ВИДАВНИЦТВО
РАНОК

Інтернет-
підтримка

Н. С. ПРОКОПЕНКО
Ю. О. ЗАХАРІЙЧЕНКО
Н. Л. КІНАЩУК

АЛГЕБРА 8

Н. С. ПРОКОПЕНКО
Ю. О. ЗАХАРІЙЧЕНКО
Н. Л. КІНАЩУК

АЛГЕБРА 8

Підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Харків
Видавництво «Ранок»
2016

УДК [512:37.016](075.3)
ББК 22.141я721
П 80

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 10.05.2016 р. № 491)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Експерти, які здійснили експертизу даного підручника під час проведення конкурсного відбору проектів підручників для учнів 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів і зробили висновок про доцільність надання підручнику грифа «Рекомендовано Міністерством освіти і науки України»:

В. В. Нічишина, доцент кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені В. Винниченка, канд. пед. наук;
В. І. Фіготіна, вчитель математики Харківської гімназії № 83 Харківської міської ради Харківської області, вчитель-методист;
Л. С. Шелест, методист районного методичного кабінету відділу освіти Бродівської райдержадміністрації

Рецензенти:
Б. В. Олійник, завідувач кафедри математики факультету інформатики Національного університету «Києво-Могилянська Академія», доцент, доктор фіз.-мат. наук;
Р. І. Петришин, перший проректор Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, професор, доктор фіз.-мат. наук;
С. В. Мартинюк, доцент кафедри алгебри та інформатики факультету математики та інформатики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, канд. фіз.-мат. наук;
О. А. Олексюк, методист Науково-методичного центру природничо-математичної освіти та технологій Інституту післядипломної педагогічної освіти Київського університету імені Бориса Грінченка;
У. В. Остапчук, учитель математики, Заслужений учитель України;
Л. В. Пекарська, методист кабінету природничо-математичних предметів, технологій Рівненського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

Прокопенко Н. С.
П 80 Алгебра : підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Н. С. Прокопенко, Ю. О. Захарійченко, Н. Л. Кінащук. — Х. : Вид-во «Ранок», 2016. — 288 с. : іл.

ISBN 978-617-09-2853-5

УДК [512:37.016](075.3)
ББК 22.141я721

Інтернет-підтримка
Для користування електронними матеріалами до підручника увійдіть на сайт interactive.ranok.com.ua

Служба технічної підтримки:
тел.: (057) 719-48-65, (098) 037-54-68
(понеділок–п'ятниця з 10:00 до 18:00)
E-mail: interactive@ranok.com.ua

© Прокопенко Н. С., Захарійченко Ю. О., Кінащук Н. Л., 2016
© Ширяєв Д. В., художнє оформлення, 2016
© Онищенко Ю. В., художнє оформлення, 2016
© Федюк Т. В., обкладинка, 2016
© ТОВ Видавництво «Ранок», 2016

ISBN 978-617-09-2853-5

ЗМІСТ

Як працювати з підручником 6
Контрольна робота № 1 (діагностична) 8

РОЗДІЛ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

§ 1. Раціональні вирази. Раціональні дроби 10
Самостійна робота № 1 15
Домашнє завдання 16
§ 2. Основна властивість раціонального дробу. Скорочення дробів 18
Самостійна робота № 2 26
Домашнє завдання 27
§ 3. Додавання та віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками 29
Самостійна робота № 3 34
Домашнє завдання 35
§ 4. Додавання та віднімання раціональних дробів із різними знаменниками 36
Самостійна робота № 4 43
Домашнє завдання 43
Підсумовуємо вивчене в § 1–4 45
Контрольна робота № 2 47
§ 5. Множення та ділення раціональних дробів. Піднесення раціонального дробу до степеня 48
Самостійна робота № 5 56
Домашнє завдання 57
§ 6. Тотожні перетворення раціональних виразів 59
Самостійна робота № 6 65
Домашнє завдання 65
§ 7. Раціональні рівняння. Рівносильні рівняння 67
Самостійна робота № 7 77
Домашнє завдання 77
§ 8. Степінь із цілим показником та його властивості . . . 79
Домашнє завдання 86
§ 9. Стандартний вигляд числа 88
Самостійна робота № 8 93
Домашнє завдання 93
§ 10. Функція $y=\frac{k}{x}$, її графік і властивості 95
Самостійна робота № 9 104
Домашнє завдання 105
В один клік 107
Підсумовуємо вивчене в § 5–10 110
Контрольна робота № 3 112

САМОКОНТРОЛЬ

Контрольна робота № 1, с. 8
Контрольна робота № 2, с. 47
Контрольна робота № 3, с. 112

ЗАДАЧІ «MATH FOR LIFE»

Здоров'я, с. 16
Страхові консультанти, с. 27
Стартап, с. 34
Тріатлон, с. 42
Вигідна пропозиція, с. 57
Вільний час, с. 64
Call-центр, с. 76
Серцевий ритм, с. 86
Запаси прісної води, с. 92
Телефонні розмови, с. 105

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Див. с. 17, 25, 31, 41, 54, 63, 72, 74, 85, 102, 109

ДОСЛІДЖУЄМО

Див. с. 41, 58, 66, 109

В ОДИН КЛІК

Побудова графіка функції $y=\frac{k}{x}$, с. 107

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Див. с. 16, 29, 33, 41, 75, 87, 107, 109

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

Теми навчальних проектів до розділу 1, с. 9

САМОКОНТРОЛЬ

Контрольна робота № 4, с. 198

ЗАДАЧІ «MATH FOR LIFE»

Маркетинг, с. 122
Піца з морепродуктами, с. 134
Києво-Могилянська академія, с. 142
Поїздка в маршрутному таксі, с. 151
Таксі, с. 159
Тренажерний зал, с. 170
Тест при прийомі на роботу, с. 183
Морозиво, с. 191

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Див. с. 124, 143, 155, 168, 183, 188

ДОСЛІДЖУЄМО

Див. с. 126

В ОДИН КЛІК

Побудова графіка функції $y = x^2$, с. 124
Побудова графіка функції $y = \sqrt{x}$, с. 194

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Див. с. 118, 124, 126, 134, 142, 146, 149, 194, 195

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

Теми навчальних проектів до розділу 2, с. 113

РОЗДІЛ 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

§ 11. Функція $y = x^2$, її графік і властивості. Графічний спосіб розв'язування рівнянь 114
Домашнє завдання 122
В один клік 124

§ 12. Рівняння $x^2 = a$. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь 127
Самостійна робота № 10 133
Домашнє завдання 134

§ 13. Множина. Підмножина. Числові множини 135
Домашнє завдання 142

§ 14. Раціональні числа. Ірраціональні числа. Дійсні числа 144
Самостійна робота № 11 151
Домашнє завдання 152

§ 15. Арифметичний квадратний корінь зі степеня. Тотожності $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ (a \geqslant 0)$, $\sqrt{a^2} = |a|$ 153
Домашнє завдання 159

§ 16. Властивості арифметичного квадратного кореня. Арифметичний квадратний корінь з добутку і частки 161
Домашнє завдання 171

§ 17. Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені 173
Домашнє завдання 183

§ 18. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік і властивості 185
Самостійна робота № 12 191
Домашнє завдання 192
В один клік 194

Підсумовуємо вивчене в § 11–18 196
Контрольна робота № 4 198

РОЗДІЛ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

§ 19. Квадратний тричлен. Квадратні рівняння 200
Домашнє завдання 206
§ 20. Неповні квадратні рівняння, їх розв'язування . . . 207
Домашнє завдання 213
§ 21. Формула коренів квадратного рівняння 214
Самостійна робота № 13 221
Домашнє завдання 222
В один клік 223
§ 22. Теорема Вієта. Теорема, обернена до теореми Вієта 225
Самостійна робота № 14 234
Домашнє завдання 235
Підсумовуємо вивчене в § 19–22 237
Контрольна робота № 5 238
§ 23. Розкладання квадратного тричлена на множники . . . 239
Домашнє завдання 245
§ 24. Розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних 246
Самостійна робота № 15 254
Домашнє завдання 255
§ 25. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь. Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі 257
Самостійна робота № 16 268
Домашнє завдання 269
Підсумовуємо вивчене в § 23–25 271
Контрольна робота № 6 273

ПОВТОРЕННЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

§ 26. Повторення і систематизація навчального матеріалу 274
1. Раціональні вирази 274
2. Квадратні корені. Дійсні числа 275
3. Квадратні рівняння 277
Контрольна робота № 7 279

Відповіді до завдань 281
Алфавітний покажчик 287

САМОКОНТРОЛЬ

Контрольна робота № 5, с. 238
Контрольна робота № 6, с. 273
Контрольна робота № 7, с. 279

ЗАДАЧІ «MATH FOR LIFE»

Морська екскурсія, с. 206
Фасувально-пакувальний автомат, с. 212
Художня виставка, с. 222
Екскурсія до Острозької академії, с. 235
Страхова компанія, с. 245
Майстер-клас для піцмейкерів, с. 255
Температура повітря, с. 269

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Див. с. 209, 215, 227, 229, 231, 244, 250, 266, 269

ДОСЛІДЖУЄМО

Див. с. 224

В ОДИН КЛІК

Знаходження коренів квадратного рівняння, с. 223

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Див. с. 218, 219, 224, 225, 228, 232, 235, 239, 257

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

Теми навчальних проектів до розділу 3, с. 199

ЯК ПРАЦЮВАТИ З ПІДРУЧНИКОМ

Шановні восьмикласники й восьмикласниці!

Ви рушаєте в нову подорож захопливим світом алгебри. Цього року вашим надійним помічником буде підручник, який ви тримаєте в руках. Зорієнтуватися в його змісті вам допоможуть різноманітні рубрики, з якими вас ознайомить невеличкий дороговказ.

Цікавої вам подорожі!

Вчора, сьогодні, завжди: що ви знаєте, чого навчитеся, як зможете застосувати

Актуальна задача: приклад із реального життя

Чи відомо вам? Цікава інформація про історію та сучасність

Ключовий момент: коментарі, на які слід звернути особливу увагу

Головна ідея: основний теоретичний матеріал

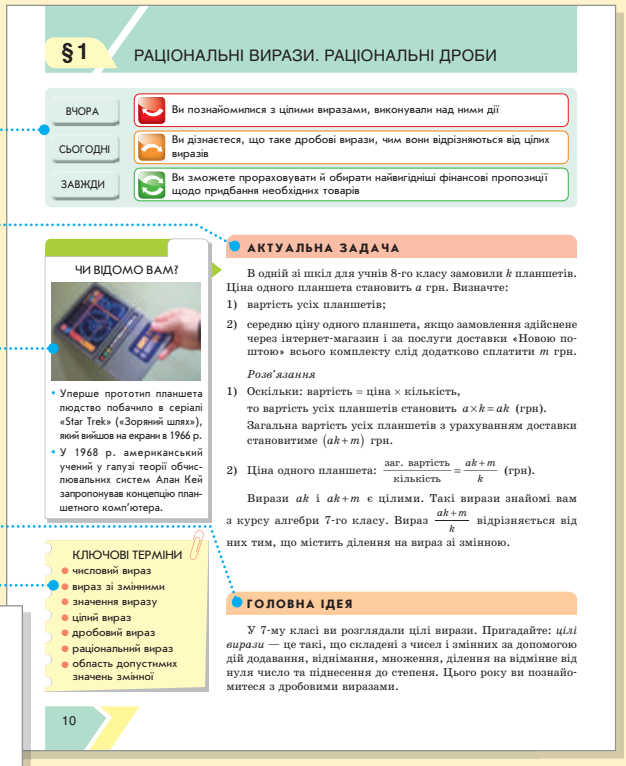
Ключові терміни параграфа

Запам'ятайте: основні означення, правила, твердження, теореми

Приклади із покроковим розв'язанням і докладним поясненням

Тренуємося: вправи з 8 диференційованих завдань на закріплення певних навичок

Пригадайте: відомі опорні факти, формули



§1 РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

ВЧОРА — Ви познайомилися з цілими виразами, виконували над ними дії

СЬОГОДНІ — Ви дізнаєтеся, що таке дробові вирази, чим вони відрізняються від цілих виразів

ЗАВЖДИ — Ви зможете прораховувати й обирати найвигідніші фінансові пропозиції щодо придбання необхідних товарів

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Уперше прототип планшета людство побачило в серіалі «Star Trek» («Зоряний шлях»), який вийшов на екрани в 1966 р.
- У 1968 р. американський учений у галузі теорії обчислювальних систем Алан Кей запропонував концепцію планшетного комп'ютера.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

В одній зі шкіл для учнів 8-го класу замовили k планшетів. Ціна одного планшета становить a грн. Визначте:

1) вартість усіх планшетів;
2) середню ціну одного планшета, якщо замовлення здійснене через інтернет-магазин і за послуги доставки «Новою поштою» всього комплекту слід додатково сплатити m грн.

Розв'язання

1) Оскільки: вартість = ціна × кількість, то вартість усіх планшетів становить $a \times k = ak$ (грн). Загальна вартість усіх планшетів з урахуванням доставки становитиме $(ak+m)$ грн.
2) Ціна одного планшета: $\frac{\text{заг. вартість}}{\text{кількість}} = \frac{ak+m}{k}$ (грн).

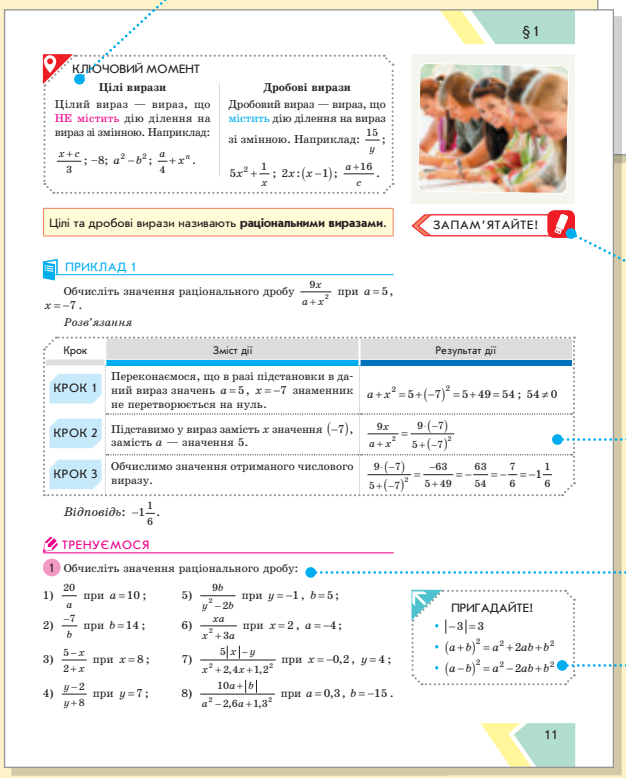
Вирази ak і $ak+m$ є цілими. Такі вирази знайомі вам з курсу алгебри 7-го класу. Вираз $\frac{ak+m}{k}$ відрізняється від них тим, що містить ділення на вираз зі змінною.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ
- числовий вираз
- вираз зі змінними
- значення виразу
- цілий вираз
- дробовий вираз
- раціональний вираз
- область допустимих значень змінної

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У 7-му класі ви розглядали цілі вирази. Пригадайте: *цілі вирази* — це такі, що складені з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення на відмінне від нуля число та піднесення до степеня. Цього року ви познайомитеся з дробовими виразами.

10



§1

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Цілі вирази

Цілий вираз — вираз, що НЕ містить дію ділення на вираз зі змінною. Наприклад: $\frac{x+c}{3}$; -8; a^2-b^2; $\frac{a}{4}+x^n$.

Дробові вирази

Дробовий вираз — вираз, що містить дію ділення на вираз зі змінною. Наприклад: $\frac{15}{y}$; $5x^2+\frac{1}{x}$; $2x:(x-1)$; $\frac{a+16}{c}$.

Цілі та дробові вирази називають **раціональними виразами**.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

ПРИКЛАД 1

Обчисліть значення раціонального дробу $\frac{9x}{a+x^2}$ при $a=5$, $x=-7$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Переконаємося, що в разі підстановки в даний вираз значень $a=5$, $x=-7$ знаменник не перетворюється на нуль.	$a+x^2=5+(-7)^2=5+49=54$; $54\neq 0$
КРОК 2	Підставимо у вираз замість x значення (-7), замість a — значення 5.	$\frac{9x}{a+x^2}=\frac{9\cdot(-7)}{5+(-7)^2}$
КРОК 3	Обчислимо значення отриманого числового виразу.	$\frac{9\cdot(-7)}{5+(-7)^2}=\frac{-63}{5+49}=-\frac{63}{54}=-\frac{7}{6}=-1\frac{1}{6}$

Відповідь: $-1\frac{1}{6}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Обчисліть значення раціонального дробу:

1) $\frac{20}{a}$ при $a=10$;
2) $\frac{-7}{b}$ при $b=14$;
3) $\frac{5-x}{2+x}$ при $x=8$;
4) $\frac{y-2}{y+8}$ при $y=7$;
5) $\frac{9b}{y^2-2b}$ при $y=-1$, $b=5$;
6) $\frac{xa}{x^2+3a}$ при $x=2$, $a=-4$;
7) $\frac{5|x|-y}{x^2+2,4x+1,2^2}$ при $x=-0,2$, $y=4$;
8) $\frac{10a+|b|}{a^2-2,6a+1,3^2}$ при $a=0,3$, $b=-15$.

ПРИГАДАЙТЕ!
- $|-3|=3$
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

11

Інтелектуальний фітнес: система різнорівневих завдань зростаючої складності

Перерва на логіку: задачі на розвиток логічного мислення, задачі-жарти

Завдання із зіркою: вправи на аналіз, узагальнення та систематизацію отриманих знань

Math for life: задачі на створення математичних моделей до ситуацій із реального життя

Майбутня професія: інформація щодо вибору професії

Знаю, вмію, можу: самостійні роботи для самоконтролю

Домашнє завдання з посиланням на відповідні приклади в параграфі

Вправи на повторення для підготовки до наступного параграфа

В один клік: приклади використання комп'ютерних програм для побудови графіків, розв'язання рівнянь

Підсумовуємо: узагальнюючий матеріал для підготовки до контрольної роботи

Контрольні роботи

Інтернет-посилання: корисні й цікаві

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Скоротіть дріб, ураховуючи область його допустимих значень:

1) $\frac{a(x+7)}{7(x+7)}$; 3) $\frac{9(4-k)}{(k-4)}$; 5) $\frac{20a^2(m-2)}{ab(2-m)}$;

2) $\frac{m(x-2)}{4m(x-2)}$; 4) $\frac{16ab(3c-6)}{4a(4c-8)}$; 6) $\frac{4(c^2-5)}{8(-c^2+5)}$.

2 Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу та скоротіть його:

1) $\frac{a^2+6a}{2a+12}$; 3) $\frac{y^2-9}{3+y}$; 5) $\frac{(m+7)^2}{2m+14}$;

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Спробуйте без допомоги калькулятора за 40 секунд визначити, який із добутків є більшим — $351\cdot354$ чи $352\cdot353$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Стівен Пол Джобс (англ. Steven Paul Jobs; 1955–2011), більш відомий як Стів Джобс, — один із засновників корпорації Apple та анімаційної студії Pixar. Людина, яка змінила світ, керуючи розробками iMac, iTunes, iPod, iPhone, iPad, розвитком Apple Store, iTunes Store, App Store, iBookstore.

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Сума виразів $\frac{m}{x-a}$ і $\frac{m}{a-x}$ дорівнює нулю при $x\neq a$.

2) Сума виразів $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$ і $\frac{1}{a^3}$ дорівнює $\frac{3}{a^3}$ при $a\neq0$.

3) Якщо $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1$, то $\frac{a^2+b^2}{ab}=1$ при $a\neq0$, $b\neq0$.

4) Значення виразу $\frac{y^2+3}{y^2-6y+9}$ додатне при $y\neq3$.

5) Якщо 1 кг апельсинів коштує x грн, а 1 кг лимонів — y грн, то n кг апельсинів і m кг лимонів разом коштують $(nx+my)$ грн.

§ 2

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «СТРАХОВІ КОНСУЛЬТАНТИ»

У таблиці наведено результати продажу страхових полісів консультантами за тиждень. Проаналізуйте ефективність роботи консультантів, давши відповідь на запитання.

Консультанти	День тижня					
	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб
Антон	21	34	18	29	55	42
Олена	10	19	24	45	50	54
Віталій	42	30	17	37	48	39
Софія	25	43	38	16	49	33

1 Хто з консультантів продав найбільше полісів?

2 Складіть рейтинг консультантів за кількістю проданих полісів (у порядку зменшення кількості).

3 Якою є середня кількість полісів, проданих усіма консультантами за один день? Результат округліть до цілих.

4 У який день було продано найменшу кількість полісів?

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Серед найбільш перспективних професій сьогодні все частіше називають професію страхового агента. Його робота полягає в пошуку клієнтів та укладанні з ними договорів майнового або особистого страхування. Шляхи одержання професії: навчання в середньому спеціальному або вищому навчальному закладі за фахом «Страхова справа», «Керування страхуванням», «Комерційне і соціальне страхування».

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Скоротіть дріб:

1) $\frac{30x^4y}{12x^4y^2}$; 3) $\frac{81x^2+18x+1}{81x^2-1}$; 5) $\frac{9x^2-6xy+y^2}{3xy-y^2}$;

2) $\frac{5a^2b}{10a^2+5a^2b}$; 4) $\frac{a^2-36}{a^2-12a+36}$; 6) $\frac{x^2-49y^2}{x^2+14xy+49y^2}$.

Див. приклади 1, 2, 3

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

1 Виберіть серед наведених виразів цілий вираз.

А	Б	В	Г
$\frac{5}{a^2}$	$\frac{a^2}{5}$	$\frac{a+5}{a}$	$\frac{a}{a+5}$

2 Дано вираз $\frac{x+1}{x-4}$. Допустимими значеннями змінної x є всі значення, крім:

А	Б	В	Г
$x=-1$	$x=1$	$x=4$	$x=-4$

3 Виберіть вираз, який має зміст при всіх значеннях змінної.

4 Фітнес-центр щодня відвідують k чоловіків та m жінок. Відомо, що кількість жінок більша за кількість чоловіків. Виберіть дріб, якому може дорівнювати значення виразу $\frac{k}{m}$.

А	Б	В	Г
$\frac{7}{9}$	$\frac{45}{19}$	$\frac{100}{7}$	$\frac{8}{3}$

5 На страусиній фермі за 4 дні x страусів споживають y кг корму. Скільки кілограмів корму споживає один страус за один день?

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Виконайте дії:

1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; 3) $\frac{4}{3\cdot5}+\frac{7}{2\cdot5}$; 5) $\frac{10}{21}-\frac{4}{35}$;

2) $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$; 4) $\frac{5}{2\cdot9}-\frac{4}{5\cdot9}$; 6) $\frac{3}{28}+\frac{5}{42}$.

Багато чого з математики не залишається в пам'яті, але коли зрозумієш її, тоді легко при нагоді згадати призабуте.

М. В. Остроградський

В ОДИН КЛІК

Для побудови графіка функції $y=\frac{k}{x}$ ви складали таблиці значень функції, позначали на координатній площині отримані точки та сполучали їх.

Проте точніші результати побудови графіків функцій ви можете отримати за допомогою комп'ютерних програм, таких як MathCad, Advanced Grapher, GRAN 1, MathKit, GeoGebra, Maple та електронних таблиць Excel.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Ознайомлювальну версію програми ви можете завантажити за посиланням www.freeware.com.ua/program3366.html

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 1–4

1 Ви дізналися, що таке раціональні вирази, область допустимих значень змінних, що входять у вираз.

Раціональні вирази

- **Цілі вирази** — вирази, що не містять дію ділення на вираз зі змінною
- **Дробові вирази** — вирази, що містять дію ділення на вираз зі змінною

Область д (ОДЗ) вираз усі значенн цей вираз м пустимих зн кож *областя*

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

Варіант 1

1 Знайдіть допустимі значення змінної, що входить до виразу $\frac{4x}{x+9}$.

А	Б	В	Г
Усі значення, крім $x=0$	Усі значення, крім $x=4$	Усі значення, крім $x=-9$	Усі значення, крім $x=9$

5 Виконайте віднімання: $\frac{6k}{3k-5}-\frac{10}{3k-5}$.

А	Б	В	Г
2	3	$\frac{2}{3k-5}$	$\frac{3}{3k-5}$

6 Виконайте дії: $\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}$.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Варіант 2 контрольної роботи № 2 див. на сайті interactive.ranok.com.ua

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 1
(діагностична)
Варіант 1

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ
Варіант 2 контрольної роботи № 1
див. на сайті interactive.ranok.com.ua

1 Піднесіть до степеня: $\left(-x^2\right)^3$.

А	Б	В	Г
x^6	$-x^5$	$-x^6$	x^5

2 Обчисліть: $\dfrac{3^2\cdot 3^3}{9^2}$.

А	Б	В	Г
$\dfrac{1}{3}$	3	9	27

3 Знайдіть значення многочлена a^2-2a+1 при $a=-1$.

А	Б	В	Г
0	1	2	4

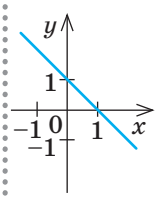
4 Розкладіть на множники вираз $16-x^2$.

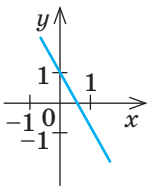
А	$(8-x)(8+x)$
Б	$(4-x)^2$
В	$(4-x)(4+x)$
Г	$(x-4)(x+4)$

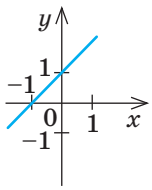
5 Спростіть вираз $(m-1)\left(m^2+m+1\right)$.

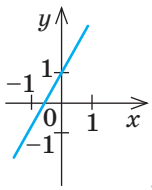
А	Б	В	Г
m^3-1	$(m+1)^3$	$(m-1)^3$	m^3+1

6 Виберіть графік функції $y=2x+1$.

А


Б


В


Г


7 Знайдіть значення виразу $\dfrac{48^2-12^2}{89^2+62\cdot 89+31^2}$.

8 Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\dfrac{x}{2}+\dfrac{y-1}{6}=-3,\\ y-x=7.\end{cases}$

9 У магазині в понеділок продали на 6 мобільних телефонів більше, ніж у вівторок. Усього за ці два дні було продано 28 мобільних телефонів.

1) Запишіть систему рівнянь, що відповідає умові задачі, якщо x — кількість телефонів, проданих у понеділок, а y — кількість телефонів, проданих у вівторок.
2) Визначте, скільки телефонів продали в понеділок, а скільки — у вівторок.

10 Задано функцію $y=\begin{cases}3-x, & \text{якщо } x\leqslant 4,\\ \dfrac{x}{2}-3, & \text{якщо } x>4.\end{cases}$

1) Побудуйте графік цієї функції.
2) Визначте за графіком, при яких значеннях аргумента функція набуває від'ємних значень.

Бонусне завдання. Розв'яжіть рівняння $(6-x)(6+x)+(3x-4)^2=52$.

1 РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

Раціональні вирази та рівняння — корисний інструмент для відображення реальних життєвих ситуацій, який допоможе вам:

- розв'язувати задачі на уроках фізики, хімії, біології, інформатики
- грамотно планувати свої витрати, бюджет, приймати обґрунтовані економічні рішення
- планувати подорожі, розраховувати оптимальний час і бюджет подорожі
- визначати витрати на виробництво, рейтинг продукції, прибуток від реалізації товарів; проводити маркетингові дослідження та аналізувати їх результати

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

- Ділення многочлена на многочлен. Теорема Безу
- Скорочене ділення за допомогою схеми Горнера
- Умовні тотожності. Похідні пропорції
- Степінь із цілим показником у хімії, фізиці, біології, інформатиці
- Аліквотні дроби
- Діофант Александрійський та діофантові рівняння
- Числа-велетні
- Функція оберненої пропорційності в економіці

Якщо ти збираєшся одного чудового дня створити щось велике, пам'ятай: один чудовий день — це сьогодні.

Стівен Спілберг

§1 РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. РАЦІОНАЛЬНІ ДРОБИ

ВЧОРА	Ви познайомилися з цілими виразами, виконували над ними дії
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся, що таке дробові вирази, чим вони відрізняються від цілих виразів
ЗАВЖДИ	Ви зможете прораховувати й обирати найвигідніші фінансові пропозиції щодо придбання необхідних товарів

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Уперше прототип планшета людство побачило в серіалі «Star Trek» («Зоряний шлях»), який вийшов на екрани в 1966 р.
- У 1968 р. американський учений у галузі теорії обчислювальних систем Алан Кей запропонував концепцію планшетного комп'ютера.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- числовий вираз
- вираз зі змінними
- значення виразу
- цілий вираз
- дробовий вираз
- раціональний вираз
- область допустимих значень змінної

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

В одній зі шкіл для учнів 8-го класу замовили k планшетів. Ціна одного планшета становить a грн. Визначте:

1) вартість усіх планшетів;
2) середню ціну одного планшета, якщо замовлення здійснене через інтернет-магазин і за послуги доставки «Новою поштою» всього комплекту слід додатково сплатити m грн.

Розв'язання

1) Оскільки: вартість = ціна × кількість,
то вартість усіх планшетів становить $a \times k = ak$ (грн).
Загальна вартість усіх планшетів з урахуванням доставки становитиме $(ak+m)$ грн.

2) Ціна одного планшета: $\dfrac{\text{заг. вартість}}{\text{кількість}} = \dfrac{ak+m}{k}$ (грн).

Вирази ak і $ak+m$ є цілими. Такі вирази знайомі вам із курсу алгебри 7-го класу. Вираз $\dfrac{ak+m}{k}$ відрізняється від них тим, що містить ділення на вираз зі змінною.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У 7-му класі ви розглядали цілі вирази. Пригадайте: *цілі вирази* — це такі, що складені з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення на відмінне від нуля число та піднесення до степеня. Цього року ви познайомитеся з дробовими виразами.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Цілі вирази

Цілий вираз — вираз, що НЕ містить дію ділення на вираз зі змінною. Наприклад:

$\frac{x+c}{3}$; -8; a^2-b^2; $\frac{a}{4}+x^n$.

Дробові вирази

Дробовий вираз — вираз, що містить дію ділення на вираз зі змінною. Наприклад: $\frac{15}{y}$; $5x^2+\frac{1}{x}$; $2x:(x-1)$; $\frac{a+16}{c}$.

Цілі та дробові вирази називають **раціональними виразами.**

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

ПРИКЛАД 1

Обчисліть значення раціонального дробу $\frac{9x}{a+x^2}$ при $a=5$, $x=-7$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Переконаємося, що в разі підстановки в даний вираз значень $a=5$, $x=-7$ знаменник не перетворюється на нуль.	$a+x^2=5+(-7)^2=5+49=54$; $54\neq 0$
КРОК 2	Підставимо у вираз замість x значення (-7), замість a — значення 5.	$\frac{9x}{a+x^2}=\frac{9\cdot(-7)}{5+(-7)^2}$
КРОК 3	Обчислимо значення отриманого числового виразу.	$\frac{9\cdot(-7)}{5+(-7)^2}=\frac{-63}{5+49}=-\frac{63}{54}=-\frac{7}{6}=-1\frac{1}{6}$

Відповідь: $-1\frac{1}{6}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Обчисліть значення раціонального дробу:

1) $\frac{20}{a}$ при $a=10$;

2) $\frac{-7}{b}$ при $b=14$;

3) $\frac{5-x}{2+x}$ при $x=8$;

4) $\frac{y-2}{y+8}$ при $y=7$;

5) $\frac{9b}{y^2-2b}$ при $y=-1$, $b=5$;

6) $\frac{xa}{x^2+3a}$ при $x=2$, $a=-4$;

7) $\frac{5|x|-y}{x^2+2,4x+1,2^2}$ при $x=-0,2$, $y=4$;

8) $\frac{10a+|b|}{a^2-2,6a+1,3^2}$ при $a=0,3$, $b=-15$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- $|-3|=3$
- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

У разі підстановки в раціональний вираз чисел замість змінних ми матимемо числовий вираз. Проте при певних числових значеннях змінних є ризик одержати в знаменнику нуль, тобто отримати вираз, що не має змісту.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Коли говорять, що вираз має зміст, це означає, що можна виконати всі математичні дії, які містить цей раціональний вираз.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Дріб має зміст, коли його знаменник не дорівнює нулю.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Областю допустимих значень виразу з однією змінною називають усі значення змінної, при яких цей вираз має зміст.

СЛІД ЗНАТИ!

Область допустимих значень змінної виразу (скорочено — ОДЗ) називають також *областю визначення виразу*.

ПРИКЛАД 2

Знайдіть область допустимих значень змінної виразу $\frac{2}{x-6}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо значення x, при якому знаменник виразу дорівнює нулю, тобто визначимо нулі знаменника. Для цього розв'яжемо рівняння $x-6=0$.	$x-6=0$ $x=6$
КРОК 2	Зробимо висновок: змінна x може набувати будь-яких значень, крім $x=6$.	$x\neq 6$

Відповідь: x — будь-яке число, крім 6, тобто $x\neq 6$.

ПРИКЛАД 3

Знайдіть область допустимих значень змінної виразу $\frac{3x}{5|x|-20}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо рівняння для визначення нулів знаменника.	$5\|x\|-20=0$
КРОК 2	Перенесемо доданок, що не містить змінної, у праву частину рівняння та поділимо обидві його частини на 5.	$5\|x\|=20$; $\|x\|=4$
КРОК 3	Розв'яжемо рівняння, використовуючи означення модуля числа.	$x=4$ або $x=-4$; $x=\pm 4$

Відповідь: x — будь-яке число, крім 4 і −4, тобто $x\neq\pm 4$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

1) $\frac{2}{3x}$;
2) $-\frac{3}{x}$;
3) $\frac{1}{x-5}$;
4) $\frac{3}{x+4}$;
5) $\frac{20x}{4x+32}$;
6) $\frac{10x}{5x-45}$;
7) $\frac{2x^3-1}{3|x|-12}$;
8) $\frac{x^2-1}{2|x|-10}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$|a|=\begin{cases} a, \text{ якщо } a>0, \\ 0, \text{ якщо } a=0, \\ -a, \text{ якщо } a<0 \end{cases}$$

Якщо $|x|=2$, то $x=2$ або $x=-2$. Це можна записати так: $x=\pm 2$.

ПРИКЛАД 4

Знайдіть область допустимих значень змінної виразу $\frac{21x}{x+6}+\frac{3-x}{x^2-9}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо знаменник другого дробу на множники.	$x^2-9=(x-3)(x+3)$
КРОК 2	Визначимо нулі кожного знаменника, розв'язавши відповідні рівняння. Пригадаємо: добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю.	1) $x+6=0$, $x=-6$; 2) $(x-3)(x+3)=0$, $x=-3$, $x=3$
КРОК 3	Зробимо висновок: змінна x може набувати будь-яких значень, крім -6, -3, 3.	$x\neq -6$, $x\neq \pm 3$

Відповідь: $x\neq -6$, $x\neq \pm 3$.

Вираз $x^2+a=0$, де a — довільне додатне число, не може дорівнювати нулю, оскільки рівняння $x^2+a=0$ не має коренів. Наприклад, вираз x^2+7 ніколи не дорівнює нулю, оскільки рівняння $x^2+7=0$ не має коренів $(x^2\neq -7)$. Отже, вираз x^2+a (де $a>0$) завжди набуває лише додатних значень.

СЛІД ЗНАТИ!

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

1) $\frac{8}{3x}+\frac{32x}{x+2}$;
2) $\frac{4}{5x}-\frac{46x}{x-6}$;
3) $\frac{x}{x+1}+\frac{x-4}{x^2-16}$;
4) $\frac{4x}{x-3}+\frac{5+x}{25-x^2}$;
5) $\frac{x+4}{81-x^2}+\frac{1-x^2}{7x-28}$;
6) $\frac{3x-18}{64-x^2}-\frac{9-x^2}{6x+30}$;
7) $\frac{x^4-1}{2x^2-32}-\frac{3x}{|x|+10}$;
8) $\frac{2x^3}{x^2+4}+\frac{x^2-4}{3|x|-15}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- $a^4-1=(a^2-1)(a^2+1)$

ПРИКЛАД 5

Визначте знак дробу $\frac{x-3}{x-7}$ при $x>12$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Проаналізуємо знаки чисельника і знаменника при $x>12$.	При $x>12$: $x-3>0$, $x-7>0$
КРОК 2	Визначимо знак дробу з урахуванням знаків чисельника та знаменника.	При $x>12$ $\frac{x-3}{x-7}>0$

Відповідь: знак «+».

- Якщо $\frac{a}{b}>0$, то $a>0$ і $b>0$ або $a<0$ і $b<0$.
- Якщо $\frac{a}{b}<0$, то $a>0$ і $b<0$ або $a<0$ і $b>0$.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Визначте знак дробу:

1) $\frac{11}{a}$ при $a<-2$;
2) $\frac{4}{c}$ при $c>1$;
3) $\frac{6}{x-3}$ при $x>4$;
4) $\frac{1}{5-y}$ при $y>10$;
5) $\frac{1-a}{4-a}$ при $a>6$;
6) $\frac{b+1}{3+b}$ при $b<-7$;
7) $\frac{x-3}{9+y}$ при $x<3$, $y>-9$;
8) $\frac{5+a}{2-b}$ при $a<-5$, $b>2$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Кінотеатр Radio City Music Hall, що був відкритий у 1932 р. в Нью-Йорку (США), на момент відкриття став найбільш містким кінотеатром у світі. Він налічує близько 6000 місць. Сьогодні цей кінотеатр все частіше використовують як концертний зал.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Визначте, цілим чи дробовим є вираз:

1) $58+a-c-z$;
2) $12a+\frac{a^2}{12}$;
3) $\frac{6}{a}+\frac{4}{t^2+1}$;
4) $\frac{19-a}{x+y}$;
5) $\frac{4}{t-2}-\frac{4}{t+2}$;
6) $\frac{9}{16}+x^5$.

2 Обчисліть значення раціонального дробу:

1) $\frac{4a^2-1}{a+6}$ при $a=0{,}5$;
2) $\frac{\frac{1}{3}x+6}{2-0{,}2x}$ при $x=-30$;
3) $\frac{4t^4+x^2}{-x^3-t^2}$ при $x=t=1$;
4) $\frac{3x^3-c}{x^2+c^4}$ при $x=1$, $c=3$.

3 У залі кінотеатру 380 місць. Кількість рядів у залі дорівнює n, а кількість місць у кожному ряді становить q. Складіть вираз для визначення кількості місць у ряді. Обчисліть значення q, якщо $n=19$.

4 Із двох пунктів A і B, відстань між якими дорівнює 70 км, одночасно назустріч один одному вирушили два мотоциклісти зі швидкостями 35 км/год і a км/год. Мотоциклісти зустрілися через t год. Запишіть вираз, за яким можна визначити час t. Знайдіть значення t, якщо $a = 21$ км/год.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Вираз $\frac{5x-2}{y}$ називають цілим виразом.

2) Вираз $\frac{ab^2+1}{3}$ називають дробовим виразом.

3) Вираз $\frac{5-x}{(x-3)(x+2)}$ не має змісту при $x = -2$.

4) Якщо автомобіль витрачає a л пального на b км шляху, то на 100 км шляху автомобіль витрачає $\frac{100a}{b}$ л пального.

5) Якщо в місті мешкає m жителів, серед яких n жителів їздять щодня на велосипедах, то значення виразу $\frac{n}{m}$ більше 1.

Білл Ґейтс (англ. Bill Gates; повне ім'я: Вільям Генрі Ґейтс III) — співзасновник компанії Microsoft, найбагатша людина світу за версією журналу Forbes із 1995 по 2007 р., у 2009 та з 2014 р. й донині. Рекордсмен за розміром коштів, переданих на благодійність. Білл Ґейтс часто відвідує школи й ділиться з підлітками своїм досвідом і баченням глобальних проблем.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

1 Виберіть серед наведених виразів цілий вираз.

А	Б	В	Г
$\frac{5}{a^2}$	$\frac{a^2}{5}$	$\frac{a+5}{a}$	$\frac{a}{a+5}$

2 Дано вираз $\frac{x+1}{x-4}$. Допустимими значеннями змінної x є всі значення, крім:

А	Б	В	Г
$x=-1$	$x=1$	$x=4$	$x=-4$

3 Виберіть вираз, який має зміст при всіх значеннях змінної.

А	Б	В	Г
$\frac{4}{3x}$	$\frac{4}{3-x}$	$\frac{4}{3+x}$	$\frac{4x}{3}$

4 Фітнес-центр щодня відвідують k чоловіків та m жінок. Відомо, що кількість жінок більша за кількість чоловіків. Виберіть дріб, якому може дорівнювати значення виразу $\frac{k}{m}$.

А	Б	В	Г
$\frac{7}{9}$	$\frac{45}{19}$	$\frac{100}{7}$	$\frac{8}{3}$

5 На страусиній фермі за 4 дні x страусів споживають y кг корму. Скільки кілограмів корму споживає один страус за один день?

А	Б	В	Г
$\frac{4y}{x}$	$\frac{x}{4y}$	$\frac{y}{4x}$	$\frac{4x}{y}$

6 Установіть відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Г), якщо $b=2$.

1	$\frac{b}{5}$	А	3,5
2	$\frac{2}{b-1}$	Б	2,5
3	$\frac{2b+3}{4-b}$	В	2
		Г	0,4

7 Визначте знак дробу $\frac{6-y}{y+21}$, якщо:

1) $y>6$; 2) $y<-25$.

8 Дано вираз $\frac{20x^2+21}{4|x|-28}$. Знайдіть:

1) область допустимих значень змінної, що входить у вираз;
2) значення виразу, якщо $x=-0{,}5$.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ЗДОРОВ'Я»

Індекс маси тіла дозволяє оцінити відповідність між масою людини та її зростом і визначити, чи є маса нормальною, недостатньою або надлишковою. Індекс маси тіла розраховується за формулою $I=\frac{m}{h^2}$, де m (кг) — маса людини, h (м) — зріст людини. Наприклад, значення цього індексу для людини, маса якої становить 60 кг, а зріст 170 см, дорівнює: $I=\frac{60}{1{,}7^2}\approx 20{,}76$.

Визначте індекс маси тіла для себе та членів своєї родини.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Дізнатися більше про індекс маси тіла й розрахувати його для всіх членів своєї родини ви можете за посиланням http://zhyvyaktyvno.org/index.php/calculator/kalkulyator-ndeksu-masi-tla-mt

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1 Обчисліть значення раціонального дробу:

1) $-\frac{6}{y}$ при $y=24$;
2) $\frac{b-17}{b+10}$ при $b=-1$;
3) $\frac{xy}{y^2-2x}$ при $x=3$, $y=4$;
4) $\frac{20x+|y|}{x^2-3{,}2x+1{,}6^2}$ при $x=0{,}6$, $y=-12$.

Див. приклади 2, 3

2 Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

1) $-\frac{6}{x}$;
2) $\frac{4}{3x}$;
3) $\frac{1}{x-12}$;
4) $\frac{9}{x+1}$;
5) $\frac{34x}{3x+27}$;
6) $\frac{12x}{5x-40}$;
7) $\frac{3-5x^4}{24-6|x|}$;
8) $\frac{x^3+8}{14|x|-7}$.

Див. приклади 3, 4

3 Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

1) $\frac{6}{5x}+\frac{21x}{x-3}$;
2) $\frac{73x}{x-1}+\frac{1+x}{36-x^2}$;
3) $\frac{4x-24}{9-x^2}-\frac{16-x^2}{3x+33}$;
4) $\frac{4x^5}{x^2+49}-\frac{x^2-9}{2|x|-8}$.

4 Визначте знак дробу:

1) $\frac{1}{y}$ при $y<-1$;
2) $\frac{4}{3-b}$ при $b>3$;
3) $\frac{2+b}{b-9}$ при $b<-2$;
4) $\frac{7+a}{6-b}$ при $a<-7$, $b>6$.

Див. приклад 5

5 Складіть вираз для розв'язання задачі:

1) Два кур'єри протягом тижня рознесли разом n пакетів. Кількість пакетів, доставлених першим кур'єром, відноситься до кількості пакетів, доставлених другим кур'єром, як $1:4$. Скільки всього пакетів доставив за цей період другий кур'єр?
2) У ресторані швидкого харчування комплексний обід на дві персони коштує x грн. Скільки коштуватиме такий обід на y персон?
3) Маршрутний автобус долає відстань між Києвом та Харковом, що становить 483 км, із середньою швидкістю 80 км/год. Яку відстань (у км) залишиться проїхати цьому автобусу до Харкова через x год після виїзду з Києва?
4) Довжина туристського маршруту 120 км. Перша й друга групи туристів долають цей маршрут відповідно за a і b днів $(a<b)$, рухаючись із постійними швидкостями. Обидві групи вийшли на маршрут одночасно. Який шлях залишиться подолати другій групі після того, як перша група завершить маршрут?

ПРОФЕСІЯ

Професійний кур'єр може доставити до 200 пакетів кореспонденції протягом робочого дня. Для цієї роботи необхідно мати такі особисті якості: мобільність, пунктуальність, витривалість, порядність, комунікабельність тощо.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

1 Скоротіть дріб:

1) $\frac{62\cdot5}{62\cdot8}$;
2) $\frac{24\cdot11}{22\cdot3\cdot8}$;
3) $\frac{3^{13}\cdot2^{10}}{6^{10}}$;
4) $\frac{10^{18}}{5^{20}\cdot2^{18}}$.

2 Скориставшись формулами скороченого множення, розкладіть на множники вираз:

1) $\left(\frac{3}{5}\right)^2-b^2$;
2) $81-y^2$;
3) $9n^2-0{,}36$;
4) $0{,}25-64y^2$.

3 Подайте у вигляді повного квадрата многочлен:

1) $x^2-2ax+a^2$;
2) x^2+6x+9;
3) $4m^2-4mn+n^2$.

4 Скориставшись формулами скороченого множення, спростіть вираз:

1) $(1-b)^2+2b-b^2$;
2) $(a+2)^2-4a-a^2$;
3) $(40-21)(40+21)+21^2$;
4) $(30-17)(30+17)+17^2$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Розгадайте слово, що зашифроване в числі 1412061412010121.

«Коли вам спадає на думку гарна ідея, дійте негайно.»

Білл Ґейтс

§2 ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ. СКОРОЧЕННЯ ДРОБІВ

ВЧОРА	Ви навчилися скорочувати звичайні дроби та зводити їх до спільного знаменника
СЬОГОДНІ	Ви познайомитеся з основною властивістю раціональних дробів
ЗАВЖДИ	Ви зможете визначати рейтинг продукції та здійснювати правильний вибір

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Журнал, що висвітлює новинки IT-технологій, склав рейтинг мобільних телефонів за показниками: G — функціональність, Q — якість, Z — зручність використання, D — дизайн, k — індикатор недоліків. Рейтинг визначався за формулою $R=\frac{5G+4Q+3Z+D}{100+k}$. Користуючись даними таблиці, визначте, яка модель телефону має найвищий рейтинг.

Модель телефону	Показник				
	G	Q	Z	D	k
A	5	4	4	5	16
B	3	4	5	5	36
C	4	3	4	3	41

Розв'язання

Визначимо рейтинг кожної моделі за поданою формулою. Отримаємо:

$$R_A=\frac{58}{116}=\frac{1}{2};\qquad R_B=\frac{51}{136}=\frac{3}{8};\qquad R_C=\frac{47}{141}=\frac{1}{3}.$$

Для порівняння дробів окремі з них слід звести до спільного знаменника. Очевидно, що $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$. Оскільки $\frac{1}{2}=\frac{4}{8}$ і $\frac{4}{8}>\frac{3}{8}$, то $\frac{1}{2}>\frac{3}{8}$. Отже, найвищий рейтинг має модель A.

Під час розв'язування задач та виконання розрахунків досить часто доводиться як скорочувати дроби, так і зводити їх до іншого знаменника шляхом множення чисельника та знаменника на одне й те саме число.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- 3 квітня 1973 р. керівник одного з відділів компанії Motorola Мартін Купер уперше зателефонував по мобільному телефону під час прогулянки по Манхеттену, чим дуже здивував перехожих.
- У 1997 р. компанія Siemens випустила перший телефон із кольоровим екраном. У 1998 р. побачив світ перший телефон із сенсорним дисплеєм — Sharp PMC-1 Smart-phone. У 2002 р. компанія Ericsson випустила перший мобільний телефон з підтримкою технології Bluetooth, а компанія Samsung — перший мобільний телефон із вбудованою камерою.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви знаєте, що вирази $a+b$ та $b+a$ є тотожно рівними при будь-яких значеннях змінних a і b. Рівність $a+b=b+a$ називають *тотожністю*.

Розглянемо рівність $\frac{2a+a^2+3a}{a-2}=\frac{a^2+5a}{a-2}$. Ця рівність є тотожністю, проте виконується вона при всіх значеннях a, крім $a=2$. При $a=2$ вирази, що утворюють рівність, не мають змісту.

Рівність $\frac{a(a-5)}{a-5}=a$ також є тотожністю при всіх a, крім $a=5$. При $a=5$ рівність не має змісту, оскільки знаменник лівої частини при цьому значенні змінної перетворюється на нуль.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- тотожно рівні вирази
- тотожність
- основна властивість раціонального дробу
- доповняльний множник
- скорочення раціонального дробу

Означення 1. **Тотожно рівні вирази** — вирази, відповідні значення яких є рівними при будь-яких допустимих значеннях змінних.

Означення 2. **Тотожність** — рівність, що виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Ви вже вмієте скорочувати звичайні дроби. Скорочення раціональних дробів виконується аналогічно. Скоротивши раціональний дріб, ми отримаємо дріб, що тотожно дорівнює даному на області допустимих значень змінної.

Основна властивість дробу

для звичайних дробів	для раціональних дробів
Чисельник і знаменник дробу можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля, при цьому значення дробу не зміниться: $\frac{15}{20}=\frac{15\cdot 3}{20\cdot 3}=\frac{45}{60}$; $\frac{15}{20}=\frac{\cancel{5}\cdot 3}{\cancel{5}\cdot 4}=\frac{3}{4}$.	Чисельник і знаменник раціонального дробу можна помножити або поділити на один і той самий множник, що тотожно не дорівнює нулю, при цьому значення раціонального дробу не зміниться: $\frac{M}{P}=\frac{M\cdot N}{P\cdot N}$, де M, P, N — многочлени, причому P і N тотожно не дорівнюють нулю.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$\frac{M}{P}=\frac{M\cdot N}{P\cdot N},$$
$$P\neq 0,\ N\neq 0$$

ПРИКЛАД 1

Скоротіть дріб $\frac{8a^3b}{12abc^2}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо найбільший спільний дільник чисел 8 і 12.	4
КРОК 2	Визначимо спільний множник виразів a^3b і abc^2.	ab
КРОК 3	Розкладемо чисельник і знаменник на множники (з урахуванням кроків 1 і 2).	$\frac{4ab \cdot 2a^2}{4ab \cdot 3c^2}$
КРОК 4	Поділимо чисельник і знаменник отриманого дробу на їх спільний множник $4ab$.	$\frac{\cancel{4}\,\cancel{a}\cancel{b} \cdot 2a^2}{\cancel{4}\,\cancel{a}\cancel{b} \cdot 3c^2} = \frac{2a^2}{3c^2}$
	Запис розв'язання: $\frac{8a^3b}{12abc^2} = \frac{\cancel{4}\,\cancel{a}\cancel{b} \cdot 2a^2}{\cancel{4}\,\cancel{a}\cancel{b} \cdot 3c^2} = \frac{2a^2}{3c^2}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.	

Відповідь: $\frac{2a^2}{3c^2}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

ПРИКЛАД 2

Скоротіть дріб $\frac{8a - 4ab}{4ab}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо чисельник на множники, для цього винесемо за дужки вираз $4a$.	$\frac{4a \cdot (2-b)}{4a \cdot b}$
КРОК 2	Скоротимо отриманий дріб на спільний множник чисельника та знаменника, тобто на вираз $4a$.	$\frac{2-b}{b}$
	Запис розв'язання: $\frac{8a - 4ab}{4ab} = \frac{\cancel{4}\,\cancel{a} \cdot (2-b)}{\cancel{4}\,\cancel{a} \cdot b} = \frac{2-b}{b}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$.	

Відповідь: $\frac{2-b}{b}$, якщо $a \neq 0$, $b \neq 0$.

СЛІД ЗНАТИ!

Скорочення дробу — це ділення чисельника і знаменника на один і той самий спільний множник, який тотожно не дорівнює нулю та відмінний від 1.

Алгоритм скорочення дробу

1. Розкладіть чисельник і знаменник дробу на множники, застосувавши один із відомих способів (винесення спільного множника за дужки, спосіб групування, використання формул скороченого множення) або їх комбінацію.
2. Знайдіть область допустимих значень раціонального дробу.
3. Визначте спільний множник чисельника та знаменника.
4. Скоротіть дріб, поділивши чисельник і знаменник дробу на їх спільний множник.

АЛГОРИТМ

ПРИКЛАД 3

Скоротіть дріб $\frac{16a^2-8a+1}{16a^2-1}$.

Розв'язання

В умові не зазначено, при яких значеннях a вираз має зміст. Отже, під час розв'язування ми маємо знайти область допустимих значень змінної. Для цього зручно розкласти знаменник на множники.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

- $(M-P)^2=(P-M)^2$
- $(M-P)^3=-(P-M)^3$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо чисельник і знаменник на множники, використовуючи формули скороченого множення.	$16a^2-8a+1=(4a-1)^2$ — квадрат різниці; $16a^2-1=(4a-1)\cdot(4a+1)$ — різниця квадратів
КРОК 2	Запишемо дріб у вигляді, коли чисельник і знаменник розкладено на множники.	$\frac{(4a-1)^2}{(4a-1)\cdot(4a+1)}$
КРОК 3	Знайдемо область допустимих значень змінної, розв'язавши відповідне рівняння.	$(4a-1)\cdot(4a+1)=0$; $a=\pm\frac{1}{4}$; отже, ОДЗ: $a\neq\pm\frac{1}{4}$
КРОК 4	Скоротимо дріб на спільний множник $(4a-1)$, відмінний від нуля.	$\frac{4a-1}{4a+1}$ при $a\neq\pm\frac{1}{4}$
	Запис розв'язання: $\frac{16a^2-8a+1}{16a^2-1}=\frac{(4a-1)^2}{(4a-1)\cdot(4a+1)}=\frac{(4a-1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(4a-1)}\cdot(4a+1)}=\frac{4a-1}{4a+1}$ при $a\neq\pm\frac{1}{4}$.	

Відповідь: $\frac{4a-1}{4a+1}$ при $a\neq\pm\frac{1}{4}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$; $\frac{a^m}{a^n}=\frac{1}{a^{n-m}}$

1 Скоротіть дріб:

1) $\frac{6a}{a}$; 3) $\frac{5b}{15b^2}$; 5) $\frac{-10c^2}{15c^4}$; 7) $\frac{18c^2b^3}{27ac^8b^3}$;

2) $\frac{3}{12m}$; 4) $\frac{6a^5}{30a^4}$; 6) $\frac{14x^3y^5}{-7x^2y}$; 8) $\frac{-18bx^4y^3}{-42xy^8}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$a\cdot b+a\cdot c=a(b+c)$

$a\cdot b-a\cdot c=a(b-c)$

2 Скоротіть дріб:

1) $\frac{7(a+5b)}{a+5b}$; 4) $\frac{x-2y}{3x-6y}$; 7) $\frac{20ab^3-10ab^2}{4ab-8ab^2}$;

2) $\frac{x+y}{6(x+y)}$; 5) $\frac{18ab-3a}{3ab}$; 8) $\frac{6xy+12x}{15x^2y+30x^2}$.

3) $\frac{4a+4b}{a+b}$; 6) $\frac{15x}{5x+10xy}$;

ПРИГАДАЙТЕ!

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

3 Скоротіть дріб:

1) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$; 4) $\frac{12(a-b)^4}{a^2-2ab+b^2}$; 7) $\frac{4x^2-4xy+y^2}{2xy-y^2}$;

2) $\frac{(x-y)^2}{6x^2-6y^2}$; 5) $\frac{a^2-6a+9}{a^2-9}$; 8) $\frac{x^2-16y^2}{x^2+8xy+16y^2}$.

3) $\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)^3}$; 6) $\frac{a^2-25}{a^2+10a+25}$;

Усі перетворення раціональних дробів виконують на їх ОДЗ. Будемо визначати й записувати у відповідь ОДЗ змінних, що входять у вираз, тільки якщо це вимагається в умові завдання.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Щоб звести дріб до нового знаменника, потрібно знайти *доповняльний множник* (або додатковий множник). Для цього можна знаменник, до якого треба звести дріб, поділити на знаменник початкового дробу.

ПРИКЛАД 4

Зведіть дріб $\frac{8m}{3n^2}$ до знаменника $27m^2n^5$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо новий знаменник $27m^2n^5$ на множники так, щоб один із них дорівнював $3n^2$. Можна поділити $27m^2n^5$ на $3n^2$ — частка від ділення й буде доповняльним множником.	$27m^2n^5=3n^2\cdot 9m^2n^3$; доповняльний множник — $9m^2n^3$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Помножимо чисельник і знаменник заданого дробу на отриманий доповняльний множник.	$\frac{8m \cdot 9m^2n^3}{3n^2 \cdot 9m^2n^3}$
КРОК 3	Виконавши множення в чисельнику та знаменнику, отримаємо шуканий дріб.	$\frac{72m^3n^3}{27m^2n^5}$

Відповідь: $\frac{72m^3n^3}{27m^2n^5}$.

АЛГОРИТМ

Алгоритм зведення дробу до нового (відомого) знаменника

1. Розкладіть новий знаменник на множники, якщо потрібно.
2. Знайдіть доповняльний множник, поділивши новий знаменник на знаменник початкового дробу.
3. Помножте чисельник і знаменник початкового дробу на знайдений доповняльний множник.
4. Виконайте в разі потреби дії в чисельнику та знаменнику отриманого дробу.
5. Запишіть шуканий дріб, ураховуючи ОДЗ.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

«Книга про індійський рахунок» великого перського вченого IX ст. Аль-Хорезмі була дуже відомою свого часу. Ім'я вченого переклали як «Ал-Горитмі». Згодом способи розв'язування задач стали називати алгоритмами.

ПРИКЛАД 5

Зведіть дріб $\frac{4}{a-b}$ до знаменника a^2-b^2 при $a \neq \pm b$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо на множники новий знаменник, скориставшись формулою різниці квадратів.	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
КРОК 2	Визначимо доповняльний множник як частку від ділення нового знаменника на знаменник заданого дробу.	$\frac{(a-b)(a+b)}{a-b}=(a+b)$
КРОК 3	Помножимо на доповняльний множник чисельник і знаменник заданого дробу.	$\frac{4(a+b)}{(a-b)(a+b)}$
КРОК 4	Виконавши дії в знаменнику, отримаємо шуканий дріб.	$\frac{4(a+b)}{a^2-b^2}$

Відповідь: $\frac{4(a+b)}{a^2-b^2}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Зведіть дріб:

1) $\frac{-3}{x}$ до знаменника x^3;
2) $\frac{5x}{3y^3}$ до знаменника $3y^5$;
3) $\frac{6b}{7a^3}$ до знаменника $14a^3b^5$;
4) $\frac{7xc}{8m^2}$ до знаменника $32cm^5$.
5) $\frac{4}{b-a}$ до знаменника b^2-a^2;
6) $\frac{y}{x-4y}$ до знаменника $3x-12y$;
7) $\frac{5b}{2-3b}$ до знаменника $4-12b+9b^2$;
8) $\frac{2x-y}{2x+y}$ до знаменника $4x^2+4xy+y^2$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot a}{n\cdot a}=\frac{ma}{na}$, $a\neq 0$
- $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot a\cdot b}{n\cdot a\cdot b}=\frac{mab}{nab}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$

СЛІД ЗНАТИ!

Знак «мінус», що міститься перед дробом, може бути внесений як у чисельник, так і в знаменник дробу:

$$-\frac{a}{m}=\frac{-a}{m}=\frac{a}{-m};\qquad -\frac{a-c}{n-k}=\frac{c-a}{n-k}=\frac{a-c}{k-n};$$

$$\frac{a-m}{m-a}=-\frac{m-a}{m-a}=-\frac{a-m}{a-m}=-1.$$

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Скоротіть дріб, ураховуючи область його допустимих значень:

1) $\frac{a(x+7)}{7(x+7)}$;
2) $\frac{m(x-2)}{4m(x-2)}$;
3) $\frac{9(4-k)}{(k-4)}$;
4) $\frac{16ab(3c-6)}{4a(4c-8)}$;
5) $\frac{20a^2(m-2)}{ab(2-m)}$;
6) $\frac{4(c^2-5)}{8(-c^2+5)}$.

2 Розкладіть на множники чисельник і знаменник дробу та скоротіть його:

1) $\frac{a^2+6a}{2a+12}$;
2) $\frac{4a-16}{a^2-4a}$;
3) $\frac{y^2-9}{3+y}$;
4) $\frac{x-5}{25-x^2}$;
5) $\frac{(m+7)^2}{2m+14}$;
6) $\frac{6x-21}{(7-2x)^2}$.

3 Скоротіть дріб, ураховуючи область його допустимих значень:

1) $\frac{-x-y}{(x+y)^2}$;
2) $\frac{(m+x)^2}{-2m-2x}$;
3) $\frac{a^4+a^2}{a^5+a^3}$;
4) $\frac{t^2-t^6}{t^8-t^4}$;
5) $\frac{a-a^{19}}{a^{18}-1}$;
6) $\frac{m^3-m^{30}}{m^{28}-m}$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Перш ніж скоротити дріб, чисельник і знаменник необхідно розкласти на множники.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

У чисельнику дробу $\frac{3\cdot(a+2)}{6}$ останньою дією є множення, тому дріб можна скоротити на 3: $\frac{{}^{1}\cancel{3}\cdot(a+2)}{\cancel{6}_{2}}=\frac{a+2}{2}$.

У чисельнику дробу $\frac{3a+2}{6}$ останньою дією є додавання (а не множення), тому скорочувати дріб не можна!

4 Запишіть частку у вигляді дробу та скоротіть його:

1) $\left(8+m^3\right):\left(m^2-4\right)$;
2) $(a+5):\left(a^3+125\right)$;
3) $\left(x^2+14x+49\right):(14+2x)$;
4) $\left(a^3-36a\right):\left(a^2-12a+36\right)$;
5) $\left(a^6-a\right):\left(a^7-a^2\right)$;
6) $\left(-t^7-t^6\right):(t+1)$.

5 Зведіть дріб:

1) $\dfrac{12x^3a}{16x^2a^2}$ до знаменника $4a$; 3) $\dfrac{2c^7}{6c^6}$ до знаменника 3;

2) $\dfrac{24m^2n}{30mn^3}$ до знаменника $5n^2$; 4) $\dfrac{16cx^3}{240c^2x}$ до знаменника $15c$.

6 Популяція морських котиків на деякому острові в 1900 р. становила m особин, а в 1920 р. — $(m-5000)$ особин. У скільки разів зменшилася популяція морських котиків протягом 20 років на цьому острові? Запишіть відповідь у вигляді раціонального виразу та знайдіть його значення, якщо: 1) $m=15\,000$; 2) $m=10\,000$.

7 Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{(2a+2b)^2}{(a+b)^2}$;
2) $\dfrac{(m-n)^2}{(5m-5n)^2}$;
3) $\dfrac{t^2-9}{(3t-9)^2}$;
4) $\dfrac{(2t+8)^2}{16-t^2}$;
5) $\dfrac{25a^2-1}{(15a+3)^2}$;
6) $\dfrac{(-3a-6)^2}{a^2+4a+4}$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Значення виразу $\dfrac{5x}{x-5}$ дорівнює нулю при $x=5$.

2) Вираз $\dfrac{x-1}{x+1}$ не має змісту при $x=1$.

3) Дріб $\dfrac{5x-1}{10}$ можна скоротити на 5, отримавши в результаті скорочення вираз $\dfrac{x-1}{2}$.

4) Дріб $\dfrac{24a^2b^3}{32cm^2}$ не можна скоротити.

5) Якщо $\dfrac{x-y}{x^2+y}=50$, то $\dfrac{2x-2y}{x^2+y}=100$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Цікавий дріб. У цьому ребусі кожна буква позначає одну цифру. Однакові букви позначають однакові цифри, різні букви — різні цифри. Зірочками позначено знаки множення. Чому дорівнюватиме цей дріб після всіх можливих скорочень?

$$\frac{Ц*І*К*А*В*И*Й}{Д*Р*І*Б}$$

Джордж Пойа (угор. Pólya György, англ. George Polya; 1887–1985) — угорський, швейцарський та американський математик і педагог, професор Стенфордського університету. Пойа вважав, що математика є школою мислення, що хороший учитель може допомогти учню набрати смаку до самостійного мислення. Автор відомих книг «Як розв'язувати задачу», «Математика і правдоподібні міркування» тощо, Пойа багато зробив для популяризації математики.

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

1 Скоротіть дріб $\frac{2b}{6b^3}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{4b^2}$	$\frac{1}{3b^2}$	$3b^2$	$4b^2$

2 Скоротіть дріб $\frac{c-2}{3c-6}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-3	3

3 Чому дорівнює дріб $\frac{3m}{n}$, якщо $\frac{m}{n}=30$?

А	Б	В	Г
10	$\frac{1}{10}$	60	90

4 На який доповняльний множник слід помножити чисельник і знаменник дробу $\frac{1}{3a}$, щоб звести його до знаменника $6a^2$?

А	Б	В	Г
2	$6a^2$	$3a$	$2a$

5 Науковці Австралії почали використовувати дрони для спостереження за акулами в океані. Поблизу одного узбережжя дрон зафіксував першого дня зграю з a акул, а другого дня — зграю з $(a+9)$ акул. У скільки разів кількість акул, зафіксованих першого дня, була меншою за кількість акул, зафіксованих другого дня?

А 9

Б $\frac{a}{a+9}$

В $\frac{a+9}{a}$

Г $\frac{9}{a}$

6 До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Г), якщо $x \neq -3$.

1 $\frac{x^2-9}{x+3}$

2 $\frac{x^2+6x+9}{x+3}$

3 $\frac{(x-3)^2+12x}{(x+3)^2}$

А 1

Б $x-3$

В $\frac{1}{x+3}$

Г $x+3$

7 Відомо, що $\frac{x}{y}=0{,}25$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{y}{x}$; 2) $\frac{6y-5x}{x}$.

8 Спростіть вираз $\frac{45x^2-30xa+5a^2}{12x-4a}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Дрон (від англ. drone — джміль) — безпілотний літальний апарат, запрограмований на виконання певних завдань. Дрони використовують, наприклад, під час пошуку та рятувальних операцій, для переміщення вантажів (їжі, медикаментів тощо) у важкодоступну місцевість, для збору даних про врожай, спостереження за пересуванням тварин, фотографування з висоти та ін.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «СТРАХОВІ КОНСУЛЬТАНТИ»

У таблиці наведено результати продажу страхових полісів консультантами за тиждень. Проаналізуйте ефективність роботи консультантів, давши відповідь на запитання.

Консультанти	Дні тижня					
	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб
Антон	21	34	18	29	55	42
Олена	10	19	24	45	50	54
Віталій	42	30	17	37	48	39
Софія	25	43	38	16	49	33

1. Хто з консультантів продав найбільше полісів?
2. Складіть рейтинг консультантів за кількістю проданих полісів (у порядку зменшення кількості).
3. Якою є середня кількість полісів, проданих усіма консультантами за один день? Результат округліть до цілих.
4. У який день було продано найменшу кількість полісів?

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Серед найбільш перспективних професій сьогодні все частіше називають професію страхового агента. Його робота полягає в пошуку клієнтів та укладанні з ними договорів майнового або особистого страхування. Шляхи одержання професії: навчання в середньому спеціальному або вищому навчальному закладі за фахом «Страхова справа», «Керування страхуванням», «Комерційне і соціальне страхування».

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Скоротіть дріб:

1) $\frac{30x^4y}{12x^4y^3}$; 3) $\frac{81x^2+18x+1}{81x^2-1}$; 5) $\frac{9x^2-6xy+y^2}{3xy-y^2}$;

2) $\frac{5a^2b}{10a^2+5a^2b}$; 4) $\frac{a^2-36}{a^2-12a+36}$; 6) $\frac{x^2-49y^2}{x^2+14xy+49y^2}$.

Див. приклади 1, 2, 3

2. Зведіть дріб:

1) $\frac{9b^3}{4a}$ до знаменника $8a^2b^2$;

2) $\frac{a}{a+3b}$ до знаменника a^2-9b^2;

3) $\frac{7b}{4b-3}$ до знаменника $16b^2-24b+9$;

4) $\frac{7x-y}{7x+y}$ до знаменника $49x^2+14xy+y^2$.

Див. приклади 4, 5

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Кароліно-Бугаз — курортний регіон на Чорноморському узбережжі Одеської області, розташований на початку піщаної коси, що розмежовує Чорне море та Дністровський лиман. Вважається одним із найбільш екологічно чистих місць на цьому узбережжі.

3 Середня температура повітря на Чорноморському узбережжі поблизу Одеси становила $(3x)$ °C. Вода в морі прогрілася в середньому до $(x+2)$ °C. У скільки разів температура повітря була більшою за температуру води? Запишіть відповідь у вигляді раціонального виразу та знайдіть його значення, якщо: 1) $x=8$; 2) $x=10$.

4 Скоротіть дріб:

1) $\frac{3(x-4)^2}{(x-4)^2}$; 3) $\frac{(2x-2)^3}{(x-1)^5}$; 5) $\frac{x^2-2xy+y^2}{(5y-5x)^2}$;

2) $\frac{2p-10}{(p-5)^2}$; 4) $\frac{(x+1)^6}{(3x+3)^3}$; 6) $\frac{(6a+6b)^2}{a^2+2ab+b^2}$.

5 Відомо, що $a+3b=10$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{40}{a+3b}$; 2) $\frac{(a+3b)^3}{200}$; 3) $\frac{4a^2+24ab+36b^2}{50}$.

6 Відомо, що $ab=5$. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{ab}{15}$; 2) $\frac{abc}{10c}$; 3) $\frac{a^2b^2y^5}{100y^5}$; 4) $\frac{125b^3n^6}{a^2b^5n^6}$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

1 Виконайте дії:

1) $\frac{2}{9}+\frac{5}{9}-\frac{11}{9}$; 2) $18-3\frac{2}{17}$; 3) $6\frac{5}{7}-2\frac{3}{7}$.

2 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{29}{32}-x=\frac{13}{32}$; 2) $\frac{x}{38}+\frac{14}{38}=\frac{23}{38}$; 3) $\left(\frac{13}{17}+x\right)-\frac{2}{17}=-\frac{23}{17}$.

3 До чемпіонату світу з футболу оновлювали покриття футбольного поля. Першого дня покрили $\frac{7}{36}$ площі поля, а другого дня — $\frac{11}{36}$ площі. Яку площу поля (у км^2) залишилося покрити, якщо поле має форму прямокутника, ширина якого становить 90 м, а довжина — 120 м?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Андрій Шевченко — легендарний український футболіст, найкращий бомбардир в історії національної збірної України з футболу. У 2003 р. став першим українцем, який виграв Лігу чемпіонів. У 2004 р. отримав приз «Золотий м'яч» як найкращий футболіст Європи.

Розв'язування задач — практичне мистецтво, подібне до плавання, катання на лижах або гри на фортепіано; навчитися його можливо, тільки наслідуючи гарні зразки та постійно практикуючись.

Джордж Пойа

§3 ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ З ОДНАКОВИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

ВЧОРА	Ви дізналися, як додавати та віднімати звичайні дроби
СЬОГОДНІ	Ви навчитеся додавати та віднімати раціональні дроби
ЗАВЖДИ	Ви зможете прораховувати власний бюджет і приймати правильні економічні рішення

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

На закупівлю призів для переможців математичної олімпіади було виділено A грн, із них B грн — на флешки, C грн — на навушники. Скільки коштує один подарунковий набір, до якого входять одна флешка й одна пара навушників, якщо ці набори розраховані на N призових місць?

Розв'язання

Очевидно, що $A = B + C$. Ціна однієї флешки становить $\frac{B}{N}$ грн, а ціна однієї пари навушників — $\frac{C}{N}$ грн. Отже, один подарунковий набір коштує $\left(\frac{B}{N} + \frac{C}{N}\right)$ грн.

З іншого боку, оскільки всі набори однакові, ціну одного можна визначити, поділивши загальну суму виділених коштів на кількість наборів. Таким чином, отримуємо тотожність $\frac{B}{N} + \frac{C}{N} = \frac{B+C}{N} = \frac{A}{N}$.

Раціональні дроби додаються або віднімаються за таким самим алгоритмом, що й звичайні дроби. Єдине, що слід взяти до уваги: **дії виконуються лише на області допустимих значень змінних**, які входять у вираз.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

За результатами Європейської математичної олімпіади для дівчат EGMO 2015 р. команда України посіла перше місце. В олімпіаді взяли участь 109 дівчат із 30 країн світу, у тому числі із США, Індії, Японії, Італії, Франції, Великобританії, Польщі.

Дізнатися більше ви можете на сайті www.matholymp.com.ua

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви вже вмієте виконувати арифметичні дії зі звичайними дробами. Пригадаємо, що:

$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$, де a, b, c — деякі числа, причому $c \neq 0$.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- додавання та віднімання раціональних дробів
- скорочення раціональних дробів
- область допустимих значень

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Щоб **додати** раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити без змін.

Щоб **відняти** раціональні дроби з однаковими знаменниками, треба відняти їх чисельники, а знаменник залишити без змін.

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c},$$

де a, b, c — многочлени, причому $c \neq 0$.

АЛГОРИТМ

Алгоритм додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками

1. Запишіть дію додавання (віднімання) чисельників дробів, використовуючи спільну риску, а знаменник залиште той самий.
2. Виконайте в отриманому чисельнику відповідні дії додавання (віднімання).
3. Розкрийте дужки й зведіть подібні доданки, якщо потрібно.
4. Скоротіть отриманий дріб, якщо це можливо.

ПРИКЛАД 1

Виконайте дії: $\frac{9}{a-3} - \frac{a^2}{a-3}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область допустимих значень змінної.	ОДЗ: $a \neq 3$
КРОК 2	Застосуємо правило віднімання дробів з однаковими знаменниками та запишемо різницю, використовуючи спільну риску.	$\frac{9-a^2}{a-3}$
КРОК 3	Перевіримо, чи можна скоротити отриманий дріб. Для цього розкладемо на множники чисельник дробу.	$\frac{(3-a)(3+a)}{a-3}$
КРОК 4	Оскільки $a-3=-(3-a)$ і $\frac{a}{-m}=-\frac{a}{m}$, винесемо знак «–» із знаменника і поставимо його перед дробом.	$-\frac{(3-a)(3+a)}{3-a}$
КРОК 5	Скоротимо дріб на вираз $(3-a)$, що не дорівнює нулю на ОДЗ $(a \neq 3)$.	$-(3+a)$ при $a \neq 3$

Відповідь: $-(3+a)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Виконайте дії:

1) $\frac{3}{x}-\frac{8}{x}$;

2) $\frac{12}{a}-\frac{4}{a}$;

3) $\frac{3x+3}{3x+15}+\frac{12}{3x+15}$;

4) $\frac{14+x}{14-5x}-\frac{6x}{14-5x}$;

5) $\frac{25}{y+5}-\frac{y^2}{y+5}$;

6) $\frac{b^2}{b-7}-\frac{49}{b-7}$;

7) $\frac{a^2+b^2}{(a-b)(a+4)}-\frac{2ab}{(a-b)(a+4)}$;

8) $\frac{x^2+y^2}{(y+16)(x+y)}+\frac{2xy}{(y+16)(x+y)}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$\frac{a-b}{b-a}=-1$$

ПРИКЛАД 2

Дано вираз $\frac{10x^4+5x^9-20x^2}{5x^4}$, де $x\neq 0$. Поділіть почленно чисельник виразу на його знаменник.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$$\frac{a\pm b}{c}=\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c},\ c\neq 0$$

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Поділимо почленно чисельник дробу на його знаменник.	$\frac{10x^4}{5x^4}+\frac{5x^9}{5x^4}-\frac{20x^2}{5x^4}$
КРОК 2	Скоротимо кожний із дробів. Зауважимо, що отриманий вираз є сумою цілого виразу та дробового.	$2+x^5-\frac{4}{x^2}$

Відповідь: $2+x^5-\frac{4}{x^2}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Поділіть почленно чисельник поданого виразу на його знаменник:

1) $\frac{a+2}{a}$, де $a\neq 0$;

2) $\frac{b-5}{b}$, де $b\neq 0$;

3) $\frac{3x+x^3}{x^2}$, де $x\neq 0$;

4) $\frac{7y-y^4}{y^3}$, де $y\neq 0$;

5) $\frac{12m-3m^6+9m^4}{3m^4}$, де $m\neq 0$;

6) $\frac{6n^8-4n^5-2n^3}{2n^5}$, де $n\neq 0$;

7) $\frac{20(a+2b)^5-4\left(a^2+4ab+4b^2\right)}{20(a+2b)^2}$, де $a\neq -2b$;

8) $\frac{7(3x-y)^4-70\left(9x^2-6xy+y^2\right)}{35(3x-y)^2}$, де $y\neq 3x$.

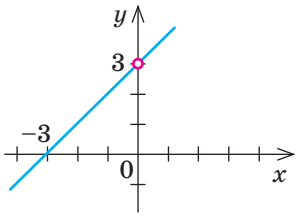
ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Спробуйте без допомоги калькулятора за 40 секунд визначити, який із добутків є більшим — $351\cdot 354$ чи $352\cdot 353$.

ПРИКЛАД 3

Побудуйте графік функції $y=\frac{2x^2-4x}{x}-\frac{x^2-7x}{x}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область допустимих значень виразу, яким задано функцію (вираз, що міститься в правій частині рівності).	ОДЗ: $x\neq 0$
КРОК 2	Виконаємо дію віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками.	$\frac{2x^2-4x}{x}-\frac{x^2-7x}{x}=\frac{2x^2-4x-x^2+7x}{x}=$ $=\frac{x^2+3x}{x}=\frac{x(x+3)}{x}$
КРОК 3	Запишемо задану функцію, використовуючи отриманий дріб, скоротимо дріб.	$y=\frac{x(x+3)}{x}$; $y=x+3$
КРОК 4	Побудуємо графік функції $y=x+3$. Вилучимо на графіку точку, абсциса якої дорівнює нулю, оскільки $x=0$ не входить в ОДЗ (див. крок 1). Отримаємо шуканий графік.	

