y = 0{,}5x + 3$	$y = 2x - 3$	$y = -0{,}5x - 3$

44.12. *Установити образ параболи $y = (x - 1)^2 + 3$ при симетрії відносно початку координат.*

А	Б	В	Г	Д
$y = (x - 1)^2 - 3$	$y = -(x + 1)^2 - 3$	$y = -(x - 1)^2 - 3$	$y = -(x + 1)^2 + 3$	$y = (x - 1)^2 + 3$

44.13. *Знайти образ прямої $y = -4x - 3$ при симетрії відносно вісі y.*

А	Б	В	Г	Д
$y = -x - 3$	$y = x - 3$	$y = -4x + 3$	$y = 4x + 3$	$y = 4x - 3$

44.14. При симетрії відносно прямої $y = x$ пряма $y = -4x + 4$ переходить у пряму ...

А	Б	В	Г	Д
$y = -\frac{x}{4} + 1$	$y = \frac{x}{4} + 4$	$y = -4x - 4$	$y = 4x + 4$	$y = \frac{x}{4} + 1$

44.15. Установити образ параболи $y = x^2$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{a}(-1; 2)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = x^2 - 2x + 1$	$y = x^2 - 2x - 1$	$y = x^2 - 2x + 3$	$y = x^2 + 2x + 3$	$y = x^2 + 2x + 1$

44.16. Установити образ прямої $y = -x + 4$ при паралельному перенесенні на вектор $\vec{m}(1; 1)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = -2x + 5$	$y = -x + 5$	$y = -x + 6$	$y = -2x + 6$	$y = x + 5$

44.17. Знайти образ точки $(\sqrt{2}; 0)$ при повороті навколо початку координат на кут 45° проти годинникової стрілки.

А $(0; \sqrt{2})$ Б $(1; 1)$ В $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ Г $\left(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2\right)$ Д $(\sqrt{2}; 1)$

44.18. Указати рівняння образу кола $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ при гомотетії з коефіцієнтом 3 і центром у початку координат.

А	Б	В	Г	Д
$(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 36$	$(x - 3)^2 + (y + 6)^2 = 12$	$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 12$	$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$	$(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 36$

44.19. Точка $A(2; -3)$ — образ точки $B(8; 6)$ при гомотетії з центром у точці $M(4; 0)$. Знайти коефіцієнт гомотетії.

А 3 Б 2 В 0,5 Г -2 Д $-0{,}5$

44.20. Точка $M(6; -3)$ — образ точки $N(2; 1)$ при гомотетії з коефіцієнтом $k = -\frac{1}{3}$. Указати координати центра гомотетії.

А $(5; -2)$ Б $(-5; 2)$ В $(-2; 1)$ Г $\left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ Д $(-5; -2)$

Завдання 44.21–44.28 передбачають установлення відповідності. До кожного рядка, позначеного ЦИФРОЮ, доберіть один відповідник, позначений БУКВОЮ, і поставте позначки на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви).

44.21. Дано точку $A(5; -2)$. Установити відповідність між перетвореннями (1–3) та координатами образу точки (А–Д).

1 Паралельне перенесення на вектор $(3; 4)$	А $(5; 2)$
2 Симетрія відносно початку координат	Б $(2; -6)$
3 Симетрія відносно осі x	В $(-5; 2)$
	Г $(-5; -2)$
	Д $(8; 2)$

44.22. Дано точку $B(0; \sqrt{2})$. Установити відповідність між поворотами навколо початку координат (1–3) та координатами образу точки (А–Д).

1 Поворот на 90° за годинниковою стрілкою	А $(1; 1)$
2 Поворот на 90° проти годинникової стрілки	Б $(-1; 1)$
3 Поворот на 45° за годинниковою стрілкою	В $(-1; -1)$
	Г $(\sqrt{2}; 0)$
	Д $(-\sqrt{2}; 0)$

44.23. Дано пряму $y = \frac{x}{3} + 1$. Установити відповідність між перетвореннями (1–3) та рівняннями образів даної прямої (А–Д).

1 Симетрія відносно осі x	А $y = -\frac{x}{3} + 1$
2 Симетрія відносно осі y	Б $y = \frac{x}{3} + 1$
3 Симетрія відносно початку координат	В $y = -\frac{x}{3} - 1$
	Г $y = x + 2$
	Д $y = \frac{x}{3} - 1$

44.24. Дано точку $A(4; 6)$. Установити відповідність між гомотетіями (1–3) та координатами образу точки (А–Д).

1 Гомотетія з центром $O(3; 3)$ і $k = 2$	А $(8; 8)$
2 Гомотетія з центром $O(2; 5)$ і $k = 3$	Б $(8; 10)$
3 Гомотетія з центром $O(3; 7)$ і $k = -2$	В $(2; 8)$
	Г $(1; 9)$
	Д $(5; 9)$

44.25. Дано коло $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$. Установити відповідність між перетвореннями (1–3) та рівняннями образів кола (А–Д).

1 Симетрія відносно осі x	А $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 4$
2 Симетрія відносно осі y	Б $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 4$
3 Симетрія відносно прямої $y = x$	В $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$
	Г $(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 4$
	Д $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 4$

44.26. *Дано графік* $y = \sqrt{x}$. Установити відповідність між перетвореннями (1–3) та рівняннями образів графіка (А–Д).

1 Симетрія відносно прямої $x = 4$

2 Симетрія відносно прямої $y = 2$

3 Симетрія відносно прямої $y = -1$

А $y = -\sqrt{x} - 2$

Б $y = \sqrt{-x - 2}$

В $y = \sqrt{-x + 4}$

Г $y = \sqrt{-x + 8}$

Д $y = -\sqrt{x} + 4$

44.27. Дано коло $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$. Установити відповідність між гомотетіями (1–3) та рівняннями образів кола (А–Д).

1 Гомотетія з центром $O(0; 1)$ і $k = -\frac{1}{3}$

2 Гомотетія з центром $O(0; 1)$ і $k = \frac{1}{3}$

3 Гомотетія з центром $O(0; -2)$ і $k = \frac{1}{3}$

А $(x + 1)^2 + y^2 = 1$

Б $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 0$

В $(x - 1)^2 + y^2 = 1$

Г $(x - 1)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = 1$

Д $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$

44.28. Дано параболу $y = x^2 - 4x + 8$. Установити відповідність між перетвореннями (1–3) та рівняннями образів параболи (А–Д).

1 Паралельне перенесення на вектор $(2; -1)$

2 Паралельне перенесення на вектор $(-4; 1)$

3 Паралельне перенесення на вектор $(1; 2)$

А $y = x^2 + 4x + 8$

Б $y = x^2 - 8x + 19$

В $y = x^2 - 6x + 15$

Г $y = x^2 + 4x + 9$

Д $y = x^2 - 4x - 8$

Розв'яжіть завдання 44.29–44.32. Відповідь запишіть десятковим дробом.

44.29. Вершина A квадрата $ABCD$ є центром повороту проти годинникової стрілки на кут 90°. Знайти (у см): **1)** CC_1; **2)** $\sqrt{5}B_1C$, де точки B_1 і C_1 — відповідно образи точок B і C при заданому повороті, якщо $AB = 5$ см.

44.30. Середня лінія трикутника відтинає від нього трапецію, площа якої дорівнює 21 см^2. Знайти площу (у см^2) даного трикутника.

44.31. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються у точці E. Знайти площу (у см^2) трапеції, якщо $BC : AD = 3 : 5$, а площа трикутника AED дорівнює 175 см^2.

44.32. Пряма, паралельна до сторони AB трикутника ABC, перетинає його сторону AC у точці E, а сторону BC — у точці F. Знайти площу (у см^2) трикутника CEF, якщо $AE : EC = 3 : 2$, а площа трикутника ABC дорівнює 75 см^2.

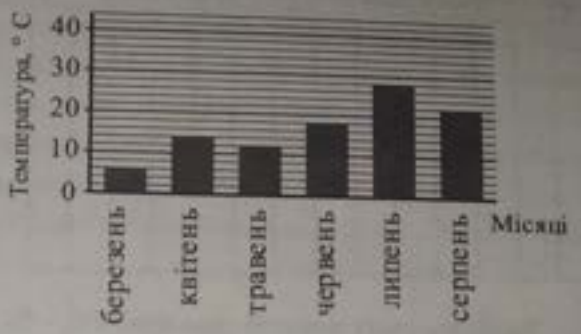
ВАРІАНТИ ЗОШИТІВ У ФОРМАТІ ЗНО

ЗОШИТ 1

Завдання 1–4 і 5–16 мають відповідно чотири та п'ять варіантів відповіді, з яких лише один правильний. Виберіть правильний, на Вашу думку, варіант відповіді, позначте його в *бланку А* згідно інструкції. Не робіть інших позначок у *бланку А*, тому що комп'ютерна програма реєструватиме їх як помилки!

Будьте особливо уважні під час заповнення *бланка А!*
Не погіршуйте власноручно свого результату неправильною формою запису відповідей

1. На діаграмі відображено інформацію про середньомісячну температуру протягом 6 місяців. Яке з наведених тверджень є правильним?

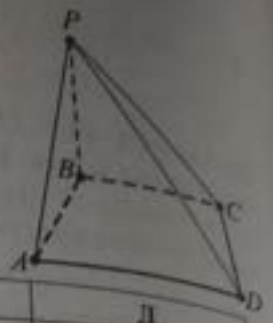


А	Б	В	Г
найнижча середньомісячна температура була в травні	у липні середньомісячна температура була менша за 26 °С	у березні середньомісячна температура була не нижчою за 8 °С	середньомісячна температура травня нижча за середньомісячну температуру квітня

2. Укажіть найменшу кількість упаковок, у кожній з яких є по 25 троянд, щоб скласти 12 букетів по 7 троянд.

А	Б	В	Г
9	84	3	4

3. На рисунку $ABCD$ — прямокутна трапеція з прямим кутом B. PB — перпендикуляр до площини ABC. Визначте вид бічної грані APB.

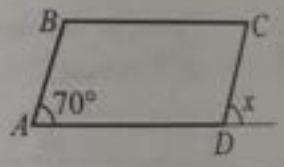


А	Б	В	Г	Д
прямокутний трикутник	правильний трикутник	тупокутний трикутник	квадрат	трапеція

4. Знайдіть суму коренів рівняння $2x^2 - 5x - 7 = 0$.

А	Б	В	Г
5	–2,5	2,5	–7

5. Нехай $ABCD$ — паралелограм. За даними рисунка знайдіть градусну міру кута x.



А	Б	В	Г	Д
70°	95°	110°	85°	75°

6. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на відрізку $[-4; 4]$. Укажіть поміж наведених координати точок, що належать цьому графіку.



А	Б	В	Г	Д
$(-5; -1)$	$(0; 0)$	$(1; 1)$	$(2; 1)$	$(0; 2)$

7. $(\sqrt{a}-2)(\sqrt{a}+2) = \ldots$

А	Б	В	Г	Д
$a^2 - 16a + 64$	$a - 4$	$a^2 - 2a + 4$	$a + 4$	$\sqrt{a} - 4$

8. Шлях s (в км), який проходить автомобіль за час t (в год) дорівнює $s = 50(t + 2) - 100$. Який шлях пройде автомобіль за 4 години?

А	Б	В	Г	Д
100 км	200 км	150 км	300 км	400 км

9. Спростіть вираз $\frac{(3a^4)^2}{6a^3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{6a^3}$	$\frac{3a^9}{2}$	$\frac{a^9}{2}$	$\frac{3a^{11}}{2}$	$3a^3$

10. Які з наведених тверджень (I–III) істинні?

I. Протилежні сторони паралелограма рівні.

II. Сума кутів трикутника не перевищує 180 °.

III. Основи трапеції паралельні.

А	Б	В	Г	Д
Лише I	лише II	лише III	лише II і III	лише I і III

11. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x+3y=14; \\ 2y-x=6 \end{cases}$ і знайдіть добуток компонентів розв'язку.

А	Б	В	Г	Д
16	20	8	$1\frac{1}{5}$	$13\frac{1}{3}$

12. Укажіть похідну функції $f(x)=\frac{1}{x^3}+\sqrt{x}$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{3}{x^4}+\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{3x^3}+2\sqrt{x}$	$\frac{3}{x^4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{3x^2}+\frac{\sqrt{x}}{2}$

13. Розв'яжіть нерівність $9^{x+5}>27$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-3,5)$	$(3;+\infty)$	$(-3,5;+\infty)$	$(0;-3,5)$	будь-яке дійсне число

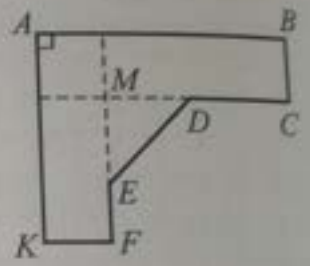
14. Обчисліть $\sin 510°$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

15. Знайдіть повну поверхню циліндра з радіусом 5 см і висотою 15 см.

А	Б	В	Г	Д
375π см^2	100π см^2	400π см^2	200π см^2	150π см^2

16. На кресленні (вид зверху) зображено стільницю кухонного гарнітура (див. рисунок). Визначте площу стільниці, якщо $KF = BC = 0{,}6$ м, $DC = 1{,}5$ м, $EF = 3$ м, $ED = 0{,}56$ м, $ME = MD$. Укажіть відповідь, найближчу до точної.



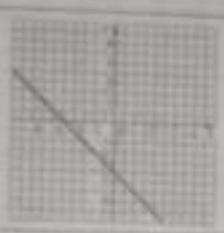
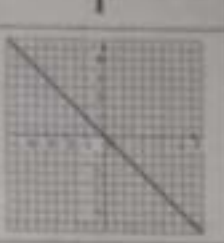
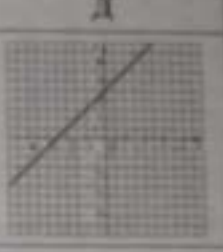
А	Б	В	Г	Д
3,62 м^2	2,64 м^2	3,45 м^2	3 м^2	4,62 м^2

У завданнях 17–20 до кожного з трьох рядків інформацій, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань у *бланку А* на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви). Усі інші вилн Вашого запису в *бланку А* комп'ютерна програма реєструватиме як помилки!

Будьте особливо уважні під час заповнення *бланка А!*
Не виправляйте власноручно свого результату неправильною формою запису відповідей

17. Дано лінійну функцію $y = ax + b$. Установіть відповідність між знаками коефіцієнтів a й b (1–3) та ескізами графіків (А–Д).

1	2	3
$a>0, b>0$	$a>0, b<0$	$a<0, b>0$

А	Б	В	Г	Д
				

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

18. Установіть відповідність між заданими виразами (1–3) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $\sqrt{\left(\sqrt{2}-2\right)^2}$

2 $\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-2\right)^3}$

3 $-\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}\right)^4$

А $2+\sqrt{2}$

Б $-2-\sqrt{2}$

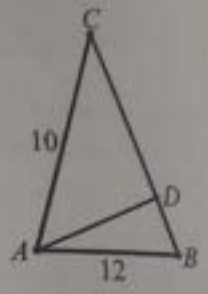
В $2-\sqrt{2}$

Г $6-4\sqrt{2}$

Д $\sqrt{2}-2$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

19. На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC ($AC = BC$), його висоту AD і позначено величини деяких елементів. Установіть відповідність між елементами трикутника (1–3) та їхніми величинами (А–Д).



1 AD

2 S

3 Радіус вписаного кола

А 9,6

Б 6,25

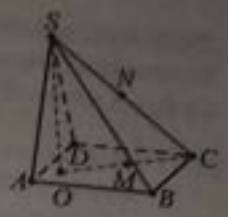
В 3

Г 48

Д 32

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

9 Дано піраміду $SABCD$, в основі якої паралелограм. SO — висота піраміди. Точки M і N — середини відрізків OC і SC відповідно. Установіть відповідність між прямими і площинами (1–3) та їх взаємним розміщенням (А–Д).



1 Пряма MN і площина ABC
2 Прямі MN і SO
3 Прямі MN і SD

А Не можна встановити
Б Перпендикулярні
В Перетинаються, але не перпендикулярні
Г Мимобіжні
Д Паралельні

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					

Розв'яжіть завдання 21–29. Одержані числові відповіді запишіть у зошиті та *бланку А*. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми, по одній цифрі в кожній клітинці відповідно до зразків, наведених у *бланку А*.

21. Початкова вартість телефона становила 2400 грн. Унаслідок уцінення його вартість було зменшена на 20%.

1. Обчислити вартість телефона після уцінення (у грн).

Відповідь: ☐☐☐☐ , ☐☐☐

2. Скільки відсотків становить початкова вартість телефона від його вартості після уцінення?

Відповідь: ☐☐☐☐ , ☐☐☐

12. На колі із центром O вибрано точки A, B й C так, що $\angle AOC$ (див. рисунок). Довжина дуги AC кола дорівнює 6π см.

1. Визначте градусну міру центрального кута AOC.

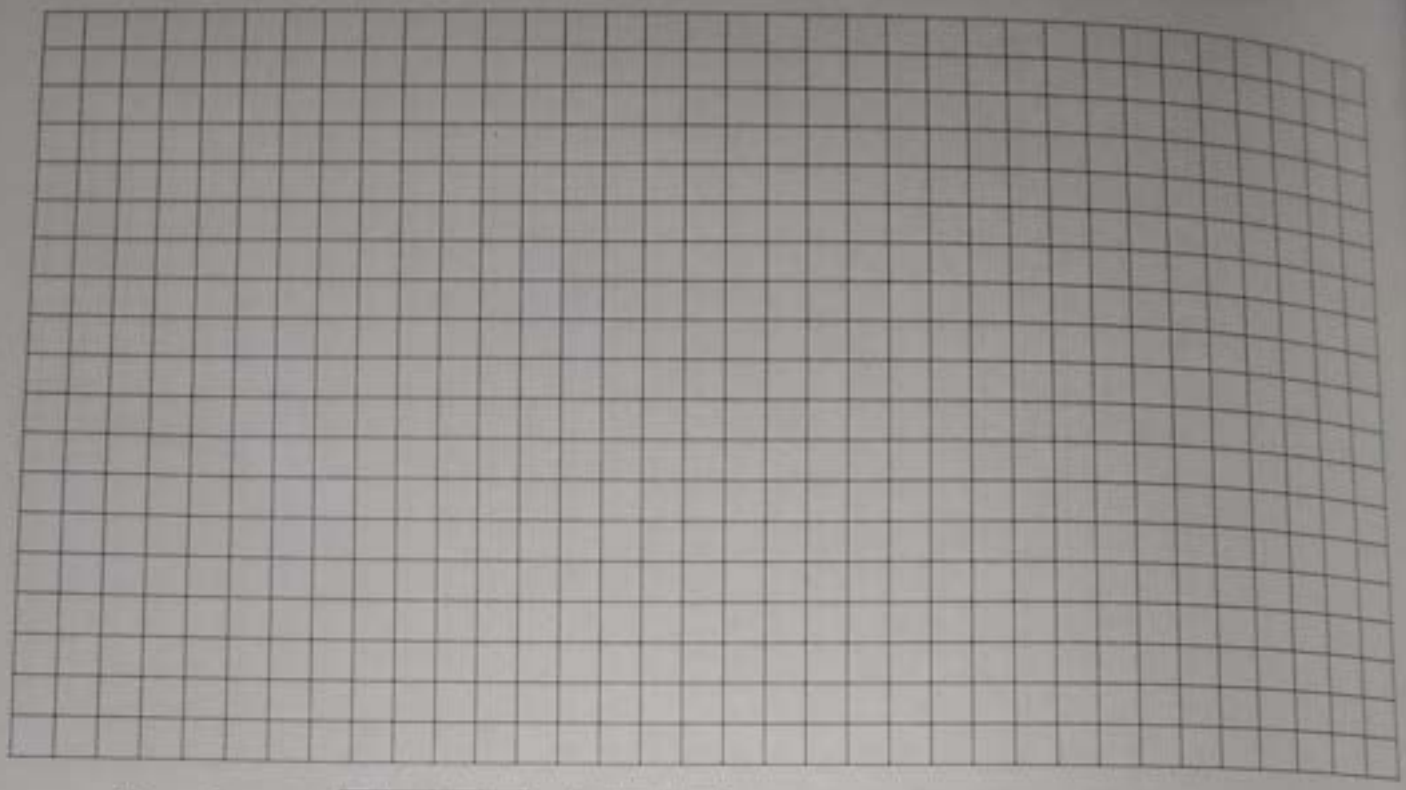
Відповідь: ☐☐☐☐ , ☐☐☐

2. Визначте радіус цього кола (у см).