ТРЕНУЄМОСЯ

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Будуючи графіки, пам'ятайте про ОДЗ.

3 Побудуйте графіки функцій:

1) $y=\frac{x^2-x}{x}$;

2) $y=\frac{x^2+2x}{x}$;

3) $y=\frac{3x}{x-1}-\frac{3}{x-1}$;

4) $y=\frac{8-x}{x+4}+\frac{3x}{4+x}$;

5) $y=\frac{6}{x-2}+\frac{3x}{2-x}$;

6) $y=\frac{4x-x^2}{x}+1$;

7) $y=\frac{-2x-x^2}{x}+\frac{3x}{x}$;

8) $y=\frac{5x-x^2}{x}+\frac{x^2-x}{x}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$a-b=-(b-a)$

1 Виконайте дії:

1) $\frac{2a-3m}{a-5m}+\frac{m-3a}{5m-a}$;

2) $\frac{b-a+c}{a+b-c}-\frac{a-b}{c-a-b}$;

3) $\frac{a}{(c-a)^2}-\frac{c}{(a-c)^2}$;

4) $\frac{3}{(2c-1)^2}-\frac{6c}{(1-2c)^2}$.

2 Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні m значення виразу $\frac{m}{5}+\frac{m+1}{5}+\frac{m+2}{5}+\frac{m+3}{5}+\frac{m+4}{5}$ буде цілим числом.

3 Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\frac{a^3+27a}{(a-3)^3}+\frac{9a^2+27}{(3-a)^3}$ не залежить від a і набуває тільки додатних значень.

4 Виконайте додавання (віднімання) дробів та скоротіть отриманий вираз, якщо це можливо:

1) $\frac{14}{4a+7}-\frac{5}{7+4a}$;

2) $\frac{9a}{4-a}+\frac{10a-4}{a-4}$;

3) $\frac{2mn}{14mn^2}-\frac{8mn}{14mn^2}+\frac{20mn}{14mn^2}$;

4) $\frac{25}{y^2+5y}-\frac{y^2}{5y+y^2}$;

5) $\frac{b^2+2b}{b-5}+\frac{12b-25}{5-b}$;

6) $\frac{(m-n)^2}{m^2+n^2}+\frac{(m+n)^2}{n^2+m^2}$.

5 Подайте дріб у вигляді суми або різниці кількох цілих чи дробових виразів, почленно поділивши чисельник на знаменник, якщо це можливо:

1) $\frac{m-4n+k}{3a}$;

2) $\frac{a^9-a^{10}+a^{11}}{a^{10}}$;

3) $\frac{12x^2m-16xm^2}{x^2m^2}$.

6 Побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{2x^2-6x}{x}-2x+1$;

2) $y=\frac{3-x}{x-5}-\frac{12-2x}{5-x}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

- $(m-n)^3=-(n-m)^3$
- $(m-n)^2=(n-m)^2$
- $\frac{a}{b-a}+\frac{b}{a-b}=\frac{a}{b-a}-\frac{b}{b-a}=$
  $=\frac{a-b}{b-a}=-1$

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Ознайомлювальну версію програми Advanced Grapher для побудови графіків можна знайти за посиланням http://rutube.ru/video/8aad5c8012b503d315a4cc731c968f5a/

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $a=\frac{3}{4}$, то $\frac{1}{a}=-\frac{4}{3}$.

2) Вираз $\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}$ тотожно дорівнює виразу $\frac{3a}{3b}$.

3) Якщо $\frac{m}{x+y}+\frac{m}{x+y}=6$, то $\frac{m}{x+y}=3$.

4) Значення виразу $\frac{x}{x-3}-\frac{3}{x-3}$ дорівнює 1 при $x\neq 3$.

5) Значення виразу $\frac{x^2+5}{x^2+1}-\frac{5+x^2}{x^2+1}$ дорівнює нулю.

Михайло Васильович Остроградський (1801–1862) — видатний український математик, спеціаліст з аналітичної та небесної механіки, математичного аналізу і математичної фізики, гідромеханіки та балістики. Ще за життя сучасники визнали його генієм.

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

1 $\frac{8}{m}+\frac{2}{m}=$

А	Б	В	Г
$\frac{10}{m}$	$\frac{10}{m^2}$	$\frac{10}{2m}$	$10m$

2 $\frac{14}{3x}-\frac{2}{3x}=$

А	Б	В	Г
$\frac{16}{3x}$	4	12	$\frac{4}{x}$

3 $\frac{5n+1}{n}=$

А	Б	В	Г
$\frac{5}{n}+\frac{1}{n}$	$5+\frac{1}{n}$	6	5

4 Якщо $\frac{a}{x+y}=-4$, то $\frac{a}{x+y}+\frac{a}{x+y}=$

А	Б	В	Г
16	8	−8	0

5 У зоопарку тигр і леопард за t днів споживають a кг і b кг м'яса відповідно. Скільки кілограмів м'яса споживають за один день тигр і леопард разом?

А	Б	В	Г
$\frac{t}{a+b}$	$\frac{t}{ab}$	$\frac{ab}{t}$	$\frac{a+b}{t}$

6 До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Г), якщо $b\neq 5$.

1	$\frac{b^2}{b-5}-\frac{25}{b-5}$	А	5
2	$\frac{b^2+25}{b-5}-\frac{10b}{b-5}$	Б	$b+5$
3	$\frac{b^2}{b-5}-\frac{5b}{b-5}$	В	$b-5$
		Г	b

7 Виконайте дії: $\frac{x^2+9}{(x+3)(x-1)}+\frac{6x}{(x+3)(x-1)}$.

8 Доведіть тотожність

$\frac{k^2-4}{k+1}-\frac{2k-5}{k+1}+\frac{3k-k^2}{k+1}=1$, якщо $k\neq -1$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Уперше термін «стартап» виник у США в 1939 р. Студенти Стенфордського університету Д. Паккард і В. Хьюлетт, створюючи свій невеликий проект, назвали його стартапом (від англ. Start-up — стартувати, запускати). Із часом цей стартап перетворився на величезну й успішну компанію «Хьюлетт-Паккард».

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «СТАРТАП»

Засновники стартапу витратили $\frac{5}{n}$ коштів, виділених інвестором на першому етапі, на безпосереднє розроблення продукту, $\frac{2}{n}$ коштів — на вивчення ринку, $\frac{3}{n}$ коштів — на розроблення реклами, а 4000 грн — на розвиток бізнесу. Знайдіть n, якщо інвестор на першому етапі виділив 20 000 грн.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Виконайте дії:

1) $\frac{2}{a}+\frac{5}{a}$;

2) $\frac{9+3x}{9-4x}-\frac{7x}{9-4x}$;

3) $\frac{y^2}{y+4}-\frac{16}{y+4}$;

4) $\frac{x^2+25}{(x+y)(x-5)}-\frac{10x}{(x+y)(x-5)}$.

Див. приклад 1

2 Подайте у вигляді суми цілого і дробового виразів дріб:

1) $\frac{b+1}{b}$, де $b\neq 0$;

2) $\frac{y^6-3y^2}{y^4}$, де $y\neq 0$;

3) $\frac{12m^3-4m^{10}+8m^2}{4m^3}$, де $m\neq 0$;

4) $\frac{25n^{10}+10n^5-5n}{5n^2}$, де $n\neq 0$.

Див. приклад 2

3 Виконайте дії:

1) $\frac{6}{a-2}+\frac{5}{2-a}$;

2) $\frac{8}{8-a}+\frac{a}{a-8}$;

3) $\frac{3}{(b-1)^2}+\frac{6}{(1-b)^2}$;

4) $\frac{y}{(y-5)^2}-\frac{5}{(5-y)^2}$;

5) $\frac{5x}{x-3y}+\frac{15y}{3y-x}$;

6) $\frac{12k}{16k^2-c^2}-\frac{3c}{c^2-16k^2}$.

7) $\frac{m^2}{(m-2)^2}-\frac{4m-4}{(2-m)^2}$;

8) $\frac{y^3-6y^2}{(y-2)^2}-\frac{8-12y}{(2-y)^2}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- $a-b=-(b-a)$
- $(a-b)^2=(b-a)^2$
- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

4 Сергій витратив $\frac{1}{k}$ грошей, зароблених за певний час, на купівлю джинсів, $\frac{1}{k}$ від половини зароблених грошей — на поповнення рахунку мобільного телефону, 90 грн — на квитки в кіно. Після цього в Сергія залишилося 160 грн. Знайдіть k, якщо Сергій заробив 1000 грн.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$\frac{a}{b}$ від m дорівнює $\frac{a}{b}\cdot m$.

5 Побудуйте графіки функцій:

1) $y=\frac{4+x}{x-2}-\frac{3x}{x-2}$;

2) $y=\frac{6x+2x^2}{x}-\frac{2x^2+x}{x}$.

Див. приклад 3

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Виконайте дії:

1) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$;

2) $\frac{1}{4}-\frac{1}{5}$;

3) $\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{7}{2\cdot 5}$;

4) $\frac{5}{2\cdot 9}-\frac{4}{5\cdot 9}$;

5) $\frac{10}{21}-\frac{4}{35}$;

6) $\frac{3}{28}+\frac{5}{42}$.

Багато чого з математики не залишається в пам'яті, але коли зрозумієш її, тоді легко при нагоді згадати призабуте.

М. В. Остроградський

§4 ДОДАВАННЯ ТА ВІДНІМАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ ІЗ РІЗНИМИ ЗНАМЕННИКАМИ

ВЧОРА	Ви навчилися додавати й віднімати раціональні дроби з однаковими знаменниками
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся, як додавати й віднімати раціональні дроби з різними знаменниками
ЗАВЖДИ	Ви зможете розрахувати загальний час майбутніх подорожей

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Чемпіонат Європи з футболу — головне змагання національних збірних, що проводиться під керівництвом УЄФА кожні 4 роки, починаючи з 1960 р. У 2012 р. цей чемпіонат проходив в Україні та Польщі під гаслом «Творимо історію разом».

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- раціональний дріб
- область допустимих значень раціонального дробу
- додавання раціональних дробів
- віднімання раціональних дробів
- скорочення дробів

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Для занять фізкультурою спонсори закупили для школи футбольні та баскетбольні м'ячі. За p баскетбольних м'ячів заплатили M грн, а за k футбольних м'ячів — N грн. На скільки футбольний м'яч дорожчий за баскетбольний?

Розв'язання

Ціна одного футбольного м'яча становить $\frac{N}{k}$, баскетбольного — $\frac{M}{p}$. Щоб знайти різницю, слід від ціни футбольного м'яча (дорожчого) відняти ціну баскетбольного (дешевшого). Таким чином, слід знайти значення виразу $\frac{N}{k}-\frac{M}{p}$.

Ми отримали дроби з різними знаменниками. Отже, виникає запитання: як додавати або віднімати дроби, що мають різні знаменники?

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви вже знаєте, як додаються та віднімаються звичайні дроби з різними знаменниками. Пригадаємо:

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{d}=\frac{ad\pm bc}{cd},$$

де a, b, c, d — деякі числа, причому $c\neq 0$, $d\neq 0$. Наприклад:

$$\frac{3}{14}+\frac{5}{21}=\frac{3^{\backslash 3}}{7\cdot 2}+\frac{5^{\backslash 2}}{7\cdot 3}=\frac{3\cdot 3+5\cdot 2}{7\cdot 2\cdot 3}=\frac{19}{42}.$$

Аналогічно додаються й віднімаються раціональні дроби з різними знаменниками.

Щоб **додати (відняти) раціональні дроби з різними знаменниками**, необхідно звести їх до спільного знаменника та виконати дії за алгоритмом додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{D} = \frac{AD \pm BC}{CD},$$

де A, B, C, D — многочлени, $C \neq 0$, $D \neq 0$

Найважливішим під час додавання та віднімання дробів є знаходження спільного знаменника.

АЛГОРИТМ

Алгоритм знаходження спільного знаменника дробів

1. Розкладіть на множники кожний знаменник.
2. Знайдіть найменше спільне кратне числових коефіцієнтів, що містяться в отриманих розкладах.
3. Утворіть добуток, що міститиме числовий коефіцієнт (див. п. 2) та всі множники-вирази, що входять у розклади. Множники, що повторюються, слід брати з найбільшим показником степеня. Отриманий добуток є спільним знаменником дробів.

Наведемо кілька прикладів знаходження спільних знаменників двох дробів.

	Приклад 1	Приклад 2	Приклад 3	Приклад 4
Дроби	$\frac{1}{6xy^3}$, $\frac{5}{12xy^3}$	$\frac{9}{m^6n^4}$, $\frac{7}{m^8n^2}$	$\frac{4}{a-m}$, $\frac{3}{a+m}$	$\frac{3}{(m+n)^2}$, $\frac{3}{(m-n)(m+n)}$
Спільний знаменник дробів	$12xy^3$	m^8n^4	$(a-m)(a+m)$	$(m+n)^2(m-n)$

АЛГОРИТМ

Алгоритм додавання (віднімання) дробів з різними знаменниками

1. Розкладіть на множники кожний знаменник.
2. Знайдіть ОДЗ змінних, що входять у вираз.
3. Знайдіть спільний знаменник даних дробів.
4. Визначте доповняльні множники до чисельника кожного дробу (це множники, що містяться в спільному знаменнику та відсутні в даному знаменнику).
5. Помножте чисельники на відповідні доповняльні множники.
6. Запишіть у новому дробі: у чисельнику — відповідну суму або різницю отриманих добутків, а в знаменнику — спільний знаменник даних дробів.
7. Розкрийте дужки, зведіть подібні доданки, спростіть вираз у чисельнику та скоротіть отриманий дріб, якщо можливо.
8. Запишіть відповідь, ураховуючи ОДЗ.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Очевидно, що спільним знаменником дробів є добуток їх знаменників. Проте, як ви бачили на прикладах, такий спільний знаменник не завжди є найзручнішим.

ПРИКЛАД 1

Виконайте дії у виразі $\frac{2}{9x}+\frac{5}{6x}$, визначивши область допустимих значень змінної.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо ОДЗ змінної, що входить у вираз.	ОДЗ: $x \neq 0$
КРОК 2	Розкладемо знаменник кожного дробу на множники.	$9x=3\cdot3\cdot x$; $6x=3\cdot2\cdot x$
КРОК 3	Запишемо дроби з урахуванням отриманих розкладів.	$\frac{2}{3\cdot3\cdot x}+\frac{5}{3\cdot2\cdot x}$
КРОК 4	Визначимо найменше спільне кратне знаменників, яке й буде спільним знаменником дробів.	$3\cdot3\cdot2\cdot x$
КРОК 5	Знайдемо доповняльні множники, розділивши спільний знаменник на знаменник кожного дробу.	$\frac{2^{\backslash 2}}{3\cdot3\cdot x}+\frac{5^{\backslash 3}}{3\cdot2\cdot x}$
КРОК 6	Запишемо в знаменниках дробів спільний знаменник, помножимо чисельники на відповідні доповняльні множники та виконаємо додавання.	$\frac{2\cdot2}{3^2\cdot2\cdot x}+\frac{5\cdot3}{3^2\cdot2\cdot x}=\frac{2\cdot2+5\cdot3}{3^2\cdot2\cdot x}$
КРОК 7	Виконаємо дії в чисельнику та знаменнику, переконаємося, що отриманий дріб є нескоротним.	$\frac{4+15}{9\cdot2\cdot x}=\frac{19}{18x}$

Відповідь: $\frac{19}{18x}$, $x \neq 0$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

ОДЗ змінних, що входять у початковий раціональний вираз, не завжди збігається з ОДЗ змінних в отриманому спрощеному виразі. Проте саме початковий вираз визначає область допустимих значень, оскільки скорочувати дріб можна лише на вираз, відмінний від нуля.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Виконайте дії:

1) $\frac{5a}{2}+\frac{a}{4}$;
2) $\frac{x}{3}-\frac{x}{6}$;
3) $\frac{3}{b}-\frac{1}{2b}$;
4) $\frac{2}{y}+\frac{6}{5y}$;
5) $\frac{3}{x}+\frac{y}{x^2}$;
6) $\frac{4}{a^3}-\frac{m}{a}$;
7) $\frac{a}{3x^4}-\frac{b}{6x^2}$;
8) $\frac{3x}{10a^2}+\frac{y}{5a^6}$.

ПРИКЛАД 2

Спростіть вираз, виконавши дії з раціональними дробами: $\frac{x+2}{x-2}-\frac{x-2}{x+2}-\frac{16}{x^2-4}$. Визначте допустимі значення змінної.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знаменники перших двох дробів не можуть бути розкладені на множники. Розкладемо на множники знаменник третього дробу.	$x^2-4=(x-2)(x+2)$
КРОК 2	Знайдемо ОДЗ виразу (зауважимо, що в третьому знаменнику кожний множник має бути відмінним від нуля).	ОДЗ: $x \neq \pm 2$
КРОК 3	Визначимо спільний знаменник трьох дробів.	$(x-2)(x+2)$
КРОК 4	Знайдемо доповняльні множники до кожного дробу.	$\frac{x+2}{x-2}^{\backslash x+2}-\frac{x-2}{x+2}^{\backslash x-2}-\frac{16}{(x-2)(x+2)}^{\backslash 1}$
КРОК 5	Запишемо в знаменнику дробу спільний знаменник, помножимо чисельники на відповідні доповняльні множники та запишемо в чисельнику отриманий вираз.	$\frac{(x+2)^2-(x-2)^2-16}{(x-2)(x+2)}$
КРОК 6	Перетворимо вираз у чисельнику.	$\frac{x^2+4x+4-(x^2-4x+4)-16}{(x-2)(x+2)}=\frac{8x-16}{(x-2)(x+2)}$
КРОК 7	Розкладемо чисельник на множники та скоротимо отриманий дріб.	$\frac{8x-16}{(x-2)(x+2)}=\frac{8(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{8}{x+2}$

Відповідь: $\frac{8}{x+2}$, $x \neq \pm 2$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Виконайте дії:

1) $\frac{3}{x}+\frac{3}{x(x-1)}$;

2) $\frac{2}{x}-\frac{4}{x(x+2)}$;

3) $\frac{3}{(a+4)(a-3)}+\frac{1}{a+4}$;

4) $\frac{1}{a+6}-\frac{a}{(a-1)(a+6)}$;

5) $\frac{a+5}{a-5}-\frac{20a}{(a-5)(a+5)}$;

6) $\frac{y-6}{y+6}+\frac{24y}{(y-6)(y+6)}$;

7) $\frac{m+3}{m-3}-\frac{m-3}{m+3}-\frac{36}{m^2-9}$;

8) $\frac{2}{5x-y}+\frac{4y}{(5x-y)(5x+y)}+\frac{2}{5x+y}$.

ПАМ'ЯТАЙТЕ!

Усі перетворення раціональних дробів виконують на їх ОДЗ. Будемо визначати й записувати у відповідь ОДЗ змінних, що входять у вираз, тільки якщо це вимагається в умові завдання.

ПРИКЛАД 3

Подайте у вигляді дробу вираз $2-\frac{18-m}{9-m}$, якщо $m \neq 9$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Подамо число 2 у вигляді дробу із знаменником 1 та зведемо два отримані дроби до спільного знаменника $(9-m)$.	$2-\frac{18-m}{9-m}=\frac{2^{\backslash 9-m}}{1}-\frac{18-m^{\backslash 1}}{9-m}=$ $=\frac{2(9-m)-(18-m)}{9-m}$
КРОК 2	Розкриємо в чисельнику дужки та зведемо подібні доданки.	$\frac{2(9-m)-(18-m)}{9-m}=\frac{18-2m-18+m}{9-m}=\frac{-m}{9-m}$
КРОК 3	Розділимо чисельник і знаменник одержаного дробу на (-1) і скористаємося властивістю $-(a-b)=b-a$.	$\frac{-m}{9-m}=\frac{m}{m-9}$

Відповідь: $\frac{m}{m-9}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{7}{t-1}+7$;
2) $6-\frac{18}{x+3}$;
3) $\frac{r^2}{r+1}-r$;
4) $c-\frac{c^2}{c-13}$;
5) $9k-\frac{9k^2+8kn}{k+n}$;
6) $\frac{7ab-8a^2}{b-a}-7a$;
7) $\frac{c^2+4d^2}{c-2d}+3d+\frac{4cd}{2d-c}-c$;
8) $\frac{49a^2+n^2}{n-7a}-2n+\frac{14an}{7a-n}+7a$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$a=\frac{a}{1}$

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Подайте у вигляді дробу суму або різницю двох виразів:

1) $\frac{7}{12x}-\frac{1}{18x}$;
2) $\frac{5x}{3a}-\frac{7}{9b}$;
3) $\frac{3}{m+n}+\frac{3}{m-n}$;
4) $\frac{5}{x-4}-\frac{5}{x+4}$;
5) $\frac{2a}{1+6a}+\frac{2a}{6a-1}$;
6) $\frac{3y}{2y-1}-\frac{3y}{2y+1}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

2 Виконайте дії з раціональними дробами:

1) $m+\frac{1}{2}$;
2) $4-\frac{2}{m}$;
3) $3a+\frac{1}{2b}$;
4) $7a-\frac{5}{y}$;
5) $a+\frac{3a}{a-3}$;
6) $2m-\frac{3m}{m-2}$.

3 Виконайте дії з раціональними дробами:

1) $\frac{y^3-1}{y^4}+\frac{y-2}{y^5}$;
2) $\frac{a+b}{b}-\frac{b-a}{a}-\frac{a^2-b^2}{ab}$;
3) $\frac{x+y}{y}+\frac{y}{x-y}$;
4) $\frac{5}{3(m-n)}-\frac{3}{4(m+n)}$;
5) $\frac{2-a}{a+2}+\frac{a+2}{a-2}+\frac{16}{4-a^2}$;
6) $\frac{36}{a^2-9}-\frac{a-3}{a+3}-\frac{a+3}{3-a}$.

4 Виконайте дії з раціональними дробами:

1) $\frac{x}{x^2-4}-\frac{2}{x+2}$;
2) $\frac{m}{(m+2)^2}-\frac{2}{m+2}$;
3) $\frac{a}{a^2-4a+4}-\frac{2}{a-2}$;
4) $\frac{y}{(y-2)^2}+\frac{2}{2-y}$;
5) $\frac{1}{t^2-6t+9}+\frac{1}{t^2-9}$;
6) $\frac{1}{m^2-10m+25}-\frac{1}{25-m^2}$.

5 **Задача «Екскурсія».** Для учнів 8-го класу планується поїздка на екскурсію. До місця призначення необхідно спочатку їхати автобусом 40 км, а потім — потягом. Загальна відстань до місця призначення становить 140 км. Середня швидкість руху потяга на 30 км/год більша за середню швидкість руху автобуса.

1) Запишіть вираз, за яким можна знайти загальний час поїздки, якщо швидкість автобуса x км/год.
2) Обчисліть загальний час поїздки, якщо швидкість автобуса 70 км/год.
3) Ураховуючи отриманий результат, визначте, чи встигне клас доїхати до місця призначення до початку екскурсії, якщо вона розпочинається о 14:00, а в поїздку клас вирушить о 12:00.

6 Спростіть вираз:

1) $\frac{7x+28}{(-x-4)^2}-\frac{4}{x+4}$;
2) $\frac{14a}{9-a^2}+\frac{7}{a-3}$;
3) $\frac{a-1}{ab-a^2}-\frac{1-b}{ab-b^2}$;
4) $\frac{12x^2-20x+16}{9x^2-16}+\frac{x}{4-3x}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Спробуйте за 20 секунд без допомоги калькулятора визначити, яке з чисел є більшим — перше чи друге:

1) $\frac{420}{978}-\frac{211}{977}$; 2) $\frac{209}{977}$.

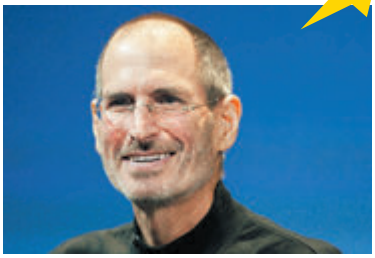
МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Туристична галузь є однією з найперспективніших. Досвідчені менеджери з туризму вільно орієнтуються у величезних обсягах інформації та блискавично комбінують різноманітні варіанти відпочинку. Дізнатися більше про професію ви можете за посиланням www.profi.ua/ukr/prof/view/73/#

ДОСЛІДЖУЄМО

ПРИГАДАЙТЕ!

- $(-a-b)^2=(a+b)^2$
- $-\frac{1}{a-b}=\frac{-1}{a-b}=\frac{1}{b-a}$
- $-\frac{x-y}{a-b}=\frac{y-x}{a-b}=\frac{x-y}{b-a}$



Стівен Пол Джобс (англ. Steven Paul Jobs; 1955–2011), більш відомий як Стів Джобс, — один із засновників корпорації Apple та анімаційної студії Pixar. Людина, яка змінила світ, керуючи розробками iMac, iTunes, iPod, iPhone, iPad, розвитком Apple Store, iTunes Store, App Store, iBookstore.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Сума виразів $\frac{m}{x-a}$ і $\frac{m}{a-x}$ дорівнює нулю при $x \neq a$.

2) Сума виразів $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$ і $\frac{1}{a^3}$ дорівнює $\frac{3}{a^3}$ при $a \neq 0$.

3) Якщо $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1$, то $\frac{a^2+b^2}{ab}=1$ при $a \neq 0$, $b \neq 0$.

4) Значення виразу $\frac{y^2+3}{y^2-6y+9}$ додатне при $y \neq 3$.

5) Якщо 1 кг апельсинів коштує x грн, а 1 кг лимонів — y грн, то n кг апельсинів і m кг лимонів разом коштують $(nx+my)$ грн.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Тріатлон — олімпійський вид спорту, що складається з трьох різних змагань (плавання, велоперегони, крос), які слідують одне за одним. У 2015 р. найсильніший паратріатлоніст України Василь Закревський переміг на чемпіонаті Європи та етапі Кубка світу, а також здобув срібну нагороду чемпіонату світу.

$$t=\frac{s}{v}; \quad t=t_1+t_2+t_3$$

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ТРІАТЛОН»

Змагання з тріатлону складаються з плавання, велоперегонів і кросу. У таблиці наведено відстані, які один із тріатлоністів подолав на кожному етапі, та середні швидкості його руху на відповідних етапах.

Етап	Відстань s, км	Швидкість v, км/год
Плавання	0,5	v
Велоперегони	22	$16v$
Крос	6	$v+6$

1. Запишіть вираз, за яким можна визначити загальний час t, витрачений на подолання всіх етапів, якщо t_1 — час, витрачений тріатлоністом на плавання, t_2 — на велоперегони, t_3 — на крос.
2. Обчисліть загальний час t, якщо середня швидкість, із якою плив тріатлоніст, становила 2 км/год.
3. Ураховуючи отримані результати, визначте, чи потрапив тріатлоніст у призери, якщо учасник, який посів третє місце, подолав усі етапи змагання за 2 год.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

1 $\frac{1}{m}+\frac{1}{3m}=$

А	Б	В	Г
$\frac{4}{3m}$	$\frac{1}{4m}$	$\frac{2}{4m}$	$\frac{2}{3m}$

2 $\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}=$

А	Б	В	Г
$\frac{2-y}{y^2}$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{2y-1}{y^2}$	$\frac{1}{y}$

3 $\frac{4}{a-b}+\frac{4}{b-a}=$

А	Б	В	Г
$\frac{8}{a-b}$	0	1	$\frac{8}{b-a}$

4 $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=$

А	Б	В	Г
$-\frac{1}{n(n+1)}$	-1	1	$\frac{1}{n(n+1)}$

5 Перша митниця пропускає в середньому m туристів кожні x год, а друга митниця — n туристів кожні y год. Скільки в середньому туристів перетинають кордон через обидві митниці щогодини?

А	Б	В	Г
$\frac{x}{m}+\frac{y}{n}$	$\frac{m}{x}+\frac{n}{y}$	$\frac{m+n}{x+y}$	$\frac{x+y}{m+n}$

6 До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Г), якщо $a\neq 0$, $a\neq\pm 3$.

1	$\frac{1}{a}+\frac{3}{a(a-3)}$	А	$\frac{1}{a(a^2-9)}$
2	$\frac{1}{a-3}-\frac{6}{a^2-9}$	Б	$\frac{1}{a^2-9}$
		В	$\frac{1}{a-3}$
3	$\frac{a+3}{12a(a-3)}-\frac{a-3}{12a(a+3)}$	Г	$\frac{1}{a+3}$

7 Виконайте дії: $\frac{2}{m-5n}-\frac{20n}{m^2-25n^2}+\frac{2}{m+5n}$.

8 Доведіть тотожність $\frac{18x^2-12x}{9x^2-12x+4}-\frac{4}{3x-2}=2$, якщо $x\neq\frac{2}{3}$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Виконайте дії:

1) $\frac{3b}{5}-\frac{b}{10}$; 3) $\frac{4}{a}-\frac{1}{3a}$; 5) $\frac{6}{n}+\frac{x}{n^2}$; 7) $\frac{m}{4y^6}-\frac{n}{8y^3}$;

2) $\frac{y}{6}+\frac{5y}{2}$; 4) $\frac{1}{x}+\frac{7}{4x}$; 6) $\frac{9}{b^3}-\frac{n}{b^2}$; 8) $\frac{5a}{12x^3}+\frac{b}{2x^5}$.

Див. приклад 1

2 Знайдіть найменший спільний знаменник дробів:

1) $\frac{x+y}{x^3}$; $\frac{3x-2y}{4x}$; $\frac{y^4}{x-y}$; 2) $\frac{a}{a-b}$; $\frac{b}{(b-a)^2}$; $\frac{ab}{a+b}$; $\frac{4}{5a+5b}$.

Див. приклад 2

3 Виконайте дії, визначивши область допустимих значень виразу:

1) $\frac{3}{a}+\frac{6}{a(a-2)}$;

2) $\frac{4}{a}-\frac{12}{a(a+3)}$;

3) $\frac{2}{(b+5)(b-2)}+\frac{1}{b+5}$;

4) $\frac{b}{(b-3)(b+1)}-\frac{1}{b+1}$;

5) $\frac{x+3}{x-3}-\frac{12x}{(x-3)(x+3)}$;

6) $\frac{b-4}{b+4}+\frac{16b}{(b-4)(b+4)}$;

7) $\frac{n+4}{n-4}-\frac{n-4}{n+4}+\frac{64}{n^2-16}$;

8) $\frac{3}{a-4b}-\frac{24b}{a^2-16b^2}+\frac{3}{a+4b}$.

Див. приклад 3

4 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\frac{3}{y-1}+3$;

2) $2+\frac{4}{x-2}$;

3) $\frac{n^2}{n+1}-n$;

4) $m-\frac{m^2}{m+2}$;

5) $5x-\frac{4x^2+5xy}{x+y}$;

6) $\frac{3mn+4n^2}{m+n}-3n$;

7) $\frac{a^2+25b^2}{a-5b}+6b+\frac{10ab}{5b-a}-a$;

8) $\frac{16x^2+y^2}{4x-y}+y+\frac{8xy}{y-4x}-3x$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Ра́фтинг — швидкісний сплав гірською річкою через пороги на надувному човні (рафті), плоту або байдарці. Рафтинг в Україні стає дедалі популярнішим.

5 Туристи вирішили поплисти по річці на байдарках від бази відпочинку до найближчого населеного пункту. Відстань, яку вони мали подолати в обидва боки, становить 10 км. Перші 5 км туристи пливли проти течії зі швидкістю $(v-3)$ км/год, а назад — за течією річки зі швидкістю $(v+3)$ км/год. Запишіть вираз, за яким можна визначити загальний час, витрачений туристами на всю подорож.

6 Спростіть вираз:

1) $\frac{6a+30}{(-a-5)^2}-\frac{2}{a+5}$;

2) $\frac{6n}{n^2-64}+\frac{3}{8-n}$;

3) $\frac{5+x}{xy-x^2}+\frac{5+y}{xy-y^2}$;

4) $\frac{3a}{5-4a}+\frac{28a^2+55a+25}{16a^2-25}$.

“Будь чесним із самим собою і з людьми, завжди роби все вчасно, ніколи не здавайся, іди до своїх цілей, навіть якщо все погано.”

Стів Джобс

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Виконайте дії:

1) $\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{7}$;

2) $\frac{6}{11}\cdot\frac{22}{3}$;

3) $\frac{24}{25}\cdot\frac{15}{48}$;

4) $\frac{1}{13}:\frac{4}{13}$;

5) $\frac{12}{5}:\frac{24}{5}$;

6) $\frac{40}{63}:\frac{20}{9}$.

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 1—4

1 Ви дізналися, що таке раціональні вирази, область допустимих значень змінних, які входять у вираз.

Раціональні вирази

- **Цілі вирази** — вирази, що не містять дію ділення на вираз зі змінною
- **Дробові вирази** — вирази, що містять дію ділення на вираз зі змінною

Область допустимих значень (ОДЗ) виразу з однією змінною — усі значення змінної, при яких цей вираз має зміст. Область допустимих значень називають також *областю визначення виразу*.

- Дріб має зміст, коли його знаменник відмінний від нуля.
- Коли говорять, що **вираз має зміст**, це означає, що можна виконати всі математичні дії, які містить цей раціональний вираз.

Алгоритм знаходження ОДЗ виразу

1. Прирівняти знаменники дробів, що входять у вираз, до нуля.
2. Знайти розв'язки отриманих рівнянь.
3. Записати ОДЗ, зазначивши, що отримані розв'язки до неї не входять.

2 Ви познайомилися з основною властивістю дробу, навчилися скорочувати дроби.

Тотожно рівні вирази — вирази, відповідні значення яких є рівними при будь-яких допустимих значеннях змінних.

Тотожність — рівність, що виконується при будь-яких допустимих значеннях змінних.

Основна властивість дробу

Чисельник і знаменник раціонального дробу можна помножити (або поділити) на один і той самий множник, що тотожно не дорівнює нулю, при цьому значення раціонального дробу не зміниться:

$\frac{M}{P} = \frac{M \cdot N}{P \cdot N}$, де M, P, N — многочлени, причому P і N тотожно не дорівнюють нулю.

Алгоритм скорочення дробів

1. Розкласти на множники чисельник і знаменник дробу.
2. Знайти область допустимих значень раціонального дробу.
3. Визначити спільний множник чисельника та знаменника дробу.
4. Скоротити дріб, поділивши чисельник і знаменник дробу на їх спільний множник.

3 Ви навчилися зводити дріб до нового знаменника, додавати й віднімати раціональні дроби.

Алгоритм зведення дробу до нового (відомого) знаменника

1. Розкласти новий знаменник на множники, якщо потрібно.
2. Знайти доповняльний множник, поділивши новий знаменник на знаменник початкового дробу.
3. Помножити чисельник і знаменник початкового дробу на знайдений доповняльний множник.
4. Виконати в разі потреби відповідні дії в чисельнику та знаменнику отриманого дробу.
5. Записати шуканий дріб, ураховуючи ОДЗ.

Щоб **додати (відняти) раціональні дроби з однаковими знаменниками**, треба додати (відняти) їх чисельники, а знаменник залишити без змін:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \quad c \neq 0.$$

І навпаки: $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}, \quad c \neq 0.$

Щоб **додати (відняти) раціональні дроби з різними знаменниками**, необхідно звести їх до спільного знаменника та виконати дії за алгоритмом додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{D} = \frac{AD \pm BC}{CD},$$

де A, B, C, D — многочлени, $C \neq 0$, $D \neq 0$.

Алгоритм додавання (віднімання) дробів з однаковими знаменниками

1. Записати дію додавання (віднімання) чисельників дробів, використовуючи спільну риску, а знаменник залишити той самий.
2. Виконати в отриманому чисельнику відповідні дії додавання (віднімання).
3. Розкрити дужки та звести подібні доданки (якщо потрібно).
4. Скоротити, якщо можливо, отриманий дріб.

Алгоритм додавання (віднімання) дробів з різними знаменниками

1. Розкласти на множники кожний знаменник.
2. Знайти ОДЗ змінних, що входять у вираз.
3. Знайти спільний знаменник даних дробів.
4. Визначити доповняльні множники до чисельника кожного дробу.
5. Помножити чисельники на відповідні доповняльні множники.
6. Записати у новому дробі: у чисельнику — відповідну суму або різницю отриманих добутків, а в знаменнику — спільний знаменник даних дробів.
7. Розкрити дужки, звести подібні доданки, спростити вираз у чисельнику та скоротити отриманий дріб, якщо можливо.
8. Записати відповідь, ураховуючи ОДЗ.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 2

Варіант 1

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ
Варіант 2 контрольної роботи № 2 див. на сайті interactive.ranok.com.ua

1 Знайдіть допустимі значення змінної, що входить у вираз $\frac{4x}{x+9}$.

А	Б	В	Г
Усі значення, крім $x=0$	Усі значення, крім $x=4$	Усі значення, крім $x=-9$	Усі значення, крім $x=9$

2 У ставку m карасів та n щук. Відомо, що кількість карасів більша за кількість щук. Виберіть дріб, якому може дорівнювати значення виразу $\frac{n}{m}$.

А	Б	В	Г
$\frac{102}{79}$	$\frac{231}{229}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{23}{91}$

3 У будинку a двокімнатних і b однокімнатних квартир $(a>b)$. У скільки разів двокімнатних квартир більше за однокімнатні?

А	Б	В	Г
$a-b$	$\frac{b}{a}$	$\frac{a}{b}$	$b-a$

4 Скоротіть дріб $\frac{y^2-6y+9}{2y-6}$.

А	Б	В	Г
$\frac{2}{y-3}$	$\frac{y-3}{2}$	$\frac{y+3}{2}$	$\frac{2}{y+3}$

5 Виконайте віднімання: $\frac{6k}{3k-5}-\frac{10}{3k-5}$.

А	Б	В	Г
2	3	$\frac{2}{3k-5}$	$\frac{3}{3k-5}$

6 Виконайте дії: $\frac{1}{x-5}-\frac{10}{x^2-25}$.

А	Б	В	Г
$-\frac{1}{x+5}$	$-\frac{1}{x-5}$	$\frac{1}{x-5}$	$\frac{1}{x+5}$

7 Доведіть тотожність

$$\frac{(4a+b)^2}{16a^2+b^2}+\frac{(4a-b)^2}{b^2+16a^2}=2.$$

8 Подайте вираз $\frac{2x^3+6x^8-14x}{2x^2}$, де $x\neq 0$, у вигляді суми та різниці нескоротних дробів.

9 Спростіть вираз $\frac{10c+6}{c^2-9}-\frac{6c+19}{9-c^2}+\frac{11-4c}{c^2-9}$.

10 Спростіть вираз $\frac{n+3}{n-1}-\frac{n^2+n-2}{n^2-2n+1}$. Знайдіть його значення при $n=1{,}1$.

Бонусне завдання. Відомо, що $\frac{x}{y}=10$. Знайдіть значення виразу $\frac{x^2-15xy+9y^2}{xy}$.

§5 МНОЖЕННЯ ТА ДІЛЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ. ПІДНЕСЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ

ВЧОРА	Ви множили й підносили до степеня звичайні дроби
СЬОГОДНІ	Ви навчитеся множити й підносити до степеня раціональні дроби
ЗАВЖДИ	Ви зможете розв'язувати задачі на відсоткові розрахунки

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Валерій Васильович Лобановський (1939–2002) — видатний радянський та український футболіст і тренер. Багаторічний наставник футбольної команди «Динамо» (Київ), яка під його керівництвом двічі вигравала турнір Кубок володарів кубків. На тренуваннях відпрацьовував удари типу «сухий лист», використовуючи фізичний ефект Маґнуса та власні математичні розрахунки.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- множення раціональних дробів
- піднесення дробу до степеня
- ділення раціональних дробів
- скорочення дробів

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

У класі навчаються k учнів, причому $\frac{a}{n}$ учнів класу становлять хлопці. Відомо, що 30 % усіх хлопців займаються футболом. Запишіть вираз, за яким можна визначити кількість учнів, які займаються футболом.

Розв'язання

За правилом знаходження дробу від числа визначимо кількість хлопців: $\frac{a}{n}\cdot k$. Тоді 30 % від числа $\frac{a}{n}\cdot k$ можна знайти за допомогою виразу $\frac{30}{100}\cdot\frac{a}{n}\cdot k=\frac{3}{10}\cdot\frac{a}{n}\cdot k$.

Щоб спростити отриманий вираз, необхідно виконати множення раціональних дробів.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

МНОЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Ви вже знаєте, що звичайні дроби множаться за правилом:

$\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{d}=\frac{ab}{cd}$, де a, b, c, d — деякі числа, $c\neq 0$, $d\neq 0$.

Після запису чисельника і знаменника нового дробу у вигляді добутку слід скоротити дріб, якщо це можливо.

Наприклад:

$$\frac{3}{14}\cdot\frac{28}{21}=\frac{3\cdot 28}{14\cdot 21}=\frac{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 2\cdot\cancel{7}}{\cancel{2}\cdot\cancel{7}\cdot\cancel{3}\cdot 7}=\frac{2}{7};\quad \frac{4}{15}\cdot\frac{20}{8}=\frac{4\cdot 20}{15\cdot 8}=\frac{1\cdot 4}{3\cdot 2}=\frac{2}{3}.$$

За цим правилом можна перемножити кілька дробів:

$$\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{a_2}{b_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}{b_1\cdot b_2\cdot\ldots\cdot b_n}.$$

Так само множаться й раціональні дроби.

Правило 1. Щоб **помножити два раціональні дроби**, слід перемножити окремо їх чисельники та окремо знаменники і записати перший добуток у чисельник, а другий — у знаменник нового дробу:

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},$$

де B і D — многочлени, причому $B\neq 0$, $D\neq 0$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},$$
$$B\neq 0,\ D\neq 0$$

ПРИКЛАД 1

Виконайте множення: $\frac{5b^2}{2m^3}\cdot\frac{8m^2}{15b^5}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що дроби існують, якщо $b\neq 0$, $m\neq 0$.	ОДЗ: $\begin{cases} b\neq 0, \\ m\neq 0 \end{cases}$
КРОК 2	Запишемо дані дроби, використовуючи спільну риску: у чисельнику нового дробу зазначимо добуток чисельників, а в знаменнику — добуток знаменників заданих дробів.	$\frac{5b^2\cdot 8m^2}{2m^3\cdot 15b^5}$
КРОК 3	Розкладемо на множники вирази в чисельнику та знаменнику так, щоб отримати спільні множники.	$\frac{5b^2\cdot 2\cdot 4\cdot m^2}{2m\cdot m^2\cdot 5\cdot 3\cdot b^2\cdot b^3}$
КРОК 4	Скоротимо отриманий дріб на вираз $\left(10b^2m^2\right)$.	$\frac{4\cdot\left(10b^2m^2\right)}{3\cdot mb^3\left(10b^2m^2\right)}=\frac{4}{3b^3m}$

Відповідь: $\frac{4}{3b^3m}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Виконайте множення:

1) $\frac{3}{a}\cdot\frac{b}{6}$;
2) $\frac{c}{5}\cdot\frac{2}{c}$;
3) $\frac{x^2}{10}\cdot\frac{2}{x}$;
4) $\frac{12}{y}\cdot\frac{y^3}{6}$;
5) $\frac{9a^5}{14c}\cdot\frac{7c}{3a^3}$;
6) $\frac{15x}{2y^3}\cdot\frac{6y^5}{5x}$;
7) $\frac{49n^3}{15m^5}\cdot\frac{30m^9}{7n^6}$;
8) $\frac{24a^{10}}{25x^8}\cdot\frac{5x^6}{8a^7}$.

ПРИКЛАД 2

Виконайте дії та спростіть вираз $\frac{4m-4n}{m^2-n^2}\cdot\frac{m^2+mn}{3}$ при $m\neq\pm n$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що кожний із дробів існує при $m\neq\pm n$.	ОДЗ: $m\neq\pm n$
КРОК 2	Розкладемо чисельник першого дробу на множники, для цього винесемо спільний множник за дужки.	$4m-4n=4(m-n)$
КРОК 3	Розкладемо знаменник першого дробу на множники, скориставшись формулою різниці квадратів.	$m^2-n^2=(m-n)(m+n)$
КРОК 4	Розкладемо чисельник другого дробу на множники, для цього винесемо спільний множник за дужки.	$m^2+mn=m(m+n)$
КРОК 5	Запишемо дріб, що дорівнює добутку двох даних дробів, використовуючи перетворені вирази.	$\frac{4m-4n}{m^2-n^2}\cdot\frac{m^2+mn}{3}=$ $=\frac{4(m-n)\cdot m(m+n)}{(m-n)(m+n)\cdot 3}$
КРОК 6	Скоротимо отриманий дріб на вираз $(m-n)(m+n)$.	$\frac{4m}{3}$

Відповідь: $\frac{4m}{3}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Виконайте дії:

1) $\frac{x-6}{2}\cdot\frac{4}{x-6}$;

2) $\frac{3}{5+y}\cdot\frac{5+y}{6}$;

3) $\frac{a-b}{t^3}\cdot\frac{4t^3}{a-b}$;

4) $\frac{x^5}{m+n}\cdot\frac{m+n}{6x^5}$;

5) $\frac{25-x^2}{8y}\cdot\frac{4}{x-5}$;

6) $\frac{12a}{49-b^2}\cdot\frac{b-7}{4}$;

7) $\frac{2k-2t}{k^2-t^2}\cdot\frac{k^2+kt}{6}$ при $k\neq\pm t$;

8) $\frac{3x-3y}{y^2-x^2}\cdot\frac{x^2+xy}{24}$ при $y\neq\pm x$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Виконуючи дії та скорочуючи дроби, пам'ятайте про ОДЗ.

ПІДНЕСЕННЯ РАЦІОНАЛЬНОГО ДРОБУ ДО СТЕПЕНЯ

Пригадаємо, як підносити до степеня звичайний дріб:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{b}}_{n} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}^{n}}{\underbrace{b\cdot b\cdot\ldots\cdot b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n}, \text{ причому } b\neq 0.$$

Правило 2. Щоб **піднести дріб до степеня**, слід піднести до цього степеня окремо чисельник та окремо знаменник і записати перший результат у чисельник, а другий — у знаменник нового дробу:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, \text{ де } B\neq 0.$$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо $n=1$, маємо:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^1 = \frac{A}{B}.$$

ПРИКЛАД 3

Подайте вираз $\left(-\frac{2x^2}{3a^3b}\right)^4$ у вигляді дробу.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область допустимих значень змінних, що входять у вираз.	ОДЗ: $a\neq 0$, $b\neq 0$
КРОК 2	Визначимо знак результату, враховуючи парний показник степеня.	Знак «+»
КРОК 3	Піднесемо до степеня окремо чисельник та окремо знаменник дробу.	$\left(-\frac{2x^2}{3a^3b}\right)^4 = \frac{2^4\left(x^2\right)^4}{3^4\left(a^3\right)^4b^4}$
КРОК 4	Піднесемо до степенів вирази в чисельнику та знаменнику, використовуючи властивості степенів.	$\frac{16x^8}{81a^{12}b^4}$

Відповідь: $\frac{16x^8}{81a^{12}b^4}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(-\frac{6x}{y}\right)^2$; 3) $\left(-\frac{4m^2}{n^3}\right)^3$; 5) $\left(-\frac{5y^3}{7k^6m}\right)^2$; 7) $\left(-\frac{3a^3b^2}{2x^4y^{12}}\right)^5$;

2) $\left(-\frac{a}{3b}\right)^4$; 4) $\left(-\frac{a^4}{2b^2}\right)^5$; 6) $\left(-\frac{3ab^7}{2n^5}\right)^4$; 8) $\left(-\frac{5c^6d^3}{4m^{11}n^8}\right)^3$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- $(-1)^4=1$
- $(-1)^5=-1$

ПРИКЛАД 4

Виконайте дії: $\left(\frac{m}{a^4}\right)^3 \cdot \frac{a^{15}}{(ma)^3}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що дріб існує при $a \neq 0$, $m \neq 0$.	ОДЗ: $\begin{cases} a \neq 0, \\ m \neq 0 \end{cases}$
КРОК 2	Піднесемо до степеня перший дріб, скориставшись правилом 2.	$\left(\frac{m}{a^4}\right)^3 = \frac{m^3}{a^{12}}$
КРОК 3	Піднесемо до степеня знаменник другого дробу (добуток $m \cdot a$).	$(ma)^3 = m^3a^3$
КРОК 4	Запишемо добуток перетворених дробів.	$\frac{m^3 \cdot a^{15}}{a^{12} \cdot m^3a^3}$
КРОК 5	Виконаємо множення степенів з однаковою основою в знаменнику дробу (пригадайте: основа залишається такою самою, а показники степенів додаються).	$a^{12} \cdot a^3 = a^{15}$
КРОК 6	Скоротимо отриманий дріб на вираз $a^{15}m^3$.	$\frac{a^{15}m^3}{a^{15}m^3} = 1$

Відповідь: 1.

ТРЕНУЄМОСЯ

ПРИГАДАЙТЕ!

- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

4 Виконайте дії:

1) $\left(\frac{x}{y}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2}$;

2) $\frac{1}{a^3} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3$;

3) $\left(\frac{x^3}{y^2}\right)^2 \cdot \frac{y}{x^4}$;

4) $\frac{a^9}{b} \cdot \left(\frac{b^2}{a^4}\right)^3$;

5) $\left(\frac{a}{b^3}\right)^4 \cdot \frac{b^{12}}{(ab)^4}$;

6) $\left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \cdot \frac{(xy)^2}{x^6}$;

7) $\left(-\frac{2x^2}{yz^3}\right)^3 \cdot \left(-\frac{y^2z}{2x^3}\right)^4$;

8) $\left(-\frac{3a^4}{b^3c}\right)^2 \cdot \left(-\frac{bc^2}{3a^3}\right)^5$.

ДІЛЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ

Пригадаємо, як виконується ділення звичайних дробів:

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$, де a, b, c, d — числа, $b\neq 0$, $d\neq 0$, $c\neq 0$.

Правило 3. Щоб **поділити один раціональний дріб на інший**, слід перший дріб помножити на дріб, обернений до другого:

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}, \text{ причому } B\neq 0,\ D\neq 0,\ C\neq 0.$$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C},$$
$$B\neq 0,\ D\neq 0,\ C\neq 0$$

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

У разі ділення чисельник раціонального дробу-дільника також має бути відмінним від нуля.

ПРИКЛАД 5

Виконайте ділення дробів $\frac{4m^3}{a}:\frac{8m}{a^2}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що не тільки знаменники обох дробів, а й чисельник другого дробу не повинні дорівнювати нулю.	ОДЗ: $\begin{cases} a\neq 0, \\ m\neq 0 \end{cases}$
КРОК 2	Виконаємо ділення дробів за відповідним правилом, враховуючи, що оберненим до дробу-дільника є дріб $\frac{a^2}{8m}$.	$\frac{4m^3}{a}\cdot\frac{a^2}{8m}$
КРОК 3	Виконаємо множення дробів, виокремивши спільний множник чисельника та знаменника.	$\frac{4m^3a^2}{a\cdot 8m}=\frac{4am\cdot am^2}{4am\cdot 2}$
КРОК4	Скоротимо отриманий дріб на одночлен $4am$.	$\frac{am^2}{2}$

Відповідь: $\frac{am^2}{2}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

5 Виконайте ділення:

1) $\frac{x}{4}:\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a^2}{b}:\frac{a}{b^4}$; 5) $\frac{6a^4}{x}:\frac{12a}{x^3}$; 7) $\frac{35x^2y^2}{6a^5}:\frac{14x^8y^3}{9a^4}$;

2) $\frac{9}{y}:\frac{3}{b}$; 4) $\frac{x}{y^3}:\frac{x^4}{y^5}$; 6) $\frac{y}{9k^5}:\frac{y^6}{18k}$; 8) $\frac{4b^3}{15k^4m^5}:\frac{16b}{27k^3m^4}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$.

Дроби $\frac{c}{d}$ і $\frac{d}{c}$ є взаємно оберненими.

ПРИКЛАД 6

Виконайте дії $\frac{(m-4)^3}{2m^3} : \frac{(4-m)^2}{20m}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що знаменники відмінні від нуля при $m \neq 0$; чисельник другого дробу (дільника) відмінний від нуля при $m \neq 4$.	ОДЗ: $\begin{cases} m \neq 0, \\ m \neq 4 \end{cases}$
КРОК 2	Виконаємо ділення дробів за відповідним правилом, помноживши перший дріб на дріб, обернений до другого.	$\frac{(m-4)^3 \cdot 20m}{2m^3 \cdot (4-m)^2}$
КРОК 3	Використаємо властивість $(4-m)^2 = (m-4)^2$ для того, щоб отримати однаковий множник у чисельнику та знаменнику дробу.	$\frac{(m-4)^3 \cdot 20m}{(m-4)^2 \cdot 2m^3} = \frac{(m-4)^2 (m-4) \cdot 2m \cdot 10}{(m-4)^2 \cdot 2m \cdot m^2}$
КРОК 4	Скоротимо одержаний дріб на вираз $2m \cdot (m-4)^2$.	$\frac{10(m-4)}{m^2}$

Відповідь: $\frac{10(m-4)}{m^2}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

ПРИГАДАЙТЕ!

- $(a-b)^3 = -(b-a)^3$
- $(c-d)^2 = (d-c)^2$

6 Виконайте дії:

1) $\frac{a^3}{x-2} : \frac{a}{x-2}$;

2) $\frac{a+3}{x^2} : \frac{a+3}{x}$;

3) $\frac{2x^2}{a-b} : \frac{6x^4}{b-a}$;

4) $\frac{4a^6}{x-4} : \frac{8a^5}{4-x}$;

5) $\frac{(a-6)^5}{3a^4} : \frac{(6-a)^4}{30a}$;

6) $\frac{4b}{(5-b)^3} : \frac{16b^5}{(b-5)^4}$;

7) $\frac{(a-b)^2}{2x^2-18y^2} : \frac{b-a}{2x+6y}$;

8) $\frac{4m-8n}{c-d} : \frac{4m^2-16n^2}{(d-c)^2}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

1. Задумайте число.
2. Відніміть від цього числа те число, що є меншим за нього на 2.
3. Помножте результат на 10.
4. Додайте до добутку 80.

Яке число ви отримали? Повторіть цей алгоритм кілька разів і поясніть результат.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Виконайте дії:

1) $\frac{20y^2}{3x} \cdot \frac{9x^2}{4y^6}$;

2) $\frac{12y}{5x^3} \cdot \frac{15x^9}{8y^2}$;

3) $\frac{9x^2}{4y^3} \cdot \frac{16y^6}{3x^3}$;

4) $\frac{24a}{7m^3} \cdot \frac{14m^7}{3am}$;

5) $\frac{9ab}{35m^7} : \frac{45a^2b^6}{21m^8}$;

6) $\frac{24d^5n}{33k^2} : \frac{8d^4n^2}{55k}$.

2 Виконайте дії:

1) $-\frac{21c^2}{5b^3n^6}\cdot\frac{15b^4n^8}{28c^3}:3b$;

2) $\frac{56a^5b}{9m}\cdot\left(-\frac{45am^3}{21b^2}\right):10a^6$;

3) $\frac{8xy}{16a^2x}:\frac{24xy^2}{48x^2a}\cdot5a^5$;

4) $\frac{5ab^2}{3xb}:\frac{15a^2b^2}{9xa}\cdot10a^3$.

3 Виконайте множення або ділення:

1) $\left(-m^7\right)\cdot\frac{21}{(ma)^7}$;

2) $(6-x)^4\cdot\frac{2}{(x-6)^5}$;

3) $\frac{(a+b)^4}{2}:(b+a)^5$;

4) $\frac{(a-b)^6}{3}:(b-a)^8$.

4 Виконайте дії:

1) $a^{14}\cdot\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^3\cdot\left(\frac{b^4}{a^5}\right)^3$;

2) $\left(\frac{2m^4}{7a^3}\right)\cdot\left(-\frac{7a^2}{3m^3}\right)^3$;

3) $\left(2m^5\right)^2\cdot\left(\frac{3}{m^2}\right)^2\cdot6a^7\cdot\left(\frac{a^2}{m}\right)^3$;

4) $10a^2:\left(\frac{5a}{b}\right):\left(1\frac{1}{4}b\cdot\left(2a^2\right)^2\right)$.

5 Спростіть вирази:

1) $\frac{a^8+a^6}{t^6}:\frac{a^6+a^7}{t^7}$;

2) $(9a-ab):\frac{81-b^2}{a^2}$;

3) $\frac{(x-y)^2}{16-m^2}:\frac{x^2-y^2}{m^2-16}$;

4) $\frac{x^2-8ax+16a^2}{x^2+8ax+16a^2}\cdot\left(\frac{x+2a}{x-2a}\right)^3$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Добуток виразів $\frac{3y}{x^4}$ і $\frac{x^4}{y}$ не залежить від значень x і y.

2) Якщо $x\cdot\frac{2}{5}=\frac{5}{2}$, то $x=1$.

3) Якщо $\frac{a}{b^2}=c$, то $a=\frac{c}{b^2}$.

4) Якщо $-\frac{m^3}{2n^2}=1$, то $\left(-\frac{m^3}{2n^2}\right)^5=-1$.

5) Якщо взяти на прокат на m діб комплект для сноубордингу (дошка, черевики, захисний шолом) за ціною a грн за добу, то доведеться сплатити $m\cdot a$ грн.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

- $a=\frac{a}{1}$
- $(m-n)^2=\frac{(m-n)^2}{1}$

ПРИГАДАЙТЕ!

- $a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}$, $c\neq0$
- $a:\frac{b}{c}=\frac{a\cdot c}{b}$, $b\neq0$, $c\neq0$

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

- $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $b\neq0$
- $(ab)^n=a^nb^n$

Леонардо да Вінчі (італ. Leonardo da Vinci; 1452–1519) — видатний італійський учений, дослідник, винахідник і художник, архітектор, анатоміст, інженер. Особливу увагу Леонардо да Вінчі приділяв механіці, називаючи її «раєм математичних наук».

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

1 $\frac{6}{n}\cdot\frac{k}{3}=$

А	Б	В	Г
$\frac{2k}{n}$	$\frac{3k}{n}$	$\frac{k}{3n}$	$\frac{k}{2n}$

2 $\frac{x}{y^2}:\frac{x^3}{y^8}=$

А	Б	В	Г
$\frac{x^4}{y^{10}}$	$\frac{x^3}{y^{16}}$	$\frac{y^4}{x^2}$	$\frac{y^6}{x^2}$

3 Виконайте піднесення до степеня: $\left(\frac{m^2}{2n^5}\right)^4$.

А	Б	В	Г
$\frac{m^6}{8n^9}$	$\frac{m^8}{16n^{20}}$	$\frac{m^8}{8n^{20}}$	$\frac{m^6}{16n^9}$

4 Відомо, що $\frac{3}{a}=\frac{t}{b}$. Виразіть a через b і t.

А	Б	В	Г
$a=\frac{t}{3b}$	$a=\frac{3t}{b}$	$a=\frac{3b}{t}$	$a=\frac{b}{3t}$

5 У готелі всього m номерів, серед них n номерів люкс. Яку частину (у %) від загальної кількості номерів готелю становить кількість номерів люкс?

А	Б	В	Г
$\frac{m}{n}\cdot 100$	$\frac{n}{m}\cdot 100$	$\frac{n}{m}$	$\frac{m}{n}$

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Щоб знайти, скільки відсотків становить число b від a, слід знайти значення виразу $\frac{b}{a}\cdot 100\ \%$.

6 До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Г), якщо $x\neq 0$, $x\neq 2$, $x\neq -1$.

1	$\frac{2x-4}{x^2+x}:\frac{x-2}{x+1}$	А	$x-2$
2	$\frac{x^2+x}{2x-4}\cdot\frac{x-2}{x+1}$	Б	$2x$
3	$\frac{2x^2+4x+2}{x}:\left(\frac{x+1}{x}\right)^2$	В	$\frac{x}{2}$
		Г	$\frac{2}{x}$

7 Спростіть вираз $\frac{(x+4)^2-8x}{x^2-16}:\frac{x^2+16}{5x-20}$ та знайдіть його значення, якщо $x=-3{,}9$.

8 Спростіть вираз $\frac{a^3+8b^3}{(a-b)^5}:\frac{4a^2b+16b^3-8ab^2}{(b-a)^5}$ та знайдіть його значення, якщо b становить 50 % від a.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- У Новій Зеландії працює готель The Hobbit Motel, що зовні нагадує домівки Фродо й Більбо з відомої епопеї «Володар перснів» Джона Р. Р. Толкіна (John Tolkien).
- У лондонському готелі Brown's Hotel народжувалася знаменита «Книга джунглів» відомого письменника Редьярда Кіплінга.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ВИГІДНА ПРОПОЗИЦІЯ»

Магазин є постійним клієнтом компанії з виготовлення та продажу мобільних телефонів. За умовами договору магазин закупив n телефонів за ціною q грн $(q<1500)$ на суму S грн. Якщо на суму S грн магазин закупить більш сучасні телефони за ціною $q \geqslant 1500$, то отримає бонус, відповідно до якого одержить телефонів у k разів більше, ніж закупив би на таку саму суму без урахування бонусу.

1. Запишіть вираз, за допомогою якого можна визначити кількість n телефонів, закуплених магазином за умовами договору.
2. Визначте, скільки телефонів за ціною 1150 грн може закупити магазин на суму 391 000 грн.
3. Визначте, скільки телефонів за ціною 1800 грн може закупити магазин на суму 396 000 грн, якщо $k=1{,}2$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Додаток DROTR (Droid Translator) — перший сервіс із функцією автоматичного синхронного перекладу голосових і відеодзвінків. Його автор — український бізнесмен і винахідник Олександр Коновалов. Цей сервіс, що є аналогом популярних Skype і Viber, на відміну від них підтримує 30 мов (станом на лютий 2016 р.).

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Виконайте множення:

1) $\frac{c}{7}\cdot\frac{8}{c}$; 2) $\frac{15}{b^3}\cdot\frac{b}{3}$; 3) $\frac{20b}{3y^4}\cdot\frac{27y}{10b}$; 4) $\frac{26a}{31b^3}\cdot\frac{62b^2}{13a^5}$.

Див. приклад 1

2 Виконайте дії:

1) $\frac{7}{9+y}\cdot\frac{9+y}{7}$; 3) $\frac{15a}{36-b^2}\cdot\frac{b-6}{3}$;

2) $\frac{x^3}{m-n}\cdot\frac{m-n}{10x^3}$; 4) $\frac{5m-5n}{n^2-m^2}\cdot\frac{n^2+mn}{10}$ при $m\neq\pm n$.

Див. приклад 2

3 Виконайте піднесення до степеня:

1) $\left(\frac{x}{8y}\right)^2$; 2) $\left(\frac{3c^4}{d^7}\right)^3$; 3) $\left(\frac{5a^8}{2x^9y}\right)^4$; 4) $\left(\frac{9x^2y^9}{8m^{30}n^6}\right)^3$.

4 Подайте у вигляді дробу вираз:

1) $\left(-\frac{x}{2y}\right)^4$; 2) $\left(-\frac{c^2}{3d^6}\right)^3$; 3) $\left(-\frac{9xy^4}{8a^7}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{2k^3n^{14}}{3x^4y^5}\right)^5$.

Див. приклад 3

5 Виконайте дії:

1) $\frac{1}{m^8}\cdot\left(\frac{m}{n}\right)^8$; 3) $\left(\frac{c^3}{d}\right)^3\cdot\frac{(cd)^3}{c^8}$;

2) $\frac{x^7}{y}\cdot\left(\frac{y^2}{x^5}\right)^2$; 4) $\left(-\frac{4a^3}{x^4y}\right)^5\cdot\left(-\frac{xy^3}{4a^5}\right)^3$.

Див. приклад 4

Див. приклад 5

Див. приклад 6

ДОСЛІДЖУЄМО

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Перші роликові ковзани виникли на початку XVIII ст.
- У 1760 р. Жозеф Мерлін, винахідник бельгійського походження, сконструював ролики з металевими колесами та продемонстрував їх на одному з лондонських балів. Ковзання по паркету Мерлін супроводжував грою на скрипці.

“Жодне людське дослідження не може називатися дійсною наукою, якщо воно не пройшло через математичні докази.”

Леонардо да Вінчі

6 Виконайте ділення, визначивши область допустимих значень виразу:

1) $\frac{6}{x}:\frac{2}{c}$;

2) $\frac{c}{d^6}:\frac{c^3}{d^9}$;

3) $\frac{a}{20m^4}:\frac{a^7}{4m}$;

4) $\frac{6c^7}{25x^3y^8}:\frac{27c}{20x^4y^6}$.

7 Виконайте дії:

1) $\frac{y-8}{k}:\frac{y-8}{k^2}$;

2) $\frac{12x^4}{10-y}:\frac{6x^8}{y-10}$;

3) $\frac{9y}{(y-11)^2}:\frac{36y^3}{(11-y)^3}$;

4) $\frac{25k-5m}{x-y}:\frac{125k^2-5m^2}{(y-x)^2}$.

8 Прокат однієї пари роликових ковзанів на майданчику коштує n грн за годину. За умови відвідування групою, що складається з k осіб $(k>10)$, вартість прокату роликів за годину для всієї групи знижується на 8 %. Визначте:

1) ціну прокату однієї пари роликів з урахуванням знижки, якщо $n=50$ грн;
2) скільки заплатить група з 12 осіб за 2 год прокату роликів, якщо $n=50$ грн;
3) вартість прокату роликів для 7 осіб упродовж 2 год за умови підвищення ціни прокату на 10 %, якщо правила надання знижки не змінилися.

9 Виразіть:

1) b через a, якщо $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$;

2) x через y, якщо $\frac{x}{y}=\frac{4}{5}$;

3) y через k, m, x, якщо $\frac{x}{y}=\frac{k}{3m}$;

4) m через k, x, y, якщо $\frac{4x}{y}=\frac{k}{m}$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

1 Виконайте дії:

1) $\left(\frac{2}{7}+\frac{5}{7}\right)\cdot\frac{12}{4}$;

2) $\left(\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{8}{5}$;

3) $\left(2-\frac{3}{2}\right):\frac{5}{2}$.

2 Обчисліть:

1) $\frac{3-4}{\frac{1}{2}}$;

2) $\frac{1}{\frac{1}{6}}-3$;

3) $\frac{1}{1-\frac{2}{5}}$;

4) $\frac{1}{1-\frac{1}{1-3}}$.

§6 ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ВИРАЗІВ

ВЧОРА — Ви зводили громіздкі числові вирази, що містять звичайні та десяткові дроби, до простіших та обчислювали їх значення

СЬОГОДНІ — Ви навчитеся перетворювати раціональні вирази та зводити їх до простіших, що тотожно дорівнюють їм

ЗАВЖДИ — Ви зможете грамотно планувати свої витрати, складати бюджет і економити власні кошти

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

У боулінг-клубі ціна однієї доріжки становить m грн за годину. У неділю в клубі діє акція для школярів: з 11:00 до 15:00 ціна однієї доріжки за годину знижується на 40 %. Скільки коштів зекономить кожний з учнів, якщо група з n школярів замовить одночасно 5 доріжок з 12:00 до 14:00?

Розв'язання

Оскільки ціна однієї доріжки — m грн за годину, то за 5 доріжок слід було б заплатити $5m$ грн за 1 год, а кожний учень мав би заплатити $\frac{2\cdot 5m}{n}$ грн за 2 год. За умовою акції ціна доріжки за годину становить $\left(m-(40\ \%\ \text{від}\ m)\right)$ грн, тобто $m-0{,}4\cdot m=0{,}6m$ (грн). Отже, учні мають заплатити $(2\cdot 5\cdot 0{,}6m)$ грн за 5 доріжок. Тоді кожний учень має заплатити $\frac{2\cdot 5\cdot 0{,}6m}{n}$ грн. Щоб визначити, скільки коштів зекономить кожний з учнів, слід виконати дію $\frac{2\cdot 5m}{n}-\frac{2\cdot 5\cdot 0{,}6m}{n}$.

Розв'язувана задача зводиться до перетворення раціонального виразу, що містить арифметичні дії.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Найбільший у світі боулінг-центр розташований в Японії. Він має 141 доріжку.
- Археологічні розкопки свідчать про те, що прототипи куль і кегель існували ще в Давньому Єгипті.
- Боулінг вважається кандидатом в олімпійські види спорту.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У попередніх класах ви обчислювали значення числових виразів, виконуючи певні арифметичні дії, і завжди отримували конкретний числовий результат. Нагадаємо, що під час знаходження числового значення виразу найважливішим є дотримання послідовності виконання дій.

Під час перетворення раціональних виразів також важливо пам'ятати про дотримання чіткого порядку дій. Раціональний вираз перетворюється на вираз, що тотожно дорівнює йому, за допомогою арифметичних дій, які ви вже вивчили.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- раціональний дріб
- область допустимих значень раціонального дробу
- додавання й віднімання раціональних дробів
- множення й ділення раціональних дробів
- піднесення дробу до степеня
- скорочення дробів

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Перш ніж перетворювати раціональний вираз, визначте порядок дій!

Слід пам'ятати, що тотожні перетворення виконуються на області допустимих значень виразу і, як правило, результатом таких перетворень є раціональний дріб, а не число. Але в разі підстановки числових значень замість змінних, що входять у вираз, остаточний результат перетворень набуватиме конкретного числового значення.

ПРИКЛАД 1

Виконайте дії: $\left(\frac{a}{b^2}-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{4ab}{a-b}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область допустимих значень змінних, що входять у вираз.	ОДЗ: $\begin{cases} a\neq 0, \\ b\neq 0, \\ a\neq b \end{cases}$
КРОК 2	Виконаємо дію віднімання дробів у дужках.	$\frac{a^{\backslash a}}{b^2}-\frac{1^{\backslash b^2}}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab^2}$
КРОК 3	Розкладемо на множники чисельник отриманого на кроці 2 дробу, ураховуючи, що наступною є дія множення дробів.	$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
КРОК 4	Виконаємо множення дробів і скоротимо результат.	$\frac{(a-b)(a+b)\cdot 4ab}{ab^2\cdot(a-b)}=\frac{4(a+b)}{b}$

Відповідь: $\frac{4(a+b)}{b}$.

ПАМ'ЯТАЙТЕ!

Тотожні перетворення раціональних виразів можна виконувати тільки на області їх допустимих значень.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Виконайте дії:

1) $\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{a}{6}$;

2) $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{3b}\right)\cdot\frac{b}{8}$;

3) $\left(\frac{a}{b}+\frac{2}{a}\right)\cdot\frac{a^2}{a^2+2b}$;

4) $\left(\frac{x}{y}-\frac{3}{x}\right)\cdot\frac{y^3}{x^2-3y}$;

5) $\left(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2xy}{x+y}$;

6) $\left(\frac{1}{m}-\frac{m}{n^2}\right)\cdot\frac{3mn}{n-m}$;

7) $\left(\frac{a}{b^2}-\frac{4}{b}+\frac{4}{a}\right)\cdot\frac{ab^2}{a^2-4b^2}$;

8) $\left(\frac{m}{n^2}+\frac{6}{n}+\frac{9}{m}\right)\cdot\frac{mn^2}{m^2-9n^2}$.

ПРИКЛАД 2

Спростіть вираз $\left(1-\frac{m+n}{n-m}\right):\frac{1}{m-n}$, визначивши його ОДЗ.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо ОДЗ виразу; зауважимо, що чисельник дробу, на який ми ділимо вираз у дужках, не дорівнює нулю.	ОДЗ: $m \neq n$
КРОК 2	Виконаємо дію в дужках, пам'ятаючи, що: 1) $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$; 2) $-(a-b)=b-a$.	$1-\frac{m+n}{n-m}=1^{\backslash n-m}-\frac{m+n}{n-m}=$ $=\frac{n-m-m-n}{n-m}=\frac{-2m}{n-m}=\frac{2m}{m-n}$
КРОК 3	Виконаємо дію ділення дробів.	$\frac{2m}{m-n}:\frac{1}{m-n}=\frac{2m(m-n)}{m-n}=2m$

Відповідь: $2m$ при $m \neq n$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Спростіть вираз:

1) $\left(1+\frac{1}{6a}\right):\frac{1}{2a}$;
2) $\left(1-\frac{1}{8x}\right):\frac{1}{4x}$;
3) $\left(2-\frac{a-1}{2a}\right):\frac{4}{a}$;
4) $\left(3-\frac{x+2}{5x}\right):\frac{5}{x}$;
5) $\left(1-\frac{a+b}{b-a}\right):\frac{2}{a-b}$;
6) $\left(\frac{x+y}{x-y}-1\right):\frac{1}{y-x}$;
7) $\left(\frac{3a-5}{3a+5}-2\right):\frac{a+5}{9a+15}$;
8) $\left(2-\frac{6x+1}{6x-1}\right):\frac{2x-1}{2-12x}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Вибір способу розв'язання залежить від конкретного прикладу і має бути спрямований на раціональне розв'язання. Головне — не порушувати порядок арифметичних дій.

ПРИКЛАД 3

Доведіть тотожність $\left(\frac{a}{m+a}+\frac{a^2+m^2}{m^2-a^2}-\frac{a}{m-a}\right):\frac{m+1}{2}=\frac{2}{m+1}$ при $m \neq -1$, $m \neq \pm a$.

Розв'язання

Крок	Зміст і результат дії
КРОК 1	Умови $m \neq -1$ і $m \neq \pm a$ є такими, за яких існують усі вирази, що входять у рівність. Отже, ОДЗ: $m \neq -1$, $m \neq \pm a$.
КРОК 2	Виконаємо додавання та віднімання дробів у дужках: $\frac{a^{\backslash m-a}}{m+a}+\frac{a^2+m^2}{(m-a)(m+a)}-\frac{a^{\backslash m+a}}{m-a}=$ $=\frac{a(m-a)+a^2+m^2-a(m+a)}{(m-a)(m+a)}=\frac{am-a^2+a^2+m^2-am-a^2}{(m-a)(m+a)}=\frac{m^2-a^2}{(m-a)(m+a)}=\frac{m^2-a^2}{m^2-a^2}=1$.
КРОК 3	Виконаємо дію ділення $1:\frac{m+1}{2}=\frac{2}{m+1}$. Тотожність доведено.

ПРИКЛАД 4

Спростіть вираз $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{m-1}}}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що в таких «багатоповерхових» дробах доцільно виконувати дії, починаючи «з кінця». Тому першою дією виконаємо додавання.	$1^{\backslash m-1}+\dfrac{1}{m-1}=\dfrac{m-1+1}{m-1}=\dfrac{m}{m-1}$, причому $m\neq 1$
КРОК 2	Виконаємо наступну дію: ділимо 1 на отриманий дріб, тобто одержуємо дріб, обернений до даного.	$\dfrac{1}{\dfrac{m}{m-1}}=\dfrac{m-1}{m}$, причому $m\neq 0$
КРОК 3	Наступною дією виконаємо віднімання.	$1^{\backslash m}-\dfrac{m-1}{m}=\dfrac{m-(m-1)}{m}=\dfrac{m-m+1}{m}=\dfrac{1}{m}$
КРОК 4	Останньою дією знайдемо дріб, обернений до даного.	$1:\dfrac{1}{m}=m$, причому $m\neq 0$

Відповідь: m при $m\neq 0$, $m\neq 1$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 У завданнях 1–4 доведіть тотожність:

1) $\left(\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{y}{x-y}\right):\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{3}{x-1}$ при $x\neq y$, $x\neq 1$;

2) $\left(\dfrac{a}{3a-3b}-\dfrac{2}{a-b}\right):\dfrac{a-6}{3}=\dfrac{1}{a-b}$ при $a\neq b$, $a\neq 6$;

3) $\left(\dfrac{a}{a+4}+\dfrac{a}{a-4}+\dfrac{a^2+16}{16-a^2}\right):\dfrac{a-2}{2}=\dfrac{2}{a-2}$ при $a\neq\pm 4$, $a\neq 2$;

4) $\left(\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{x}{4-x^2}-\dfrac{2}{x^2+4x+4}\right):\dfrac{x}{(x+2)^2}=-\dfrac{4}{x-2}$ при $x\neq\pm 2$, $x\neq 0$;

У завданнях 5–8 спростіть вираз:

5) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{k}}-1$;

6) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}$;

7) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x-1}}$;

8) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{n-1}+1}-1}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У 60-ті роки минулого століття в головному мозку людини було виявлено особливі нервові клітини. Учені назвали їх нейронами тотожності й новизни.

Нейрони тотожності впізнають знайомі предмети, звуки, відчуття, щоденні події, ритм життя. Якщо в навколишньому середовищі довгий час нічого не змінюється, настає виснаження цих нейронів. Тоді говорять, що людина втратила інтерес.

У цей момент нейрони новизни, прагнучи діяльності, страждають від нестачі інформації.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Визначте, чи є правильним твердження:

1) $1-\frac{m}{m+n}=\frac{4}{m+n}$ при $m\neq -n$;

2) $\left(x-\frac{x^2}{x+y}\right)(x+y)=xy$ при $x\neq -y$.

2 Виконайте дії та спростіть вираз:

1) $\frac{a}{3}-\frac{a^2-9}{9}:\frac{a+3}{3}$;

2) $\left(c+x-\frac{2cx}{x+c}\right)\cdot\frac{c^2-x^2}{3c^2+3x^2}$.

3 Виконайте дії:

1) $\left(\frac{n}{m}-\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{3mn}{n^2-m^2}$;

2) $\left(\frac{2a}{b}+\frac{b}{2a}\right):\frac{8a^2+2b^2}{4ab}$.

4 Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{3-m}{m+3}-\frac{m+3}{3-m}\right)\cdot\frac{m^2-9}{42m}$;

2) $\left(\frac{x}{x-3}-\frac{2}{x+3}\right):\frac{4x^2+4x+24}{x^2-9}$.

5 Складіть раціональний вираз до задачі та спростіть його.

Власна швидкість руху блакитної акули становить 19 км/год. Визначте час (у год), який витратить акула на подолання відстані 25 км за течією та повернення назад (тим самим шляхом), якщо швидкість течії v км/год.

6 Виконайте дії:

1) $\frac{5}{5a-2}-\frac{2}{a+3}:\frac{5a-2}{9a^2-1}$;

2) $\frac{a^2-b^2}{2a^2b^2}\cdot\frac{4ab}{a-b}-\frac{a+b}{ab}$.

7 Спростіть вирази та знайдіть їх значення при заданих значеннях змінних:

1) $\left(4m-\frac{12m}{m-2}\right):\left(m+\frac{8m-25}{2-m}\right)$, $m=-\frac{1}{3}$;

2) $\frac{25a^2-9}{4a^2+4a+1}:\frac{5a-3}{2a+1}-\frac{7a+4}{1+2a}$, $a=-1$;

3) $(a+b):\frac{a^3-ab^2+a^2b-b^3}{b^2}-\frac{a^2}{a^2-b^2}$, $a=-1$, $b=2$;

4) $\left(\frac{1}{y-1}-\frac{y+1}{1+y+y^2}\right):\left(1+\frac{9}{y^3-1}\right)$, $y=-2$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Старовинна задача з «Арифметики» Леонтія Магницького. Один чоловік вирішив віддати сина вчитися. Він запитав викладача, скільки всього учнів у нього вже є. Учитель відповів: «Якщо в клас додати стільки ж людей, скільки вже є, і ще половину від цього числа, та ще чверть, і до них додати твого сина, то в мене буде рівно 100 учнів». Скільки ж учнів було у викладача?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

В основному акули пересуваються з крейсерською швидкістю приблизно 8 км/год. Але під час полювання або нападу середньостатистична акула прискорюється до 19 км/год. Акула-мако здатна розвинути швидкість до 60 км/год. Залежно від виду в пащі акули може бути від 200 до 15 000 зубів, розташованих у кілька рядів. Сила стиснення щелеп чотириметрової акули — близько 20 кН.

Теренс Тао — видатний австралійський математик. Має найвищий коефіцієнт інтелекту IQ у світі — 230. У 13 років виграв золоту медаль на Міжнародній математичній олімпіаді, ставши наймолодшим її призером за всю історію. У 24 роки став наймолодшим професором Каліфорнійського університету в Лос-Анджелесі. У 2006 р. нагороджений медаллю Філдса — найвищою нагородою в галузі математики.

8 Визначте, чи є тотожно рівними вирази:

1) $\frac{3a}{a-4}-\frac{a+2}{2a-8}\cdot\frac{96}{a^2+2a}$ і $3+\frac{12}{a}$;

2) $\frac{1}{x+y}\cdot\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{3x^2y^2}{x-y}+x^2+y^2-xy$ і $(x+y)^2$.

9 Спростіть вираз:

1) $\frac{m-2}{4m^2+16m+16}:\left(\frac{m}{2m-4}-\frac{m^2+4}{2m^2-8}-\frac{2}{m^2+2m}\right)$;

2) $\left(\frac{1}{t+1}-\frac{3}{t^3+1}+\frac{3}{t^2-t+1}\right)\left(t-\frac{2t-1}{t+1}\right)$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Після виконання ділення $\frac{m-1}{k}:\frac{m-1}{k}$ отримаємо вираз, значення якого дорівнює 1.

2) Значення виразу $\frac{35x-5y}{y-7x}$ при $y\neq 7x$ є цілим числом.

3) Значення виразу $\frac{x^2-25}{5}\cdot\frac{x+5}{2x-10}$ при $x\neq 5$ є невід'ємним числом.

4) Вираз $\frac{32-2x^2}{4-x}$ тотожно дорівнює виразу $8+2x$ при $x\neq 4$.

5) Якщо $x+y=\frac{a^2+8}{6}$ і $x-y=\frac{3}{a^2+8}$, то $x^2-y^2=\frac{1}{2}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Регулярні зайняття фізкультурою покращують розумову діяльність, зміцнюють імунітет, поліпшують настрій. Люди з доброю фізичною підготовкою рідше хворіють і більш успішні в житті.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ВІЛЬНИЙ ЧАС»

Віка проводить на стадіоні 60 хв у день. Відомо, що t_1 хв вона витрачає на біг, а решту часу — на вправи. Під час бігу Віка витрачає 10 калорій за 1 хв, а під час виконання вправ — 15 калорій за 1 хв.

1 Запишіть і спростіть вираз, за допомогою якого можна визначити, скільки калорій витрачає Віка за годину занять.

2 Обчисліть значення отриманого виразу, якщо $t_1=20$ хв.

3 Три рази на тиждень Віка займається плаванням, витрачаючи на нього t_2 год на день. Скільки відсотків часу витрачає Віка щодня на вправи порівняно із щоденним часом, відведеним на плавання? Обчисліть цей відсоток, якщо $t_2=1\frac{1}{3}$ год.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

1 $\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{3b}\right)\cdot\frac{b}{2}=$

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3b}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2b}$

2 $\left(2-\frac{1}{a}\right):\frac{2a-1}{a}=$

А	Б	В	Г
$\left(\frac{2a-1}{a}\right)^2$	1	0	$\left(\frac{a}{2a-1}\right)^2$

3 $\left(\frac{5}{x}+\frac{5}{x}\right)\left(\frac{3}{y}-\frac{3}{y}+\frac{x}{5}\right)=$

А	Б	В	Г
2	10	3	5

4 $\frac{1}{1-\frac{9}{y}}=$

А	Б	В	Г
$\frac{y}{9-y}$	$\frac{9-y}{y}$	$\frac{y-9}{y}$	$\frac{y}{y-9}$

5 У залі кінотеатру m рядів. У кожному ряду розміщено однакову кількість крісел. Знайдіть кількість крісел у кожному ряду, якщо всього в залі n крісел.

А	Б	В	Г
$\frac{n}{m}$	$n-m$	$m\cdot n$	$\frac{m}{n}$

6 До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Г), якщо $x\neq 0$, $x\neq\pm 1$.

1	$\left(1-\frac{2}{x+1}\right)\cdot\frac{x(x+1)}{3x-3}$	А	$\frac{x}{3}$
2	$\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right):\frac{2x^2}{3x^2-3}$	Б	$3x$
		В	$\frac{3}{x}$
3	$\frac{3x^2+6x+3}{(x+1)^2}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x+1}+1\right)$	Г	$\frac{3}{x+1}$

7 Спростіть вираз:

$\left(\frac{8}{x+8}+\frac{64+x^2}{x^2-64}-\frac{8}{x-8}\right):\left(\frac{x+8}{8}-1\right)$. Знайдіть значення цього виразу, якщо $x=1{,}25$.

8 Доведіть тотожність:

$\left(\frac{20y}{y^2-25}+\frac{2y}{y+5}-\frac{2y}{15-3y}\right):\frac{2y}{3y-15}=4$, якщо $y\neq\pm 5$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Виконайте дії:

1) $\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{6y}\right)\cdot\frac{y}{5}$;

2) $\left(\frac{a}{b}-\frac{6}{a}\right)\cdot\frac{a^4}{a^2-6b}$;

3) $\left(\frac{1}{k}-\frac{k}{m^2}\right)\cdot\frac{7km}{m-k}$;

4) $\left(\frac{k}{c^2}+\frac{8}{c}+\frac{16}{k}\right)\cdot\frac{c^2k}{16c^2-k^2}$.

Див. приклад 1

Див. приклад 2

2 Спростіть вираз:

1) $\left(1-\frac{1}{12y}\right):\frac{1}{3y}$;

2) $\left(4-\frac{y+3}{4y}\right):\frac{4}{y}$;

3) $\left(\frac{c+n}{n-c}-1\right):\frac{4}{c-n}$;

4) $\left(2-\frac{3y+7}{3y-7}\right):\frac{y-7}{28-12y}$.

Див. приклад 3

3 Доведіть тотожність:

1) $\left(\frac{c}{c-n}-\frac{n}{c-n}\right):\frac{n-2}{2}=\frac{2}{n-2}$, якщо $c\neq n$, $n\neq 2$;

2) $\left(\frac{m}{2m-2n}-\frac{4}{m-n}\right):\frac{m-8}{2}=\frac{1}{m-n}$, якщо $m\neq n$, $m\neq 8$;

3) $\left(\frac{k}{k+2}+\frac{k^2+4}{4-k^2}+\frac{k}{k-2}\right):\frac{k-1}{4}=\frac{4}{k-1}$, якщо $k\neq\pm 2$, $k\neq 1$;

4) $\left(\frac{1}{x-6}-\frac{6}{x^2-36}-\frac{x}{x^2-12x+36}\right):\frac{x}{(x-6)^2}=-\frac{12}{x+6}$, якщо $x\neq\pm 6$, $x\neq 0$.

Див. приклад 4

4 Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{\frac{1}{y}}-2$;

2) $\frac{1}{1-\frac{2}{y}}$;

3) $\frac{1}{1-\frac{1}{1-k}}$;

4) $\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{n+1}-1}+1}$.

ДОСЛІДЖУЄМО

5 **Задача «Ювілейна акція».** На честь семиріччя компанії Charisma Fashion Group у бутику діє акція: у разі купівлі однієї одиниці будь-якого товару надається знижка 20 %, а за умови придбання двох і більше одиниць товару — знижка 30 % на всю суму покупки. Покупець вибрав рюкзак, ціна якого без урахування знижки дорівнює 340 грн.

1) Скільки заплатить покупець за цей рюкзак під час дії акції?
2) На скільки гривень менше заплатить покупець за цей рюкзак, якщо скористається знижкою?
3) Скільки заплатить покупець за два такі рюкзаки під час дії акції?
4) На скільки гривень менше заплатить покупець за ці два рюкзаки, якщо скористається знижкою?
5) Скільки потрібно купити таких рюкзаків під час дії акції, щоб знижка становила 1020 грн?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Наприкінці XIX ст. американець Френк Вулворт першим використав знижки на певні групи товарів, розпродаж, цінники та багато іншого. Магазини, у яких Вулворт втілив ці ідеї, отримали назву «супермаркети».

«Освіта є складним, багатогранним і кропіткім процесом, і навіть для обдарованої людини цей процес не буде легшим.»

Теренс Тао

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розв'яжіть рівняння:

1) $3x=24$;

2) $5x=-30$;

3) $6-4x=0$;

4) $x^2-36=0$;

5) $(5x+38)(100+x^2)=0$;

6) $(x^2+49)(34-10x)=0$.

§7 РАЦІОНАЛЬНІ РІВНЯННЯ. РІВНОСИЛЬНІ РІВНЯННЯ

ВЧОРА — Ви розв'язували лінійні рівняння, використовуючи рівносильні перетворення рівнянь, а також текстові задачі за допомогою лінійних рівнянь

СЬОГОДНІ — Ви навчитеся розв'язувати раціональні рівняння, використовуючи тотожні перетворення виразів

ЗАВЖДИ — Ви зможете складати математичні моделі реальних життєвих ситуацій, знаходити оптимальні фінансові рішення

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

«ВИРОБНИЦТВО БАЙКІВ»

Друзі, які захоплюються велотуризмом, вирішили відкрити невелике підприємство з виробництва гірських велосипедів (байків). Після проведення аналізу вони дійшли таких висновків:

1) *фіксовані витрати* на виробництво (оренда приміщення та спеціалізованого устаткування, заробітна плата майстрам, витрати на маркетинг і рекламу) становитимуть 56 000 грошових одиниць (г. о.) на місяць;
2) *змінні витрати* становитимуть 140 г. о. на виготовлення одного байка (окремі деталі, дизайн, упаковка);
3) для конкурентоспроможності байка на ринку та отримання підприємством доходу *середні витрати* на виробництво одного байка мають становити не більше ніж 180 г. о.

Визначте, скільки байків необхідно виготовити за місяць, щоб середні витрати на виробництво одного байка становили 180 г. о.

Розв'язання

Нехай x — кількість байків, які необхідно виготовити за місяць. Якщо на виготовлення одного байка витрачається 140 г. о., то на виготовлення x байків буде витрачено $(140 \cdot x)$ г. о.

Загальні витрати на виготовлення x байків за місяць складаються із суми *фіксованих* (56 000 г. о.) і *змінних* ($140 \cdot x$ г. о.) витрат, тобто $(140 \cdot x + 56\,000)$ г. о.

Середні витрати на виготовлення одного байка розраховуються як частка від ділення *загальної суми витрат* на *кількість байків*: $\frac{140 \cdot x + 56\,000}{x}$ г. о.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Амстердам вважають велосипедною столицею Європи. У цьому місті більше ніж 400 км велосипедних доріжок, обладнаних спеціальними знаками й світлофорами.
- Популярність велосипедів рік у рік зростає. Сьогодні у світі налічується більш ніж 1 млрд велосипедів. А останнім часом щорічно виробляється близько 100 млн велосипедів.
- Ізраїльський дизайнер та інженер Іцгар Гафні винайшов безпечний для навколишнього середовища велосипед, виготовивши його з картону!

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- раціональні рівняння
- цілі рівняння
- дробово-раціональні рівняння
- рівносильні рівняння
- рівносильні перетворення
- розв'язок (корінь) рівняння
- область допустимих значень рівняння
- математична модель задачі

Оскільки середні витрати на виготовлення одного байка мають становити 180 г. о., можемо скласти рівняння:

$$\frac{140 \cdot x + 56\,000}{x} = 180.$$

Ми отримали рівняння, у якому ліва частина є раціональним виразом. У цьому параграфі ви дізнаєтеся, як розв'язують такі рівняння.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Нехай $P(x)$ і $Q(x)$ — раціональні вирази, залежні від змінної x. Якщо необхідно визначити, при яких значеннях змінної x ці вирази набувають рівних значень, то кажуть, що слід розв'язати рівняння $P(x) = Q(x)$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Рівняння називають **раціональним**, якщо його ліва й права частини є раціональними виразами.

Усі раціональні рівняння поділяють на цілі та дробові.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Рівняння називають **цілим** (або **цілим раціональним**), якщо ліва й права його частини є цілими раціональними виразами.

Рівняння називають **дробовим** (або **дробово-раціональним**), якщо хоча б одна з його частин є дробовим раціональним виразом.

ПРИГАДАЙТЕ!

Цілі вирази — вирази, що складені з чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення та ділення на відмінне від нуля число.

Наприклад, цілими є рівняння: $5 \cdot x = -10$; $3x + 8 = 0$; $-0{,}2x - 11 = 9x + 3{,}5$; $-2x^2 + 16 = 0$; $\frac{2x-9}{3} = 4 - \frac{x+7}{15}$.

Дробовими є рівняння: $\frac{1}{t} = 5$, $\frac{1}{3}x - \frac{2}{x} = 3$, $\frac{x^2-16}{2x} = 0$, $\frac{x-3}{x+2} = \frac{3x+7}{2+x}$, $-5y^2 - y + 3 = \frac{2}{y}$, тобто такі, у яких або ліва, або права, або обидві частини містять дробові вирази (тобто ділення на вираз зі змінною).

ПРИГАДАЙТЕ!

Розв'язати рівняння означає знайти всі його розв'язки або довести, що їх немає.

Для розв'язування раціональних рівнянь використовують відомі вам **рівносильні перетворення рівнянь**:

- перенесення доданків з однієї частини рівняння в іншу, при цьому знаки доданків змінюються на протилежні;
- додавання до обох частин рівняння одного й того самого числа або виразу, визначеного на всій ОДЗ рівняння (аналогічно й для віднімання);
- множення або ділення обох частин рівняння на одне й те саме число або вираз, визначений на всій ОДЗ рівняння.

Розв'язуючи лінійні рівняння, ви познайомилися з поняттям рівносильних рівнянь. Аналогічне поняття вводиться й для дробово-раціональних рівнянь.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Два дробово-раціональних рівняння називають **рівносильними**, якщо всі розв'язки першого рівняння є розв'язками другого, і навпаки, усі розв'язки другого рівняння є розв'язками першого. Рівносильними вважають і ті рівняння, які не мають розв'язків.

Розглянемо кілька способів розв'язування дробово-раціональних рівнянь.

Один із найпоширеніших способів — це зведення рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0 \end{cases}$$

Пригадаємо: дріб дорівнює нулю, якщо його чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля. Тобто рівняння $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$ зводиться до рівносильної системи $\begin{cases} P(x)=0, \\ Q(x)\neq 0. \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ — знак рівносильності

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Під час розв'язування дробово-раціональних рівнянь отримані значення змінної слід перевірити одним із двох способів:

1) знайти ОДЗ рівняння та визначити, чи входять в ОДЗ отримані значення;
2) здійснити безпосередню підстановку отриманих значень у початкове рівняння.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-9}{3x+9}=0$.

Розв'язання

Спосіб 1 (зведення до рівносильної системи)

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Скористаємося правилом рівності дробу нулю та складемо систему рівнянь.	$\begin{cases} x^2-9=0, \\ 3x+9\neq 0 \end{cases}$
КРОК 2	Розв'яжемо рівняння $x^2-9=0$. Для цього розкладемо ліву частину рівняння на множники та скористаємося правилом рівності добутку нулю.	$x^2-9=0$; $(x-3)(x+3)=0$; $x-3=0$ або $x+3=0$; $x=\pm 3$ — значення x, які можуть бути коренями рівняння

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 3	Визначимо, за яких умов знаменник початкового дробу не дорівнює нулю, тобто знайдемо ОДЗ рівняння.	$3x+9\neq 0$; $3x\neq -9$; $x\neq -3$
КРОК 4	Проаналізуємо, які з отриманих значень x задовольняють ОДЗ.	$\begin{cases} x=\pm 3, \\ x\neq -3 \end{cases}$
КРОК 5	Зробимо висновок: $x=-3$ не є коренем рівняння, отже, єдиний корінь рівняння $x=3$.	$x=-3$ не задовольняє ОДЗ, $x=3$ — корінь рівняння

Спосіб 2 (здійснення безпосередньої перевірки)

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Скористаємося правилом рівності дробу нулю (дріб може дорівнювати нулю лише у випадку, коли чисельник дорівнює нулю).	$x^2-9=0$
КРОК 2	Розв'яжемо рівняння $x^2-9=0$. Для цього розкладемо ліву частину рівняння на множники та скористаємося правилом рівності добутку нулю.	$x^2-9=0$; $(x-3)(x+3)=0$; $x-3=0$ або $x+3=0$, $x=\pm 3$ — значення x, які можуть бути коренями рівняння
КРОК 3	Виконаємо перевірку отриманих значень, підставивши їх безпосередньо в початкове рівняння. Виключимо ті корені рівняння, при яких знаменник лівої частини початкового рівняння дорівнює нулю.	1) При $x=-3$ маємо $\frac{(-3)^2-9}{3\cdot(-3)+9}=0$; $\frac{0}{0}=0$ (неправильно), тому $x=-3$ не є коренем рівняння. 2) При $x=3$ маємо $\frac{3^2-9}{3\cdot 3+9}=0$; $\frac{0}{18}=0$ (правильно), тому $x=3$ є коренем рівняння

Відповідь: 3.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-1}{x-6}=0$;
2) $\frac{x-8}{x+9}=0$;
3) $\frac{2x+4}{3x-6}=0$;
4) $\frac{5x-15}{2x+6}=0$;
5) $\frac{x^2-25}{2x+10}=0$;
6) $\frac{x^2-4}{9x-18}=0$;
7) $\frac{4x^2-4x+1}{4x^2-1}=0$;
8) $\frac{9x^2+12x+4}{9x^2-4}=0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

- $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$
- $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть дробово-раціональне рівняння $\frac{3y+4}{5-3y}=\frac{2y+1}{1-2y}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що область допустимих значень заданого рівняння складається з усіх раціональних чисел, крім $y=\frac{5}{3}$, $y=\frac{1}{2}$.	ОДЗ: $\begin{cases} y\neq\frac{5}{3}, \\ y\neq\frac{1}{2} \end{cases}$
КРОК 2	Скористаємося основною властивістю пропорції та розв'яжемо отримане рівняння.	$(3y+4)(1-2y)=(2y+1)(5-3y)$; $3y+4-6y^2-8y=10y+5-6y^2-3y$; $12y+1=0$; $y=-\frac{1}{12}$
КРОК 3	Ураховуючи ОДЗ рівняння, зробимо висновок.	$y=-\frac{1}{12}$ задовольняє ОДЗ, отже, є коренем рівняння

Відповідь: $-\frac{1}{12}$.

Висновок. У цьому прикладі набагато зручніше спочатку знайти ОДЗ рівняння, а потім отримане значення змінної узгодити з ОДЗ. Використання способу 2, а саме безпосередньої підстановки отриманого значення в початкове рівняння (див. приклад 1), ускладнить процес розв'язання, призвівши до громіздких обчислень.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x}{x-2}=\frac{x+1}{x-2}$;

2) $\frac{3x}{x+1}=\frac{x-4}{x+1}$;

3) $\frac{5x-13}{x-4}=\frac{1-2x}{4-x}$;

4) $\frac{2x-3}{1-x}=\frac{3x-2}{x-1}$;

5) $\frac{2x+9}{3-2x}=\frac{4x+3}{5-4x}$;

6) $\frac{3x+1}{3x-7}=\frac{5x+2}{5x+4}$;

7) $\frac{2x+1}{4x^2+3x}=\frac{8x-5}{16x^2-9}$;

8) $\frac{3x-2}{5x^2-4x}=\frac{15x+7}{25x^2-16}$.

СЛІД ПАМ'ЯТАТИ!

Найчастіше розв'язання дробово-раціональних рівнянь починають зі знаходження ОДЗ. Проте в кожному випадку вибір одного із зазначених способів перевірки залишається за вами. Вибирайте той спосіб, який полегшить розв'язання.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $\frac{3}{x+4}+x^2=16+\frac{3}{x+4}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що область допустимих значень заданого рівняння складається з усіх раціональних чисел, крім -4.	ОДЗ: $x \neq -4$
КРОК 2	Віднімемо від обох частин рівняння дріб $\frac{3}{x+4}$, визначений на ОДЗ. Отримаємо рівняння, рівносильне даному на ОДЗ.	$\begin{cases} x^2=16, \\ x \neq -4 \end{cases}$
КРОК 3	Розв'яжемо рівняння $x^2=16$.	$x^2-16=0$; $(x-4)(x+4)=0$; $x-4=0$ або $x+4=0$; $x=\pm 4$
КРОК 4	Перевіримо, чи належать отримані розв'язки області допустимих значень рівняння.	$x=-4$ не задовольняє ОДЗ, тому $x=4$ — єдиний розв'язок рівняння

Відповідь: 4.

Висновок. У цьому прикладі найзручнішим способом є саме віднімання від обох частин рівняння одного й того самого виразу, визначеного на ОДЗ. Перенесення доданків з однієї частини рівняння в іншу з подальшим зведенням усіх доданків до спільного знаменника ускладнить розв'язання. Тому цей спосіб розв'язання не є раціональним.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Перевірте перетворення й знайдіть помилку.

Дано: $a=b$

$$a^2=ab$$
$$a^2-b^2=ab-b^2$$
$$(a+b)(a-b)=b(a-b)$$
$$(a+b)=b$$
$$a+a=a$$
$$2a=a$$
$$2=1$$

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2}{x}+x=4+\frac{2}{x}$;

2) $x-\frac{6}{x}=9-\frac{6}{x}$;

3) $\frac{3}{x-2}+6x=12+\frac{3}{x-2}$;

4) $\frac{8}{x+6}-2x=12+\frac{8}{x+6}$;

5) $\frac{7}{x+5}+x^2=25+\frac{7}{x+5}$;

6) $x^2-\frac{2}{x-7}=49-\frac{2}{x-7}$;

7) $\frac{1}{x^2-16}+x^2+16=8x+\frac{1}{x^2-16}$;

8) $x^2+18x-\frac{3}{x^2-81}=-81-\frac{3}{x^2-81}$.

Ситуації у вашому житті ніколи не матимуть вигляд готових математичних формул, виразів, рівнянь. Тому дуже важливо навчитися будь-яку словесну (вербальну) задачу перекладати мовою математики, тобто створювати *математичну модель задачі*.

Математична модель може мати вигляд схеми, рисунка, таблиці, графіка тощо. Це дає можливість унаочнити умову (сюжет) задачі. Розглянемо на прикладі, як створити математичну модель текстової задачі та розв'язати задачу за допомогою рівняння.

СЛІД ЗНАТИ!

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть задачу за допомогою дробово-раціонального рівняння.

Чисельник звичайного нескоротного дробу на 2 менший від знаменника. Якщо знаменник початкового дробу збільшити вдвічі, а чисельник зменшити на 4, то дістанемо дріб, що дорівнює $\frac{1}{14}$. Знайдіть початковий дріб.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі у вигляді таблиці, що відображає її умову.

	Як було	Як має змінитися	Як стало
Чисельник	x	-4	$x-4$
Знаменник	$x+2$	$\times 2$	$2(x+2)$
Дріб	$\frac{x}{x+2}$		$\frac{x-4}{2(x+2)}=\frac{1}{14}$

Розв'яжемо покроково отримане дробово-раціональне рівняння $\frac{x-4}{2(x+2)}=\frac{1}{14}$.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо ОДЗ рівняння.	ОДЗ: $x \neq -2$
КРОК 2	Перенесемо дріб $\frac{1}{14}$ в ліву частину рівняння.	$\frac{x-4}{2(x+2)}-\frac{1}{14}=0$
КРОК 3	Виконаємо віднімання дробів із різними знаменниками в лівій частині рівняння.	$\frac{7(x-4)-(x+2)}{14(x+2)}=0$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Найпростіші види алгебраїчних рівнянь (рівняння першого й другого степенів) і навіть деякі спеціальні види рівнянь 3-го степеня математики вміли розв'язувати ще в Стародавньому Вавилоні приблизно 4000 років тому. У ті далекі часи, коли ще не було сучасної математичної символіки, учені записували і саме рівняння, і його розв'язування словами, а не формулами.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 4	Розкриємо дужки в чисельнику та розв'яжемо отримане рівняння.	$7x-28-x-2=0$; $6x-30=0$; $6x=30$; $x=5$
КРОК 5	Узгодимо отриманий корінь рівняння з ОДЗ.	$x=5$ задовольняє ОДЗ рівняння
КРОК 6	Повернемося до умови задачі та пригадаємо, що є шуканим в задачі.	Шуканим є початковий дріб $\frac{x}{x+2}$
КРОК 7	Підставимо значення $x=5$ у дріб $\frac{x}{x+2}$.	$\frac{x}{x+2}=\frac{5}{5+2}=\frac{5}{7}$

Відповідь: $\frac{5}{7}$.

Висновки:

1) Під час розв'язування задач за допомогою рівнянь слід пам'ятати, що ви не просто шукаєте корені рівняння, а розв'язуєте за допомогою рівняння задачу. Тому важливо пам'ятати, що саме є шуканим у задачі.
2) Значення коренів рівняння можуть задовольняти ОДЗ і не задовольняти умову задачі. Наприклад, у задачі значення $x=2{,}7$ задовольнило б ОДЗ, але не могло б бути чисельником звичайного дробу, оскільки число 2,7 не є натуральним.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Задача зі стародавнього індійського трактату. Одна п'ята частина бджолиного рою полетіла на лавандове поле, третя частина вирушила збирати нектар із квітів липи. Якщо взяти різницю цих чисел і помножити на три, то отримаємо кількість бджіл, що віддають перевагу акації.
Скільки всього було бджіл у вулику, якщо розлетілися всі, крім однієї? Спробуйте розв'язати цю задачу арифметичним способом, без допомоги рівняння.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Розв'яжіть задачу за допомогою дробово-раціонального рівняння.

1) Яке число треба відняти від знаменника дробу $\frac{24}{31}$, щоб отримати дріб, що дорівнює 3?
2) Яке число треба додати до чисельника й відняти від знаменника дробу $\frac{17}{31}$, щоб отримати дріб, що дорівнює $\frac{7}{9}$?
3) Чисельник звичайного нескоротного дробу на 3 менший від знаменника. Якщо знаменник початкового дробу збільшити в 4 рази, а чисельник зменшити на 7, то дістанемо дріб, що дорівнює $\frac{1}{44}$. Знайдіть початковий дріб.
4) Знаменник звичайного нескоротного дробу на 2 більший за чисельник. Якщо знаменник початкового дробу збільшити на 10, а чисельник — на 18, то сума початкового та отриманого дробів дорівнюватиме 2. Знайдіть початковий дріб.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+3}{x}=0$; 3) $\frac{(x-4)(x+2)}{x+2}=0$; 5) $\frac{(30-x)(15-3x)}{x-5}=0$;

2) $\frac{4-2x}{x+2}=0$; 4) $\frac{x^2-16}{5x+20}=0$; 6) $\frac{7-x}{x^2-14x+49}=0$.

2 Знайдіть корені рівняння:

1) $\frac{3t+11}{t}=2$; 4) $\frac{16-5x^2}{x}=-4x$; 7) $\frac{5y-12}{y-2}=\frac{4y+3}{y+2}$;

2) $\frac{15-x}{x}+1=0$; 5) $\frac{2y-3}{y+1}=\frac{6y+5}{3y+5}$; 8) $\frac{x-2}{x+2}=\frac{-x}{4-x}$.

3) $\frac{9x^2-24}{x}=3x$; 6) $\frac{3t-1}{t+2}=\frac{9t+2}{3t-1}$;

3 Визначте, чи є рівносильними рівняння:

1) $\frac{x^2}{x+6}=\frac{36}{6+x}$ і $x^2=36$; 3) $\frac{t^2+3t}{t^2-9}=0$ і $3t+t^2=0$;

2) $\frac{5}{y+1}=\frac{y-2}{y+1}$ і $2y-2=8$; 4) $\frac{m+7}{m^2+14m+49}=0$ і $m^2+9=0$.

4 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x+x^2}{x^2-9}=\frac{12+x^2}{x^2-9}$; 4) $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x}{4-x}=2$;

2) $\frac{5t+14}{t^2-25}=\frac{t^2+14}{25-t^2}$; 5) $\frac{4m-1}{m-2}+\frac{m+1}{m+2}=5$;

3) $\frac{6}{z}-\frac{3z+1}{z-2}=-3$; 6) $\frac{3}{x+2}-\frac{2x}{x-2}=\frac{16}{4-x^2}$.

5 Юрко та Оленка домовилися зустрітися в Палаці спорту на фестивалі робототехніки. Юрко вийшов із дому й пішки дістався місця зустрічі без запізнення. Оленка, яка живе на 800 м ближче до Палацу спорту, ніж Юрко, вийшла з дому на 12 хв пізніше за Юрка, але прийшла вчасно. Відомо, що Юрко та Оленка рухалися з однаковою швидкістю, а відстань від будинку Юрка до Палацу спорту становить 2 км. Користуючись умовою задачі:

1) складіть математичну модель у вигляді таблиці (див. приклад 4), якщо x хв — час, що витратив Юрко на дорогу;
2) складіть дробово-раціональне рівняння до задачі та розв'яжіть його;
3) запишіть у відповідь швидкість, із якою йшла Оленка.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Щовесни в Києві проводиться науково-технічний фестиваль «ROBOTICA». Щороку фестиваль збирає більше 500 талановитих, творчих, ерудованих дітей зі всієї України. Головна подія фестивалю — Всеукраїнська олімпіада з робототехніки, яка є відбірковим етапом до світової олімпіади World Robot Olympiad (WRO). У межах фестивалю проводяться конкурси роботів, архітектурні конкурси, виставки-конкурси LEGO-творчості. У 2015 і 2016 рр. учасники та гості фестивалю разом будували з кубиків конструктора LEGO величезну 3D-мапу України.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Дізнатися більше про науково-технічний фестиваль «ROBOTICA» ви можете за посиланнями:
http://robotica.in.ua/
http://vynahidnyk.org

Сер Тімоті Джон Бернерс-Лі (англ. Sir Timothy John Berners-Lee) — знаменитий британський учений, спеціаліст з інформатики, винахідник URI, URL, HTTP, HTML, Всесвітньої павутини World Wide Web (спільно з Робертом Кайо). Завдяки йому ми користуємося сьогодні Інтернетом. У 1999 р. комп'ютерного генія було включено до списку «Сто найвидатніших умів століття» (за версією журналу Time Magazine). У 2004 р. королева Великобританії посвятила Тіма Бернерса-Лі в лицарі.

6 Собаки Поллі й Доллі пробігли відстань 10 км. На подолання цієї дистанції Поллі витратила на 0,5 год менше, ніж Доллі. Визначте швидкість кожного собаки, якщо швидкість одного з них на 25 % більша від швидкості іншого.

7 Знайдіть усі цілі корені рівняння:

1) $\frac{4}{m^2-3m}-\frac{1}{m+3}=\frac{-m^2-2}{m^3-9m}$; 2) $\frac{48}{n^3-9n}+\frac{5}{n^2+3n}-\frac{1}{n+3}=0$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $\frac{m-n}{m+n}=0$, то $m=n$.

2) Коренем рівняння $\frac{x^2+3}{x^2+3}=1$ є будь-яке дійсне число.

3) Рівняння $\frac{1}{x}=0$ має лише один корінь $x=0$.

4) Якщо $9-2x=0$, то $\frac{9-2x}{x^2-4}=0$.

5) Відомо, що $b-3a=0$, $a>0$. Якщо a збільшити у 2 рази, то b збільшиться в 6 разів.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «CALL-ЦЕНТР»

У кол-центрі компанії на гарячій лінії працюють два оператори Назар і Олена, відповідаючи на запитання клієнтів по телефону. Назар у середньому обслуговує 10 клієнтів за 5 хв, Олена — у середньому 15 клієнтів за x хв. За одну годину оператори разом обслуговують у середньому 300 клієнтів. (Вважайте, що вхідні дзвінки надходять на гарячу лінію безперервно.)

1 Знайдіть продуктивність праці Назара (кількість клієнтів, яких він обслуговує за хвилину).

2 Запишіть вираз, за яким можна визначити:

1) продуктивність праці Олени;

2) спільну продуктивність праці Назара й Олени.

3 Складіть рівняння до задачі для визначення x.

4 Визначте x.

5 Визначте, скільки клієнтів може обслужити Олена з 10:00 до 11:30.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Для ефективної організації роботи кол-центру та прогнозування його завантаження використовують теорію масового обслуговування. Математичні моделі дозволяють визначити оптимальну кількість операторів для обслуговування клієнтів.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 7

1 Розв'яжіть рівняння $\frac{x+4}{x-3}=0$.

А	Б	В	Г
3	−4	4	−3

2 Розв'яжіть рівняння $\frac{6x}{x+1}=\frac{x}{x+1}$.

А	Б	В	Г
6	5	1	0

3 Розв'яжіть рівняння $\frac{x^2-9}{5x-15}=0$.

А	Б	В	Г
Коренів немає	±3	−3	3

4 Розв'яжіть рівняння $\frac{2}{x-1}+3x=3+\frac{2}{x-1}$.

А	Б	В	Г
Коренів немає	1	2	3

5 Перший паркінг розрахований на m автівок, а другий — на n автівок $(n>m)$. Перший паркінг планується розширити на x паркомісць, щоб усього паркомісць на першому паркінгу стало втричі більше, ніж на другому. Виберіть правильну рівність.

А	Б	В	Г
$\frac{m+x}{n}=3$	$\frac{n+x}{m}=3$	$\frac{m}{n}=3x$	$\frac{n}{m}=3x$

6 Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів (А–Г).

1	$\frac{x(x-1)(x+2)}{x+1}=0$	А	Жодного
2	$\frac{3x-5}{10-6x}=0$	Б	Один
3	$x^2+\frac{6}{x-2}=\frac{6}{x-2}+4$	В	Два
		Г	Три

7 Розв'яжіть рівняння $\frac{5x+3}{2x^2-7x}=\frac{10x-8}{4x^2-49}$.

8 Знайдіть число, яке треба додати до чисельника та відняти від знаменника дробу $\frac{11}{37}$, щоб отримати дріб, що дорівнює $\frac{5}{11}$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+5}{x-10}=0$; 3) $\frac{x^2-1}{6x+6}=0$; 5) $\frac{9x^2+6x+1}{9x^2-1}=0$;

2) $\frac{3x+18}{5x-30}=0$; 4) $\frac{x^2-49}{4x-28}=0$; 6) $\frac{4x^2-20x+25}{4x^2-25}=0$.

Див. приклад 1

2 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4x}{x-4}=\frac{x+9}{x-4}$; 3) $\frac{2x-5}{2x+1}=\frac{7x-3}{7x-6}$;

2) $\frac{6x-13}{3-x}=\frac{2x-11}{x-3}$; 4) $\frac{6x+1}{2x^2-7x}=\frac{12x-5}{4x^2-49}$.

Див. приклад 2

Див. приклад 3

3 Розв'яжіть рівняння:

1) $x-\frac{5}{x}=7-\frac{5}{x}$;

2) $4x-\frac{9}{x-6}=24-\frac{9}{x-6}$;

3) $x^2-\frac{9}{x+6}=36-\frac{9}{x+6}$;

4) $x^2+36-\frac{7}{36-x^2}=12x-\frac{7}{36-x^2}$.

Див. приклад 4

4 Розв'яжіть задачу за допомогою дробово-раціонального рівняння.

1) Яке число треба відняти від знаменника дробу $\frac{36}{37}$, щоб отримати дріб, що дорівнює 4?

2) Яке число треба додати до чисельника й відняти від знаменника дробу $\frac{13}{32}$, щоб отримати дріб, що дорівнює $\frac{4}{5}$?

3) Чисельник звичайного нескоротного дробу на 6 менший від знаменника. Якщо знаменник початкового дробу збільшити в 7 разів, а чисельник збільшити на 2, то дістанемо дріб, що дорівнює $\frac{1}{11}$. Знайдіть початковий дріб.

4) Знаменник звичайного нескоротного дробу на 3 більший за його чисельник. Якщо знаменник початкового дробу збільшити на 14, а чисельник — на 26, то сума початкового та отриманого дробів дорівнюватиме 2. Знайдіть початковий дріб.

5 На автомийці працюють троє співробітників — Микола, Петро та Вадим. На миття однієї машини Микола витрачає в середньому 40 хв, Петро — x хв, а Вадим — стільки ж часу, скільки й Микола. Якщо Микола, Петро та Вадим працюватимуть разом, то вони помиють машину за 12 хв. Користуючись умовою задачі:

1) запишіть, чому дорівнює продуктивність праці кожного співробітника;
2) запишіть, чому дорівнює спільна продуктивність праці трьох співробітників;
3) складіть рівняння до задачі та розв'яжіть його;
4) знайдіть час, за який Петро миє одну машину, працюючи самостійно.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- У Парку Дикої природи Wildlife Safari (штат Орегон, США) троє слоненят Тікі, Еліс і Джордж можуть і вимити вашу машину, і станцювати разом із вами.
- У місті Дубаї (ОАЕ) працює найдорожча у світі автомийка, на якій використовують новітні безконтактні нанотехнології.

«Потрібно вчити людей програмуванню з ранніх років — тоді ті, кого воно приверне, зможуть дійсно в ньому просунутися, приділяючи йому стільки часу, скільки їм необхідно. Треба, щоб більше людей проходило від навчання програмуванню до заробітку цим на життя.»

Тімоті Джон Бернерс-Лі

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Обчисліть:

1) $\frac{3^6}{3^3}$; 2) $\frac{5^8}{5^{10}}$; 3) $\frac{10^8}{10^9}$; 4) $\frac{6^{12}\cdot 11^8}{11^8\cdot 6^{10}}$; 5) $\frac{7^6\cdot 15^{13}}{15^{12}\cdot 7^6}$.

§8 СТЕПІНЬ ІЗ ЦІЛИМ ПОКАЗНИКОМ ТА ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

ВЧОРА — Ви навчилися спрощувати вирази, що містять степінь із натуральним показником, обчислювати значення степенів із натуральним показником

СЬОГОДНІ — Ви познайомитеся зі степенем із цілим показником та його властивостями

ЗАВЖДИ — Ви зможете правильно виконувати розрахунки, що допоможе раціонально використовувати власний бюджет

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Для зміцнення імунітету аптека, що виготовляє ліки, пропонує харчову добавку, яку слід приймати в порошку по 0,1 мг 4 рази на день. Термін зберігання цього препарату в готовому вигляді не більше ніж 7 днів. Скільки цього порошку (у г) слід придбати на тиждень (7 днів)?

Розв'язання

$1\,\text{г} = 1000\,\text{мг}$, звідси $1\,\text{мг} = 0{,}001\,\text{г}$, тоді $0{,}1\,\text{мг} = 0{,}0001\,\text{г}$. Отже, на один день людині потрібно $4 \cdot 0{,}0001\,\text{г} = 0{,}0004\,\text{г}$ порошку. Таким чином, на 7 днів необхідно $7 \cdot 0{,}0004\,\text{г} = 0{,}0028\,\text{г}$ порошку.

У математиці прийнято дуже великі й дуже малі числа записувати, використовуючи *степінь із цілим* (*додатним або від'ємним*) *показником*. Наприклад, 0,1 мг прийнято записувати так: 10^{-4} г.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Першими науковими дослідженнями в галузі фармацевтики займалися греки в IV ст. до н. е. В XI–XIII ст. відбувся поділ між лікарями та фармацевтами. Професія фармацевта — вкрай важлива та відповідальна. І сьогодні розробляти й виготовляти ліки фармацевтам допомагає найсучасніша апаратура.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Нагадаємо, що цілі числа — це натуральні числа, протилежні їм числа та число нуль. Тому й степінь із цілим показником включає три види:

- степінь із натуральним показником (тобто з цілим додатним показником), який ви вивчали в 7-му класі;
- степінь із нульовим показником, поняття якого випливає із властивостей степеня з натуральним показником:

$$a^0 = a^{n-n} = \frac{a^n}{a^n} = 1, \text{ отже, } a^0 = 1,$$

  де a — довільне число, відмінне від нуля (вираз 0^0 не має змісту);
- степінь із цілим від'ємним показником.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- степінь із натуральним показником
- степінь із цілим показником
- основа степеня
- показник степеня
- значення степеня
- властивості степенів

У науковій літературі часто використовуються дуже великі й дуже малі значення величин. Наприклад, масу можна виразити у грамах, а можна — у тоннах. Як, на вашу думку, доцільніше виразити масу автомобіля — у грамах чи тоннах?

Розглянемо інший приклад. Обсяг флеш-пам'яті 4 гігабайти (Гб) можна виразити в бітах (мінімальна одиниця вимірювання кількості інформації): 4 Гб = 34 359 738 368 бітів. Але якщо в комп'ютерному магазині ви запитаєте флеш-пам'ять обсягом 34 359 738 368 бітів, навряд чи вас зрозуміють.

Записи дуже великих і дуже малих значень, що містять багато нулів, прийнято спрощувати. Наприклад:

- відстань від Землі до Сонця становить приблизно $150\,000\,000$ км $= 1{,}5 \cdot 10^8$ км;
- кількість молекул в 1 г води становить приблизно $37\underbrace{000\ldots0}_{21\text{ цифра}} = 3{,}7 \cdot 10^{22}$;
- діаметр молекули кисню дорівнює приблизно $0{,}\underbrace{000\,000\,0003}_{10\text{ цифр}}$ м $= 3 \cdot 10^{-10}$ м.

Очевидно, що з компактними записами працювати набагато легше.

Якщо зміст виразу $3{,}7 \cdot 10^{22}$ вам знайомий, то з виразом $3 \cdot 10^{-10}$ ви маєте справу вперше. З'ясуємо, що означає запис 10^{-10}.

Розглянемо ряд степенів числа 10 із натуральним показником:

$$10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ \ldots$$

Продовжимо цей ряд ліворуч, враховуючи принцип його побудови: кожне наступне число в 10 разів більше за попереднє. Маємо:

$$\ldots,\ \frac{1}{10\,000},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{10},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ \ldots$$

або

$$\ldots,\ \frac{1}{10^4},\ \frac{1}{10^3},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^1},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ \ldots$$

Оскільки «двоповерхові» дроби $\frac{1}{10^n}$ ускладнюють запис, то їх прийнято записувати, використовуючи степінь із від'ємним цілим показником. Тоді ряд набуває вигляду:

$$\ldots,\ 10^{-4},\ 10^{-3},\ 10^{-2},\ 10^{-1},\ 10^0,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ \ldots$$

Повернемося до числа 0,000 000 0003:

$$0{,}000\,000\,0003 = \frac{3}{10\,000\,000\,000} = \frac{3}{10^{10}} = 3 \cdot \frac{1}{10^{10}} = 3 \cdot 10^{-10}.$$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У 1948 р. Клод Шеннон у своїй статті «Математична теорія зв'язку» уперше використав термін «біт» (від англ. bit) для позначення найменшої одиниці інформації. Своїм походженням цей термін зобов'язаний Джону Тьюкі, який використовував скорочення «bit» замість слів «binary digit» (двійковий розряд).

ПРИГАДАЙТЕ!

Степінь із натуральним показником:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{ множників}},$$

де a^n — степінь,
n — натуральне число,
a — основа степеня,
n — показник степеня

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Термін «показник степеня» з'явився у «Повній арифметиці» (1544 р.) німецького математика Міхаеля Штіфеля.

Степенем із цілим від'ємним показником числа a, відмінного від нуля, є дріб, чисельник якого дорівнює 1, а знаменник є степенем числа a з натуральним показником, тобто $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, де $a\neq 0$, n — натуральне число.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\neq 0$$

Наприклад: $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$; $\left(\frac{1}{8}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{8}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{64}}=64$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Для будь-яких $a\neq 0$, $b\neq 0$:

- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$
- $\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}=a^n$

Для степеня з цілим показником справедливі такі самі властивості, як і для степеня з натуральним показником.

Властивості степенів

(для будь-яких $a\neq 0$, $b\neq 0$ та довільних цілих m і n)

1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ — множення степенів з однаковою основою;
2) $a^m:a^n=a^{m-n}$ — ділення степенів з однаковою основою;
3) $\left(a^m\right)^n=a^{mn}$ — піднесення степеня до степеня;
4) $(ab)^n=a^nb^n$;
5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$a^0=1$

ПРИКЛАД 1

Обчисліть значення виразу $\frac{6}{2^{-3}}$.

Розв'язання

Спосіб 1

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Обчислимо знаменник дробу, використовуючи означення степеня з цілим від'ємним показником.	$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$
КРОК 2	Виконаємо дію ділення.	$\frac{6}{\frac{1}{8}}=\frac{6}{1}\cdot\frac{8}{1}=48$

Спосіб 2

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо заданий дріб у вигляді добутку та скористаємося тим, що $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$.	$\frac{6}{2^{-3}}=6\cdot\frac{1}{2^{-3}}=6\cdot 2^3$
КРОК 2	Обчислимо значення отриманого добутку.	$6\cdot 2^3=6\cdot 8=48$

Відповідь: 48.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$; $\frac{1}{a^{-n}}=a^n$

при $a\neq 0$

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Обчисліть:

1) 5^{-2};
2) 3^{-4};
3) $10\cdot 2^{-2}$;
4) $12\cdot 3^{-3}$;
5) $\frac{2}{6^{-2}}$;
6) $\frac{5}{4^{-2}}$;
7) $80:\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$;
8) $250:\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$.

ПРИКЛАД 2

Обчисліть: $4^{-3}\cdot\frac{16}{25}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зведемо перші два множники до степенів з основами 2 і 5.	$4^{-3}=\left(2^2\right)^{-3}=2^{-6}=\frac{1}{2^6}$; $16=2^4$; $25=5^2$; $\frac{16}{25}=\frac{2^4}{5^2}$
КРОК 2	Перетворимо дріб $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$, скориставшись формулами $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$ і $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{5^2}{2^2}$
КРОК 3	Запишемо заданий вираз з урахуванням перетворень, виконаних на кроках 1 і 2.	$4^{-3}\cdot\frac{16}{25}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}=\frac{1}{2^6}\cdot\frac{2^4}{5^2}\cdot\frac{5^2}{2^2}$
КРОК 4	Запишемо дію множення дробів.	$\frac{2^4\cdot 5^2}{2^6\cdot 5^2\cdot 2^2}$
КРОК 5	Спростимо знаменник отриманого дробу.	$2^6\cdot 5^2\cdot 2^2=2^6\cdot 2^2\cdot 5^2=2^8\cdot 5^2$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 6	Скоротимо отриманий дріб.	$\frac{2^4\cdot 5^2}{2^8\cdot 5^2}=\frac{2^4}{2^8}=2^{4-8}=2^{-4}=\frac{1}{2^4}$
КРОК 7	Обчислимо значення степеня.	$\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$
	Зверніть увагу: дріб $\frac{2^4}{2^8}$ можна скоротити відразу:	$\frac{2^4}{2^8}=\frac{2^4}{2^4\cdot 2^4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$.

Відповідь: $\frac{1}{16}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Обчисліть:

1) $3^{-2}\cdot 3^3$;
2) $5^{-4}\cdot 5^3$;
3) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}:\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$;
4) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}:\left(\frac{2}{7}\right)^{-4}$;
5) $9^{-2}\cdot 81\cdot 3^{-3}$;
6) $5^{-2}\cdot 125\cdot 25^{-1}$;
7) $9^{-2}\cdot\frac{81}{343}\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{-3}$;
8) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\frac{32}{81}\cdot 8^{-2}$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Вираз із цілим показником переміщують із знаменника в чисельник і з чисельника в знаменник, змінюючи знак показника степеня на протилежний:

$$\frac{a^{-m}}{b^{-n}}=\frac{b^n}{a^m}.$$

Наприклад: $\frac{5^{-2}}{2^{-3}}=\frac{2^3}{5^2}=\frac{8}{25}$.

ПРИКЛАД 3

Спростіть вираз $\frac{(ab)^{-3}}{c^6}:\frac{\left(c^{-2}\right)^3}{a^4b^{-4}}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Виконаємо перетворення в чисельниках першого й другого дробів.	$(ab)^{-3}=a^{-3}b^{-3}$, $\left(c^{-2}\right)^3=c^{-6}$
КРОК 2	Запишемо дію ділення отриманих дробів і замінимо її множенням на обернений дріб.	$\frac{a^{-3}b^{-3}}{c^6}:\frac{c^{-6}}{a^4b^{-4}}=\frac{a^{-3}b^{-3}}{c^6}\cdot\frac{a^4b^{-4}}{c^{-6}}$
КРОК 3	Виконаємо множення дробів, скориставшись перетворенням $\frac{a^{-n}}{b^{-m}}=\frac{b^m}{a^n}$, та скоротимо отриманий дріб.	$\frac{a^{-3}b^{-3}a^4b^{-4}}{c^6\cdot c^{-6}}=\frac{a^4c^6}{a^3b^3b^4c^6}=\frac{a}{b^7}$
	Зверніть увагу: можна виконати дії зі степенем окремо в чисельнику та окремо в знаменнику дробу:	$\frac{a^{-3}b^{-3}a^4b^{-4}}{c^6\cdot c^{-6}}=\frac{a^{-3}\cdot a^4\cdot b^{-3}\cdot b^{-4}}{c^0}=\frac{a^1b^{-7}}{1}=a\cdot b^{-7}=a\cdot\frac{1}{b^7}=\frac{a}{b^7}$.

Відповідь: $\frac{a}{b^7}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Від'ємні та нульовий показники степеня ввів ще в другій половині XV ст. французький математик Нікола Шюке.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Спростіть вираз на області його допустимих значень:

1) $a^{-2}b\cdot a^{3}$;

2) $x^{2}y^{-3}\cdot y^{6}$;

3) $a^{-4}b^{-3}\cdot a^{5}b^{-2}$;

4) $x^{3}y^{-2}\cdot x^{-2}y^{-1}$;

5) $\left(a^{-2}b^{-3}\right)^{-2}\cdot a^{-3}b^{-7}$;

6) $x^{9}y^{-6}\cdot\left(x^{3}y^{-2}\right)^{-4}$;

7) $\dfrac{(ab)^{-4}}{c^{12}}:\dfrac{\left(c^{-3}\right)^{4}}{a^{5}b^{-5}}$;

8) $\dfrac{x^{2}y^{-4}}{\left(z^{-3}\right)^{3}}:\dfrac{z^{8}}{(xy)^{-2}}$.

ПРИКЛАД 4

У виразі $4x^{-3}+x^{-10}$ винесіть за дужки спільний множник із найменшим показником степеня.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо, який із показників степенів x^{-3} і x^{-10} є найменшим.	-10
КРОК 2	Винесемо x^{-10} за дужки, поділивши кожний із доданків на x^{-10}.	$4x^{-3}+x^{-10}=x^{-10}\left(\dfrac{4x^{-3}}{x^{-10}}+\dfrac{x^{-10}}{x^{-10}}\right)$
КРОК 3	Виконаємо ділення в дужках.	$\dfrac{4x^{-3}}{x^{-10}}+\dfrac{x^{-10}}{x^{-10}}=4x^{-3+10}+1=4x^{7}+1$

Відповідь: $x^{-10}\left(4x^{7}+1\right)$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Винесення за дужки спільного множника виконують за допомогою дії ділення кожного з доданків на їх спільний множник. При цьому від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 У заданому виразі винесіть за дужки спільний множник із найменшим показником степеня:

1) $3x^{4}+x^{9}$;

2) $x^{6}+2x^{2}$;

3) $3x^{-4}+x^{-9}$;

4) $x^{-6}+2x^{-2}$;

5) $3x^{3}-2x^{-2}+x^{-3}$;

6) $x^{-4}+5x^{2}-6x^{-1}$;

7) $x^{3}+2x^{-2}-4$;

8) $5x^{-6}-x+10$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Обчисліть:

1) $2^{-1}-3^{-1}$;
2) $\left(2\frac{1}{4}\right)^{-1}-\left(\frac{5}{9}\right)^{-1}$;
3) $\left(3^{-1}\cdot 2^{2}\right)^{-1}$;
4) $-(-4)^{-2}\cdot 64+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

2 Порівняйте з нулем значення степеня:

1) $-(-5)^{-3}$;
2) -15^{-2};
3) $\left(-1\frac{1}{7}\right)^{-2016}\cdot(-2)^{-2017}$.

3 Використовуючи властивості степеня з цілим показником, спростіть вираз:

1) $\left(\frac{m^4n^{-3}}{p^7}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{m^{-2}n^3}{p^{-2}}\right)^{2}$;
2) $\left(\frac{am^2}{k^4}\right)^{-1}:\left(\frac{a^2m^3}{k}\right)^{-2}$.

4 Запишіть у вигляді дробу степінь із цілим показником:

1) 5^{-2016};
2) $(2a)^{-4}$;
3) $2a^{-4}$;
4) $(3m+1)^{-2}$;
5) $\frac{2}{3}x^{-11}$;
6) $\frac{1}{5}(c-m)^{-3}$.

5 Подайте у вигляді степеня з від'ємним показником або у вигляді добутку дріб:

1) $\frac{4}{3m^7}$;
2) $\frac{1}{m-c}$;
3) $\frac{10}{3mn^3}$;
4) $\frac{29}{(m-3)^5}$.

6 Спростіть вираз:

1) $8x^{-6}y^3\cdot 2{,}5x^9y^{-1}$;
2) $3{,}2a^6b:\left(0{,}8a^3b^{-3}\right)$;
3) $\left(1{,}5\cdot 10^{-3}\right)\cdot\left(9\cdot 10^{-5}\right)$;
4) $\left(2{,}5\cdot 10^{-16}\right):\left(0{,}005\cdot 10^{-30}\right)$.

7 Спростіть вираз:

1) $\frac{35^n}{7^n\cdot 5^{n-2}}$;
2) $\frac{7^{m+1}\cdot 9^m}{36^m}$;
3) $\left(2{,}56\cdot 10^6\right):\left(1{,}6\cdot 10^{-2}\right)$.

8 Винесіть за дужки спільний множник із найменшим показником степеня:

1) $4x^{-11}+x^{-9}$;
2) $x^{-3}+2x^2$;
3) $x+x^{-17}$.

9 Для вирощування розсади Дмитро вирішив виготовити дерев'яний контейнер, що має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 100 см, 20 см, 30 см. Знайдіть масу m контейнера, виготовленого з ялиці, якщо її густина становить $\rho=4{,}6\cdot 10^2$ кг/м^3.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Сучасні означення та позначення степенів із нульовим, від'ємним і дробовим показниками беруть початок від робіт англійських математиків Джона Волліса та Ісаака Ньютона. А сучасний запис степеня з цілим додатним показником (a^4, a^5) увів у XVII ст. французький математик Рене Декарт.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

$$\frac{a}{b}\cdot x^{-n}=\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x^n}=\frac{a}{bx^n},$$

$b\neq 0$, $x\neq 0$

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть закономірність і визначте, якою має бути наступна літера:

В, Ж, Л, Г, С, Л, Б, ...

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

$$m=\rho\cdot V,$$

де m — маса, ρ — густина, V — об'єм

Ісаак Ньютон (англ. Isaac Newton; 1643–1727) — англійський фізик, математик, механік, астроном, один із творців класичної фізики. Ньютон першим став систематично застосовувати від'ємні показники степеня. У 1676 р. в одному з листів Ньютон писав: «Як алгебраїсти замість *AA*, *AAA* і т. д. пишуть A^2, A^3 і т. д., так я... замість $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ пишу a^{-1}, a^{-2} і т. д.».

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $m=10^{-1}n$, $n>0$, то n більше за m у 10 разів.

2) Якщо $y=10^2x$, $x>0$, то y більше за x у 100 разів.

3) 1 % від 10^6 грн становить 1000 грн.

4) Якщо $a=10b$, $b>0$, то a більше за b на 10 %.

5) Значення виразу $\left(\frac{2a^7}{a^8}\right)^5$ дорівнює 1 при $a=2$.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «СЕРЦЕВИЙ РИТМ»

Учені підрахували, що серце людини скорочується близько 36 800 000 разів за один рік. Визначте, яку кількість скорочень зробило серце людини, якій 30 років. Запишіть отриманий результат у вигляді $a\cdot10^9$, де a — десятковий дріб, що складається з чотирьох цифр.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

Див. приклад 1

1 Обчисліть значення степеня:

1) 7^{-2}; 3) $6\cdot3^{-2}$; 5) $\frac{7}{2^{-2}}$; 7) $98:\left(\frac{4}{7}\right)^{-2}$;

2) 2^{-4}; 4) $24\cdot2^{-3}$; 6) $\frac{2}{3^{-3}}$; 8) $108:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

Див. приклад 2

2 Обчисліть значення виразу:

1) $7^6\cdot7^{-7}$; 3) $4^{-2}\cdot32\cdot2^{-4}$; 5) $4^{-2}\cdot\frac{64}{625}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$;

2) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}:\left(\frac{3}{4}\right)^{-5}$; 4) $3^{-3}\cdot9\cdot27^{-1}$; 6) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}\cdot\frac{81}{125}\cdot27^{-2}$.

3 Запишіть у вигляді добутку дріб:

1) $\frac{1}{m^2n}$; 3) $\frac{m^4}{n^2}$; 5) $\frac{a^{-6}}{b^{-2}}$;

2) $\frac{4}{x^{-2}}$; 4) $\frac{x^3}{y^{-2}}$; 6) $\frac{4x}{(a+b)^2}$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}=a\cdot b^{-1}$$

4 Здійсніть необхідні розрахунки та обчисліть добову калорійність харчового раціону 9-річної дитини, використовуючи формулу: $K = 1000 + (100 \cdot n)$, де K — кількість кілокалорій (ккал), n — вік у роках, 1000 ккал — добова калорійність харчового раціону дитини віком 1 рік. Запишіть відповідь за допомогою степеня з цілим показником. Обчисліть за цією формулою добову калорійність свого харчового раціону.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Дізнатися про правильне харчування підлітків ви можете за посиланням http://disted.edu.vn.ua/courses/learn/2847

5 Спростіть вираз:

1) $b^4 \cdot ab^{-3}$, $b \neq 0$;
2) $x^3y^4 \cdot y^{-2}$, $y \neq 0$;
3) $a^{-5}b^{-6} \cdot a^7b^{-2}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;
4) $x^4y^{-3} \cdot x^{-5}y^6$, $x \neq 0$, $y \neq 0$;
5) $\left(a^3b^{-4}\right)^{-3} \cdot a^8b^{-11}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$;
6) $x^{-5}y^2 \cdot \left(x^{-2}y^{-4}\right)^{-2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$;
7) $\dfrac{(ab)^{-5}}{c^8} : \dfrac{\left(c^4\right)^{-2}}{a^7b^{-3}}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$;
8) $\dfrac{x^{-4}y^6}{\left(z^5\right)^{-2}} : \dfrac{z^9}{(xy)^{-6}}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$.

Див. приклад 3

6 У заданому виразі винесіть за дужки спільний множник із найменшим показником степеня:

1) $x^5 + 7x^8$;
2) $5x^7 + x^{11}$;
3) $x^{-5} + 7x^{-8}$;
4) $5x^{-7} + x^{-11}$;
5) $4x^{-3} - 6x^{-4} + x^4$;
6) $x^{-6} + 2x^3 - 8x^{-2}$;
7) $3x^{-5} - x^8 + 2$;
8) $x - 8x^{-4} + 1$.

7 Різні тварини мають різний розмір і масу. Наприклад, маса землерийки становить 3 г, а маса слона — 3000 кг; маса колібрі — 1 г, а маса африканського страуса — 100 кг. Запишіть наведені значення маси (у кг) за допомогою степеня з цілим показником.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Найбільша тварина у світі — блакитний кит, довжина якого 30 м, а маса — 180 т і більше. Серце цього кита б'ється лише один раз на кожні 10 с.
- Карликова білозубка — найменший ссавець у світі. Її маса не перевищує 1,7 г, а довжина тіла становить від 3 до 4,5 см. Її серце б'ється з частотою 1500 ударів на хвилину.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Виконайте дії. Запишіть відповідь у вигляді десяткового дробу.

1) $3{,}2 \cdot 1000$;
2) $100 \cdot 4{,}6$;
3) $\dfrac{23}{100}$;
4) $\dfrac{104}{10}$;
5) $\dfrac{12{,}402}{1000}$;
6) $\dfrac{504{,}003}{10\,000}$.

«У вивченні наук приклади корисніші за правила.»

Ісаак Ньютон

§9 СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

ВЧОРА	Ви навчилися перетворювати вирази, що містять степінь із цілим показником
СЬОГОДНІ	Ви познайомитесь із записом числа в стандартному вигляді
ЗАВЖДИ	Ви зможете дбати про своє здоров'я та здоров'я близьких, правильно розраховуючи добову дозу вітамінів

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Уперше термін «вітамін» запропонував польський біохімік Казимир Функ у 1912 р. для виділеної ним речовини, яка зараз має назву вітамін B1. Сьогодні вченим відомо більше ніж 20 вітамінів, кожен із яких має власне літерне позначення та хімічну назву.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Відомо, що в організмі людини хімічні елементи виконують певну біологічну функцію. Учені розрахували добове надходження в організм людини різних хімічних елементів. Так, наприклад, добова норма калію для дорослих має становити 2000–5300 мг, а для дітей — 530 мг. Визначте, у скільки разів максимальна добова норма калію для дорослих більша, ніж для дітей.

Розв'язання

Для зручності запишемо подані значення в такому вигляді:

- добова норма калію для дорослих $5300\text{ мг} = 5{,}3 \cdot 10^3$ мг;
- добова норма калію для дітей $530\text{ мг} = 5{,}3 \cdot 10^2$ мг.

Знайдемо відношення: $\frac{5{,}3 \cdot 10^3}{5{,}3 \cdot 10^2} = 10$.

Отже, добова норма калію для дорослих у 10 разів більша, ніж для дітей.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У задачі, яку ми розглянули, дії з числами 5300 і 530 можна було виконати, не записуючи їх за допомогою степеня числа 10. Але не завжди це є зручним, особливо у випадках, коли потрібно працювати з дуже великими й дуже малими числами. Ми вже зазначали, що такі числа використовуються досить часто, зокрема в науковій, довідковій літературі тощо.

Розглянемо такий приклад. Радіус земної кулі становить 6 378 200 м. Це значення прийнято записувати так:

$R_{\text{Зем. кулі}} = 6{,}3782 \cdot 10^6$ м, або $R_{\text{Зем. кулі}} = 6{,}3782 \cdot 10^3$ км.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- степінь із цілим показником
- основа степеня
- показник степеня
- значення степеня
- стандартний вигляд числа
- значуща частина числа

Очевидно, що виконувати дії з числом, записаним у такому вигляді, значно легше. Запис $6{,}3782 \cdot 10^6$ називають стандартним виглядом числа.

Стандартним виглядом числа a називають його запис у вигляді $a_1 \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a_1 < 10$, n — ціле число.

Число a_1 називають **значущою частиною числа** a, показник степеня n — **порядком числа** a.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Значуща частина числа a — Порядок числа a

$$\underbrace{150\,000\,000}_{\text{Число } a} = \underbrace{1{,}5}_{\text{Число } a\text{, записане в стандартному вигляді}} \cdot 10^{\overbrace{8}^{\text{Порядок числа } a}}$$

У § 8 ми наводили приклади деяких фізичних величин, значення яких було записано в стандартному вигляді:

- відстань від Землі до Сонця $1{,}5 \cdot 10^8$ км;
- кількість молекул в 1 г води $3{,}7 \cdot 10^{22}$;
- діаметр молекули води $3 \cdot 10^{-10}$ м.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

У цілій частині числа, записаного в стандартному вигляді (тобто до коми), може міститися лише одна цифра. Решта цифр мають бути записані після коми, тобто в дробовій частині числа.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$320 = 3{,}2 \cdot 10^2$

$0{,}0073 = 7{,}3 \cdot 10^{-3}$

$47\,000 = 4{,}7 \cdot 10^4$

$135\,797\,531 = 1{,}357\,975\,31 \cdot 10^8$

ПРИКЛАД 1

Запишіть у стандартному вигляді число, що дорівнює масі Місяця $m = 73\,500\,000\,000\,000\,000\,000$ кг.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо задане число у вигляді добутку.	$73\,500\,000\,000\,000\,000\,000 = 735 \cdot 100\,000\,000\,000\,000\,000$
КРОК 2	У множнику 735 відокремимо комою стільки знаків, щоб ціла частина містила лише одну цифру.	$735 = 7{,}35 \cdot 10^2$
КРОК 3	Множник 100 000 000 000 000 000 запишемо як степінь числа 10 (показник степеня дорівнює кількості нулів).	10^{17}
КРОК 4	Перетворимо отриманий добуток, виконавши дії зі степенями.	$m = 7{,}35 \cdot 10^2 \cdot 10^{17} = 7{,}35 \cdot 10^{19}$

Відповідь: $7{,}35 \cdot 10^{19}$.

ПРИКЛАД 2

Визначте, у скільки разів маса Землі більша за масу Місяця, якщо $m_{\text{Землі}} = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, $m_{\text{Місяця}} = 7{,}35 \cdot 10^{19}$ кг. Запишіть відповідь у стандартному вигляді.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Складемо відношення для визначення, у скільки разів $m_{\text{Землі}}$ більша, ніж $m_{\text{Місяця}}$.	$\frac{m_{\text{Землі}}}{m_{\text{Місяця}}} = \frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{7{,}35 \cdot 10^{19}}$
КРОК 2	Виконаємо дії, скориставшись властивостями степеня.	$\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}}{7{,}35 \cdot 10^{19}} = \frac{5{,}98}{7{,}35} \cdot \frac{10^{24}}{10^{19}} \approx 0{,}81 \cdot 10^5$
КРОК 3	Запишемо число 0,81 у стандартному вигляді, поставивши кому так, щоб ціла частина числа містила лише одну цифру, відмінну від нуля.	$0{,}81 = 8{,}1 \cdot 10^{-1}$ (згідно з означенням стандартного вигляду числа)
КРОК 4	Виконаємо перетворення в отриманому добутку.	$0{,}81 \cdot 10^5 = 8{,}1 \cdot 10^{-1} \cdot 10^5 = 8{,}1 \cdot 10^4$

Відповідь: у $8{,}1 \cdot 10^4$ разів.

ПРИКЛАД 3

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!
1 ккал = 1000 кал

Одна пляшка йогурту містить 180 000 калорій. Скільки кілокалорій отримує щодня Віка з цього продукту, якщо до її щоденного раціону входять три такі пляшки йогурту? Запишіть відповідь у стандартному вигляді.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо число 180 000 у стандартному вигляді.	$180\,000 = 18 \cdot 10\,000 = (1{,}8 \cdot 10) \cdot 10^4 = 1{,}8 \cdot 10^5$
КРОК 2	Оскільки в одній пляшці $1{,}8 \cdot 10^5$ кал, то, помноживши це число на 3, знайдемо шукану кількість калорій, отримуваних щодня з йогурту.	$1{,}8 \cdot 10^5 \cdot 3 = 5{,}4 \cdot 10^5$ (кал)
КРОК 3	Переведемо калорії в кілокалорії, враховуючи, що 1 ккал = 1000 кал = 10^3 кал.	$(5{,}4 \cdot 10^5) : 10^3 = 5{,}4 \cdot 10^2$ (ккал)

Відповідь: $5{,}4 \cdot 10^2$ ккал.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 У завданнях 1–4 запишіть у стандартному вигляді:

1) число 38 000; 2) число 190 000;
3) число, що дорівнює масі Венери $m = 4\,900\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000$ кг;
4) число, що дорівнює масі атома Купруму $m = 0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,105$ кг.

Розв'яжіть задачі 5–8 і запишіть відповідь у стандартному вигляді.

5) Одна пляшка лимонаду містить 78 000 калорій. Скільки кілокалорій отримує щодня Оксана з цього напою, якщо до її щоденного раціону входять дві такі пляшки лимонаду?
6) Одна банка яблучного соку містить 46 000 калорій. Скільки кілокалорій отримує щодня Олег із цього напою, якщо до його щоденного раціону входять дві такі банки соку?
7) Маса Юпітера становить $1,9 \cdot 10^{27}$ кг, а маса Марса — $6,58 \cdot 10^{23}$ кг. Визначте, у скільки разів маса Юпітера більша за масу Марса.
8) Маса Сатурна становить $5,69 \cdot 10^{26}$ кг, а маса Землі — $5,98 \cdot 10^{24}$ кг. Визначте, у скільки разів маса Сатурна більша за масу Землі.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- У 2011 р. астрономи виявили планету, що на 92 % складається з надщільного кристалічного вуглецю — алмазу. Це небесне тіло перебуває в сузір'ї Змії, на відстані 4000 світлових років від Землі.
- Супутник Сатурна Титан надзвичайно схожий на нашу Землю. Титан має моря, річки, вулкани, щільну атмосферу тощо. Але температура там на 100 градусів нижча за антарктичну.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Подайте у вигляді степеня числа 10 вираз:

1) $10^2 \cdot 10^{-16}$; 3) $\left(10^2\right)^{-5} : \left(10^7\right)^3$; 5) $10\,000 \cdot 10^{30} : 10^{35}$;
2) $\left(10^4\right)^{-3} \cdot 10^6$; 4) $10^{-11} \cdot 10^{14} : 10^3$; 6) $10\,000 : 10^{-4} \cdot 10^6$.

2 Визначте порядок числа:

1) $6,8 \cdot 10^{19}$; 2) $3,6 \cdot 10^{-12}$; 3) $81,5 \cdot 10^{14}$; 4) $0,7 \cdot 10^{-9}$.

3 Для того щоб зібрати 1 кг меду, бджола повинна облетіти 8 500 000 квітів білої акації та 4 000 000 квітів еспарцету. Визначте, у скільки разів кількість квітів білої акації більша за кількість квітів еспарцету.

4 В астрономії для визначення відстані використовують таку позасистемну одиницю довжини, як астрономічна одиниця (а. о.), що дорівнює середній відстані від Землі до Сонця: $1\,\text{а.о.} \approx 150$ млн км. Запишіть це значення в стандартному вигляді.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Бджола — одна з найцікавіших комах. Для того щоб зібрати 1 кг меду, одній бджолі необхідно відвідати від 10 до 19 млн квіток, пролетівши при цьому 300 тис. км.

Леонід Каденюк, перший космонавт незалежної України, від 19 листопада до 5 грудня 1997 р. на космічному кораблі Columbia у складі міжнародного екіпажу здійснив космічний політ, що тривав 15 діб 16 год 35 хв 1 с. Уперше, під час польоту Л. Каденюка, у космосі побував український прапор і пролунав Гімн України.

5 На флоті швидкість кораблів вимірюють у вузлах:

$1\,\text{вузол} = \dfrac{1\,\text{морська миля}}{1\,\text{година}}$. Виразіть у метрах за секунду швидкість 1 вузол, якщо морська миля дорівнює 1852 м. Знайдіть відстань, яку корабель пройде за 2 год зі швидкістю 24 вузли. Відповідь запишіть у стандартному вигляді.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Число $3{,}5\cdot10^{-3}$ більше за число $3{,}5\cdot10^{-2}$.
2) Числа $63{,}4\cdot10^{-5}$ і $6{,}34\cdot10^{-6}$ є рівними.
3) Якщо порядок числа a дорівнює 5, а порядок числа $a\cdot10^{n}$ дорівнює 20, то $n=15$.
4) Якщо порядок числа a дорівнює 24, а порядок числа $\dfrac{a}{10^{n}}$ дорівнює 30, то $n=-6$.
5) Якщо чисельність населення Києва $2{,}9\cdot10^{6}$ осіб, а Токіо — $1{,}3\cdot10^{7}$ осіб (за офіційними даними 2015 р.), то чисельність населення Києва менша за чисельність населення Токіо приблизно в 4,48 разу.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Прісна вода становить лише 2,5 % від загальної кількості води на Землі.
- За останні 40 років кількість прісної води у світі на кожну людину зменшилася на 60 %.
- В Україні воду для пиття аналізують за 28 параметрами, а в США — за 300 параметрами.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ЗАПАСИ ПРІСНОЇ ВОДИ»

У таблиці наведено кількість запасів прісної води на Землі.

Джерела прісної води	Кількість запасів, км^3
Льодовики	24 000 000
Підземні джерела	10 500 000
Річки та озера	93 000
Інші джерела	340 000

1 Запишіть подані значення в стандартному вигляді.

2 Визначте й запишіть у стандартному вигляді:

1) у скільки разів кількість прісної води в льодовиках перевищує її кількість у річках та озерах;
2) у скільки разів кількість прісної води в підземних джерелах менша від її кількості в льодовиках.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 8

1 Обчисліть: $8 \cdot 2^{-3}$.

А	Б	В	Г
-64	$\frac{4}{3}$	1	-48

2 Виконайте дії: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$.

А	Б	В	Г
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^{7}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{7}$	$\frac{2}{3}$

3 Спростіть вираз $n^{-6}b^{2} \cdot \left(n^{3}\right)^{2}$, $n \neq 0$.

А	Б	В	Г
$\frac{b^2}{n}$	b^2	b^2n	b^2n^2

4 У виразі $3x^2 + x^{-3}$ винесіть за дужки спільний множник із найменшим показником степеня.

А $x^{-3}\left(3x^{-5}+1\right)$

Б $x^{2}\left(3+x^{5}\right)$

В $x^{2}\left(3+x^{-5}\right)$

Г $x^{-3}\left(3x^{5}+1\right)$

5 Від дня відкриття київського метрополітену його послугами скористалися в середньому 17 млрд людей. Виберіть запис цього числа в стандартному вигляді.

А	Б	В	Г
$1{,}7 \cdot 10^{10}$	$1{,}7 \cdot 10^{7}$	$17 \cdot 10^{6}$	$17 \cdot 10^{9}$

6 Установіть відповідність між результатами обчислень (1–3) та записами цих результатів у стандартному вигляді (А–Г).

1	$500 \cdot 100$	А	$5 \cdot 10^{-3}$
2	$\frac{50}{10^5}$	Б	$5 \cdot 10^{-4}$
3	$\frac{1}{2} \cdot 0{,}01$	В	$5 \cdot 10^{4}$
		Г	$5 \cdot 10^{3}$

7 Знайдіть значення виразу $\dfrac{125 \cdot \left(5^{3}\right)^{-2}}{\left(5^{-6}\right)^{-3} \cdot 5^{-23}}$.

8 Спростіть вираз

$$\left(\frac{6b^{-8}}{b^{-8}+3} - \frac{13b^{-8}}{b^{-16}+6b^{-8}+9}\right) : \frac{6b^{-8}+5}{b^{-16}-9} + \frac{6b^{-8}}{b^{-8}+3}.$$

Знайдіть його значення при $b = 0{,}1$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Запишіть у стандартному вигляді число:

1) 57 000; 2) 410 000; 3) 0,000 037; 4) 0,000 576.

Див. приклад 1

2 Запишіть у стандартному вигляді число, що дорівнює:

1) об'єму пам'яті флеш-накопичувача 32 000 000 000 байтів;

2) масі крила мухи $m = 0{,}000\,000\,05$ кг.

Див. приклади 2, 3

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Китайська народна республіка має найбільше населення у світі — понад 1,3 млрд осіб. Найменшою за населенням країною є Піткерн — острів у південній частині Тихого океану. На території острова проживає 48 осіб.

3 Розв'яжіть задачі та запишіть відповідь у стандартному вигляді.

1) Одна чашка кави зі згущеним молоком містить 165 000 калорій. Скільки кілокалорій отримує щодня Наталка з цього напою, якщо до її щоденного раціону входять три такі чашки?

2) Одна чашка фруктового чаю містить 84 000 калорій. Скільки кілокалорій отримує щодня Андрій із цього напою, якщо до його щоденного раціону входять три такі чашки?

3) За офіційними даними, у 2015 р. чисельність населення Індії становила $1{,}25\cdot10^9$ осіб, а чисельність населення України — $4{,}44\cdot10^7$ осіб. Визначте, у скільки разів чисельність населення Індії більша за чисельність населення України.

4) За офіційними даними, у 2013 р. кількість запасів нафти у світі становила $2{,}38\cdot10^{11}$ т, а кількість запасів нафти в Австралії — $4{,}4\cdot10^8$ т. Визначте, у скільки разів кількість запасів нафти у світі більша за кількість запасів нафти в Австралії.

Див. приклад 4

4 Визначте порядок числа:

1) $4{,}7\cdot10^{18}$; 2) $6{,}4\cdot10^{-17}$; 3) $12{,}3\cdot10^{15}$; 4) $0{,}8\cdot10^{-6}$.

5 Знайдіть порядок числа:

1) $a\cdot10^5$, якщо порядок числа a дорівнює -14;

2) $a\cdot10^{-9}$, якщо порядок числа a дорівнює 17;

3) $\dfrac{a}{10^{-6}}$, якщо порядок числа a дорівнює -19;

4) $\dfrac{a}{10^{-18}}$, якщо порядок числа a дорівнює 4.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Назва числа	Кількість нулів
Мільярд	9
Трильйон	12
Квадрильйон	15
Квінтильйон	18
Секстильйон	21
Гугол	100

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{4}{a}$ при $a=4$;

2) $\dfrac{6}{n}$ при $n=3$;

3) $\dfrac{18}{b}$ при $b=-6$;

4) $\dfrac{30}{c}$ при $c=-15$;

5) $-\dfrac{6}{x}$ при $x=-12$;

6) $-\dfrac{24}{y}$ при $y=-96$;

7) $-\dfrac{3}{2x}$ при $x=150$;

8) $-\dfrac{5}{2y}$ при $y=2500$.