Відповідь: ☐☐☐☐ , ☐☐☐

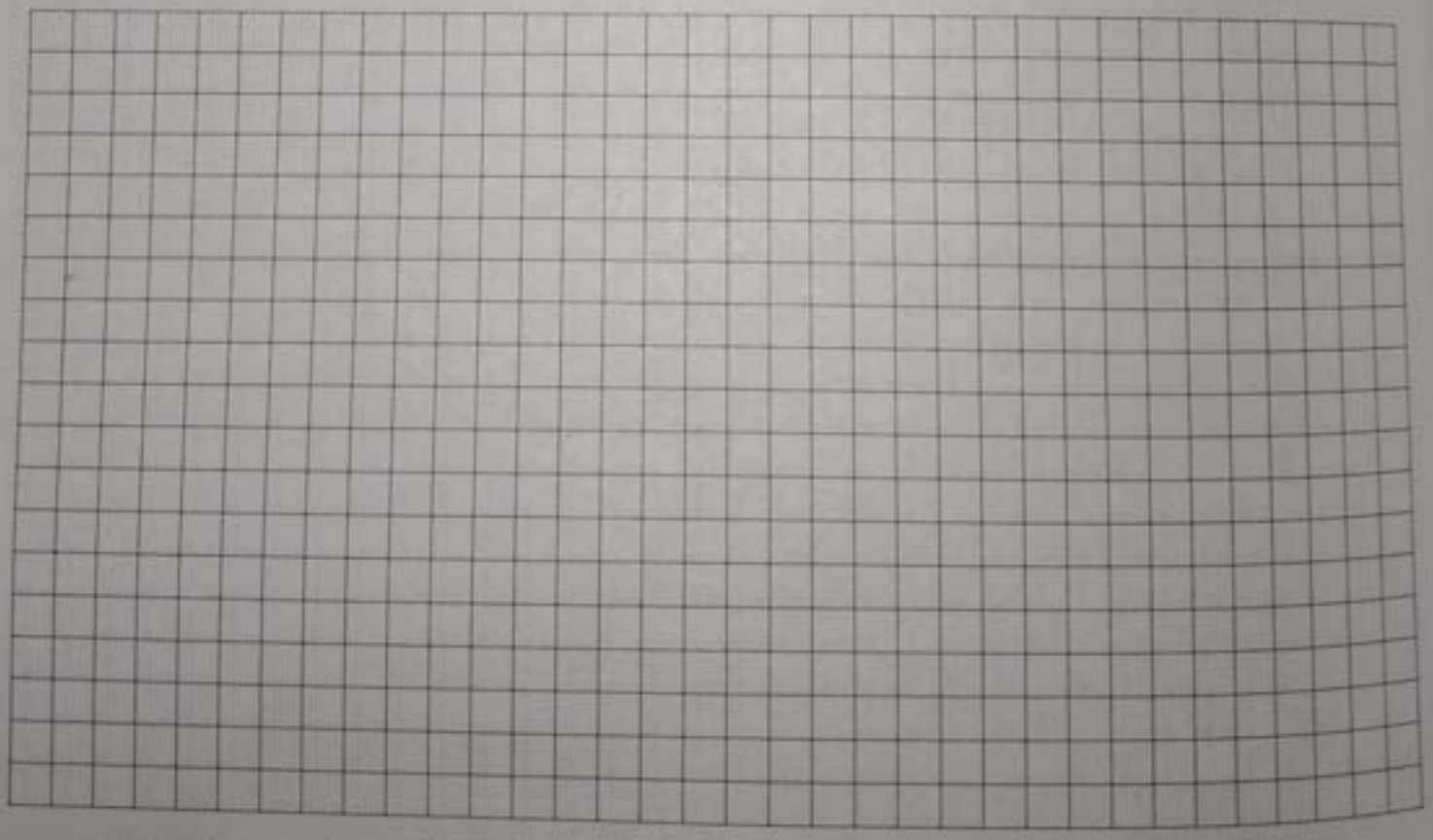
23. У прямокутній системі координат у просторі задано точки $A(0; 5; 4)$ і $B(-2; 1; 8)$. Точка B є серединою відрізка AC.

1. Обчислити ординату точки C.



Відповідь: ☐☐☐☐, ☐☐☐

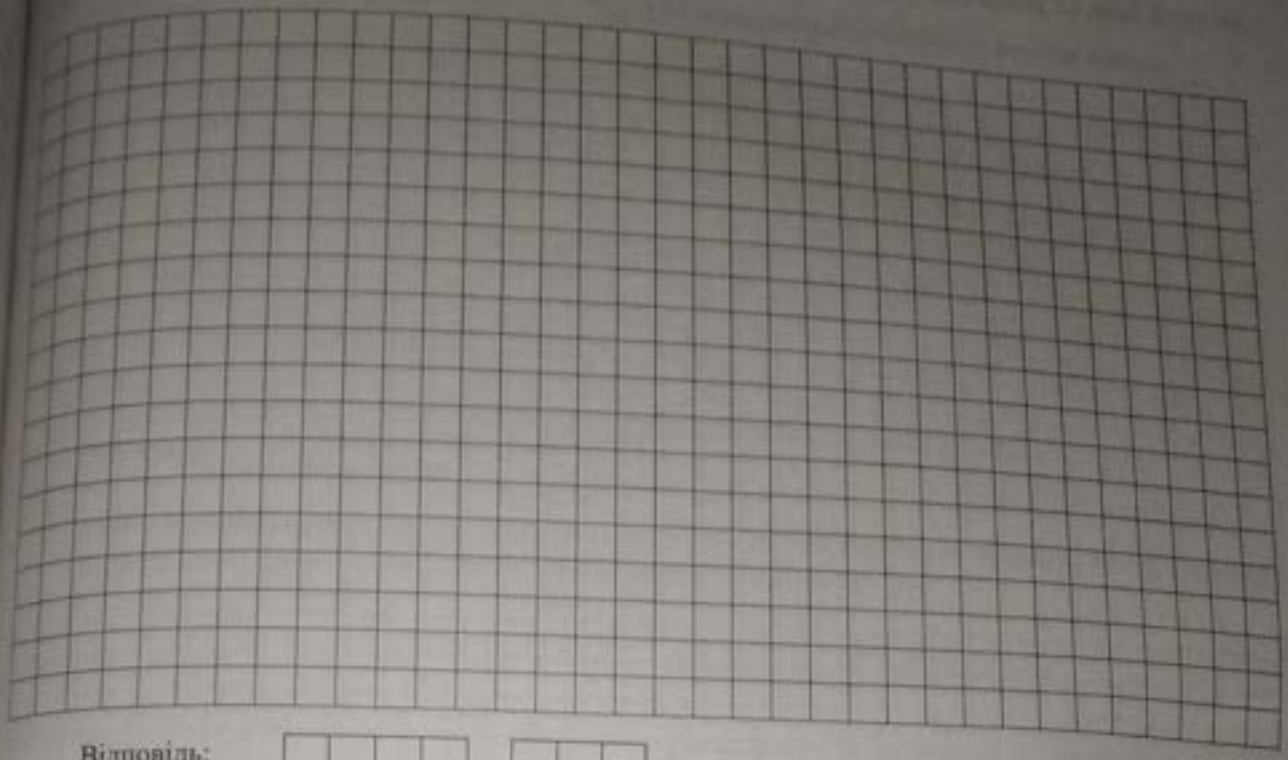
2. Обчислити довжину (модуль) вектора $\overrightarrow{AB}$.



Відповідь: ☐☐☐☐, ☐☐☐

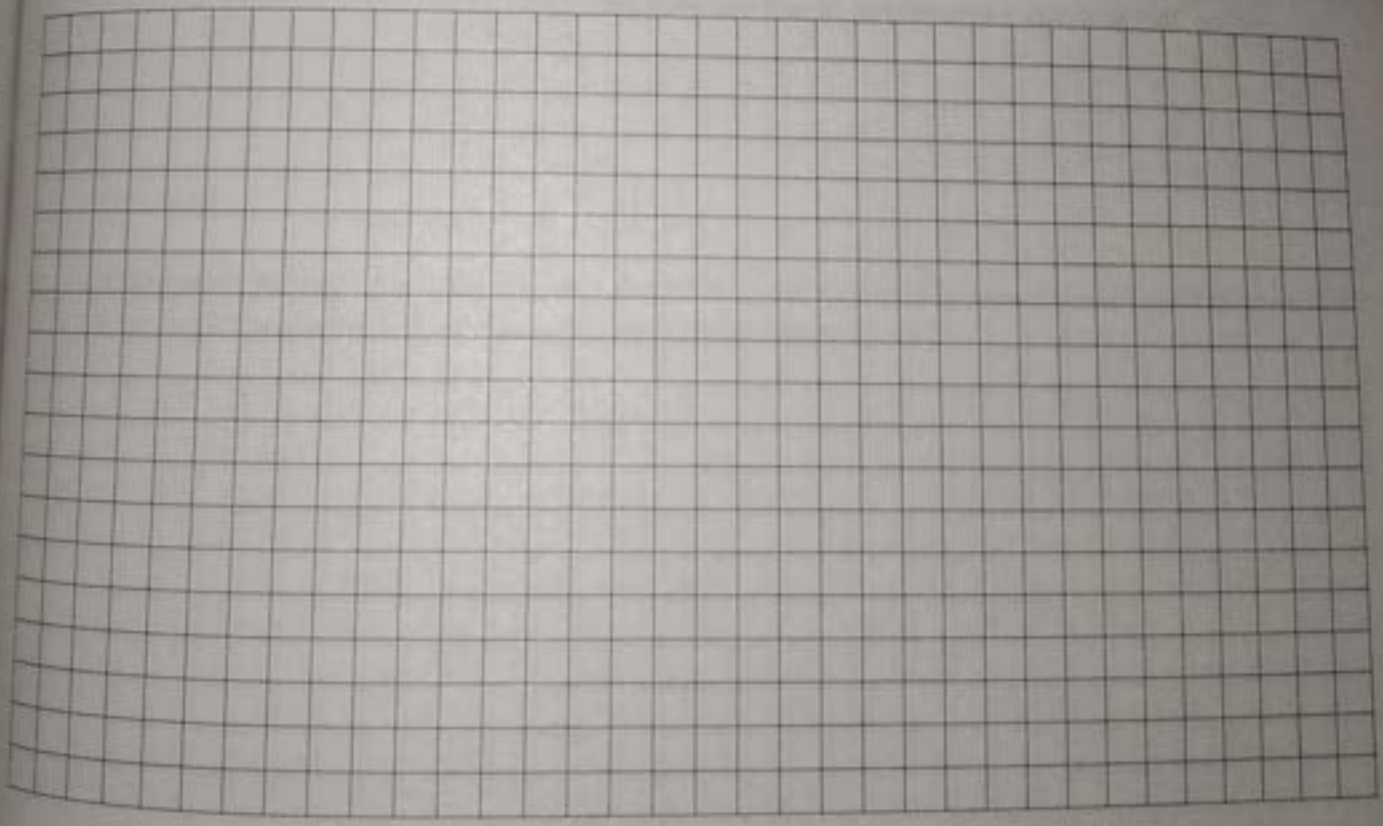
3. В арифметичній прогресії (a_n) відомо, що $a_5 = -11$, $a_7 = -27$.

1. Визначити різницю цієї прогресії.



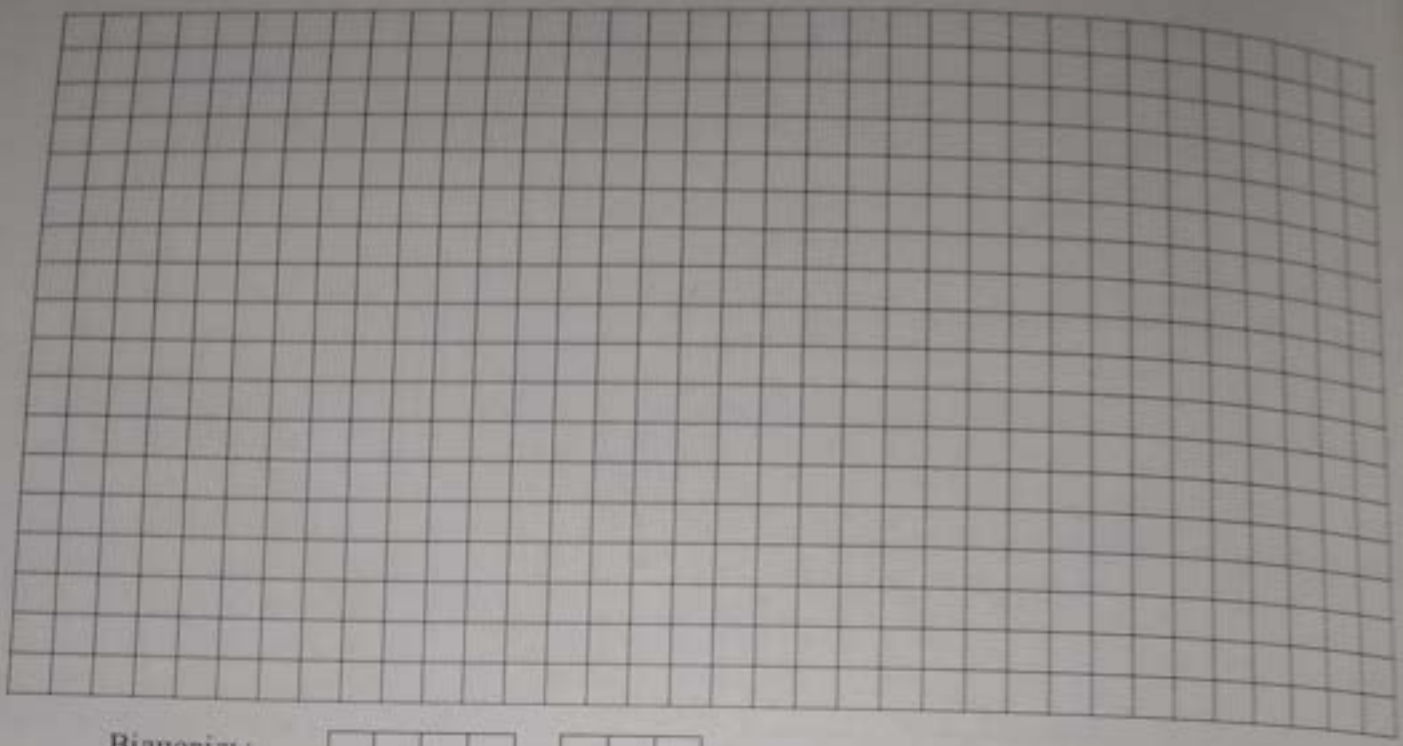
Відповідь: ☐☐☐☐ , ☐☐☐

2. Обчислити S_{10}.



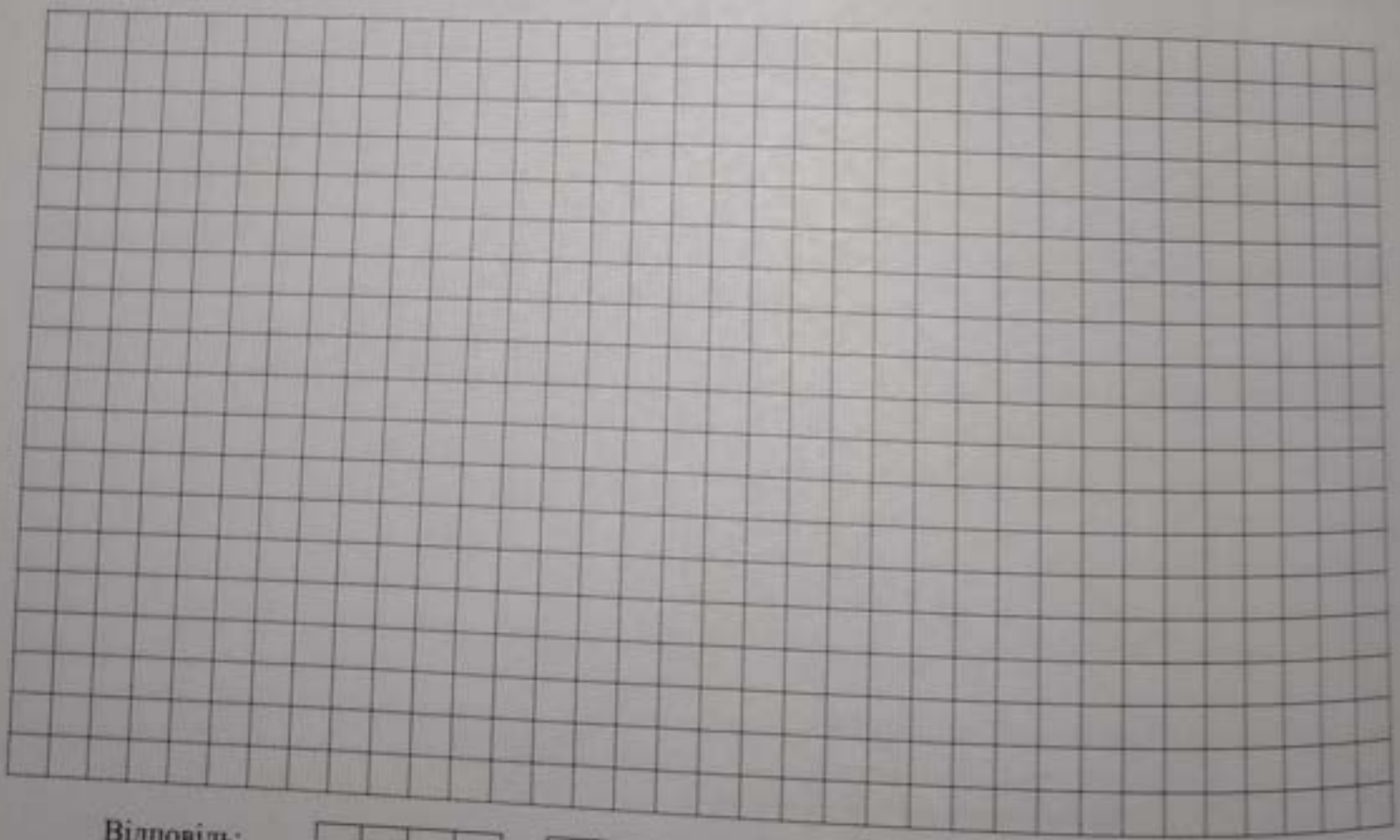
Відповідь: ☐☐☐☐ , ☐☐☐

25. **В урні 12 різнокольорових куль. Скільки в урні білих куль, якщо ймовірність того, що 2 навмання вибрані кулі будуть білими, дорівнює $\frac{1}{11}$?**



Відповідь: | | | | | , | | | |

26. Катер пройшов за течією річки 60 км за деякий час. За цей же час проти течії він пройшов би 40 км. Яку відстань у кілометрах за цей час пропливе пліт?



Відповідь: | | | | | , | | | |

27. Обчисліть значення виразу $\frac{\log_{12} 2 + \log_{12} 72}{\log_3 75 - \log_3 3}$.

Відповідь: ☐☐☐☐,☐☐☐

28. Розв'яжіть рівняння $|x - 3| = 4$. Якщо рівняння має єдиний корінь, то запишіть його у відповіді. Якщо рівняння має кілька коренів, то у відповіді запишіть їх суму.

Відповідь: ☐☐☐☐,☐☐☐

29. З 10 різних троянд і 8 різних жоржин потрібно скласти букет, у якому повинно бути не менше 8 троянд і 7 жоржин. Скількома способами це можна зробити?

Відповідь: ☐☐☐☐,☐☐☐

Розв'яжіть завдання 30, 31. Запишіть у *бланку Б* послідовні логічні дії та пояснення всіх етапів розв'язання завдань, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками графіками тощо.