“Космос треба досліджувати для того, щоб покращити життя на Землі.”

Леонід Каденюк

§10 ФУНКЦІЯ $y = \frac{k}{x}$, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

ВЧОРА — Ви познайомилися з лінійною функцією, її графіком та властивостями, застосовували їх під час розв'язування задач

СЬОГОДНІ — Ви дізнаєтеся, яку функцію називають оберненою пропорційністю, які її графік і властивості

ЗАВЖДИ — Ви зможете визначати залежність двох величин, що допоможе здійснювати різні дослідження, а також приймати оптимальні фінансові рішення

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Вартість абонемента на заняття йогою становить 400 грн на місяць незалежно від кількості занять, відвіданих протягом місяця. З'ясуйте, якою є залежність ціни одного заняття від кількості занять.

Розв'язання

Введемо позначення: нехай x — кількість занять, p — ціна одного заняття. Тоді $p \cdot x$ — вартість усіх занять на місяць, що становить 400 грн. Отримаємо рівняння: $p \cdot x = 400$. Якщо ми виразимо з цього рівняння p через x, то отримаємо: $p = \frac{400}{x}$ — залежність ціни одного заняття від кількості занять.

Очевидно, що чим більше занять відвідувати, тим дешевшими вони будуть. Наприклад, якщо відвідувати 10 занять на місяць, то ціна кожного становитиме 40 грн. Якщо займатися 8 разів на місяць, то кожне заняття коштуватиме 50 грн.

Таку залежність між двома величинами називають *обернено пропорційною*. Говорять, що змінна p обернено пропорційна змінній x.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Понад 300 млн людей у світі практикують йогу. Найстарішою викладачкою йоги, за даними Книги рекордів Гіннеса 2012 р., стала 96-річна Айда Херберт. А наймолодшою тренеркою є Шруті Пандей з Індії, яка викладає йогу з 6 років.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Обернена пропорційність — залежність, при якій *зменшення* в кілька разів однієї з величин приводить до *збільшення* іншої величини в таку саму кількість разів.

В актуальній задачі величини x і p набувають лише додатних значень, причому з умови задачі випливає, що x — число натуральне. Якщо ж відволіктися від умови задачі й розглянути залежність $p = \frac{400}{x}$ як функцію p від x, то її область визначення складатиметься з усіх чисел, відмінних від нуля. При цьому ключова властивість оберненої пропорційності зберігається.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- пропорційна залежність
- обернена пропорційна залежність
- коефіцієнт пропорційності
- графік функції
- аргумент
- значення функції
- гіпербола

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$$y = \frac{k}{x}, \ k \neq 0$$

ПРИГАДАЙТЕ!

- **Область визначення функції** — множина значень аргумента, при яких формула, якою задається функція, має зміст (тобто множина допустимих значень x).
- **Область значень функції** — множина значень функції (тобто множина значень y, що відповідають допустимим значенням x).

x	y
-6	$y = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$
-4	$-\frac{3}{4}$
-3	-1
-2	$-1{,}5$
-1	-3
1	3
2	$1{,}5$
3	1
4	$\frac{3}{4}$
6	$\frac{1}{2}$

СЛІД ЗНАТИ!

Оберненою пропорційністю називають функцію, яку можна задати формулою $y = \frac{k}{x}$, де x — аргумент (незалежна змінна), k — число, відмінне від нуля.

Для *оберненої пропорційності*:

- область визначення функції складається з усіх значень x, відмінних від нуля; записуємо — $D(y)$: $x \neq 0$.
- область значень функції складається з усіх значень y, відмінних від нуля; записуємо — $E(y)$: $y \neq 0$.

Функція:	$y = \frac{k}{x}, \ k \neq 0$
$D(y)$:	$x \neq 0$ (на нуль ділити не можна)
$E(y)$:	$y \neq 0$ (дріб дорівнює нулю лише у випадку, коли чисельник дорівнює нулю, але $k \neq 0$ за означенням оберненої пропорційності)

Побудуємо графік функції $y = \frac{k}{x}$ при $k = 3$. Для цього складемо таблицю значень функції $y = \frac{3}{x}$ (див. ліворуч).

Позначимо на координатній площині точки, координати яких ми отримали (рис. 1, *а*). Якщо взяти більшу кількість значень x, то отримаємо більшу кількість точок на координатній площині, причому вони будуть розташовані щільніше одна до одної.

Якщо сполучити послідовно ці точки (окремо в I і III чвертях), утворяться дві криві лінії, які й будуть унаочнювати графік **оберненої пропорційності** (рис. 1, *б*).

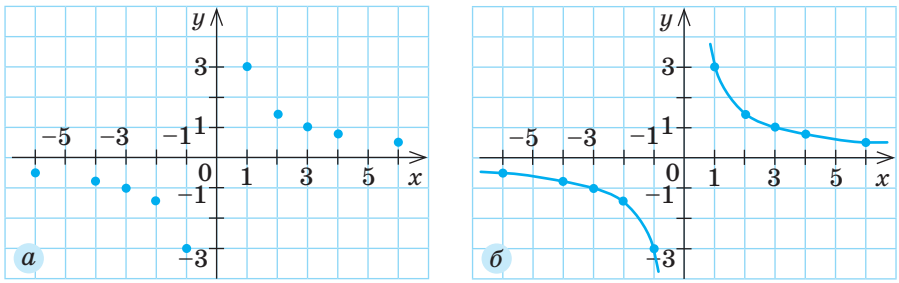


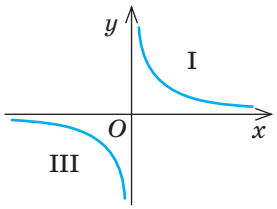
Рис. 1

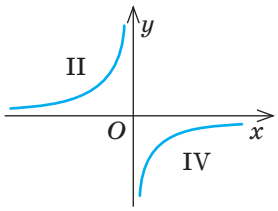
Графіком оберненої пропорційності є фігура, яку називають **гіперболою**. Гіпербола складається з двох частин — **двох віток гіперболи**.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

$$y=\frac{k}{x},\ k\neq 0$$

$k>0$	$k<0$
якщо $x>0$, то $y>0$ якщо $x<0$, то $y<0$	якщо $x<0$, то $y>0$ якщо $x>0$, то $y<0$





ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Кожна з віток гіперболи в горизонтальному напрямі наближається до осі Ox, а у вертикальному — до осі Oy. Прямі, до яких необмежено близько наближаються графіки функцій, називають **асимптотами**.

Гіпербола має дві асимптоти: горизонтальну — вісь абсцис (Ox) і вертикальну — вісь ординат (Oy).

ПРИКЛАД 1

Функцію задано формулою $y=-\frac{2}{x}$. Користуючись графіком цієї функції (рис. 2):

1) знайдіть значення функції, якщо значення аргумента дорівнює -4; 2;
2) знайдіть значення аргумента, якщо значення функції дорівнює -4; -2; 3;
3) порівняйте $y(-4)$ і $y(-1)$;
4) порівняйте $y\left(\frac{1}{2}\right)$ і $y(3)$;
5) визначте знак добутку $y(-3)\cdot y(4)$;
6) визначте знак виразу $-\frac{y(1)\cdot y(3)}{y\left(\frac{-7}{5}\right)}$.

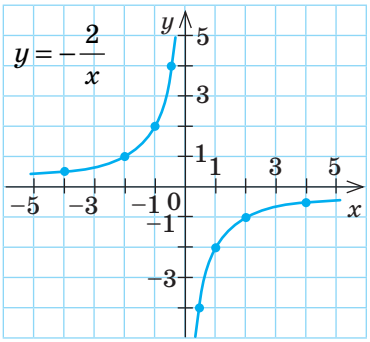
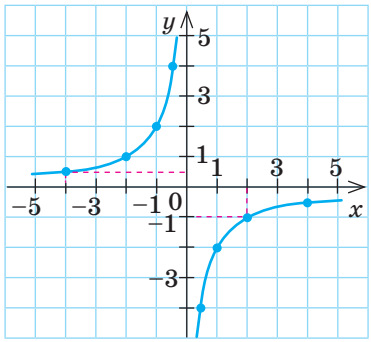
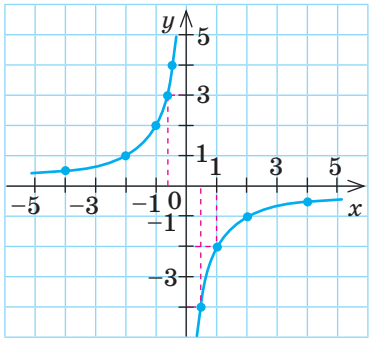
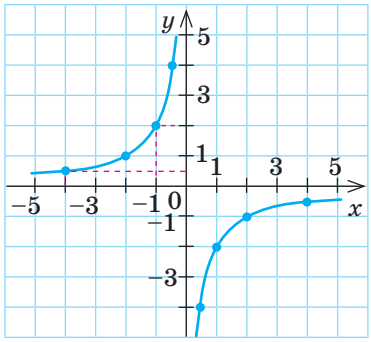
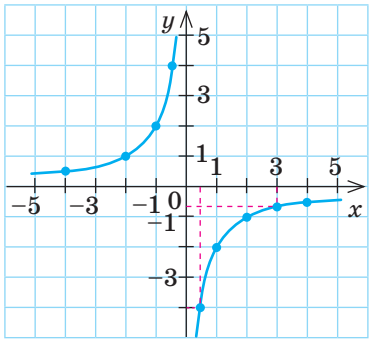
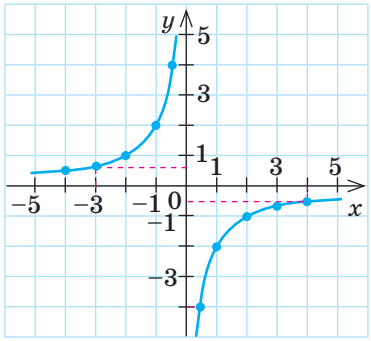


Рис. 2

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	На осі Ox знайдемо $x_1=-4$. Проведемо через цю точку пряму, паралельну осі Oy. Із точки перетину графіка функції з цією прямою опустимо перпендикуляр на вісь Oy. Отримаємо шукане значення функції y_1. Аналогічно знайдемо значення y_2 при $x_2=2$.	 При $x_1=-4$ $y_1\approx 0{,}5$, тобто $y(-4)\approx 0{,}5$; при $x_2=2$ $y_2\approx -1$, тобто $y(2)\approx -1$

Крок	Зміст дії	Результат дії	
КРОК 2	Знайдемо значення x_3, якщо $y_3=-4$. Через точку $y_3=-4$ на осі Oy проведемо пряму, паралельну осі Ox. Із точки перетину графіка функції з цією прямою опустимо перпендикуляр на вісь Ox. Отримаємо шукане значення x_3. Аналогічно шукаємо значення x при $y=-2$, $y=3$.		Якщо $y_3=-4$, то $x_3\approx 0{,}5$; якщо $y_4=-2$, то $x_4\approx 1$; якщо $y_5=3$, то $x_5\approx -0{,}7$
КРОК 3	Щоб порівняти $y(-4)$ і $y(-1)$, знайдемо за графіком значення функції в точках $x=-4$ і $x=-1$.		Очевидно, що $y(-4)<y(-1)$
КРОК 4	Щоб порівняти $y\left(\frac{1}{2}\right)$ і $y(3)$, знайдемо за графіком значення функції в точках $x=\frac{1}{2}$ і $x=3$.		Очевидно, що $y\left(\frac{1}{2}\right)<y(3)$
КРОК 5	Щоб визначити знак добутку $y(-3)\cdot y(4)$, достатньо визначити за графіком знаки обох множників $y(-3)$ і $y(4)$. Для цього порівняємо з нулем $y(-3)$ і $y(4)$.		Очевидно, що $y(-3)>0$, а $y(4)<0$, отже, $y(-3)\cdot y(4)<0$

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Для визначення знаків $y(-3)$ і $y(4)$ досить знати, у яких координатних чвертях розташований графік: якщо у II і IV чвертях, то $y>0$ при $x<0$ (II чверть) і $y<0$ при $x>0$ (IV чверть).

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 6	Визначимо знак виразу $-\dfrac{y(1)\cdot y(3)}{y\left(-\frac{7}{5}\right)}$. Для цього визначимо знаки кожного із множників у чисельнику та знак знаменника, з'ясувавши, у яких координатних чвертях розташований графік.	$y(1)<0$ (IV чверть); $y(3)<0$ (IV чверть); $y\left(-\frac{7}{5}\right)>0$ (II чверть); отже, $\dfrac{y(1)\cdot y(3)}{y\left(-\frac{7}{5}\right)}>0$, тому $-\dfrac{y(1)\cdot y(3)}{y\left(-\frac{7}{5}\right)}<0$

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Виконайте завдання, користуючись графіком функції $y=\dfrac{k}{x}$, $k\neq 0$.

а) Функцію задано формулою $y=\dfrac{6}{x}$. Користуючись графіком цієї функції (рис. 3):

1) знайдіть значення функції, якщо значення аргумента дорівнює −2; 3;
2) знайдіть значення аргумента, якщо значення функції дорівнює −4; −2; −1,5; 1; 4;
3) знайдіть значення аргумента, при яких функція набуває додатних значень;
4) знайдіть значення аргумента, при яких функція набуває від'ємних значень;
5) порівняйте $y(-5)$ і $y(-2)$;
6) порівняйте $y\left(\frac{1}{3}\right)$ і $y(4)$;
7) визначте знак добутку $y(-4)\cdot y(5)$;
8) визначте знак виразу $-\dfrac{y(1)\cdot y(2)}{y\left(-\frac{5}{3}\right)}$.

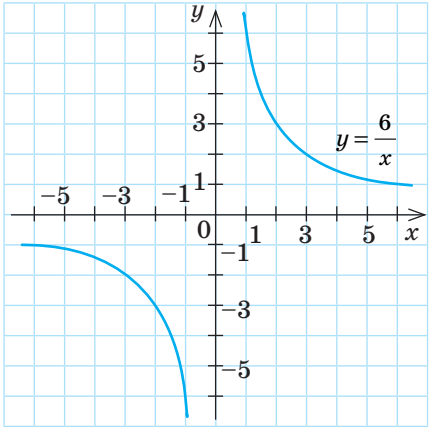


Рис. 3

б) Функцію задано формулою $y=-\dfrac{8}{x}$. Користуючись графіком цієї функції (рис. 4):

1) знайдіть значення функції, якщо значення аргумента дорівнює −4; 2;
2) знайдіть значення аргумента, якщо значення функції дорівнює −4; −2; −1,5; 1; 3;
3) знайдіть значення аргумента, при яких функція набуває додатних значень;

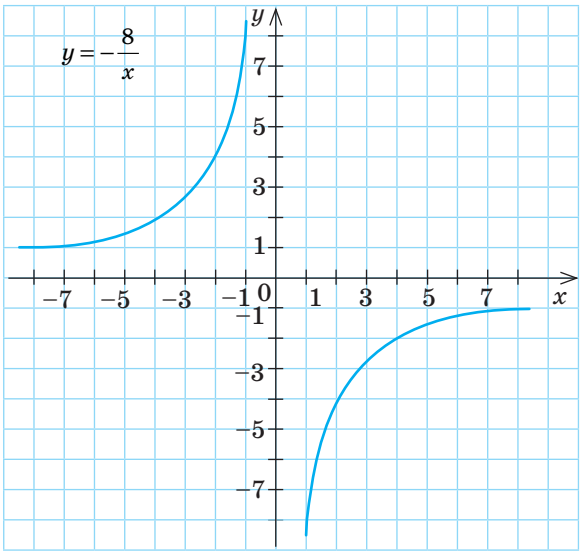


Рис. 4

4) знайдіть значення аргумента, при яких функція набуває від'ємних значень;

5) порівняйте $y(-4)$ і $y(-1)$; 6) порівняйте $y\left(\frac{1}{2}\right)$ і $y(6)$;

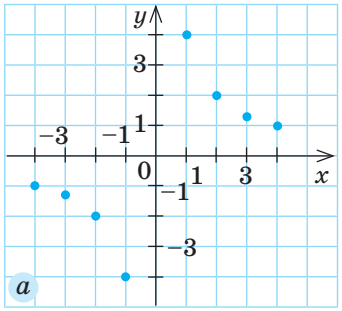
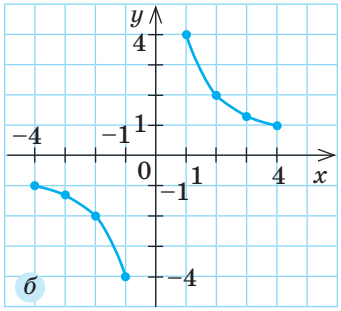
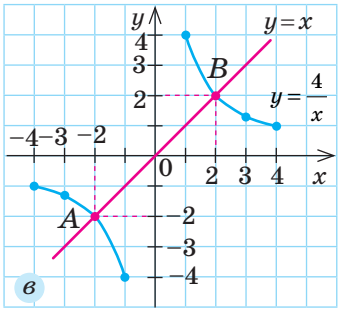
7) визначте знак добутку $y(-6)\cdot y(4)$;

8) визначте знак виразу $-\frac{y(1)\cdot y(6)}{y\left(-\frac{6}{5}\right)}$.

ПРИКЛАД 2

Побудуйте графік функції $y=\frac{4}{x}$ для цілих значень x, якщо $-4\leqslant x\leqslant 4$. Побудуйте графік функції $y=x$ та визначте координати точок перетину графіків функцій $y=\frac{4}{x}$ і $y=x$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо, які значення x задовольняють умову $-4\leqslant x\leqslant 4$ і є цілими.	$x=-4$, $x=-3$, $x=-2$, $x=-1$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$
КРОК 2	Складемо таблицю значень функції $y=\frac{4}{x}$, підставивши отримані значення x у формулу.	x: -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4 y: -1, $-\frac{4}{3}$, -2, -4, 4, 2, $\frac{4}{3}$, 1
КРОК 3	Позначимо на координатній площині точки, координати яких ми отримали (рис. *а*).	
КРОК 4	Сполучимо послідовно отримані точки й одержимо шуканий графік — гіперболу, що розміщена в I і III координатних чвертях (рис. *б*).	
КРОК 5	Побудуємо графік функції $y=x$ та визначимо координати точок перетину побудованих графіків.	 Точки перетину графіків: $A\ (-2;-2)$, $B\ (2;2)$

Відповідь: $A\ (-2;-2)$, $B\ (2;2)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 У завданнях 1 і 2 складіть таблицю значень функції:

1) $y=\frac{10}{x}$ для цілих значень x, якщо $-5\leqslant x\leqslant 5$;

2) $y=-\frac{8}{x}$ для цілих значень x, якщо $-4\leqslant x\leqslant 4$.

У завданнях 3–6 побудуйте графік функції:

3) $y=\frac{3}{x}$ для $-3\leqslant x\leqslant 3$;

4) $y=-\frac{4}{x}$ для $-4\leqslant x\leqslant 4$;

5) $y=\frac{5}{x}$;

6) $y=-\frac{12}{x}$.

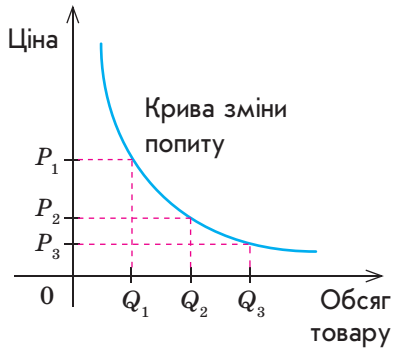
У завданнях 7 і 8 побудуйте в одній системі координат графіки заданих функцій та визначте координати точок їх перетину.

7) $y=\frac{3}{x}$ і $y=x+2$;

8) $y=-\frac{2}{x}$ і $y=x-3$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Між обсягом товару та його ціною існує обернено пропорційна залежність.



ПРИКЛАД 3

Визначте, чи проходить графік функції $y=\frac{4}{3x}$ через точку $C\left(-\frac{1}{3};-4\right)$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо абсцису x_0 та ординату y_0 точки $C\left(-\frac{1}{3};-4\right)$.	$x_0=-\frac{1}{3}$; $y_0=-4$
КРОК 2	Підставимо абсцису та ординату точки C у формулу $y=\frac{4}{3x}$. Перевіримо, чи є правильною рівність.	$-4=\frac{4}{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$; $-4=-4$ (правильна числова рівність)
КРОК 3	Зробимо висновок, виходячи з того, що координати точки C задовольняють рівняння $y=\frac{4}{3x}$.	Точка C належить графіку функції $y=\frac{4}{3x}$

Відповідь: графік функції проходить через задану точку.

ПРИКЛАД 4

Визначте, при якому значенні k графік функції $y=-\frac{k}{x}$ проходить через точку $F(5;-15)$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо абсцису x_0 та ординату y_0 точки $F(5;-15)$.	$x_0=5$; $y_0=-15$
КРОК 2	Підставимо абсцису та ординату точки F у формулу $y=-\frac{k}{x}$. Визначимо k як невідоме ділене.	$-15=-\frac{k}{5}$; $k=75$

Відповідь: 75.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть закономірність і визначте невідоме число.

78	52	26
97	78	59
21	30	?

ТРЕНУЄМОСЯ

3 У завданнях 1–4 визначте, чи проходить графік заданої функції через точку A, якщо:

1) $y=\frac{8}{x}$, $A(4;2)$;

2) $y=-\frac{9}{x}$, $A(3;-27)$;

3) $y=\frac{3}{2x}$, $A\left(-\frac{1}{2};-3\right)$;

4) $y=-\frac{8}{5x}$, $A\left(\frac{2}{5};-6\right)$.

У завданнях 5 і 6 визначте, при якому значенні k графік заданої функції проходить через точку F, якщо:

5) $y=\frac{k}{x}$, $F(6;-12)$;

6) $y=-\frac{k}{x}$, $F(-3;30)$.

7) Графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $L\left(-\frac{1}{2};14\right)$.

Чи проходить графік функції через точку $K\left(-\frac{7}{9};9\right)$?

8) Графік функції $y=-\frac{k}{x}$ проходить через точку $N\left(12;-\frac{1}{3}\right)$.

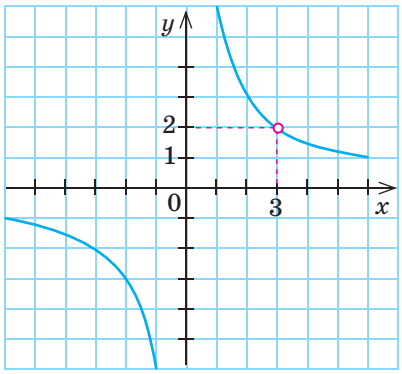
Чи проходить графік функції через точку $M(28;-7)$?

ПРИКЛАД 5

Побудуйте графік функції $g(x)=\frac{54-18x}{-3x^2+9x}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо чисельник і знаменник дробу, яким задано функцію, на множники.	$g(x)=\frac{18(3-x)}{3x(3-x)}$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Знайдемо область визначення функції з умови $3x(3-x)\neq 0$.	$3x(3-x)\neq 0$; $D(g)$: $x\neq 0$, $x\neq 3$
КРОК 3	Скоротимо дріб, отриманий на кроці 1.	$g(x)=\frac{6}{x}$
КРОК 4	Побудуємо графік функції $g(x)=\frac{6}{x}$.	
КРОК 5	Звернемо увагу на область визначення функції $D(g)$: $x\neq 0$, $x\neq 3$. Зробимо висновок: • умова $x\neq 0$ виконується автоматично, і вісь Oy є вертикальною асимптотою; • оскільки $x\neq 3$, на графіку слід вилучити точку з абсцисою 3. Проведемо через точку на осі Ox з абсцисою 3 пряму, паралельну осі Oy. Вона перетне графік у точці, яку слід вилучити.	

ТРЕНУЄМОСЯ

4 У завданнях 1–4 знайдіть область визначення функції:

1) $f(x)=\frac{15}{x}$;
2) $f(x)=-\frac{33}{x}$;
3) $f(x)=\frac{2}{x-3}$;
4) $f(x)=-\frac{1}{x+4}$.

У завданнях 5–8 побудуйте графік функції:

5) $f(x)=\frac{3x}{x^2}$;
6) $f(x)=-\frac{5x^2}{x^3}$;
7) $g(x)=\frac{16-8x}{-2x^2+4x}$;
8) $g(x)=\frac{12x-36}{12x-4x^2}$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Графік функції $y=-\frac{10}{x}$ розташований у II і IV координатних чвертях.
2) Якщо $x\cdot y=1$ і $x=0$, то $y=1$.
3) Якщо $y=\frac{9}{x}$, то $x=\frac{9}{y}$.
4) Значення функції $y=\frac{25}{x}$ не може дорівнювати 0.
5) Значення функції $y=\frac{13}{x}$ може дорівнювати -1.

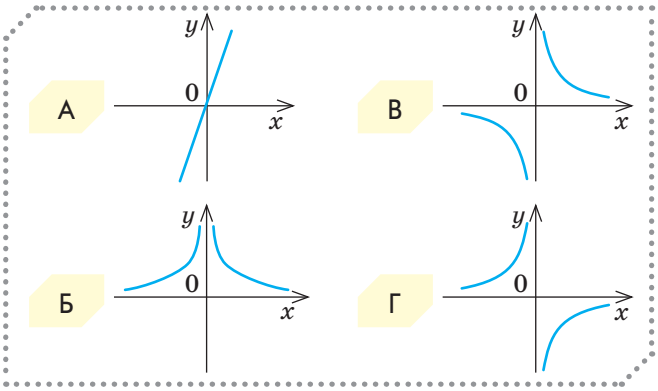
Першу в історії людства програму для обчислювальної машини написала в 1843 р. графиня Ада Августа Лавлейс, донька великого англійського поета Джорджа Байрона. Аду Лавлейс вважають першим програмістом. На її честь названо універсальну мову програмування «Ада».

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 9

1 Виберіть графік функції $y=\frac{2}{x}$.



2 Задано функцію $y=-\frac{2}{3x}$. Знайдіть $y(-2)$.

А	Б	В	Г
-3	$-\frac{1}{3}$	3	$\frac{1}{3}$

3 Користуючись графіком функції $y=\frac{8}{x}$ (рис. 5), знайдіть значення аргумента, якщо значення функції дорівнює 4.

А	Б	В	Г
1	2	4	8

4 На рис. 6 зображено точки L, M, N, P у прямокутній системі координат. Виберіть точку, через яку *може* пройти графік функції $y=\frac{k}{x}$, якщо $k<0$.

А	Б	В	Г
Точка L	Точка M	Точка P	Точка N

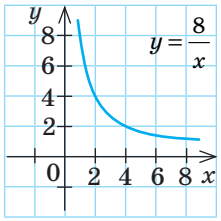


Рис. 5

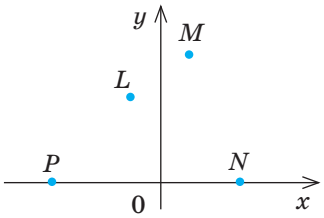


Рис. 6

5 Кількість N секцій радіатора опалення, необхідних для обігріву приміщення загальною площею S (у м²), обчислюється за формулою $N=\frac{100S}{P}$, де P — потужність (у Вт) однієї секції радіатора. Задайте формулою залежність P від S, якщо $N=30$.

А	Б	В	Г
$P=\frac{10S}{3}$	$P=3000S$	$P=\frac{3}{10S}$	$P=\frac{1}{3000S}$

6 Установіть відповідність між функціями (1–3) і точками (А–Г), через які проходять графіки цих функцій.

1	$y=\frac{5}{x}$	А	$\left(1;\frac{5}{2}\right)$
2	$y=\frac{1}{5x}$	Б	$\left(2;\frac{1}{10}\right)$
		В	$\left(10;\frac{1}{10}\right)$
3	$y=\frac{1}{x}$	Г	$\left(2;\frac{5}{2}\right)$

7 Графік функції $y=-\frac{k}{x}$ проходить через точку $N\left(15;-\frac{1}{6}\right)$.

1) Знайдіть значення k.

2) Визначте, чи проходить графік цієї функції через точку $M(10;-0{,}25)$.

8 Задано функцію $y=\frac{2x+6}{x^2+3x}$.

1) Знайдіть область її визначення $D(y)$.

2) Побудуйте графік цієї функції.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ТЕЛЕФОННІ РОЗМОВИ»

Оператором мобільного зв'язку було проведено маркетингове дослідження щодо тривалості телефонних розмов клієнтів протягом дня. У ході дослідження з'ясовувалося, скільки абонентів яку кількість часу в день витрачають на телефонні розмови. На рис. 7 наведено результат цього дослідження — залежність кількості n абонентів від тривалості t (у хв) їхніх телефонних розмов за день. Дослідження показало, що величини n і t пов'язані рівнянням $n \cdot t = k$, $k > 0$.

1. Знайдіть значення k, якщо відомо, що одна з точок, зображених на рис. 7, має координати $(40;\ 210)$.
2. Визначте, скільки абонентів мобільного оператора витрачають одну годину в день на телефонні розмови.
3. 20 абонентів витрачають у день лише T хв на телефонні розмови. Знайдіть T.
4. На основі отриманої інформації (рис. 7) менеджер компанії зробив такий висновок: «Значна кількість наших абонентів розмовляє по телефону мало, але дуже мало наших клієнтів витрачає на телефонні розмови багато часу щодня». Чи правильний висновок зробив менеджер компанії?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- 1 липня 1993 р. перший Президент незалежної України здійснив перший в історії країни дзвінок із мобільного телефону.
- За 20 років мобільного зв'язку в Україні вага мобільних телефонів зменшилася в 15 разів: від більше ніж 1 кг до менше ніж 100 г.

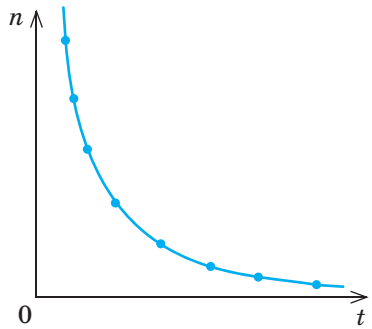


Рис. 7

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Виконайте завдання, користуючись графіком функції $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$.

а) Функцію задано формулою $y = \frac{5}{x}$. За її графіком (рис. 8):

1) знайдіть значення функції, якщо значення аргумента дорівнює -5; -1; 1; 5;
2) знайдіть значення аргумента, якщо значення функції дорівнює -5; -2; -1; 1; 2; 4; 5;
3) знайдіть значення аргумента, при яких функція набуває додатних значень;
4) знайдіть значення аргумента, при яких функція набуває від'ємних значень;
5) порівняйте $y(2)$ і $y(5)$; 6) порівняйте $y(-4)$ і $y(-5)$;
7) визначте знак добутку $y(-3) \cdot y(4)$;
8) визначте знак виразу $-\dfrac{y(2) \cdot y(5)}{y\left(-\frac{5}{3}\right)}$.

Див. приклад 1

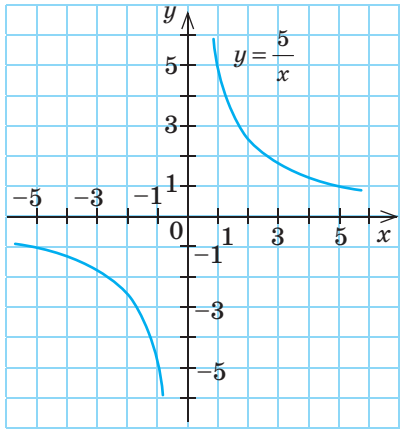


Рис. 8

б) Функцію задано формулою $y=-\frac{4}{x}$. Користуючись графіком цієї функції (рис. 9):

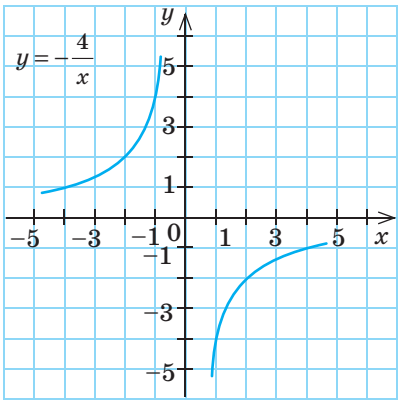


Рис. 9

1) знайдіть значення функції, якщо значення аргумента дорівнює −4; −2; 1; 4;
2) знайдіть значення аргумента, якщо значення функції дорівнює −4; −2; −1; 1; 2; 3; 4;
3) знайдіть значення аргумента, при яких функція набуває додатних значень;
4) знайдіть значення аргумента, при яких функція набуває від'ємних значень;
5) порівняйте $y(3)$ і $y(2)$;
6) порівняйте $y(-4)$ і $y(-3)$;
7) визначте знак добутку $y(-4)\cdot y(5)$;
8) визначте знак виразу $-\frac{y(2)\cdot y(4)}{y\left(-\frac{8}{7}\right)}$.

Див. приклад 2

2 Побудуйте в одній системі координат графіки заданих функцій та визначте координати точок перетину цих графіків.

1) $y=\frac{4}{x}$ і $y=x+3$;
2) $y=-\frac{1}{x}$ і $y=x-2$.

Див. приклади 3, 4

3 У завданнях 1–2 визначте, чи проходить графік заданої функції через точку B, якщо:

1) $y=\frac{10}{x}$, $B(5;2)$;
2) $y=-\frac{5}{6x}$, $B\left(-\frac{5}{6};1\right)$.
3) Знайдіть значення k, при якому графік функції $y=-\frac{k}{x}$ проходить через точку $F(-24;-2)$.
4) Графік функції $y=\frac{k}{x}$ проходить через точку $L\left(-\frac{1}{6};18\right)$. Визначте, чи проходить графік цієї функції через точку $K\left(-\frac{3}{8};80\right)$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Прислів'я — математичні «портрети» стійких закономірностей. Ось прислів'я, що можуть «проілюструвати» властивості функції оберненої пропорційності:

- М'яко стелить, так жорстко спати.
- Родичів багато, та ніде пообідати.
- Хто вище злізе, дужче падає.

Див. приклад 5

4 Побудуйте графік функції:

1) $f(x)=\frac{4x}{x^2}$;
2) $f(x)=-\frac{6x^2}{x^3}$;
3) $g(x)=\frac{96-24x}{-3x^2+12x}$;
4) $g(x)=\frac{10x-20}{10x-5x^2}$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Знайдіть значення виразу:

1) m^2 при $m=5$;
2) x^2 при $x=1{,}2$;
3) n^2 при $n=-4$;
4) k^2 при $k=-3$;
5) a^2 при $a=-\frac{2}{7}$;
6) b^2 при $b=-\frac{5}{2}$.

Уява — це здатність до відкриттів... Це те, що відчуває та виявляє реальність, яку ми не бачимо, яка існує не для наших чуттів. Математична наука являє нам сутність таких речей. Це мова невидимих відношень між речами.

Ада Лавлейс

В ОДИН КЛІК

Для побудови графіка функції $y=\frac{k}{x}$ ви складали таблиці значень функції, позначали на координатній площині отримані точки та сполучали їх.

Проте точніші результати побудови графіків функцій ви можете отримати за допомогою комп'ютерних програм, таких як MathCad, Advanced Grapher, GRAN 1, MathKit, GeoGebra, Maple та електронних таблиць Excel.

Давайте спробуємо побудувати разом графіки оберненої пропорційності за допомогою програми Advanced Grapher.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

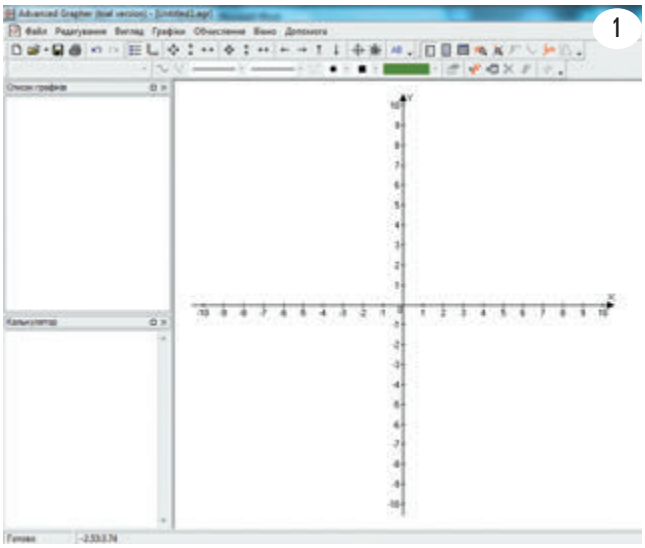
Ознайомлювальну версію програми ви можете завантажити за посиланням
www.freeware.com.ua/program3366.html

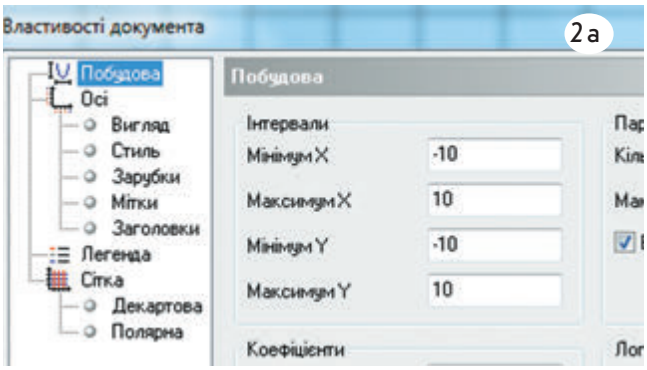
ПРИКЛАД 1

Побудуйте графіки функцій $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{1}{x}+2$ та $y=\frac{1}{x}-2$ в одній системі координат.

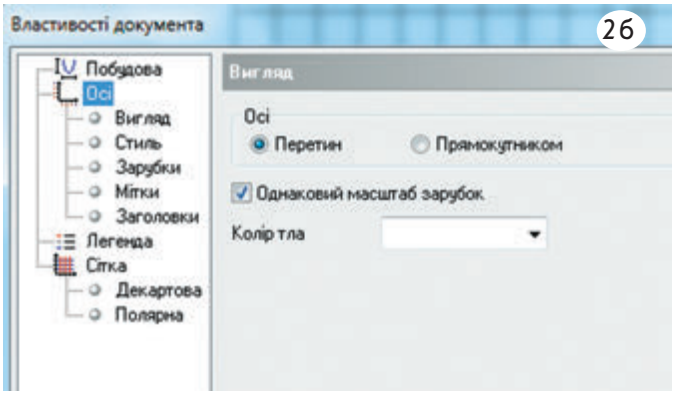
Алгоритм побудови

1. Запустіть програму Advanced Grapher.
2. Установіть потрібні налаштування для області побудови, використовуючи кнопку Властивості документа.
   а) У лівій частині вікна виберіть зі списку пункт Побудова, у правій частині вікна задайте мінімальне й максимальне значення для x та y.

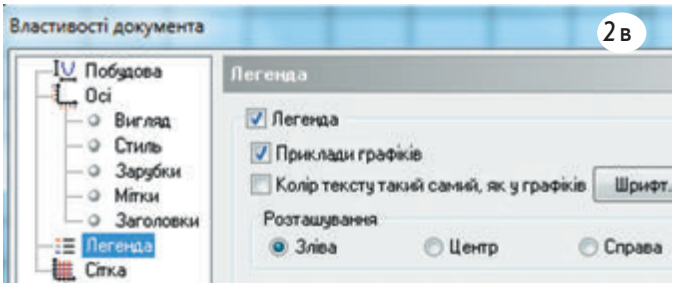

1



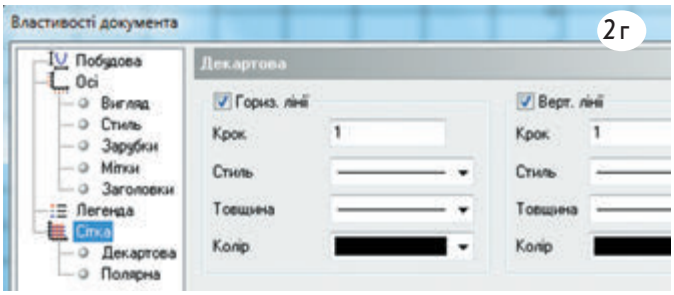
2 а



б) У лівій частині вікна виберіть зі списку пункт Осі, у правій частині вікна встановіть перемикач Перетин і прапорець перед параметром Однаковий масштаб зарубок.



в) Активуйте в списку лівої частини вікна пункт Легенда, у правій частині вікна встановіть прапорець перед словом Легенда та перемикач Зліва.



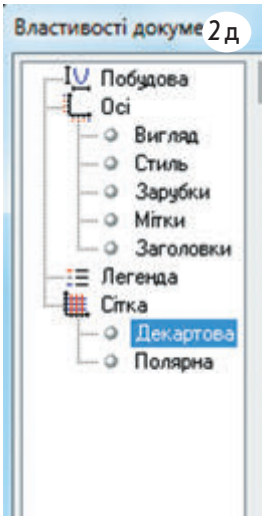
г) Активуйте в списку лівої частини вікна пункт Сітка, у правій частині вікна встановіть прапорці для вертикальної та горизонтальної ліній, а також значення 1 у полі Крок.

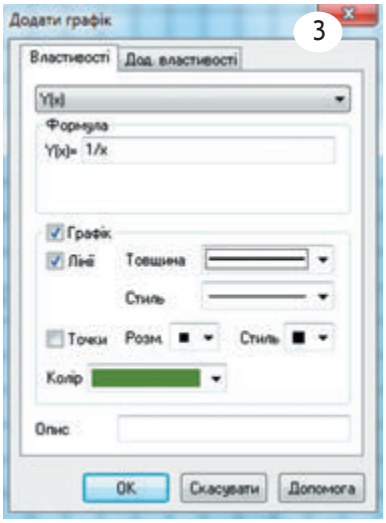
д) Активуйте в списку лівої частини вікна пункт Декартова.

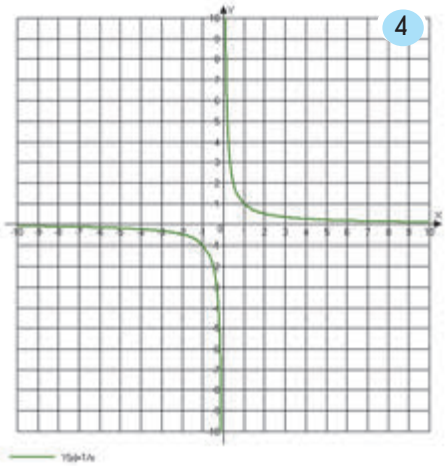
е) Збережіть налаштування, натиснувши кнопку OK.

3. На панелі інструментів за допомогою кнопки Додати графік $+F$ відкрийте вікно для введення необхідної функції та введіть у поле Формула текст $1/x$. Виберіть товщину і колір лінії, натисніть кнопку OK.

4. Перегляньте результат.







Приклади побудови графіків функцій $y=\frac{1}{x}+2$, $y=\frac{1}{x}-2$, $y=\frac{1}{x+3}$, $y=\frac{1}{x-3}$ та $y=\frac{1}{x+3}-2$ ви можете знайти на сайті interactive.ranok.com.ua. Опрацюйте їх і спробуйте зробити висновки зі своїх спостережень, заповнивши таблицю.

Функція	Як розташований графік функції відносно графіка функції $y=\frac{1}{x}$
$y=\frac{1}{x}+2$	
$y=\frac{1}{x}-2$	
$y=\frac{1}{x+3}$	
$y=\frac{1}{x-3}$	
$y=\frac{1}{x+3}-2$	

ДОСЛІДЖУЄМО

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Людина живе на 17-му поверсі. До своєї квартири вона піднімається ліфтом у двох випадках: якщо на вулиці дощ або якщо разом із нею піднімається хтось із сусідів. Інакше людина піднімається ліфтом лише до 9-го поверху, а далі йде пішки. Чому?

Із графіками вигляду $y=\frac{k}{x-a}+b$ ви познайомитеся в наступних класах. А будувати й досліджувати їх за допомогою комп'ютера ви можете вже зараз.

ТРЕНУЄМОСЯ

За допомогою комп'ютерної програми Advanced Grapher побудуйте графік функції:

1) $y=\frac{2}{x}+4$;
2) $y=\frac{2}{x}-4$;
3) $y=\frac{3}{x+5}$;
4) $y=\frac{3}{x-5}$;
5) $y=\frac{1}{x+4}-5$;
6) $y=\frac{1}{x-4}+5$.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Ознайомитися з прикладами побудови графіків інших функцій ви можете на сайті interactive.ranok.com.ua

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 5—10

1 Ви навчилися виконувати дії з раціональними дробами.

Множення раціональних дробів

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D},$$

де $B\neq 0$, $D\neq 0$

Ділення раціональних дробів

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{A\cdot D}{B\cdot C},$$

де $B\neq 0$, $D\neq 0$, $C\neq 0$

Піднесення раціонального дробу до степеня

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n},\ \text{де}\ B\neq 0$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^1=\frac{A}{B}$$

2 Ви познайомилися з раціональними рівняннями, дізналися, які рівняння називають рівносильними.

Раціональні рівняння

Рівняння, у яких ліва й права частини є раціональними виразами

Цілі (або цілі раціональні) рівняння

Рівняння, ліва й права частини яких є цілими раціональними виразами

Дробові (або дробово-раціональні) рівняння

Рівняння, у яких хоча б одна з частин є дробовим раціональним виразом

Дробово-раціональні рівняння називають **рівносильними**, якщо всі розв'язки першого рівняння є розв'язками другого, і навпаки, усі розв'язки другого рівняння є розв'язками першого. Рівносильними вважають і ті рівняння, які не мають розв'язків.

3 Ви навчилися розв'язувати дробово-раціональні рівняння різними способами.

Спосіб 1. Зведення до рівносильної системи

Алгоритм розв'язання

1. Звести рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени.
2. Звести отримане рівняння до рівносильної системи $\begin{cases}P(x)=0,\\ Q(x)\neq 0.\end{cases}$
3. Розв'язати рівняння $P(x)=0$.
4. Знайти, при яких x $Q(x)\neq 0$, тобто знайти ОДЗ рівняння $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$.
5. Проаналізувати, які розв'язки рівняння $P(x)=0$ задовольняють ОДЗ.

Спосіб 2. Здійснення безпосередньої перевірки

Алгоритм розв'язання

1. Звести рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени.
2. Розв'язати рівняння $P(x)=0$.
3. Виконати перевірку отриманих коренів, підставивши їх безпосередньо в початкове рівняння.
4. Виключити ті корені рівняння, при яких знаменник початкового рівняння дорівнює нулю.

4 Ви познайомилися зі степенем із цілим показником та його властивостями.

Степенем із цілим від'ємним показником числа a, відмінного від нуля, є дріб, чисельник якого дорівнює 1, а знаменник є степенем числа a з натуральним показником, тобто $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$, n — натуральне число.

Властивості степеня з цілим показником (для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$ та довільних цілих m і n)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$\frac{1}{a^{-n}} = a^n$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$\frac{a^{-m}}{b^{-n}} = \frac{b^n}{a^m}$
$(ab)^n = a^n b^n$	
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	

5 Ви навчилися записувати числа в стандартному вигляді.

Стандартний вигляд числа a — запис числа у вигляді $a_1 \cdot 10^n$, де $1 \leqslant a_1 < 10$, n — ціле число.

Наприклад: $1{,}23 \cdot 10^{16}$; $2{,}32 \cdot 10^{-26}$.

Значуща частина числа a

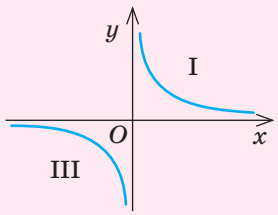
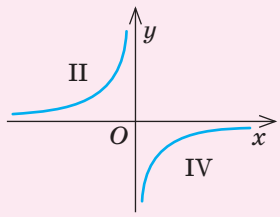
Порядок числа a

$$\underbrace{150\,000\,000}_{\text{Число } a} = \underbrace{1{,}5}_{\text{Число } a\text{, записане в стандартному вигляді}} \cdot 10^8$$

6 Ви познайомилися з функцією $y = \frac{k}{x}$, її графіком та властивостями.

Оберненою пропорційністю називають функцію, яку можна задати формулою $y = \frac{k}{x}$, де x — аргумент (незалежна змінна), k — число, відмінне від нуля.

Графік функції $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$

$k > 0$	$k < 0$
якщо $x > 0$, то $y > 0$ якщо $x < 0$, то $y < 0$	якщо $x < 0$, то $y > 0$ якщо $x > 0$, то $y < 0$
	

Властивості функції

$y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$

- Область визначення функції — $D(y)$: $x \neq 0$
- Область значень функції — $E(y)$: $y \neq 0$
- Графік функції — дві вітки гіперболи
- Гіпербола має дві асимптоти — вісь абсцис (Ox) і вісь ординат (Oy)

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 3

Варіант 1

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ
Варіант 2 контрольної роботи № 2
див. на сайті interactive.ranok.com.ua

1 Подайте у вигляді дробу вираз $\frac{18}{a^{15}}\cdot\frac{a^5}{6}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3a^3}$	$\frac{3}{a^3}$	$\frac{3}{a^{10}}$	$\frac{1}{3a^{10}}$

2 Виконайте дії $\left(\frac{2}{y^3}\right)^2:\frac{1}{y^6}$.

А	Б	В	Г
4	$\frac{1}{4}$	$4y$	$\frac{4}{y^{12}}$

3 Спростіть вираз $\left(1+\frac{2}{n}\right):\frac{n+2}{7}$.

А	Б	В	Г
$\frac{2}{7}$	$\frac{7}{n}$	$\frac{n}{7}$	$\frac{7}{2}$

4 Розв'яжіть рівняння $\frac{x+4}{x^2-16}=0$.

А	Б	В	Г
$x=\pm4$	$x=-4$	$x=4$	Коренів немає

5 Автомобільний компресор (пристрій для накачування автомобільних шин) нагнітає n л повітря в шину за t хв $(t>2)$. За якою формулою можна обчислити об'єм m повітря (у л) у шині через 2 хв після початку її накачування?

А	Б	В	Г
$m=\frac{n}{2t}$	$m=\frac{2n}{t}$	$m=\frac{2t}{n}$	$m=\frac{t}{2n}$

6 За 11 років існування Музею води в Києві його відвідали понад 1 410 000 людей. Подайте це число в стандартному вигляді.

А	Б	В	Г
$141\cdot10^4$	$14{,}1\cdot10^5$	$1\cdot10^6$	$1{,}41\cdot10^6$

7 Розв'яжіть рівняння $\frac{12x-6}{x+5}=\frac{4+13x}{x+5}$.

8 Доведіть тотожність $\frac{(a-1)^2}{14a-7}:\left(\frac{a^2}{2a-1}-1\right)=\frac{1}{7}$, якщо $a\neq1$, $a\neq\frac{1}{2}$.

9 Туристична група має проїхати автобусом 1200 км із постійною швидкістю. Запланована швидкість автобуса має бути 50 км/год. Водій підрахував, що якби можна було проїжджати на x км більше щогодини, то подорож тривала б на 4 год менше.

1) Запишіть рівняння для визначення x.

2) Розв'яжіть рівняння та визначте x.

10 Знайдіть область визначення функції $y=\frac{6x-12}{x^2-2x}$. Побудуйте її графік.

Бонусне завдання. Знайдіть значення виразу $x^2+\frac{9}{x^2}$, якщо відомо, що $x+\frac{3}{x}=5$.

2 КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

- Знання властивостей квадратичної функції стануть вам у пригоді під час розв'язування актуальних задач із геометрії, фізики, економіки
- За допомогою діаграм Ейлера — Венна ви зможете інтерпретувати логічні зв'язки між поняттями, здійснювати правильний вибір
- Математична модель дійсних чисел використовується в науці й техніці для вимірювання величин, що безперервно змінюються; основне призначення цієї моделі — бути базою для аналітичних методів досліджень
- За допомогою прикладних комп'ютерних програм ви навчитеся будувати графіки функцій і розв'язувати рівняння графічним способом

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

- Походження та еволюція знака квадратного кореня
- Алгоритми добування квадратного кореня
- Формули складного кореня
- Золотий переріз у мистецтві та музиці
- Парабола навколо нас
- Таємниця числа π
- Георг Кантор і теорія множин

Якщо ви хочете мати те, чого ніколи не мали, — почніть робити те, чого ніколи не робили.

Річард Девід Бах

§ 11 ФУНКЦІЯ $y = x^2$, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ. ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

ВЧОРА — Ви навчилися розв'язувати задачі, використовуючи властивості лінійної функції та оберненої пропорційності

СЬОГОДНІ — Ви познайомитеся з окремим випадком квадратичної функції

ЗАВЖДИ — Ви зможете використовувати квадратичну функцію для розв'язування задач із фізики та економіки

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Перші таблиці квадратів чисел складали ще вавилоняни у II тис. до н. е.
- У 1848 р. вийшла друком «Таблиця квадратів та кубів чисел до 100 000 з використанням до розкладу на множники великих чисел». Її автором був Яків Пилип Кулик (1793–1863), який народився й виріс у Львові, а згодом працював професором математики у Празькому університеті. Він був геніальним обчислювачем і створив багато математичних таблиць, що мали велике значення для розвитку математики.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- функція
- аргумент функції
- значення функції
- квадратична функція
- графік функції
- парабола
- графічний спосіб розв'язування рівнянь
- спільні точки графіків функцій

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Відомо, що площу квадрата обчислюють за формулою $S = a^2$, де $a > 0$ — сторона квадрата. Чи можна таку залежність вважати функціональною?

Ви знаєте, що **функцією** називають таку залежність змінної y від змінної x, при якій кожному значенню x за деяким правилом (законом) ставиться у відповідність **єдине значення** y.

Отже, оскільки кожному значенню a відповідає єдине значення S, то маємо функцію $S = a^2$, де $a > 0$ — аргумент, $S > 0$ — значення функції.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

ФУНКЦІЯ $y = x^2$, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

У загальному вигляді залежність площі квадрата від довжини його сторони можна подати так: $y = x^2$. Причому на x не накладається жодних обмежень (до квадрата можна підносити будь-яке число), а $y \geqslant 0$ (квадрат числа може набувати тільки невід'ємних значень).

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Функція $y = x^2$ є окремим випадком квадратичної функції (з якою ви познайомитеся в 9-му класі), причому на x не накладається жодних обмежень.

Побудуємо графік функції $y = x^2$. Для цього складемо таблицю значень цієї функції.

x	−3	−2,5	−2	−1,5	−1	0	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0	1	2,25	4	6,25	9

Позначимо точки, координати яких подано в таблиці, на координатній площині та сполучимо їх (рис. 1). Якщо зменшити крок, таблиця міститиме більше значень, а точки будуть розташовані щільніше (рис. 2). Ми отримали графік функції — неперервну криву лінію, яку називають **параболою**.

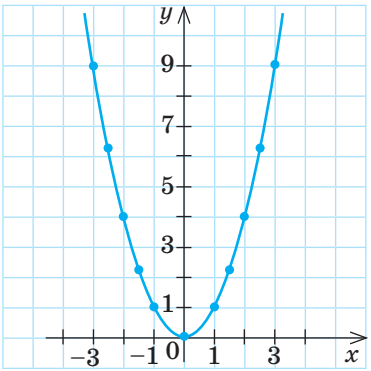


Рис. 1

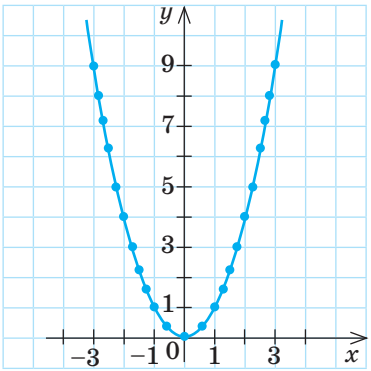


Рис. 2

Таблиця квадратів

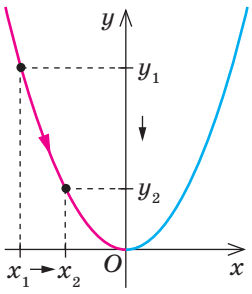
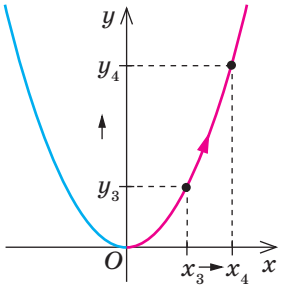
$11^2 = 121$	$21^2 = 441$
$12^2 = 144$	$22^2 = 484$
$13^2 = 169$	$23^2 = 529$
$14^2 = 196$	$24^2 = 576$
$15^2 = 225$	$25^2 = 625$
$16^2 = 256$	$26^2 = 676$
$17^2 = 289$	$27^2 = 729$
$18^2 = 324$	$28^2 = 784$
$19^2 = 361$	$29^2 = 841$
$20^2 = 400$	$30^2 = 900$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Графік функції $y = x^2$ називають **параболою**. Частини графіка, що розташовані в I та II координатних чвертях, називають **вітками параболи**, точку $O(0;0)$ — **вершиною параболи**.

Визначимо за отриманим графіком властивості функції $y = x^2$.

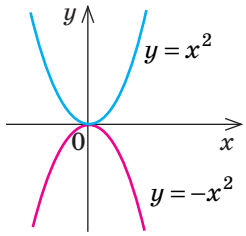
Властивості функції $y = x^2$

№ з/п	Властивість	Обґрунтування
1	Графік функції проходить через початок координат.	При $x = 0$ маємо $y(0) = 0^2 = 0$.
2	Графік розміщений лише вище від осі Ox (у I і II координатних чвертях).	При будь-яких значеннях x значення y є невід'ємним $(y \geqslant 0)$.
3	Дві вітки параболи є дзеркальними відображеннями одна одної відносно осі Oy.	Протилежним значенням аргумента відповідає одне й те саме значення функції (див. таблицю на с. 114).
4	При $x < 0$: значення x збільшується, значення y зменшується (рисунок ліворуч). При $x > 0$: значення x збільшується, значення y збільшується (рисунок праворуч).	Читаємо графік зліва направо.  

ПРИКЛАД 1

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=x^2$ та $y=-x^2$. Зробіть висновок про взаємне розташування графіків цих функцій.

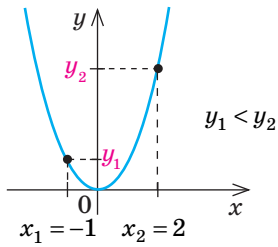
Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Складемо таблицю значень функції $y=-x^2$ із кроком 1 для проміжку $-2 \leqslant x \leqslant 2$.	x: -2, -1, 0, 1, 2 $y=-x^2$: -4, -1, 0, -1, -4
КРОК 2	Скориставшись складеною таблицею й таблицею значень функції $y=x^2$ (с. 114), побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y=x^2$ і $y=-x^2$.	КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ Для функції $y=-x^2$: $y(2)=-2^2=-4$; $y(-2)=-(-2)^2=-4$ 
КРОК 3	Проаналізуємо взаємне розміщення графіків функцій $y_1=x^2$ і $y_2=-x^2$: 1) $y_1(0)=0^2=0$; $y_2(0)=-0^2=0$; 2) $y_1(2)=2^2=4$; $y_2(2)=-2^2=-4$; 3) $x^2 \geqslant 0$, $y_1 \geqslant 0$; $-x^2 \leqslant 0$, $y_2 \leqslant 0$.	1) Обидва графіки проходять через початок координат. 2) Одним і тим самим значенням аргумента відповідають протилежні значення функції. Отже, графіки є дзеркальними відображеннями один одного відносно осі Ox. 3) Графік функції $y=x^2$ лежить у I і II координатних чвертях; графік функції $y=-x^2$ лежить у III і IV координатних чвертях.

ПРИКЛАД 2

За графіком функції $y=x^2$ порівняйте $y(-1)$ та $y(2)$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Позначимо на графіку точки з абсцисами $x_1=-1$ і $x_2=2$.	
КРОК 2	Знайдемо ординати позначених точок $y_1=y(-1)$ і $y_2=y(2)$.	
КРОК 3	Порівняємо y_1 та y_2, користуючись графіком: точка y_2 розташована вище за точку y_1, тому $y_1<y_2$.	

Відповідь: $y(-1)<y(2)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 У завданнях 1–6 за графіком функції $y = x^2$ (рис. 3) порівняйте:

1) $y(0)$ і $y(1)$;
2) $y(0)$ і $y(4)$;
3) $y(0)$ і $y(-2)$;
4) $y(-3)$ і $y(0)$;
5) $y(2)$ і $y(-3)$;
6) $y(-2)$ і $y(-1)$.

У завданнях 7–8 за графіком функції $y = x^2$ (рис. 3) визначте знак виразу:

7) $y(-2{,}5) - y\left(\frac{2}{7}\right)$;
8) $y(0{,}7) - y\left(-\frac{5}{3}\right)$.

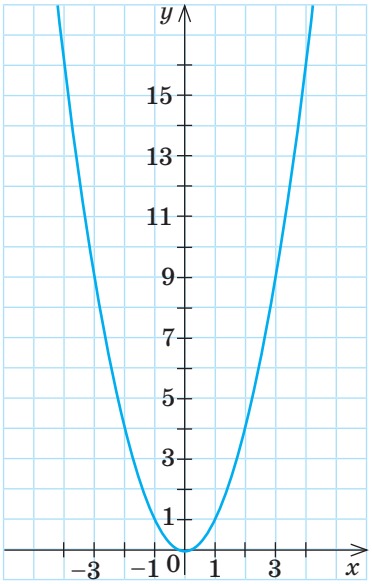
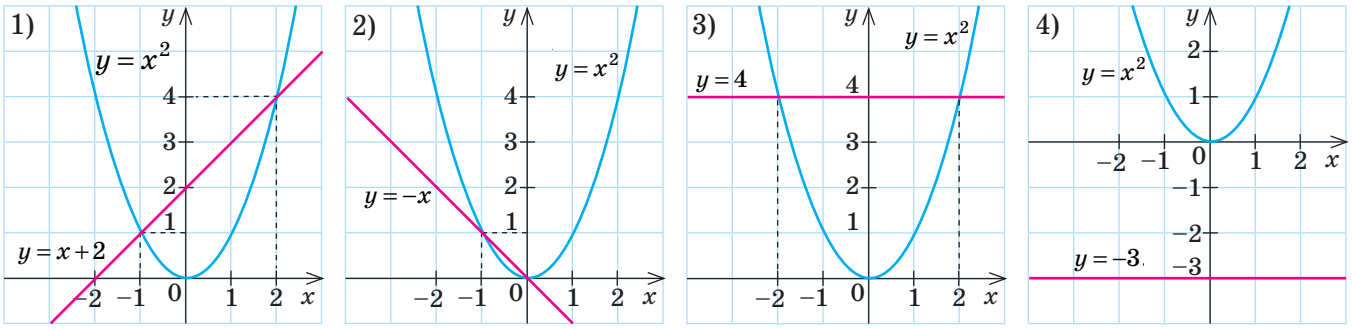


Рис. 3

ПРИКЛАД 3

На рисунку зображено графіки двох функцій. Визначте координати точок перетину цих графіків.



Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	За рис. 1 знайдемо координати точок перетину графіків функцій $y = x^2$ і $y = x + 2$, тобто графічно розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2, \\ y = x + 2. \end{cases}$	$(-1; 1)$ і $(2; 4)$
2) КРОК 1	За рис. 2 графічно розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -x. \end{cases}$	$(0; 0)$ і $(-1; 1)$
3) КРОК 1	За рис. 3 графічно розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 4. \end{cases}$	$(-2; 4)$ і $(2; 4)$
4) КРОК 1	За рис. 4 графічно розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -3. \end{cases}$	Точок перетину немає

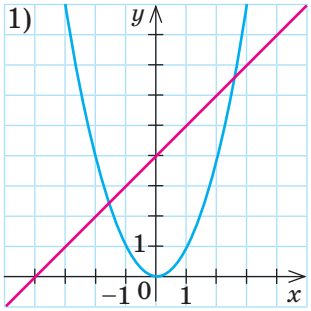
ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Дізнатися більше про властивості параболи ви можете за посиланням https://sites.google.com/site/matematicnatropa/metodiceskaa-kopilka/animacijni-resursi-z-matematiki/parabola

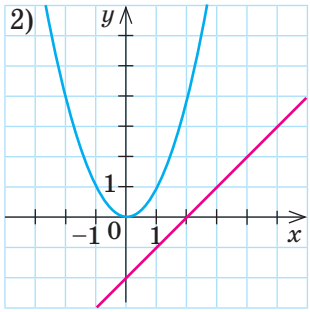
ТРЕНУЄМОСЯ

2 Узавданнях 1–2 визначте кількість точок перетину графіків:

1)

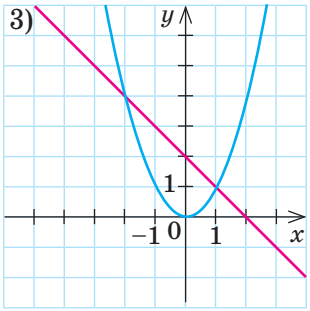


2)

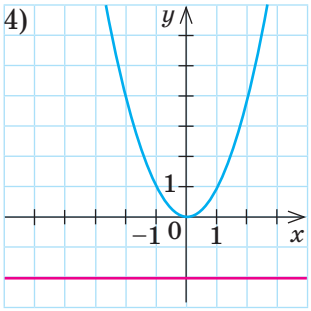


У завданнях 3–6 визначте координати точок перетину графіків:

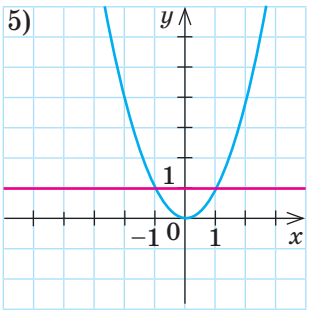
3)



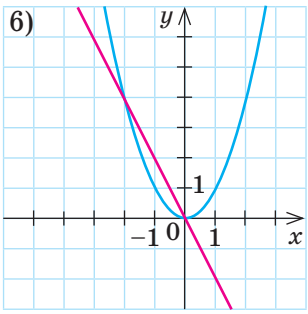
4)



5)



6)



У завданнях 7–8 розв'яжіть графічно систему рівнянь:

7) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x + 3; \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = -2x - 1. \end{cases}$

ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ

У 7-му класі ви розв'язували системи лінійних рівнянь графічним способом: знаходили спільну точку графіків двох функцій та визначали її координати, які й були розв'язками системи. Перевага цього способу полягає в тому, що графічна інтерпретація унаочнює розв'язання — можна одразу **побачити**, скільки розв'язків має система (скільки спільних точок мають графіки функцій). Недолік графічного способу в тому, що розв'язки, знайдені за допомогою графіків, є неточними. Перевірити їх можна підстановкою в систему рівнянь.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Перевага графічного способу — одразу видно кількість спільних точок графіків.
Недолік графічного способу — знайдені розв'язки є неточними.

СЛІД ЗНАТИ!

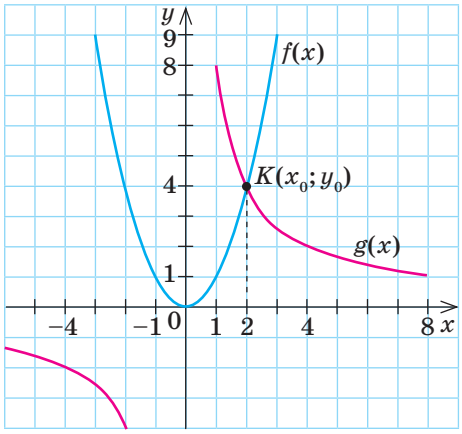
Графічний спосіб є зручним для знаходження **кількості** розв'язків системи рівнянь, тобто **кількості** спільних точок кількох графіків.

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть рівняння $x^2 = \frac{8}{x}$.

Розв'язання

Розв'язувати аналітично це рівняння ви ще не вмієте. Можна спробувати підібрати корінь, але цей метод потребує доведення того, що корінь єдиний. У таких випадках доцільно використати графічний спосіб розв'язування рівнянь.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Звернемо увагу на те, що вихідне рівняння має вигляд $f(x)=g(x)$, де $f(x)$ і $g(x)$ — функції, графіки яких ви вмієте будувати.	Ми ввели дві функції: $f(x)=x^2$, $g(x)=\frac{8}{x}$
КРОК 2	Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $f(x)=x^2$ і $g(x)=\frac{8}{x}$, склавши таблиці їх значень: $f(x)=x^2$: x: −2, −1, 0, 1, 2; y: 4, 1, 0, 1, 4 $g(x)=\frac{8}{x}$: x: −8, −4, −2, −1, 1, 2, 4; y: −1, −2, −4, −8, 8, 4, 2	
КРОК 3	Аналізуючи взаємне розташування графіків функцій, визначимо кількість їх спільних точок.	Точка $K(x_0; y_0)$ — єдина спільна точка
КРОК 4	З'ясуємо математичний зміст x_0 для заданого рівняння. **ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!** Шукати y_0 немає сенсу, оскільки рівняння містить змінну x і нас цікавить лише значення x.	x_0 — абсциса спільної точки, тобто значення, яке задовольняє рівняння. При цьому значенні ліва й права частини рівняння є рівними: $f(x_0)=g(x_0)$, тобто x_0 — корінь рівняння
КРОК 5	Визначимо за рисунком значення x_0.	$x_0 \approx 2$
КРОК 6	Перевіримо, чи є знайдений корінь точним, тобто чи задовольняє число 2 вихідне рівняння.	*Перевірка:* $2^2 = \frac{8}{2}$; $4=4$ — правильно
КРОК 7	Можна стверджувати, що $x_0=2$ є точним розв'язком рівняння.	$x_0=2$

Відповідь: 2.

Парабола в техніці

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

- Лише визначивши кількість розв'язків рівняння, можна знайти їх методом підбору.
- Графічний спосіб розв'язування рівняння $f(x)=g(x)$ передбачає знаходження значення лише змінної x.

Таким чином, можна сформулювати алгоритм розв'язування рівнянь графічним способом.

АЛГОРИТМ

Алгоритм розв'язування рівняння вигляду $f(x)=g(x)$ графічним способом

1. Зведіть вихідне рівняння до вигляду $f(x)=g(x)$ так, щоб у лівій і правій частинах рівняння отримати відомі функції, тобто функції, графіки яких ви вмієте будувати.
2. Введіть дві функції $y=f(x)$ та $y=g(x)$.
3. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} y=f(x), \\ y=g(x), \end{cases}$ тобто побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$ та знайдіть точки перетину побудованих графіків.
4. Визначте **абсциси** спільних точок графіків.
5. Запишіть відповідь, пам'ятаючи, що було знайдено наближені розв'язки рівняння (наприклад, $x \approx a$).

Парабола в архітектурі

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Щоб оцінити точність знайденого кореня, необхідно здійснити перевірку, підставивши його в рівняння $f(x)=g(x)$. Усі значення змінної, при яких утворюється правильна рівність, є точними коренями. Якщо в ході перевірки одержимо близькі, але не рівні значення $f(x)$ і $g(x)$, то знайдене значення кореня є наближеним.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 1) На рис. 4 зображено графіки функцій $y=x^2$ і $y=2x-5$. Визначте кількість коренів рівняння $x^2=2x-5$.

2) На рис. 5 зображено графіки функцій $y=x^2$ і $y=x+3$. Визначте кількість коренів рівняння $x^2=x+3$.

3) На рис. 6 зображено графіки функцій $y=2x$ і $y=\frac{2}{x}$. Розв'яжіть рівняння $2x=\frac{2}{x}$.

4) На рис. 7 зображено графіки функцій $y = x + 4$ і $y = -\frac{4}{x}$.

Розв'яжіть рівняння $x + 4 = -\frac{4}{x}$.

У завданнях 5–8 розв'яжіть графічно рівняння:

5) $x^2 = \frac{1}{x}$; 6) $x^2 = -\frac{2}{x}$; 7) $x - \frac{3}{x} + 2 = 0$; 8) $x + \frac{4}{x} - 5 = 0$.

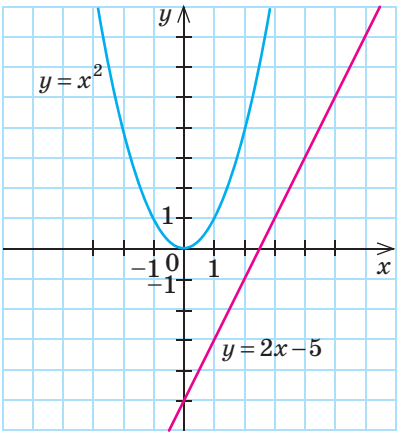


Рис. 4

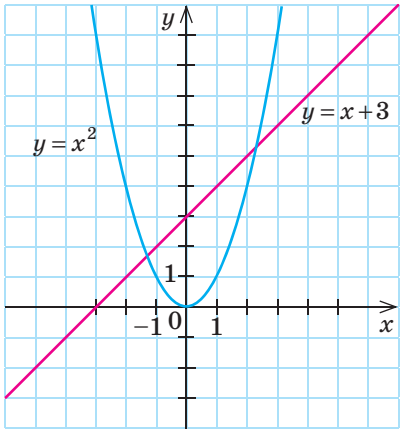


Рис. 5

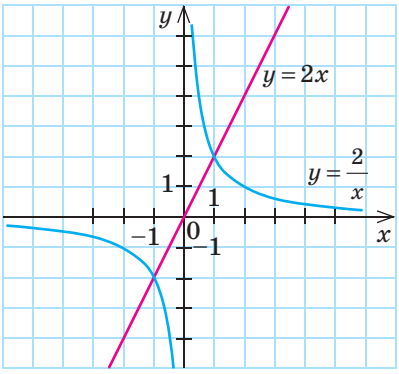


Рис. 6

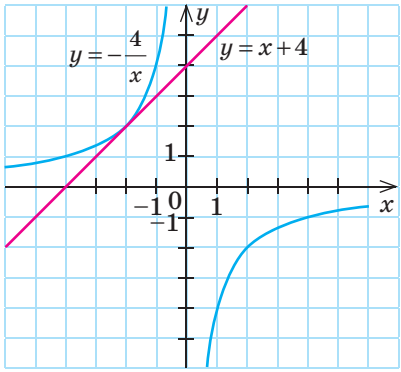


Рис. 7

Парабола в спорті

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Графік функції $y = x^2$ проходить через точку $(4; 2)$.

2) Графіки функцій $y = x^2$ і $y = -4$ не перетинаються.

3) Графіки функцій $y = x^2$ і $y = 9$ перетинаються у двох точках.

4) Якщо $y = x^2$ і $x > 0$, то $y > x$.

5) Якщо $y = x^2$ і $y = 1$, то $x = 1$ або $x = -1$.

Мирослав Іванович Жалдак — академік Академії педагогічних наук України, доктор педагогічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичних основ інформатики Національного педагогічного університету ім. М. П. Драгоманова. Опублікував понад 250 наукових робіт, у яких започатковано сучасні комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики. Один із авторів програмного комплексу GRAN, що дозволяє розв'язувати за допомогою комп'ютера математичні задачі різного рівня складності.

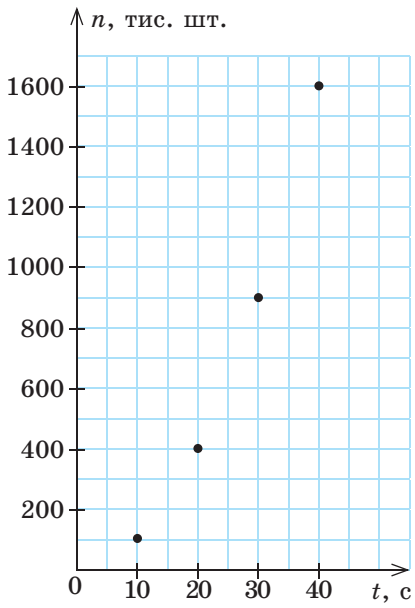


Рис. 8

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «МАРКЕТИНГ»

Кондитерська компанія реалізує новий вид шоколадних цукерок. Щоб покращити збут нової продукції, компанія замовила на телеканалі трансляцію рекламного ролика протягом чотирьох місяців (вересень — грудень). Відомо, що у вересні тривалість рекламного ролика становила 10 с, а кожного наступного місяця збільшувалася.

Відділ маркетингу, дослідивши обсяги продажу цукерок за цей час, отримав результати, подані на рис. 8. Кожна з чотирьох точок із координатами $(t; n)$ відповідає одному місяцю; t — тривалість ролика щодня (у с); n — кількість цукерок (у тис. шт.), проданих протягом місяця.

Користуючись рисунком, дайте відповіді на запитання.

1. Скільки шоколадних цукерок було продано у вересні?
2. Скільки секунд тривав щоденний рекламний ролик у жовтні?
3. Якою формулою можна задати залежність змінної n від змінної t?
4. Припустимо, що існуюча залежність n від t зберігатиметься і в подальшому. Скільки тисяч цукерок буде продано в січні, якщо протягом цього місяця щоденний рекламний ролик триватиме 50 с?

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Перспективні напрямки маркетингу: рекламний маркетинг; міжнародний маркетинг; маркетинг у комерції; маркетинг в управлінні; маркетинг у сфері послуг; інтернет-маркетинг.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. 1) Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ і $y = -x^2$, якщо $-3 \leqslant x \leqslant 3$. Зробіть висновок про взаємне розташування графіків цих функцій.

   2) Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ і $y = -x^2$, якщо $-2 \leqslant x \leqslant 1$. Зробіть висновок про взаємне розташування графіків цих функцій.

Див. приклад 1

2. Користуючись графіком функції $y = x^2$ (див. рис. 3 на с. 117):

   1) порівняйте $y(0)$ і $y(2)$;

   2) порівняйте $y(-4)$ і $y(0)$;

   3) порівняйте $y(-3)$ і $y(-2)$;

   4) визначте знак виразу $y(0{,}9) - y\left(-\frac{3}{2}\right)$.

Див. приклад 2

3 Визначте:

1) кількість точок перетину графіків на рис. 9;
2) кількість точок перетину графіків на рис. 10;
3) координати точок перетину графіків на рис. 11;
4) координати точок перетину графіків на рис. 12.