30. Задано функцію $y = 3 - \sqrt{x}$.

1. Для наведених у таблиці значень x та y заданої функції визначте відповідні їм значення y та x. Результати запишіть у таблицю.

x	0	4	
y			0

2. Визначте координати точок перетину графіка функції з осями координат.

3. Побудуйте графік функції $y = 3 - \sqrt{x}$.

4. Знайдіть одну з первісних $F(x)$ для функції $f(x) = 3 - \sqrt{x}$.

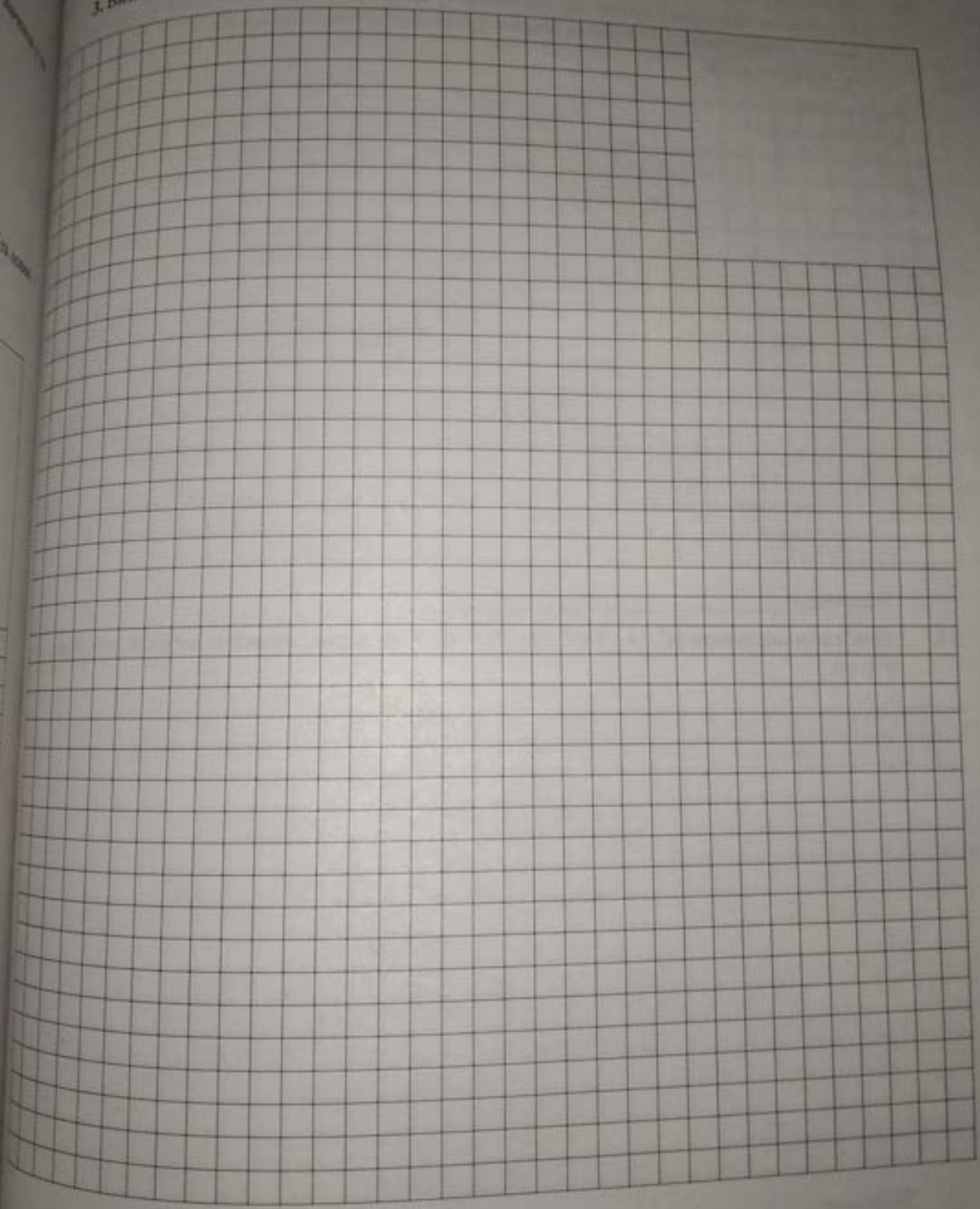
5. Запишіть формулу для обчислення площі S фігури, обмеженої графіком функції f та осями координат.

6. Обчисліть площу S цієї фігури.

Відповідь: _____

Апофема правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ з основою $ABCD$ дорівнює 10 і нахилена до площини основи під кутом 60°.

1. Зобразіть на рисунку правильну чотирикутну піраміду $SABCD$ та укажіть на рисунку кут α між апофемою і площиною основи.
2. Обчисліть довжину сторони основи піраміди.
3. Визначте повну поверхню S піраміди.



Відповідь: _____

Розв'яжіть завдання 32–34. Запишіть у *бланку В* послідовні логічні дії та обґрунтування кожного з етапів розв'язання завдань, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками, графіками тощо.

32. Відповідно до умови задачі 31:

1. Зобразіть на рисунку правильну чотирикутну піраміду *SABCD* та позначте на рисунку кут β нахилу бічного ребра до площини основи. *Обґрунтуйте його положення.*

2. Обчисліть кут β.

Відповідь: _____

33. Розв'язати нерівність $(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) \le -5$. У відповідь записати добуток усіх цілих розв'язків.

Відповідь: _____

Задано рівняння $\sqrt{x^2+5x-24}\left(9^x+2a\cdot 3^{x+1}+9a^2\right)=0$, де x — змінна, a — стала.

1. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x^2+5x-24}=0$.
2. Розв'яжіть задане рівняння залежно від значення a.

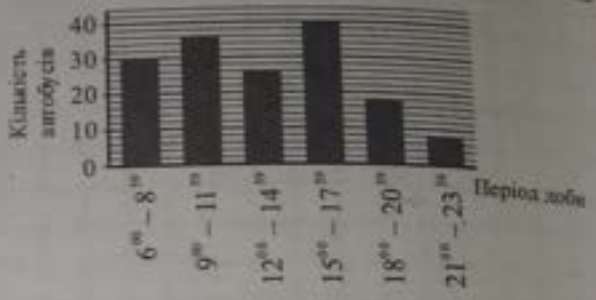
Відповідь: _____

ЗОШИТ 2

Завдання 1–4 і 5–16 мають відповідно чотири та п'ять варіантів відповіді, з яких лише один правильний. Виберіть правильний, на Вашу думку, варіант відповіді, позначте його в *бланку А* згідно інструкції. Не робіть інших позначок у *бланку А*, тому що комп'ютерна програма реєструватиме їх як помилки!

Будьте особливо уважні під час заповнення *бланка А!*
Не погіршуйте власноручно свого результату неправильною формою запису відповідей

1. На діаграмі відображено інформацію про кількість автобусів, які працювали на міських маршрутах. Яке з наведених тверджень є правильним (істинним)?

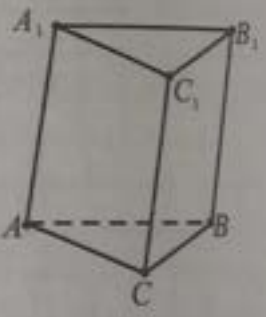


А	Б	В	Г
найменша кількість автобусів працювала з 6^{00} до 8^{59}	з 9^{00} до 11^{59} працювало 34 автобуси	з 15^{00} до 17^{59} працювало автобусів більше, ніж з 9^{00} до 11^{59}	з 18^{00} до 20^{59} працювало менше 12 автобусів

2. Кожному із 23 учнів класу для контрольних і самостійних робіт з математики необхідно три зошити. Вказати найменшу кількість пачок зошитів, яку необхідно придбати, якщо кожна з пачок містить по 20 зошитів.

А	Б	В	Г
2	3	4	5

3. На рисунку зображено похилу призму. Її бічними гранями є…



А паралелограми.

Б прямокутники.

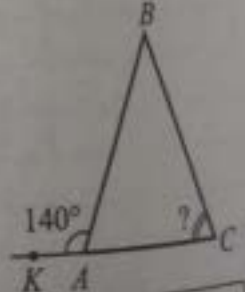
В трикутники.

Г трапеції.

4. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 5x - 14 = 0$.

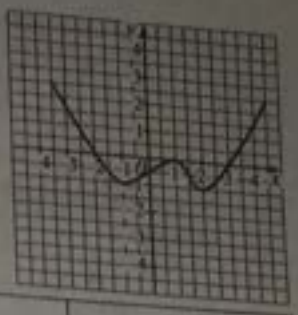
А	Б	В	Г
7; 2	–7; –2	7; –2	–7; 2

5. На рисунку зображено рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$), точка A лежить на прямій KC. Визначте градусну міру кута ACB, якщо $\angle KAB = 140°$.



А	Б	В	Г	Д
140°	40°	120°	60°	180°

9. На рисунку зображено графік функції $y = f(x)$, визначеної на відрізку $[-3,5; 4,5]$. Укажіть поміж наведених координати точки, з від'ємною ординатою, що належить цьому графіку.



А	Б	В	Г	Д
$(-3; 1,5)$	$(-2; 0)$	$(2; -1)$	$(1; -1)$	$(-3; -1,5)$

10. $(a-b)(a^2+ab+b^2) =$

А	Б	В	Г	Д
a^2+b^2	a^2-b^2	a^3+b^3	a^3-b^3	$a-b$

11. Сума A (у грн), яку може отримати вкладник банку, пов'язана з терміном вкладу n (у місяцях) співвідношенням $A = 1500(1 + 0{,}01n)$. Яку суму в гривнях повернуть вкладнику через 9 місяців?

А	Б	В	Г	Д
1500 грн	1535 грн	1635 грн	1650 грн	1625 грн

12. Спростіть вираз $\dfrac{25x^3}{(5x^3)^4}$.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{25}{x^4}$	$\dfrac{1}{25x^4}$	$\dfrac{x^4}{25}$	$\dfrac{5}{x^3}$	$\dfrac{5}{x}$

13. Які з наведених тверджень (I–III) істинні?

I. Периметр чотирикутника дорівнює півсумі його сторін.

II. Бічні сторони трапеції паралельні.

III. У трикутнику не може бути двох тупих кутів.

А	Б	В	Г	Д
Лише I	лише II	лише III	лише II і III	лише I і III

14. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3x+4y=-20; \\ 5x+2y=-10. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(3; 4)$	$(0; -5)$	$(7; 9)$	$(2; -4)$	$(1; -7,5)$

15. Знайдіть похідну функції $f(x) = 5\sin x - 7x^2 + 7$.

А	Б	В	Г	Д
$5\sin x - 14x$	$5\cos x - 7x$	$5\cos x - 14x$	$\cos x - 7x + 7$	$5\cos x - 14$

16. Розв'яжіть нерівність $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x+2} \le \dfrac{5}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3)$	$(-3; +\infty)$	$[0,4; +\infty)$	$[-3; +\infty)$	$[-3; 0,4)$

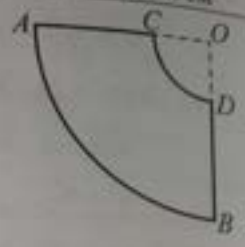
14. Обчисліть $\cos 690°$.

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$

15. Осьовим перерізом циліндра є квадрат зі стороною 10 см. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

А	Б	В	Г	Д
100 см^2	50π см^2	150π см^2	100π см^2	200π см^2

16. Викройка спідниці має форму четвертої частини круга без сектора *COD* (див. рисунок). Довжина дуги *AB* дорівнює 2 м, а дуги *CD* — 0,8 м. Знайдіть довжину спідниці *AC*, указавши відповідь, найближчу до точної.



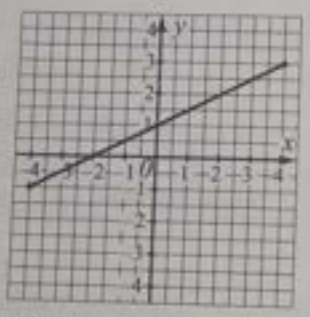
А	Б	В	Г	Д
0,82 м	0,76 м	0,55 м	0,42 м	1 м

У завданнях 17–20 до кожного з трьох рядків інформації, позначених цифрами, доберіть один правильний, на Вашу думку, варіант, позначений буквою. Поставте позначки в таблицях відповідей до завдань у *бланку А* на перетині відповідних рядків (цифри) і колонок (букви). Усі інші види Вашого запису в *бланку А* комп'ютерна програма реєструватиме як помилки!

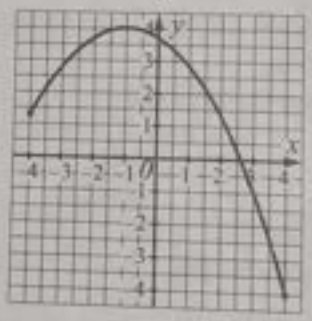
Будьте особливо уважні під час заповнення *бланка А!*
Не погіршуйте власноручно свого результату неправильною формою запису відповідей

17. На рисунку (1–3) зображено графіки функцій, кожна з яких визначена на проміжку $[-4; 4]$. Установіть відповідність між графіком (1–3) функції та властивістю (А–Д) цієї функції.

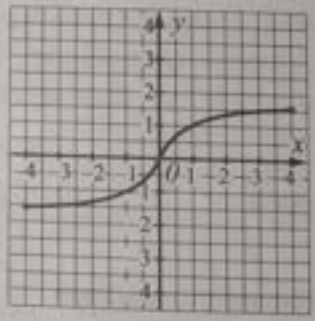
1



2



3



А функція спадає на проміжку $[-4; 4]$

Б точка $(0; 1)$ належить графіку функції

В функція має екстремум

Г функція є фрагментом графіка функції $y = \sqrt{x}$

Д функція є непарною

18. Установіть відповідність між виразами (1–3) та виразами, які їм тотожно дорівнюють (А–Д).

1 $2\lg 5 + \lg 4$

2 $\log_3 5 : \log_3 2$

3 $\log_a\left(a^2 + a\right) - \log_a(a+1)$

А 5

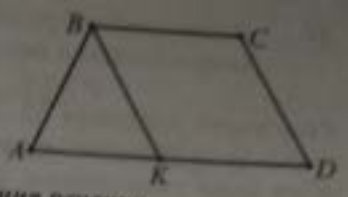
Б $\log_5 2$

В 1

Г $\log_2 5$

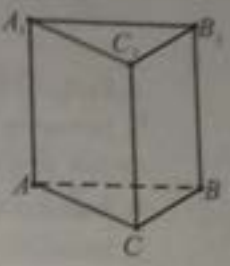
Д $\log_2 4$

20 У рівнобедреній трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$, $AB = CD$) проведено так, як показано на рисунку, $BK \parallel CD$, $ABCD$ — ромб. $BC = 7$ см, $AK = 6$ см. До кожного початку речення (1–3) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.



Початок речення	*Закінчення речення*
1 Довжина середньої лінії трапеції $ABCD$ дорівнює	А 13 см.
2 Висота трапеції дорівнює	Б 10 см.
3 Радіус кола, вписаного в ромб $BCDK$, дорівнює	В $2\sqrt{10}$ см.
	Г $\sqrt{13}$ см.
	Д $\sqrt{10}$ см.

21 На рисунку зображено правильну трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. До кожного початку речення (1–3) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

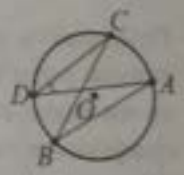


Початок речення	*Закінчення речення*
1 Пряма BB_1	А належить площині ABC.
2 Площина CB_1A_1	Б перпендикулярна площині $A_1B_1C_1$.
3 Пряма AC_1	В паралельна прямій AB.
	Г належить площині ACC_1.
	Д перпендикулярна площині ABB_1.

Розв'яжіть завдання 21–29. Одержані числові відповіді запишіть у зошиті та *бланку А*. Відповідь записуйте лише десятковим дробом, урахувавши положення коми, по одній цифрі в кожній клітинці відповідно до зразків, наведених у *бланку А*.

21 Ребро куба збільшили на 50%. На скільки відсотків збільшиться:
1) площа поверхні куба;
2) об'єм куба?

22 На колі з центром O вибрано точки A, B, C і D так, що $AB = BC$, $\angle ADC = 30°$ (див. рисунок). Довжина дуги AC дорівнює 6π см. Визначте:
1) градусну міру кута ACB;
2) радіус кола (у см).



23 У прямокутній системі координат у просторі задано точки $A(5; 0; -2)$ і $B(-1; 8; -2)$. Точка C є серединою відрізка AB.
1. Обчислити абсцису точки C.
2. Обчислити довжину (модуль) вектора $\overline{AB}$.

24 В арифметичній прогресії (a_n) відомо, що $a_1 = -5$, $a_{13} = -29$.
1. Визначити a_7.
2. Обчислити суму S_{13} тринадцяти перших членів цієї прогресії.

25 У партії з 10 деталей 7 стандартних. Знайти ймовірність того, що серед 6 взятих навмання деталей виявиться 4 стандартних.

26 Відстань між мотоциклістом і велосипедистом дорівнює 168 км, їх швидкості відповідно дорівнюють 72 км/год і 12 км/год. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо мотоцикліст наздоганятиме велосипедиста?

27 Обчисліть значення виразу $\dfrac{\log_8 4 + \log_8 16}{\log_6 16 + \log_6 81}$.

28 Розв'яжіть рівняння $|5x - 2| = 2$. У відповіді запишіть суму коренів.

29. В одного учня 6 різних книжок з математики, а в іншого — 7. Скількома способами можна обміняти 3 книжки першого учня на 3 книжки другого учня?

Розв'яжіть завдання 30, 31. Запишіть у *бланку Б* послідовні логічні дії та пояснення всіх етапів розв'язання завдань, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками графіками тощо.

30. Задано функцію $y = \sqrt[3]{x} + 2$.

1. Для наведених у таблиці значень x та y заданої функції визначте відповідні їм значення y та x. Результати запишіть у таблицю.

x	-1		0	8
y		0		

2. Побудуйте графік функції $y = \sqrt[3]{x} + 2$.

3. Позначте на рисунку точки перетину графіка функції з осями координат і вкажіть координати цих точок.

4. Знайдіть одну з первісних $F(x)$ для функції $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2$.

5. Запишіть формулу для обчислення площі S фігури, обмеженої графіком функції f та осями координат.

6. Обчисліть площу S цієї фігури.

31. Апофема правильної чотирикутної піраміди $SABCD$ з основою $ABCD$ дорівнює 12 і нахилена до площини основи під кутом $60°$.

1. Зобразіть на рисунку правильну чотирикутну піраміду $SABCD$ та позначте на рисунку кут α між апофемою і площиною основи.

2. Обчисліть довжину висоти піраміди.

3. Визначте об'єм піраміди V. У відповідь запишіть $\sqrt{3}V$.

Розв'яжіть завдання 32–34. Запишіть у *бланку В* послідовні логічні дії та пояснення всіх етапів розв'язання завдань, зробіть посилання на математичні факти, з яких випливає те чи інше твердження. Якщо потрібно, проілюструйте розв'язання завдань рисунками графіками тощо.

32. Відповідно до умови задачі 31:

1. Зобразіть на рисунку правильну чотирикутну піраміду $SABCD$ та позначте на рисунку кут β між бічними гранями SBC і SCD. Обґрунтуйте його положення.

2. Обчисліть кут β.

33. Розв'язати нерівність $|x^2 - x + 1| \geq |x^2 + 3x - 4|$.

34. Задано рівняння $\left(x^2 - 2\sqrt{a}x + 1\right)\left(2^x - 4\right) = 0$, де x — змінна, a — стала.

1. Розв'яжіть рівняння $2^x - 4 = 0$.

2. Розв'яжіть задане рівняння залежно від значення a.