Див. приклад 3

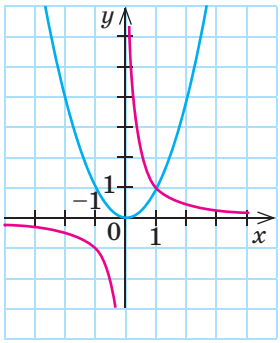


Рис. 9

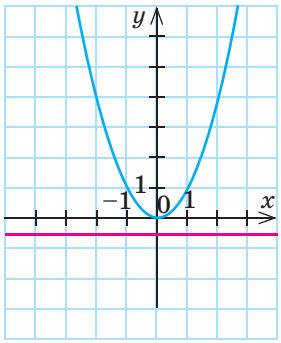


Рис. 10

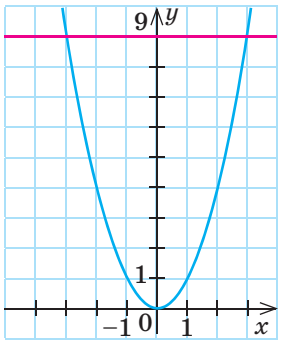


Рис. 11

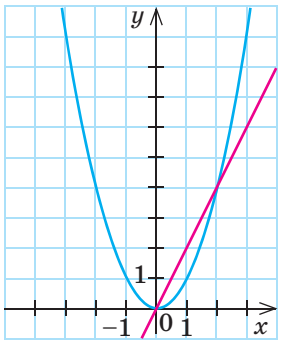


Рис. 12

4 Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 3 - 2x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x - 1. \end{cases}$

5 1) На рис. 13 зображено графіки функцій $y = x^2$ і $y = 1 - x$. Визначте кількість коренів рівняння $x^2 = 1 - x$.

2) На рис. 14 зображено графіки функцій $y = x^2$ і $y = -\frac{3}{x}$. Визначте кількість коренів рівняння $x^2 = -\frac{3}{x}$.

3) На рис. 15 зображено графіки функцій $y = -3x$ і $y = -\frac{3}{x}$. Розв'яжіть рівняння $-3x = -\frac{3}{x}$.

4) На рис. 16 зображено графіки функцій $y = 4 - 2x$ і $y = \frac{2}{x}$. Розв'яжіть рівняння $4 - 2x = \frac{2}{x}$.

Див. приклад 4

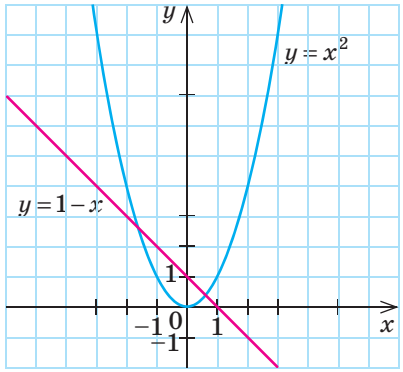


Рис. 13

6 Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2 = -\frac{8}{x}$; 3) $x - \frac{6}{x} + 1 = 0$;

2) $x^2 = -\frac{1}{x}$; 4) $x + \frac{2}{x} + 3 = 0$.

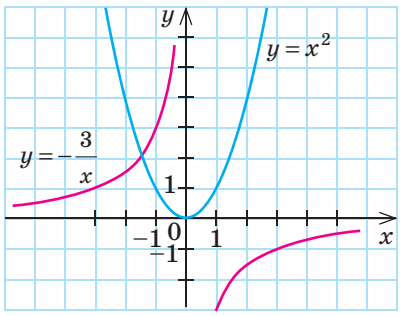


Рис. 14

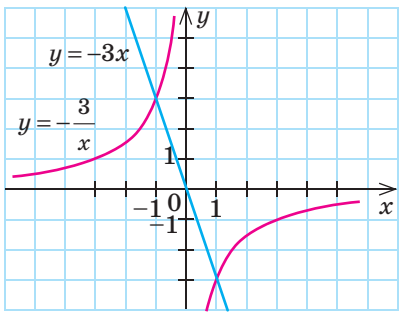


Рис. 15

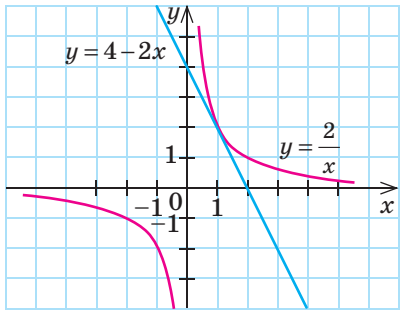


Рис. 16

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Якщо помножити ваш вік на 7, а потім помножити ще на 1443, то результатом буде ваш вік, написаний тричі підряд. Спробуйте пояснити цей результат.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Обчисліть значення виразу:

1) $2-5^2$;
2) $3-4^2$;
3) $1+(-3)^2$;
4) $5+(-2)^2$;
5) $1^2-(-6)^2$;
6) $0^2-(-8)^2$;
7) $(-0{,}1)^2+(-5)^2$;
8) $(-0{,}3)^2-(-9)^2$.

> *Машини повинні працювати. Люди повинні думати.*
>
> Девіз компанії IBM

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Ви можете завантажити ознайомлювальну версію програми Advanced Grapher за інтернет-посиланням http://www.freeware.com.ua/program3366.html

В ОДИН КЛІК

Ви вже знаєте, що, використовуючи пакети прикладних програм, можна побудувати будь-який графік. Побудуємо за допомогою програми Advanced Grapher графік квадратичної функції та розв'яжемо рівняння, використавши **алгоритм розв'язування рівняння вигляду $f(x)=g(x)$ графічним способом.**

ПРИКЛАД 1

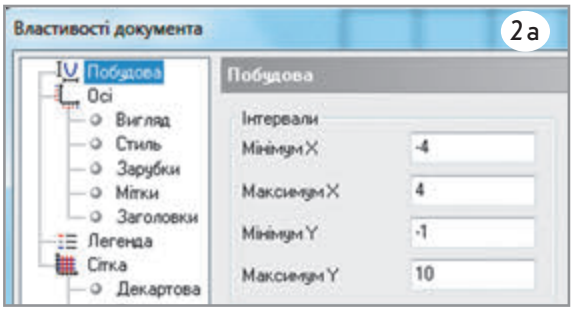
Розв'яжіть рівняння $x^2=\frac{3}{x}$.

1. Введемо дві функції: $y=x^2$ і $y=\frac{3}{x}$.
2. В одній системі координат побудуємо графіки цих функцій.

АЛГОРИТМ

Алгоритм побудови

1. Запустіть програму (див. с. 107).



2. Установіть потрібні налаштування для області побудови, використовуючи кнопку Властивості документа.

а) У лівій частині вікна виберіть зі списку пункт Побудова й у правій частині вікна задайте мінімальне та максимальне значення для x і y.

б) У лівій частині вікна виберіть зі списку пункт Осі й у правій частині вікна встановіть перемикач Перетин і прапорець перед параметром Однаковий масштаб зарубок.

в) Активуйте в списку лівої частини вікна пункт Легенда й у правій частині встановіть прапорець перед словом Легенда та перемикач Зліва.

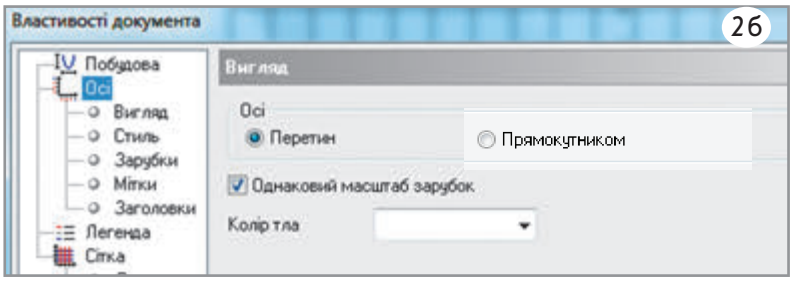
г) Активуйте в списку лівої частини вікна пункт Сітка та у правій частині встановіть прапорці для вертикальної і горизонтальної ліній та значення 1 у полі Крок.

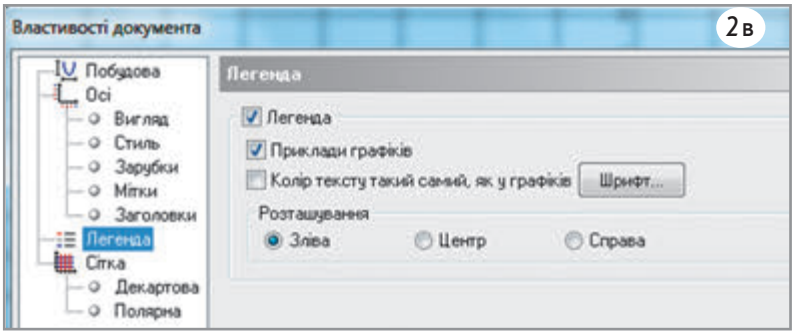
д) Активуйте в списку лівої частини вікна пункт Декартова.

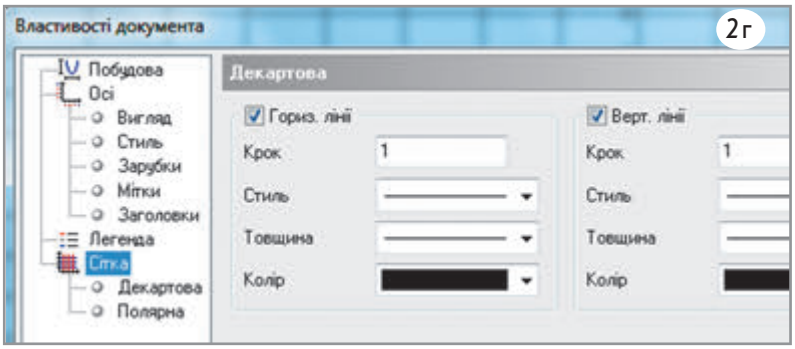
е) Збережіть встановлені налаштування, натиснувши кнопку OK.

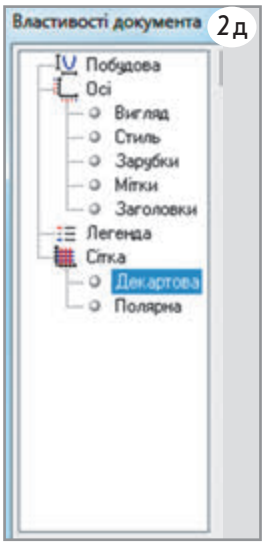
3. На панелі інструментів за допомогою кнопки Додати графік відкрийте вікно для введення необхідної функції та введіть у поле Формула текст x^2. Оберіть товщину й колір лінії, натисніть кнопку OK.

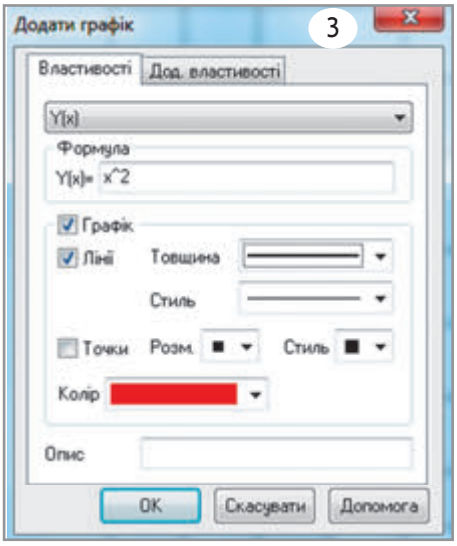
4. Перегляньте результат.

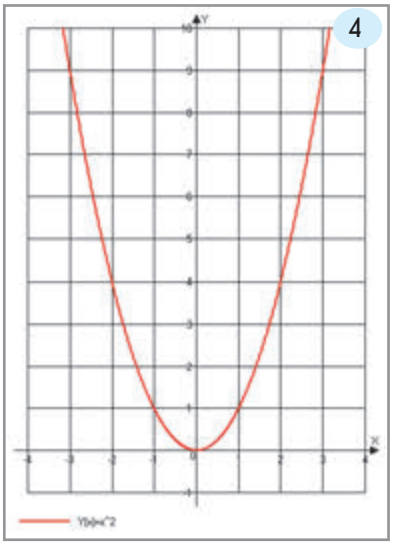


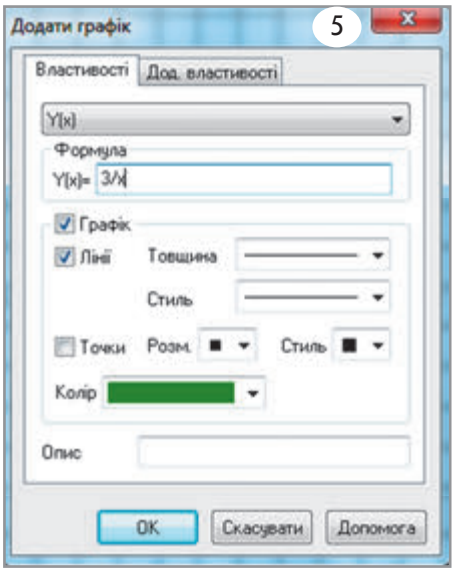


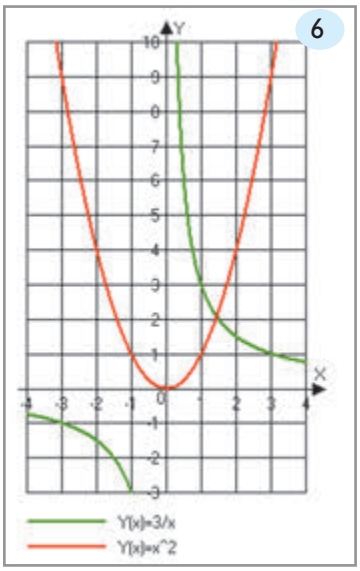












5. Для побудови графіка функції $y=\frac{3}{x}$ за допомогою кнопки Додати графік $+F$ відкрийте вікно для введення необхідної функції та введіть у поле Формула текст 3/x. Оберіть товщину й колір лінії, натисніть кнопку OK.

6. Перегляньте результат.

3 Визначимо точки перетину побудованих графіків.

4 Знайдемо абсциси точок перетину графіків.

ДОСЛІДЖУЄМО

Приклади побудови графіків інших функцій наведено на сайті interactive.ranok.com.ua. Опрацюйте їх та заповніть таблиці нижче, зробивши висновки зі своїх спостережень:

1) чи впливає значення a на вигляд графіка функції $y=ax^2$;
2) як розташовані графіки розглянутих функцій відносно графіка функції $y=x^2$.

Функція	Значення a	Чи впливає значення a на вигляд графіка функції
$y=ax^2$	$a>1$	
$y=ax^2$	$0<a<1$	
$y=ax^2$	$-1<a<0$	
$y=ax^2$	$a<-1$	

Функція	Як розташований графік даної функції відносно графіка функції $y=x^2$
$y=x^2+2$	
$y=x^2-2$	
$y=(x+2)^2$	
$y=(x-2)^2$	

ТРЕНУЄМОСЯ

1 За допомогою комп'ютерної програми Advanced Grapher побудуйте графіки функцій:

1) $y=2x^2+1$;
2) $y=-3x^2+2$;
3) $y=\frac{1}{2}x^2-1$;
4) $y=-\frac{1}{4}x^2-2$.

2 Знайдіть кількість коренів рівняння:

1) $x^2+\frac{3}{x}=0$;
2) $x^2-2x+3=0$.

3 Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2=2x-1$;
2) $x-2=\frac{8}{x}$.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Приклади знаходження кількості розв'язків заданих рівнянь графічним способом ви можете знайти на сайті interactive.ranok.com.ua

§ 12 РІВНЯННЯ $x^2 = a$. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ

ВЧОРА — Ви познайомилися з функцією $y = x^2$ та навчилися розв'язувати рівняння графічним способом

СЬОГОДНІ — Ви навчитеся аналізувати кількість розв'язків рівняння $x^2 = a$ залежно від параметра a

ЗАВЖДИ — Ви зможете розв'язувати фізичні задачі, наприклад розраховувати час польоту парашутиста у стані вільного падіння

З курсу фізики ви знаєте, що таке рівномірний рух тіла (рух із постійною швидкістю). Пізніше ви познайомитеся з нерівномірним рухом, у тому числі його окремим випадком — рівноприскореним рухом (рухом, при якому постійним є прискорення). Прикладом рівноприскореного руху може бути рух тіла в полі земного тяжіння за умови, що опором повітря можна знехтувати.

Саме таку задачу ми й розглянемо.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Сергій виконав стрибок із парашутом з висоти понад 1000 м над поверхнею Землі. Парашут розкрився, коли парашутист пролетів 44,1 м. Скільки секунд Сергій перебував у польоті до розкриття парашута (тобто у стані вільного падіння), якщо відстань у разі такого руху можна обчислити за формулою $s = \frac{gt^2}{2}$, де $g = 9{,}8$ м/с² — прискорення вільного падіння, t (с) — час руху?

Розв'язання

Підставимо у формулу дані, що відомі з умови задачі. Отримаємо: $44{,}1 = \frac{9{,}8 \cdot t^2}{2}$; $88{,}2 = 9{,}8 \cdot t^2$. Звідси $t^2 = \frac{88{,}2}{9{,}8}$, $t^2 = 9$.

Оскільки час t виражається додатним числом, то $t = 3$.

Відповідь: 3 секунди.

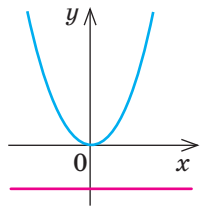
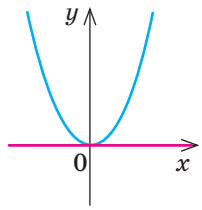
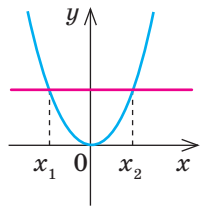
Слід зазначити, що корінь $t = 3$ рівняння $t^2 = 9$ ми **підібрали**. Насправді рівняння має два корені, але один із них не задовольняє умову задачі, оскільки є від'ємним числом. У цьому параграфі ви познайомитеся з розв'язуванням рівнянь вигляду $x^2 = a$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Перший технічний проект парашута створив Леонардо да Вінчі.
- Рекорд зі стрибків із повітряної кулі зі створенням формації (станом на 2015 р.) належить Україні. П'ять парашутистів, вистрибнувши з кошика повітряної кулі на висоті 3350 м, у вільному падінні створили формацію з двох фігур.
- У 2012 р. австрієць Фелікс Баумґартнер установив світовий рекорд, стрибнувши зі стратостата з висоти близько 39 км і розвинувши найбільшу швидкість вільного падіння, що перевищила швидкість звуку. У 2014 р. американець Алан Юстас перевищив його результат, стрибнувши з висоти понад 40 км. У вільному падінні він теж розвинув надзвукову швидкість.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Розв'яжемо рівняння вигляду $x^2 = a$ графічним способом. Введемо дві функції $y = x^2$ і $y = a$ та побудуємо їх графіки в одній системі координат. Зауважимо, що слід розглянути три випадки: $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$.

$x^2 = a,\ a < 0$	$x^2 = a,\ a = 0$	$x^2 = a,\ a > 0$
		
Висновок: графіки не мають спільних точок, отже, **рівняння розв'язків не має**	*Висновок:* графіки мають одну спільну точку (точку дотику), отже, **рівняння має один розв'язок** $x = 0$	*Висновок:* графіки мають дві спільних точки, отже, **рівняння має два різні розв'язки** $x_1 \neq x_2$

Таким чином, при $a > 0$ рівняння має **два** розв'язки. Очевидно, що ці розв'язки будуть протилежними числами.

Наприклад, розв'язками рівняння $x^2 = 4$ є два числа: 2 і −2. Їх називають квадратними коренями з числа 4. Причому одне з них (додатне) називають арифметичним квадратним коренем з числа 4.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- квадратний корінь
- арифметичний квадратний корінь
- підкореневий вираз
- радикал
- добування квадратного кореня

СЛІД ЗНАТИ!

Числа 2 і −2 — квадратні корені з числа 4;
число 2 — арифметичний квадратний корінь із числа 4.

Розв'язок рівняння $x^2 = 0$ число 0 є одночасно і квадратним, і арифметичним квадратним коренем з числа 0.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення 1. **Квадратним коренем з числа** a називають число, квадрат якого дорівнює a.
Наприклад:
5 і −5 — квадратні корені з числа 25;
$\sqrt{3}$ і $-\sqrt{3}$ — квадратні корені з числа 3.

Означення 2. **Арифметичним квадратним коренем із числа** a називають **невід'ємне число,** квадрат якого дорівнює a.
Наприклад:
4 — арифметичний квадратний корінь із числа 16;
$\sqrt{2}$ — арифметичний квадратний корінь із числа 2.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

При $a \geqslant 0$ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Наприклад: $\left(\sqrt{7}\right)^2 = 7$.

- Знак $\sqrt{\ }$ називають знаком **квадратного кореня** або **радикалом**; вираз a називають **підкореневим виразом**.
- Дію знаходження арифметичного квадратного кореня з числа a називають **добуванням квадратного кореня**.
- З означення арифметичного квадратного кореня випливає, що **підкореневий вираз не може бути від'ємним**, тобто набуває лише додатних значень або дорівнює нулю.

СЛІД ЗНАТИ!

Читайте правильно:
$\sqrt{a}$ — квадратний корінь із числа a (для зручності слово «арифметичний» можна опускати).

ПРИКЛАД 1

Обчисліть $\sqrt{1\frac{15}{49}}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Перетворимо підкореневий вираз у неправильний дріб.	$1\frac{15}{49}=\frac{1\cdot 49+15}{49}=\frac{64}{49}$
КРОК 2	Знайдемо таке невід'ємне число, яке при піднесенні до квадрата дорівнюватиме $\frac{64}{49}$.	$\sqrt{\frac{64}{49}}=\sqrt{\left(\frac{8}{7}\right)^2}=\frac{8}{7}=1\frac{1}{7}$

Відповідь: $1\frac{1}{7}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Обчисліть:

1) $\sqrt{16}$; 3) $\sqrt{0{,}36}$; 5) $\sqrt{\frac{4}{81}}$; 7) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$;

2) $\sqrt{100}$; 4) $\sqrt{0{,}25}$; 6) $\sqrt{\frac{49}{121}}$; 8) $\sqrt{2\frac{2}{49}}$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Якщо підкореневий вираз є мішаним числом, то його слід звести до неправильного дробу.

ПРИКЛАД 2

Обчисліть значення виразу $\left(\sqrt{13}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{5}\right)$, використовуючи формулу різниці квадратів.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Перетворимо добуток у многочлен, розкривши дужки за формулою $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.	$\left(\sqrt{13}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{13}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2$
КРОК 2	Скористаємося рівністю $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, справедливою для всіх $a\geqslant 0$, та виконаємо обчислення.	$\left(\sqrt{13}\right)^2=13$; $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$; $\left(\sqrt{13}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=13-5=8$

Відповідь: 8.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Середньовічні вчені використовували для квадратного кореня позначення *Rx*, що є скороченням від латинського слова *radix* — корінь.
- Сучасне позначення квадратного кореня вперше застосував німецький математик Крістоф Рудольф у 1525 р.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Обчисліть значення виразу:

1) $8-\left(\sqrt{6}\right)^2$;
2) $\left(\sqrt{7}\right)^2-4$;
3) $\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2$;
4) $\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{10}\right)^2$;
5) $\left(\sqrt{17}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{17}+\sqrt{2}\right)$;
6) $\left(\sqrt{19}-\sqrt{21}\right)\left(\sqrt{19}+\sqrt{21}\right)$;
7) $\left(4\sqrt{3}-3\sqrt{13}\right)\left(3\sqrt{13}+4\sqrt{3}\right)$;
8) $\left(5\sqrt{11}-3\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}+5\sqrt{11}\right)$.

ПРИКЛАД 3

Обчисліть значення виразу $6\cdot\sqrt{1\frac{7}{9}}+9\cdot\sqrt{\frac{100}{81}}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Обчислимо значення коренів.	$\sqrt{1\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$; $\sqrt{\frac{100}{81}}=\frac{10}{9}$
КРОК 2	Підставимо отримані значення в заданий вираз і виконаємо необхідні дії.	$6\cdot\frac{4}{3}+9\cdot\frac{10}{9}=8+10=18$

Відповідь: 18.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Обчисліть значення виразу:

1) $4\sqrt{4}+\sqrt{25}$;
2) $\sqrt{49}+6\sqrt{9}$;
3) $3\sqrt{0,04}+5\sqrt{36}$;
4) $2\sqrt{81}-3\sqrt{0,01}$;
5) $8\sqrt{2\frac{1}{4}}+5\sqrt{\frac{36}{25}}$;
6) $9\sqrt{\frac{121}{81}}-4\sqrt{6\frac{1}{4}}$;
7) $6\sqrt{30\frac{1}{4}}+18\sqrt{2\frac{7}{9}}-20\sqrt{2,25}$;
8) $40\sqrt{2,56}-27\sqrt{2\frac{7}{81}}+8\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

СЛІД ЗНАТИ!

У наступних параграфах буде доведено, що **корінь із суми та різниці почленно добувати не можна.**

У таких випадках перед добуванням кореня необхідно обчислити значення підкореневого виразу, тобто записати його одним числом.

ПРИКЛАД 4

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{m+c}$, якщо $m=7$, $c=9$;
2) $\sqrt{\frac{1}{3}a+b^2}$, якщо $a=6$, $b=\sqrt{7}$;
3) $\sqrt{x^2-y^2}$, якщо $x=-5$, $y=4$;
4) $m+\sqrt{m}$, якщо $m=100$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Підставимо у вираз значення m і c, виконаємо спочатку дію додавання, потім добудемо квадратний корінь.	$\sqrt{m+c}=\sqrt{7+9}=\sqrt{16}=4$
2) КРОК 1	Підставимо у вираз значення a і b, виконаємо спочатку дії під знаком кореня, потім добудемо квадратний корінь.	$\sqrt{\frac{1}{3}a+b^2}=\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 6+\left(\sqrt{7}\right)^2}=$ $=\sqrt{\frac{1\cdot 6}{3}+7}=\sqrt{2+7}=\sqrt{9}=3$
3) КРОК 1	Підставимо у вираз значення x і y, виконаємо спочатку піднесення до квадрата і віднімання, а потім добудемо квадратний корінь.	$\sqrt{x^2-y^2}=\sqrt{(-5)^2-4^2}=$ $=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$
4) КРОК 1	Підставимо у вираз значення m, спочатку добудемо квадратний корінь, потім виконаємо дію додавання.	$m+\sqrt{m}=100+\sqrt{100}=$ $=100+10=110$

Відповідь: 1) 4; 2) 3; 3) 3; 4) 110.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Обчисліть значення виразу:

1) $n+\sqrt{n}$, якщо $n=64$;
2) $\sqrt{m}+m$, якщо $m=81$;
3) $\sqrt{c+d}$, якщо $c=9$, $d=16$;
4) $\sqrt{k+m}$, якщо $k=4$, $m=32$;
5) $\sqrt{x^2-y^2}$, якщо $x=-15$, $y=9$;
6) $\sqrt{a^2-b^2}$, якщо $a=13$, $b=-12$;
7) $\sqrt{\frac{1}{6}a+b^2}$, якщо $a=12$, $b=\sqrt{14}$;
8) $\sqrt{x^2-\frac{1}{7}y}$, якщо $x=\sqrt{39}$, $y=21$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\sqrt{a^2-b^2}\neq\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}$

ПРИКЛАД 5

Розв'яжіть рівняння $x^2-11=0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зведемо рівняння до вигляду $x^2=a$: перенесемо доданок (-11) у праву частину рівняння, змінивши його знак на протилежний.	$x^2=11$
КРОК 2	За графіком функції $y=x^2$ (див. рис. 3 на с. 117) визначимо, що рівняння має два розв'язки (квадратні корені з числа 11): $\sqrt{11}$ і $-\sqrt{11}$.	$x=\sqrt{11}$; $x=-\sqrt{11}$

Відповідь: $-\sqrt{11}$, $\sqrt{11}$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

$x^2 = a$:
- при $a > 0$ $x = \pm\sqrt{a}$;
- при $a = 0$ $x = 0$;
- при $a < 0$ розв'язків немає

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$\sqrt{x} = m$ $(m \geqslant 0)$, $x = m^2$

ТРЕНУЄМОСЯ

5 Розв'яжіть рівняння:

1) $y^2 - 49 = 0$;
2) $-t^2 + 14 = 0$;
3) $x^2 + 2 = 0$;
4) $-3t^2 - 12 = 0$;
5) $\frac{2}{5}x^2 = \frac{5}{2}$;
6) $1\frac{3}{7}x^2 - 2\frac{6}{7} = 0$;
7) $\frac{4}{3}x^2 - 3 = 0$;
8) $-\frac{1}{15}m^2 + 1 = 0$.

ПРИКЛАД 6

Визначте, при якому значенні змінної буде правильною рівність $\sqrt{y} = 0{,}8$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Скористаємось означенням арифметичного квадратного кореня.	Якщо $\sqrt{y} = 0{,}8$, то $y = 0{,}8^2$, тобто $y = 0{,}64$

Відповідь: 0,64.

ПРИКЛАД 7

Розв'яжіть рівняння $2 \cdot \sqrt{t} - 16 = 0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зведемо рівняння до вигляду $\sqrt{t} = m$: перенесемо доданок (-16) у праву частину рівняння, змінивши його знак на протилежний, і поділимо обидві його частини на 2.	$2 \cdot \sqrt{t} = 16$; $2 \cdot \sqrt{t} = 16 \mid :2$; $\sqrt{t} = 8$
КРОК 2	Скористаємось означенням арифметичного квадратного кореня.	$\sqrt{t} = 8$; $t = 8^2$; $t = 64$

Відповідь: 64.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Щоб знайти значення підкореневого виразу, слід значення кореня піднести до квадрата.

ТРЕНУЄМОСЯ

6 У завданнях 1–4 визначте, при якому значенні змінної y буде правильною рівність:

1) $\sqrt{y} = 3$;
2) $\sqrt{y} = 7$;
3) $\sqrt{y} = 0{,}6$;
4) $\sqrt{y} = 0{,}9$.

У завданнях 5–8 розв'яжіть рівняння:

5) $3\sqrt{x} - 27 = 0$;
6) $20 - 5\sqrt{x} = 0$;
7) $\frac{1}{4}\sqrt{2x+5} - 2 = 0$;
8) $\frac{1}{2}\sqrt{9-4x} - 3 = 0$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $\sqrt{t}=100$, то $t=10$.
2) Рівняння $\sqrt{x}+9=0$ не має коренів.
3) Значення виразу $\sqrt{k^2+6k}$ дорівнює 0, якщо $k=-6$.
4) Якщо $n=t^2$, де n — кількість мобільних телефонів, проданих протягом дня, t — тривалість щоденного рекламного оголошення на радіо щодо цієї продукції, то $t=\sqrt{n}$.
5) Якщо квітник має форму квадрата площею S, то сторона a цього квітника обчислюється за формулою $a=\sqrt{S}$.

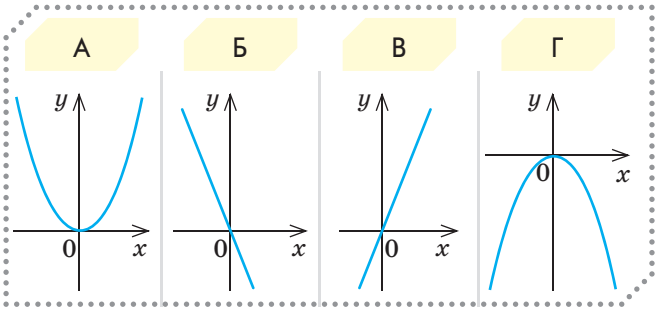
Льюїс Керролл (справжнє ім'я Чарльз Л. Доджсон) — англійський письменник, математик, логік, всесвітньо відомий автор книг «Аліса в Країні Див», «Аліса в Задзеркаллі», а також математичних книжок для дітей («Історія з вузликами», «Логічна гра»), які містять цікаві задачі, головоломки, ігри.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 10

1 Виберіть графік функції $y=-x^2$.



2 Задано функцію $y=x^2$. Знайдіть $y(-4)$.

А	Б	В	Г
16	8	−8	−16

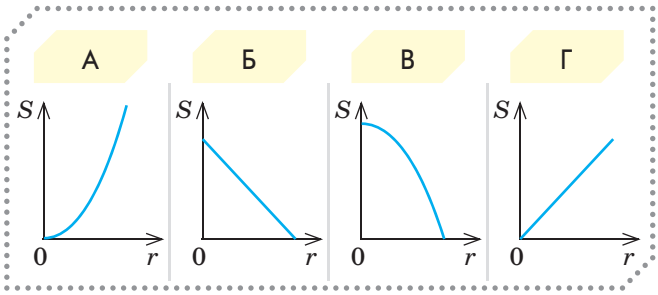
3 $(\sqrt{6}-5)(\sqrt{6}+5)=$

А	Б	В	Г
1	−19	19	−1

4 Розв'яжіть рівняння $x^2=3$.

А	Б	В	Г
± 9	9	$\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{3}$

5 Лист амазонського латаття має форму круга. Виберіть графік функції $S=f(r)$, де S — площа цього листа, r — його радіус. Площа круга визначається за формулою $S=\pi r^2$.



6 Установіть відповідність між виразами (1–3) та їхніми значеннями (А–Г).

1	$\sqrt{25-16}$	А	1
2	$\dfrac{\sqrt{81}}{9}$	Б	3
		В	12
3	$\sqrt{4}\cdot\sqrt{36}$	Г	9

7 Розв'яжіть графічно рівняння $x+5+\dfrac{4}{x}=0$.

8 Розв'яжіть рівняння $\dfrac{1}{2}\sqrt{8-4x}-5=0$.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Щороку 20 жовтня відзначають День кухаря. За всіх часів кухарську справу вважали справжнім мистецтвом. У роботі кухаря важливими є художній смак, уява, фантазія і навіть знання математики. Дізнайтеся більше за посиланням www.profi.ua/ukr/prof/view/214/

Див. приклад 1

Див. приклад 2

Див. приклад 3

Див. приклад 4

Див. приклади 6, 7

Кращий спосіб пояснити — це самому зробити!

Льюїс Керролл

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ПІЦА З МОРЕПРОДУКТАМИ»

У піцерії можна замовити піцу з морепродуктами двох видів. Обидві піци мають форму круга, однакову товщину та наповнені однаковими інгредієнтами, але розрізняються за розміром і ціною. Піца «Стандартна» діаметром 30 см коштує 30 грошових одиниць (г. о.). Піца «Сімейна» діаметром 40 см коштує 40 г. о. Дайте відповіді на запитання.

1. Яку піцу вигідніше замовити клієнту?
2. Яку піцу вигідніше продати хазяїну піцерії?
3. За якою ціною має продаватися піца кожного виду, щоб 1 см^2 піци коштував 0,04 г. о.? Нехай $\pi \approx 3{,}14$.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Обчисліть:

1) $\sqrt{81}$; 2) $\sqrt{0{,}64}$; 3) $\sqrt{\frac{36}{169}}$; 4) $\sqrt{1\frac{40}{81}}$.

2 Обчисліть значення виразу:

1) $\left(\sqrt{2}\right)^2-5$; 3) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{26}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{26}\right)$;

2) $\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{14}\right)^2$; 4) $\left(4\sqrt{15}-7\sqrt{3}\right)\left(7\sqrt{3}+4\sqrt{15}\right)$.

3 Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{64}+5\sqrt{36}$; 3) $6\sqrt{\frac{169}{36}}-10\sqrt{3\frac{6}{25}}$;

2) $2\sqrt{49}-5\sqrt{0{,}64}$; 4) $50\sqrt{1{,}44}-18\sqrt{3\frac{13}{81}}+14\sqrt{2\frac{2}{49}}$.

4 Знайдіть значення виразу при заданих значеннях змінних:

1) $\sqrt{m}+m$, $m=49$; 3) $\sqrt{a^2-b^2}$, $a=17$, $b=-8$;

2) $\sqrt{k+m}$, $k=24$, $m=25$; 4) $\sqrt{x^2-\frac{1}{3}y}$, $x=\sqrt{55}$, $y=18$.

5 Визначте, при якому значенні змінної y буде правильною рівність:

1) $\sqrt{y}=4$; 2) $\sqrt{y}=5$; 3) $\sqrt{y}=0{,}2$; 4) $\sqrt{y}=0{,}7$.

6 Розв'яжіть рівняння:

1) $4\sqrt{x}-24=0$; 2) $35-7\sqrt{x}=0$; 3) $\frac{1}{5}\sqrt{7-2x}-2=0$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розв'яжіть рівняння:

1) $|x|=6$; 2) $|5x+4|=-10$; 3) $(3x-6)(14-2|x|)=0$.

§ 13 МНОЖИНА. ПІДМНОЖИНА. ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

ВЧОРА	Ви виконували дії з різними числами, розв'язували задачі на обчислення співвідношень між величинами
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся, як у математиці класифікують числа, у які множини їх об'єднують
ЗАВЖДИ	Ви зможете здійснювати правильний вибір, урахувавши всі «плюси» і «мінуси» за допомогою діаграми Ейлера — Венна

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

У класі 25 учнів. Серед них 13 учнів користуються соціальною мережею Twitter, а 17 учнів — мережею Facebook. Визначте, скільки учнів класу є користувачами обох мереж.

Коментар до розв'язання

Зауважимо, що такі задачі, як правило, розв'язують графічно. Нижче, у прикладі 2, ми розглянемо покрокове розв'язання цієї задачі. А спочатку звернемо увагу на те, що розв'язок задачі можна проілюструвати за допомогою схеми, наведеної на рис. 1. Ця схема має назву **«діаграма Ейлера — Венна»** (ми повернемося до неї пізніше).

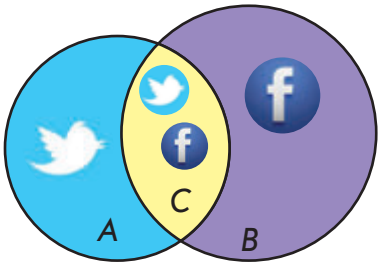


Рис. 1

З діаграми видно, що всі учні класу об'єднані в групи залежно від того, якою мережею користуються:

- **лише** мережею Twitter (блакитна ділянка A);
- **лише** мережею Facebook (фіолетова ділянка B);
- **обома** мережами — і Twitter, і Facebook (жовта ділянка C).

Таким чином, усіх учнів класу можна розглядати як одне ціле, або, застосовуючи математичну термінологію, як *множину*. А користувачів певної соціальної мережі — як частину цілого, об'єднану за певною характеристикою, або як *підмножину*.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- множина
- підмножина
- порожня множина
- рівні множини
- множина натуральних чисел (N)
- множина цілих чисел (Z)
- множина раціональних чисел (Q)
- $\in$ — знак належності
- $\subset$ — знак підмножини

ГОЛОВНА ІДЕЯ

МНОЖИНА. ПІДМНОЖИНА

Поняття множини належить до тих основних понять математики, що не мають означення, як, наприклад, число, точка, пряма, площина. Зрозуміти, що таке **множина**, можна, уявивши сукупність об'єктів, які об'єднані за певною ознакою або мають певну властивість. Таку властивість називають *характеристичною*.

Об'єкти, з яких складається множина, називають **елементами множини**.

СЛІД ЗНАТИ!

Множину можна розглядати як сукупність різних елементів, яка сприймається як одне ціле.

$\in$ — знак «належить»
$\notin$ — знак «не належить»
$\subset$ — знак підмножини
$\varnothing$ — порожня множина

Множини прийнято позначати великими латинськими літерами, а елементи множин — маленькими латинськими літерами. Наприклад: множина A, елемент b множини B.

Належність або неналежність елемента певній множині позначають спеціальними знаками ($\in$ або $\notin$):

- $x \in A$ — елемент x належить множині A;
- $x \notin D$ — елемент x не належить множині D.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Множину, що не містить жодного елемента, називають **порожньою** і позначають символом $\varnothing$.

Множини бувають:

- *скінченними*, наприклад множина учнів класу; множина літер українського алфавіту;
- *нескінченними*, наприклад множина натуральних чисел; множина точок, з яких складається пряма лінія.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Порожня множина завжди є підмножиною будь-якої непорожньої множини: $\varnothing \subset A$.

Множину можна задати:

- *переліком елементів множини*, наприклад: множина $P = \{-1, 0, 1\}$; множина літер слова «мережа» $M = \{$м, е, р, ж, а$\}$ (порядок запису елементів не має значення);
- *описом характеристичної властивості* (словесно або аналітично, тобто формулою), наприклад: множина додатних чисел, кратних 5; множина коренів рівняння $x^2 = 9$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, то кажуть, що множина A є **підмножиною** множини B.

Це записують так: $A \subset B$.

Дві множини A і B називають **рівними** тоді й тільки тоді, коли вони містять ті самі елементи, тобто коли кожний елемент множини A є також елементом множини B, і навпаки.

Рівність множин записують так: $A = B$.

Наприклад, множини $A = \{2; 4; 6\}$ і $B = \{4; 2; 6\}$ містять однакові елементи, отже, ці множини рівні між собою: $A = B$.

Якщо множина A є підмножиною множини B або дорівнює множині B, то замість запису $A \subset B$ застосовують запис $A \subseteq B$.

СЛІД ЗНАТИ!

Для довільної множини A справедливо:

$\varnothing \subseteq A$, $A \subseteq A$.

Якщо частина елементів множин A і B збігається, тобто ці множини мають спільні елементи, то множину спільних елементів називають *перерізом множин* A і B.

СЛІД ЗНАТИ!

Перерізом множин A і B називають множину елементів, що належать і множині A, і множині B.

Множини та відношення між ними зручно зображувати за допомогою кругів. Такий підхід першим використав Ґотфрід Лейбніц, а поширив Леонард Ейлер. Геометрична схема, запропонована ним, отримала назву **кіл Ейлера**. Кола Ейлера, за допомогою яких можна знайти й унаочнити логічні зв'язки між явищами та поняттями, широко використовуються в математиці, логіці, менеджменті тощо.

Важливим окремим випадком кіл Ейлера є **діаграми Ейлера — Венна**, що являють собою схематичні зображення всіх можливих перерізів кількох множин. Наприклад, на рис. 1 (с. 135) ви розглянули діаграму Ейлера — Венна для двох множин.

Напевно ви вже замислюєтеся, яку професію вибрати в майбутньому. Для вирішення цього питання також можна застосувати діаграму Ейлера — Венна. Один із можливих варіантів діаграми подано на рис. 2. Геометричною інтерпретацією відповіді є спільна частина всіх трьох кругів (зелена ділянка).

Рис. 2

ЧИСЛОВІ МНОЖИНИ

Натуральні числа

Ви знаєте, які числа називають **натуральними**. Якщо розглянути натуральні числа, з'ясуємо, що їх безліч! Кажуть, що вони утворюють **множину натуральних чисел**.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Числа, які використовують для лічби, називають **натуральними**.

Множину натуральних чисел позначають N.

Наприклад, твердження «число 8 належить множині натуральних чисел» записують так: $8 \in N$.

Варто знати, що число 0 не є натуральним. Це число має свою історію, воно з'явилося пізніше, ніж натуральні числа.

СЛІД ЗНАТИ!

- N — множина натуральних чисел.
- $8 \in N$; $0 \notin N$.
- Множина натуральних чисел є нескінченною.

Цілі числа

Виконуючи арифметичну дію додавання натуральних чисел, ми завжди отримуємо в результаті натуральне число, а виконуючи дію віднімання — не завжди. Таким чином, з'явилася потреба у від'ємних числах.

Наприклад, коренями рівняння $(x-2)(x+2)=0$ є цілі числа 2 і -2. Множину A коренів цього рівняння можна записати так: $A=\{-2; 2\}$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

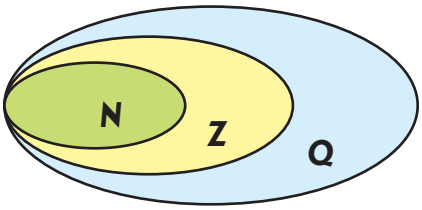
Натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль утворюють множину **цілих чисел**.

Множину цілих чисел позначають Z.

Наприклад, $-43 \in Z$, $5{,}8 \notin Z$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Термін «натуральне число» і позначення множини N походить від латинського слова natura — природа.
- Позначення множини Z походить від німецького слова zahl — число.
- Термін «раціональне число» походить від латинського ratio — відношення, розум.



N — множина натуральних чисел
Z — множина цілих чисел
Q — множина раціональних чисел

Рис. 3

Раціональні числа

Виконуючи арифметичні дії додавання, віднімання, множення цілих чисел, завжди отримують ціле число. Проте частка від ділення двох цілих чисел не завжди є цілим числом. Таким чином, виникла потреба у дробових числах.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Цілі та дробові числа утворюють множину **раціональних чисел.**

Множину раціональних чисел позначають $\boldsymbol{Q}$.

Наприклад, $\frac{2}{7} \in \boldsymbol{Q}$, $0 \in \boldsymbol{Q}$, $2017 \in \boldsymbol{Q}$, $-0{,}235 \in \boldsymbol{Q}$.

Співвідношення між множинами чисел, які ми розглянули, можна зобразити за допомогою кіл Ейлера (рис. 3). Зазначимо, що є й такі числа, які не належать множині раціональних чисел. З ними ви познайомитеся в наступному параграфі.

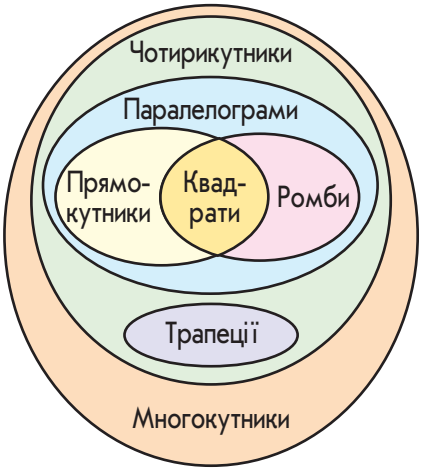


Рис. 4

ПРИКЛАД 1

Відомо, що A — множина всіх прямокутників; B — множина всіх ромбів; C — множина всіх многокутників; D — множина всіх чотирикутників; K — множина всіх паралелограмів. Запишіть за допомогою знака підмножини « $\subset$ » кілька правильних співвідношень, що показують, яка множина є підмножиною іншої.

Розв'язання

Розв'язувати завдання зручно за допомогою схеми, що зображує відношення між зазначеними множинами (рис. 4).

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Оскільки прямокутник є паралелограмом, у якого принаймні один кут прямий, то множина A є підмножиною множини K.	$A \subset K$
КРОК 2	Будь-який ромб є паралелограмом із рівними сторонами.	$B \subset K$
КРОК 3	Будь-який чотирикутник є окремим випадком многокутника.	$D \subset C$
КРОК 4	Будь-який ромб є окремим випадком чотирикутника, а отже, й многокутника.	Або $B \subset D$, або $B \subset D \subset C$, або $B \subset C$

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Запишіть за допомогою знака підмножини «$\subset$», яка множина є підмножиною іншої.

1) A — множина підручників із математики, що є в бібліотеці вашої школи; B — множина всіх підручників, що є в бібліотеці вашої школи.

2) A — множина парних натуральних чисел;
E — множина парних трицифрових натуральних чисел.

3) B — множина коренів рівняння $-2x=14$;
C — множина коренів рівняння $x^2-49=0$;
F — множина коренів рівняння $x(x+7)(7-x)=0$.

4) A — множина натуральних чисел, кратних 4;
B — множина коренів рівняння $\frac{x^2-8x}{x}=0$;
C — множина натуральних чисел, кратних 2;
$\boldsymbol{Z}$ — множина цілих чисел.

СЛІД ЗНАТИ!

- Якщо запис натурального числа закінчується парною цифрою, то це число ділиться націло на 2.
- Якщо запис натурального числа закінчується цифрою 0 або цифрою 5, то це число ділиться націло на 5.
- Якщо число, записане двома останніми цифрами даного натурального числа, ділиться націло на 4, то й саме дане число ділиться націло на 4.

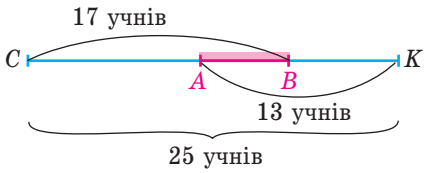
ПРИКЛАД 2

У класі 25 учнів. Серед них 13 учнів користуються соціальною мережею Twitter, а 17 учнів — мережею Facebook. Визначте, скільки учнів класу є користувачами обох соціальних мереж.

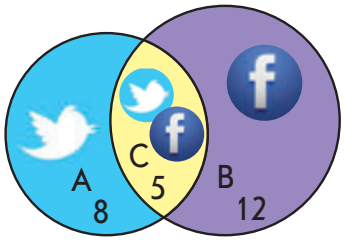
Розв'язання актуальної задачі

Розв'язання

Спосіб 1 — графічний

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Задачу зручно розв'язувати за допомогою геометричної схеми, наведеної праворуч. Поміркуємо, що позначають зображені на схемі відрізки:	
	• CK — кількість усіх учнів у класі;	$CK=25$;
	• CB — кількість усіх учнів, які користуються мережею Facebook;	$CB=17$;
	• AK — кількість усіх учнів, які користуються мережею Twitter;	$AK=13$;
	• AC — кількість тих учнів, які користуються **лише** мережею Facebook;	$AC=CK-AK=25-13=12$;
	• BK — кількість тих учнів, які користуються **лише** мережею Twitter;	$BK=CK-CB=25-17=8$.
	• AB — кількість користувачів **обох** мереж — і Facebook, і Twitter.	Тоді $AB=CB-AC=17-12=5$ або $AB=AK-BK=13-8=5$.

Спосіб 2 — аналітичний

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Скористаємося діаграмою Ейлера — Венна: • користувачі мережі Twitter (13 осіб) — жовта й блакитна ділянки; • користувачі мережі Facebook (17 осіб) — жовта й фіолетова ділянки; • користувачі **лише** Twitter — блакитна ділянка, • користувачі **лише** Facebook — фіолетова ділянка.	• користувачі Twitter $(A+C)$: $A+C=13$; • користувачі Facebook $(B+C)$: $B+C=17$; • користувачі **лише** Twitter (A); • користувачі **лише** Facebook (B)
КРОК 2	Оскільки всього в класі 25 учнів, то кількість учнів, які користуються: 1) **лише** Facebook (B), становить: $B=(A+B+C)-(A+C)$; 2) **обома** мережами — і Facebook, і Twitter (C), становить: $C=(B+C)-B$.	$A+B+C=25$; 1) $25-13=12$ (учнів); 2) $17-12=5$ (учнів).
	Слід зазначити, що розв'язання можна було почати зі знаходження кількості учнів, які є користувачами лише мережі Twitter: 1) **лише** Twitter (A): $A=(A+B+C)-(B+C)$; 2) **обох** мереж — і Facebook, і Twitter (C): $C=(A+C)-A$.	 1) $25-17=8$ (учнів); 2) $13-8=5$ (учнів)

Відповідь: 5 учнів.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

За даними Ліонського університету, у світі налічується близько 400 млн домашніх котів. Найбільше їх в Австралії, де на 10 жителів припадає 9 котів. В Індонезії більше ніж 30 млн пухнастих звірів, а у Франції — 8 млн котів. Але є країни, наприклад Перу, Габон, де домашніх котів майже немає.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть задачі.

1) Відомо, що 18 працівників фірми тримають собак, 16 — котів, причому 2 працівники тримають і собаку, і кота. Скільки всього співробітників працює на фірмі, якщо всі вони мають домашніх тварин?
2) Декілька учнів класу займаються футболом, а 10 — гімнастикою, причому троє займаються в обох секціях. Скільки учнів класу займаються футболом, якщо в класі 24 учні, а 9 із них не займаються в жодній секції?
3) На фестиваль приїхала група з 15 дітей. Із них 8 дітей взяли участь у фотоконкурсі, 9 — у конкурсі пісочної анімації. Скільки дітей взяли участь в обох конкурсах?
4) У двох восьмих класах 42 учні. Із них 34 учні вміють плавати, 28 — співати, а 5 не вміють ані плавати, ані співати. Скільки учнів уміють тільки плавати?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Визначте, яким множинам (N, Z або Q) належать числа:

-26; $17{,}3$; 0; $-1{,}16$; $-1\frac{16}{23}$; $-\sqrt{49}$; $2\frac{11}{15}$; $-\sqrt{2\frac{1}{4}}$; $\sqrt{0{,}09}$; $-13{,}07$; $1\frac{1}{9}$; $2{,}1717$.

2 Визначте, які з наведених тверджень є правильними, а які — неправильними:

1) $5 \in Z$;
2) $-22 \in N$;
3) $0 \in N$;
4) $1\frac{1}{3} \in Z$;
5) $0 \notin Q$;
6) $1{,}1212 \in Q$;
7) $-24 \notin Z$;
8) $\frac{9}{11} \in Q$;
9) $0{,}17 \in N$.

3 Розв'яжіть задачу.

Усі учні класу прочитали або книжку про Гаррі Поттера, або книжку про Шерлока Холмса. Причому про Гаррі Поттера читали 85 % усіх учнів, а про Шерлока Холмса — 75 %. Визначте, скільки учнів прочитали книжки й про Гаррі Поттера, й про Шерлока Холмса.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо A — множина всіх відрізків на площині α, а B — множина всіх відрізків завдовжки 10 см на площині α, то $B \subset A$.
2) Якщо C — множина білих акул, які живуть у річці Дніпро, то $C = \varnothing$.
3) Якщо A — множина котів, що народилися в Європі протягом 2016 р., а B — множина котів, що народилися в Європі протягом літа 2016 р., то $A \subset B$.
4) Якщо D — множина дерев на території України, висота яких не перевищує 200 м, а F — множина дерев на території України, висота яких не перевищує 300 м, то $D = F$.
5) Якщо A — множина кают на круїзному лайнері-велетні «Freedom of the Seas», то множина A нескінченна.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Неперевершену атмосферу школи чародійства у фільмах про Гаррі Поттера було створено також завдяки середньовічним інтер'єрам знаменитої Бодліанської бібліотеки Оксфордського університету, у приміщеннях якої знімали сцени у Хогвартській бібліотеці та лікарні. А на лондонському вокзалі Кінгс-Кросс тепер є табличка «Платформа $9^3/_4$».

Леонард Ейлер (нім. Leonhard Euler; 1707–1783) є одним із найгеніальніших математиків усіх часів. Фізика, астрономія, гідротехніка, картографія, балістика, архітектура, фізіологія, теорія музики — ось неповний перелік галузей знань, у яких працював Ейлер. Згодом ви познайомитеся з низкою понять, пов'язаних з його іменем: формулою Ейлера, лінією Ейлера, рівнянням Ейлера, числом Ейлера тощо.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

15 жовтня 2015 р. Національному університету «Києво-Могилянська академія» (НаУКМА) виповнилося 400 років. Зі стін академії вийшло багато відомих випускників, у тому числі 14 гетьманів України. Сьогодні в НаУКМА діють 32 кафедри, численні бакалаврські, магістерські та інші програми, Києво-Могилянська Бізнес-Школа, наукові центри й лабораторії, підготовче відділення тощо.

За даними різних рейтингів, НаУКМА визнано одним із кращих вищих навчальних закладів України.

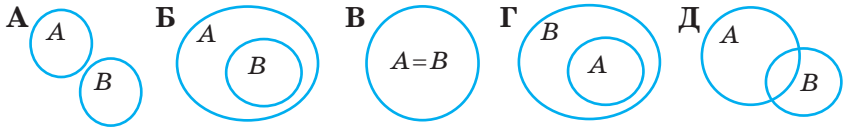
Дізнатися більше ви можете за посиланням www.ukma.edu.ua

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «КИЄВО-МОГИЛЯНСЬКА АКАДЕМІЯ»

Національний університет «Києво-Могилянська академія» налічує 6 факультетів: інформатики, правничих наук, економічних наук, гуманітарних наук, соціальних наук та соціальних технологій, природничих наук. Студентська колегія університету складається із 6 студентів (по одному представнику від кожного факультету).

На рисунку подано діаграми (А–Д), на яких зображено відношення між множинами A і B.



1. Виберіть діаграму, на якій елементами множини A є студенти студентської колегії, а елементами множини B — студенти факультету економічних наук.
2. Виберіть діаграму, на якій елементами множини A є студенти університету, а елементами множини B — студенти факультету економічних наук.
3. Виберіть діаграму, на якій елементами множини A є студенти факультету правничих наук, а елементами множини B — студенти факультету економічних наук.
4. У чергових виборах до студентської колегії представника від факультету економічних наук взяли участь 135 студентів. Кожний студент голосував за одного з чотирьох кандидатів. Переміг той кандидат, який набрав найбільше голосів (строго більше, ніж кожний із трьох інших). Яку найменшу кількість голосів міг набрати переможець?

Див. приклад 1

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Запишіть за допомогою знака підмножини «$\subset$», яка множина є підмножиною іншої.

   1) P — множина зимових місяців року;
   S — множина всіх місяців року.

   2) M — множина трицифрових натуральних чисел, кратних 100;
   S — множина трицифрових натуральних чисел.

   3) G — множина коренів рівняння $(x-6)(x+6)=0$;
   M — множина коренів рівняння $8x=48$;
   P — множина коренів рівняння $(36-x^2)(x+7)=0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Якщо число, записане трьома останніми цифрами даного натурального числа, ділиться націло на 8, то й саме дане число ділиться націло на 8.

4) K — множина натуральних чисел, кратних 4;
M — множина натуральних чисел, кратних 8;
Z — множина цілих чисел;
P — множина коренів рівняння $\frac{x^2-24x}{x}=0$.

2 Розв'яжіть задачі.

1) На перерві до буфету зайшли всі студенти групи. З них 2 студенти купили каву, 5 студентів — булочки, 15 студентів — сік, причому 3 студенти купили і булочку, і сік. Скільки всього студентів у групі, якщо кожний здійснив покупку?
2) Усі учні класу вивчають іноземні мови: кілька учнів — англійську, а 20 учнів — німецьку, причому 16 учнів вивчають обидві мови. Скільки учнів класу вивчають англійську мову, якщо в класі 26 учнів?
3) Відомо, що 18 мешканців дачного кооперативу вирощують картоплю і редис, 16 із них вирощують картоплю, а 12 — редис. Скільки дачників вирощують і картоплю, і редис разом?
4) У класі 28 учнів. Факультативні заняття з математики відвідують 17 учнів, із географії — кілька учнів, причому 3 учні відвідують заняття з обох предметів, а 5 учнів не відвідують занять із цих предметів. Скільки учнів класу відвідують заняття з географії?

Див. приклад 2

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- За різними даними, у світі налічують від 2,5 до 7 тис. мов, якщо брати до уваги також існуючі діалекти.
- Найпоширенішими є мови: китайська, англійська, іспанська, хінді, арабська, бенгальська, португальська тощо.
- Сьогодні пошукова система Google працює на 124 мовах.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Подайте числовий вираз у вигляді $\sqrt{n}$, де $n \in N$:

1) 3;
2) 5;
3) $2\sqrt{3}$;
4) $3\sqrt{2}$;
5) $\frac{1+5}{\sqrt{6}}$;
6) $\frac{8+2}{\sqrt{10}}$;
7) $\frac{\left(12-\sqrt{49}\right)\sqrt{12}}{\sqrt{5}}$;
8) $\frac{\left(11-\sqrt{16}\right)\sqrt{11}}{\sqrt{7}}$.

Немає науки, яка б не була пов'язана з математикою, науки, яка, якщо вона має бути ґрунтовно розробленою, не вимагала б застосування вищої математики.

Леонард Ейлер

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Визначте, яка ділянка діаграми відповідає множині риб, що живуть у теплих водах і мають сині хвости й жовті плавники, що світяться в темряві.

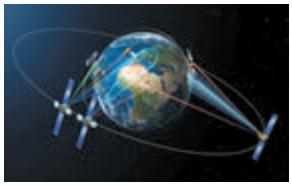
§ 14 РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА. ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА. ДІЙСНІ ЧИСЛА

ВЧОРА — Ви познайомилися з числовими множинами, дізналися, який між ними взаємозв'язок

СЬОГОДНІ — Ви дізнаєтеся, що, крім раціональних чисел, існують ірраціональні числа, які разом із раціональними утворюють множину дійсних чисел

ЗАВЖДИ — Ви зможете з'ясувати, яке положення супутника над поверхнею Землі є оптимальним для здійснення спостережень під час наукових досліджень

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Першу фотографію Землі з космосу було отримано 24 жовтня 1946 р. за допомогою автоматичної ракети V-2. Першу супутникову фотографію Землі було зроблено 14 серпня 1959 р. американським супутником Explorer 6, а перші фотографії Місяця — 6 жовтня того ж року радянським супутником Місяць-3.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- числові множини
- раціональні числа
- ірраціональні числа
- дійсні числа
- нескінченний неперіодичний дріб
- числова пряма

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Вам, напевно, відомо, що чим вище підіймаєшся вгору, тим дальшим здається горизонт. Особливо це помітно на вершині гори. А, скажімо, метеорологічний супутник перебуває значно вище — такі супутники здійснюють відеозйомку Землі з певної висоти h над її поверхнею. Користуючись теоремою Піфагора, про яку вам уже відомо з курсу геометрії, можна визначити, що дальність горизонту обчислюється за формулою $d=\sqrt{h^2+2hR}$, де R — радіус Землі.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Отже, значення d можна обчислити для будь-якого значення h. Але значення виразу, який містить корінь, у більшості випадків є наближеним, оскільки підкореневий вираз не завжди є точним квадратом. Так, у ході розв'язування схожих задач виникла потреба в ірраціональних числах.

Але перш ніж познайомитися з ірраціональними числами, розглянемо докладніше раціональні числа, про які ви дізналися в попередньому параграфі.

Означення. Числа, які можна подати у вигляді дробу $\frac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне, називають **раціональними числами**.

Наприклад, числа 8, $-\frac{3}{7}$, 0,2 можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{N}$: $8=\frac{8}{1}=\frac{24}{3}$ і т. д.; $0{,}2=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}=\frac{16}{80}$ і т. д.; $-\frac{3}{7}=-\frac{9}{21}=-\frac{63}{147}$ і т. д.

Зауважимо, що серед усіх дробів, за допомогою яких можна подати зазначені числа, завжди є дріб, знаменник якого буде найменшим. Такий дріб називають **нескоротним**.

Для перетворення звичайного дробу $\frac{m}{n}$ у десятковий дріб використовують дію ділення. Наприклад, $\frac{1}{2}=0{,}5$; $\frac{3}{8}=0{,}375$; $\frac{4}{13}=0{,}307\,69\ldots$. У результаті ділення одного числа на інше ми можемо отримати:

1) ціле число — це ділення без остачі $\left(\frac{10}{2}=5\right)$;
2) десятковий дріб, у якому кількість знаків після коми є скінченною $\left(\frac{7}{4}=1{,}75\right)$;
3) десятковий дріб, у якому кількість знаків після коми є нескінченною, але серед цих знаків обов'язково існує група цифр, що повторюється $\left(\frac{2}{9}=0{,}222\ldots;\ \frac{5}{11}=0{,}4545\ldots\right)$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Сукупність цифр, яка повторюється в разі ділення одного числа на інше, називають **періодом числа**. А числа, що мають таку властивість, називають **періодичними**.

Період числа (сукупність повторюваних цифр) записують один раз у круглих дужках.

Наприклад: $\frac{2}{9}=0{,}222\ldots=0{,}(2)$; $\frac{5}{11}=0{,}4545\ldots=0{,}(45)$.

Кожний дріб $\frac{m}{n}$, де $m\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{N}$, можна подати у вигляді **скінченного** десяткового дробу або у вигляді **нескінченного періодичного** десяткового дробу.

Так, $\frac{2}{5}=0{,}4$ — скінченний десятковий дріб; $\frac{3}{22}=0{,}1(36)$ — нескінченний періодичний десятковий дріб.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Кожне ціле число або скінченний десятковий дріб можна записати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, приписавши справа від нього нескінченну кількість нулів. Наприклад:

$$4=4{,}000\ldots=4{,}(0);\ \frac{7}{8}=0{,}875=0{,}875\,000\ldots=0{,}875(0).$$

$\frac{m}{n}$ — раціональне число, $m\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{N}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Супутникові зображення застосовуються в багатьох галузях — сільському господарстві, геологічних дослідженнях, лісівництві, охороні навколишнього середовища, плануванні територій, для запобігання надзвичайним ситуаціям тощо. Є картографічні сервіси (Google Maps, Yahoo! Maps), які надають безкоштовний доступ до супутникових фотографій та даних аерофотозйомки.

СЛІД ЗНАТИ!

ЧИТАЙТЕ ПРАВИЛЬНО:

- 0,(2) — нуль цілих, 2 в періоді;
- 0,06(81) — нуль цілих, шість сотих, 81 в періоді.

Отже, підсумуємо та визначимо **множину раціональних чисел.**

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Множину раціональних чисел Q визначають як множину нескоротних дробів із цілим чисельником і натуральним знаменником:

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \;\middle|\; m \in Z,\ n \in N \right\}.$$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

$\sqrt{2}$ — перше знайдене ірраціональне число:

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880 1\ldots$

Існує мнемонічне правило, яке допомагає запам'ятати значення числа $\sqrt{2}$ до 11 знаків після коми (цифри позначають кількість букв у словах):

1 4 1 4 2 1 3 5
Я Галя, я йшла, та я всі цифри
6 2 3 7
кореня до вас знайшла.

ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

Ви вже знаєте, що не всі числа, з якими ми маємо справу в реальному житті, є раціональними.

Так, не є раціональним числом довжина гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами 1 см і 1 см. Довжина c гіпотенузи і довжини катетів пов'язані співвідношенням $c^2 = 1^2 + 1^2$ (теорема Піфагора), тобто $c^2 = 2$, $c = \sqrt{2}$ см. Число $\sqrt{2}$ не є раціональним, тому що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 2.

Корені рівняння $x^2 = 5$ числа $\sqrt{5}$ і $-\sqrt{5}$ також не є раціональними, тому що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 5.

Для таких чисел є спеціальна назва. Оскільки в математиці не прийнято говорити «нераціональні числа», їх назвали **ірраціональними числами**.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Якщо перекласти з латини дослівно: «раціональне число» — «розумне число», «ірраціональне число» — «нерозумне число» («ір» означає заперечення).

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Ірраціональне число — це число, яке не може бути виражене за допомогою відношення цілого числа до натурального.

Ірраціональне число можна подати у вигляді **нескінченного десяткового неперіодичного дробу.**

Наприклад:

$\sqrt{5} = 2{,}236\,067\,977\,499\,79\ldots$; $\sqrt{11} = 3{,}326\,624\,790\,355\,4\ldots$;

$\sqrt{61} = 7{,}810\,249\,675\,906\ldots$; $0{,}110\,110\,011\,000\,11\ldots$.

З курсу геометрії вам відомо, що коли довжину будь-якого кола розділити на його діаметр, то отримаємо одне й те саме число — π. Число π виражається нескінченним десятковим дробом $3{,}141\,592\,65\ldots$. Наприкінці XVIII ст. німецьким математиком І. Ламбертом і французьким математиком А. Лежандром було доведено, що число π є ірраціональним.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Дізнатися більше про доведення існування ірраціональних чисел ви можете на сайті interactive.ranok.com.ua

ДІЙСНІ ЧИСЛА

Якщо множину раціональних чисел доповнити множиною ірраціональних чисел, утвориться **множина дійсних чисел.**

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Раціональні та ірраціональні числа утворюють **множину дійсних чисел.**

Множину дійсних чисел позначають $\boldsymbol{R}$.

Наприклад, числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{11}$, 0,001001100111 00... — дійсні, оскільки вони є ірраціональними числами.

На практиці для виконання обчислень дійсні числа округлюють — записують у вигляді скінченних десяткових дробів, залишаючи після коми певну кількість знаків: $\frac{2}{11} \approx 0{,}18$ (з точністю до сотих); $\sqrt{7} \approx 2{,}6$ (з точністю до десятих); $\pi \approx 3{,}14$ (з точністю до сотих). Обчислимо, наприклад, довжину кола циркової арени, якщо її діаметр 13 м: $C = 2\pi R \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 13 = 81{,}64$ (м). Оскільки 3,14 — наближене значення числа π, то 81,64 — наближене значення довжини кола арени.

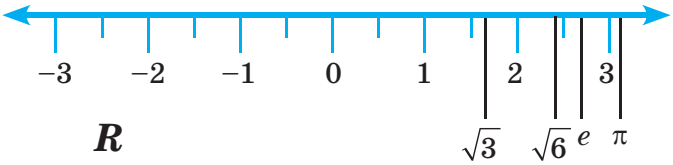
ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Діаметр арени цирку в усьому світі однаковий — 42 фути, або 13 метрів. Це необхідно для виконання акробатичних номерів на конях, адже колись цирк починався саме з них.

СЛІД ЗНАТИ!

З дійсними числами виконують усі арифметичні дії, для них чинні всі правила округлення й порівняння чисел.

Множину дійсних чисел можна описати як множину скінченних і нескінченних дробів. Ви вже знайомі з координатною прямою. Кожне дійсне число можна зобразити на ній точкою, і навпаки, кожна точка координатної прямої має координату, яка виражається дійсним числом.



Позначення $\boldsymbol{R}$ множини дійсних чисел походить від англійського слова *Real* або німецького *Reel* — дійсний.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Можна зробити висновок про те, що координатна пряма є **геометричною моделлю множини дійсних чисел**, тому координатну пряму часто називають **числовою прямою.**

Відкладемо на координатній прямій одиничний відрізок OC та побудуємо квадрат $OCBA$ (рис. 1). Відкладемо від точки O на координатній прямій в додатному напрямі

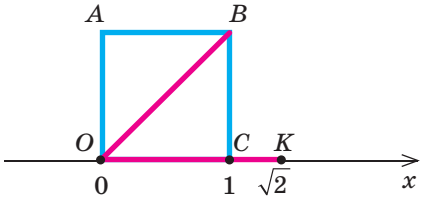


Рис. 1

відрізок OK, довжина якого дорівнює довжині діагоналі OB побудованого квадрата, тобто $\sqrt{2}$. Отже, число $\sqrt{2}$ є координатою точки K. Це число вам вже відоме, воно не є цілим і не є дробовим (саме тому раніше ви не стикалися з такою координатою), — воно є ірраціональним.

Тепер, коли ви усвідомлюєте, що таке число існує, і знаєте його значення, ви можете приблизно вказати, де воно розташоване на координатній (числовій) прямій.

Узагальнимо наші знання про числові множини.

Кола Ейлера

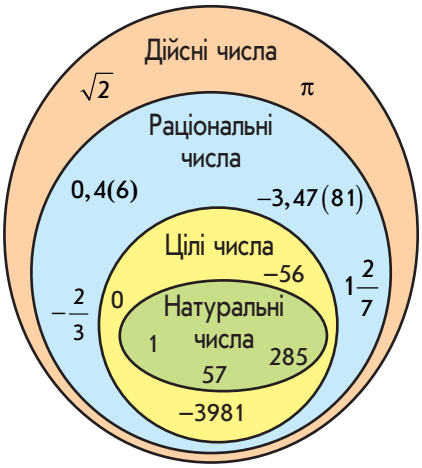


Рис. 2

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

- Множина дійсних чисел містить множину раціональних чисел та множину ірраціональних чисел.
- Множина раціональних чисел містить множину цілих чисел.
- Множина цілих чисел містить множину натуральних чисел.

Зобразимо ці співвідношення за допомогою кіл Ейлера (рис. 2).

ПРИКЛАД 1

Подайте число $\frac{7}{11}$ у вигляді нескінченного десяткового дробу.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо дріб у вигляді частки $7:11$ і виконаємо ділення.	$7:11=0{,}6363\ldots$
КРОК 2	В отриманому значенні частки повторюється сукупність цифр (63), яка і є періодом шуканого числа.	$\frac{7}{11}=0{,}6363\ldots=0{,}(63)$

Відповідь: $0{,}(63)$.

ПРИКЛАД 2

Запишіть число $0{,}(8)$ у вигляді звичайного дробу.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Зауважимо, що задане число є нескінченним періодичним десятковим дробом. Позначимо його через a.	$a=0{,}(8)$; $a=0{,}888\ldots$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Помножимо обидві частини рівності $a = 0{,}888\ldots$ на 10. Зазначимо, що число a та отримане число мають однаковий період.	$a = 0{,}888\ldots \mid \cdot 10$; $10a = 8{,}88\ldots$
КРОК 3	Віднімемо почленно одержані рівності й розв'яжемо отримане рівняння.	$10a - a = 8{,}888\ldots - 0{,}88\ldots$; $9a = 8$; $a = \frac{8}{9}$

Відповідь: $\frac{8}{9}$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Нескінченний періодичний десятковий дріб, період якого містить n цифр, треба помножити на 10^n. Тоді період числа, отриманого в результаті множення, дорівнюватиме періоду початкового дробу.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 У завданнях 1–4 подайте у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу звичайний дріб:

1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{4}{9}$; 3) $\frac{13}{15}$; 4) $\frac{11}{45}$.

У завданнях 5–8 запишіть у вигляді звичайного дробу число:

5) $0,(7)$; 6) $0,(19)$; 7) $0,2(3)$; 8) $0,5(12)$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Щороку 14 березня відзначають День числа π.
- Альберт Ейнштейн народився в День числа π (14 березня 1879 р.).
- Якщо прийняти, що кожній цифрі відповідає певна нота, можна одержати музику числа π. Почути її можна за посиланням http://www.libo.ru/libo8268.html

ПРИКЛАД 3

Порівняйте числа $a = \frac{1}{9}$ і $b = 0{,}1$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Перетворимо звичайний дріб $\frac{1}{9}$ в нескінченний періодичний десятковий дріб.	$\frac{1}{9} = 0{,}111\ldots = 0,(1)$
КРОК 2	Порівняємо отримані числа $0,(1)$ і $0{,}1$.	$a = \frac{1}{9} = 0,(1) = 0{,}111\ldots$; $b = 0{,}1 = 0{,}100\ldots$; отже, $a > b$

Відповідь: $a > b$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!
Із двох від'ємних чисел більшим є те, модуль якого менший.

ПРИГАДАЙТЕ!
Відстань d між точками $A(a)$ і $B(b)$ на координатній прямій обчислюють за формулою $d=|a-b|=|b-a|$.

Сергій Павлович Корольов (1907–1966) — український радянський учений у галузі ракетобудування та космонавтики, конструктор перших штучних супутників Землі та космічних кораблів.
Коли під керівництвом Корольова було запущено космічний корабель, який пілотував перший космонавт-українець Павло Попович, Павло заспівав з космосу для Головного конструктора його улюблену пісню «Дивлюсь я на небо...».

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Порівняйте числа:

1) $2{,}635...$ і $2{,}(63)$; 3) $12{,}6(3)$ і $12{,}632$; 5) $\frac{1}{8}$ і $0{,}(125)$;

2) $1{,}25$ і $\frac{5}{4}$; 4) $-0{,}(17)$ і $-0{,}171$; 6) $-4\frac{2}{11}$ і $-4{,}18$.

2 Знайдіть відстань між точками на координатній прямій:

1) $A(2{,}12)$ і $B(6{,}3)$; 4) $F(1{,}(3))$ і $E\left(-\frac{2}{3}\right)$;

2) $M(-2{,}4)$ і $K(1{,}3)$; 5) $M(2\sqrt{3})$ і $K(-8\sqrt{3})$;

3) $D\left(6\frac{1}{2}\right)$ і $C(-2{,}(45))$; 6) $L(-4\sqrt{7})$ і $P(12\sqrt{7})$.

3 Розташуйте в порядку зростання числа:

1) $a=2{,}(3)$; $b=2\frac{1}{3}$; $c=2{,}35$; $d=2{,}4(3)$;

2) $m=-2$; $n=-2{,}(4)$; $k=-2{,}(3)$; $h=-2{,}34$.

4 Розташуйте в порядку спадання числа:

1) $a=1{,}(36)$; $b=1\frac{4}{11}$; $c=1{,}363$; $d=1{,}32(63)$;

2) $m=-1{,}(3)$; $n=-1$; $k=-1{,}33$; $h=-1\frac{1}{4}$.

5 Утворіть правильну числову нерівність із чисел a, b і c, якщо:

1) $a=21{,}(3)$; $b=21$; $c=21{,}32$;

2) $a=-4{,}1$; $b=-4{,}(1)$; $c=-\sqrt{16}$.

6 Знайдіть наближене значення довжини кола, радіус якого дорівнює 20 см. Виконуючи обчислення, округліть число π до сотих.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $a=\sqrt{98}$, то $a>10$.

2) Якщо $x+0{,}(9)=1$, то $x=0{,}(1)$.

3) Якщо $x\sqrt{9}=\sqrt{4}$, то $x=0{,}(6)$.

4) Якщо $A=\left\{\frac{1}{\sqrt{81}}\right\}$, $B=\{0{,}(1)\}$, то $A=B$.

5) Якщо $a=\sqrt{65}-\sqrt{59}$, $b=\sqrt{65}+\sqrt{59}$, то $a\cdot b\in N$.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 11

1 Виберіть число, яким може виражатися кількість квитків на виставу в касі театру.

А	Б	В	Г
$\sqrt{1000}$	$\frac{641}{2}$	398,5	240

2 Виберіть від'ємне раціональне число.

А	Б	В	Г
0	$-\frac{3}{7}$	7,3	$-\sqrt{7}$

3 Виберіть правильне відношення належності множині.

А	Б	В	Г
$-9 \in \boldsymbol{Z}$	$\frac{3}{7} \in \boldsymbol{Z}$	$-6 \in \boldsymbol{N}$	$\frac{7}{3} \in \boldsymbol{N}$

4 Виберіть правильну подвійну нерівність.

А	В
$1 < \sqrt{11} < 2$	$3 < \sqrt{11} < 4$
Б	**Г**
$2 < \sqrt{11} < 3$	$4 < \sqrt{11} < 5$

5 До мандрівки на Говерлу готується група з 18 осіб. Відомо, що 12 екскурсантів мають аккаунт на Facebook, 10 — на Twitter, а декілька — обидва аккаунти. Скільки екскурсантів мають аккаунти і на Facebook, і на Twitter, якщо всі вони зареєстровані хоча б в одній із цих соціальних мереж?

А	Б	В	Г
1	2	3	4

6 Установіть відповідність між числами (1–3) та числовими множинами (А–Г), до яких належать ці числа.

1	-12	А	Множина натуральних чисел
2	1,2	Б	Множина цілих чисел, які не є натуральними
3	$\sqrt{25}$	В	Множина раціональних чисел, які не є цілими
		Г	Множина ірраціональних чисел

7 Порівняйте числа $-\sqrt{61}$ і -8.

8 Подайте число $0,(15)$ у вигляді звичайного нескоротного дробу. Порівняйте числа $0,(15)$ і $\frac{2\sqrt{6}}{33}$.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ПОЇЗДКА В МАРШРУТНОМУ ТАКСІ»

На схемі руху маршрутних таксі за двома кільцевими маршрутами літерами позначено зупинки (рис. 3). Маршрут № 1 завдовжки 24 км проходить повз зупинки $A-B-C-D-E-F-G-N-A$, а маршрут № 2 — повз зупинки $A-B-C-D-E-K-L-N-A$. При цьому $KE \parallel NG$, $GE \parallel NK$. Усі мікроавтобуси на обох маршрутах рухаються із середньою швидкістю 40 км/год, а інтервал руху між ними є постійним.

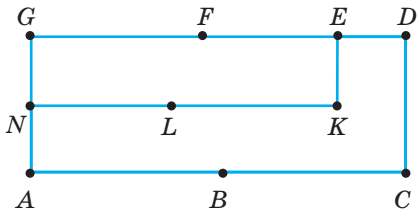


Рис. 3

1 Яка довжина маршруту № 2?

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Логістик повинен мати математичну підготовку, підкріплену аналітичним мисленням. Особисті якості логістика: уважність, пунктуальність, комунікабельність, організаторські здібності, уміння вирішувати кілька завдань одночасно.

Див. приклад 1

Див. приклад 2

Див. приклад 3

2 Проїзд у маршрутному таксі № 1 коштує 6 грн. Вважаючи, що вартість проїзду залежить лише від довжини маршруту, визначте вартість проїзду в маршрутному таксі № 2.

3 Пасажир підійшов до зупинки K в той момент, коли від неї від'їхало маршрутне таксі. Скільки хвилин пасажиру доведеться чекати наступне, якщо на маршруті працюють два мікроавтобуси? Часом, протягом якого маршрутне таксі стоїть на кожній зупинці, знехтуйте.

4 На маршруті № 1 працюють два мікроавтобуси. Визначте, скільки додаткових мікроавтобусів мають виїхати на маршрут, щоб скоротити інтервал руху на 50 %.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Подайте у вигляді нескінченного десяткового дробу звичайний дріб:

1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{11}$; 3) $\frac{17}{18}$; 4) $\frac{19}{66}$.

2 Запишіть у вигляді звичайного дробу число:

1) $0,(5)$; 2) $0,(16)$; 3) $0,1(4)$; 4) $0,4(72)$.

3 Порівняйте числа:

1) $a=4,943\ldots$ і $b=4,843\ldots$;

2) $k=1,625\ldots$ і $m=1,265\ldots$;

3) $c=-8,888\ldots$ і $n=-8,898\ldots$;

4) $x=-20,336\ldots$ і $y=-20,318\ldots$;

5) $a=0,38$ і $m=\frac{7}{18}$;

6) $b=\frac{8}{33}$ і $k=0,24$;

7) $a=7\frac{1}{2}$, $b=\frac{23}{3}$, $c=7,(5)$;

8) $x=1,(13)$, $y=1\frac{1}{9}$, $z=\frac{37}{33}$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Знайдіть значення виразу:

1) $|-3|$; 2) $|-5|$; 3) $|-4|+|9|$; 4) $|-2|-|7|$; 5) $|12-20|$; 6) $|23-30|$; 7) $|4+3|\cdot|-2-1|$; 8) $|34-35|\cdot|-5-15|$.

Те, що здавалося нездійсненним протягом століть, що вчора було лише зухвалою мрією, сьогодні стає реальним завданням, а завтра — звершенням.

Сергій Корольов

§ 15 АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ ЗІ СТЕПЕНЯ. ТОТОЖНОСТІ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $(a \geqslant 0)$, $\sqrt{a^2} = |a|$

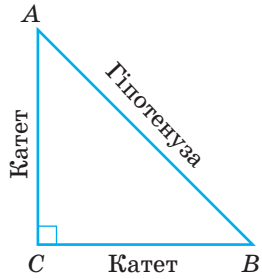
ВЧОРА — Ви дізналися, що таке арифметичний квадратний корінь, навчилися його добувати

СЬОГОДНІ — Ви познайомитеся з однією з ключових дій в курсі алгебри — добуванням кореня зі степеня

ЗАВЖДИ — Ви зможете перетворювати вирази, що містять корені, використовуючи властивості арифметичного квадратного кореня

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Для обладнання автостоянки виділили земельну ділянку, що має форму прямокутного трикутника з катетами по 18 м (див. рисунок). Визначте відстань між точками A і B.



Розв'язання

Відстань між точками A і B є довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника ABC. З курсу геометрії вам вже відомо, що гіпотенузу можна обчислити за формулою $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, де a і b — катети трикутника, c — його гіпотенуза (теорема Піфагора).

Скористаємося цією формулою: $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$, тоді $AB = \sqrt{18^2 + 18^2}$.

Знаходити значення цього виразу, виконуючи послідовно зазначені дії, не дуже зручно. Зведемо подібні доданки в підкореневому виразі, отримаємо $AB = \sqrt{2 \cdot 18^2}$. Щоб обчислити значення цього виразу, слід знати, як знаходити корінь із добутку та корінь зі степеня. У попередньому параграфі ви навчилися знаходити числове значення виразу $\left(\sqrt{a}\right)^2$. У цьому параграфі ви дізнаєтеся, чим відрізняються вирази $\left(\sqrt{a}\right)^2$ та $\left(\sqrt{a^2}\right)$.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви навчилися добувати арифметичний квадратний корінь із числа. Надалі ви будете виконувати арифметичні дії з виразами, що містять корені, у тому числі добувати квадратний корінь зі степеня або підносити арифметичний квадратний корінь до степеня.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- У Китаї добули нарешті справжній квадратний корінь (див. фото).
- У Стародавній Індії невідоме називали «мула», що означало «початок», «основа», «корінь (дерева)». Араби використовували слово «джізр» із тим самим значенням. Європейці переклали його на латину як *radix* — корінь. Так виник математичний термін «радикал».

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- степінь
- арифметичний квадратний корінь зі степеня
- підкореневий вираз
- модуль
- підмодульний вираз
- порядок дій

Наприклад, треба обчислити значення виразу $\left(\sqrt{25}\right)^2$. Фактично треба добути корінь із деякого числа, а потім отримане значення кореня знову піднести до квадрата. Таким чином, ми послідовно виконаємо дві взаємно обернені дії: добування квадратного кореня і піднесення до квадрата. Саме тому значення підкореневого виразу не зміниться.

Отже, при **невід'ємних** значеннях a є справедливою рівність $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Наприклад, $\left(\sqrt{9}\right)^2 = 9$; $\left(\sqrt{2016}\right)^2 = 2016$; $\left(\sqrt{m^4}\right)^2 = m^4$.

А тепер з'ясуємо, чи буде справедливим запис $\sqrt{a^2} = a$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

У виразі $\sqrt{a^2}$ змінна a може набувати будь-яких значень, оскільки значення a^2 завжди є невід'ємним, тобто значення кореня завжди існує.

Спробуємо знайти значення виразу $\sqrt{(-6)^2}$. Якщо обчислювати його за формулою $\sqrt{a^2} = a$, матимемо: $\sqrt{(-6)^2} = -6$. Цей результат неправильний, оскільки $-6 < 0$.

Тепер скористаємося для обчислення тим, що до квадрата можна піднести будь-яке число, отримавши невід'ємне число. Маємо:

$$(-6)^2 = 36,\ 36 > 0;\ \sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Висновок: оскільки значення квадратного кореня не може набувати від'ємних значень, то справедливою є формула $\sqrt{a^2} = |a|$. Зауважимо, що ця рівність виконується і для $a \geqslant 0$, і для $a < 0$, тобто є тотожністю.

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a,\ a \geqslant 0$$

Наприклад: $\sqrt{8^2} = |8| = 8$; $\sqrt{(-13)^2} = |-13| = 13$; $\sqrt{0^2} = 0$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Арифметичний квадратний корінь повинен набувати тільки невід'ємних значень. Використання формули $\sqrt{a^2} = |a|$ дозволяє отримати невід'ємне значення квадратного кореня, оскільки $|a| \geqslant 0$.

1) $|a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geqslant 0; \\ -a & \text{при } a < 0. \end{cases}$

2) Якщо $a > 0$, то $-a < 0$; якщо $a < 0$, то $-a > 0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

1) Розкриття модуля залежить від знака підмодульного виразу.
2) Якщо a — додатне число, то $-a$ — від'ємне число; якщо a — від'ємне число, то $-a$ — додатне число

ПРИКЛАД 1

Обчисліть $4\cdot\sqrt{(-5)^2}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Обчислимо $\sqrt{(-5)^2}$ за формулою $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$.	$\sqrt{(-5)^2}=\lvert -5\rvert=5$
КРОК 2	Обчислимо добуток.	$4\cdot 5=20$

Відповідь: 20.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Обчисліть:

1) $\sqrt{5^2}$;
2) $\sqrt{7^2}$;
3) $2\sqrt{2^2}$;
4) $4\sqrt{6^2}$;
5) $6\sqrt{(-10)^2}$;
6) $3\sqrt{(-14)^2}$;
7) $-\frac{2}{7}\sqrt{(-2{,}8)^2}$;
8) $-\frac{3}{8}\sqrt{(-1{,}6)^2}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Відомо, що 2 в квадраті дорівнює 4, 10 в квадраті — 100, половина в квадраті — 1/4, третина в квадраті — 1/9. Як на вашу думку, чому дорівнює кут у квадраті?

ПРИКЛАД 2

Спростіть вираз $\frac{1}{3}\cdot\sqrt{36a^2}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Перетворимо вираз $\sqrt{36a^2}$, подавши підкореневий вираз у вигляді квадрата одночлена.	$\sqrt{36a^2}=\sqrt{(6a)^2}$
КРОК 2	Добудемо квадратний корінь, скориставшись тотожностями $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$ і $\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$.	$\sqrt{(6a)^2}=\lvert 6a\rvert=6\cdot\lvert a\rvert$
КРОК 3	Проаналізуємо отриманий вираз: модуль неможливо розкрити, оскільки ми не знаємо знака підмодульного виразу.	$\frac{1}{3}\sqrt{36a^2}=\frac{1}{3}\sqrt{(6a)^2}=$ $=\frac{1}{3}\lvert 6a\rvert=\frac{1}{3}\cdot 6\cdot\lvert a\rvert=2\cdot\lvert a\rvert$

Відповідь: $2\cdot\lvert a\rvert$.

ПРИКЛАД 3

Спростіть вираз $-\frac{1}{2}\sqrt{64a^2}$, якщо $a<0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Подамо підкореневий вираз як квадрат одночлена.	$\sqrt{64a^2}=\sqrt{(8a)^2}$
КРОК 2	Скористаємося тотожностями $\sqrt{a^2}=\lvert a\rvert$ і $\lvert ab\rvert=\lvert a\rvert\cdot\lvert b\rvert$.	$\sqrt{(8a)^2}=\lvert 8a\rvert=8\cdot\lvert a\rvert$
КРОК 3	Розкриємо модуль з огляду на умову $a<0$.	$8\cdot\lvert a\rvert=8\cdot(-a)=-8a$
КРОК 4	Виконаємо дію множення.	$-\frac{1}{2}\cdot(-8a)=4a$

Запис розв'язання:

$$-\frac{1}{2}\sqrt{64a^2}=-\frac{1}{2}\sqrt{(8a)^2}=-\frac{1}{2}\lvert 8a\rvert=-\frac{1}{2}\cdot 8\cdot(-a)=4a.$$

Відповідь: $4a$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

День квадратного кореня відзначають в день, коли і число, і порядковий номер місяця є квадратними коренями з числа, утвореного двома останніми цифрами року. Виявилося, що проміжок між святами у роках становить послідовність непарних чисел: 3, 5, 7... Уперше це свято відзначили 9 вересня 1981 р.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 У завданнях 1–4 знайдіть значення виразу:

1) $3\sqrt{a^2}$, якщо $a=0{,}6$;
2) $6\sqrt{b^2}$, якщо $b=0{,}4$;
3) $4\sqrt{c^2}$, якщо $c=-1{,}3$;
4) $7\sqrt{n^2}$, якщо $n=-1{,}2$.

У завданнях 5–8 спростіть вираз:

5) $\frac{1}{4}\sqrt{16a^2}$;
6) $\frac{1}{3}\sqrt{81b^2}$;
7) $\frac{1}{5}\sqrt{25k^2}$, якщо $k>0$;
8) $-\frac{1}{2}\sqrt{36m^2}$, якщо $m<0$.

ПРИКЛАД 4

Спростіть вираз $4\sqrt{m^{60}}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Подамо підкореневий вираз m^{60} у вигляді квадрата одночлена.	$\sqrt{m^{60}}=\sqrt{(m^{30})^2}$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Добудемо квадратний корінь з отриманого виразу.	$\sqrt{\left(m^{30}\right)^2}=\left\|m^{30}\right\|$
КРОК 3	Показник степеня m^{30} є парним, тому $m^{30}\geqslant 0$. Розкриємо модуль.	$\left\|m^{30}\right\|=m^{30}$
КРОК 4	Виконаємо дію множення.	$4m^{30}$

Запис розв'язання: $4\sqrt{m^{60}}=4\sqrt{\left(m^{30}\right)^2}=4\cdot\left|m^{30}\right|=4m^{30}$.

Відповідь: $4m^{30}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 У завданнях 1–4 обчисліть:

1) $\sqrt{5^4}$; 2) $\sqrt{10^4}$; 3) $\sqrt{(-2)^6}$; 4) $\sqrt{(-6)^4}$.

У завданнях 5–8 спростіть вираз:

5) $8\sqrt{x^{12}}$; 7) $a\sqrt{a^{34}}$, якщо $a>0$;

6) $9\sqrt{p^{28}}$; 8) $-b\sqrt{b^{42}}$, якщо $b<0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Термін «радикал» використовують також і в мовознавстві. Радикалом часто називають ієрогліфічний ключ — простий ієрогліф, який є частиною складного ієрогліфа і може пояснити його значення.

ПРИКЛАД 5

Спростіть вираз $\sqrt{y^2-4y+4}$, якщо $y\geqslant 2$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Подамо підкореневий вираз y^2-4y+4 у вигляді квадрата двочлена.	$y^2-4y+4=(y-2)^2$
КРОК 2	Запишемо заданий вираз у вигляді квадратного кореня зі степеня.	$\sqrt{y^2-4y+4}=\sqrt{(y-2)^2}$
КРОК 3	Добудемо квадратний корінь з отриманого виразу, скориставшись формулою $\sqrt{a^2}=\|a\|$.	$\sqrt{(y-2)^2}=\|y-2\|$
КРОК 4	Розкриємо модуль, проаналізувавши знак підмодульного виразу за умови, що $y\geqslant 2$.	Якщо $y\geqslant 2$, то $y-2\geqslant 0$, тому $\|y-2\|=y-2$

Запис розв'язання: $\sqrt{y^2-4y+4}=\sqrt{(y-2)^2}=|y-2|$.

При $y\geqslant 2$ отримаємо: $|y-2|=y-2$.

Відповідь: $y-2$.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(y+6)^2}$ при $y \geqslant -6$;

2) $\sqrt{(a-8)^2}$ при $a<8$;

3) $\sqrt{x^2-14x+49}$ при $x \leqslant 7$;

4) $\sqrt{9x^2+6x+1}$ при $x>-\frac{1}{3}$;

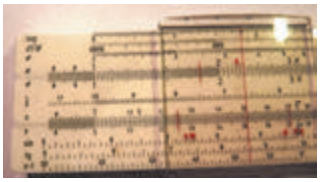
5) $-2\sqrt{t^2+10t+25}$ при $t \leqslant -5$;

6) $\frac{1}{3}\sqrt{9c^2-18c+9}$ при $c>1$;

7) $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+4}}$ при $x<2$;

8) $\frac{\sqrt{a^2+8a+16}}{a+4}$ при $a>-4$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



До появи калькуляторів квадратні корені добували різними методами — арифметичним, геометричним, грубою оцінкою, стовпчиком, методом Герона, методом Ньютона, за допомогою логарифмічної лінійки тощо. У 1817 р. Пітер Марк Роже запропонував нову шкалу логарифмічної лінійки для обчислення коренів і степенів чисел. У 1972 р. компанія «Хьюлетт-Паккард» випустила перший кишеньковий калькулятор. Не минуло й 10 років, як логарифмічні лінійки практично вийшли з ужитку. Наразі освічена людина знає таблицю квадратів від 1 до 20 напам'ять.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Обчисліть:

1) $2\cdot\sqrt{(-11)^2}$;

2) $8\cdot\sqrt{(-0,2)^2}$;

3) $\frac{1}{5}\cdot\sqrt{(-50)^2}$;

4) $\frac{2}{3}\cdot\sqrt{(1,8)^2}$;

5) $\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{5^2}$;

6) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-6)^2}-\frac{2}{7}\cdot\sqrt{(-14)^2}$.

2 Обчисліть значення виразу для заданих значень змінної:

1) $\sqrt{a^2}$, $a=-4$;

2) $\sqrt{y^2}$, $y=3$;

3) $4\sqrt{m^2}$, $m=-0,3$;

4) $-5\sqrt{t^2}$, $t=-2$;

5) $\frac{1}{7}\sqrt{k^2}$, $k=-21$;

6) $\frac{2}{9}\sqrt{p^2}$, $p=-81$.

3 Спростіть вираз:

1) $-6\sqrt{y^2}$;

2) $\frac{1}{3}\sqrt{36m^2}$;

3) $\sqrt{m^2}-\sqrt{a^2}$;

4) $\sqrt{4t^2}+\sqrt{49c^2}$;

5) $-\sqrt{x^{2016}}$;

6) $\frac{1}{2}\sqrt{4c^{1000}}$.

4 Спростіть вираз:

1) $\sqrt{a^2}+\sqrt{4m^2}$, якщо $a<0$, $m \geqslant 0$;

2) $2\sqrt{16c^2}-\frac{1}{3}\sqrt{9y^2}$, якщо $c \geqslant 0$, $y<0$.

5 Спростіть вираз:

1) $\sqrt{c^2-12c+36}$, якщо $c \leqslant 6$;

2) $\sqrt{y^2+18y+81}$, якщо $y \leqslant -9$;

3) $\sqrt{9k^2-12k+4}$, якщо $k \leqslant \frac{2}{3}$;

4) $\sqrt{16y^2+24y+9}$, якщо $y<-\frac{3}{4}$.

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

1) $|a|=\begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0; \\ -a \text{ при } a<0. \end{cases}$

2) Якщо $a>0$, то $-a<0$;
якщо $a<0$, то $-a>0$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Значення виразу $\sqrt{a^2}$ дорівнює 45 при $a=-45$.

2) Значення виразу $\sqrt{\left(2^{10}-3^{10}\right)^2}$ дорівнює $3^{10}-2^{10}$.

3) Якщо $c<0$, то $\sqrt{16c^2}=-4c$.

4) Якщо $x\geqslant 0$, то $\sqrt{9x^2}=3x$.

5) Значення виразу $\sqrt{b^2}$ може бути від'ємним.

Бенджамін Франклін (англ. Benjamin Franklin; 1706–1790) — політичний діяч, дипломат, учений, письменник, видавець, один із засновників США. Запропонував проект блискавковідводу, винайшов біфокальні окуляри, економічну малогабаритну піч для дому, створив першу детальну карту Гольфстріму, заснував першу в США публічну бібліотеку тощо.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ТАКСІ»

У чотирьох компаніях таксі, які спеціалізуються на перевезенні пасажирів, діють такі тарифи (див. таблицю).

Компанія таксі	Тариф
«Шанс»	15 грн за перші 2 км, потім 3,5 грн за 1 км
«Браво»	15 грн за перші 2 км, потім 3,3 грн за 1 км
«Економ»	15 грн за 1-й кілометр, потім 3,5 грн за 1 км
«Оптимальне»	12 грн за перші 2 км, потім 4 грн за 1 км

1. Послугами якої компанії слід скористатися, щоб вартість поїздки на відстань, не більшу за 2 км, була найменшою?
2. Розрахуйте вартість поїздки на відстань 5 км, якщо послугу надасть компанія «Браво».
3. Розрахуйте вартість поїздки на відстань 17 км, якщо послугу надасть компанія «Економ».
4. Послугами якої компанії слід скористатися, щоб вартість поїздки на відстань 22 км була найменшою?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У всьому світі зараз дедалі популярнішими стають спеціальні мобільні додатки для виклику таксі. Пасажир може замовити авто, побачити на карті, де перебуває машина, та вибрати водія, ознайомившись із його рейтингом.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Обчисліть:

1) $\sqrt{3^2}$; 3) $3\sqrt{5^2}$; 5) $8\sqrt{(-7)^2}$; 7) $-\frac{2}{3}\sqrt{(-3{,}6)^2}$;

2) $\sqrt{10^2}$; 4) $5\sqrt{11^2}$; 6) $2\sqrt{(-17)^2}$; 8) $-\frac{5}{6}\sqrt{(-4{,}2)^2}$.

Див. приклад 1

Див. приклади 2, 3

2 Знайдіть значення виразу:

1) $2\sqrt{a^2}$, якщо $a=0{,}7$;
2) $5\sqrt{b^2}$, якщо $b=0{,}3$;
3) $3\sqrt{c^2}$, якщо $c=-1{,}6$;
4) $8\sqrt{n^2}$, якщо $n=-1{,}1$.

3 Спростіть вираз:

1) $\frac{1}{7}\sqrt{49k^2}$;
2) $\frac{1}{2}\sqrt{100m^2}$;
3) $\frac{1}{3}\sqrt{9a^2}$, якщо $a\geqslant 0$;
4) $-\frac{1}{4}\sqrt{400b^2}$, якщо $b<0$.

Див. приклад 4

4 Обчисліть:

1) $\sqrt{3^4}$; 2) $\sqrt{7^4}$; 3) $\sqrt{(-3)^6}$; 4) $\sqrt{(-2)^8}$.

5 Спростіть вираз:

1) $7\sqrt{y^{36}}$;
2) $2\sqrt{n^{40}}$;
3) $c\sqrt{c^{18}}$, якщо $c\geqslant 0$;
4) $-z\sqrt{z^{62}}$, якщо $z<0$.

Див. приклад 5

6 Спростіть вираз:

1) $\sqrt{(y+4)^2}$ при $y\geqslant -4$;
2) $\sqrt{(a-1)^2}$ при $a<1$;
3) $\sqrt{x^2-4x+4}$ при $x<2$;
4) $\sqrt{x^2+10x+25}$ при $x\geqslant -5$;
5) $-5\sqrt{t^2+12t+36}$ при $t<-6$;
6) $\frac{1}{2}\sqrt{4c^2-8c+4}$ при $c\geqslant 1$;
7) $\frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+9}}$ при $x<3$;
8) $\frac{\sqrt{a^2+14a+49}}{a+7}$ при $a>-7$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Виберіть правильні рівності:

1) $40^2=5^2\cdot 8^2$;
2) $36^2=4^2\cdot 9^2$;
3) $15^{12}=3^{12}\cdot 5^{12}$;
4) $14^{20}=2^{20}\cdot 7^{20}$;
5) $3^{18}\cdot(-11)^{18}=33^{18}$;
6) $5^{21}\cdot(-13)^{21}=-65^{21}$;
7) $\frac{3^{35}\cdot 2^{35}}{10^{35}}=\left(\frac{3}{5}\right)^{35}$;
8) $\frac{5^{41}\cdot 7^{41}}{14^{41}}=\left(\frac{5}{2}\right)^{41}$.

Досвід — це школа, де уроки коштують дорого, але це — єдина школа, де можна навчитися.

Бенджамін Франклін

§ 16 ВЛАСТИВОСТІ АРИФМЕТИЧНОГО КВАДРАТНОГО КОРЕНЯ. АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ З ДОБУТКУ І ЧАСТКИ

ВЧОРА	Ви навчилися обчислювати корінь зі степеня
СЬОГОДНІ	Ви познайомитеся з добуванням квадратного кореня з добутку і частки
ЗАВЖДИ	Ви зможете економити час на виконання розрахунків, розв'язуючи задачі практичного змісту

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

У старших класах ви дізнаєтеся, що швидкість, з якою тіло рухається навколо Землі по колу радіуса R під дією сили всесвітнього тяжіння, можна обчислити за формулою $v=\sqrt{G\cdot\frac{M}{R}}$, де G — гравітаційна стала, M — маса Землі. Для визначення цієї швидкості можна обчислити підкореневий вираз, а потім добути корінь. А можна зробити інакше: окремо добути корені з величин G, M і R та скористатися правилом знаходження кореня з добутку і частки. Проаналізувавши різні варіанти порядку дій, можна вибрати оптимальний спосіб обчислення значення даного виразу.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Космічний апарат Dragon V2, розроблений корпорацією SpaceX, називають «космічним таксі». Цей апарат може доставити на Міжнародну космічну станцію та повернути на Землю до 7 осіб. Точність його посадки на Землю порівнянна з точністю приземлення гелікоптера.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Добування квадратних коренів із математичних виразів часто зводиться до знаходження кореня з добутку або частки. Ви вже вмієте добувати корінь зі степеня. У цьому параграфі ви дізнаєтеся, як добувати корінь із добутку та частки.

АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ ІЗ ДОБУТКУ

Теорема 1 (корінь із добутку)

Арифметичний квадратний корінь із добутку невід'ємних множників дорівнює добутку коренів із цих множників:

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b},\ a\geqslant 0,\ b\geqslant 0.$$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Доведення

Щоб довести, що $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, слід довести два твердження:

1) $\sqrt{a}\sqrt{b}\geqslant 0$; 2) $\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2=ab$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$\sqrt{a^2}=|a|$, a — будь-яке число;

$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, якщо $a\geqslant 0$

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- арифметичний квадратний корінь
- корінь із добутку
- корінь із частки (дробу)
- підкореневий вираз
- корінь зі степеня
- модуль числа

Крок	Зміст
КРОК 1	За означенням арифметичного квадратного кореня $\sqrt{a} \geqslant 0$, $\sqrt{b} \geqslant 0$, отже, $\sqrt{a}\sqrt{b} \geqslant 0$.
КРОК 2	$\left(\sqrt{a}\sqrt{b}\right)^2 = \left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2$ (за властивістю піднесення добутку до степеня).
КРОК 3	$\left(\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{b}\right)^2 = ab$ (за тотожністю $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $a \geqslant 0$).

Теорему доведено.

Розглянемо такий приклад. Вираз $\sqrt{36}$ має зміст, оскільки $36 > 0$. Для знаходження значення цього виразу скористаємось означенням арифметичного квадратного кореня: $\sqrt{36} = 6$, оскільки $6 \geqslant 0$ і $6^2 = 36$.

Тепер подамо число 36 у вигляді добутку $(-4)\cdot(-9)$. Чи має зміст вираз $A = \sqrt{(-4)(-9)}$? Так. Обчислимо покроково його значення: $\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{36}$, отже, $A = 6$.

А чи можна записати $A = \sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9}$? Ні, оскільки це суперечить означенню арифметичного квадратного кореня. Тоді як добути корінь із добутку двох від'ємних множників? Застосувавши модуль: $\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{|-4|}\cdot\sqrt{|-9|} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = 2\cdot 3 = 6$.

Таким чином, арифметичний квадратний корінь із невід'ємного виразу, що є добутком двох множників, дорівнює добутку коренів із модулів цих множників.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Теорема 1 справедлива для довільної кількості **невід'ємних** множників:

$\sqrt{abc} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}$;

$\sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ldots\sqrt{a_n}$

(n — натуральне число).

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

$$\sqrt{ab} = \sqrt{|a|}\sqrt{|b|},$$

де $ab \geqslant 0$, тобто $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ або $a \leqslant 0$, $b \leqslant 0$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Твердження, обернене до теореми 1

Щоб помножити арифметичні квадратні корені, можна помножити їхні підкореневі вирази і добути корінь з отриманого добутку:

при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ маємо: $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

ПРИКЛАД 1

Обчисліть: 1) $\sqrt{100\cdot 49}$; 2) $\sqrt{0{,}04\cdot 400}$; 3) $\sqrt{32\cdot 18}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Оскільки підкореневий вираз є добутком додатних чисел, застосуємо формулу $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ (теорема 1).	$\sqrt{100\cdot 49}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{49}=$ $=10\cdot 7=70$
2) КРОК 1	Підкореневий вираз є добутком додатних чисел, тому застосуємо формулу $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.	$\sqrt{0{,}04\cdot 400}=0{,}2\cdot 20=4$
3) КРОК 1	Зауважимо, що точних значень $\sqrt{32}$ та $\sqrt{18}$ не існує. Розкладемо числа 32 і 18 на множники так, щоб один із множників був точним квадратом.	$32=16\cdot 2$; $18=9\cdot 2$
КРОК 2	Запишемо підкореневий вираз у вигляді добутку чотирьох отриманих множників і скористаємося формулою $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$.	$\sqrt{32\cdot 18}=\sqrt{16\cdot 2\cdot 9\cdot 2}=$ $=\sqrt{16\cdot 9\cdot 2^2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{2^2}=$ $=4\cdot 3\cdot 2=24$

Відповідь: 1) 70; 2) 4; 3) 24.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Обчисліть:

1) $\sqrt{25\cdot 81}$; 3) $\sqrt{0{,}09\cdot 64}$; 5) $\sqrt{12\cdot 75}$; 7) $\sqrt{1{,}12\cdot 5{,}67}$;

2) $\sqrt{16\cdot 900}$; 4) $\sqrt{0{,}36\cdot 100}$; 6) $\sqrt{45\cdot 20}$; 8) $\sqrt{1{,}92\cdot 1{,}47}$.

ПРИКЛАД 2

Обчисліть $\sqrt{12^2-8^2}$.

Розв'язання

Спосіб 1

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо вираз 12^2-8^2 на множники. Для цього винесемо спільний множник за дужки.	$12^2-8^2=(3\cdot 4)^2-(2\cdot 4)^2=$ $=3^2\cdot 4^2-2^2\cdot 4^2=4^2\cdot(3^2-2^2)$
КРОК 2	Добудемо корінь із отриманого добутку: $\underbrace{4^2}_{\text{I множник}}\cdot\underbrace{(3^2-2^2)}_{\text{II множник}}$.	$\sqrt{4^2\cdot(3^2-2^2)}=\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{3^2-2^2}=$ $=4\cdot\sqrt{3^2-2^2}=4\cdot\sqrt{9-4}=4\sqrt{5}$

$\sqrt{a+b}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$,

$\sqrt{a-b}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$

$(a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$

Спосіб 2

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо підкореневий вираз на множники за формулою різниці квадратів. Розкладемо другий множник добутку на множники так, щоб один із них був точним квадратом.	$12^2-8^2=(12-8)(12+8)=4\cdot 20=$ $=4\cdot 4\cdot 5$
КРОК 2	Добудемо квадратний корінь із отриманого добутку. Зауважимо: оскільки $\sqrt{5}$ не має точного значення (можна знайти тільки наближене), то відповідь залишимо у вигляді $4\sqrt{5}$.	$\sqrt{4\cdot 4\cdot 5}=\sqrt{4^2\cdot 5}=4\sqrt{5}$

Відповідь: $4\sqrt{5}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Обчисліть:

1) $\sqrt{9\cdot(15+34)}$;
2) $\sqrt{16\cdot(23-19)}$;
3) $\sqrt{(41-40)\cdot(41+40)}$;
4) $\sqrt{(35+10)\cdot(35-10)}$;
5) $\sqrt{20^2-16^2}$;
6) $\sqrt{89^2-80^2}$;
7) $\sqrt{28^2-8^2}$;
8) $\sqrt{54^2-45^2}$.

$\sqrt{a^2+b^2}\neq\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$

$\sqrt{a^2-b^2}\neq\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}$

ПРИКЛАД 3

Знайдіть значення добутку $\sqrt{17}\cdot\sqrt{68}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Застосуємо формулу $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$ (твердження, обернене до теореми 1). Розкладемо число 68 на множники, один із яких є точним квадратом.	$\sqrt{17}\cdot\sqrt{68}=\sqrt{17\cdot 68}=\sqrt{17\cdot 17\cdot 4}$
КРОК 2	Добудемо корінь із отриманого добутку.	$\sqrt{17\cdot 17\cdot 4}=\sqrt{4\cdot 17^2}=$ $=\sqrt{4}\cdot\sqrt{17^2}=2\cdot 17=34$

Відповідь: 34.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$;
2) $\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}$;
3) $\sqrt{0,5}\cdot\sqrt{8}$;
4) $\sqrt{80}\cdot\sqrt{0,2}$;
5) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{52}$;
6) $\sqrt{19}\cdot\sqrt{171}$;
7) $\sqrt{56}\cdot\sqrt{7}\cdot\sqrt{162}$;
8) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{375}\cdot\sqrt{27}$.

ПРИКЛАД 4

Подайте вираз у вигляді добутку та знайдіть допустимі значення змінних, що входять у вираз:

1) $\sqrt{144a}$;
2) $\sqrt{16mn}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Скористаємося теоремою 1. Проаналізуємо знак змінної a з огляду на те, що підкореневий вираз може бути лише невід'ємним.	$\sqrt{144a}=\sqrt{144}\cdot\sqrt{a}=12\sqrt{a}$; $a\geqslant 0$
2) КРОК 1	Скористаємося теоремою 1. Проаналізуємо знаки змінних m і n з огляду на те, що підкореневий вираз може бути лише невід'ємним.	$\sqrt{16mn}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{mn}=4\sqrt{mn}$; $mn\geqslant 0$, якщо m і n мають один знак, тобто $m\geqslant 0$ і $n\geqslant 0$ або $m\leqslant 0$ і $n\leqslant 0$
КРОК 2	Використаємо формулу арифметичного квадратного кореня з невід'ємного виразу.	$\sqrt{mn}=\sqrt{\lvert m\rvert}\cdot\sqrt{\lvert n\rvert}$
КРОК 3	Запишемо відповідь.	$4\sqrt{mn}$, або $4\sqrt{\lvert m\rvert}\sqrt{\lvert n\rvert}$, де m і n мають один знак

Відповідь: 1) $12\sqrt{a}$, де $a\geqslant 0$; 2) $4\sqrt{mn}=4\sqrt{\lvert m\rvert}\sqrt{\lvert n\rvert}$, де m і n мають один знак.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Подайте вираз у вигляді добутку та знайдіть допустимі значення змінних, що входять у вираз:

1) $\sqrt{16a}$;
2) $\sqrt{36b}$;
3) $\sqrt{169x}$;
4) $\sqrt{225m}$;
5) $\sqrt{-81a}$;
6) $\sqrt{-100c}$;
7) $\sqrt{9xy}$;
8) $\sqrt{-25kn}$.

$\sqrt{ab}=\sqrt{\lvert a\rvert}\sqrt{\lvert b\rvert}$,
де $ab\geqslant 0$,
тобто $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$
або $a\leqslant 0$, $b\leqslant 0$

АРИФМЕТИЧНИЙ КВАДРАТНИЙ КОРІНЬ ІЗ ЧАСТКИ

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Теорема 2 (корінь із частки)

Арифметичний квадратний корінь із частки, тобто з дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює квадратному кореню з чисельника, поділеному на квадратний корінь зі знаменника:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a\geqslant 0,\ b>0.$$

Доведення

Щоб довести, що $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a\geqslant 0$, $b>0$, слід довести два твердження:

1) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geqslant 0$; 2) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{a}{b}$.

Крок	Зміст
КРОК 1	За означенням арифметичного квадратного кореня $\sqrt{a}\geqslant 0$ при $a\geqslant 0$, $\sqrt{b}>0$ при $b>0$. Таким чином, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\geqslant 0$.
КРОК 2	$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{b}\right)^2}=\frac{a}{b}$ (за властивістю піднесення дробу до степеня і тотожністю $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $a\geqslant 0$).

Теорему доведено.

Розглянемо арифметичний корінь із частки від'ємних чисел, наприклад $\sqrt{\frac{-6}{-7}}$. Скоротивши дріб $\frac{-6}{-7}$ на (-1), одержимо корінь $\sqrt{\frac{6}{7}}$, до якого можна застосувати теорему 2: $\sqrt{\frac{6}{7}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$.

Урахувавши, що $6=|-6|$ і $7=|-7|$, запишемо: $\sqrt{\frac{-6}{-7}}=\frac{\sqrt{|-6|}}{\sqrt{|-7|}}$, або $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$, якщо a і b мають один знак, $b\neq 0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Пріянші Сомані, яка народилася в 1998 р. в Індії, уміє виконувати подумки складні математичні обчислення. У 6 років вона вже додавала й множила великі числа. В 11 років перемогла на змаганні Mental Calculation World Cup — світовому чемпіонаті з усного математичного рахунку. Пріянші першою серед 37 учасників обчислила квадратний корінь із десяти шестицифрових чисел, витративши на це всього 6 хвилин 51 секунду. У 2012 р. дівчинка стала новим світовим рекордсменом у добуванні квадратних коренів подумки, обчисливши квадратний корінь із десяти шестицифрових чисел за 2 хвилини 43 секунди.

Отже, арифметичний квадратний корінь із невід'ємного дробу дорівнює дробу, чисельником якого є корінь із модуля чисельника даного дробу, а знаменником — корінь із модуля знаменника даного дробу, за умови що чисельник і знаменник підкореневого виразу мають один знак.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$ при $\frac{a}{b} \geqslant 0$, тобто при $a \geqslant 0$ і $b > 0$ або $a \leqslant 0$ і $b < 0$.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Твердження, обернене до теореми 2

Щоб поділити арифметичні квадратні корені, можна поділити їх підкореневі вирази (у зазначеному порядку) і добути корінь з отриманої частки (дробу):

при $a \geqslant 0$, $b > 0$ маємо: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

ПРИКЛАД 5

Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{100}{169}}$; 2) $\sqrt{\frac{50}{98}}$; 3) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$.

СЛІД ЗНАТИ!

Перед добуванням кореня з мішаного числа слід перетворити його в неправильний дріб.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Оскільки підкореневий вираз є дробом, чисельник і знаменник якого — додатні числа, застосуємо формулу $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geqslant 0$, $b > 0$ (теорема 2).	$\sqrt{\frac{100}{169}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{169}} = \frac{10}{13}$
2) КРОК 1	Скоротимо підкореневий вираз, а потім застосуємо формулу $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geqslant 0$, $b > 0$.	$\sqrt{\frac{50}{98}} = \sqrt{\frac{25 \cdot \cancel{2}}{49 \cdot \cancel{2}}} = \sqrt{\frac{25}{49}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{49}} = \frac{5}{7}$
3) КРОК 1	Перетворимо підкореневий вираз, який є мішаним числом, у неправильний дріб, а потім застосуємо формулу $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a \geqslant 0$, $b > 0$.	$\sqrt{1\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{9}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

Відповідь: 1) $\frac{10}{13}$; 2) $\frac{5}{7}$; 3) $1\frac{1}{3}$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Знайдіть помилку в ланцюжку.

$5\text{ к.} = \sqrt{25\text{ к.}} = \sqrt{\frac{1}{4}}\text{ грн} =$
$= \frac{1}{2}\text{ грн} = 50\text{ к.}$

ТРЕНУЄМОСЯ

5 Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{9}{49}}$;
2) $\sqrt{\frac{16}{81}}$;
3) $\sqrt{\frac{196}{225}}$;
4) $\sqrt{\frac{100}{121}}$;
5) $\sqrt{\frac{12}{27}}$;
6) $\sqrt{\frac{18}{50}}$;
7) $\sqrt{2\frac{14}{25}}$;
8) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

ПРИКЛАД 6

Знайдіть значення виразу $\sqrt{4{,}9\cdot 260\cdot 1\frac{12}{13}\cdot 2}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Перетворимо підкореневий вираз: добуток перших двох множників запишемо у вигляді добутку двох цілих чисел.	$4{,}9\cdot 260 = \underbrace{4{,}9\cdot 10}\cdot 26 = 49\cdot 26$
КРОК 2	Третій множник перетворимо в неправильний дріб.	$1\frac{12}{13} = \frac{25}{13}$
КРОК 3	Спростимо отриманий підкореневий вираз.	$49\cdot 26\cdot\frac{25}{13}\cdot 2 = \frac{49\cdot \overset{2}{\cancel{26}}\cdot 25\cdot 2}{\cancel{13}} = 49\cdot 2^2\cdot 25$
КРОК 4	Добудемо корінь із отриманого добутку.	$\sqrt{49\cdot 2^2\cdot 25} = \sqrt{49}\cdot\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{25} =$ $= 7\cdot 2\cdot 5 = 70$

Відповідь: 70.

ТРЕНУЄМОСЯ

6 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{11\cdot\frac{9}{11}}$;
2) $\sqrt{\frac{36}{37}\cdot 37}$;
3) $\sqrt{\frac{4}{29}\cdot\frac{29}{81}}$;
4) $\sqrt{\frac{16}{23}\cdot\frac{23}{25}}$;
5) $\sqrt{1\frac{6}{49}\cdot\frac{49}{55}}$;
6) $\sqrt{\frac{16}{31}\cdot 7\frac{3}{4}}$;
7) $\sqrt{2{,}5\cdot 510\cdot 1\frac{8}{17}\cdot 3}$;
8) $\sqrt{950\cdot 5\cdot 2\frac{11}{19}\cdot 1{,}6}$.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$ при $\frac{a}{b}\geqslant 0$,

тобто при $a\geqslant 0$ і $b>0$

або $a\leqslant 0$ і $b<0$

ПРИКЛАД 7

Подайте вираз $\sqrt{\frac{a}{b}}$ у вигляді частки коренів, якщо $a<0$ і $b<0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Урахувавши, що a і b мають один знак, запишемо формулу кореня з частки для $\frac{a}{b} \geqslant 0$.	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{\lvert a \rvert}}{\sqrt{\lvert b \rvert}}$ при $a \geqslant 0$ і $b > 0$ або $a \leqslant 0$ і $b < 0$
КРОК 2	Розкриємо модулі за умови, що підмодульні вирази є від'ємними.	$\lvert a \rvert = -a$, якщо $a < 0$; $\lvert b \rvert = -b$, якщо $b < 0$
КРОК 3	Запишемо частку коренів з урахуванням кроку 2.	$\frac{\sqrt{\lvert a \rvert}}{\sqrt{\lvert b \rvert}} = \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$

Відповідь: $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

7 Подайте у вигляді частки коренів вираз:

1) $\sqrt{\frac{x}{5}}$, якщо $x > 0$;
2) $\sqrt{\frac{7}{y}}$, якщо $y > 0$;
3) $\sqrt{\frac{2a}{b}}$, якщо $a > 0$, $b > 0$;
4) $\sqrt{\frac{k}{6m}}$, якщо $k > 0$, $m > 0$;
5) $\sqrt{\frac{7c}{x}}$, якщо $c < 0$, $x < 0$;
6) $\sqrt{-\frac{n}{13y}}$, якщо $n < 0$, $y > 0$;
7) $\sqrt{\frac{3a}{bx}}$, якщо $a < 0$, $b < 0$, $x > 0$;
8) $\sqrt{-\frac{kn}{10c}}$, якщо $c < 0$, $k < 0$, $n < 0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$\lvert a \rvert = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ якщо } a < 0 \end{cases}$$

Знак «–» перед виразом a означає «протилежний до a».

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Обчисліть:

1) $\sqrt{25 \cdot 0{,}09}$;
2) $\sqrt{0{,}16 \cdot 49 \cdot 400}$;
3) $\sqrt{2\frac{2}{49} \cdot 6\frac{1}{4}}$;
4) $\sqrt{640 \cdot 250}$;
5) $\sqrt{98 \cdot 32}$;
6) $\sqrt{3\frac{1}{9} \cdot \frac{64}{7}}$.

2 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{29^2 - 20^2}$;
2) $\sqrt{58^2 - 42^2}$;
3) $\sqrt{82^2 - 18^2}$;
4) $\sqrt{250^2 - 150^2}$;
5) $\sqrt{18^2 + 24^2}$;
6) $\sqrt{36^2 + 15^2}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Цікавий результат отримаєте ви, добувши квадратний корінь із числа 12 345 678 987 654 321. Можна здивувати друзів, продемонструвавши добування кореня з 17-цифрового числа подумки.

Ілон Рів Маск (англ. Elon Reeve Musk) — канадсько-американський інженер, підприємець, винахідник, філантроп, засновник компанії SpaceX, співзасновник платіжної системи PayPal, голова ради директорів компанії Tesla Motors і член ради директорів компанії SolarCity. Він став прототипом Тоні Старка, головного героя фільмів про Залізну Людину. Зараз Ілон Маск реалізує новий проект, спрямований на розвиток мережі Інтернет.

3 Обчисліть:

1) $\sqrt{70}\cdot\sqrt{0,7}$;
2) $\sqrt{30}\cdot\sqrt{2,7}$;
3) $\dfrac{\sqrt{4,9}}{\sqrt{3,2}}$;
4) $\dfrac{\sqrt{2,5}}{\sqrt{6,4}}$;
5) $\dfrac{\sqrt{300}}{\sqrt{48}}$;
6) $\dfrac{\sqrt{500}}{\sqrt{12\,500}}$.

4 Подайте вираз у вигляді добутку або частки та знайдіть допустимі значення змінних, що входять у вираз:

1) $\sqrt{144m}$;
2) $\sqrt{7a}$;
3) $\sqrt{1,69cm}$;
4) $\sqrt{\dfrac{m}{100}}$;
5) $\sqrt{\dfrac{a}{18}}$;
6) $\sqrt{\dfrac{64}{9ck}}$.

5 Подайте у вигляді частки коренів вираз:

1) $\sqrt{\dfrac{k}{3a}}$, якщо $k>0$, $a>0$;
2) $\sqrt{\dfrac{9x}{y}}$, якщо $x<0$, $y<0$;
3) $\sqrt{-\dfrac{25x}{36n}}$, якщо $x>0$, $n<0$;
4) $\sqrt{-2\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{a}{b}}$, якщо $a<0$, $b>0$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

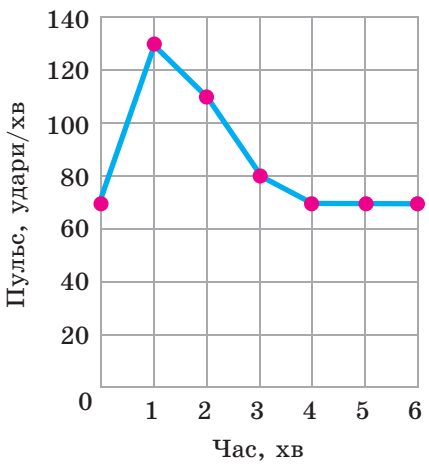
Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $m=\sqrt{2}$ і $n=\sqrt{8}$, то $m\cdot n=4$.
2) Якщо $\sqrt{3}\cdot x=\sqrt{0}$, то $x=0$.
3) Якщо $a=\sqrt{999}$ і $b=\sqrt{111}$, то $\dfrac{a}{b}=3$.
4) Якщо $\dfrac{y}{\sqrt{5}}=\sqrt{1}$, то $y=\sqrt{5}$.
5) Якщо $a\cdot b=\sqrt{6}$, то $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ТРЕНАЖЕРНИЙ ЗАЛ»

Олег щодня відвідує тренажерний зал. Одного разу він вирішив виміряти частоту пульсу перед початком фізичних вправ — вона становила 70 ударів за хвилину. Після виконання вправ протягом хвилини Олег знову виміряв пульс, а потім повторив вимірювання ще кілька разів — через кожну хвилину, без додаткових фізичних навантажень. Удома Олег побудував діаграму, що відображає отримані результати (див. рисунок).



П'ятеро друзів Олега, побачивши ці результати, зробили такі висновки.

1. Після виконання фізичних вправ частота пульсу збільшилася на 50 ударів за хвилину.
2. Для зниження частоти пульсу знадобилося менше часу, ніж для її зростання.
3. Через 4 хв після початку вимірювання частота пульсу становила 80 ударів за хвилину.
4. Частота пульсу прийшла до норми менш ніж за 6 хв.
5. Після виконання фізичних вправ частота пульсу зросла вдвічі.

З якими висновками можна погодитися?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Для розрахунку оптимального діапазону частоти пульсу під час тренувань тренери та атлети використовують формули Карвонена: максимальна частота дорівнює $220-n$, а мінімальна — $\frac{3(220-n)}{5}$, де n — вік спортсмена в роках.

Користуючись цими формулами, ви можете обчислити свій максимальний і мінімальний пульс на уроці фізкультури.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Обчисліть:

1) $\sqrt{400\cdot 49}$; 3) $\sqrt{50\cdot 72}$; 5) $\sqrt{1{,}25\cdot 2{,}45}$;

2) $\sqrt{900\cdot 0{,}25}$; 4) $\sqrt{28\cdot 63}$; 6) $\sqrt{2{,}16\cdot 3{,}84}$.

Див. приклад 1

2 Обчисліть:

1) $\sqrt{81\cdot(26-17)}$; 3) $\sqrt{37^2-12^2}$; 5) $\sqrt{36^2-27^2}$;

2) $\sqrt{(38+11)\cdot(24-8)}$; 4) $\sqrt{53^2-28^2}$; 6) $\sqrt{30^2-15^2}$.

Див. приклад 2

3 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}$; 3) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{0{,}6}$; 5) $\sqrt{15}\cdot\sqrt{135}$;

2) $\sqrt{0{,}4}\cdot\sqrt{10}$; 4) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}$; 6) $\sqrt{175}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{84}$.

Див. приклад 3

4 Подайте вираз у вигляді добутку та знайдіть допустимі значення змінних, що входять у вираз:

1) $\sqrt{25c}$; 3) $\sqrt{400y}$; 5) $\sqrt{-64b}$; 7) $\sqrt{16ab}$;

2) $\sqrt{49n}$; 4) $\sqrt{196k}$; 6) $\sqrt{-36m}$; 8) $\sqrt{-900np}$.

Див. приклад 4

5 Обчисліть:

1) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; 3) $\sqrt{\frac{144}{169}}$; 5) $\sqrt{\frac{24}{54}}$; 7) $\sqrt{1\frac{19}{81}}$;

2) $\sqrt{\frac{36}{49}}$; 4) $\sqrt{\frac{289}{400}}$; 6) $\sqrt{\frac{32}{98}}$; 8) $\sqrt{2\frac{23}{49}}$.

Див. приклад 5

Див. приклад 6

6 Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{\frac{25}{26}\cdot 26}$;
2) $\sqrt{\frac{64}{65}\cdot\frac{65}{81}}$;
3) $\sqrt{2\frac{7}{36}\cdot\frac{36}{79}}$;
4) $\sqrt{\frac{27}{29}\cdot 9\frac{2}{3}}$;
5) $\sqrt{3{,}6\cdot 460\cdot 3\frac{12}{23}\cdot 2}$;
6) $\sqrt{7\cdot 2\frac{10}{13}\cdot 6{,}4\cdot 910}$.

Див. приклад 7

7 Подайте у вигляді частки коренів вираз:

1) $\sqrt{\frac{c}{2}}$, якщо $c>0$;
2) $\sqrt{\frac{3}{n}}$, якщо $n>0$;
3) $\sqrt{\frac{5p}{z}}$, якщо $p>0$, $z>0$;
4) $\sqrt{\frac{x}{11y}}$, якщо $x>0$, $y>0$;
5) $\sqrt{\frac{6a}{m}}$, якщо $a<0$, $m<0$;
6) $\sqrt{-\frac{b}{17k}}$, якщо $b>0$, $k<0$;
7) $\sqrt{\frac{7c}{yz}}$, якщо $c<0$, $y>0$, $z<0$;
8) $\sqrt{-\frac{bm}{19p}}$, якщо $b<0$, $m<0$, $p<0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Учені-біоінженери з Массачусетського технологічного інституту запрограмували бактерію так, щоб вона виконувала деякі функції калькулятора. Тепер одноклітинний мікроорганізм може ділити, множити й добувати квадратні корені набагато ефективнішим способом, ніж існуючі сьогодні біокомп'ютери.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

1 Розкладіть на множники:

1) $4m+4n$;
2) $9a-9b$;
3) $a(x+y)+3(x+y)$;
4) $5(a+b)-n(a+b)$;
5) $6p^3(q-\sqrt{6})-2p^2(q-\sqrt{6})$;
6) $4a(\sqrt{3}-y)+8a^5(\sqrt{3}-y)$;
7) $y\sqrt{10}+3\sqrt{10}+xy+3x$;
8) $b\sqrt{5}+2\sqrt{5}-ab-2a$.

2 Розкладіть на множники вираз, використовуючи формули скороченого множення.

1) x^2-12^2;
2) 18^2-y^2;
3) m^2-81;
4) $100-n^2$;
5) $a^2-\frac{25}{4}$;
6) $\frac{16}{9}-b^2$
7) $5x^2+30xy+45y^2$;
8) $12x^2-12xy+3y^2$.

Постійно думайте про те, що ви могли б зробити краще, і ставте правильні запитання.

Ілон Маск

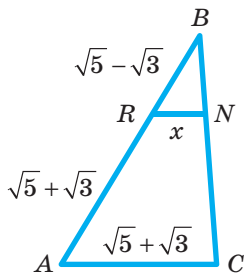
§ 17 ТОТОЖНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗІВ, ЩО МІСТЯТЬ КВАДРАТНІ КОРЕНІ

ВЧОРА — Ви навчилися добувати квадратний корінь із добутку, частки, степеня, а також підносити корінь до степеня

СЬОГОДНІ — Ви навчитеся перетворювати вирази, що містять квадратні корені, використовуючи правила множення одночлена на многочлен, многочлена на многочлен та формули скороченого множення

ЗАВЖДИ — Ви зможете використовувати тотожні перетворення виразів під час розв'язування геометричних задач

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА



У трикутнику ABC точки R і N належать сторонам AB і BC відповідно (див. рисунок). Відрізок RN паралельний стороні AC. Знайдіть довжину відрізка RN, якщо $AC = AR = \sqrt{5}+\sqrt{3}$, $RB = \sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Розв'язання

Як вам відомо з курсу геометрії, пряма, паралельна одній зі сторін трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному. Тому $\triangle RBN \sim \triangle ABC$, звідси $\frac{RB}{AB} = \frac{RN}{AC}$.

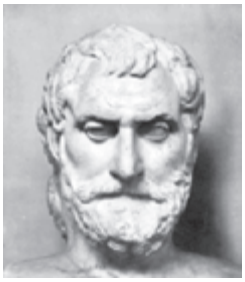
Оскільки $AB = AR + RB$, то $AB = \left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right) = \sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3} = 2\sqrt{5}$. Підставимо у формулу $\frac{RB}{AB} = \frac{RN}{AC}$ значення довжин відрізків, позначивши довжину відрізка RN через x. Отримаємо: $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{x}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$. Звідси за основною властивістю пропорції маємо: $x \cdot 2\sqrt{5} = \left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)$. Застосувавши формулу різниці квадратів до правої частини рівності, одержимо: $x \cdot 2\sqrt{5} = \left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 5-3 = 2$.

Отже, $x \cdot 2\sqrt{5} = 2$, тоді $x = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Відповідь: $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Як бачимо, існує потреба виконувати різні дії з виразами, що містять квадратні корені, у тому числі застосовувати формули скороченого множення. Такі перетворення актуальні для розв'язання задач з алгебри, геометрії, фізики тощо.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Розв'язання задачі базується на використанні теореми Фалеса. Давньогрецький математик і астроном Фалес Мілетський — автор багатьох відомих теорем. Він відкрив цікавий спосіб визначення відстані від берега до видимого корабля, а також спосіб визначення висоти різних предметів, зокрема пірамід, за довжиною тіні.

ПРИГАДАЙТЕ!

1) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ — формула різниці квадратів;

2) $\left(\sqrt{a}\right)^2=a,\ a\geqslant 0$

ГОЛОВНА ІДЕЯ

З попередніх параграфів ви дізналися, які дії виконують із квадратними коренями. Для спрощення виразів, що містять квадратні корені, використовують також перетворення, знайомі вам з курсу 7-го класу: множення одночлена на многочлен, множення многочлена на многочлен, застосування формул скороченого множення тощо. З однією з формул — формулою різниці квадратів — пов'язаний термін **«спряжені вирази»**.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

1) Вирази $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ і $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ називають **спряженими**.
2) Добуток двох спряжених виразів перетворюється в різницю за формулою різниці квадратів.

Наприклад:

$$\left(\sqrt{7}-\sqrt{11}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{11}\right)=\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{11}\right)^2=7-11=-4;$$

$$\left(5-\sqrt{13}\right)\cdot\left(5+\sqrt{13}\right)=5^2-\left(\sqrt{13}\right)^2=25-13=12.$$

У § 16 (приклад 2) було застосовано ще один прийом спрощення виразу, у якому під знаком кореня міститься добуток. Цей прийом називають винесенням множника з-під знака кореня.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- тотожні перетворення
- спряжений вираз
- винесення множника з-під знака кореня
- внесення множника під знак кореня
- звільнення від ірраціональності

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Перетворення, у результаті якого даний вираз, що є коренем із добутку, подається у вигляді добутку раціонального множника і радикала, називають винесенням множника з-під знака кореня.

Перетворення, у результаті якого добуток раціонального множника і радикала подається у вигляді кореня з добутку, називають внесенням множника під знак кореня.

АЛГОРИТМ

Алгоритм винесення множника з-під знака кореня

1. Розкладіть підкореневий вираз на множники таким чином, щоб хоча б один із них був точним квадратом.
2. Застосуйте до отриманого виразу формулу знаходження кореня з добутку.
3. Виконайте добування кореня із множника, який є точним квадратом. Якщо таких множників декілька, знайдіть значення усіх коренів і обчисліть їх добуток.
4. Запишіть результат у вигляді добутку множника, винесеного з-під знака кореня, і множника-радикала.

Наприклад:

$$\sqrt{300c}\overset{\text{Крок 1}}{=}\sqrt{100\cdot 3c}\overset{\text{Крок 2}}{=}\sqrt{100}\cdot\sqrt{3c}\overset{\text{Крок 3}}{=}10\cdot\sqrt{3c}\overset{\text{Крок 4}}{=}10\sqrt{3c}.$$

ПРИКЛАД 1

Винесіть множник із-під знака кореня в поданому виразі: $-4\sqrt{25x}+7\sqrt{100x}-\sqrt{49x}$.

Розв'язання

Вважатимемо, що всі перетворення виразів, які містять квадратні корені, виконуються на ОДЗ змінних, що входять у кожний вираз (у разі, коли не зазначено інше).

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Перетворимо вираз $\sqrt{25x}$, використовуючи формулу кореня з добутку невід'ємних множників.	$\sqrt{25x}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{x}=5\sqrt{x}$
КРОК 2	Аналогічно перетворимо вирази $\sqrt{100x}$ і $\sqrt{49x}$.	$\sqrt{100x}=\sqrt{100}\cdot\sqrt{x}=10\sqrt{x}$; $\sqrt{49x}=\sqrt{49}\cdot\sqrt{x}=7\sqrt{x}$
КРОК 3	Запишемо заданий вираз з урахуванням кроків 1 і 2.	$-4\sqrt{25x}+7\sqrt{100x}-\sqrt{49x}=$ $=-4\cdot5\sqrt{x}+7\cdot10\sqrt{x}-7\sqrt{x}=$ $=-20\sqrt{x}+70\sqrt{x}-7\sqrt{x}$
КРОК 4	Зазначимо, що вираз $\sqrt{x}$ є спільним множником усіх доданків в одержаному виразі, тобто всі ці доданки подібні відносно $\sqrt{x}$. Зведемо подібні доданки.	$-20\sqrt{x}+70\sqrt{x}-7\sqrt{x}=43\sqrt{x}$

Відповідь: $43\sqrt{x}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 У завданнях 1–4 спростіть вираз:

1) $3\sqrt{a}+9\sqrt{a}$;
2) $15\sqrt{n}-6\sqrt{n}$;
3) $5\sqrt{x}-8\sqrt{x}+6\sqrt{x}$;
4) $9\sqrt{t}+2\sqrt{t}-14\sqrt{t}$.

У завданнях 5–8 винесіть множник із-під знака кореня та спростіть одержаний вираз:

5) $\sqrt{4b}-\sqrt{81b}-\sqrt{9b}$;
6) $-\sqrt{36y}+\sqrt{25y}-\sqrt{16y}$;
7) $\sqrt{50c}+3\sqrt{8c}-\frac{1}{3}\sqrt{72c}$;
8) $\frac{1}{2}\sqrt{20m}-4\sqrt{45m}+\sqrt{80m}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Шотландський математик Джон Непер, один із винахідників логарифмів, запропонував також математичний набір для полегшення обчислень, який отримав назву «палички Непера», та спеціальну лічильну дошку для виконання чотирьох арифметичних дій, піднесення до квадрата і добування квадратного кореня. Обчислення за допомогою цієї дошки здійснювались у двійковій системі числення.

ПРИКЛАД 2

Знайдіть значення виразу $\dfrac{\sqrt{45b}+\sqrt{80b}-\sqrt{20b}}{\sqrt{5b}}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Перетворимо кожний доданок у чисельнику дробу, застосовуючи винесення множника з-під знака кореня.	$\sqrt{45b}=\sqrt{9\cdot 5b}=3\sqrt{5b}$; $\sqrt{80b}=\sqrt{16\cdot 5b}=4\sqrt{5b}$; $\sqrt{20ab}=\sqrt{4\cdot 5b}=2\sqrt{5b}$
КРОК 2	Запишемо заданий вираз із урахуванням виконаних перетворень.	$\dfrac{3\sqrt{5b}+4\sqrt{5b}-2\sqrt{5b}}{\sqrt{5b}}$
КРОК 3	Зведемо в чисельнику дробу доданки, подібні відносно виразу $\sqrt{5b}$.	$\dfrac{3\sqrt{5b}+4\sqrt{5b}-2\sqrt{5b}}{\sqrt{5b}}=\dfrac{5\sqrt{5b}}{\sqrt{5b}}$
КРОК 4	Скоротимо отриманий дріб.	$\dfrac{5\sqrt{5b}}{\sqrt{5b}}=5$

Відповідь: 5.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

За допомогою астрономічних досліджень Фалес передбачив величезний урожай оливок та використав цей факт для власного збагачення. Фалеса, який зрозумів вплив дефіциту товарів на процес ціноутворення, можна вважати раннім економістом.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{2\sqrt{a}+\sqrt{36a}}{\sqrt{a}}$;

2) $\dfrac{\sqrt{81b}-5\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$;

3) $\dfrac{\sqrt{25n}+\sqrt{9n}}{\sqrt{64n}}$;

4) $\dfrac{\sqrt{49m}-\sqrt{4m}}{\sqrt{100m}}$;

5) $\dfrac{\sqrt{4x}+3\sqrt{16x}-4\sqrt{25x}}{\sqrt{6x}}$;

6) $\dfrac{2\sqrt{49y}-\sqrt{9y}+3\sqrt{64y}}{\sqrt{7y}}$;

7) $\dfrac{6\sqrt{12c}-\sqrt{300c}+2\sqrt{75c}}{\sqrt{24c}}$;

8) $\dfrac{\sqrt{125t}+4\sqrt{180t}-3\sqrt{45t}}{\sqrt{40t}}$.

ПРИКЛАД 3

Знайдіть значення виразу $\left(2\sqrt{18}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{2}-\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо порядок виконання перетворень у заданому виразі.	1) Множення многочлена на одночлен $\left(2\sqrt{18}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{2}$; 2) множення многочлена на многочлен $\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)$; 3) віднімання від результату першої дії результату другої дії

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Виконаємо перше перетворення.	$\left(2\sqrt{18}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}=$ $=2\sqrt{9}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2\cdot3\cdot2+\sqrt{3}\cdot2=12+2\sqrt{3}$, або інакше: $\left(2\sqrt{18}+\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{36}+\sqrt{12}=12+2\sqrt{3}$
КРОК 3	Виконаємо друге перетворення.	$\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)=2\cdot\sqrt{3}-2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-\sqrt{3}=$ $=2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}=1+\sqrt{3}$
КРОК 4	Виконаємо третє перетворення.	$12+2\sqrt{3}-\left(1+\sqrt{3}\right)=12+2\sqrt{3}-1-\sqrt{3}=11+\sqrt{3}$

Відповідь: $11+\sqrt{3}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Виконайте дії:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}+\left(\sqrt{5}\right)^2$;
2) $\left(\sqrt{3}\right)^2-\sqrt{18}\cdot\sqrt{2}$;
3) $\sqrt{2}\left(\sqrt{50}-\sqrt{2}\right)$;
4) $\sqrt{3}\left(\sqrt{48}+\sqrt{3}\right)$;
5) $\sqrt{6}\left(\sqrt{24}-3\sqrt{6}+\sqrt{150}\right)$;
6) $\left(\sqrt{20}+\sqrt{180}-5\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{5}$;
7) $\left(\sqrt{12}-3\sqrt{2}\right)\left(4\sqrt{3}+\sqrt{8}\right)-2\sqrt{24}$;
8) $\left(\sqrt{20}+5\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{5}-\sqrt{27}\right)+3\sqrt{60}$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Вираз $11+\sqrt{3}$ спростити далі неможливо. Доданки, що входять у вираз, не є подібними. Один із доданків є раціональним числом, інший — ірраціональним. За необхідності можна знайти тільки наближене значення цього виразу.

ПРИКЛАД 4

Знайдіть значення виразу:

1) $\left(4-\sqrt{5}\right)\cdot\left(4+\sqrt{5}\right)$;
2) $\left(4\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)^2$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Зауважимо, що вирази $\left(4-\sqrt{5}\right)$ і $\left(4+\sqrt{5}\right)$ є спряженими, тому знайдемо їх добуток за формулою різниці квадратів.	$\left(4-\sqrt{5}\right)\cdot\left(4+\sqrt{5}\right)=4^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=16-5=11$
2) КРОК 1	Скористаємося формулою квадрата різниці.	$\left(4\sqrt{2}-\sqrt{10}\right)^2=\left(4\sqrt{2}\right)^2-2\cdot4\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}+\left(\sqrt{10}\right)^2=$ $=16\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-8\sqrt{2\cdot10}+10=16\cdot2-8\cdot\sqrt{4\cdot5}+10=$ $=32-8\cdot2\cdot\sqrt{5}+10=42-16\sqrt{5}$

Відповідь: 1) 11; 2) $42-16\sqrt{5}$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

- Квадрат двочлена:
$\left(\sqrt{a}\pm\sqrt{b}\right)^2=a\pm2\sqrt{ab}+b$
- Різниця квадратів:
$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b$

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$;
2) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)$;
3) $\left(2\sqrt{7}-5\right)\left(2\sqrt{7}+5\right)$;
4) $\left(4-3\sqrt{10}\right)\left(4+3\sqrt{10}\right)$;
5) $\left(2\sqrt{5}+3\sqrt{3}\right)^2$;
6) $\left(4\sqrt{2}-3\sqrt{7}\right)^2$;
7) $\left(\sqrt{8-\sqrt{60}}+\sqrt{8+2\sqrt{15}}\right)^2$;
8) $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}-\sqrt{\sqrt{24}+5}\right)^2$.

АЛГОРИТМ

Алгоритм внесення множника під знак кореня

1. Визначте знак виразу, який необхідно внести під знак кореня.
2. Внесіть множник під знак кореня за правилом:
   - якщо множник невід'ємний, то піднесіть його до квадрата й запишіть множником під існуючим знаком кореня;
   - якщо множник від'ємний, то подайте його у вигляді добутку двох множників, один із яких дорівнює (-1). Після цього додатний множник піднесіть до квадрата й запишіть множником під існуючим знаком кореня, а перед знаком кореня залиште знак «–».
3. Спростіть отриманий підкореневий вираз.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

- Під знак квадратного кореня можна внести лише невід'ємний множник.
- Щоб внести невід'ємний множник під знак квадратного кореня, слід піднести цей множник до квадрата.

Наприклад:

$$-4\sqrt{3}\overset{\text{Крок 1}}{=}(-1)\cdot4\sqrt{3}\overset{\text{Крок 2}}{=}-\sqrt{16\cdot3}\overset{\text{Крок 3}}{=}-\sqrt{48}.$$

ПРИКЛАД 5

Внесіть множник під знак кореня у виразі:

1) $-2\sqrt{3}$; 2) $m\sqrt{5}$, якщо $m<0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Запишемо вираз $-2\sqrt{3}$ у вигляді добутку, один із множників якого дорівнює (-1).	$-2\sqrt{3}=(-1)\cdot2\sqrt{3}$
КРОК 2	Подамо множник 2 у вигляді арифметичного квадратного кореня.	$2=\sqrt{2^2}=\sqrt{4}$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 3	Спростимо отриманий вираз.	$-2\sqrt{3}=(-1)\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=(-1)\cdot\sqrt{12}=-\sqrt{12}$
2) КРОК 1	Запишемо вираз $m\sqrt{5}$ у вигляді добутку, один із множників якого дорівнює (-1).	$m\sqrt{5}=(-1)\cdot\lvert m\rvert\cdot\sqrt{5}$
КРОК 2	Подамо множник $\lvert m\rvert$ у вигляді арифметичного квадратного кореня.	$\lvert m\rvert=\sqrt{(\lvert m\rvert)^2}=\sqrt{m^2}$
КРОК 3	Спростимо отриманий вираз.	При $m<0$ $m\sqrt{5}=(-1)\cdot\sqrt{m^2}\cdot\sqrt{5}=-\sqrt{5m^2}$

Відповідь: 1) $-\sqrt{12}$; 2) $-\sqrt{5m^2}$, якщо $m<0$.

ТРЕНУЄМОСЯ

5 У завданнях 1–4 внесіть множник під знак квадратного кореня:

1) $4\sqrt{3}$;
2) $-7\sqrt{2}$;
3) $\frac{t}{2}\sqrt{6}$, якщо $t\geqslant 0$;
4) $-\frac{n}{6}\sqrt{108}$, якщо $n\leqslant 0$.

У завданнях 5–6 внесіть множник під знак квадратного кореня і порівняйте вирази:

5) $\frac{1}{3}\sqrt{18}$ і $\frac{1}{6}\sqrt{180}$;
6) $-\frac{2}{5}\sqrt{75}$ і $-\frac{1}{3}\sqrt{162}$.

У завданнях 7–8 внесіть множник під знак квадратного кореня і спростіть отриманий вираз:

7) $-\frac{1}{7}\sqrt{98}+\frac{1}{5}\sqrt{450}-\sqrt{2}$;
8) $-\frac{1}{2}\sqrt{60}+\frac{1}{3}\sqrt{135}-\frac{1}{\sqrt{7}}\sqrt{85}$.

$$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b} & \text{при } a\geqslant 0,\ b\geqslant 0;\\ -\sqrt{a^2b} & \text{при } a<0,\ b\geqslant 0\end{cases}$$

ПРИКЛАД 6

Скоротіть дріб $\frac{m+\sqrt{m}}{m-1}$, розклавши попередньо його чисельник і знаменник на множники.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо доданок m у чисельнику дробу у вигляді квадрата квадратного кореня.	$m=(\sqrt{m})^2$
КРОК 2	Винесемо в чисельнику спільний множник $\sqrt{m}$ за дужки.	$(\sqrt{m})^2+\sqrt{m}=\sqrt{m}\cdot(\sqrt{m}+1)$

КРОК 3	Застосуємо в знаменнику дробу формулу різниці квадратів, скориставшись тим, що $m=\left(\sqrt{m}\right)^2$.	$m-1=\left(\sqrt{m}\right)^2-1=\left(\sqrt{m}-1\right)\cdot\left(\sqrt{m}+1\right)$
КРОК 4	Запишемо заданий дріб, розклавши його чисельник і знаменник на множники, та виконаємо скорочення.	$\frac{m+\sqrt{m}}{m-1}=\frac{\sqrt{m}\cdot\left(\sqrt{m}+1\right)}{\left(\sqrt{m}-1\right)\cdot\left(\sqrt{m}+1\right)}=\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-1}$

Відповідь: $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-1}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

6 У завданнях 1–2 винесіть спільний множник за дужки у виразі:

1) $\sqrt{2}+\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{42}-\sqrt{6}$.

У завданнях 3–8 скоротіть дріб:

3) $\frac{\sqrt{33}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; 5) $\frac{a^2-14}{a-\sqrt{14}}$; 7) $\frac{7x^2-49}{x^2+2x\sqrt{7}+7}$;

4) $\frac{\sqrt{35}-\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$; 6) $\frac{\sqrt{x}+6}{x-36}$; 8) $\frac{5b-10\sqrt{5b}+25}{b-5}$.

СЛІД ЗНАТИ!

З огляду на культуру математичних записів не прийнято залишати ірраціональність у знаменнику дробу.

ПРИКЛАД 7

Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{20}{\sqrt{5}}$; 2) $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Помножимо чисельник і знаменник заданого дробу на $\sqrt{5}$.	$\frac{20}{\sqrt{5}}=\frac{20\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}$
КРОК 2	Перетворимо отриманий вираз, скориставшись формулою $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$, $a\geqslant 0$.	$\frac{20\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{20\sqrt{5}}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{20\sqrt{5}}{5}$
КРОК 3	Скоротимо отриманий дріб на 5.	$\frac{20\sqrt{5}}{5}=4\sqrt{5}$

Крок	Зміст дії	Результат дії
2) КРОК 1	Помножимо чисельник і знаменник заданого дробу на вираз, спряжений до знаменника.	$\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}$
КРОК 2	Виконаємо множення в знаменнику, скориставшись формулою різниці квадратів.	$\frac{4\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=$ $=\frac{4\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{7-3}=\frac{4\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{4}$
КРОК 3	Скоротимо отриманий дріб на 4.	$\frac{4\cdot\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{4}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$

Відповідь: 1) $4\sqrt{5}$; 2) $\sqrt{7}+\sqrt{3}$.

Основна властивість дробу:

$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot C}{b\cdot C}$, де вираз $C\neq 0$

ТРЕНУЄМОСЯ

7 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{3}{\sqrt{2}}$;
2) $\frac{9}{\sqrt{7}}$;
3) $\frac{12}{\sqrt{3}}$;
4) $\frac{24}{\sqrt{6}}$;
5) $\frac{4}{\sqrt{5}-3}$;
6) $\frac{14}{\sqrt{11}+2}$;
7) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$;
8) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

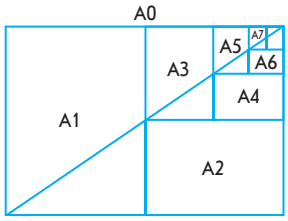
1 Винесіть множник із-під знака кореня та спростіть вираз:

1) $-\sqrt{16t}+\sqrt{25t}-\sqrt{64t}$;
2) $\sqrt{27m}-\sqrt{48m}+\sqrt{75m}$;
3) $\sqrt{12t}-\frac{1}{2}\sqrt{48t}+2\sqrt{75t}$;
4) $\frac{1}{2}\sqrt{200y}-\sqrt{50y}+3\sqrt{32y}$.

2 Виконайте дії:

1) $\sqrt{3}\left(\sqrt{27}-2\sqrt{3}\right)$;
2) $\left(7\sqrt{2}-\sqrt{98}+\sqrt{10}\right)\cdot\sqrt{2}$;
3) $\left(1-\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{2}+2\right)$;
4) $\left(1-3\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}+2\right)$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



На початку XX ст. німецький інженер і математик Вальтер Портсманн запропонував стандартизувати розміри паперу для документації, взявши за основу аркуш зі співвідношенням ширини до довжини $1:\sqrt{2}$ і площею в 1 м^2 (формат A0). Складання такого аркуша навпіл давало прямокутник із тим самим співвідношенням сторін.

Способи розкладання на множники:

- винесення спільного множника за дужки;
- спосіб групування;
- розкладання за формулою різниці квадратів;
- розкладання за формулою квадрата двочлена

- $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$ при $a\geqslant 0$
- $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ при $a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$

Михайло Пилипович Кравчук (1892–1942) — всесвітньо відомий український математик, академік АН УРСР, якого вважають одним із найвидатніших алгебраїстів першої половини XX ст. Він був одним із засновників Інституту математики АН УРСР, учителем А. М. Люльки (конструктора реактивних авіадвигунів) та С. П. Корольова (конструктора космічних кораблів), співавтором першого тритомного словника української математичної термінології.

3 Обчисліть, розкривши дужки за формулами скороченого множення:

1) $\left(7-3\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{3}+7\right)$;
2) $\left(4+\sqrt{3}\right)^2$;
3) $\left(4\sqrt{3}+2\sqrt{10}\right)^2$;
4) $\left(5+3\sqrt{3}\right)^2-\left(3+5\sqrt{3}\right)^2$.

4 Винесіть спільний множник за дужки:

1) $\sqrt{11}-11$;
2) $7+\sqrt{7}$;
3) $\sqrt{26}-\sqrt{2}$;
4) $\sqrt{14}+\sqrt{7}$;
5) $\sqrt{10}+\sqrt{20}$;
6) $\sqrt{21}-\sqrt{42}$;
7) $\sqrt{7x}-\sqrt{19x}$;
8) $a+\sqrt{a}$;
9) $\sqrt{y}-y$.

5 Розкладіть многочлен на множники, користуючись формулою різниці квадратів і тотожністю $a=\left(\sqrt{a}\right)^2$ $(a\geqslant 0)$. Вважайте, що всі змінні набувають невід'ємних значень.

1) m^2-5;
2) $11-9m^2$;
3) $c-d$;
4) $49c^2-d$.

6 Розкладіть чисельник (знаменник) на множники та скоротіть дріб:

1) $\dfrac{3+\sqrt{x}}{x-9}$;
2) $\dfrac{11-\sqrt{y}}{y-121}$;
3) $\dfrac{c^2-2}{-c+\sqrt{2}}$;
4) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$.

7 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}$;
2) $\dfrac{21a}{2\sqrt{7}}$;
3) $\dfrac{3}{3-\sqrt{3}}$;
4) $\dfrac{7}{\sqrt{13}-\sqrt{6}}$.

8 Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{2\sqrt{3}+2\sqrt{a}}{3-a}$;
2) $\dfrac{3\sqrt{6}-3}{\sqrt{2}-\sqrt{12}}$;
3) $\dfrac{p^2-25m}{\left(p+5\sqrt{m}\right)^2}$.

9 Виконайте дії:

1) $\left(\sqrt{7-2\sqrt{6}}-\sqrt{2\sqrt{6}+7}\right)^2$;
2) $\left(2\sqrt{11}-3\right)\left(2\sqrt{11}+3\right)-15$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $p=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ і $q=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, то p дорівнює q.

2) Якщо $a=10-\sqrt{99}$ і $b=10+\sqrt{99}$, то $a\cdot b=1$.

3) Якщо $\sqrt{x}=2\sqrt{y}$, то $x=4y$.

4) Якщо $a=\sqrt{63}$ і $b=8$, то a більше b.