ВІДПОВІДІ

АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

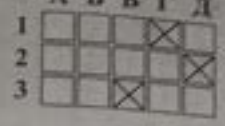
Тема 1. Властивості дій з дійсними числами. Правила порівняння і округлення чисел. Ознаки подільності. НСД і НСК. Арифметичні задачі

1.1. Г. 1.2. Д. 1.3. Б. 1.4. Г. 1.5. В. 1.6. В. 1.7. Г. 1.8. А. 1.9. Г. 1.10. Д. 1.11. Г. 1.12. Б. 1.13. Б. 1.14. Г. 1.15. В. 1.16. А. 1.17. Д. 1.18. В. 1.19. Г. 1.20. Г. 1.21. В. 1.22. В.

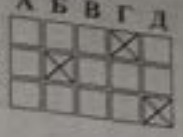
1.23



1.24



1.25



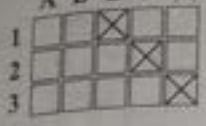
1.26



1.27



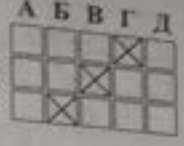
1.28



1.29



1.30



1.31



1.32



1.33 | 1.34 | 1.35 | 1.36 | 1.37.1 | 1.37.2

| 1 | 9 | , | 8 | 3 | | | – | 4 | 2 | , | | | | | | | 8 | 4 | , | | | | 2 | 8 | , | | | | 2 | 1 | , | | |

1.38 | 1.39 | 1.40 | 1.41 | 1.42 | 1.43

| 3 | 2 | , | | | | 2 | 9 | , | | | 2 | 5 | 0 | , | | | 2 | 8 | 8 | , | | | 2 | 2 | , | | | | 1 | 4 | , | | |

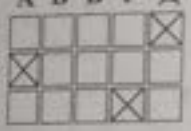
1.44 | 1.45 | 1.46 | 1.47 | 1.48.1 | 1.48.2

| 7 | , | | | | 1 | 0 | , | | | 4 | 8 | , | | | 7 | 2 | , | | | | | 2 | , | | | | 2 | , | 8 | |

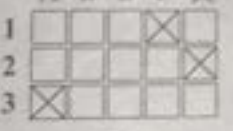
Тема 2. Відношення та пропорції. Відсотки. Задачі на відсотки. Текстові задачі

2.1. Д. 2.2. Д. 2.3. В. 2.4. Д. 2.5. А. 2.6. Д. 2.7. В. 2.8. В. 2.9. Б. 2.10. Г. 2.11. Д. 2.12. В. 2.13. В. 2.14. В. 2.15. Г. 2.16. Г. 2.17. Б. 2.18. А. 2.19. Д. 2.20. А. 2.21. А. 2.22. В. 2.23. А. 2.24. Б. 2.25. А.

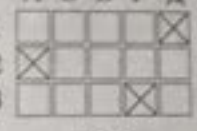
2.26



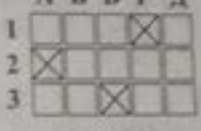
2.27



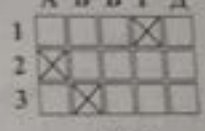
2.28



2.29



2.30



2.31 | 2.32 | 2.33 | 2.34 | 2.35

| | | 1 | , | 2 | | | 5 | 0 | , | | | 2 | 8 | 0 | , | | | | 2 | , | 5 | | | 7 | , | 2 | |

2.36 | 2.37 | 2.38 | 2.39.1 | 2.39.2

| 2 | 0 | 0 | , | | | 5 | 0 | 0 | , | | | 1 | 2 | 5 | , | | 1 | 2 | 5 | , | | 2 | 3 | 7 | , | 5 | |

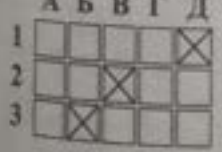
2.40.1 | 2.40.2 | 2.41.1 | 2.41.2 | 2.42 | 2.43

| 5 | 7 | , | 6 | | 2 | 5 | 0 | , | | | | 6 | , | 2 | 5 | | 6 | 0 | , | | | | 5 | , | | | 3 | 0 | , | | |

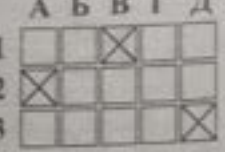
Тема 3. Цілі раціональні вирази

3.1. Д. 3.2. В. 3.3. А. 3.4. Д. 3.5. Г. 3.6. Г. 3.7. А. 3.8. Б. 3.9. А. 3.10. Б. 3.11. А. 3.12. Г. 3.13. А. 3.14. Г. 3.15. Д. 3.16. Г. 3.17. Д. 3.18. В. 3.19. Д. 3.20. В. 3.21. А. 3.22. Г. 3.23. Б.

3.24



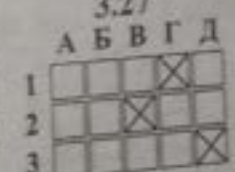
3.25



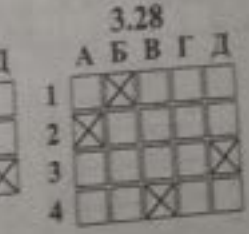
3.26



3.27



3.28



3.29 2,

3.30 15,

3.31 0,

3.32 0,

3.33 9,

3.34 −50,

3.35.1 505,

3.35.2 6,

Тема 4. Дробово-раціональні вирази

4.1. Г. **4.2.** А. **4.3.** В. **4.4.** Г. **4.5.** Б. **4.6.** Д. **4.7.** Б. **4.8.** Г. **4.9.** А. **4.10.** Г. **4.11.** Б. **4.12.** Г. **4.13.** Г. **4.14.** В. **4.15.** Д. **4.16.** Б. **4.17.** Б. **4.18.** А. **4.19.** В. **4.20.** Г.

4.21

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2	⊠				
3		⊠			

4.22

	А	Б	В	Г	Д
1			⊠		
2					⊠
3		⊠			

4.23

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2	⊠				
3				⊠	

4.24

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2				⊠	
3		⊠			

4.25

	А	Б	В	Г	Д
1			⊠		
2					⊠
3				⊠	

4.26

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2	⊠				
3					⊠

4.27 5,

4.28 −0,5

4.29 1,

4.30 0,5

4.31 1,5

4.32 0,05

4.33 1,2

4.34 0,25

4.35 0,

4.36 0,2

4.37 4,

4.38 0,05

4.39 1,11

4.40.1 0,75

4.40.2 0,25

Тема 5. Ірраціональні вирази

5.1. Г. **5.2.** Д. **5.3.** Б. **5.4.** А. **5.5.** Б. **5.6.** В. **5.7.** Д. **5.8.** Б. **5.9.** А. **5.10.** А. **5.11.** А. **5.12.** Д. **5.13.** Г. **5.14.** В. **5.15.** В. **5.16.** Б. **5.17.** Д. **5.18.** Г. **5.19.** Г. **5.20.** В. **5.21.** Г. **5.22.** Д. **5.23.** А. **5.24.** А. **5.25.** Г.

5.26

	А	Б	В	Г	Д
1			⊠		
2					⊠
3		⊠			

5.27

	А	Б	В	Г	Д
1			⊠		
2					⊠
3		⊠			

5.28

	А	Б	В	Г	Д
1			⊠		
2	⊠				
3		⊠			

5.29

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2	⊠				
3		⊠			

5.30

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2				⊠	
3	⊠				

5.31

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2			⊠		
3				⊠	

5.32

	А	Б	В	Г	Д
1	⊠				
2				⊠	
3					⊠

5.33 −5,

5.34 2,

5.35 10,

5.36 4,

5.37 16,

5.38 23,

5.39.1 3,5

5.39.2 4,

5.40 1,

5.41 1,

5.42 −1,

Тема 6. Показникові та логарифмічні вирази

6.1. Г. **6.2.** Д. **6.3.** Г. **6.4.** Г. **6.5.** А. **6.6.** А. **6.7.** Д. **6.8.** Б. **6.9.** Г. **6.10.** Д. **6.11.** А. **6.12.** Д. **6.13.** В. **6.14.** А. **6.15.** Д. **6.16.** Б. **6.17.** Б. **6.18.** Г. **6.19.** В. **6.20.** Б. **6.21.** Г. **6.22.** Б. **6.23.** Б.

6.24

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2				⊠	
3			⊠		

6.25

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2	⊠				
3			⊠		

6.26

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2			⊠		
3					⊠

6.27

	А	Б	В	Г	Д
1			⊠		
2					⊠
3		⊠			

6.28

	А	Б	В	Г	Д
1		⊠			
2				⊠	
3	⊠				

6.29

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2			⊠		
3		⊠			

6.30

	А	Б	В	Г	Д
1		⊠			
2					⊠
3				⊠	

6.31

	А	Б	В	Г	Д
1				⊠	
2					⊠
3		⊠			

6.32

	А	Б	В	Г	Д
1			⊠		
2				⊠	
3					⊠

6.33

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2			⊠		
3	⊠				

6.34

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2			⊠		
3				⊠	

6.35 4,9 | 6.36 12, | 6.37 49, | 6.38 7, | 6.39 6,

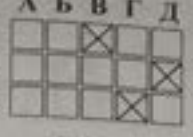
6.40 −4, | 6.41 −2, | 6.42 7, | 6.43 12, | 6.44 −8,

6.45 11, | 6.46 1, | 6.47.1 −1, | 6.47.2 3, | 6.48.1 0,6 | 6.48.2 3,

Тема 7. Тригонометричні вирази

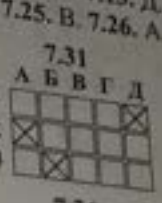
7.1. Д. 7.2. А. 7.3. Б. 7.4. А. 7.5. Б. 7.6. Б. 7.7. В. 7.8. В. 7.9. Б. 7.10. А. 7.11. Д. 7.12. Б. 7.13. Д. 7.14. В. 7.15. А. 7.16. Д. 7.17. Б. 7.18. Г. 7.19. В. 7.20. Б. 7.21. Д. 7.22. А. 7.23. Г. 7.24. А. 7.25. В. 7.26. А.

7.27 

7.28 

7.29 

7.30 

7.31 

7.32 

7.33 

7.34 

7.35 

7.36 

7.37 

7.38 

7.39 

7.40 −1, | 7.41 0, | 7.42 0, | 7.43 2, | 7.44 0,4 | 7.45 1,

7.46 0,375 | 7.47 0, | 7.48 16, | 7.49 23,25 | 7.50.1 17, | 7.50.2 35,

Тема 8. Цілі рівняння

8.1. Г. 8.2. Д. 8.3. В. 8.4. А. 8.5. В. 8.6. Г. 8.7. Б. 8.8. Б. 8.9. Г. 8.10. В. 8.11. Б. 8.12. Г. 8.13. А. 8.14. А. 8.15. Д. 8.16. В. 8.17. Г. 8.18. А. 8.19. Д. 8.20. Б. 8.21. Г. 8.22. В. 8.23. Б. 8.24. Г.

8.25 

8.26 

8.27 

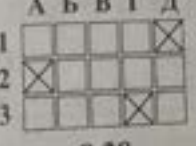
8.28 

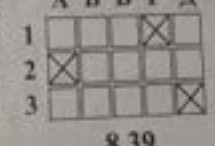
8.29 

8.30 

8.31 

8.32 

8.33 

8.34 

8.35 3, | 8.36 8,5 | 8.37 1, | 8.38 −9, | 8.39 −1,

8.40 −8, | 8.41 2, | 8.42 20, | 8.43 21, | 8.44 62, | 8.45 2,

8.46 3, | 8.47 −2, | 8.48 6, | 8.49 4, | 8.50.1 118, | 8.50.2 105,

Тема 9. Цілі нерівності

9.1. Г. **9.2.** Б. **9.3.** Д. **9.4.** Г. **9.5.** А. **9.6.** Д. **9.7.** Б. **9.8.** Д. **9.9.** Д. **9.10.** В. **9.11.** А. **9.12.** Г. **9.13.** Г. **9.14.** Д. **9.15.** В. **9.16.** Б. **9.17.** Г. **9.18.** А. **9.19.** В. **9.20.** Г. **9.21.** А. **9.22.** Б.

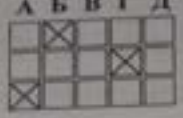
9.23



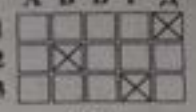
9.24



9.25



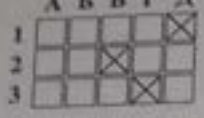
9.26



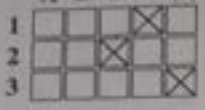
9.27



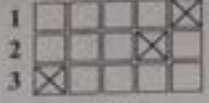
9.28



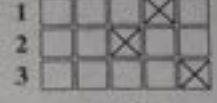
9.29



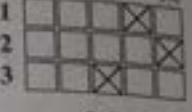
9.30



9.31



9.32



9.33 10,

9.34 −3,

9.35 −3,

9.36 1,

9.37 2,

9.38 0,

9.39 8,

9.40 0,

9.41 4,

9.42 2,125

9.43 12,

9.44 1,5

9.45 −1,

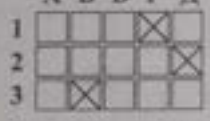
9.46.1 2,

9.46.2 1,

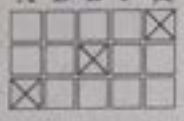
Тема 10. Раціональні й дробові раціональні рівняння

10.1. В. **10.2.** Г. **10.3.** Г. **10.4.** Д. **10.5.** А. **10.6.** Д. **10.7.** Г. **10.8.** Г. **10.9.** Г. **10.10.** Д. **10.11.** А. **10.12.** Г. **10.13.** Б. **10.14.** Б. **10.15.** А. **10.16.** Г. **10.17.** Д. **10.18.** Б. **10.19.** Г. **10.20.** Г.

10.21



10.22



10.23



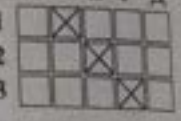
10.24



10.25



10.26



10.27 1,

10.28 −0,5

10.29 9,

10.30 −3,5

10.31 25,

10.32 −4,

10.33 0,8

10.34 40,

10.35 16,

10.36 10,

10.37 3,5

10.38 −7,

10.39 2,

10.40 −0,5

10.41 0,

10.42.1 23,

10.42.2 15,

Тема 11. Раціональні й дробові раціональні нерівності

11.1. В. **11.2.** Д. **11.3.** А. **11.4.** А. **11.5.** Г. **11.6.** А. **11.7.** Б. **11.8.** В. **11.9.** В. **11.10.** Г. **11.11.** А. **11.12.** В. **11.13.** Г. **11.14.** Б. **11.15.** В. **11.16.** Б. **11.17.** В. **11.18.** Д. **11.19.** А. **11.20.** В. **11.21.** Г. **11.22.** Б.

11.23



11.24



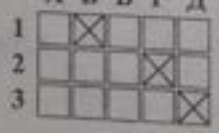
11.25



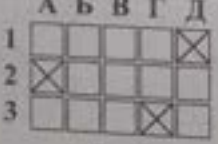
11.26



11.27



11.28



11.29



11.30 −4,

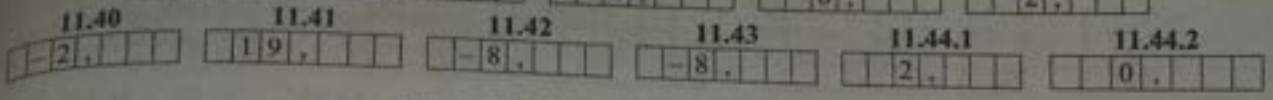
11.31 −24,

11.32 1,

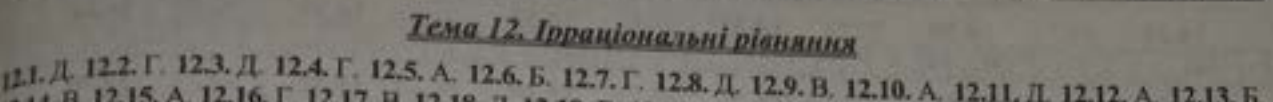
11.33 −1,

11.34 2,

11.35 | 11.36 | 11.37 | 11.38 | 11.39



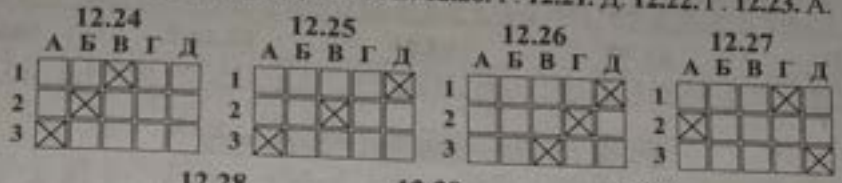
11.40 | 11.41 | 11.42 | 11.43 | 11.44.1 | 11.44.2



Тема 12. Ірраціональні рівняння

12.1. Д **12.2.** Г **12.3.** Д **12.4.** Г **12.5.** А **12.6.** Б **12.7.** Г **12.8.** Д **12.9.** В **12.10.** А **12.11.** Д **12.12.** А **12.13.** Б **12.14.** В **12.15.** А **12.16.** Г **12.17.** В **12.18.** Д **12.19.** В **12.20.** Г **12.21.** Д **12.22.** Г **12.23.** А

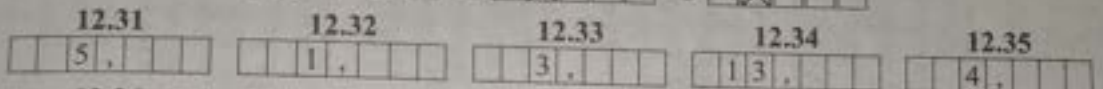
12.24 | 12.25 | 12.26 | 12.27



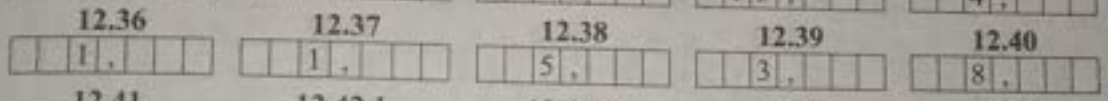
12.28 | 12.29 | 12.30



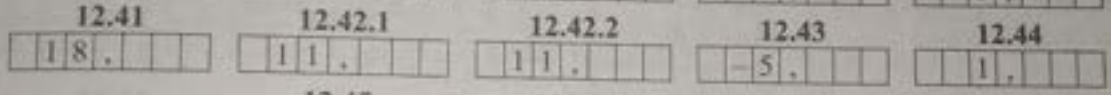
12.31 | 12.32 | 12.33 | 12.34 | 12.35



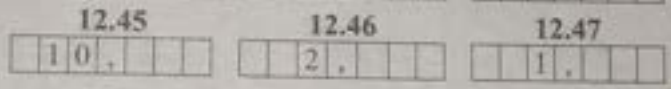
12.36 | 12.37 | 12.38 | 12.39 | 12.40



12.41 | 12.42.1 | 12.42.2 | 12.43 | 12.44



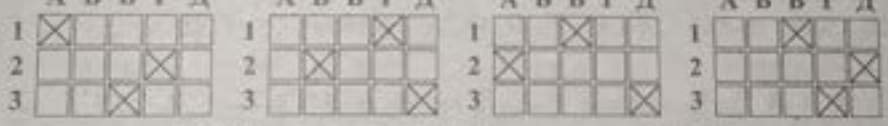
12.45 | 12.46 | 12.47



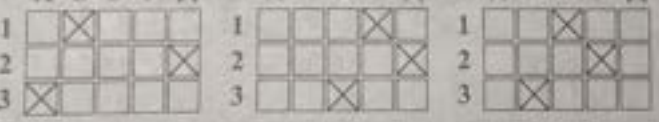
Тема 13. Ірраціональні нерівності

13.1. Г **13.2.** В **13.3.** Д **13.4.** Б **13.5.** Г **13.6.** А **13.7.** В **13.8.** Д **13.9.** Г **13.10.** Б **13.11.** Б **13.12.** Д **13.13.** Г **13.14.** В **13.15.** Д **13.16.** В **13.17.** Б **13.18.** Г **13.19.** Д **13.20.** Б

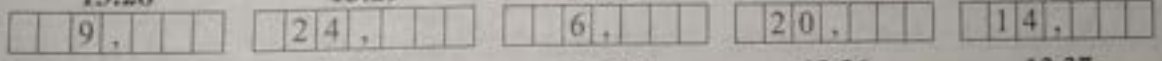
13.21 | 13.22 | 13.23 | 13.24



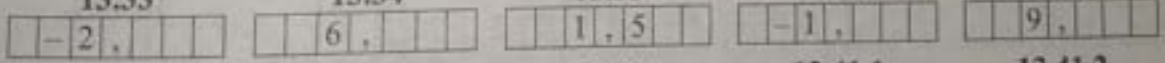
13.25 | 13.26 | 13.27



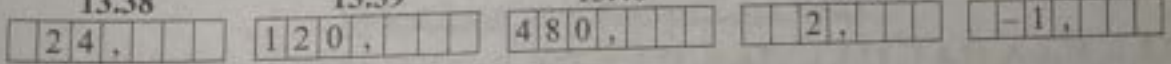
13.28 | 13.29 | 13.30 | 13.31 | 13.32



13.33 | 13.34 | 13.35 | 13.36 | 13.37



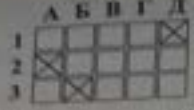
13.38 | 13.39 | 13.40 | 13.41.1 | 13.41.2



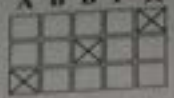
Тема 14. Показникові рівняння

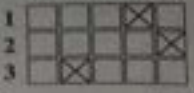
14.1. В **14.2.** Д **14.3.** В **14.4.** Б **14.5.** Д **14.6.** Д **14.7.** Г **14.8.** Б **14.9.** А **14.10.** Г **14.11.** А **14.12.** Д **14.13.** В **14.14.** Б **14.15.** Д **14.16.** Г **14.17.** В **14.18.** А **14.19.** В **14.20.** Г **14.21.** Д **14.22.** Г **14.23.** Г





	14.24	14.25	14.26	14.27	14.28
1					
2					
3					







14.29	14.30	14.31	14.32	14.33	14.34
4,	0,4	7,	9,	0,	−6,

14.35	14.36	14.37	14.38	14.39	14.40
−3,	0,	1,	1,	−0,2	1,

14.41	14.42	14.43	14.44.1	14.44.2
13,	4,	1,	1,	1,

Тема 15. Показникові нерівності

15.1. Г. **15.2.** Б. **15.3.** Г. **15.4.** А. **15.5.** В. **15.6.** Г. **15.7.** Д. **15.8.** Г. **15.9.** Г. **15.10.** А. **15.11.** Д. **15.12.** Д. **15.13.** В. **15.14.** В. **15.15.** А. **15.16.** Б. **15.17.** Г. **15.18.** Б. **15.19.** Д. **15.20.** А. **15.21.** Д.





	15.22	15.23	15.24	15.25
1				
2				
3				





15.26	15.27	15.28	15.29	15.30
45,	−5,	16,	0,5	0,5

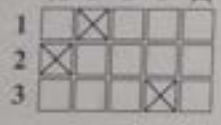
15.31	15.32	15.33	15.34	15.35
3,	0,5	−0,5	4,	3,

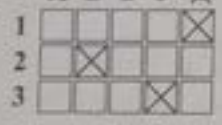
15.36	15.37	15.38	15.39	15.40
0,	−1,	9,	−4,	0,

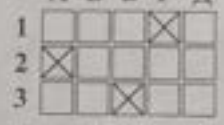
15.41	15.42.1	15.42.2
0,	0,	3,

Тема 16. Логарифмічні рівняння

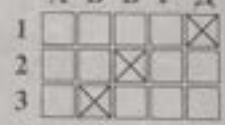
16.1. Г. **16.2.** Д. **16.3.** В. **16.4.** Д. **16.5.** Б. **16.6.** Б. **16.7.** В. **16.8.** Б. **16.9.** Д. **16.10.** В. **16.11.** Г. **16.12.** Д. **16.13.** Г. **16.14.** А. **16.15.** А. **16.16.** А. **16.17.** Д. **16.18.** Д. **16.19.** Б. **16.20.** Д.

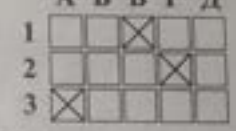


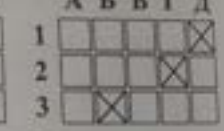




	16.21	16.22	16.23	16.24	16.25	16.26
1						
2						
3						







16.27	16.28	16.29	16.30	16.31
9,	6,	−10,	−10,	900,

16.32	16.33	16.34	16.35	16.36
10,	125,	64,	0,1	1,

16.37	16.38	16.39	16.40.1	16.40.2
1,	0,625	25,	4,	8,

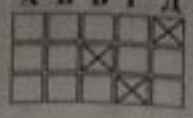
Тема 17. Логарифмічні нерівності

17.1. Г. **17.2.** Д. **17.3.** А. **17.4.** Г. **17.5.** Б. **17.6.** В. **17.7.** Б. **17.8.** Д. **17.9.** Г. **17.10.** Г. **17.11.** В. **17.12.** В. **17.13.** Д. **17.14.** Б. **17.15.** А. **17.16.** Б. **17.17.** Б. **17.18.** Д. **17.19.** В. **17.20.** В. **17.21.** А. **17.22.** Г.

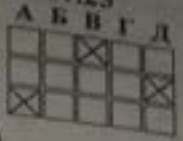
17.23



17.24



17.25



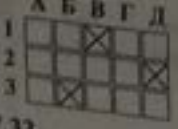
17.26



17.27



17.28



17.29 | 1 , |

17.30 | 2 6 , |

17.31 | 9 0 1 , |

17.32 | 9 , |

17.33 | 1 0 0 , |

17.34 | 2 , |

17.35 | 9 , |

17.36 | 1 , |

17.37 | 1 , |

17.38 | 2 4 , |

17.39 | − 1 , |

17.40 | 1 , |

17.41 | 2 , |

17.42.1 | 0 , 0 0 1 |

17.42.2 | 1 , |

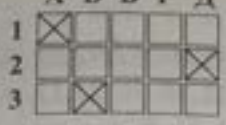
Тема 18. Тригонометричні рівняння

18.1. Д. 18.2. Д. 18.3. Б. 18.4. А. 18.5. В. 18.6. Д. 18.7. В. 18.8. Д. 18.9. Б. 18.10. Г. 18.11. Б. 18.12. А. 18.13. Д. 18.14. В. 18.15. Д. 18.16. В. 18.17. А. 18.18. Б. 18.19. Г. 18.20. Д. 18.21. В. 18.22. Г.

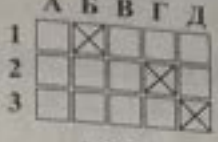
18.23



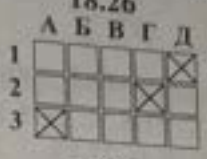
18.24



18.25



18.26



18.27



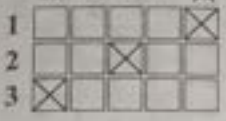
18.28



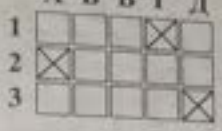
18.29



18.30



18.31



18.32



18.33



18.34



18.35 | 0 , |

18.36 | 1 , 0 |

18.37 | 2 , |

18.38 | 0 , |

18.39 | 2 , |

18.40 | 0 , 5 |

18.41 | 5 , |

18.42 | 0 , 1 2 5 |

18.43 | 5 , |

18.44 | 8 , |

18.45 | 1 4 , |

18.46 | 3 , |

18.47 | 1 , |

18.48 | 1 , 5 |

18.49 | 0 , 2 5 |

18.50 | 8 , |

18.51 | 3 , |

18.52 | 1 , 5 |

18.53.1 | 1 , 5 |

18.53.2 | 4 5 , |

Тема 19. Тригонометричні нерівності

19.1. Д. 19.2. В. 19.3. Д. 19.4. А. 19.5. Д. 19.6. В. 19.7. Г. 19.8. Г. 19.9. Д. 19.10. Б. 19.11. В. 19.12. В. 19.13. А. 19.14. Д. 19.15. В. 19.16. Д. 19.17. А. 19.18. Г. 19.19. Г. 19.20. В.

19.21



19.22



19.23



19.24



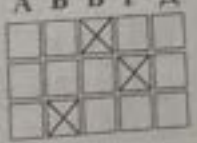
19.25



19.26



19.27



19.28 | 1 , |

19.29 | 2 , |

19.30 | 6 , |

19.31 | 4 , |

19.32 | 3 , |

19.33 | 1 , |

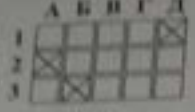
19.34.1 | − 0 , 2 5 |

19.34.2 | 0 , 7 5 |

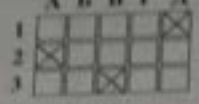
Тема 20. Системи рівнянь і нерівностей

20.1. В. **20.2.** Д. **20.3.** А. **20.4.** Б. **20.5.** Б. **20.6.** Б. **20.7.** Г. **20.8.** А. **20.9.** Д. **20.10.** В. **20.11.** Д. **20.12.** Б. **20.13.** Г. **20.14.** Б. **20.15.** А. **20.16.** Г. **20.17.** Б. **20.18.** Б. **20.19.** В. **20.20.** В. **20.21.** Б. **20.22.** В. **20.23.** Д.

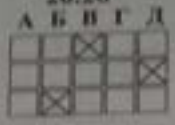
20.24



20.25



20.26



20.27



20.28



20.29 3,

20.30 6,

20.31 7,

20.32 3,

20.33 1,

20.34 2,

20.35 −4,

20.36 12,

20.37 3,

20.38 4,

20.39 68,

20.40 6,5

20.41 6,

20.42 3,

20.43 12,

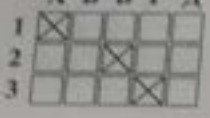
20.44 2,

20.45 4,

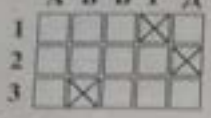
Тема 21. Числові послідовності. Арифметична та геометрична прогресії

21.1. Г. **21.2.** Д. **21.3.** В. **21.4.** Г. **21.5.** Б. **21.6.** В. **21.7.** В. **21.8.** Г. **21.9.** Д. **21.10.** В. **21.11.** А. **21.12.** Б. **21.13.** Д. **21.14.** Г. **21.15.** Б. **21.16.** А. **21.17.** В. **21.18.** В. **21.19.** Г. **21.20.** Д. **21.21.** А. **21.22.** Б.

21.23



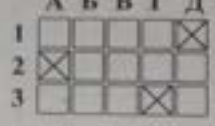
21.24



21.25



21.26



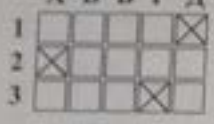
21.27



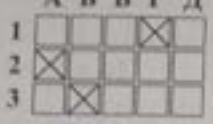
21.28



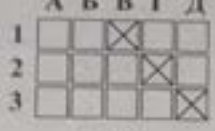
21.29



21.30



21.31



21.32



21.33



21.34 −4,

21.35 26,7

21.36 10,

21.37 703,36

21.38 4,

21.39 2,

21.40 −0,005

21.41 640,

21.42 3,375

21.43 1,56

21.44 82,

21.45 437,25

21.46 −2,

21.47.1 27,

21.47.2 36,

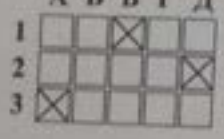
21.48.1 1,

21.48.2 13,

Тема 22. Функціональна залежність. Елементарні функції та їхні властивості

22.1. Г. **22.2.** В. **22.3.** Д. **22.4.** Д. **22.5.** Д. **22.6.** Б. **22.7.** Б. **22.8.** Г. **22.9.** Б. **22.10.** Д. **22.11.** В. **22.12.** Д. **22.13.** Д. **22.14.** А. **22.15.** А. **22.16.** Б. **22.17.** Д. **22.18.** Б. **22.19.** Б. **22.20.** Д. **22.21.** В. **22.22.** А. **22.23.** Д. **22.24.** А. **22.25.** Д. **22.26.** Г. **22.27.** Г. **22.28.** В. **22.29.** Г.

22.30



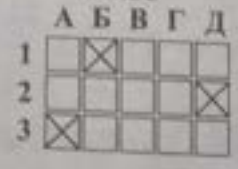
22.31



22.32



22.33



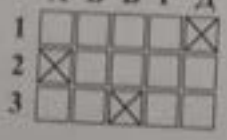
22.34



22.35



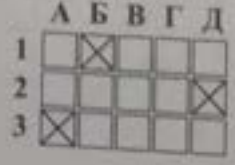
22.36



22.37



22.38



22.39



22.40



22.41 | 7 , | 22.42 | 2 , | 22.43 | 3 , | 22.44 | 7 , | 22.45 | 1 0 ,
22.46 | 2 , | 22.47 | 2 , | 22.48 | 4 , 5 | 22.49 | 3 0 , | 22.50 | − 2 ,
22.51 | 2 7 , | 22.52 | 1 , | 22.53 | 0 , | 22.54.1 | 2 , | 22.54.2 | − 5 ,

Тема 23. Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень

23.1. Г. 23.2. Д. 23.3. Б. 23.4. В. 23.5. Г. 23.6. А. 23.7. Д. 23.8. В. 23.9. Б. 23.10. В. 23.11. Д. 23.12. В. 23.13. Б. 23.14. Г. 23.15. В. 23.16. Д. 23.17. Б. 23.18. Г. 23.19. А. 23.20. В.

23.21 23.22 23.23 23.24 23.25 23.26

23.27 23.28 23.29 23.30 23.31 23.32

23.33.1 | 1 , 4 | 23.33.2 | − 2 4 , | 23.34 | 5 ,

Тема 24. Похідна функції, її геометричний і механічний зміст

24.1. В. 24.2. Б. 24.3. Б. 24.4. В. 24.5. В. 24.6. Г. 24.7. А. 24.8. Г. 24.9. Б. 24.10. Д. 24.11. Б. 24.12. Д. 24.13. А. 24.14. А. 24.15. Б. 24.16. Г. 24.17. Г. 24.18. А. 24.19. Г. 24.20. А. 24.21. В. 24.22. Д. 24.23. В. 24.24. Д. 24.25. Б. 24.26. Г. 24.27. Б.

24.28 24.29 24.30 24.31 24.32 24.33

24.34 24.35 24.36 24.37 24.38

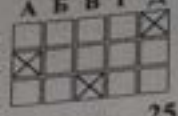
24.39 | 6 , | 24.40 | 0 , | 24.41 | 0 , | 24.42 | 1 8 , 2 5 | 24.43 | 0 , 1
24.44 | − 0 , 2 | 24.45 | − 1 0 , | 24.46 | 0 , 5 | 24.47 | 6 , | 24.48 | 1 6 , 6 7
24.49 | − 1 , | 24.50 | 1 , | 24.51 | 0 , 5

Тема 25. Застосування похідної для дослідження функцій

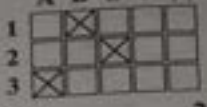
25.1. Б. 25.2. Г. 25.3. Д. 25.4. Б. 25.5. А. 25.6. Г. 25.7. А. 25.8. В. 25.9. Д. 25.10. В. 25.11. Б. 25.12. Б. 25.13. В. 25.14. А. 25.15. В. 25.16. Г. 25.17. Д. 25.18. Г. 25.19. Б. 25.20. Б. 25.21. Г. 25.22. В. 25.23. Д. 25.24. Д.

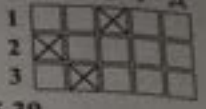
25.25 25.26 25.27 25.28 25.29 25.30

25.31


25.32


25.33


25.34


25.35


25.36 | | | 0 | , | 5 | | |

25.37 | | | 2 | , | | | |

25.38 | | 1 | 7 | , | | | |

25.39 | 1 | 2 | 8 | , | | | |

25.40.1 | | 8 | 0 | , | | | |

25.40.2 | | 3 | 2 | , | | | |

25.41.1 | | 2 | , | | | | |

25.41.2 | | 4 | 8 | , | | | |

25.42 | | | 4 | , | | | |

25.43 | | – | 1 | , | | | |

25.44 | | – | 4 | , | | | |

25.45 | | – | 0 | , | 5 | | |

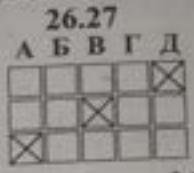
Тема 26. Первісна. Інтеграл

26.1. Б. **26.2.** А. **26.3.** Б. **26.4.** Г. **26.5.** Д. **26.6.** Г. **26.7.** Б. **26.8.** Г. **26.9.** Д. **26.10.** В. **26.11.** Д. **26.12.** В. **26.13.** Д. **26.14.** Б. **26.15.** Г. **26.16.** В. **26.17.** А. **26.18.** Б. **26.19.** Д. **26.20.** В. **26.21.** Г. **26.22.** Д. **26.23.** Г.

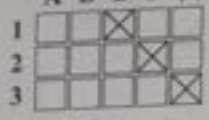
26.24

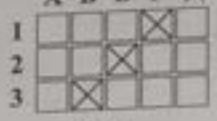

26.25

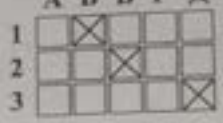

26.26

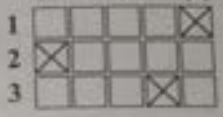

26.27


26.28


26.29


26.30


26.31


26.32


26.33.1 | 1 | 2 | 2 | , | | | |

26.33.2 | 1 | 1 | 2 | , | | | |

26.34 | 3 | 1 | 3 | , | | | |

26.35 | | | 2 | , | | | |

26.36 | | | 1 | , | 2 | 5 | |

26.37 | | | 4 | , | 5 | | |

26.38 | | | 6 | , | 2 | 5 | |

26.39 | | 6 | 4 | , | | | |

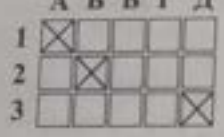
26.40 | | | 0 | , | 5 | | |

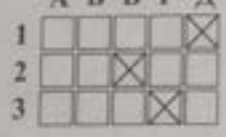
26.41 | | – | 2 | , | | | |

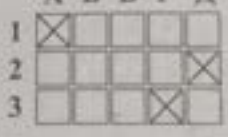
26.42 | | 1 | 8 | , | | | |

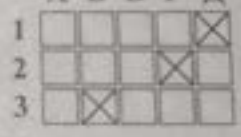
Тема 27. Елементи комбінаторики

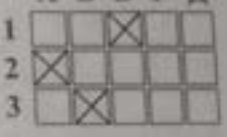
27.1. Г. **27.2.** Г. **27.3.** Д. **27.4.** Д. **27.5.** В. **27.6.** А. **27.7.** А. **27.8.** Д. **27.9.** А. **27.10.** Д. **27.11.** Г. **27.12.** Д. **27.13.** В. **27.14.** А. **27.15.** Г. **27.16.** В. **27.17.** Б. **27.18.** Д. **27.19.** Г. **27.20.** В. **27.21.** А. **27.22.** В. **27.23.** Д. **27.24.** Б.

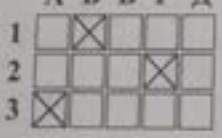
27.25


27.26


27.27


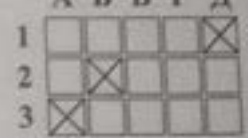
27.28


27.29


27.30


27.31


27.32


27.33


27.34 | | | 1 | , | | | |

27.35 | | 1 | 0 | , | | | |

27.36 | – | 2 | 0 | , | | | |

27.37 | 1 | 2 | 6 | , | | | |

27.38 | | 6 | 0 | , | | | |

27.39 | | 7 | 2 | , | | | |

27.40 | 1 | 1 | 4 | , | | | |

27.41 | 1 | 8 | 0 | , | | | |

27.42 | 7 | 0 | 0 | , | | | |

27.43 | 4 | 9 | 5 | , | | | |

27.44 | 5 | 6 | 0 | , | | | |

27.45 | 5 | 0 | 4 | , | | | |

27.46 | | 9 | 1 | , | | | |

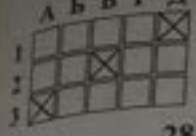
27.47.1 | | 6 | 0 | , | | | |

27.47.2 | | 4 | 8 | , | | | |

...тки теорії ймовірностей та елементи статистики

28.1. Д. 28.2. Г. 28.3. Д. 28.4. Д. 28.5. В. 28.6. А. 28.7. В. 28.8. Д. 28.9. Г. 28.10. А. 28.11. Г. 28.12. В. 28.13. Д. 28.14. А. 28.15. Д. 28.16. Г. 28.17. Б. 28.18. Б. 28.19. Д. 28.20. В. 28.21. В. 28.22. Г. 28.23. Б. 28.24. Г.