5) Якщо $m=\sqrt{63}-\sqrt{62}$ і $n=\sqrt{62}-\sqrt{61}$, то m менше n.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ТЕСТ ПРИ ПРИЙОМІ НА РОБОТУ»

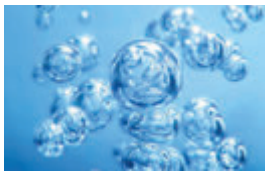
Компанія з продажу питної води набирає кур'єрів для доставки води по місту. Кожний претендент на цю вакансію за 3 хвилини має відповісти на 3 запитання спеціального тесту. Якщо всі відповіді виявляться правильними, претендента візьмуть на роботу.

Михайлові запропонували такий тест.

1. Ваш автомобіль рухається з постійною швидкістю 30 км/год. Через скільки хвилин ви будете на місці призначення, якщо вам залишилося проїхати 18 км?
2. Вам потрібно потрапити в офіс. Його двері обладнані кодовим замком із 10 кнопками. Щоб відкрити замок, потрібно одночасно натиснути 3 кнопки. Ви запам'ятали лише дві цифри коду. Яку максимальну кількість спроб доведеться зробити, щоб потрапити в офіс?
3. На кожному поверсі 16-поверхового будинку розташовано по 8 квартир. На якому поверсі квартира № 53, якщо поверхи та квартири нумеруються знизу догори?

З'ясуйте, чи візьмуть Михайла на роботу, якщо його відповіді були такими: **1.** 36 хв. **2.** 8 спроб. **3.** На 7 поверсі.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Вода — основа життя. І люди, і тварини, і рослини більшою часткою складаються з води. За своє життя людина випиває приблизно 35–50 т води.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Претендентам на роботу часто пропонують логічні й навіть жартівливі задачі, щоб визначити рівень інтелекту та вміння мислити в стресових ситуаціях. Спробуйте й ви розв'язати схожу задачу.

У готелі 9 поверхів. На перший поверх заселилося 5 жильців, на другий і кожний наступний — на два більше. На якому поверсі найчастіше викликають ліфт?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Спростіть вираз:

1) $4\sqrt{c}+7\sqrt{c}$;
2) $16\sqrt{m}-8\sqrt{m}$;
3) $3\sqrt{y}+\sqrt{y}-11\sqrt{y}$;
4) $-4\sqrt{k}-6\sqrt{k}+2\sqrt{k}$.

2 Винесіть множник із-під знака кореня та спростіть вираз:

1) $\sqrt{100x}-\sqrt{49x}+\sqrt{64x}$;
2) $-\sqrt{9t}-\sqrt{400t}+\sqrt{81t}$;
3) $\sqrt{75a}-\frac{1}{4}\sqrt{48a}-2\sqrt{27a}$;
4) $5\sqrt{32n}+\sqrt{98n}-\frac{1}{9}\sqrt{162n}$.

Див. приклад 1

3 Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{8\sqrt{b}-\sqrt{49b}}{\sqrt{b}}$;
2) $\frac{\sqrt{81m}-\sqrt{25m}}{\sqrt{400m}}$;
3) $\frac{4\sqrt{100y}-6\sqrt{25y}-\sqrt{4y}}{\sqrt{2y}}$;
4) $\frac{8\sqrt{27t}-2\sqrt{108t}+\sqrt{48t}}{\sqrt{48t}}$.

Див. приклад 2

Див. приклад 3

4 Виконайте дії:

1) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}-\left(\sqrt{6}\right)^2$;
2) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{18}\right)$;
3) $\sqrt{7}\left(4\sqrt{7}+\sqrt{28}-\sqrt{175}\right)$;
4) $\left(2\sqrt{6}+\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{96}-3\sqrt{3}\right)-2\sqrt{72}$.

Див. приклад 4

5 Обчисліть:

1) $\left(\sqrt{13}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{13}+\sqrt{5}\right)$;
2) $\left(2\sqrt{15}-3\right)\left(2\sqrt{15}+3\right)$;
3) $\left(3\sqrt{7}-2\sqrt{6}\right)^2$;
4) $\left(\sqrt{6\sqrt{2}+11}+\sqrt{11-\sqrt{72}}\right)^2$.

Див. приклад 5

6 У завданнях 1–2 внесіть множник під знак квадратного кореня:

1) $-5\sqrt{6}$;
2) $\frac{r}{4}\sqrt{80}$, якщо $r\leqslant 0$.
3) Внесіть множник під знак квадратного кореня та порівняйте: $-\frac{5}{6}\sqrt{72}$ і -7.
4) Внесіть множник під знак квадратного кореня та спростіть отриманий вираз: $-\frac{2}{5}\sqrt{125}+\frac{1}{3}\sqrt{180}-\frac{5}{6}\sqrt{28\frac{4}{5}}$.

Див. приклад 6

7 Скоротіть дріб:

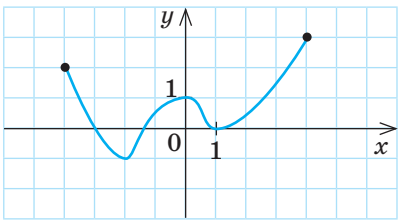
1) $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$;
2) $\frac{a^2-17}{a+\sqrt{17}}$;
3) $\frac{y^2-2}{2y^2-4y\sqrt{2}+4}$;
4) $\frac{3c+2\sqrt{3c}+1}{9c-3}$.

Див. приклад 7

8 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{6}{\sqrt{5}}$;
2) $\frac{80}{\sqrt{10}}$;
3) $\frac{9}{\sqrt{19}+4}$;
4) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{11}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}$.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ



На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$, визначеної на проміжку $[-4;4]$. Установіть графічним способом кількість коренів рівняння:

1) $f(x)=-1$;
2) $f(x)=-x$;
3) $f(x)=\frac{1}{x}$;
4) $f(x)=x^2$.

Пам'ятайте: хочете навчитися плавати, сміливіше входьте у воду. Хочете навчитися математики, беріться за завдання. Кожне розв'язання є своєрідним мистецтвом пошуку.

Михайло Кравчук

§ 18 ФУНКЦІЯ $y=\sqrt{x}$, ЇЇ ГРАФІК І ВЛАСТИВОСТІ

ВЧОРА — Ви дізналися про функцію $y=x^2$ та її властивості, навчилися будувати графік цієї функції, розв'язувати рівняння виду $x^2=a$

СЬОГОДНІ — Ви познайомитеся з функцією $y=\sqrt{x}$, її графіком та властивостями, навчитеся розв'язувати рівняння виду $\sqrt{x}=a$

ЗАВЖДИ — Ви знатимете, як підвищити рейтинг компанії за допомогою сучасних рекламних засобів

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Компанія займається вирощуванням та реалізацією саджанців паркових троянд. Дослідження ринку показали, що кількість n саджанців, проданих протягом тижня, залежить від тривалості t щоденного рекламного ролика (у с), що транслювався впродовж цього тижня. Причому ця залежність виражається формулою $n=t^2$. Визначте:

1) якою є залежність t від n;
2) скільки часу має тривати щоденний рекламний ролик, щоб обсяг продажу становив 900 саджанців.

Розв'язання

1) Якщо $n=t^2$ і $t>0$, то $t=\sqrt{n}$.
2) За умовою кількість саджанців має скласти 900 штук, тому шуканий час $t=\sqrt{900}=30$ (с).

Якби в задачі було задано залежність $t=\sqrt{n}$ і за відомою тривалістю рекламного ролика потрібно було б знайти кількість проданих саджанців, то можна було б отримане рівняння розв'язати, наприклад, графічним способом. А для цього потрібно знати, як виглядає графік функції $y=\sqrt{x}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Троянди вирощують уже щонайменше 5 тис. років. Найбільша у світі троянда (сорт Lady Banks) росте в США: цей кущ займає площу, порівнянну з площею футбольного поля. А найстарішою у світі вважають троянду, що росте в Німеччині; біля стіни Хільдесхаймського собору. За легендою, цьому кущу понад 1000 років.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У § 11 ви розглядали залежність площі S квадрата від довжини a його сторони: $S=a^2$. У наступних параграфах познайомилися з поняттям арифметичного квадратного кореня і тотожністю $\sqrt{a^2}=|a|$. Звідси, враховуючи, що довжина сторони квадрата є додатною величиною, маємо: $\sqrt{S}=a$, або $a=\sqrt{S}$. Оскільки кожному значенню площі відповідає єдине значення

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- функція
- функціональна залежність
- графік функції
- властивості функції
- незалежна змінна
- залежна змінна
- зростання функції
- графічний спосіб розв'язування рівняння

Таблиця 1

x	y
0	0
0,5	0,7
1	1
1,5	1,2
2	1,4
2,5	1,6
3	1,7
3,5	1,9
4	2

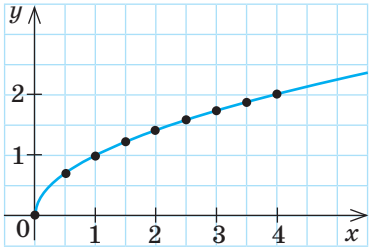


Рис. 1

довжини сторони, то таку залежність можна вважати функціональною, де S — незалежна змінна, a — залежна змінна.

Якщо ввести стандартні позначення: x — незалежна змінна, y — залежна змінна, тоді функція набуде вигляду $y=\sqrt{x}$. Отже, розглянемо функцію $y=\sqrt{x}$.

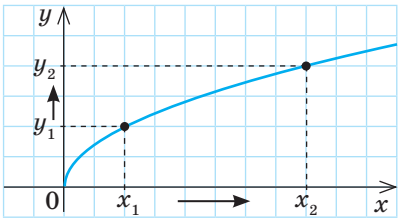
За означенням арифметичного квадратного кореня $x \geqslant 0$ і $y \geqslant 0$. Тому для побудови графіка функції $y=\sqrt{x}$ складемо таблицю невід'ємних значень x із кроком 0,5 (чим меншим є крок, тим точнішим буде графік) та відповідних значень y (табл. 1). Зауважимо, що точні значення y можна знайти тільки для тих x, які є точними квадратами. У нашому випадку це $y(0)=0$, $y(1)=1$ та $y(4)=2$. Наближені значення y шукаємо за допомогою калькулятора.

Позначимо точки зі знайденими координатами на координатній площині та сполучимо їх плавною лінією (рис. 1), продовживши її за точку з абсцисою $x=4$.

Визначимо за отриманим графіком властивості функції $y=\sqrt{x}$ (табл. 2).

Таблиця 2

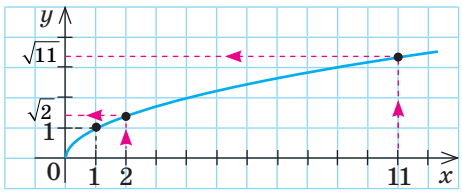
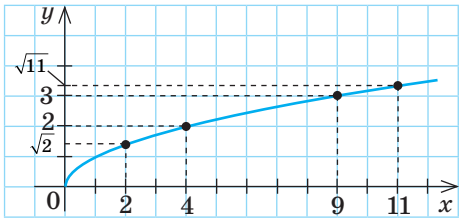
Властивості функції $y=\sqrt{x}$

№ з/п	Властивість	Обґрунтування
1	Графік проходить через початок координат.	При $x=0$ маємо $y(0)=\sqrt{0}=0$.
2	Незалежна змінна набуває лише невід'ємних значень.	За означенням арифметичного квадратного кореня підкореневий вираз може бути лише невід'ємним, тобто $x \geqslant 0$.
3	Залежна змінна набуває лише невід'ємних значень.	За означенням арифметичного квадратного кореня значення кореня може бути лише невід'ємним, тобто $y \geqslant 0$.
4	Графік розміщений лише в I координатній чверті.	$x \geqslant 0$ та $y \geqslant 0$.
5	Якщо значення x збільшується, то значення y збільшується, тобто **функція зростає** при всіх $x \geqslant 0$.	Читаємо графік зліва направо. 

ПРИКЛАД 1

Порівняйте за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ числа $\sqrt{2}$ і $\sqrt{11}$ та знайдіть усі цілі числа, розташовані між ними на числовій прямій.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо на графіку функції точку, що відповідає абсцисі $x_1=2$ — тоді $y_1=\sqrt{2}$.	
КРОК 2	Знайдемо на графіку функції точку, що відповідає абсцисі $x_2=11$ — тоді $y_2=\sqrt{11}$.	
КРОК 3	Порівняємо y_1 і y_2, користуючись графіком: точка y_2 розташована вище за точку y_1, тому $y_1<y_2$.	$\sqrt{2}<\sqrt{11}$
КРОК 4	З'ясуємо за графіком, що між числами $\sqrt{2}$ і $\sqrt{11}$ розташовані числа $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$, серед яких цілими є числа $2=\sqrt{4}$ і $3=\sqrt{9}$. Маємо: $\sqrt{2}<\sqrt{4}<\sqrt{9}<\sqrt{11}$ і $2<4<9<11$. *Зверніть увагу:* якщо в умові завдання йдеться про розташування числа на числовій прямій, у ході розв'язування можна розглядати будь-яку вісь — або Ox, або Oy.	

Відповідь: $\sqrt{2}<\sqrt{11}$; цілі числа 2 і 3.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 У завданнях 1–4 за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ порівняйте числа:

1) $\sqrt{2}$ і $\sqrt{10}$;
2) $\sqrt{7}$ і 3;
3) 5 і $2\sqrt{6}$;
4) $\frac{1}{6}\sqrt{72}$ і $\frac{1}{4}\sqrt{48}$.

У завданнях 5–8 знайдіть усі цілі числа, що розташовані на числовій прямій між числами:

5) 0 і $\sqrt{3}$;
6) $\sqrt{7}$ і $\sqrt{15}$;
7) $\sqrt{19}$ і $3\sqrt{3}$;
8) $4\sqrt{\frac{3}{8}}$ і $2\sqrt{5\frac{1}{2}}$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Внесення множника під знак кореня:

$a=\sqrt{a^2}$, якщо $a\geqslant 0$

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Якщо $x_1>x_2$, то $\sqrt{x_1}>\sqrt{x_2}$ для всіх $x\geqslant 0$

ПРИКЛАД 2

На початку § 12 ми вже наводили формулу, за якою можна знайти шлях, який проходить тіло у стані вільного падіння: $s=\frac{gt^2}{2}$, де g — прискорення вільного падіння. Використовуючи цю формулу, знайдіть залежність часу t $(t>0)$ від пройденого шляху s.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Виразимо t^2 із рівності $s=\frac{gt^2}{2}$.	$2s=gt^2$; $gt^2=2s$; $t^2=\frac{2s}{g}$
КРОК 2	З огляду на те, що $t>0$, визначимо t — добудемо квадратний корінь із виразу $\frac{2s}{g}$.	$t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$

Відповідь: $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$.

За допомогою функцій $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$ описується багато реальних процесів — фізичних, хімічних, економічних тощо. Саме ці функції лежать в основі формул, які наведено в задачах і з якими ви познайомитеся в наступних класах.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

1) Якщо $t^2=4$, то $t=2$ або $t=-2$.
2) Якщо $m^2=k$ і $m>0$, то $m=\sqrt{k}$.

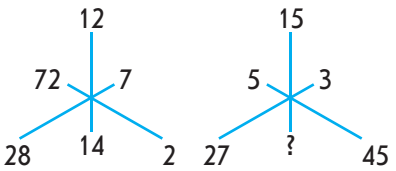
ТРЕНУЄМОСЯ

2 Задайте формулою залежність між додатними величинами.

1) Площу S квадрата, довжина сторони якого дорівнює a, обчислюють за формулою $S=a^2$. Задайте формулою залежність довжини сторони a від площі S.
2) Потужність P електричного струму в ділянці кола обчислюють за формулою $P=I^2R$, де I — сила струму, R — опір провідника. Задайте формулою залежність сили струму I від потужності P і опору R.
3) Площу S круга, діаметр якого дорівнює d, обчислюють за формулою $S=\frac{1}{4}\pi d^2$. Задайте формулою залежність діаметра d від площі S.
4) Кінетичну енергію $E_к$ тіла, що рухається зі швидкістю v, обчислюють за формулою $E_к=\frac{mv^2}{2}$, де m — маса тіла. Задайте формулою залежність швидкості v від кінетичної енергії $E_к$ і маси m.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

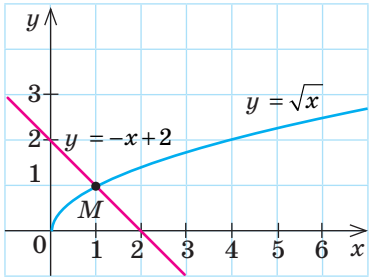
Визначте закономірність і знайдіть невідоме число.



ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x}+x-2=0$ графічним способом.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо задане рівняння у вигляді $f(x)=g(x)$, де $f(x)$ і $g(x)$ — функції змінної x.	$\sqrt{x}=-x+2$; $f(x)=\sqrt{x}$; $g(x)=-x+2$
КРОК 2	Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $f(x)=\sqrt{x}$ і $g(x)=-x+2$.	
КРОК 3	Визначимо точку M перетину графіків функцій і знайдемо її абсцису x_0.	
КРОК 4	Для того щоб перевірити, чи є знайдене число 1 точним коренем або наближеним значенням, підставимо його у задане рівняння. Робимо висновок: $x_0=1$ є точним коренем рівняння.	$x_0\approx 1$. *Перевірка*: $\sqrt{1}+1-2=0$; $0=0$ — правильно

Відповідь: 1.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 1) На рис. 2 подано графіки функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=x-4$. Визначте кількість коренів рівняння $\sqrt{x}=x-4$.

2) На рис. 3 подано графіки функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=-1$. Визначте кількість точок перетину цих графіків.

3) На рис. 4 подано графік функції $y=0{,}6$. Визначте кількість точок перетину графіків функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=0{,}6$.

4) На рис. 5 подано графік функції $y=-1{,}4$. Визначте кількість точок перетину графіків функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=-1{,}4$.

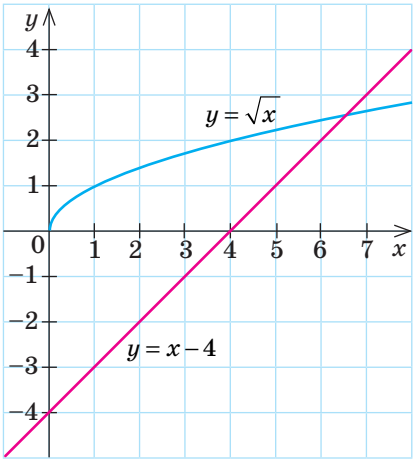


Рис. 2

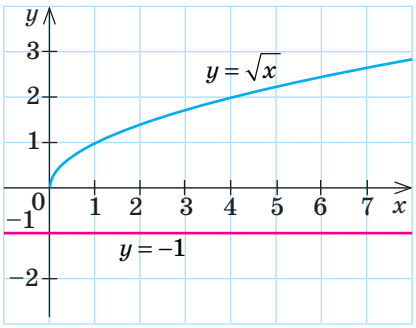


Рис. 3

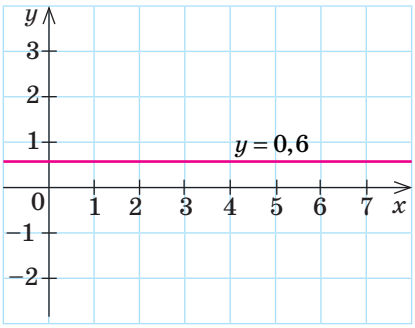


Рис. 4

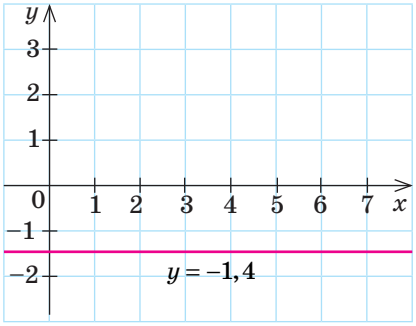


Рис. 5

У завданнях 5–6 розв'яжіть графічно рівняння:

5) $\sqrt{x}-\frac{1}{3}x=\frac{2}{3}$; 6) $\frac{8}{x}-\sqrt{x}=0$.

У завданнях 7–8 визначте кількість точок перетину графіків функцій:

7) $y=\sqrt{x}$ і $y=a-3$, якщо $a\geqslant 3$;

8) $y=\sqrt{x}$ і $y=a+1$, якщо $a<-1$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Площу поверхні кулі обчислюють за формулою $S=4\pi R^2$, де R — радіус кулі. Задайте формулою залежність радіуса кулі R від площі її поверхні S. Визначте за цією формулою радіус повітряної кулі, якщо площа її поверхні дорівнює 64π м^2.

2 Не виконуючи побудови, визначте, чи проходить графік функції $y=\sqrt{x}$ через точки $A(25;5)$, $B(3600;-60)$, $C\left(2\frac{1}{4};1\frac{1}{2}\right)$, $M(-100;10)$, $E(12;2\sqrt{3})$, $K\left(4\frac{4}{9};2\frac{2}{3}\right)$.

3 Користуючись графіком функції $y=\sqrt{x}$, визначте наближені значення:

1) функції y, якщо значення аргумента такі: $x_1=1{,}2$; $x_2=2$; $x_3=2{,}5$.

2) аргумента x, якщо значення функції такі: $y_1=4$; $y_2=7$; $y_3=11$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $y=\sqrt{x}$ і $x=36$, то $y=6$.

2) Якщо $x^2=121$ і $x<0$, то $x=-11$.

3) Якщо точка $A(m;4)$ належить графіку функції $y=\sqrt{x}$, то $m=16$.

4) Якщо число a є коренем рівняння $\sqrt{x}+x-9=0$, то $\sqrt{a}+a=9$.

5) Якщо $\sqrt{x}+\sqrt{15}=0$, то $x=-15$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У 1785 р. протоку Ла-Манш уперше перетнули на повітряній кулі. У 1999 р. вперше було здійснено кругосвітню подорож на повітряній кулі без зупинок. У 2015 р. у Франції установили світовий рекорд: у повітря одночасно піднялися 433 повітряні кулі.

- Нікола Тесла (1856–1943) — сербський та американський фізик, інженер, винахідник в галузі електротехніки та радіотехніки. Він отримав понад 400 патентів, створив низку пристроїв, що працюють на змінному струмі, розробив неонові й люмінесцентні лампи, дистанційне управління.
- Американська автомобільна компанія «Tesla Motors» та відома марка електромобіля названі на честь Ніколи Тесли.
- У 2013 р. в Кремнієвій долині було споруджено пам'ятник Н. Теслі. Статую використовують як безкоштовну точку бездротового доступу.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 12

1 Обчисліть: $\sqrt{(-16)^2}$.

А	Б	В	Г
-4	-16	16	4

2 Обчисліть: $\sqrt{49 \cdot 0{,}16}$.

А	Б	В	Г
7,4	28	0,28	2,8

3 На рис. 6 зображено точки M, N, P і L у прямокутній системі координат. Визначте точку, через яку *може* пройти графік функції $y = \sqrt{x}$.

А	В
Точка P	Точка L
Б	**Г**
Точка M	Точка N

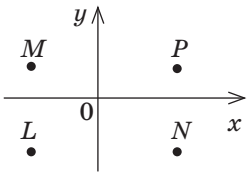


Рис. 6

4 $\sqrt{2}\left(\sqrt{18} - \sqrt{2}\right) =$

А	Б	В	Г
4	$4\sqrt{2}$	2	$8\sqrt{2}$

5 Для кімнати, підлога якої має форму квадрата, купили покриття (ковролін) площею S. Знайдіть периметр цієї кімнати, вважаючи, що периметр покриття дорівнює периметру кімнати.

А	Б	В	Г
$4S$	$4\sqrt{S}$	$\frac{S}{4}$	$4S^2$

6 До кожного виразу (1–3) доберіть тотожно рівний йому вираз (А–Г), якщо $a > 0$, $a \neq 9$.

1	$\frac{\sqrt{a}+3}{9-a}$	А	$\frac{1}{\sqrt{a}-3}$
2	$\frac{3-\sqrt{a}}{3\sqrt{a}-a}$	Б	$-\frac{1}{\sqrt{a}}$
3	$\frac{\sqrt{a}-3}{a-6\sqrt{a}+9}$	В	$-\frac{1}{\sqrt{a}-3}$
		Г	$\frac{1}{\sqrt{a}}$

7 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу та спростіть його:

1) $\frac{7}{\sqrt{14}}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{11}-3}$.

8 Спростіть вираз $\frac{\sqrt{45}+\sqrt{18}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{45}-\sqrt{18}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ і знайдіть його числове значення.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «МОРОЗИВО»

У супермаркеті було проведено маркетингове дослідження впливу температури повітря на щоденний обсяг продажу морозива в літній період. Результати дослідження подано на рис. 7. Точками з координатами $(t; n)$ позначено кількість пачок морозива n (у сотнях), проданих протягом літнього дня, коли середня температура повітря становила t °C.

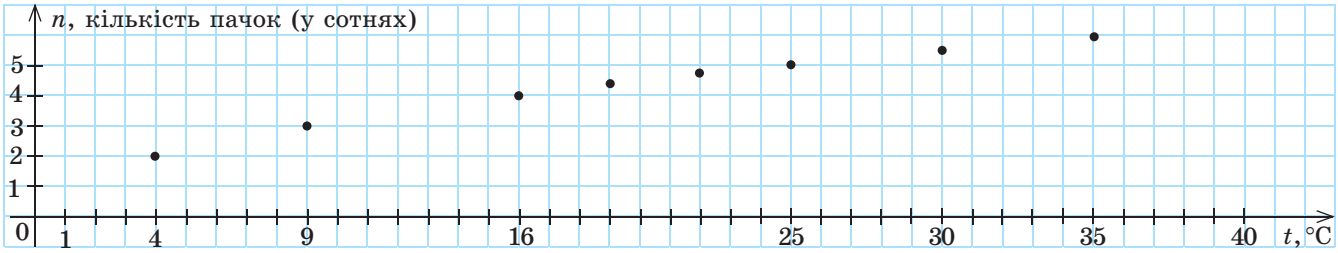


Рис. 7

Користуючись рисунком, дайте відповіді на запитання.

1. Скільки пачок морозива було продано протягом дня, коли температура повітря становила 25 °C?
2. Якою була середня температура в той день, коли було продано 400 пачок морозива?
3. Якою формулою можна задати залежність змінної n від змінної t?
4. Припустимо, що існуюча залежність n від t зберігатиметься і в подальшому. Скільки пачок морозива буде продано протягом дня, коли температура повітря становитиме 36 °C?
5. За прогнозом погоди температура повітря в найближчі дні становитиме близько 40 °C. Спираючись на цей прогноз, менеджер із продажів зробив такий висновок: «У найближчі дні ми продаватимемо не менше ніж 600, але не більше ніж 700 пачок морозива щодня». Чи правильний висновок зробив менеджер?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- У 1295 р. Марко Поло привіз до Європи рецепт невідомого замороженого десерту.
- У 1649 р. вигадали ванільне морозиво, а в 1919 р. — морозиво ескімо. Перше ескімо називалося «ескімо-пай» — «пиріжок ескімоса».
- Венесуельське кафе-морозиво Heladeria Coromoto пропонує найбільшу кількість сортів морозива у світі — понад 800.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Порівняйте за допомогою графіка функції $y=\sqrt{x}$ числа:

1) $\sqrt{11}$ і $\sqrt{8}$; 3) $2\sqrt{3}$ і 3; 5) $\frac{1}{3}\sqrt{63}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{32}$;

2) 3 і $\sqrt{10}$; 4) 4 і $2\sqrt{5}$; 6) $\frac{1}{4}\sqrt{80}$ і $\frac{1}{2}\sqrt{24}$.

Див. приклад 1

2. Знайдіть усі цілі числа, що розташовані на числовій прямій між числами:

1) 0 і $\sqrt{2}$; 3) $2\sqrt{3}$ і $\sqrt{22}$; 5) $7\sqrt{\frac{2}{7}}$ і $2\sqrt{8\frac{1}{2}}$;

2) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{10}$; 4) $\sqrt{13}$ і $2\sqrt{5}$; 6) $3\sqrt{\frac{2}{3}}$ і $6\sqrt{1\frac{1}{6}}$.

Див. приклад 1

3 Задайте формулою залежність між додатними величинами.

1) За теоремою про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику $a_c \cdot c = a^2$, де a — довжина катета прямокутного трикутника, c — довжина його гіпотенузи, a_c — довжина проекції катета a на гіпотенузу c. Задайте формулою залежність a від a_c і c.

2) Повну енергію E тіла обчислюють за формулою $E = mc^2$, де m — маса тіла, c — швидкість світла у вакуумі. Задайте формулою залежність c від E і m.

3) Енергію W_e зарядженого конденсатора обчислюють за формулою $W_e = \frac{q^2}{2C}$, де q — електричний заряд конденсатора, C — електроємність конденсатора. Задайте формулою залежність q від W_e і C.

Див. приклад 2

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Рівняння Альберта Ейнштейна $E = mc^2$ (символ теорії відносності) зробило можливими багато технологічних досягнень. Воно показало, що речовина має колосальні запаси енергії, адже квадрат швидкості світла — значення неймовірно велике.

4 1) На рис. 8 зображено графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = \frac{2}{3}x$. Визначте кількість коренів рівняння $\sqrt{x} = \frac{2}{3}x$.

2) На рис. 9 зображено графік функції $y = -1{,}2$. Визначте кількість точок перетину графіків функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = -1{,}2$.

Див. приклад 3

5 Розв'яжіть графічним способом рівняння:

1) $\sqrt{x} + 1{,}5 = 2{,}5x$; 2) $\sqrt{x} - \frac{27}{x} = 0$.

Див. приклад 3

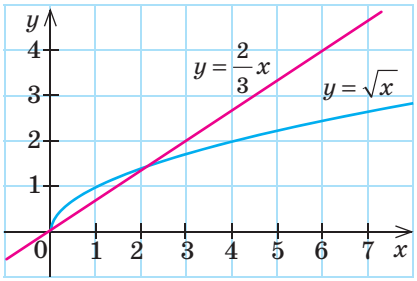


Рис. 8

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розв'яжіть рівняння:

1) $5(x-9) = 0$;
2) $6(x+5) = 0$;
3) $5x^2 = 125$;
4) $3x^2 = 27$;
5) $(x^2 - 6)(7 + 14x) = 0$;
6) $(8 - x^2)(10 + 2x) = 0$;
7) $(x^2 + 1)(2 + 0{,}1x) = 0$;
8) $(x^2 + 4)(4 - 0{,}2x) = 0$.

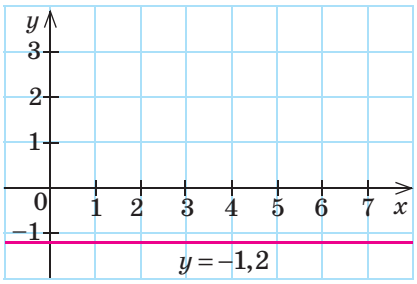


Рис. 9

Вам знайомий вираз «вище голови не стрибнеш»? Це помилка. Людина може все.

Нікола Тесла

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Ознайомлювальну версію програми можна завантажити за посиланням:
http://www.freeware.com.ua/program3366.html

В ОДИН КЛІК

Ви вже можете будувати графіки функцій за допомогою комп'ютерних програм. Спробуйте застосувати отримані знання та побудувати графік функції $y=\sqrt{x}$, користуючись пакетом Advanced Grapher.

ПРИКЛАД 1

Побудуйте графіки функцій $y=\sqrt{x}$ і $y=-\sqrt{x}$ в одній системі координат.

АЛГОРИТМ

Алгоритм побудови

1. Запустіть програму (див. с. 107).

2. Установіть потрібні налаштування для області побудови, використовуючи кнопку Властивості документа.

а) У лівій частині вікна виберіть із списку пункт Побудова, у правій частині вікна задайте мінімальне та максимальне значення для x і y.

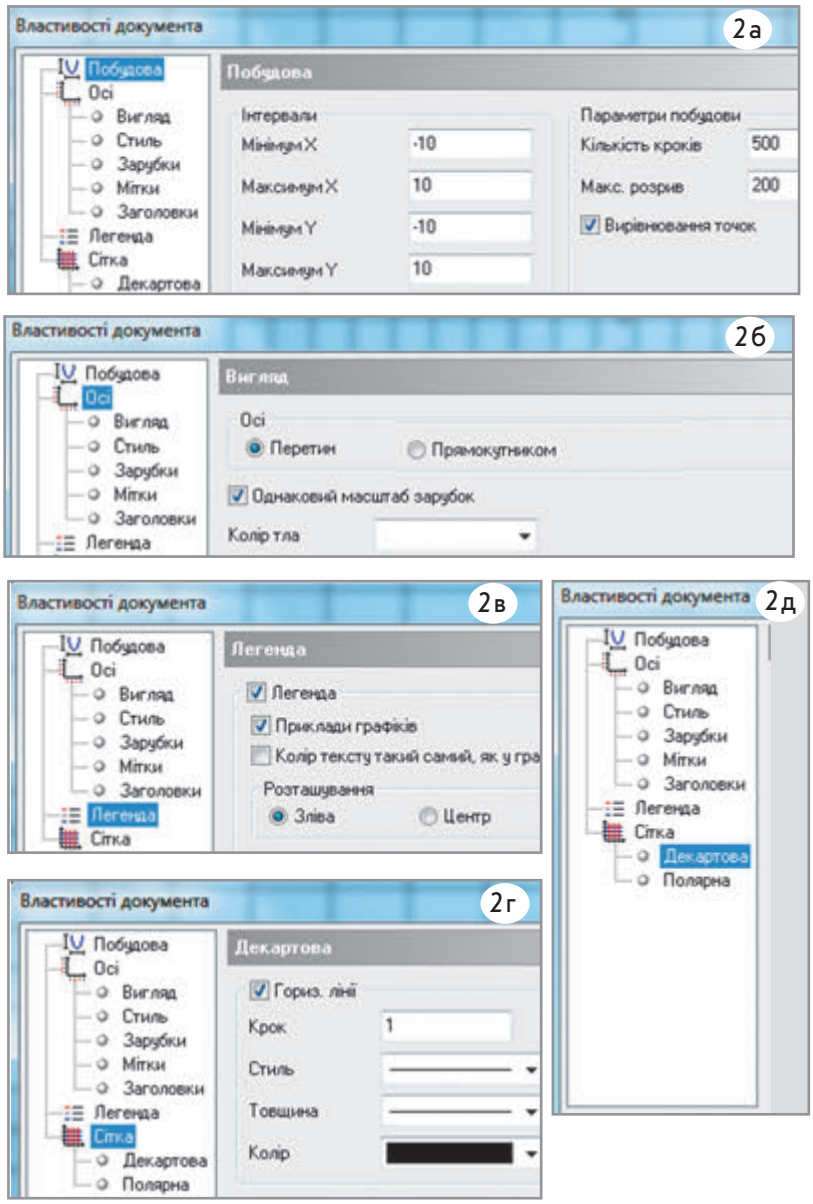
б) У лівій частині вікна виберіть зі списку пункт Осі, у правій частині вікна встановіть перемикач Перетин і прапорець перед параметром Однаковий масштаб зарубок.

в) Активуйте в списку лівої частини вікна пункт Легенда, у правій частині встановіть прапорець перед словом Легенда та перемикач Зліва.

г) Активуйте в списку лівої частини вікна пункт Сітка, у правій частині вікна встановіть прапорці для вертикальної і горизонтальної ліній та значення 1 у полі Крок.

д) Активуйте в списку лівої частини вікна пункт Декартова.

е) Збережіть установлені налаштування, натиснувши кнопку OK.



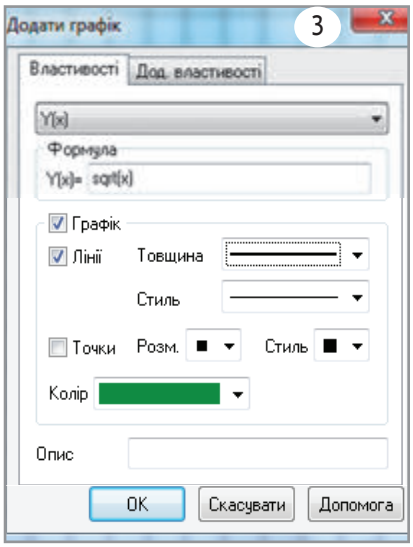
3. На панелі інструментів за допомогою кнопки **Додати графік** відкрийте вікно для введення необхідної функції та введіть у поле **Формула** текст $sqrt(x)$. Оберіть товщину і колір лінії, натисніть кнопку **OK**.

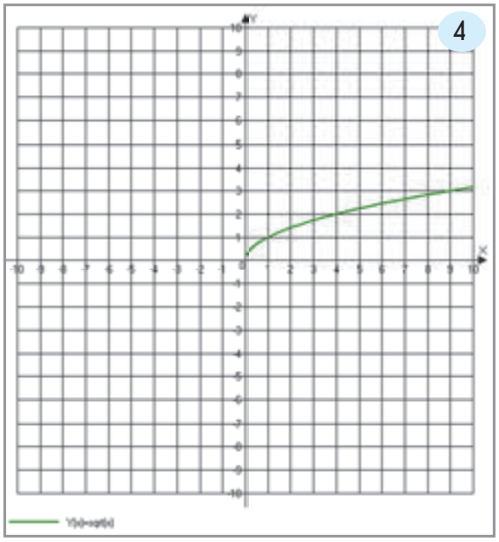
4. Перегляньте результат.

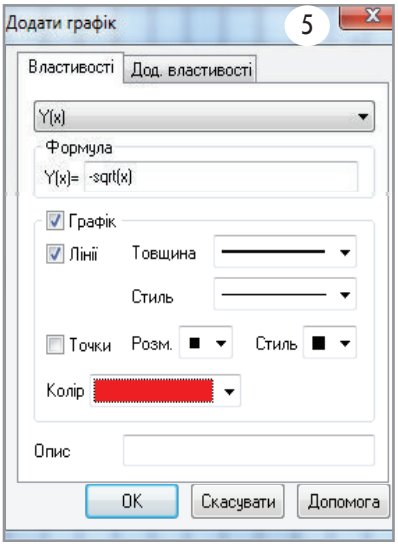
5. Для побудови графіка функції $y=-\sqrt{x}$ натисніть на панелі інструментів кнопку **Додати графік**, відкрийте вікно для введення необхідної функції та введіть у поле **Формула** текст $-sqrt(x)$. Оберіть товщину і колір лінії, натисніть кнопку **OK**.

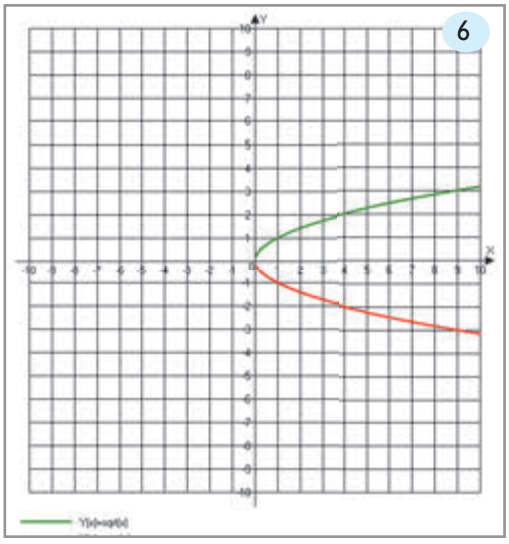
6. Перегляньте результат.

Приклади побудови графіків функцій $y=\frac{1}{2}\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{3}\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ та $y=5\sqrt{x}$ (з якими ви познайомитеся в наступних класах) наведено на сайті interactive.ranok.com.ua. Опрацюйте їх та спробуйте зробити висновки, як впливає значення a на графік функції $y=a\sqrt{x}$.









ТРЕНУЄМОСЯ

За допомогою комп'ютерної програми Advanced Grapher побудуйте графіки функції:

1) $y=\frac{1}{4}\sqrt{x}$;

2) $y=3\sqrt{x}$;

3) $y=-\frac{1}{4}\sqrt{x}$;

4) $y=-3\sqrt{x}$.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

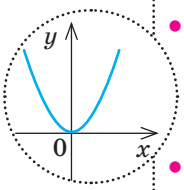
Ознайомитися з розв'язанням рівнянь графічним способом ви можете на сайті interactive.ranok.com.ua

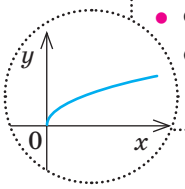
ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 11—18

1 Ви познайомилися з функціями $y=x^2$ і $y=\sqrt{x}$, їх графіками та властивостями.

Функція

$y=x^2$		$y=\sqrt{x}$
$D(y)$: x — будь-яке число	Область визначення	$D(y)$: $x \geqslant 0$
$E(y)$: $y \geqslant 0$	Область значень	$E(y)$: $y \geqslant 0$
• Графік — парабола, її вітки є дзеркальними відображеннями відносно осі Oy. • Графік розміщений у I і II координатних чвертях, проходить через початок координат (при $x=0$ $y=0$). • При $x<0$ функція спадає; при $x>0$ функція зростає.	Графік функції	• Графік розміщений у I координатній чверті, проходить через початок координат (при $x=0$ $y=0$). • Функція зростає на всій області визначення.





2 Ви навчилися розв'язувати рівняння графічним способом.

Алгоритм розв'язування рівняння вигляду $f(x)=g(x)$ графічним способом

1. Звести вихідне рівняння до вигляду $f(x)=g(x)$ так, щоб у лівій і правій частинах рівняння були відомі функції, тобто функції, графіки яких ви вмієте будувати.
2. Ввести дві функції: $y=f(x)$ і $y=g(x)$.
3. Розв'язати графічно систему рівнянь $\begin{cases} y=f(x), \\ y=g(x), \end{cases}$ тобто побудувати в одній системі координат графіки функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$ та знайти точки перетину побудованих графіків.
4. Визначити абсциси спільних точок графіків функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$.
5. Записати відповідь, пам'ятаючи, що знайдено наближені розв'язки рівняння (наприклад, $x \approx a$).

Графічний спосіб розв'язування рівнянь є зручним для знаходження **кількості** розв'язків рівняння або системи рівнянь.

Щоб оцінити точність знайденого кореня, необхідно підставити його в рівняння $f(x)=g(x)$. Усі значення змінної, при яких утворюється правильна рівність, є **точними коренями**. Якщо в ході перевірки одержимо близькі, але не рівні значення $f(x)$ і $g(x)$, то знайдене значення кореня є **наближеним**.

3 Ви дізналися, що таке арифметичний квадратний корінь, які його властивості.

Арифметичним квадратним коренем із числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a: якщо $\sqrt{a}=b$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, то $b^2=a$.

Винесення множника з-під знака кореня

- $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$, якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$
- $\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}$ для будь-яких a, $b\geqslant 0$

Внесення множника під знак кореня

$$a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b}, \text{ якщо } a\geqslant 0,\ b\geqslant 0\\ -\sqrt{a^2b}, \text{ якщо } a<0,\ b\geqslant 0\end{cases}$$

Властивості арифметичного квадратного кореня

- $\sqrt{a^2}=|a|$ при будь-яких значеннях a
- $\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, якщо $a\geqslant 0$
- $\sqrt{ab}=\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$, якщо $ab\geqslant 0$ ($a\geqslant 0$ і $b\geqslant 0$ або $a\leqslant 0$ і $b\leqslant 0$)
- $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$, якщо $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$
- $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$, якщо $\dfrac{a}{b}\geqslant 0$ ($a\geqslant 0$ і $b>0$ або $a\leqslant 0$ і $b<0$)
- $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, якщо $a\geqslant 0$, $b>0$

4 Ви дізналися, що таке множина, які є числові множини.

Множина — сукупність деяких об'єктів, які об'єднані за певною ознакою або мають певну властивість.

- Якщо кожний елемент множини A є елементом множини B, то кажуть, що множина A є **підмножиною** множини B $(A\subset B)$.
- Множину, що не містить жодного елемента, називають **порожньою** $(\varnothing)$.

Раціональні числа — числа, які можна подати у вигляді дробу $\dfrac{m}{n}$, де m — ціле, n — натуральне число.

Ірраціональні числа — числа, які можна подати у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу.

- Числа, які використовують для лічби, утворюють **множину N натуральних чисел.**
- Натуральні числа, протилежні їм числа і число нуль утворюють **множину Z цілих чисел.**
- Цілі та дробові числа утворюють **множину Q раціональних чисел.**
- Раціональні та ірраціональні числа утворюють **множину R дійсних чисел.**

$$N\subset Z\subset Q\subset R$$

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 4

Варіант 1

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ
Виконайте варіант 2 контрольної роботи на сайті interactive.ranok.com.ua

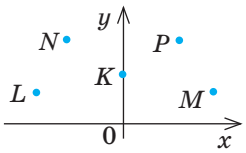
1 $\sqrt{\left(\sqrt{7}-3\right)^2}=$

А	Б	В	Г
$3-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}-3$	$\sqrt{7}+3$	$-3-\sqrt{7}$

2 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{18}{\sqrt{6}}$.

А	Б	В	Г
3	$3\sqrt{6}$	18	$18\sqrt{6}$

3 На рисунку зображено точки M, N, P, L і K у прямокутній системі координат. Відомо, що точка P і ще одна з даних точок належать графіку функції $y=x^2$. Визначте другу точку.



А	Б	В	Г
Точка K	Точка M	Точка L	Точка N

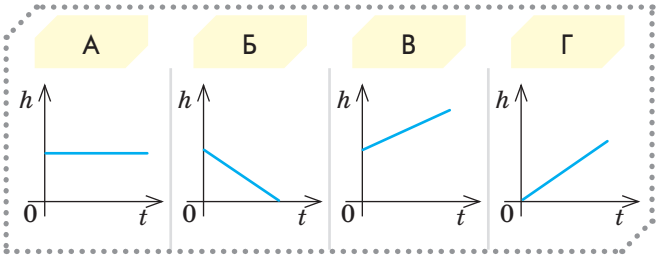
4 Виберіть послідовні натуральні числа, між якими розташоване на числовій прямій ірраціональне число $\sqrt{20}$.

А	Б	В	Г
2 і 3	3 і 4	4 і 5	5 і 6

5 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{1}{\sqrt{b+1}-\sqrt{b}}$, $b\geqslant 0$.

А	Б	В	Г
$\sqrt{b+1}-\sqrt{b}$	1	$\sqrt{b+1}+\sqrt{b}$	$\sqrt{b}$

6 Підводний човен піднімається з глибини на поверхню моря. Виберіть графік, який *може* бути графіком функції $h=f(t)$, де h — глибина, на якій перебуває човен (відстань до поверхні моря), t — час від початку підйому $(t\geqslant 0)$.



7 Виконайте дії: $\left(1-5\sqrt{7}\right)^2+10\sqrt{7}$.

8 Розв'яжіть рівняння $\frac{1}{4}\sqrt{12-2x}-1=0$.

9 Розв'яжіть графічно рівняння $x+1-\frac{2}{x}=0$.

10 Спростіть вираз

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a}-2}-\frac{\sqrt{a}}{a-4}\right):\frac{2\sqrt{a}}{a-4\sqrt{a}+4}-\frac{2}{\sqrt{a}+2}.$$

Обчисліть його значення, якщо $a=\frac{25}{81}$.

Бонусне завдання. Обчисліть значення виразу $\frac{7}{3-\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}+2}$.

3 КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

ЗАСТОСОВУЄМО НА ПРАКТИЦІ

Пізнання законів природи, розв'язання завдань на просторові форми й кількісні співвідношення, створення програм для обробки звуку, відео, векторної графіки неможливо без знання квадратних рівнянь. Опанувавши цей розділ, ви навчитеся:

- перекладати мовою математики будь-яку задачу з реального життя, тобто створювати її математичну модель
- визначати час або швидкість для будь-якої подорожі, здійснювати розрахунки для транспортної логістики
- складати план виконання сумісної роботи, раціонально розподіляти час її виконання
- розв'язувати тригонометричні, показникові, ірраціональні рівняння, рівняння вищих степенів, які ви вивчатимете в наступних класах

ШЛЯХОМ ДОСЛІДЖЕНЬ

- Геометрична алгебра та розв'язування квадратних рівнянь
- 13 способів розв'язування квадратних рівнянь
- Цікаві властивості коефіцієнтів квадратних рівнянь
- Квадратні рівняння у фізиці, техніці, спорті
- Омар Хайям — перський математик і поет
- Франсуа Вієт і його теорема
- Розв'язування рівнянь вищих степенів

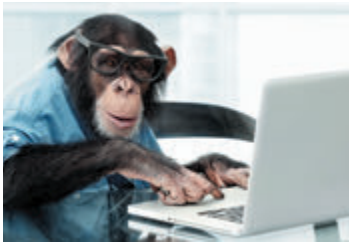
Можливо все.
На неможливе просто потрібно більше часу.

Ден Браун

§ 19 КВАДРАТНИЙ ТРИЧЛЕН. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

ВЧОРА	Ви дізналися про лінійні рівняння та правила їх рівносильних перетворень, навчилися розв'язувати задачі за допомогою лінійних рівнянь
СЬОГОДНІ	Ви познайомитеся з поняттям квадратного рівняння, навчитеся розпізнавати його серед інших рівнянь
ЗАВЖДИ	Ви зможете розв'язувати старовинні задачі й перемагати в математичних турнірах із розв'язування складних математичних задач

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Шість місць у десятці найрозумніших тварин займають примати: бабуїни, шимпанзе, горили, орангутанги, гібони і мавпи.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- квадратний тричлен
- лінійний двочлен
- коефіцієнти квадратного тричлена
- зведений квадратний тричлен
- квадратне рівняння
- зведене квадратне рівняння
- коефіцієнти квадратного рівняння

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Історія математики має глибоке коріння. Широко відомі досягнення математиків Стародавнього Єгипту, Вавилона, Давньої Греції, Індії, Китаю. Доволі часто індійські вчені складали задачі у віршованій формі. Одну з таких задач математика XII ст. Бхаскарими II ми зараз розглянемо.

На дві зграї розділившись,
Розважались в гаї мавпи.
Одна восьма їх в квадраті
Гучно разом забавлялись.
З криком радісним дванадцять
На ліанах колихались.
Разом скільки, ти дізнайся,
Мавп було у тому гаї?

Розв'язання

Якщо позначити кількість мавп через x, то за умовою задачі маємо: восьма частина всіх мавп — це $\left(\frac{1}{8}x\right)$; восьма частина, піднесена до квадрата, — це $\left(\frac{1}{8}x\right)^2$, тобто кількість мавп, які бавилися на галявині. Оскільки ще 12 колихалися на ліанах, то загальна кількість мавп становила $\left(\left(\frac{1}{8}x\right)^2+12\right)$, тобто x.

Запишемо рівняння: $\left(\frac{1}{8}x\right)^2+12=x$.

Ми отримали рівняння, що відрізняється від тих, які ви розв'язували раніше. Це рівняння є цілим, максимальний степінь змінної, що входить до нього, дорівнює 2.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви вмієте розв'язувати лінійні рівняння, тобто рівняння виду $ax+b=0$. Їх ще називають рівняннями першого степеня. Існують рівняння другого, третього і вищих степенів. У цьому параграфі ви розглянете рівняння другого степеня, які називають квадратними.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення. Рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де x — змінна, a, b, c — числа $(a\neq 0)$, називають **квадратним**.

СЛІД ЗНАТИ!

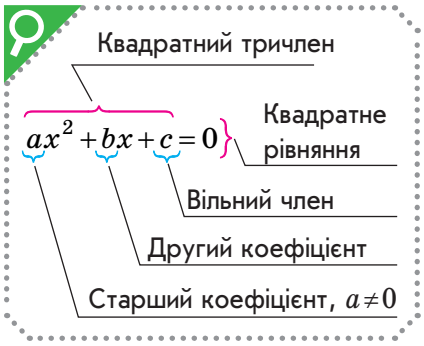
1) Многочлен ax^2+bx+c $(a\neq 0)$, який міститься в лівій частині рівняння, називають **квадратним тричленом**.
2) Число a називають **старшим (першим) коефіцієнтом** квадратного тричлена та відповідного квадратного рівняння; число b — **другим коефіцієнтом**; число c — **вільним членом**.
3) Якщо $a=0$, квадратний тричлен перетворюється на **лінійний двочлен**. Якщо $a\neq 0$, рівняння $ax^2+bx+c=0$ залишається квадратним, при цьому числа b і c можуть дорівнювати нулю.

Наприклад, $2x^2-x-3$ — квадратний тричлен; $2x^2-x-3=0$ — квадратне рівняння.

Запишемо це рівняння у вигляді $ax^2+bx+c=0$.

$$\begin{array}{ccc} 2x^2 & +(-1)\cdot x & +(-3)=0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ a & b & c \end{array}$$

Звідси $a=2$ — старший (або перший) коефіцієнт, $b=-1$ — другий коефіцієнт, $c=-3$ — вільний член.



КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Кожний коефіцієнт розглядається з тим знаком, який стоїть перед ним.

Значення квадратного тричлена ax^2+bx+c залежить від значень змінної x. При різних значеннях x тричлен набуває різних значень, у тому числі 0. Але якщо при будь-яких значеннях коефіцієнтів a, b і c квадратний тричлен буде відмінним від нуля, це означає, що не існує таких значень змінної x, при яких даний квадратний тричлен перетворюється в нуль.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення. **Коренем квадратного тричлена** називають значення змінної, при якому значення цього тричлена дорівнює нулю.

СЛІД ЗНАТИ!

Корені квадратного тричлена ax^2+bx+c є коренями відповідного квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$.

Квадратні рівняння мають не більш ніж два корені.

Якщо $ax_1^2+bx_1+c=0$ і $ax_2^2+bx_2+c=0$ $(a\neq 0)$, то x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c. І навпаки, якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c $(a\neq 0)$, то $ax_1^2+bx_1+c=0$ і $ax_2^2+bx_2+c=0$.

Досить часто на практиці ми маємо справу з квадратними рівняннями, у яких старший коефіцієнт дорівнює 1.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення. Квадратне рівняння, старший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають **зведеним.**

ПРИКЛАД 1

Визначте коефіцієнти квадратного рівняння:

1) $-3x^2+2x+1=0$; 2) $\frac{1}{2}x^2-4=0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
1) КРОК 1	Запишемо рівняння $-3x^2+2x+1=0$ у вигляді $ax^2+bx+c=0$.	$(-3)\cdot x^2+(2)\cdot x+(1)=0$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ a b c Маємо: $a=-3$, $b=2$, $c=1$
2) КРОК 1	Запишемо рівняння $\frac{1}{2}x^2-4=0$ у вигляді $ax^2+bx+c=0$.	$\left(\frac{1}{2}\right)\cdot x^2+(0)\cdot x+(-4)=0$ $\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$ a b c Маємо: $a=\frac{1}{2}$, $b=0$, $c=-4$

ПРИКЛАД 2

Складіть квадратне рівняння, у якому старший коефіцієнт (-3), другий коефіцієнт $\frac{1}{5}$, вільний член $(-2{,}3)$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Підставимо в рівняння $ax^2+bx+c=0$ задані значення коефіцієнтів.	$a=-3$; $b=\frac{1}{5}$; $c=-2{,}3$. Маємо: $-3x^2+\frac{1}{5}x+(-2{,}3)=0$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Розкриємо дужки в отриманому рівнянні.	$-3x^2+\frac{1}{5}x-2{,}3=0$
	Зверніть увагу: можна помножити обидві частини рівняння на (-10) та отримати квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами: $30x^2-2x+23=0$.	

Відповідь: $-3x^2+\frac{1}{5}x-2{,}3=0$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 У завданнях 1–4 визначте коефіцієнти поданого квадратного рівняння:

1) $2x^2+3x-5=0$;
2) $-5x^2-11x+4=0$;
3) $3x^2-\frac{1}{9}=0$;
4) $\frac{1}{8}x^2+6x=0$.

У завданнях 5–8 складіть квадратне рівняння, у якому:

5) старший коефіцієнт 8, другий коефіцієнт (-6), вільний член 11;
6) старший коефіцієнт 2, другий коефіцієнт 15, вільний член (-1).
7) старший коефіцієнт 5, другий коефіцієнт $\frac{1}{4}$, вільний член $(-1{,}6)$.
8) старший коефіцієнт (-6), другий коефіцієнт $(-2{,}4)$, вільний член $\frac{1}{7}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

До квадратних рівнянь можна застосовувати всі правила рівносильних перетворень рівнянь:

- доданки можна переносити з однієї частини рівняння в іншу, змінюючи їх знак на протилежний;
- до обох частин рівняння можна додавати те саме число (від обох частин рівняння можна віднімати те саме число);
- обидві частини рівняння можна множити або ділити на те саме число, відмінне від нуля.

ПРИКЛАД 3

Зведіть рівняння $-2x(x+1)-(2x-3)^2=4x^2-1$ до вигляду $ax^2+bx+c=0$. Визначте його коефіцієнти. У відповідь запишіть відношення вільного члена до старшого коефіцієнта.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкриємо дужки у лівій частині рівняння.	$-2x^2-2x-(4x^2-12x+9)=4x^2-1$; $-2x^2-2x-4x^2+12x-9=4x^2-1$
КРОК 2	Перенесемо всі доданки в ліву частину рівняння.	$-2x^2-2x-4x^2+12x-9-4x^2+1=0$
КРОК 3	Зведемо подібні доданки в лівій частині рівняння й запишемо отримане рівняння у вигляді $ax^2+bx+c=0$.	$-10x^2+10x-8=0$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 4	Поділимо обидві частини рівняння на (-2).	$-10x^2+10x-8=0 \ \vert :(-2)$; $5x^2-5x+4=0$
КРОК 5	Визначимо коефіцієнти отриманого квадратного рівняння.	$a=5$, $b=-5$, $c=4$
КРОК 6	Знайдемо відношення вільного члена до старшого коефіцієнта.	$\frac{c}{a}=\frac{4}{5}=0{,}8$

Відповідь: $a=5$, $b=-5$, $c=4$; $0{,}8$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 У завданнях 1–4 зведіть вираз до квадратного тричлена та визначте його коефіцієнти:

1) $2x^2-3x-x^2+4+2x$;
2) $3x(x+14)-4+2x-x^2$;
3) $2x(x+6)-(x-1)(4x+3)$;
4) $8x(x+3)+(3x+4)(4-3x)-(2x+3)^2$.

У завданнях 5–6 зведіть рівняння до вигляду $ax^2+bx+c=0$, визначте його коефіцієнти та запишіть у відповідь суму старшого коефіцієнта й вільного члена:

5) $5x^2+x+4=x^2-3$;
6) $3x(x-6)+4=x^2+3$.

У завданнях 7–8 зведіть рівняння до вигляду $ax^2+bx+c=0$, визначте його коефіцієнти та запишіть у відповідь відношення вільного члена до старшого коефіцієнта:

7) $2x(x-3)-(3x-2)^2=3x^2+2$;
8) $(x-6)(x+6)-(3x+5)(x-2)=(5x+2)^2-2x^2$.

СЛІД ЗНАТИ!

Рівняння, отримане в прикладі 3 на кроці 4, може мати інший вигляд. Помноживши обидві його частини на будь-який множник, отримаємо рівносильне рівняння з іншими коефіцієнтами. При цьому відношення коефіцієнтів рівняння залишиться тим самим, а їх сума або різниця набуде інших значень. Зазвичай квадратні рівняння зводять до найменших за модулем коефіцієнтів із усіх можливих.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Серед наведених рівнянь виберіть квадратні та визначте їх коефіцієнти:

1) $-2x^2+5x+1=0$;
2) $2x^2-\frac{1}{x}=0$;
3) $5x^2=0$;
4) $4y-\frac{y^2}{3}+1=0$;
5) $8t^2=t$;
6) $-5t^2=\frac{1}{5}$;
7) $x^2+x=2$;
8) $t-11t^2=0$;
9) $5-3t^2+3t=0$.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

$\frac{a}{5}=\frac{1}{5}\cdot a$; $\frac{y^2}{3}=\frac{1}{3}\cdot y^2$

2 Зведіть квадратне рівняння до вигляду $ax^2+bx+c=0$:

1) $(3x+1)^2=4(x-1)(1+x)-16$;

2) $\frac{1}{2}(6x+1)^2=(1-6x)(1+6x)-2x(x+3)$.

3 Перетворіть на зведене квадратне рівняння задане рівняння, поділивши обидві його частини на старший коефіцієнт. Знайдіть значення $\frac{c}{a}$ і $-\frac{b}{a}$ для отриманого рівняння.

1) $12x^2-x-1=0$; 2) $\frac{1}{3}t^2+t-\frac{1}{2}=0$; 3) $\frac{2}{5}y^2-1=0$.

4 Складіть квадратне рівняння, якщо a — старший коефіцієнт, b — другий коефіцієнт, c — вільний член:

1) $a=2$, $b=-1$, $c=-1$;

2) $a=2$, $b=0$, $c=4$;

3) $a=-\frac{1}{3}$, $b=3$, $c=0$;

4) $a=-4$, $b=0$, $c=0$.

5 Складіть квадратне рівняння до задачі.

1) Знайдіть три послідовних натуральних числа, про які відомо, що квадрат середнього в 4 рази більше, ніж сума двох інших.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Три послідовних натуральних числа можна записати так: k, $k+1$, $k+2$ $(k\in N)$ або $k-1$, k, $k+1$ $(k\in N,\ k\geqslant 2)$.

2) Навколо клумби, яка має форму круга, заасфальтовано доріжку у формі кільця завширшки 1 м. Площа кільця становить 7π м². Знайдіть радіус x клумби.

Рене Декарт (франц. René Descartes; 1596–1650) — французький філософ, фізик, фізіолог, математик, засновник аналітичної геометрії. Його головна математична праця — «Міркування про метод, що дозволяє направляти свій розум і відшукувати істину в науках» (1637 р.). Декарт першим використав малі латинські літери для позначення коефіцієнтів (перші літери алфавіту) та невідомих (останні літери). Розробив універсальний метод розв'язування задач: 1) задача будь-якого виду зводиться до математичної задачі; 2) математична задача будь-якого виду зводиться до алгебраїчної задачі; 3) будь-яка алгебраїчна задача зводиться до розв'язання єдиного рівняння.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

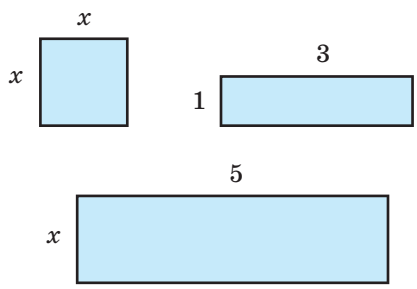
1) $x=4$ є коренем квадратного тричлена $x^2-9x+20$.

2) Якщо $x=1$ — корінь квадратного тричлена ax^2+bx+c, то $a+b+c=0$.

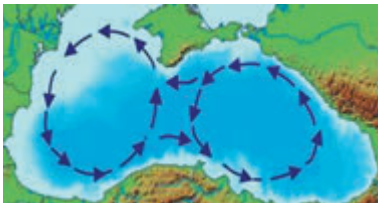
3) Рівняння $0{,}2x^2+3{,}4x-6{,}8=0$ і $x^2+17x-34=0$ рівносильні.

4) Старший коефіцієнт квадратного рівняння $10x+5x^2+1=0$ дорівнює 10.

5) Під час ремонту дороги поставили 3 прямокутні «латки» (див. рисунок), їх загальна площа дорівнює x^2+5x+3.



МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ



У схемі течій Чорного моря є два великі замкнені кругообіги з довжиною хвилі 350–400 км. На честь океанолога Миколи Кніповича, який першим описав цю схему, її назвали «Окуляри Кніповича». Океанологи досліджують морське дно, вивчають склад води, аналізують хімічні, біохімічні, фізичні процеси в океані.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «МОРСЬКА ЕКСКУРСІЯ»

Екскурсійний катер іде морем за маршрутом: пункт A — пункт B — пункт A. У певні дні на морі виникає течія в напрямку від пункту A до пункту B. У який день катер проходить цей маршрут за менший час — коли течія є або коли немає? Вважайте, що протягом усього маршруту власна швидкість катера та швидкість течії залишаються постійними і швидкість катера більша за швидкість течії.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Визначте коефіцієнти квадратного рівняння:

1) $-7x^2+x+6=0$; 2) $\frac{1}{6}x^2-2=0$; 3) $-9x^2+\frac{1}{7}x=0$.

2 Складіть квадратне рівняння, у якому:

1) старший коефіцієнт $\frac{1}{3}$, другий коефіцієнт $(-2{,}5)$, вільний член (-8);

2) старший коефіцієнт $(-3{,}3)$, другий коефіцієнт 9, вільний член $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Див. приклади 1, 2

3 Зведіть вираз до квадратного тричлена та визначте його коефіцієнти:

1) $9x^2-2x(x+5)-3+10x$; 2) $7x(x+2)-(5x-2)(x+9)$;

3) $(4x+3)^2-(6-7x)(7x+6)+10x(x-5)$.

Див. приклад 3

4 Зведіть задане рівняння до вигляду $ax^2+bx+c=0$, визначте його коефіцієнти й запишіть у відповідь:

1) суму старшого коефіцієнта та вільного члена: $8x(x-2)+3=6-2x^2$;

2) відношення вільного члена до старшого коефіцієнта: $-6x(x-4)-(3x-4)^2=8-5x^2$;

3) відношення вільного члена до старшого коефіцієнта: $(4x+3)^2-(5x-2)(x+3)=2x^2+(x-5)(x+5)$.

“Для того щоб удосконалити розум, треба більше розмірковувати, ніж заучувати.”

Рене Декарт

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Розв’яжіть рівняння:

1) $\frac{6x}{x-2}=0$; 2) $\frac{9+x}{5-3x}=0$; 3) $\frac{14}{x^2-49}=0$; 4) $\frac{x^2-64}{3x-24}=0$.

§ 20 НЕПОВНІ КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ, ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

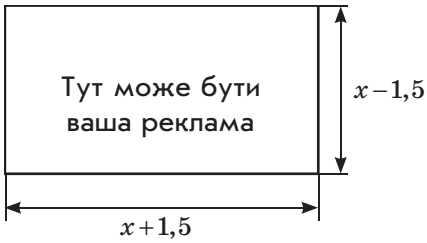
ВЧОРА — Ви вміли, застосовуючи методи розкладання на множники, розв'язувати лінійні рівняння та цілі рівняння, що містять у чисельнику вираз x^2

СЬОГОДНІ — Ви дізнаєтеся, що рівняння, які ви розв'язували методом розкладання на множники, називаються неповними квадратними рівняннями

ЗАВЖДИ — Ви зможете розв'язувати геометричні задачі за допомогою неповних квадратних рівнянь

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Білборд площею 18 м² має форму прямокутника, ширина і довжина якого дорівнюють відповідно $(x-1{,}5)$ м та $(x+1{,}5)$ м. Визначте, чи можна помістити білборд на стіну, яка має розміри 4 × 6,2 м.



Розв'язання

За умовою сторони прямокутника дорівнюють відповідно $(x-1{,}5)$ м і $(x+1{,}5)$ м, а площа S білборда становить 18 м², тобто $S=(x-1{,}5)(x+1{,}5)=18$. Отже, маємо рівняння: $(x-1{,}5)(x+1{,}5)=18$. Тоді $x^2-2{,}25=18$.

Отримане рівняння називають **неповним квадратним рівнянням**. Спосіб розв'язування схожих рівнянь вам відомий: $x^2=2{,}25+18$; $x^2=20{,}25$; $x=\pm 4{,}5$.

Оскільки рівняння має два розв'язки, то визначимо, чи обидва знайдені корені задовольняють умову задачі. За умовою найменша сторона прямокутника дорівнює значенню виразу $(x-1{,}5)$, тобто має виконуватись умова: $x-1{,}5>0$, звідки $x>1{,}5$. Корінь $x=-4{,}5$ не задовольняє умову задачі. Отже, $x=4{,}5$, тоді розміри білборда 3×6 м, тому можна зробити висновок, що білборд поміститься на стіну розміром 4 × 6,2 м.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Білборд (англ. billboard) — рекламний щит, який зазвичай установлюють уздовж вулиць, магістралей. Часом винайдення білборда (у сучасному його вигляді) вважають 1835 р., коли американець Джаред Бел почав використовувати великі плакати для реклами свого цирку. Сама назва «білборд» виникла в 1900 р.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

У попередньому параграфі ми зазначили, що у квадратному рівнянні $ax^2+bx+c=0$ старший коефіцієнт a завжди відмінний від нуля, а коефіцієнти b і c можуть дорівнювати нулю.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- квадратне рівняння
- неповне квадратне рівняння
- коефіцієнти квадратного рівняння

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення. Квадратне рівняння називають **неповним**, якщо хоча б один із його коефіцієнтів, крім старшого, або обидва ці коефіцієнти дорівнюють нулю, тобто або $b=0$, або $c=0$, або $b=c=0$.

Розглянемо окремо всі випадки неповних квадратних рівнянь.

СЛІД ЗНАТИ!

I. $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c=0$

У цьому випадку (якщо $c=0$) рівняння $ax^2+bx+c=0$ набуває вигляду $\boxed{ax^2+bx=0}$.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть рівняння $4x^2-8x=0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо коефіцієнти заданого квадратного рівняння.	$a=4$, $b=-8$, $c=0$
КРОК 2	Винесемо спільний множник $(4x)$ за дужки.	$4x(x-2)=0$
КРОК 3	Скористаємося правилом рівності добутку нулю: $mn=0$, коли $m=0$ або $n=0$.	$4x=0$ або $x-2=0$
КРОК 4	Розв'яжемо кожне з отриманих лінійних рівнянь.	$4x=0$ або $x-2=0$ $x=0$ $x=2$

Відповідь: 0; 2.

АЛГОРИТМ

Алгоритм розв'язування рівнянь вигляду $ax^2+bx=0$ ($a\neq 0$, $b\neq 0$, $c=0$)

1. Винесіть спільний множник за дужки, щоб отримати рівняння $x(ax+b)=0$.
2. Скористайтеся правилом рівності добутку нулю (добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю).
   Таким чином, рівняння $x(ax+b)=0$ рівносильне сукупності двох рівнянь:
   $$x=0 \quad \text{або} \quad ax+b=0;$$
   $$x=-\frac{b}{a}.$$
3. Запишіть відповідь: $x=0$ або $x=-\frac{b}{a}$.

СЛІД ЗНАТИ!

Відповідь прикладу 1 можна записати так: $\{0;2\}$. Надалі будемо записувати розв'язки рівнянь у різних можливих формах.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-9x=0$;
2) $x^2+7x=0$;
3) $3x^2-12x=0$;
4) $5x^2+15x=0$;
5) $\frac{5}{6}x^2=-30x$;
6) $-9x^2=\frac{3}{7}x$;
7) $(3x-1)^2-17=(x-4)(x+4)$;
8) $(x-3)(x+3)=(2x+3)^2-18$.

СЛІД ЗНАТИ!

II. $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, $b=0$, $c\neq 0$

У цьому випадку (якщо $b=0$) рівняння $ax^2+bx+c=0$ набуває вигляду $\boxed{ax^2+c=0}$.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть рівняння $5x^2-20=0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо коефіцієнти заданого квадратного рівняння.	$a=5$, $b=0$, $c=-20$
КРОК 2	Зведемо задане рівняння до вигляду $x^2=m$. Для цього перенесемо доданок, що не містить змінної, у праву частину рівняння й поділимо обидві частини рівняння на 5.	$5x^2=20 \mid :5$ $x^2=4$
КРОК 3	Використаємо відомий вам факт: при $m>0$, якщо $x^2=m$, то $x=\pm\sqrt{m}$.	$x^2=4$; $x=\pm\sqrt{4}$; $x=\pm 2$

Відповідь: ± 2.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-25=0$;
2) $64-x^2=0$;
3) $2x^2-32=0$;
4) $28-7x^2=0$;
5) $\frac{2}{3}x^2-1\frac{1}{2}=0$;
6) $\frac{4}{7}-1\frac{3}{4}x^2=0$;
7) $\frac{x^2-4}{3}-\frac{x^2-1}{4}=0$;
8) $\frac{x^2+3}{5}-\frac{x^2-3}{2}=0$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

У двох магазинах у період розпродажу діяли такі знижки. У першому магазині ціну на товар знижували спочатку на 20 %, а потім нову ціну — ще на 30 %. У другому магазині відразу знизили ціну на 50 %. Який варіант знижок вигідніший для покупця?

АЛГОРИТМ

Алгоритм розв'язування рівнянь вигляду $ax^2+c=0$ ($a\neq 0$, $b=0$, $c\neq 0$)

1. Перенесіть доданок c, що не містить змінної, у праву частину рівняння й поділіть обидві його частини на a, щоб отримати рівняння $x^2=-\frac{c}{a}$.

2. Проаналізуйте знак виразу $\left(-\frac{c}{a}\right)$:
   - якщо коефіцієнти a і c мають один знак, то $-\frac{c}{a}<0$ і рівняння $x^2=-\frac{c}{a}$ розв'язків не має;
   - якщо коефіцієнти a і c мають різні знаки, то $-\frac{c}{a}>0$ і рівняння $x^2=-\frac{c}{a}$ має два розв'язки: $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Правило знаходження коренів рівняння, зведеного до вигляду $ax^2+bx=c$, уперше виклав індійський учений Брахмагупта в VII ст.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $(1+7x)^2-25=0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Перенесемо доданок (-25) у праву частину рівняння, змінивши його знак на протилежний.	$(1+7x)^2=25$
КРОК 2	Оскільки рівняння записане у вигляді $x^2=m$, знайдемо його розв'язки, скориставшись формулою $x=\pm\sqrt{m}$, $m\geqslant 0$.	$1+7x=\pm\sqrt{25}$; $1+7x=\pm 5$
КРОК 3	Розв'яжемо кожне з отриманих рівнянь.	$1+7x=5$; $7x=4$; $x=\frac{4}{7}$; або $1+7x=-5$; $7x=-6$; $x=-\frac{6}{7}$

Відповідь: $\left\{-\frac{6}{7};\ \frac{4}{7}\right\}$.

СЛІД ЗНАТИ!

$x^2=m$, $x=\pm\sqrt{m}$, $m\geqslant 0$

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+6)^2=1$;
2) $(4-y)^2=16$;
3) $(2x+1)^2=9$;
4) $(5-3x)^2=100$;

5) $(12t+7)^2=-15$;

6) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2=0$;

7) $(4-z)^2=3$;

8) $(2m+1)^2=7$.

III. $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, $b=c=0$

У цьому випадку (якщо $b=c=0$) рівняння $ax^2+bx+c=0$ набуває вигляду $\boxed{ax^2=0}$.

Поділивши обидві частини рівняння $ax^2=0$ на a, отримаємо $x^2=0$, звідси $x=0$.

Висновок: рівняння $ax^2=0$ при будь-яких значеннях $a\neq 0$ має єдиний розв'язок $x=0$.

Наприклад: $7x^2=0$, $x=0$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

1) Якщо $t^2=49$, то $t=7$ або $t=-7$;

2) якщо $(m+7)^2=4$, то $m+7=2$ або $m+7=-2$.

СЛІД ЗНАТИ!

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Зведіть рівняння до вигляду $ax^2+bx=0$ або $ax^2+c=0$ і розв'яжіть його:

1) $12x^2=6x$;

2) $28=7x^2$;

3) $9x^2=\frac{1}{9}$;

4) $-\frac{1}{10}x=\frac{2}{5}x^2$;

5) $-5x^2=-\frac{1}{5}$;

6) $\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}x^2$;

7) $15x^2+\sqrt{31}=0$;

8) $2\sqrt{5}x^2-\sqrt{5}x=0$;

9) $3\sqrt{2}x^2=18\sqrt{2}$.

2 Розв'яжіть рівняння за розглянутими алгоритмами.

1) $4x-3x^2=0$;

2) $2\frac{1}{4}x-9x^2=0$;

3) $8x^2-16=0$;

4) $-5x^2-25=0$;

5) $7-252x^2=0$;

6) $2\frac{1}{4}x^2-\frac{81}{16}=0$;

7) $-\frac{1}{4}x^2+8=0$;

8) $-\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{9}=0$;

9) $-\frac{1}{2016}x^2=0$.

3 Складіть математичну модель задачі (рівняння), розв'яжіть задачу.

1) Одне з двох натуральних чисел на 2 більше за інше, а їх добуток дорівнює 8. Знайдіть ці числа, якщо менше з них позначено через $(x-1)$.

2) Для вирощування полуниці виділено земельну ділянку прямокутної форми площею 24 кв. од. (рис. 1). Знайдіть периметр цієї ділянки.

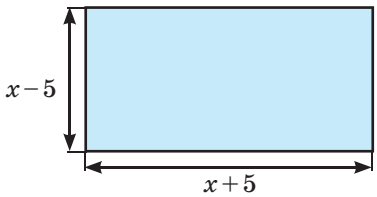


Рис. 1

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- У Бельгії існує музей полуниці.
- У місті Немі (Італія) щоліта проходить свято полуниці.
- У 2015 р. ягода полуниці масою 250 г, яку виростив японський фермер Койі Накао, була визнана найбільшою у світі.

Гаррі Кімович Каспаров — 13-й чемпіон світу із шахів, 8-разовий переможець Всесвітніх шахових олімпіад, володар 11 шахових «Оскарів» (призів найкращому шахісту року). У 1985 р. Каспаров став наймолодшим чемпіоном світу в історії шахів — на той час йому виповнилося 22 роки 6 місяців і 27 днів. У 1999 р. Гаррі Каспаров досягнув рекордного рейтингу серед шахістів 2851 пункт, який тримався протягом 13,5 року.

3) Площа прямокутного ліфтборда (рекламного носія, розташованого в ліфті) дорівнює 2475 см^2, а його довжина більша за ширину на 10 см. Знайдіть розміри ліфтборда, позначивши його ширину через $(x-5)$ см. Визначте вартість рамки ліфтборда, закріпленої по його периметру, якщо ціна 1 м цієї рамки становить 100 грн.

4 Запишіть подане рівняння у вигляді неповного квадратного рівняння та розв'яжіть його:

1) $(3y-1)(y+3)-(y-1)^2=y^2+6-10y$;

2) $(5-t)^2+(t+5)(5-t)=\frac{1}{2}t^2+50$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $x=1$ — корінь рівняння $ax^2-bx=0$, то $a=b$.
2) Якщо $x=2$ — корінь рівняння $ax^2+c=0$, то $x=-2$ також є коренем цього рівняння.
3) Рівняння $9x^2=25$ і $(3x-5)(3x+5)=0$ рівносильні.
4) Рівняння $x^2=5x$ і $x=5$ рівносильні.
5) Для прибирання снігу задіяли $(x-6)$ машин, кожна з яких вивезла $(x+6)$ тонн снігу. Усього цими машинами було вивезено (x^2-36) тонн снігу.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ФАСУВАЛЬНО-ПАКУВАЛЬНИЙ АВТОМАТ»

Фасувально-пакувальний автомат моделі A виробляє 2400 пакетів фісташок на 20 хв швидше, ніж фасувально-пакувальний автомат моделі B. Щохвилини автомат моделі A виробляє на 10 пакетів фісташок більше, ніж автомат моделі B.