28.25



	А	Б	В	Г	Д
1					X
2			X		
3	X				

28.26

	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2	X				
3			X		

28.27

	А	Б	В	Г	Д
1					X
2	X				
3				X	

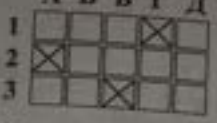
28.28

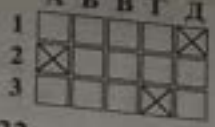
	А	Б	В	Г	Д
1					X
2				X	
3	X				

28.29

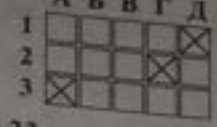
	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2			X		
3					X

28.30

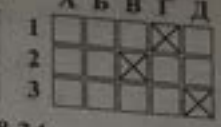




	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2					X
3		X			

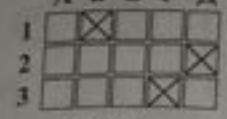


28.31

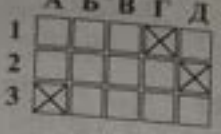




	А	Б	В	Г	Д
1		X			
2					X
3				X	



28.32



	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2					X
3	X				





28.33

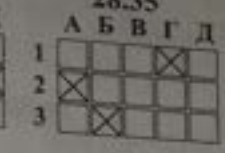
	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2		X			
3	X				

28.34

	А	Б	В	Г	Д
1			X		
2					X
3				X	

28.35

	А	Б	В	Г	Д
1				X	
2	X				
3		X			



28.36 0,5

28.37 0,875

28.38 0,06

28.39 0,42

28.40 0,088

28.41 0,1

28.42 48,

28.43 0,86

28.44 6,

28.45 0,8

28.46 0,94

28.47 0,34

28.48 0,67

28.49 10,

28.50 0,6

28.51.1 0,096

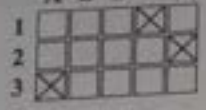
28.51.2 0,384

ГЕОМЕТРІЯ

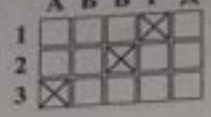
Тема 29. Найпростіші геометричні фігури на площині

29.1. Г. **29.2.** Д. **29.3.** В. **29.4.** Б. **29.5.** А. **29.6.** Г. **29.7.** Д. **29.8.** В. **29.9.** Г. **29.10.** Б. **29.11.** Д. **29.12.** Г. **29.13.** Г. **29.14.** В. **29.15.** В. **29.16.** Д. **29.17.** А. **29.18.** Г. **29.19.** В.

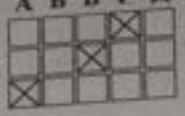
29.20



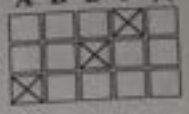
29.21



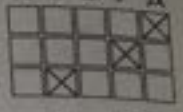
29.22



29.23



29.24



29.25.1 10,

29.25.2 10,

29.26 8,

29.27 10,

29.28 120,

29.29 10,

29.30 60,

29.31 105,

29.32 30,

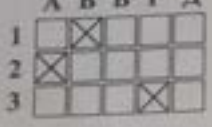
29.33 70,

29.34 172,5

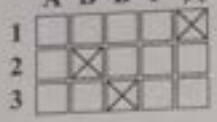
Тема 30. Трикутник

30.1. Г. **30.2.** В. **30.3.** А. **30.4.** Д. **30.5.** Д. **30.6.** В. **30.7.** В. **30.8.** Г. **30.9.** Г. **30.10.** Д. **30.11.** Г. **30.12.** Б. **30.13.** В. **30.14.** Г. **30.15.** Г. **30.16.** Д. **30.17.** Б. **30.18.** Г. **30.19.** Б. **30.20.** А.

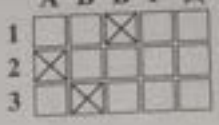
30.21



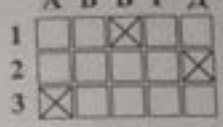
30.22



30.23



30.24



30.25 65,

30.26 1,5

30.27 5,

30.28 6,5

30.29 7,5

30.30 50,

30.31 0,73

30.32 336,

30.33 5,

30.34 60,

30.35 4,44

30.36 72,

30.37 4,

30.38 2,4

30.39 40,

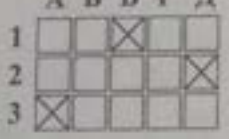
30.40.1 42,

30.40.2 80,

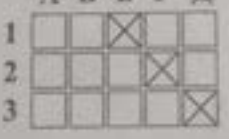
Тема 31. Прямокутний трикутник

31.1. Г. **31.2.** Д. **31.3.** Б. **31.4.** В. **31.5.** В. **31.6.** Д. **31.7.** В. **31.8.** А. **31.9.** А. **31.10.** В. **31.11.** Б. **31.12.** Д. **31.13.** Г. **31.14.** А. **31.15.** В. **31.16.** Д. **31.17.** Б. **31.18.** В. **31.19.** Г. **31.20.** Г. **31.21.** В.

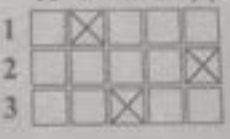
31.22



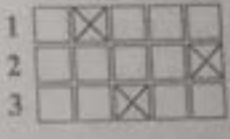
31.23



31.24



31.25



31.26 40,

31.27 10,

31.28 53,

31.29 120,

31.30 244,

31.31 10,

31.32 5,

31.33 30,

31.34 5,25

31.35 600,

31.36.1 3,36

31.36.2 11,76

31.37 12,25

31.38 0,6

31.39 9,33

31.40 149,76

31.41 15,

Тема 32. Рівнобедрений трикутник

32.1. Г. 32.2. В. 32.3. Д. 32.4. А. 32.5. Г. 32.6. Б. 32.7. Д. 32.8. В. 32.9. В. 32.10. А. 32.11. В. 32.12. А. 32.13. Г. 32.14. В. 32.15. А. 32.16. Г. 32.17. Д. 32.18. Г. 32.19. Б. 32.20. Б.

32.21



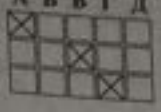
32.22



32.23



32.24



32.25 | 8 ,

32.26 | 6 0 ,

32.27 | 6 ,

32.28 | 4 ,

32.29 | 1 7 0 ,

32.30.1 | 5 4 0 ,

32.30.2 | 1 0 ,

32.31.1 | 4 8 ,

32.31.2 | 3 ,

32.32 | 7 , 8

32.33 | 1 , 2

32.34 | 3 6 ,

32.35 | 7 2 , 4 5

32.36 | 8 ,

32.37 | 7 ,

Тема 33. Чотирикутники

33.1. В. 33.2. Д. 33.3. А. 33.4. Б. 33.5. Б. 33.6. Г. 33.7. В. 33.8. Г. 33.9. Д. 33.10. В. 33.11. В. 33.12. Д. 33.13. Г. 33.14. Д. 33.15. В. 33.16. Г. 33.17. Д. 33.18. В. 33.19. А. 33.20. Г. 33.21. Б. 33.22. Д. 33.23. Г. 33.24. Б.

33.25



33.26



33.27



33.28



33.29 | 3 0 0 ,

33.30 | 1 8 ,

33.31 | 9 ,

33.32.1 | 4 8 ,

33.32.2 | 3 0 ,

33.33 | 3 2 ,

33.34 | 1 9 , 2

33.35 | 5 ,

33.36.1 | 7 ,

33.36.2 | 2 1 ,

33.37 | 2 0 4 ,

33.38.2 | 9 0 ,

33.39 | 9 6 ,

33.40 | 8 6 4 ,

33.41 | 9 ,

33.42 | 0 , 8 3

33.43 | 4 8 ,

33.44 | 4 0 ,

33.45 | 6 , 9

33.46 | 8 1 ,

33.47 | 3 1 ,

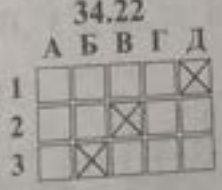
Тема 34. Многокутники

34.1. Д. 34.2. А. 34.3. В. 34.4. А. 34.5. Г. 34.6. В. 34.7. Г. 34.8. Г. 34.9. А. 34.10. Б. 34.11. Д. 34.12. Г. 34.13. А. 34.14. Б. 34.15. В. 34.16. В. 34.17. Б. 34.18. Б. 34.19. В. 34.20. Г.

34.21



34.22



34.23



34.24 | 6 ,

34.25 | 5 ,

34.26 | 6 ,

34.27 | 9 0 0 ,

34.28.1 | 1 6 2 ,

34.28.2 | 2 0 ,

34.29 | 8 ,

34.30.1 | 2 ,

34.30.2 | 6 ,

34.31 | 1 , 5

34.32 | 7 2 ,

34.33 | 0 , 5

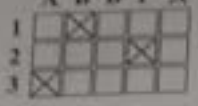
34.34 1,

34.35 301,

Тема 35. Коло, круг та їх елементи

35.1. В. **35.2.** Б. **35.3.** Д. **35.4.** Д. **35.5.** Б. **35.6.** Г. **35.7.** А. **35.8.** Б. **35.9.** Б. **35.10.** Д. **35.11.** А. **35.12.** Г. **35.13.** В. **35.14.** Б. **35.15.** В. **35.16.** В. **35.17.** Д. **35.18.** Д. **35.19.** Г. **35.20.** А.

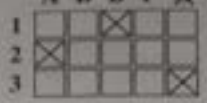
35.21



35.22



35.23



35.24 12,

35.25.1 17,

35.25.2 15,

35.26 2,

35.27 27,

35.28 27,

35.29 192,

35.30 0,5

35.31 10,

35.32 0,75

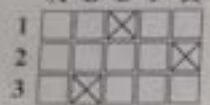
35.33 0,07

35.34 471,

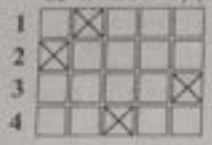
Тема 36. Аксіоми стереометрії. Прямі та площини в просторі

36.1. В. **36.2.** А. **36.3.** Б. **36.4.** Д. **36.5.** В. **36.6.** В. **36.7.** В. **36.8.** В. **36.9.** А. **36.10.** В. **36.11.** Д. **36.12.** А. **36.13.** Д. **36.14.** Г. **36.15.** В. **36.16.** Г. **36.17.** Д. **36.18.** Б. **36.19.** В. **36.20.** А. **36.21.** Г. **36.22.** Г.

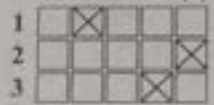
36.23



36.24



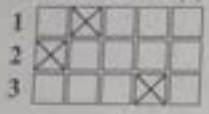
36.25



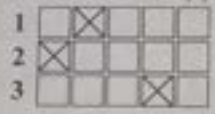
36.26



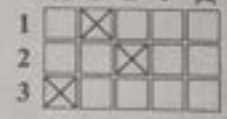
36.27



36.28



36.29



36.30 4,8

36.31 3,

36.32.1 18,

36.32.2 24,

36.33 2,

36.34.1 5,

36.34.2 5,29

36.35 3,

36.36 3,

36.37 8,

36.38 60,

36.39 12,5

36.40 18,

36.41 1,30

36.42 14,

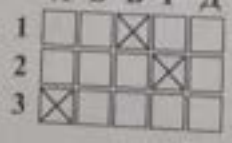
36.43 2,5

36.44 3,125

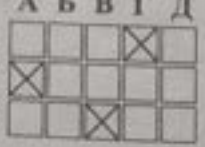
Тема 37. Призма

37.1. Д. **37.2.** Г. **37.3.** Д. **37.4.** Д. **37.5.** В. **37.6.** В. **37.7.** Г. **37.8.** Г. **37.9.** Д. **37.10.** Д. **37.11.** В. **37.12.** Г. **37.13.** Б. **37.14.** В. **37.15.** В. **37.16.** Б. **37.17.** В. **37.18.** Д. **37.19.** А. **37.20.** Д. **37.21.** В. **37.22.** А.

37.23



37.24



37.25 72,

37.26 30,

37.27.1 4,5

37.27.2 36,

37.28 4,

37.29.1 | 5 6 , | | |

37.29.2 | 4 8 , | | |

37.30 | | 8 , | | |

37.31 | 3 5 0 , | | |

37.32 | 1 0 8 , | | |

37.33 | 3 2 , | | |

37.34 | | 6 , | | |

37.35 | 1 2 6 , | | |

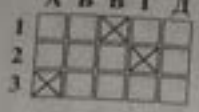
37.36 | 4 8 , | | |

37.37 | | 1 , 2 5 |

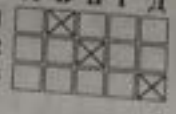
Тема 38. Піраміда

38.1. Г. **38.2.** Д. **38.3.** В. **38.4.** А. **38.5.** Б. **38.6.** Д. **38.7.** В. **38.8.** А. **38.9.** Г. **38.10.** В. **38.11.** Б. **38.12.** А. **38.13.** А. **38.14.** Б. **38.15.** А. **38.16.** Б. **38.17.** Д. **38.18.** А. **38.19.** Б. **38.20.** Д. **38.21.** Г. **38.22.** Б.

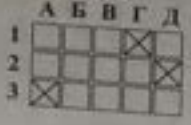
38.23



38.24



38.25



38.26



38.27



38.28 | 1 2 , | | |

38.29 | | 6 , | | |

38.30 | 2 4 , | | |

38.31 | | 1 , | | |

38.32.1 | | 3 , | | |

38.32.2 | | 0 , 5 | |

38.33 | 6 0 , | | |

38.34 | 1 4 4 , | | |

38.35.1 | 9 6 , | | |

38.35.2 | 9 6 , | | |

38.36 | | 0 , 7 5 |

38.37 | | 7 , | | |

38.38 | | 0 , 6 | |

38.39 | | 3 , | | |

38.40 | | 7 , | | |

38.41 | | 9 , | | |

Тема 39. Циліндр

39.1. Г. **39.2.** В. **39.3.** Д. **39.4.** Б. **39.5.** Г. **39.6.** Б. **39.7.** Д. **39.8.** В. **39.9.** Б. **39.10.** Д. **39.11.** А. **39.12.** Г. **39.13.** В. **39.14.** Г. **39.15.** Б. **39.16.** Б. **39.17.** А. **39.18.** А. **39.19.** Б. **39.20.** Д.

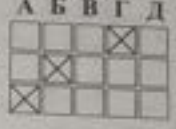
39.21



39.22



39.23



39.24 | 3 0 , | | |

39.25 | | 8 , | | |

39.26 | 6 0 , | | |

39.27 | | 4 , | | |

39.28 | | 0 , 5 | |

39.29 | 4 0 , | | |

39.30 | | 0 , 2 5 | |

39.31.1 | | 2 , | | |

39.31.2 | | 1 , | | |

39.32 | 4 0 , | | |

39.33 | 6 0 , | | |

39.34 | | 0 , 6 1 | |

39.35 | | 2 , 2 6 | |

Тема 40. Конус

40.1. Д. **40.2.** Б. **40.3.** Б. **40.4.** Б. **40.5.** Д. **40.6.** А. **40.7.** Г. **40.8.** Д. **40.9.** Б. **40.10.** Д. **40.11.** Г. **40.12.** А. **40.13.** А. **40.14.** Б. **40.15.** В. **40.16.** В. **40.17.** Г. **40.18.** Д. **40.19.** Д. **40.20.** Г. **40.21.** Б.

40.22



40.23



40.24



40.25.1 | 5 0 , | | |

40.25.2 | 1 2 5 , | | |

40.26 | | 0 , 9 | | |

40.27 | | 1 , | | |

40.28 | 1 1 , | | |

40.29 | | 9 , | | |

40.30 0,25

40.31 4,

40.32 504,

40.33 1,5

40.34 288,

40.35 6,25

40.36 5,

40.37 2,

Тема 41. Сфера і куля

41.1. Г. **41.2.** В. **41.3.** Г. **41.4.** Б. **41.5.** Д. **41.6.** В. **41.7.** А. **41.8.** Г. **41.9.** Б. **41.10.** Г. **41.11.** Б. **41.12.** В. **41.13.** Д. **41.14.** Б. **41.15.** Б. **41.16.** А. **41.17.** Г. **41.18.** Г. **41.19.** В. **41.20.** В. **41.21.** Г.

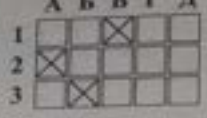
41.22



41.23



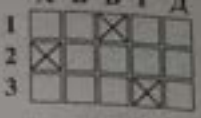
41.24



41.25



41.26



41.27.1 676,

41.27.2 878,8

41.28 676,

41.29 13,

41.30 3,

41.31 15,

41.32 1,2

41.33 2,

41.34 3,

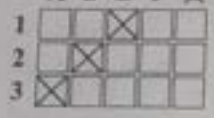
41.35 4,

41.36 2,

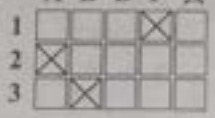
Тема 42. Координати на площині та в просторі

42.1. Г. **42.2.** Г. **42.3.** Г. **42.4.** Г. **42.5.** Д. **42.6.** А. **42.7.** В. **42.8.** Г. **42.9.** А. **42.10.** В. **42.11.** Д. **42.12.** Д. **42.13.** Б. **42.14.** Г. **42.15.** В. **42.16.** Д. **42.17.** Г. **42.18.** В. **42.19.** В. **42.20.** В. **42.21.** В.

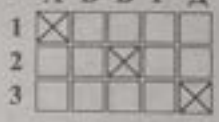
42.22



42.23



42.24



42.25 5,

42.26 −7,

42.27.1 24,

42.27.2 24,

42.28 15,5

42.29.1 2,

42.29.2 16,

42.30 5,

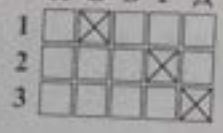
42.31 14,

42.32 5,

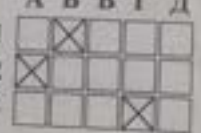
Тема 43. Вектори на площині та в просторі

43.1. Г. **43.2.** В. **43.3.** В. **43.4.** Г. **43.5.** А. **43.6.** Б. **43.7.** Д. **43.8.** Г. **43.9.** Г. **43.10.** Д. **43.11.** В. **43.12.** Б. **43.13.** Б. **43.14.** Г. **43.15.** В. **43.16.** В. **43.17.** Д. **43.18.** Б. **43.19.** Б. **43.20.** Г. **43.21.** Б. **43.22.** А. **43.23.** А. **43.24.** В.

43.25



43.26



43.27



43.28



43.29.1 18,

43.29.2 21,

43.30 22,

43.31.1 −1,

43.31.2 7,

43.32 212,

43.33 0,19

43.34 5,57

43.35 0,83

43.36 −2,4

43.37 25,

43.38 45,

43.39 3,5

43.40 0,

43.41 0,45

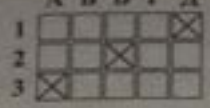
43.42 0,71

43.43 2,78

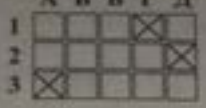
Тема 44. Геометричні переміщення (рух) і перетворення фігур

44.1. В. **44.2.** Г. **44.3.** Д. **44.4.** Г. **44.5.** Г. **44.6.** А. **44.7.** Д. **44.8.** Б. **44.9.** В. **44.10.** Б. **44.11.** Г. **44.12.** Б. **44.13.** Д. **44.14.** А. **44.15.** Г. **44.16.** В. **44.17.** Б. **44.18.** А. **44.19.** Д. **44.20.** А.

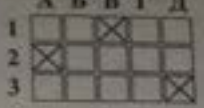
44.21



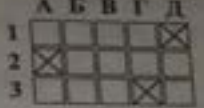
44.22



44.23



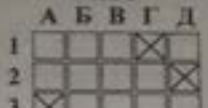
44.24



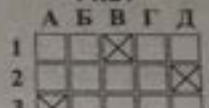
44.25



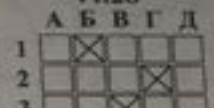
44.26



44.27



44.28



44.29.1 10,

44.29.2 25,

44.30 28,

44.31 112,

44.32 12,

ВІДПОВІДІ ДО ВАРІАНТІВ ЗОШИТІВ У ФОРМАТІ ЗНО

ЗОШИТ 1

1. У травні середньомісячна температура становила 12 °С, а в квітні — 14 °С, тому правильним є твердження **Г**. *Відповідь.* **Г**

2. Необхідно $12 \cdot 7 = 84$ (троянди), $84 : 25 = 3$ (ост. 9). Отже, потрібно $3 + 1 = 4$ (упаковки). *Відповідь.* **Г**

3. Оскільки $PB \perp (ABC)$, то $PB \perp AB$. Отже, $\Delta\, APB$ — прямокутний. *Відповідь.* **А**

4. $2x^2 - 5x - 7 = 0$; $D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-7) = 25 + 56 = 81 > 0$. Отже, корені існують. Тоді маємо: $x^2 - 2{,}5x - 3{,}5 = 0$. За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = 2{,}5$. *Відповідь.* **В**.

5. $x = \angle BAD = 70°$ (як відповідні кути при паралельних прямих AB та CD і січній AD). *Відповідь.* **А**

6. Серед наведених точок лише точка з координатами (2; 1) належить графіку функції $y = f(x)$. *Відповідь.* **Г**

7. $(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} + 2) = \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2^2 = a - 4$. *Відповідь.* **Б**.

8. Якщо $t = 4$ год, то $s = 50(4 + 2) - 100 = 200$ (км). *Відповідь.* **Б**.

9. $\dfrac{(3a^4)^2}{6a^3} = \dfrac{3^2 a^{8+2}}{6a^3} = \dfrac{3a^{12}}{2a^3} = \dfrac{3a^9}{2}$. *Відповідь.* **Б**.

10. Серед наведених тверджень істинні лише **I** (протилежні сторони паралелограма рівні) та **III** (основи трапеції паралельні). *Відповідь.* **Д**.

11. $\begin{cases} x + 3y = 14; \\ 2y - x = 6 \end{cases} \begin{cases} x + 3y = 14; \\ -x + 2y = 6; \end{cases} \begin{cases} x = 14 - 3y; \\ 5y = 20; \end{cases} \begin{cases} x = 2; \\ y = 4. \end{cases}$ Тоді $2 \cdot 4 = 8$. *Відповідь.* **В**.

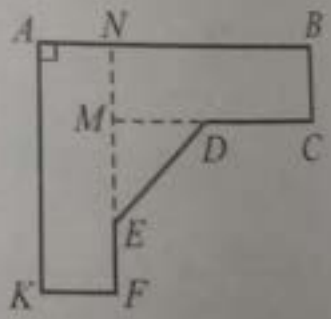
12. $f'(x) = \left(\dfrac{1}{x^3} + \sqrt{x}\right)' = \left(\dfrac{1}{x^3}\right)' + \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{-3}\right)' + \left(\sqrt{x}\right)' = -3x^{-4} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{3}{x^4} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. *Відповідь.* **Б**.

13. $9^{x+5} > 27$; $3^{2(x+5)} > 3^3$. Оскільки $3 > 1$, то: $2(x + 5) > 3$; $2x + 10 > 3$; $x > -3{,}5$; $x \in (-3{,}5; +\infty)$. *Відповідь.* **В**.

14. $\sin 510° = \sin(360° + 150°) = \sin 150° = \sin(90° + 60°) = \cos 60° = \dfrac{1}{2}$. *Відповідь.* **Д**.

15. Нехай маємо циліндр, висота якого $H = 15$ см, в основі — круг радіуса $R = 5$ см. Повну поверхню циліндра знайдемо за формулою: $S_{п.} = 2S_{о} + S_{б} = 2\pi R(R + H) = 2\pi \cdot 5(5 + 15) = 200\pi$ (см^2). *Відповідь.* **Г**.

16. З рівнобедреного прямокутного трикутника EMD $MD = ME = \dfrac{ED}{\sqrt{2}} = \dfrac{0{,}56}{\sqrt{2}} = 0{,}4$ (м). $S_{EMD} = \dfrac{1}{2} MD^2 = \dfrac{1}{2} \cdot 0{,}4^2 = 0{,}08$ (м^2).



$NB = MD + DC = 0{,}4 + 1{,}5 = 1{,}9$ (м). $S_{MNBC} = BC \cdot NB = 0{,}6 \cdot 1{,}9 = 1{,}14$ (м^2). $NF = NM + ME + EF = 0{,}6 + 0{,}4 + 3 = 4$ (м). $S_{ANFK} = NF \cdot KF = 4 \cdot 0{,}6 = 2{,}4$ (м^2). Отже, $S_{ст.} = 0{,}08 + 1{,}14 + 2{,}4 = 3{,}62$ (м^2). *Відповідь.* **А**.

17. **1.** $y = ax + b$; $a > 0$; $b > 0$. $a > 0$ — функція зростаюча; $b > 0$, $y(0) = b > 0$, тому 1Д.
2. $y = ax + b$; $a > 0$; $b < 0$. $a > 0$ — функція зростаюча; $b < 0$, $y(0) = b < 0$, тому 2А.
3. $y = ax + b$; $a < 0$; $b > 0$. $a < 0$ — функція спадна; $b > 0$, $y(0) = b > 0$, тому 3В.
Відповідь. 1Д; 2А; 3В.

	А	Б	В	Г	Д
1					☒
2	☒				
3			☒		

18. 1. $\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}=|\sqrt{2}-2|=2-\sqrt{2}$, тому 1В

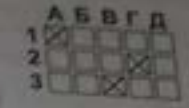
2. $\sqrt[3]{(\sqrt{2}-2)^3}=\sqrt{2}-2$, тому 2Д

3. $-\left(\sqrt[4]{2+\sqrt{2}}\right)^4=-(2+\sqrt{2})=-2-\sqrt{2}$, тому 3Б. *Відповідь.* 1В; 2Д; 3Б.



19. 1. Проведемо $CK \perp AB$. Тоді висота CK є медіаною, звідки $AK = AB : 2 = 6$. З прямокутного трикутника AKC ($\angle K = 90°$) за теоремою Піфагора маємо: $CK = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$. $AC = BC = 10$. Отже, одержимо: $S = \frac{1}{2} AB \cdot CK = \frac{1}{2} AD \cdot BC$;





$AD = \frac{AB \cdot CK}{BC} = \frac{12 \cdot 8}{10} = 9{,}6$, тому 1А.

2. $S = \frac{1}{2} AB \cdot CK = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$, тому 2Г.

3. $S = pr$; $p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{12 + 10 + 10}{2} = 16$; $r = \frac{S}{p} = \frac{48}{16} = 3$, тому 3В. *Відповідь.* 1А; 2Г; 3В.

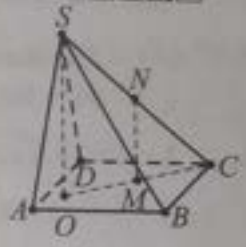
20. 1. Оскільки точки M і N — середини відрізків OC і SC відповідно, то MN — середня лінія трикутника SOC, звідки $MN \parallel SO$. За умовою, SO — висота піраміди, тому $SO \perp (ABC)$. Тоді $MN \perp (ABC)$, тому 1Б.

2. Див. п. 1, $MN \parallel SO$, тому 2Д.

3. Пряма MN належить площині SOC, а пряма SD перетинає цю площину в точці $S \notin MN$, тоді MN і SD — мимобіжні, тому 3Г.

Відповідь. 1Б; 2Д; 3Г.





21. 1. Вартість телефона після уцінення становила $2400 \cdot 0{,}8 = 1920$ (грн).

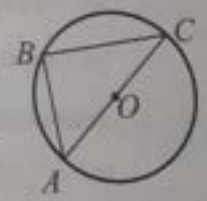
2. Початкова вартість телефона від його вартості після уцінення: $\frac{2400}{1920} \cdot 100\% = 125\%$.

Відповідь. 1. 1920 грн. 2. 125%.

22. 1) Оскільки центр кола $O \in AC$, то $\angle ABC = 90°$, а тому центральний кут, який опирається на цю ж дугу, $\angle AOC = 2 \cdot 90° = 180°$.

2) Довжина дуги AC дорівнює половині довжини кола, тому $\pi r = 6\pi$ (см), $r = 6$ (см).

Відповідь. 1) 180; 2) 6.



23. 1. $y_B = \frac{y_A + y_C}{2}$; $y_C = 2y_B - y_A = 2 \cdot 1 - 5 = -3$.

2. $\overrightarrow{AB}(-2-0; 1-5; 8-4) = \overrightarrow{(-2; -4; 4)}$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6$. *Відповідь.* 1. –3. 2. 6.

24. 1. $a_n = a_1 + d(n-1)$; $\begin{cases} a_3 = a_1 + 2d, \\ a_7 = a_1 + 6d; \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + 2d = -11, \\ a_1 + 6d = -27; \end{cases}$ $\begin{cases} 4d = -16, \\ a_1 = -11 - 2d; \end{cases}$ $\begin{cases} d = -4, \\ a_1 = -3. \end{cases}$

2. $S_{10} = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = \frac{2 \cdot (-3) + 9 \cdot (-4)}{2} \cdot 10 = -210$.

Відповідь. 1. –4. 2. –210.

25. Нехай кількість білих куль в урні дорівнює x, $2 \le x < 12$. Імовірність того, що перша куля буде білою, дорівнює $\frac{x}{12}$, друга — $\frac{x-1}{11}$. Імовірність того, що дві кулі будуть білими $\frac{x}{12} \cdot \frac{x-1}{11} = \frac{1}{11}$; $x(x-1) = 12$; $x^2 - x - 12 = 0$; $(x+3)(x-4) = 0$; $x_1 = 4$, $x_2 = -3$ — не задовольняє умову задачі. Таким чином, кількість білих куль дорівнює 4. *Відповідь.* 4.

26. Нехай x км/год — власна швидкість катера (відносно води), y км/год — швидкість течії річки. Тоді $(x+y)$ км/год — швидкість катера за течією річки, $(x-y)$ км/год — швидкість катера проти течії річки. Рівняння: $\frac{60}{x+y} = \frac{40}{x-y}$; $60x - 60y = 40x + 40y$; $20x = 100y$; $x = 5y$. Отже, час дорівнює $\frac{60}{5y+y} = \frac{10}{y}$ (год). Оскільки y км/год — це швидкість течії річки, тобто і швидкість плоту, то відстань, яку пліт пройде за час $\frac{10}{y}$ год, дорівнює $y \cdot \frac{10}{y} = 10$ (км). *Відповідь.* 10 км.

27. $\frac{\log_{12} 2 + \log_{12} 72}{\log_3 75 - \log_3 3} = \frac{\log_{12}(2 \cdot 72)}{\log_3 (75:3)} = \frac{\log_{12} 144}{\log_3 25} = \frac{\log_{12} 12^2}{\log_3 5^2} = \frac{2}{2} = 1$. *Відповідь.* 1.

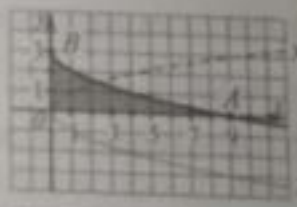
28. $|x-3| = 4$; $x - 3 = \pm 4$; $x_1 = 7$; $x_2 = -1$. Тоді сума коренів дорівнює $7 + (-1) = 6$. *Відповідь.* 6.

29. У букеті може бути жоржин 7 або 8, троянд — 8, або 9, або 10. Якщо жоржин 7, то їх можна вибрати $G_7 = C_9^7 = C_9^1 = 8$ способами; якщо їх 8, то $G_8 = 1$ способом, усього 9 способів. Аналогічно для троянд: $T_8 = C_{10}^8 = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$; $T_9 = C_{10}^9 = C_{10}^1 = 10$ і $T_{10} = C_{10}^{10} = 1$, разом є $45 + 10 + 1 = 56$ способів. Тому за правилом добутку кількість способів поєднання квітів у букеті є $9 \cdot 56 = 504$. *Відповідь.* 504.

30. **1.** $y = 3 - \sqrt{x}$. Якщо $x = 0$, то $y = 3$; якщо $x = 4$, то $y = 3 - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$; якщо $y = 0$, то маємо: $0 = 3 - \sqrt{x}$; $\sqrt{x} = 3$; $x = 9$.

x	0	4	9
y	3	1	0

2. Точки перетину з осями координат: абсцис — точка $A(9; 0)$; ординат — точка $B(0; 3)$.



3. ОДЗ: $x \ge 0$. Графік функції $y = 3 - \sqrt{x}$ отримаємо шляхом перетворення графіка функції $y = \sqrt{x}$, симетрично відобразивши його відносно осі абсцис (одержимо графік функції $y = -\sqrt{x}$) і підвищивши на 3 одиниці відносно осі ординат.

4. $F(x) = 3x - \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = 3x - \frac{2\left(\sqrt{x}\right)^3}{3} = 3x - \frac{2\sqrt{x^3}}{3}$.

5. Площу фігури можна знайти за формулою: $S = \int_a^b f(x)dx = \int_0^9 \left(3 - \sqrt{x}\right)dx$.

6. $S = \int_0^9 \left(3 - \sqrt{x}\right)dx = \left(3x - \frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right)\Big|_0^9 = 3 \cdot 9 - \frac{2 \cdot \sqrt{9^3}}{3} - 0 = 27 - 18 = 9$ (кв. од.).

Відповідь. 9.

31. **1.** Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, $ABCD$ — квадрат, SN — апофема, $l = SN = 10$. Висота правильної піраміди проектується в центр квадрата $ABCD$ — точку O перетину діагоналей. Проведемо апофему SN, $SN \perp CD$. Оскільки трикутник DSC — рівнобедрений, то SN є його медіаною. Проведемо ON. Висота піраміди $SO \perp (ABC)$. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $ON \perp CD$. Тому $\alpha = \angle SNO = 60°$ як лінійний кут двогранного кута між бічною гранню і площиною основи.



2. З прямокутного трикутника SON ($\angle O = 90°$, $\angle S = 30°$) маємо: $ON = SN : 2 = 5$. Тоді сторона основи $a = 2ON = 10$.

3. $S_{ABCD} = a^2 = 100$. $S_б = \frac{1}{2} P_{ABCD} \cdot l = 2a \cdot SN = 2 \cdot 10 \cdot 10 = 200$. Тоді $S_п = S_о + S_б = 100 + 200 = 300$.

Відповідь. 300.

32. **1.** Оскільки піраміда правильна, то її висота проектується в точку O — точку перетину діагоналей основи. Отже, OC — проекція бічного ребра SC на площину основи, тому кут SCO — кут нахилу бічного ребра до площини основи. Отже, $\beta = \angle SCO$.



2. Із задачі 31 $OC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$. З прямокутного трикутника SON $SO = SN \sin 60° = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$. З прямокутного трикутника SOC $\operatorname{tg}\beta = \frac{SO}{OC} = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{2}} = \sqrt{1{,}5}$; $\beta = \operatorname{arctg}\sqrt{1{,}5}$. *Відповідь.* $\operatorname{arctg}\sqrt{1{,}5}$.

33. Позначимо $y = x^2 - x - 4$. Тоді отримаємо нерівність: $(y+3)(y-3) \le -5$; $y^2 - 9 \le -5$; $y^2 \le 4$; $-2 \le y \le 2$. $\begin{cases} x^2 - x - 4 \le 2, \\ x^2 - x - 4 \ge -2; \end{cases} \begin{cases} x^2 - x - 6 \le 0, \\ x^2 - x - 2 \ge 0; \end{cases} \begin{cases} (x-3)(x+2) \le 0, \\ (x-2)(x+1) \ge 0; \end{cases} \begin{cases} x \in [-2; 3], \\ x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty); \end{cases}$



Отже, $x \in [-2; -1] \cup [2; 3]$. Цілими розв'язками нерівності є: -2; -1; 2 і 3, а їх добуток: $-2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 3 = 12$. *Відповідь.* 12.

34. **1.** $\sqrt{x^2 + 5x - 24} = 0$; $\sqrt{(x-3)(x+8)} = 0$; $(x-3)(x+8) = 0$; $\begin{bmatrix} x = -8; \\ x = 3. \end{bmatrix}$

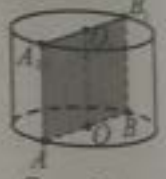
2. ОДЗ: $x^2 + 5x - 24 \ge 0$; $(x-3)(x+8) \ge 0$; $x \in (-\infty; -8] \cup [3; +\infty)$.

$\begin{bmatrix} \sqrt{x^2 + 5x - 24} = 0; \\ 9^x + 2a \cdot 3^{x+1} + 9a^2 = 0; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x = -8; \\ x = 3; \\ 3^{2x} + 6a \cdot 3^x + (3a)^2 = 0; \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x = -8; \\ x = 3; \\ (3^x + 3a)^2 = 0. \ (*) \end{bmatrix}$ Розглянемо рівняння (*) сукупності: $(3^x + 3a)^2 = 0$; $3^x + 3a = 0$; $3^{x-1} + a = 0$; $3^{x-1} = -a$. Оскільки $3^{x-1} > 0$, то $-a > 0$; $a < 0$. Отже, якщо $a < 0$, то $x - 1 = \log_3(-a)$; $x = 1 + \log_3(-a)$. Розглянемо, за якого значення a розв'язки рівняння (*) не належать ОДЗ: $-8 < 1 + \log_3(-a) < 3$; $-9 < \log_3(-a) < 2$; $\log_3 3^{-9} < \log_3(-a) < \log_3 3^2$; $3^{-9} < -a < 3^2$; $-9 < a < -3^{-9}$.

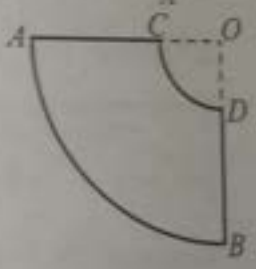
Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; -9] \cup [-3^{-9}; 0)$, то $x = \{-8; 3; 1 + \log_3(-a)\}$; якщо $a \in (-9; -3^{-9}) \cup [0; +\infty)$, то $x = \{-8; 3\}$.

ЗОШИТ 2

1. Оскільки з 15^{00} до 17^{59} працювало 40 автобусів, а з 9^{00} до 11^{59} — 36 автобусів, то правильне твердження **В**. *Відповідь.* **В**.
2. $23 \cdot 3 = 69$; $69 : 20 = 3$ (ост. 9). Отже, слід придбати 4 пачки. *Відповідь.* **В**.
3. Оскільки призма похила, то бічними гранями є паралелограми. *Відповідь.* **А**.
4. $x^2 + 5x - 14 = 0$; $(x + 7)(x - 2) = 0$; $x_1 = -7$; $x_2 = 2$. *Відповідь.* **Г**.
5. $\angle BAC = 180° - \angle KAB = 180° - 140° = 40°$. Трикутник ABC рівнобедрений з основою AC, тому $\angle ACB = \angle BAC = 40°$. *Відповідь.* **Б**.
6. Поміж наведених координат точок з від'ємною ординатою, що належать цьому графіку, лише точка $(2; -1)$ задовольняє вказану умову. *Відповідь.* **В**.
7. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$. *Відповідь.* **Г**.
8. Якщо $n = 9$ місяців, то $A = 1500(1 + 0{,}01 \cdot 9) = 1635$ (грн). *Відповідь.* **В**.
9. $\dfrac{25x^8}{(5x^3)^4} = \dfrac{5^2x^8}{5^4x^{12}} = \dfrac{1}{5^2x^4} = \dfrac{1}{25x^4}$. *Відповідь.* **Б**.
10. Серед наведених тверджень істинне лише **III** (у трикутнику не може бути двох тупих кутів). *Відповідь.* **В**.
11. $\begin{cases} 3x + 4y = -20; \\ 5x + 2y = -10; \end{cases} \begin{cases} 3x + 4y = -20; \\ 5x + 2y = -10; \end{cases} \mid \cdot(-2) \begin{cases} 3x + 4y = -20; \\ -10x - 4y = 20; \end{cases} \begin{cases} 3x + 4y = -20; \\ -7x = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 0; \\ y = -5. \end{cases}$ *Відповідь.* **Б**.
12. $f'(x) = (5\sin x - 7x^2 + 7)' = (5\sin x)' - (7x^2)' + 7' = 5(\sin x)' - 14x = 5\cos x - 14x$. *Відповідь.* **В**.
13. $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x+2} \le \dfrac{5}{2}$; $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x+2} \le \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-1}$. Оскільки $\dfrac{2}{5} < 1$, то маємо: $x + 2 \ge -1$; $x \ge -3$; $x \in [-3; +\infty)$. *Відповідь.* **Г**.
14. $\cos 690° = \cos(720° - 30°) = \cos(-30°) = \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. *Відповідь.* **В**.
15. Нехай задано циліндр, $OO_1 \subset (AA_1B_1)$, AA_1B_1B — квадрат, $AB = 10$ см, $H = AA_1 = 10$ см, $R = AO = AB : 2 = 10 : 2 = 5$ (см). Тоді площа бічної поверхні циліндра дорівнює $S_б = 2\pi RH = 2\pi \cdot 5 \cdot 10 = 100\pi$ (см^2). *Відповідь.* **Г**.



16. $\cup CD = \dfrac{2\pi \cdot CO}{4}$; $CO = \dfrac{2 \cdot \cup CD}{\pi} = \dfrac{2 \cdot 0{,}8}{\pi} = \dfrac{1{,}6}{\pi}$ (м). Аналогічно маємо: $AO = \dfrac{2 \cdot \cup AB}{\pi} = \dfrac{2 \cdot 2}{\pi} = \dfrac{4}{\pi}$ (м). Отже, довжина спідниці дорівнює $AC = AO - CO = \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{1{,}6}{\pi} = \dfrac{2{,}4}{3{,}14} = 0{,}76$ (м). *Відповідь.* **Б**.



17. **1.** Графік функції проходить через точку $(0; 1)$, тому 1Б.
2. Функція має екстремум в точці $(-1; 4)$, тому 2В.
3. Графік функція є симетричним відносно початку координат, тому вона є непарною. Отже, 3Д.
Відповідь. 1Б; 2В; 3Д.

	А	Б	В	Г	Д
1		⊠			
2			⊠		
3					⊠

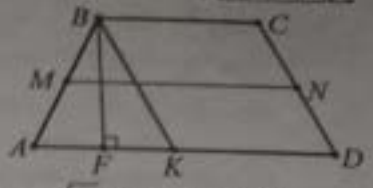
18. **1.** $(\ldots) = \lg 5^2 + \lg 4 = \lg(25 \cdot 4) = \lg 100 = \lg 10^2 = 2 = \lg_2 4$, тому 1Д.
2. $(\ldots) = \dfrac{\log_3 5}{\log_3 2} = \log_2 5$, тому 2Г.
3. $(\ldots) = \log_a \dfrac{a(a+1)}{a+1} = \log_a a = 1$, тому 3В. *Відповідь.* 1Д; 2Г; 3В.

	А	Б	В	Г	Д
1					⊠
2				⊠	
3			⊠		

20. **1.** $KD = BC = 7$ см, $AD = AK + KD = 6 + 7 = 13$ (см). Довжина середньої лінії MN трапеції $ABCD$ дорівнює $MN = \frac{BC + AD}{2} = \frac{7 + 13}{2} = 10$ (см), тому 1Б.

	А	Б	В	Г	Д
1		☒			
2			☒		
3					☒

2. $AB = BK$, $AF = AK : 2 = 6 : 2 = 3$ (см). З ΔAFB маємо $BF = \sqrt{AB^2 - AF^2} = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ (см).



Отже, висота трапеції дорівнює $2\sqrt{10}$ (см), тому 2В.

3. $S_{вписк} = pr = 14r$. Але $S_{вписк} = KD \cdot BF = 7 \cdot 2\sqrt{10} = 14\sqrt{10}$ (см^2); $14r = 14\sqrt{10}$. Отже, радіус кола, вписаного в ромб $BCDK$, дорівнює $r = \sqrt{10}$ (см). Тому 3Д.

Відповідь. 1Б; 2В; 3Д.

21. **1.** Пряма BB_1 перпендикулярна площині $A_1B_1C_1$, тому 1Б.

2. Пряма B_1A_1 паралельна прямій AB, звідки площина CB_1A_1 паралельна прямій AB, тому 2В.

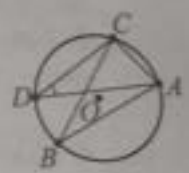
3. Пряма AC_1 належить площині ACC_1, тому 3Г.

	А	Б	В	Г	Д
1		☒			
2			☒		
3				☒	

22. Нехай ребро куба дорівнює a, тоді після збільшення його на 50% воно становитиме $a_1 = 1{,}5a$.

1) Площа поверхні куба з ребром a становить $S = 6a^2$, а куба з ребром a_1 — $S_1 = 6a_1^2 = 6 \cdot (1{,}5a)^2 = 13{,}5a^2$. Тому поверхня куба збільшиться на $S_1 - S = 13{,}5a^2 - 6a^2 = 7{,}5a^2$, що становить $\frac{7{,}5a^2}{6a^2} = 1{,}25 = 125\%$. **2)** Об'єм куба з ребром a дорівнює $V = a^3$, а куба з ребром a_1 — $V_1 = a_1^3 = (1{,}5a)^3 = 3{,}375a^3$. Тому об'єм куба збільшиться на $V_1 - V = 3{,}375a^3 - a^3 = 2{,}375a^3$, що становить $\frac{2{,}375a^3}{a^3} = 2{,}375 = 237{,}5\%$. *Відповідь.* **1)** 125; **2)** 237,5.

23. **1.** Оскільки кут ABC спирається на ту саму дугу AC, що й кут ADC, то $\angle ABC = \angle ADC = 30°$. Трикутник ACB — рівнобедрений, тому $\angle ACB = (180° - \angle ABC) : 2 = (180° - 30°) : 2 = 75°$.



2. $\cup AC = \frac{2\pi R}{360°} \cdot (2 \cdot 30°) = \frac{\pi R}{3}$ (см). $\frac{\pi R}{3} = 6\pi$; $R = 18$ (см).

Відповідь. **1.** 75; **2.** 18.

24. **1.** $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = 2$.

2. $\overrightarrow{AB}(-1 - 5; 8 - 0; -2 - (-2)) = \overrightarrow{(-6; 8; 0)}$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2 + 0^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.

Відповідь. **1.** 2. **2.** 10.

25. **1.** $a_7 = \frac{a_1 + a_{13}}{2} = \frac{-5 + (-29)}{2} = -17$. **2.** $S_{13} = \frac{a_1 + a_{13}}{2} \cdot 13 = -17 \cdot 13 = -221$.

Відповідь. **1.** –17; **2.** –221.

26. Нехай подія A — серед 6 навмання взятих деталей виявиться 4 стандартних. Кількість усеможливих варіантів вибору будь-яких 6 деталей з 10, при якому послідовність неістотна, дорівнює $n = C_{10}^6 = C_{10}^4 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$. Кількість сприятливих випадків вибору 4 стандартних деталей, які можна вибрати із 7 стандартних, які є в партії (врахуємо, що загалом вибирають 6 деталей, серед яких 4 стандартні і 2 нестандартні) дорівнює $m = C_7^4 \cdot C_3^2 = C_7^3 \cdot C_3^1 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 3 = 35 \cdot 3 = 105$.

Отже, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{105}{210} = 0{,}5$. *Відповідь.* 0,5.

26. Якщо мотоцикліст наздоганятиме велосипедиста, то за час до зустрічі t год велосипедист проїде $12t$ км, а мотоцикліст — $(168 + 12t)$ км, що дорівнює $72t$ км. $72t = 168 + 12t$; $60t = 168$; $t = 2{,}8$. Отже, мотоцикліст наздожене велосипедиста через 2,8 год. *Відповідь.* 2,8.

27. $\dfrac{\log_5 4 + \log_5 16}{\log_6 16 + \log_6 81} = \dfrac{\log_5 (4 \cdot 16)}{\log_6 (16 \cdot 81)} = \dfrac{\log_5 64}{\log_6 (2^4 \cdot 3^4)} = \dfrac{\log_5 8^2}{\log_6 6^4} = \dfrac{2}{4} = 0{,}5$. *Відповідь.* 0,5.

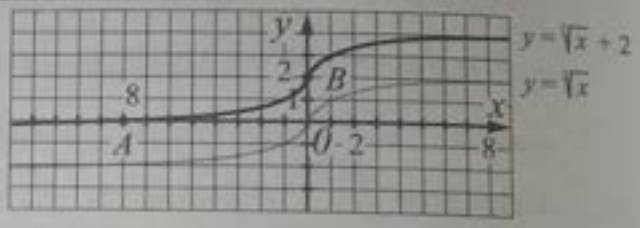
28. $|5x - 2| = 2$; $5x - 2 = \pm 2$; $5x = 2 \pm 2$; $x_1 = 0{,}8$; $x_2 = 0$. Сума коренів дорівнює 0,8. *Відповідь.* 0,8.

29. Перший учень з 6 книг може вибрати будь-які 3 книжки $n_1 = C_6^3 = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ способами, другий учень із 7 книг може вибрати будь-які 3 книжки $n_2 = C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35$ способами. За правилом добутку 3 книги першого учня можна обміняти на 3 книги другого $n = n_1 \cdot n_2 = 20 \cdot 35 = 700$ способами. *Відповідь.* 700.

30. **1.** $y = \sqrt[3]{x} + 2$. Якщо $x = -1$, то $y = \sqrt[3]{-1} + 2 = -1 + 2 = 1$; якщо $y = 0$, то маємо: $0 = \sqrt[3]{x} + 2$; $\sqrt[3]{x} = -2$; $x = -8$; якщо $x = 0$, то $y = 2$; якщо $x = 8$, то $y = \sqrt[3]{8} + 2 = 2 + 2 = 4$.

x	-1	-8	0	8
y	1	0	2	4

2. ОДЗ: $x \in R$. Графік функції $y = \sqrt[3]{x} + 2$ отримаємо шляхом перетворення графіка функції $y = \sqrt[3]{x}$, піднявши його на 2 одиниці відносно осі ординат.



3. Точки перетину з осями координат: абсцис — точка $A(-8; 0)$; ординат — точка $B(0; 2)$.

4. $F(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + 2x = \dfrac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + 2x$. **5.** $S = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{-8}^{0} \left(\sqrt[3]{x} + 2\right)dx$.

6. $S = \int\limits_{-8}^{0} \left(\sqrt[3]{x} + 2\right)dx = \left(\dfrac{3\sqrt[3]{x^4}}{4} + 2x\right)\Bigg|_{-8}^{0} = 0 - \dfrac{3\sqrt[3]{(-8)^4}}{4} - 2 \cdot (-8) = -\dfrac{3 \cdot 16}{4} + 16 = 16 - 12 = 4$ (кв. од.).

Відповідь. 4.

31. **1.** Нехай $SABCD$ — правильна чотирикутна піраміда, $ABCD$ — квадрат, SN — апофема, $l = SN = 12$. Висота правильної піраміди проектується в центр квадрата $ABCD$ — точку O перетину діагоналей. Проведемо апофему SN, $SN \perp CD$ і висоту піраміди $SO \perp ON$. За теоремою про три перпендикуляри $ON \perp CD$, тому $\angle SNO$ — кут нахилу апофеми до площини основи. Тоді $\alpha = \angle SNO = 60°$.



2. З прямокутного трикутника SON одержимо:

$H = SO = SN \sin \angle N = 12 \sin 60° = 12 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

3. З прямокутного трикутника SON ($\angle O = 90°$, $\angle S = 30°$) маємо: $ON = SN : 2 = 6$. Тоді сторона основи $a = 2ON = 12$; $S_{ABCD} = a^2 = 144$. $V = \dfrac{1}{3} S_{\text{о}} \cdot H = \dfrac{1}{3} \cdot 144 \cdot 6\sqrt{3} = 288\sqrt{3}$.

Тоді $\sqrt{3}V = \sqrt{3} \cdot 288\sqrt{3} = 864$.

Відповідь. 864.



33. 1. Проведемо перпендикуляр $DK \perp SC$. Оскільки чотирикутна піраміда $SABCD$ — правильна, то $\Delta DSC = \Delta BSC$. Тому $BK \perp SC$. Отже, $\beta = \angle DKB$ — кут між бічними гранями SCB і SCD і є кутом при вершині рівнобедреного ΔDKB ($DK = KB$).

2. Розглянемо ΔSMD ($\angle M = 90°$). Бічне ребро піраміди дорівнює: $SD = \sqrt{SM^2 + MD^2} = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$. Розглянемо ΔSDC. $2S_{\Delta DSC} = 1 \cdot DC = 12 \cdot 12 = 144$, але $2S_{\Delta DSC} = SC \cdot DK = 6\sqrt{5} \cdot DK$. Отже, маємо: $DK = \frac{144}{6\sqrt{5}} = \frac{24}{\sqrt{5}}$. З ΔDKB за теоремою косинусів одержимо: $DB^2 = 2DK^2 - 2DK^2\cos\beta$, $\left(12\sqrt{2}\right)^2 = 2\left(\frac{24}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2\left(\frac{24}{\sqrt{5}}\right)^2\cos\beta$,

$144 = \frac{576}{5}(1 - \cos\beta)$, звідки $\cos\beta = 1 - \frac{5}{4} = -0{,}25$, тому $\beta = \arccos(-0{,}25)$. *Відповідь.* $\arccos(-0{,}25)$.

34. $|x^2 - x + 1| \geq |x^2 + 3x - 4|$. Вираз $x^2 - x + 1 > 0$ для будь-яких значень x ($D = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$). Отже, $x^2 - x + 1 \geq |(x + 4)(x - 1)|$.

1) $x < -4$; $x^2 - x + 1 \geq x^2 + 3x - 4$; $4x \leq 5$; $x \leq 1{,}25$. Отже, $x \in (-\infty; -4)$;

2) $-4 \leq x \leq 1$; $x^2 - x + 1 \geq -(x^2 + 3x - 4)$; $x^2 + x - 1{,}5 \geq 0$; $D = 1 + 4 \cdot 1{,}5 = 7$; $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{7}}{2} > -4$;

$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{7}}{2} < 1$. Отже, $x \in \left[-4; \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{7}}{2}; 1\right]$;

3) $x > 1$; $x^2 - x + 1 \geq x^2 + 3x - 4$; $4x \leq 5$; $x \leq 1{,}25$. Отже, $x \in (1; 1{,}25]$. Тоді одержимо:

$x \in \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{7}}{2}; 1{,}25\right]$. *Відповідь.* $\left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{7}}{2}; 1{,}25\right]$.

35. 1. $2^x - 4 = 0$; $2^x = 2^2$; $x = 2$.

2. $\begin{cases} x^2 - 2\sqrt{a}x + 1 = 0; & (1) \\ 2^x - 4 = 0. & (2) \end{cases}$ Розглянемо перше рівняння сукупності: $x^2 - 2\sqrt{a}x + 1 = 0$; $a \geq 0$; $D = 4a - 4 = 4(a - 1)$. а) Якщо $a - 1 < 0$; $a < 1$ то рівняння коренів не має; б) якщо $a - 1 = 0$; $a = 1$, то $(x - 1)^2 = 0$; $x = 1$; в) якщо $a - 1 > 0$; $a > 1$, то $x_1 = \frac{2\sqrt{a} - 2\sqrt{a-1}}{2} = \sqrt{a} - \sqrt{a-1}$; $x_2 = \sqrt{a} + \sqrt{a-1}$. Розглянемо випадок, коли корені рівнянь (1) і (2) збігаються, тобто

$\begin{cases} \sqrt{a} - \sqrt{a-1} = 2; \\ \sqrt{a} + \sqrt{a-1} = 2. \end{cases}$

Якщо $\sqrt{a} - \sqrt{a-1} = 2$; $\sqrt{a} = 2 + \sqrt{a-1}$; $a = 4 + 4\sqrt{a-1} + a - 1$; $3 + 4\sqrt{a-1} = 0$ — рівняння коренів не має. Якщо $\sqrt{a} + \sqrt{a-1} = 2$; $a + 2\sqrt{a(a-1)} + a - 1 = 4$; $2a + 2\sqrt{a(a-1)} = 5$; $2\sqrt{a(a-1)} = 5 - 2a$. Якщо $5 - 2a < 0$, то рівняння коренів не має; якщо $5 - 2a \geq 0$, тобто $1 < a \leq 2{,}5$, то $4a(a-1) = 25 - 20a + 4a^2$; $16a = 25$, тобто якщо $a = \frac{25}{16}$, то $x_2 = 2$. При цьому

$x_1 = \sqrt{\frac{25}{16}} - \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = 0{,}5$.

Відповідь. Якщо $a \in (-\infty; 1)$, то рівняння не має коренів; якщо $a = 1$, то $x \in \{1; 2\}$; якщо $a = \frac{25}{16}$, то $x \in \{0{,}5; 2\}$; якщо $a \in \left(1; \frac{25}{16}\right) \cup \left(\frac{25}{16}; +\infty\right)$, то $x \in \left\{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}; \sqrt{a} + \sqrt{a-1}; 2\right\}$.

ЗМІСТ

Передмова 3

АЛГЕБРА ТА ПОЧАТКИ АНАЛІЗУ

Тема 1. Властивості дій з дійсними числами. Правила порівняння і округлення чисел. Ознаки подільності. НСД і НСК. Арифметичні задачі 5
Тема 2. Відношення та пропорції. Відсотки. Задачі на відсотки. Текстові задачі 16
Тема 3. Цілі раціональні вирази 24
Тема 4. Дробово-раціональні вирази 31
Тема 5. Ірраціональні вирази 39
Тема 6. Показникові та логарифмічні вирази 47
Тема 7. Тригонометричні вирази 54
Тема 8. Цілі рівняння 65
Тема 9. Цілі нерівності 75
Тема 10. Раціональні й дробові раціональні рівняння 84
Тема 11. Раціональні й дробові раціональні нерівності 92
Тема 12. Ірраціональні рівняння 101
Тема 13. Ірраціональні нерівності 109
Тема 14. Показникові рівняння 118
Тема 15. Показникові нерівності 126
Тема 16. Логарифмічні рівняння 135
Тема 17. Логарифмічні нерівності 143
Тема 18. Тригонометричні рівняння 151
Тема 19. Тригонометричні нерівності 164
Тема 20. Системи рівнянь і нерівностей 174
Тема 21. Числові послідовності. Арифметична та геометрична прогресії 184
Тема 22. Функціональна залежність. Елементарні функції та їхні властивості 193
Тема 23. Побудова графіків функцій методом геометричних перетворень 208
Тема 24. Похідна функції, її геометричний і механічний зміст 223
Тема 25. Застосування похідної для дослідження функцій 234
Тема 26. Первісна. Інтеграл 243
Тема 27. Елементи комбінаторики 254
Тема 28. Початки теорії ймовірностей та елементи статистики 263

ГЕОМЕТРІЯ

Тема 29. Найпростіші геометричні фігури на площині 280
Тема 30. Трикутник 293
Тема 31. Прямокутний трикутник 304
Тема 32. Рівнобедрений трикутник 312
Тема 33. Чотирикутники 319
Тема 34. Многокутники 330
Тема 35. Коло, круг та їх елементи 335

Тема 36. Аксіоми стереометрії. Прямі та площини в просторі
Тема 37. Призма 344
Тема 38. Піраміда 356
Тема 39. Циліндр 366
Тема 40. Конус 374
Тема 41. Сфера і куля 381
Тема 42. Координати на площині та в просторі 390
Тема 43. Вектори на площині та в просторі 398
Тема 44. Геометричні переміщення (рух) і перетворення фігур 408
Варіанти зошитів у форматі ЗНО 419
Відповіді (алгебра та початки аналізу) 429
Відповіді (геометрія) 453
Відповіді до варіантів зошитів у форматі ЗНО 470