1 Яка продуктивність автомата моделі A (кількість вироблених пакетів фісташок за 1 хв), якщо продуктивність автомата моделі B становить x?

2 Складіть рівняння для визначення x.

3 Визначте x із рівняння $x(x+40)-30(x+40)=0$.

4 За який час автомати моделей A і B разом вироблять 3500 пакетів фісташок?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Уперше папір для пакування продуктів почали застосовувати наприкінці XVII ст. в Німеччині. У 1850 р. з'явилася перша двошарова обгортка для цукерок; у 1852–1853 рр. було винайдено пергамін; у 1971 р. — гофрокартон; у 1911 р. — целофан. У 1852 р. у США з'явився перший верстат, призначений для виготовлення паперових пакетів.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+5x=0$;
2) $6x^2+24x=0$;
3) $8x^2=-\frac{4}{5}x$;
4) $(x-2)(x+2)+8=(3x+2)^2$.

Див. приклад 1

2 Розв'яжіть рівняння:

1) $81-x^2=0$;
2) $54-6x^2=0$;
3) $\frac{5}{6}-1\frac{1}{5}x^2=0$;
4) $\frac{x^2-5}{2}-\frac{x^2+5}{7}=0$.

Див. приклад 2

3 Зведіть рівняння до вигляду $(x-n)^2=m$ і розв'яжіть його:

1) $(2+t)^2-4=0$;
2) $-(x-0,2)^2=0,09$;
3) $(x+4)^2-5=0$;
4) $-(7-y)^2+2=0$.

Див. приклад 3

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Якщо $(m-n)^2-t^2=0$, то $m-n-t=0$ або $m-n+t=0$.

4 Складіть математичну модель задачі (рівняння), розв'яжіть задачу.

Див. актуальну задачу

1) Одне з двох натуральних чисел на 6 більше за інше, а їх добуток дорівнює 40. Знайдіть ці числа, якщо менше з них позначено через $(x-3)$.

2) Яблуневий сад прямокутної форми розділено доріжкою (рис. 2). Знайдіть довжину цієї доріжки, якщо загальна площа земельної ділянки, виділеної для вирощування дерев (на рисунку її зафарбовано), дорівнює 896.

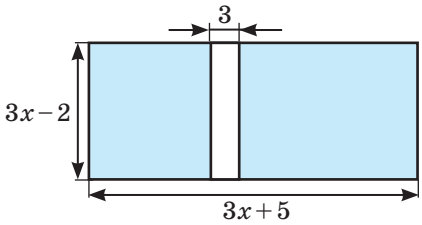


Рис. 2

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Знайдіть значення виразу:

1) $\sqrt{D}$, якщо $D=49$;
2) $-b+\sqrt{D}$, якщо $b=-3$, $D=25$;
3) b^2-4ac, якщо $b=-5$, $a=1$, $c=4$;
4) $\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$, якщо $a=2$, $b=6,8$, $D=1,44$;

Зроблений хід — це підсумок, розв'язання рівняння, яке спочатку потрібно скласти і зрозуміти.

Гаррі Каспаров

§ 21 ФОРМУЛА КОРЕНІВ КВАДРАТНОГО РІВНЯННЯ

ВЧОРА	Ви навчилися розв'язувати лінійні рівняння та неповні квадратні рівняння
СЬОГОДНІ	Ви дізнаєтеся про формулу коренів квадратного рівняння та її виведення відомим вам способом
ЗАВЖДИ	Ви зможете раціонально використовувати площу присадибної ділянки

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

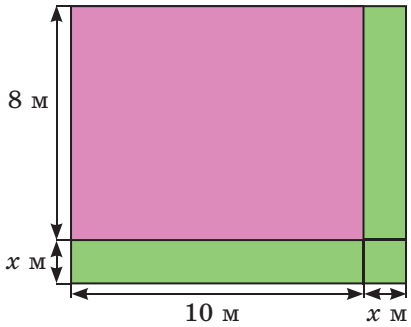
Фермерське господарство може бути багатогалузевим або спеціалізуватися на окремому напрямку сільського господарства. Для успішного ведення такого господарства важливими є знання з біології, хімії, математики, фізики, економіки, інформаційних технологій. Необхідні якості фермера — фізична сила і витривалість, працьовитість і оптимізм.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- квадратне рівняння
- коефіцієнти квадратного рівняння
- формула коренів квадратного рівняння
- дискримінант

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Фермер виділив під баклажани ділянку прямокутної форми розмірами 8 × 10 м. Для захисту від шкідливих комах він висадив базилік уздовж двох сусідніх сторін ділянки, як показано на рис. 1. Визначте ширину смуги, зайнятої базиліком, якщо загальна площа, зайнята базиліком і баклажанами, становить 87,36 м².



Розв'язання

Якщо позначити ширину смуги, яку виділено під базилік, через x м, то сторони прямокутника, що містить і баклажани, і базилік, дорівнюватимуть $(8+x)$ м і $(10+x)$ м. Оскільки загальна площа ділянки становить 87,36 м², складемо рівняння: $(8+x)\cdot(10+x)=87{,}36$.

Отже, розв'язання задачі зводиться до розв'язання рівняння, що відрізняється від неповних квадратних рівнянь.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Деякі неповні квадратні рівняння, наприклад $x^2+3x=0$, ми розв'язували способом розкладання лівої частини на множники. Рівняння $(x-2)(x+6)=0$ можна так само розв'язати, використовуючи правило рівності добутку нулю.

Якщо в цьому рівнянні розкрити дужки, то отримаємо рівняння $x^2+4x-12=0$ — **повне квадратне рівняння**.

Виникає запитання: як розв'язувати квадратне рівняння вигляду $ax^2+bx+c=0$? Спробуємо виділити повний квадрат у його лівій частині.

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть рівняння $x^2+4x-12=0$ способом виділення повного квадрата.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Виділимо квадрат суми у виразі $x^2+4x-12$, додавши до нього й віднявши від нього число $2^2=4$.	$x^2+4x-12=\underbrace{x^2+2\cdot 2\cdot x+4}_{\text{квадрат суми}}-4-12$
КРОК 2	Застосуємо до перших трьох доданків формулу квадрата суми й запишемо отримане рівняння.	$(x+2)^2-16=0$
КРОК 3	Розв'яжемо отримане рівняння за відомою вам схемою: якщо $x^2=m$, то $x=\pm\sqrt{m}$ при $m\geqslant 0$.	$(x+2)^2=16$; $x+2=\pm\sqrt{16}$; $x+2=\pm 4$
КРОК 4	Розв'яжемо кожне з отриманих рівнянь. Одержані розв'язки є шуканими.	$x+2=4$ або $x+2=-4$; $x=2$ $\quad$ $x=-6$

Відповідь: $\{-6;2\}$.

Як і в попередньому параграфі, будемо записувати розв'язки рівнянь у різних можливих формах.

ПРИГАДАЙТЕ!

$ab=0$, якщо $a=0$ або $b=0$

ТРЕНУЄМОСЯ

1 У завданнях 1–4 розв'яжіть рівняння:

1) $(x-5)^2=36$;
2) $(x+1)^2=81$;
3) $(5x-6)^2-25=0$;
4) $(2x+1)^2-64=0$.

У завданнях 5–8 розв'яжіть рівняння способом виділення квадрата двочлена (повного квадрата):

5) $y^2-6y-9=0$;
6) $y^2+4y-2=0$;
7) $y^2-9y+9=0$;
8) $y^2+3y-5=0$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Десятицифрове число складається з десяти **різних** цифр. Якщо його помножити на 2, отримаємо інше десятицифрове число, яке також складається з десяти **різних** цифр.
Знайдіть початкове число.

Розв'язання квадратного рівняння способом виділення квадрата двочлена містить громіздкі перетворення і не є зручним, особливо якщо другий коефіцієнт — непарне число. Тому було виведено формулу, за якою можна знайти корені квадратного рівняння. Виведення цієї формули для рівняння, записаного в загальному вигляді $ax^2+bx+c=0$, базується саме на способі виділення квадрата двочлена.

За означенням квадратного рівняння $a\neq 0$, тому помножимо обидві частини рівняння $ax^2+bx+c=0$ на $4a$ та виконаємо рівносильні перетворення. Отримаємо рівняння $4a^2x^2+4abx+4ac=0$, у якому виділимо квадрат двочлена: $\underbrace{(2ax)^2+2\cdot(2ax)\cdot b+b^2}_{\text{квадрат двочлена}}-b^2+4ac=0$. Звідси $(2ax+b)^2=b^2-4ac$.

Оскільки $b^2-4ac\geqslant 0$, запишемо: $(2ax+b)^2=\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2$.

Позначимо вираз b^2-4ac через D, тоді рівняння набуде вигляду $(2ax+b)^2=\left(\sqrt{D}\right)^2$, тобто $|2ax+b|=\sqrt{D}$, $2ax+b=\pm\sqrt{D}$, $2ax=-b\pm\sqrt{D}$. Звідси $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, де $D=b^2-4ac$.

Ця формула є загальною універсальною формулою для обчислення коренів квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

В алгебраїчному трактаті Аль-Хорезмі дано класифікацію лінійних і квадратних рівнянь. Автор виділив шість видів рівнянь. Трактат Аль-Хорезмі став першою книжкою, у якій систематично викладено класифікацію квадратних рівнянь і наведено формули для їх розв'язування.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Формула для обчислення коренів квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ \text{де}\ D=b^2-4ac.$$

Кількість розв'язків квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ залежить від знака виразу $D=b^2-4ac$. Якщо $D>0$, то значення кореня $\sqrt{D}$ існує і рівняння матиме два корені. Якщо $D<0$, то значення арифметичного кореня не існує, тому рівняння не матиме коренів. А ось у випадку, коли $D=0$, корені рівняння будуть рівними. У цьому разі кажуть, що рівняння має один розв'язок, а саме $x=-\dfrac{b}{2a}$.

СЛІД ЗНАТИ!

Якщо коефіцієнти a і c мають різні знаки, то рівняння $ax^2+bx+c=0$ завжди має корені.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$		
$D<0$	$D=0$	$D>0$
Рівняння **не має коренів**	Рівняння має **один корінь** $x=-\dfrac{b}{2a}$	Рівняння має **два корені** $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

Отже, за знаком виразу D визначають кількість коренів квадратного рівняння. Позначення D для виразу b^2-4ac є невипадковим, оскільки D — перша літера слова «discriminant», що в перекладі означає «той, що розрізняє». Сам вираз $D=b^2-4ac$ називають **дискримінантом**.

Розв'язання рівняння $ax^2+bx+c=0$ спрощується, якщо старший коефіцієнт $a=1$. Повне квадратне рівняння набуває вигляду $x^2+bx+c=0$ (зведене квадратне рівняння), тоді $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2}$, $D=b^2-4c$.

ПРИГАДАЙТЕ!
Квадратне рівняння, старший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають **зведеним**.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть рівняння $2x^2-x-3=0$, використовуючи формулу коренів квадратного рівняння.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо коефіцієнти квадратного рівняння.	Старший коефіцієнт $a=2$; другий коефіцієнт $b=-1$; вільний член $c=-3$
КРОК 2	Дискримінант рівняння обчислимо за формулою $D=b^2-4ac$ та порівняємо з нулем.	$D=(-1)^2-4\cdot2\cdot(-3)=1+24=25$; $D>0$; $\sqrt{D}=5$
КРОК 3	Знайдемо корені квадратного рівняння за формулою $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.	$x_{1,2}=\frac{1\pm5}{2\cdot2}$; $x_1=\frac{1+5}{4}=1\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1-5}{4}=-1$

Відповідь: $\left\{-1;\ 1\frac{1}{2}\right\}$.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $\frac{2}{3}x^2-2x-1=0$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Помножимо обидві частини рівняння на 3, щоб отримати рівняння з цілими коефіцієнтами.	$2x^2-6x-3=0$
КРОК 2	Визначимо коефіцієнти рівняння.	$a=2$, $b=-6$, $c=-3$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 3	Обчислимо дискримінант рівняння за формулою $D=b^2-4ac$.	$D=(-6)^2-4\cdot2\cdot(-3)$; $D=36+24=60$; $D>0$
КРОК 4	Обчислимо арифметичний квадратний корінь із дискримінанта.	$\sqrt{D}=\sqrt{60}=\sqrt{15\cdot4}=2\sqrt{15}$
КРОК 5	Знайдемо корені рівняння $2x^2-6x-3=0$ за формулою $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.	$x_{1,2}=\frac{6\pm2\sqrt{15}}{2\cdot2}$
КРОК 6	Спростимо одержаний вираз.	$x_{1,2}=\frac{\cancel{2}(3\pm\sqrt{15})}{\cancel{2}\cdot2}$; $x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$

Відповідь: $\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$.

ПРИГАДАЙТЕ!

$$|a|=\begin{cases}a, \text{ якщо } a\geqslant0,\\ -a, \text{ якщо } a<0\end{cases}$$

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Із доведенням поданої формули $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$, де $k=\frac{b}{2}$, $D_1=k^2-ac$, ви можете ознайомитися на сайті interactive.ranok.com.ua

СЛІД ЗНАТИ!

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-7x+10=0$;
2) $x^2-4x-32=0$;
3) $2x^2-7x+5=0$;
4) $4x^2+9x+2=0$;
5) $\frac{3}{4}x^2-3x+2=0$;
6) $3x^2-\frac{2}{5}x-1=0$;
7) $2x^2-7|x|+6=0$;
8) $5x^2+6|x|-11=0$.

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq0)$ другий коефіцієнт — парне число, тобто $b=2k$, то для визначення коренів цього рівняння можна використати спрощену формулу:

$$x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}, \text{ де } k=\frac{b}{2},\ D_1=k^2-ac.$$

ПРИКЛАД 4

Розв'яжіть рівняння $3x^2-2x-1=0$, використовуючи спрощену формулу визначення коренів.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо коефіцієнти даного рівняння.	$a=3$, $b=-2$, $c=-1$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Знайдемо D_1 за формулою $D_1 = k^2 - ac$, де $k = \frac{b}{2}$.	$k = \frac{b}{2} = -1$; $D_1 = (-1)^2 - 3\cdot(-1)$; $D_1 = 4$, $D_1 > 0$
КРОК 3	Обчислимо значення коренів рівняння за формулою $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}$.	$\sqrt{D_1} = 2$; $x_{1,2} = \frac{1 \pm 2}{3}$; $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}$

Відповідь: $-\frac{1}{3}$; 1.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 6x - 8 = 0$;
2) $x^2 + 8x + 12 = 0$;
3) $3x^2 - 4x - 4 = 0$;
4) $7x^2 + 2x - 5 = 0$;
5) $1{,}5x^2 - 4x + 3 = 0{,}5$;
6) $2{,}5x^2 + 2x - 0{,}5 = 4$;
7) $x^2\sqrt{2} - 8x + \sqrt{2} = 0$;
8) $x^2\sqrt{3} + 6x - \sqrt{3} = 0$.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Дізнатися, як за відомим коренем рівняння визначити його коефіцієнти, ви можете на сайті interactive.ranok.com.ua

ПРИКЛАД 5

Розв'яжіть рівняння $\frac{2x^2 - x}{3} - x = \frac{x^2 - x}{2} - 1$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Помножимо обидві частини даного рівняння на 6, тим самим отримаємо рівняння з цілими коефіцієнтами.	$\frac{2x^2 - x}{3} - x = \frac{x^2 - x}{2} - 1 \Big\vert \cdot 6$; $2(2x^2 - x) - 6x = 3(x^2 - x) - 6$
КРОК 2	Розкриємо дужки в отриманому рівнянні, перенесемо всі доданки в ліву частину рівняння та зведемо подібні доданки.	$4x^2 - 2x - 6x = 3x^2 - 3x - 6$; $4x^2 - 2x - 6x - 3x^2 + 3x + 6 = 0$; $x^2 - 5x + 6 = 0$
КРОК 3	Визначимо коефіцієнти отриманого рівняння.	$a = 1$, $b = -5$, $c = 6$
КРОК 4	Обчислимо дискримінант за формулою $D = b^2 - 4ac$.	$D = (-5)^2 - 4\cdot1\cdot6$; $D = 1$; $D > 0$
КРОК 5	Знайдемо корені рівняння за формулою $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.	$x = \frac{5 \pm 1}{2}$; $x_1 = \frac{5+1}{2}$, $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{5-1}{2}$, $x_2 = 2$

Відповідь: 2; 3.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Формули для розв'язування квадратних рівнянь за зразком Аль-Хорезмі в Європі були вперше викладені італійським математиком Леонардо Фібоначчі в «Книзі абака» (1202 р.).
- Загальне правило розв'язування квадратних рівнянь, зведених до вигляду $x^2+bx=c$, було сформульоване німецьким математиком Міхаелем Штіфелем лише в 1544 р.
- Лише у XVII ст., завдяки працям Жерара Дезарга, Рене Декарта, Ісаака Ньютона та інших учених, спосіб розв'язування квадратних рівнянь набув сучасного вигляду.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-4x}{6}=\frac{5}{6}$; 3) $\frac{x^2-3x}{4}=1$; 5) $\frac{2x^2+3}{5}-1=\frac{x^2+x}{2}-x$;

2) $\frac{x^2-6}{7}=\frac{x}{7}$; 4) $\frac{x^2+5x}{3}=2$; 6) $\frac{3x^2+1}{4}-x=\frac{2x^2-x}{3}+1$;

7) $\frac{x(x-1)}{6}-\frac{(x-3)^2}{2}=\frac{(x+4)(x+1)}{12}-1\frac{2}{3}$;

8) $\frac{(x+2)^2}{5}-\frac{(x-1)(x+3)}{10}=\frac{x(x-2)}{2}+2\frac{3}{10}$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Знайдіть дискримінант і визначте кількість коренів квадратного рівняння:

1) $x^2-x-3=0$; 3) $-y^2+6y-11=0$;

2) $5t^2-10t+5=0$; 4) $-\frac{2}{5}t^2+t+3=0$.

2 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+5x+6=0$; 3) $-2m^2+m-15=0$;

2) $t^2-t-3=0$; 4) $\frac{2}{3}a^2+2a-5=0$.

3 Зведіть до вигляду $ax^2+bx+c=0$ та розв'яжіть рівняння:

1) $(6x+5)^2-2x+30=31x(x+3)$;

2) $\frac{5a^2+a}{2}-\frac{2-a^2}{5}=\frac{25a^2-2a}{10}$.

4 Розв'яжіть рівняння:

1) $t^2-2\sqrt{3}t+2=0$; 2) $a^2+a\left(2+\sqrt{7}\right)+2\sqrt{7}=0$.

5 Складіть математичну модель задачі (рівняння), розв'яжіть задачу.

1) Гіпотенуза прямокутного трикутника на 4 см більша за один із катетів і на 25 % більша за інший. Знайдіть периметр цього трикутника.

2) Після завершення Всеукраїнського турніру юних математиків усі його учасники з різних міст України обмінялися між собою скайп-адресами. Визначте, скільки школярів взяли участь у турнірі, якщо був зареєстрований обмін 180 різними адресами.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Skype — система інтернет-телефонії, текстового та відеозв'язку. Зараз кількість користувачів Skype в усьому світі перевищує 500 млн.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $b^2 = 4ac$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має тільки один корінь.
2) Якщо $b^2 = 4ac + 1$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різні корені.
3) Якщо $b^2 - 4ac + 1 = 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має коренів.
4) Якщо перший корінь рівняння $x^2 = a$ задовольняє нерівність $0 < x < 12$, то другий корінь цього рівняння задовольняє нерівність $-12 < x < 0$.
5) Якщо один із коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює -1, то $a + c = b$.

Агата Мері Кларисса Маллоуен, відома як Агата Крісті, — англійська письменниця, один із найвідоміших авторів детективної прози. Її книжки накладом понад 4 млрд примірників видано більш ніж на 100 мовах світу.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 13

1 Виберіть старший коефіцієнт квадратного рівняння $-3x^2 + 5x + 9 = 0$.

А	Б	В	Г
9	5	−3	3

2 Розв'яжіть рівняння $5x^2 - 5 = 0$.

А	Б	В	Г
1	±1	5	±5

3 Розв'яжіть рівняння $x^2 - 6x = 0$.

А	Б	В	Г
−6	−6; 0	6	6; 0

4 Розв'яжіть рівняння $x^2 - 3x - 4 = 0$.

А	Б	В	Г
−1; 3	−4; 1	−1; 4	−3; 1

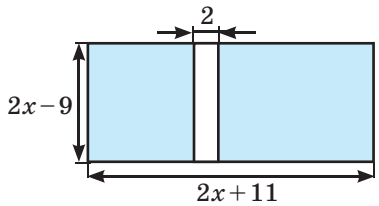
5 Скільки коренів має рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, якщо $b^2 - 4ac = -4$?

А	Жодного	В	Лише два
Б	Лише один	Г	Більше двох

6 Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів (А–Г).

1	$x^2 + 1 = 0$	А	Жодного
2	$\frac{x^2 + 2x}{5} = 0$	Б	Три
3	$(x^2 - 2)(x + 1) = 0$	В	Два
		Г	Один

7 На рисунку зображено план спортивного майданчика прямокутної форми, який розділено доріжкою. Знайдіть довжину цієї доріжки, якщо загальна площа земельної ділянки, виділеної для встановлення спортивних споруд (на рисунку її зафарбовано), дорівнює 319.



8 Розв'яжіть рівняння $(0{,}2x - 3)^2 - 36 = 0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Український живописець, народний художник України Іван Марчук увійшов до списку 100 найвизначніших геніїв сучасності за рейтингом британської газети The Daily Telegraph. Міжнародна академія сучасного мистецтва в Римі прийняла І. Марчука до лав «Золотої гільдії» діячів мистецтв світу та обрала почесним членом наукової ради.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ХУДОЖНЯ ВИСТАВКА»

На відкриття виставки київської художниці були запрошені відомі українські художники. Усі присутні на виставці художники обмінялися візитками. Усього було роздано 210 візиток.

1. Скільки художників, разом із авторкою робіт, було на урочистому відкритті виставки?
2. Скільки візиток кожний художник роздав своїм колегам?
3. Репортерка взяла інтерв'ю в кожного присутнього художника. Який загальний час тривали всі інтерв'ю, якщо кожний художник-гість говорив 3 хв, а авторка робіт — 5 хв?
4. Усім художникам, які прийшли на виставку, а також авторці робіт було вручено по одному подарунку. Скільки всього подарунків було підготовлено, якщо на урочисте відкриття прийшли 70 % усіх запрошених художників?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. У завданнях 1–2 розв'яжіть рівняння:

1) $(x+8)^2=49$; 2) $(4x+5)^2-16=0$.

У завданнях 3–4 розв'яжіть рівняння способом виділення квадрата двочлена:

3) $y^2+12y-6=0$; 4) $y^2-5y-10=0$.

Див. приклад 1

2. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2+2x-24=0$; 3) $2x^2+4x+\frac{5}{6}=0$;

2) $2x^2+5x-3=0$; 4) $3x^2-8|x|+5=0$.

Див. приклади 2, 3

3. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-8x+15=0$; 3) $3{,}5x^2-4x+4{,}5=4$;

2) $3x^2+2x-16=0$; 4) $x^2\sqrt{6}-6x-\sqrt{6}=0$.

Див. приклад 4

4. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-8}{5}=\frac{2x}{5}$; 3) $\frac{3x^2+2}{5}+1=\frac{x^2+5x}{2}-x$;

2) $\frac{x^2+5x}{7}=2$; 4) $\frac{(x+4)^2}{8}-\frac{(x+2)(x-1)}{4}=\frac{x(x+6)}{2}+4\frac{1}{2}$.

Див. приклад 5

Романи Агати Крісті значно ближчі до математики, ніж множення багатозначних чисел.

В. І. Арнольд

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Знайдіть значення виразів x_1+x_2 і $x_1\cdot x_2$, якщо:

1) $x_1=3-\sqrt{5}$, $x_2=3+\sqrt{5}$; 2) $x_1=\frac{-6-3\sqrt{7}}{4}$, $x_2=\frac{-6+3\sqrt{7}}{4}$.

В ОДИН КЛІК

За допомогою пакетів прикладних програм ви можете знайти корені будь-яких квадратних рівнянь.

Використаємо для цього програму Microsoft Excel, що входить до стандартного пакета Microsoft Office. Для запису арифметичних дій у програмі Microsoft Excel використовують такі позначення.

Дія	Математичний запис	Запис у програмі
Додавання	$+$	+
Віднімання	$-$	–
Множення	$\times$	*
Ділення	$\div$	/
Піднесення до другого степеня	x^2	POWER(X,2)
Квадратний корінь	$\sqrt{x}$	SQRT(X)
Дорівнює	$=$	=

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

На основі електронних таблиць Microsoft Excel можуть бути створені інформаційні системи фірми (підприємства), різного роду облікові та планові документи для бухгалтерів, економістів, менеджерів, юристів та інших спеціалістів. Застосування електронних таблиць значно спрощує роботу з даними.

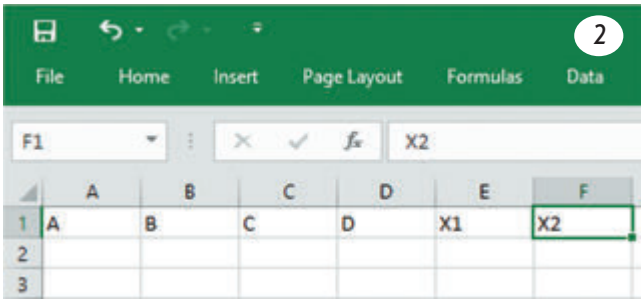
ПРИКЛАД 1

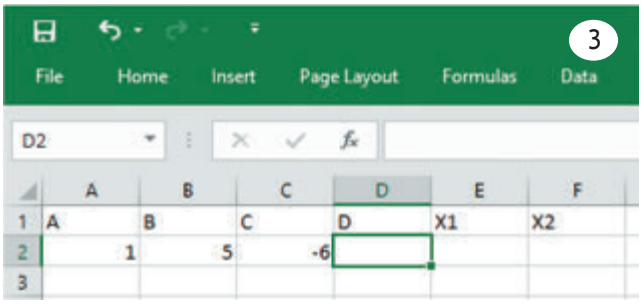
Розв'яжіть рівняння $x^2+5x-6=0$.

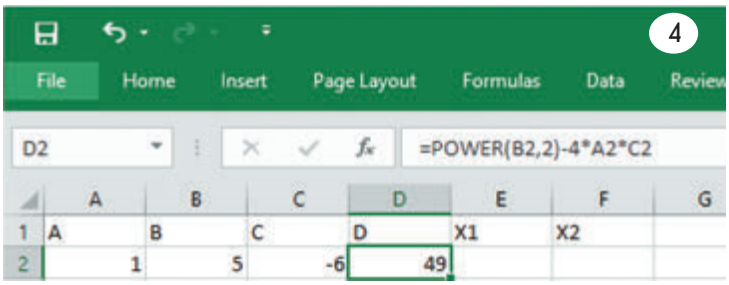
Алгоритм розв'язування рівняння

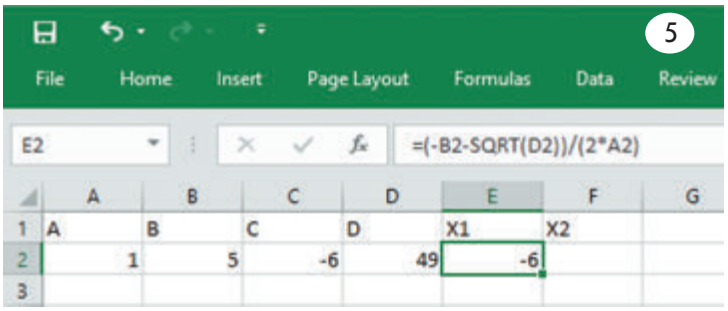
АЛГОРИТМ

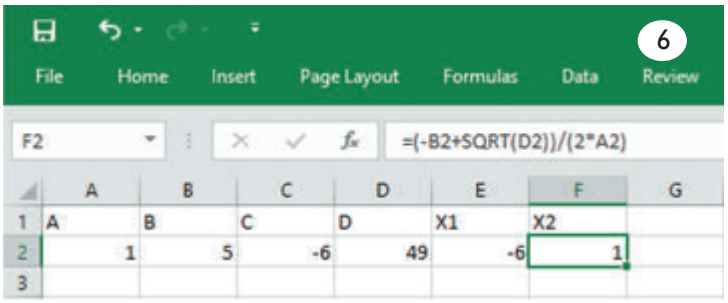
1. Запустіть програму Microsoft Excel.
2. Для зручності позначте літерами A, B і C перші три стовпці — вони міститимуть коефіцієнти квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$. Сусідні стовпці позначте D, X1 та X2 — вони міститимуть значення дискримінанта і розв'язки рівняння відповідно.
3. Заповніть клітинки другого рядка коефіцієнтами рівняння.











4. Виберіть клітинку D2, що відповідає дискримінанту рівняння, введіть у неї формулу =POWER(B2,2)-4*A2*C2 та натисніть Enter. (Індекс клітинки можна швидко ввести, натиснувши на неї.) Тепер клітинка D2 містить значення дискримінанта 49.

5. У клітинку E2 введіть формулу першого розв'язку квадратного рівняння =(-B2-SQRT(D2))/(2*A2).

6. У клітинку F2 введіть формулу другого розв'язку квадратного рівняння =(-B2+SQRT(D2))/(2*A2).

Обидва розв'язки будуть обчислені після введення формул. Зверніть увагу: значення дискримінанта при цьому додатне.

Відповідь: $x_1 = -6$, $x_2 = 1$.

Спробуйте змінити один із коефіцієнтів рівняння — розв'язки зміняться. Збережіть цей документ, щоб потім можна було обчислити розв'язки будь-якого квадратного рівняння, лише ввівши його коефіцієнти.

ДОСЛІДЖУЄМО

Приклади розв'язання рівнянь, поданих у таблиці, наведено на сайті interactive.ranok.com.ua. Опрацюйте їх та спробуйте зробити висновки зі своїх спостережень.

Рівняння	Коефіцієнти рівняння			D порівняти з нулем	Кількість коренів рівняння	x_1	x_2
	a	b	c				
$x^2+5x-6=0$							
$x^2+5x+9=0$							
$3x^2-588=0$				—			
$7x^2+112=0$				—			
$2x^2+5x=0$				—			
$11x^2-473x=0$				—			
$4x^2-4x+1=0$							

§ 22 ТЕОРЕМА ВІЄТА. ТЕОРЕМА, ОБЕРНЕНА ДО ТЕОРЕМИ ВІЄТА

ВЧОРА — Ви навчилися розв'язувати квадратні рівняння різними способами, у тому числі за допомогою спеціальних формул

СЬОГОДНІ — Ви дізнаєтеся, як можна підбирати корені квадратного рівняння

ЗАВЖДИ — Ви зможете розв'язувати квадратні рівняння, використовуючи цікаві властивості їх коефіцієнтів

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Розглянемо рівняння $2015x^2-2016x+1=0$. Якщо для його розв'язання застосувати одну з формул, поданих у § 21, це призведе до громіздких перетворень. Очевидно, що ці формули, хоча вони широко вживані та універсальні, у нашому випадку не є зручними. А чи існує спосіб спростити розв'язання?

Коефіцієнти квадратного тричлена мають кілька цікавих властивостей. Зокрема, таку: якщо у квадратному рівнянні $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ сума всіх коефіцієнтів дорівнює нулю, то один із коренів рівняння дорівнює 1. (Переконайтеся в цьому, підставивши в рівняння значення $x=1$.)

Для рівняння $2015x^2-2016x+1=0$ виконується рівність $a+b+c=0$. Отже, ми можемо відразу знайти один корінь: $x=1$. А як тоді знайти другий корінь і чи можна уникнути складних обчислень? Відповісти на ці запитання допоможе **теорема Вієта**, про яку ви дізнаєтеся з цього параграфа.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Перевірити свої знання та кмітливість допоможе вам участь у Міжнародному математичному конкурсі «Кенгуру». Цей конкурс уперше був проведений в Австралії, пізніше він став міжнародним. У 1997 р. до участі в ньому приєдналася Україна. Дізнатися більше можна за посиланням http://www.kangaroo.com.ua/

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Розглянемо подані квадратні рівняння, що записані у вигляді $ax^2+bx+c=0$, та спробуємо знайти зв'язок між сумою коренів, їх добутком і коефіцієнтами рівняння.

Рівняння	Корені	Сума коренів	Другий коефіцієнт (b)	Добуток коренів	Вільний член (c)
$x^2-5x-6=0$	6; −1	5	−5	−6	−6
$y^2+6y+8=0$	−4; −2	−6	6	8	8
$y^2-\frac{5}{2}y+1=0$	$\frac{1}{2}$; 2	$2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$	$-2\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}$	1	1

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- квадратний тричлен
- квадратне рівняння
- коефіцієнти квадратного рівняння
- сума коренів квадратного рівняння
- добуток коренів квадратного рівняння
- теорема Вієта

Ви напевно помітили, що сума коренів кожного рівняння дорівнює числу, протилежному другому коефіцієнту, а добуток коренів дорівнює вільному члену. Таку властивість має будь-яке зведене квадратне рівняння, якщо його корені існують. Ця властивість є однією з основних теорем алгебри і має власну назву — **теорема Вієта**.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Теорема Вієта

Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а їх добуток — вільному члену.

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $x^2+px+q=0$, то

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases}$$

Доведення

Розв'яжемо рівняння $x^2+px+q=0$, де старший коефіцієнт $a=1$, другий коефіцієнт $b=p$, вільний член $c=q$. Тоді $D=b^2-4ac=p^2-4q$. Розглянемо випадок, коли $D>0$, тобто рівняння має два корені. Тоді $x_1=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}$, $x_2=\frac{-p-\sqrt{D}}{2}$.

Сума коренів:

$$x_1+x_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}+\frac{-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{-p+\sqrt{D}-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{-2p}{2}=-p.$$

Добуток коренів:

$$x_1\cdot x_2=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}\cdot\frac{-p-\sqrt{D}}{2}=\frac{-p+\sqrt{D}}{2}\cdot\frac{-\left(p+\sqrt{D}\right)}{2}=$$

$$=\frac{\left(p-\sqrt{D}\right)\left(p+\sqrt{D}\right)}{4}=\frac{p^2-D}{4}=\frac{p^2-\left(p^2-4q\right)}{4}=\frac{p^2-p^2+4q}{4}=\frac{4q}{4}=q.$$

Отже, для зведеного квадратного рівняння $x^2+px+q=0$: $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$. Теорему доведено.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

$$(-a+b)\cdot(-a-b)=$$
$$=\left(-(a-b)\right)\cdot\left(-(a+b)\right)=$$
$$=(-1)\cdot(a-b)\cdot(-1)\cdot(a+b)=$$
$$=(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

Будь-яке квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ можна перетворити на зведене, поділивши обидві його частини на $a\neq 0$.

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ — **зведене квадратне рівняння.**

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Теорема Вієта для повного квадратного рівняння

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, то

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$$

ПРИКЛАД 1

Знайдіть коефіцієнт p і другий корінь x_2 квадратного рівняння $x^2+px-15=0$, якщо один із коренів $x_1=-5$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Запишемо теорему Вієта для заданого рівняння.	p — другий коефіцієнт; -15 — вільний член ; $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=-15 \end{cases}$
КРОК 2	Підставимо значення $x_1=-5$ у друге рівняння системи й знайдемо значення x_2.	$-5\cdot x_2=-15$; $x_2=3$
КРОК 3	Підставимо значення x_1 та x_2 в перше рівняння системи й знайдемо p.	$-5+3=-p$; $-p=-2$; $p=2$

Відповідь: $p=2$, $x_2=3$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 У завданнях 1–4 знайдіть коефіцієнти p і q квадратного рівняння $x^2+px+q=0$, якщо:

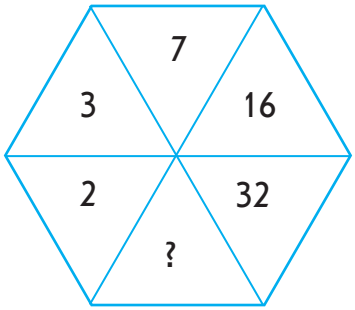
1) сума і добуток коренів рівняння відповідно дорівнюють 15 і 54;
2) сума і добуток коренів рівняння відповідно дорівнюють 7 і -44;
3) коренями рівняння є числа -3 і 13;
4) коренями рівняння є числа -9 і -10.

У завданнях 5–8 знайдіть невідомий коефіцієнт і один із коренів рівняння.

5) Знайдіть коефіцієнт p і другий корінь x_2 квадратного рівняння $x^2+px-28=0$, якщо один із коренів $x_1=4$.
6) Знайдіть коефіцієнт p і другий корінь x_2 квадратного рівняння $x^2+px+16=0$, якщо один із коренів $x_1=-8$.
7) Число $\frac{1}{3}$ є коренем рівняння $3x^2-4x+2c=0$. Знайдіть значення c і другий корінь рівняння.
8) Число $-\frac{3}{5}$ є коренем рівняння $5x^2+7x+6c=0$. Знайдіть значення c і другий корінь рівняння.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Яким числом треба замінити знак питання на рисунку?



Розв'язуючи окремі задачі, пов'язані з квадратними рівняннями, використовують теорему, обернену до теореми Вієта.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Теорема, обернена до теореми Вієта

Якщо числа x_1 та x_2 такі, що $x_1+x_2=-p$ і $x_1\cdot x_2=q$, то вони є коренями рівняння $x^2+px+q=0$.

Якщо $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q, \end{cases}$ то x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $x^2+px+q=0$.

Доведення

Оскільки $x_1+x_2=-p$, то $p=-(x_1+x_2)$; підставимо в рівняння $x^2+px+q=0$ замість p і q відповідні вирази. Отримаємо: $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$; $x^2-x_1\cdot x-x_2\cdot x+x_1x_2=0$.

Скористаємося способом групування:

$(x^2-x_1\cdot x)+(-x_2\cdot x+x_1x_2)=0$; $x(x-x_1)-x_2(x-x_1)=0$.

Винесемо за дужки спільний множник $(x-x_1)$. Звідси: $(x-x_1)(x-x_2)=0$. Добуток $(x-x_1)(x-x_2)$ дорівнює нулю, якщо $x-x_1=0$, тобто $x=x_1$, або $x-x_2=0$, тобто $x=x_2$. Таким чином, x_1 і x_2 є коренями рівняння.

Теорему доведено.

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Інший спосіб доведення цієї теореми ви можете знайти на сайті interactive.ranok.com.ua

ПРИКЛАД 2

Знайдіть суму і добуток коренів рівняння $5x^2-7x+2=0$. Визначте знаки коренів рівняння.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо коефіцієнти заданого рівняння.	$a=5$, $b=-7$, $c=2$
КРОК 2	Знайдемо дискримінант квадратного рівняння та порівняємо його з нулем.	$D=b^2-4ac$; $D=(-7)^2-4\cdot5\cdot2$; $D=49-40=9$; $D>0$
КРОК 3	За знаком D визначимо кількість коренів квадратного рівняння.	Якщо $D>0$, то $x_1\neq x_2$. $D>0$, тому рівняння має два різні корені $x_1\neq x_2$
КРОК 4	Поділимо обидві частини рівняння на 5 — отримаємо зведене рівняння.	$x^2-\frac{7}{5}x+\frac{2}{5}=0$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 5	Визначимо коефіцієнти зведеного квадратного рівняння $x^2+px+q=0$ та запишемо для нього теорему Вієта: $\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1x_2=q. \end{cases}$	$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{7}{5}, \\ x_1x_2=\frac{2}{5} \end{cases}$
КРОК 6	Звернемо увагу на знак добутку коренів і зробимо висновок: оскільки добуток додатний, то корені x_1 і x_2 мають один знак.	$x_1x_2=\frac{2}{5}$, $x_1x_2>0$, тоді $\begin{cases} x_1>0, \\ x_2>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1<0, \\ x_2<0 \end{cases}$
КРОК 7	Звернемо увагу на знак суми коренів.	$x_1+x_2=\frac{7}{5}$, $x_1+x_2>0$
КРОК 8	Оскільки сума коренів додатна й корені мають один знак, то вони обидва додатні.	$\begin{cases} x_1>0, \\ x_2>0 \end{cases}$

Відповідь: $x_1+x_2=\frac{7}{5}$; $x_1x_2=\frac{2}{5}$; обидва корені додатні.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 У завданнях 1–4 знайдіть суму й добуток коренів рівняння:

1) $x^2-6x+2=0$;
2) $x^2+3x-4=0$;
3) $3x^2-7x-6=0$;
4) $5x^2+10x+1=0$.

У завданнях 5–6 знайдіть суму й добуток коренів рівняння та визначте знаки коренів рівняння:

5) $4x^2-3x-7=0$;
6) $-2x^2+9x-1=0$.

У завданнях 7–8 визначте знаки коефіцієнтів b і c, якщо x_1 і x_2 — корені рівняння:

7) $2x^2+bx+c=0$, $x_1>0$, $x_2>0$;
8) $-3x^2+bx+c=0$, $x_1>0$, $x_2<0$, $|x_1|<|x_2|$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Якщо ви це маєте, то маєте ціле. Якщо ж ви цим із кимось поділитеся, то воно зникне зовсім. Що це?

СЛІД ЗНАТИ!

Визначення знаків коренів рівняння слід починати з аналізу знака добутку:

1) якщо $x_1x_2>0$, то $\begin{cases} x_1>0, \\ x_2>0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1<0, \\ x_2<0, \end{cases}$ тобто корені мають один знак;
2) якщо $x_1x_2<0$, то корені мають різні знаки.

ПРИКЛАД 3

Підберіть корені рівняння $t^2-6t-16=0$, використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Оскільки знаки старшого коефіцієнта і вільного члена різні, то задане рівняння має корені.	$a=1$, $c=-16$, $ac<0$, тому $D>0$
КРОК 2	Визначимо знак добутку коренів рівняння.	$t_1t_2=-16$, $t_1t_2<0$, тобто корені мають різні знаки
КРОК 3	Підберемо всі можливі розклади на множники числа (−16).	$-16=-16\cdot1=16\cdot(-1)$; $-16=-8\cdot2=8\cdot(-2)$; $-16=4\cdot(-4)$
КРОК 4	Серед п'яти отриманих варіантів (пар чисел −16 і 1, 16 і −1, −8 і 2, 8 і −2, −4 і 4) вибираємо ту пару, яка задовольняє умову $x_1+x_2=6$.	$x_1=8$, $x_2=-2$ — такі числа, що $x_1+x_2=6$

Відповідь: $x_1=8$, $x_2=-2$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 У завданнях 1–4 перевірте, чи є коренями рівняння:

1) $x^2-13x+36=0$ числа 4 і 9;
2) $x^2+15x-34=0$ числа −2 і 17;
3) $2x^2-3x-5=0$ числа −1 і 2,5;
4) $3x^2+x-4=0$ числа $-\frac{1}{3}$ і 1.

У завданнях 5–8 розв'яжіть рівняння:

5) $x^2-11x-60=0$;
6) $x^2-15x+56=0$;
7) $2x^2-9x+7=0$;
8) $10x^2-x-11=0$.

ПРИКЛАД 4

Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, коренями якого є $x_1=-2\frac{1}{2}$ і $x_2=4$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	За теоремою Вієта маємо: якщо числа x_1 і x_2 є коренями квадратного рівняння $x^2+px+q=0$, то $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$. Отже, знайдемо суму і добуток заданих чисел.	$-p=x_1+x_2=-2\frac{1}{2}+4=1\frac{1}{2}$, тоді $p=-1\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$; $q=x_1\cdot x_2=-2\frac{1}{2}\cdot4=-\frac{5}{2}\cdot4=-10$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Підставимо в рівняння $x^2+px+q=0$ отримані значення p і q.	$x^2+\left(-\frac{3}{2}\right)x+(-10)=0$
КРОК 3	Розкриємо дужки в отриманому рівнянні.	$x^2-\frac{3}{2}x-10=0$
КРОК 4	Помножимо обидві частини останнього рівняння на 2, щоб отримати рівняння з цілими коефіцієнтами.	$x^2-\frac{3}{2}x-10=0 \mid \cdot 2$; $2x^2-3x-20=0$

Відповідь: $2x^2-3x-20=0$.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 У завданнях 1–6 складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

1) 6 і 10;
2) −8 і 9;
3) $-1\frac{1}{3}$ і 3;
4) −4 і $2\frac{1}{4}$;
5) $\frac{2-\sqrt{3}}{3}$ і $\frac{2+\sqrt{3}}{3}$;
6) $\frac{7-\sqrt{2}}{2}$ і $\frac{7+\sqrt{2}}{2}$.

У завданнях 7–8 складіть квадратне рівняння, корені якого:

7) на 2 більші за відповідні корені рівняння $x^2-9x+2=0$;

8) на 4 менші за відповідні корені рівняння $x^2+4x-10=0$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Визначте, за яким принципом побудовано послідовність 8 2 9 0 1 5 7 3 4 6.

ПРИКЛАД 5

Не обчислюючи значень коренів x_1 і x_2 квадратного рівняння $2x^2-4x+1=0$, знайдіть значення виразу $x_1^2+x_2^2$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо коефіцієнти заданого рівняння. За теоремою Вієта для $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ маємо: $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$	$a=2$, $b=-4$, $c=1$; $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{-4}{2}=2, \\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{2} \end{cases}$
КРОК 2	Виділимо квадрат двочлена у виразі $x_1^2+x_2^2$.	$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$
КРОК 3	Підставимо значення суми та добутку коренів квадратного рівняння у вираз, отриманий на кроці 2, і виконаємо відповідні дії.	$x_1^2+x_2^2=2^2-2\cdot\frac{1}{2}=4-1=3$

Відповідь: 3.

ПРИГАДАЙТЕ!

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

ТРЕНУЄМОСЯ

5 Відомо, що x_1 і x_2 — корені заданого квадратного рівняння. Не розв'язуючи його, знайдіть значення виразу:

1) $x_1+x_2+x_1x_2$, якщо задано рівняння $x^2-9x+3=0$;
2) $x_1x_2+x_1+x_2$, якщо задано рівняння $x^2-3x-8=0$;
3) $x_1x_2+3x_1+3x_2$, якщо задано рівняння $x^2+5x-12=0$;
4) $4x_1+4x_2+x_1x_2$, якщо задано рівняння $x^2+14x+7=0$;
5) $6x_1x_2-x_1-x_2$, якщо задано рівняння $3x^2+12x-4=0$;
6) $x_1x_2-8x_1-8x_2$, якщо задано рівняння $4x^2+15x+8=0$;
7) $4x_1^2+4x_2^2$, якщо задано рівняння $2x^2-6x+3=0$;
8) $25(x_1-x_2)^2$, якщо задано рівняння $5x^2-3x-4=0$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Не розв'язуючи рівняння, визначте суму і добуток його коренів та знаки коренів:

1) $x^2-5x-13=0$;
2) $y^2+8y+1=0$;
3) $4t^2-18t+3=0$;
4) $-\frac{1}{2}x^2+x+17=0$.

2 Користуючись теоремою Вієта, складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, якщо відомі корені x_1 та x_2 рівняння:

1) $x_1=-6$, $x_2=5$;
2) $x_1=-1\frac{1}{3}$, $x_2=-\frac{2}{3}$;
3) $x_1=\sqrt{5}$, $x_2=2\sqrt{5}$;
4) $x_1=4-\sqrt{3}$, $x_2=4+\sqrt{3}$.

3 Знайдіть коефіцієнт k і корінь x_1 квадратного рівняння $2x^2+kx-42=0$, якщо $x_2=-7$.

4 Число $-\frac{1}{3}$ є коренем квадратного рівняння $x^2-\frac{2}{3}x-\frac{a}{2}=0$. Знайдіть a.

5 Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, визначте корені рівняння:

1) $x^2+5x-14=0$;
2) $x^2+11x+30$;
3) $x^2-14x-15=0$;
4) $x^2-2015x-2016=0$;
5) $x^2+2016x+2015=0$;
6) $x^2+3{,}2x-4{,}2=0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Властивості коефіцієнтів квадратного рівняння

1) Якщо для коефіцієнтів рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ виконується рівність $a+b+c=0$, то $x_1=1$, $x_2=\frac{c}{a}$.

2) Якщо для коефіцієнтів рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ виконується рівність $a+c=b$, то $x_1=-1$, $x_2=-\frac{c}{a}$.

З іншими властивостями коефіцієнтів квадратного рівняння ви можете ознайомитися на сайті interactive.ranok.com.ua

6 Не розв'язуючи квадратне рівняння $3x^2 - x - 7 = 0$, знайдіть значення виразу $5x_1 + 5x_2 - 2x_1x_2$, де x_1 і x_2 — корені цього рівняння.

7 Корені квадратного рівняння $\frac{1}{2}t^2 + 10t + k = 0$ задовольняють умову $\frac{1}{9}t_1 + \frac{1}{2}t_2 = -3$. Знайдіть корені рівняння та значення k.

8 Не розв'язуючи квадратне рівняння $x^2 - x - 1 = 0$, знайдіть значення виразу:

1) $x_1 + x_2$;
2) $x_1 \cdot x_2$;
3) $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$;
4) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
5) $x_1^2 + x_2^2$;
6) $x_1^3 + x_2^3$.

9 Не обчислюючи значень коренів рівняння $3x^2 - 2x - 5 = 0$, знайдіть:

1) $x_1 + x_2$;
2) $x_1 \cdot x_2$;
3) $x_1^{-1} + x_2^{-1}$;
4) $x_1^2 + x_2^2$;
5) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$;
6) $x_1^3 + x_2^3$.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

1) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1x_2)$;
2) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2 = x_1x_2(x_1 + x_2)$;
3) $x_1^{-1} + x_2^{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$;
4) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)$.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Квадратне рівняння $x^2 - 5x + 40 = 0$ має два корені, сума яких дорівнює 5.
2) Квадратне рівняння $x^2 + 2x + 10 = 0$ має два корені, добуток яких дорівнює 10.
3) Якщо числа 7 і −4 є коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $p < 0$.
4) Якщо числа −6 і −8 є коренями квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, то $q > 0$.
5) Якщо один із коренів рівняння $x^2 + px + q = 0$ дорівнює 0, то $q = 0$.

Значний внесок у створення системи алгебраїчної символіки і вдосконалення теорії алгебраїчних рівнянь зробив видатний французький математик Франсуа Вієт (1540–1603). Назву «алгебра» Вієт у своїх працях замінив словами «аналітичне мистецтво». Під час франко-іспанської війни Франсуа Вієт знайшов ключ до шифру, яким користувалися іспанці для таємного листування, внаслідок чого був звинувачений у чаклунстві, адже іспанці вважали, що розкрити їхній шифр не під силу людському розуму.

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

САМОСТІЙНА РОБОТА № 14

1 Знайдіть суму коренів квадратного рівняння $x^2-8x-3=0$, використовуючи теорему Вієта.

А	Б	В	Г
8	−8	−3	3

2 Знайдіть добуток коренів квадратного рівняння $x^2-2x-7=0$, використовуючи теорему Вієта.

А	Б	В	Г
2	−2	−7	7

3 Один із коренів квадратного рівняння $x^2-9x+q=0$ дорівнює 1. Використовуючи теорему Вієта, знайдіть другий корінь.

А	Б	В	Г
−10	9	−9	8

4 Один із коренів квадратного рівняння $x^2+px+12=0$ дорівнює 4. Використовуючи теорему Вієта, знайдіть другий корінь.

А	Б	В	Г
−3	3	8	−16

5 Знайдіть значення m, при якому сума коренів рівняння $3x^2+mx-2=0$ дорівнює 5.

А	Б	В	Г
−15	15	−5	5

6 До кожного початку речення (1–3) доберіть його закінчення (А–Г) так, щоб утворилося правильне твердження.

1. Якщо обидва корені рівняння $x^2+px+q=0$ додатні, то...
2. Якщо обидва корені рівняння $x^2+px+q=0$ від'ємні, то...
3. Якщо перший корінь рівняння $x^2+px+q=0$ задовольняє нерівність $x<-1$, а другий корінь — нерівність $0<x<1$, то...

А $p>0$, $q>0$

Б $p>0$, $q<0$

В $p<0$, $q>0$

Г $p<0$, $q<0$

7 Відомо, що квадратне рівняння $x^2-14x+c=0$, $c\neq 0$, має два різні корені x_1 та x_2. Знайдіть значення виразу:

1) $x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$;

2) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

8 Фабрика виготовляє пластикові столи та стільці. На виготовлення одного стільця витрачається x кг пластику, одного стола — на 3 кг більше. Відомо, що на виготовлення x стільців та 5 столів витратили 39 кг пластику.

1) Складіть рівняння, за яким можна визначити x.
2) Визначте, скільки кілограмів пластику витрачається на один стілець.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ЕКСКУРСІЯ ДО ОСТРОЗЬКОЇ АКАДЕМІЇ»

Для перевезення 120 туристів до музею історії Острозької академії було замовлено певну кількість мікроавтобусів. Автобусний парк виділив мікроавтобуси з меншою кількістю посадочних місць, тому у кожний мікроавтобус сіло на 2 особи менше, ніж планувалося спочатку. Відомо, що додатково було замовлено ще 5 таких мікроавтобусів.

Дайте відповіді на запитання.

1. Яку кількість мікроавтобусів для перевезення всіх туристів було замовлено спочатку?
2. Скільки пасажирів поїхало до музею в кожному мікроавтобусі, не враховуючи водія?

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Національний університет «Острозька академія» є наступником першого вищого навчального закладу східнослов'янських народів — Острозької слов'яно-греко-латинської академії, заснованої у 1576 р. Сьогодні в академії 5 факультетів (15 спеціальностей), до неї вступають абітурієнти зі всіх куточків України.

Дізнатися більше можна за посиланням http://www.oa.edu.ua/ua/info/word

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Знайдіть значення:
   1) коефіцієнтів p і q рівняння $x^2+px+q=0$, якщо сума і добуток його коренів відповідно дорівнюють -19 і 48;
   2) коефіцієнтів p і q рівняння $x^2+px+q=0$, якщо його коренями є числа 6 і 14;
   3) коефіцієнта p і другого кореня x_2 квадратного рівняння $x^2+px-35=0$, якщо один із коренів $x_1=-7$;
   4) вільного члена c і другого кореня рівняння $4x^2-9x+5c=0$, якщо одним із коренів є число $\frac{3}{4}$.

Див. приклад 1

2. Визначте суму й добуток коренів рівняння та з'ясуйте знаки коренів:
   1) $x^2-8x-9=0$;
   2) $3x^2+9x-2=0$;
   3) $2x^2-8x+3=0$;
   4) $5x^2+8x+2=0$.

Див. приклад 2

3. З'ясуйте знаки коефіцієнтів b і c, якщо x_1 і x_2 — корені рівняння:
   1) $6x^2+bx+c=0$, причому $x_1<0$, $x_2<0$;
   2) $-8x^2+bx+c=0$, причому $x_1>0$, $x_2<0$, $|x_1|>|x_2|$.

Див. приклад 2

4 Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта:

1) перевірте, чи є коренями рівняння $x^2+x-30=0$ числа -5 і 6;
2) перевірте, чи є коренями рівняння $3x^2-10x+3=0$ числа $\frac{1}{3}$ і 3;
3) розв'яжіть рівняння $x^2+4x-45=0$;
4) розв'яжіть рівняння $3x^2+7x-10=0$.

Див. приклад 3

5 Складіть квадратне рівняння:

1) з цілими коефіцієнтами, якщо його корені дорівнюють -7 і 3;
2) з цілими коефіцієнтами, якщо його корені дорівнюють $-1\frac{1}{9}$ і 9;
3) з цілими коефіцієнтами, якщо його корені дорівнюють $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ і $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$;
4) якщо його корені на 6 більші за відповідні корені рівняння $x^2+10x+1=0$.

Див. приклад 4

6 Відомо, що x_1 і x_2 — корені заданого квадратного рівняння. Не розв'язуючи його, знайдіть значення виразу:

1) $x_1+x_2+x_1x_2$, якщо задано рівняння $x^2+5x-9=0$;
2) $2x_1+2x_2+x_1x_2$, якщо задано рівняння $x^2-16x+8=0$;
3) $15x_1x_2-x_1-x_2$, якщо задано рівняння $5x^2-10x+1=0$;
4) $9x_1^2+9x_2^2$, якщо задано рівняння $3x^2+5x-4=0$.

Див. приклад 5

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Скоротіть дріб:

1) $\frac{3(x-4)}{x-4}$, $x\neq 4$;
2) $\frac{10x-5}{2x-1}$, $x\neq 0{,}5$;
3) $\frac{x^2-1}{6x+6}$, $x\neq -1$;
4) $\frac{4x^2-1}{(2x+1)(x+5)}$, $x\neq -0{,}5$, $x\neq -5$.

Тут немає проблеми, яку не можна вирішити.

Франсуа Вієт

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 19—22

1 Ви дізналися, що таке квадратний тричлен, квадратне рівняння.

- **Квадратним рівнянням** називають рівняння виду $ax^2+bx+c=0$, де x — змінна, a, b, c — числа, причому $a\neq 0$.
- Квадратне рівняння, старший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають **зведеним**.
- **Квадратним тричленом** називають многочлен ax^2+bx+c, який міститься у лівій частині рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$.

Квадратний тричлен

$ax^2+bx+c=0$ — Квадратне рівняння

c — Вільний член

b — Другий коефіцієнт

a — Старший коефіцієнт, $a\neq 0$

2 Ви з'ясували, які квадратні рівняння називають неповними і як їх розв'язувати.

Квадратне рівняння називають **неповним**, якщо хоча б один із його коефіцієнтів b або c дорівнює нулю або $b=c=0$ при $a\neq 0$.

При $c=0$ отримуємо рівняння $ax^2+bx=0$, яке має два корені: $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$.

При $b=c=0$ отримуємо рівняння $ax^2=0$, яке має один корінь $x=0$.

При $b=0$ отримуємо рівняння $ax^2+c=0$.

- Якщо $-\frac{c}{a}>0$, рівняння має два корені:
$$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$
- Якщо $-\frac{c}{a}<0$, рівняння не має коренів.

3 Ви навчилися розв'язувати квадратні рівняння за допомогою формули коренів квадратного рівняння.

Квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ має корені $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, де $D=b^2-4ac$ — дискримінант квадратного рівняння.

- Якщо $D<0$, рівняння не має коренів.
- Якщо $D=0$, рівняння має один корінь:
$$x=-\frac{b}{2a}.$$
- Якщо $D>0$, рівняння має два корені:
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

4 Ви познайомилися з теоремою Вієта й теоремою, оберненою до теореми Вієта.

Теорема Вієта для зведеного квадратного рівняння

Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а їх добуток — вільному члену.

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $x^2+px+q=0$, то $\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\ x_1\cdot x_2=q.\end{cases}$

Теорема Вієта для повного квадратного рівняння

Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$, то $\begin{cases}x_1+x_2=-\frac{b}{a},\\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.\end{cases}$

Теорема, обернена до теореми Вієта для зведеного квадратного рівняння

Якщо числа x_1 і x_2 такі, що $\begin{cases}x_1+x_2=-p,\\ x_1\cdot x_2=q,\end{cases}$ то вони є коренями рівняння $x^2+px+q=0$.

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 5

Варіант 1

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Виконайте варіант 2 контрольної роботи на сайті interactive.ranok.com.ua

1 Розв'яжіть рівняння $x^2+8x=0$.

А	Б	В	Г
8	−8	−8; 0	8; 0

2 Розв'яжіть рівняння $x^2+16=0$.

А	Б	В	Г
Коренів немає	±4	4	−8

3 Користуючись теоремою Вієта, знайдіть добуток коренів квадратного рівняння $x^2-2x-9=0$.

А	Б	В	Г
9	−9	−2	2

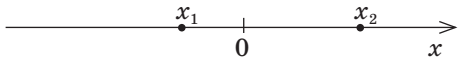
4 Скільки коренів має рівняння $x^2-2x+1=0$?

А	Б	В	Г
Жодного	Один	Два	Більше двох

5 Виберіть рівняння, коренем якого є число 2.

А	$x^2-2x-3=0$
Б	$(x+2)(1-x)=0$
В	$(x-2)(1+x)=0$
Г	$x^2+2x-3=0$

6 Корені x_1 і x_2 квадратного рівняння $x^2+px+q=0$ позначено точками на координатній прямій (див. рисунок). Визначте знаки коефіцієнтів p і q.



А	Б	В	Г
$p>0$, $q>0$	$p>0$, $q<0$	$p<0$, $q>0$	$p<0$, $q<0$

7 Розв'яжіть рівняння $3x^2-x-5=0$.

8 Розв'яжіть рівняння $x(x+7)=5(x+3)$.

9 Підприємство виготовляє маленькі та великі пакети з ламінованого картону. На виготовлення маленького пакета витрачається x г картону, а великого — удвічі більше. Відомо, що на виготовлення x маленьких та 2 великих пакетів витратили 2,7 кг картону.

1) Складіть рівняння для визначення x.
2) Знайдіть x (для розв'язання квадратного рівняння використайте теорему Вієта й розклад $2700=54\cdot 50$).
3) Визначте, скільки грамів картону витрачається на великий пакет.

10 Один із коренів квадратного рівняння $x^2+6x-15m=0$ на 4 менший, ніж інший. Знайдіть корені рівняння та значення m.

Бонусне завдання. Знайдіть усі значення a, при яких рівняння $x^2+ax-3a=0$ має лише один корінь.

§ 23 РОЗКЛАДАННЯ КВАДРАТНОГО ТРИЧЛЕНА НА МНОЖНИКИ

ВЧОРА — Ви познайомилися з поняттям квадратного тричлена, дізналися, як знайти його корені, навчилися виділяти повний квадрат у квадратному тричлені

СЬОГОДНІ — Ви навчитеся розкладати квадратний тричлен на множники, знаючи його корені

ЗАВЖДИ — Ви зможете знаходити раціональні шляхи розв'язування вправ і задач, використовуючи формулу розкладання многочлена на множники

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Учні 9-го класу підготували завдання для математичного турніру серед учнів 8-го класу. Одне із завдань полягало в тому, щоб знайти певну закономірність у першому рядку наведеної таблиці, а потім, застосовуючи цю закономірність, визначити, які вирази потрібно записати замість знаків питання в інших рядках таблиці.

Квадратний тричлен	Корені квадратного тричлена	Розклад квадратного тричлена на множники
$y^2-10y+24$	$y_1=4$, $y_2=6$	$(y-4)(y-6)$
m^2+3m+2	?	?
x^2-2x-8	?	?
$t^2-8t+16$	?	?

Розглянемо перший рядок таблиці. У другому стовпчику містяться корені $y_1=4$ та $y_2=6$ квадратного тричлена $y^2-10y+24$, у третьому — його розклад на множники із застосуванням цих коренів. Отже, квадратний тричлен $y^2-10y+24$ дорівнює добутку $(y-y_1)(y-y_2)$.

Ми висунули припущення, що існує формула, за допомогою якої можна розкласти на множники квадратний тричлен, якщо відомі його корені.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Під час перетворення раціональних виразів ви скорочуватимете дроби, чисельники або знаменники яких містять многочлени. Проте розкладати певні многочлени на множники не завжди просто.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

В Україні проводиться багато різноманітних математичних змагань, у яких ви можете взяти участь. Це, наприклад, Всеукраїнський турнір юних математиків імені професора М. Й. Ядренка (ТЮМ), Всеукраїнський турнір математичних боїв імені академіка І. І. Ляшка, Інтернет-олімпіада з математики, Міжнародний чемпіонат із розв'язування логічних математичних задач, Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики й інформатики «Турнір чемпіонів».

Дізнатися більше ви можете за посиланнями:
http://matholymp.org.ua/,
http://complex.edu.vn.ua/,
http://ukrtym.blogspot.com/

Наприклад, знаменник дробу $\frac{n^2+3n-10}{n^2-4}$ можна розкласти на множники за формулою різниці квадратів. Розкладемо на множники тричлен $n^2+3n-10$, застосувавши спосіб групування: $n^2+3n-10=n^2+(5n-2n)-10=n^2+5n-2n-10=(n^2+5n)-(2n+10)=n(n+5)-2(n+5)=(n+5)(n-2)$.

Таким чином, $n^2+3n-10=(n+5)(n-2)$.

Знайдемо корені квадратного тричлена $n^2+3n-10$, розв'язавши рівняння $n^2+3n-10=0$ за формулою коренів квадратного рівняння. Маємо: $n=-5$, $n=2$. Тепер скористаємося припущенням, висунутим у ході аналізу актуальної задачі: $n^2+3n-10=(n-(-5))(n-2)=(n+5)(n-2)$.

Висновок: існує формула, яка дозволяє розкласти квадратний тричлен на множники, якщо відомі його корені.

ПРИГАДАЙТЕ!

Способи розкладання на множники:

- винесення спільного множника за дужки
- спосіб групування
- застосування формул скороченого множення

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Розкладання квадратного тричлена на множники

Якщо x_1 та x_2 — корені квадратного тричлена ax^2+bx+c $(a\neq 0)$, то його можна розкласти на множники за формулою $a(x-x_1)(x-x_2)$.

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

де $a\neq 0$, x_1, x_2 — корені тричлена ax^2+bx+c

Доведення

Позначимо квадратний тричлен ax^2+bx+c, де $a\neq 0$, через M. Нехай x_1 та x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$, де $a\neq 0$ (тобто й корені квадратного тричлена M).

Тоді за теоремою Вієта $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$

Оскільки $a\neq 0$, у квадратному рівнянні $ax^2+bx+c=0$ винесемо за дужки коефіцієнт a. Маємо: $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$.

Підставимо в отримане рівняння замість $\frac{b}{a}$ вираз $-(x_1+x_2)$, замість $\frac{c}{a}$ — вираз $(x_1\cdot x_2)$.

Тоді квадратний тричлен M матиме вигляд:

$$M=a\left(x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2\right);$$

$$M=a\left(x^2-x\cdot x_1-x\cdot x_2+x_1x_2\right).$$

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- квадратний тричлен
- лінійні множники
- способи розкладання на множники
- розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

Розкладемо вираз у дужках на множники способом групування:

$$M = a\left(\left(x^2 - x \cdot x_1\right) + \left(-x \cdot x_2 + x_1 x_2\right)\right);$$

$$M = a\left(x\left(x - x_1\right) - x_2\left(x - x_1\right)\right).$$

Звідси $M = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$ — ми отримали вираз, записаний у вигляді добутку.

Таким чином, $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$, тобто квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ розкладено на множники, що й треба було довести.

АЛГОРИТМ

Алгоритм розкладання квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, на лінійні множники

1. Знайдіть корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, тобто розв'яжіть відповідне квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.
2. Якщо рівняння має корені x_1 і x_2, то:
   - при $x_1 \neq x_2$ маємо: $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$;
   - при $x_1 = x_2 = x_0$ маємо: $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_0\right)^2$.
3. Якщо рівняння не має коренів, то квадратний тричлен неможливо розкласти на лінійні множники.

ПРИГАДАЙТЕ!

Корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ — це корені відповідного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

ПРИКЛАД 1

Розкладіть на множники квадратний тричлен $x^2 - 6x - 7$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо коефіцієнти даного квадратного тричлена.	$a = 1$, $b = -6$, $c = -7$
КРОК 2	Знайдемо корені квадратного тричлена $x^2 - 6x - 7$.	$x^2 - 6x - 7 = 0$; за теоремою Вієта $\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ x_1 \cdot x_2 = -7, \end{cases}$ тоді $x_1 = -1$, $x_2 = 7$
КРОК 3	Розкладемо тричлен на множники, скориставшись формулою $ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right)$, $a \neq 0$.	$x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1)$

Відповідь: $(x - 7)(x + 1)$.

ПРИКЛАД 2

Розкладіть на множники квадратний тричлен $3x^2 - x - 2$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо коефіцієнти заданого квадратного тричлена.	$a = 3$, $b = -1$, $c = -2$
КРОК 2	Знайдемо корені квадратного тричлена $3x^2 - x - 2$.	$3x^2 - x - 2 = 0$; $D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)$; $D = 1 + 24 = 25$; $\sqrt{D} = 5$; $x_{1,2} = \frac{1 \pm 5}{6}$; $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{2}{3}$
КРОК 3	Розкладемо тричлен на множники за формулою $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, $a \neq 0$.	$3x^2 - x - 2 = 3(x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right)$
КРОК 4	Для спрощення отриманого виразу помножимо вираз у других дужках на коефіцієнт 3.	$3(x - 1)\left(x + \frac{2}{3}\right) = (x - 1)(3x + 2)$

Відповідь: $(x - 1)(3x + 2)$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 У завданнях 1–2 визначте, чи можна розкласти на лінійні множники квадратний тричлен:

1) $x^2 + 2x - 6$;
2) $x^2 - 3x + 5$.

У завданнях 3–6 розкладіть на множники квадратний тричлен:

3) $x^2 - 2x - 24$;
4) $x^2 + 17x + 42$;
5) $5x^2 - 3x - 8$;
6) $-2x^2 + 9x - 9$.

У завданнях 7–8 знайдіть значення c, при якому розклад на множники даного квадратного тричлена містить множник A:

7) $2x^2 - 9x + c$; $A = (x - 4)$;
8) $-3x^2 + cx + 8$; $A = (x + 2)$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Щоб знайти ОДЗ дробу, його знаменник зручно розкласти на множники

ПРИКЛАД 3

Скоротіть дріб $\frac{d^2 - 2d - 3}{d^2 + d - 12}$ та знайдіть його значення, якщо $d = -0{,}5$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Визначимо, за яких умов знаменник даного дробу не дорівнює нулю.	$d^2+d-12\neq 0$
КРОК 2	Визначимо коефіцієнти квадратного тричлена d^2+d-12 і знайдемо його корені. Розкладемо на множники знаменник дробу, використовуючи формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, $a\neq 0$.	$a=1$, $b=1$, $c=-12$; $d^2+d-12=0$; $D=1^2-4\cdot 1\cdot(-12)$; $D=49$; $\sqrt{D}=7$; $d=\frac{-1\pm 7}{2}$; $d_1=3$, $d_2=-4$. Тоді $d^2+d-12=(d+4)(d-3)$
КРОК 3	Отже, ми можемо записати ОДЗ заданого дробу.	ОДЗ: $d\neq -4$, $d\neq 3$
КРОК 4	Розкладемо на множники чисельник дробу: знайдемо корені тричлена d^2-2d-3 (за формулою $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$ для парного другого коефіцієнта) і застосуємо формулу $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, $a\neq 0$.	$a=1$, $b=-2$, $c=-3$, $k=-1$; $d^2-2d-3=0$; $D_1=(-1)^2-1\cdot(-3)$, $D_1=4$, $\sqrt{D_1}=2$, $d_1=-1$, $d_2=3$. Тоді $d^2-2d-3=(d+1)(d-3)$
КРОК 5	Запишемо дріб з урахуванням отриманих розкладів та скоротимо його.	$\frac{d^2-2d-3}{d^2+d-12}=\frac{(d-3)(d+1)}{(d+4)(d-3)}=\frac{d+1}{d+4}$
КРОК 6	Обчислимо значення отриманого дробу, підставивши значення $d=-0{,}5$.	$\frac{d+1}{d+4}=\frac{-0{,}5+1}{-0{,}5+4}=\frac{0{,}5}{3{,}5}=\frac{0{,}5\cdot 10}{3{,}5\cdot 10}=\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

Відповідь: $\frac{d+1}{d+4}$; $\frac{1}{7}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

ПРИГАДАЙТЕ!

$\frac{a\cdot M}{b\cdot M}=\frac{a}{b}$, де вираз $M\neq 0$

2 У завданнях 1–4 скоротіть дріб:

1) $\frac{x^2+2x-15}{x+5}$;

2) $\frac{x^2-12x+20}{x^2-2x}$;

3) $\frac{x^2-25}{x^2+3x-10}$;

4) $\frac{2x^2+x-6}{6x^2-11x+3}$.

У завданнях 5–8 скоротіть дріб та обчисліть його значення при заданому значенні x:

5) $\frac{x^2+2x-8}{x-2}$, $x=3$;

6) $\frac{x^2-7x+6}{3x-18}$, $x=0{,}7$;

7) $\frac{x^2-10x+24}{x^2-3x-4}$, $x=-0{,}5$;

8) $\frac{4x^3-12x^2+5x}{2x^3+3x^2-4x}$, $x=\sqrt{2}-4$.

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Визначте, чи можна розкласти на множники квадратний тричлен:

1) $x^2+5x-10$;
2) $4m^2-4m+1$;
3) $\frac{1}{3}t^2+t-2\sqrt{3}$;
4) $-y^2+y+\frac{2}{5}$;
5) $-2a^2+a-3$;
6) $-m^2+4m+12$.

2 Розкладіть на множники квадратний тричлен:

1) x^2-x-42;
2) $-p^2-p+12$;
3) $-6x^2+13x-6$;
4) $2y^2+5y-3$;
5) $3a^2-11a-4$;
6) $t^2-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}$.

3 Скоротіть дріб та знайдіть його значення при заданих значеннях змінної:

1) $\frac{x^2-5x+6}{4-x^2}$, $x=-3$;
2) $\frac{20+a-a^2}{a^2+3a-40}$, $a=2$;
3) $\frac{2x^2-9x-18}{x^2+5x-66}$, $x=-12$;
4) $\frac{4m^2-9m+2}{4m^2+7m-2}$, $m=6$.

4 Спростіть вираз:

1) $\left(\frac{a^2+2a-3}{a^2-1}+\frac{a^2+a-2}{a^2-a-6}\right)\cdot\frac{a^2-2a-3}{a^2-5}$;
2) $\frac{m^2+4m-12}{-m^2+5m-6}\cdot\left(m^2-6m+9\right)+3m+m^2$.

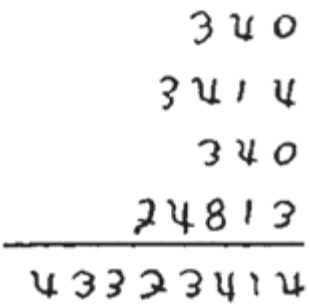
ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

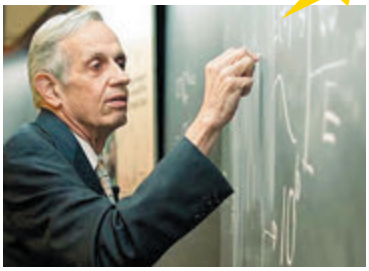
Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо $x_1=9$, $x_2=-3$ — корені квадратного тричлена x^2+px+q, то $x^2+px+q=(x-9)(x+3)$.
2) Квадратний тричлен $x^2-5x+10$ не можна розкласти на лінійні множники.
3) Якщо $ax^2+bx+c=6(x-4)(x+12)$, то $a=6$.
4) Якщо $ax^2+bx+c=2(x+3)(x-5)$, то $b^2-4ac>0$.
5) Якщо $ax^2+bx+c=5(x-2)^2$, то $c=20$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Криптографічне додавання. Перевірте правильність додавання, поданого на рисунку.





Джон Форбс Неш (англ. John Forbes Nash; 1928–2015) — американський математик, працював у галузі теорії ігор та диференціальної геометрії, отримав Нобелівську премію з економіки в 1994 р., Абелівську премію (математика) у 2015 р. Закінчивши свого часу Політехнічний інститут Карнегі, Джон Неш отримав від свого викладача короткий рекомендаційний лист: «Ця людина — геній». На основі біографії відомого вченого у 2001 р. було знято фільм «Ігри розуму».

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «СТРАХОВА КОМПАНІЯ»

Кожний менеджер страхової компанії веде однакову кількість справ клієнтів. Усього компанія веде 180 справ. Через реформування компанії трьох менеджерів було звільнено, а справи їхніх клієнтів розподілено між іншими менеджерами, причому кожен отримав 2 нові справи.

1. Скільки менеджерів було в компанії спочатку?
2. Скільки справ став вести кожний менеджер після реформування компанії?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Окремі елементи страхування були відомі за давніх часів. Спочатку страхування було пов'язане з перевезенням вантажів та з позиками. Одним із перших страхових полісів, що збереглися до нашого часу, був поліс на страхування вантажу, який перевозили з Марселя до Тріполі.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Розкладіть на множники квадратний тричлен, якщо це можливо:

   1) x^2-4x-5;
   2) $x^2+6x+10$;
   3) $3x^2-7x+4$;
   4) $-4x^2-3x+22$.

Див. приклади 1, 2

2. Скоротіть дріб:

   1) $\dfrac{x^2-10x+24}{x-4}$;
   2) $\dfrac{x^2+11x+30}{x^2+5x}$;
   3) $\dfrac{x^2-64}{x^2+5x-24}$;
   4) $\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-4x-3}$.

Див. приклад 3

3. Скоротіть дріб та обчисліть його значення при заданих значеннях x:

   1) $\dfrac{x^2+x-12}{x+4}$, $x=-3$;
   2) $\dfrac{x^2-4x-12}{2x+4}$, $x=-0{,}2$;
   3) $\dfrac{x^2+11x+18}{x^2+8x-9}$, $x=1{,}5$;
   4) $\dfrac{4x^3-4x^2-15x}{2x^3-11x^2+15x}$, $x=\sqrt{2}+3$.

Див. приклад 3

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

Спростіть вираз та знайдіть його значення:

1) $(a-3)(a+3)$, якщо $a=\sqrt{2}$;
2) b^2-4b+4, якщо $\sqrt{11}+2$;
3) x^4-22x^2+121, якщо $x=\sqrt{2}-3$;
4) z^4-25, якщо $z=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

У світі немає нічого, що можна знати напевно. Це — єдине, що я знаю напевно.

Джон Неш

§ 24 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО КВАДРАТНИХ

ВЧОРА — Ви навчилися розв'язувати лінійні та квадратні рівняння різними способами

СЬОГОДНІ — Ви навчитеся розв'язувати рівняння, що зводяться до квадратних та лінійних, використовуючи вже відомі вам способи

ЗАВЖДИ — Ви зможете зводити розв'язання рівнянь вищих степенів до розв'язання квадратних рівнянь

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Тести як засіб перевірки знань і вмінь кандидатів на певні посади використовували ще в Давньому Китаї.
- Тестування випускників шкіл уперше застосували в Америці. У 1901 р. понад 950 абітурієнтів пройшли тестування за стандартизованим тестом для вступу до коледжу, за результатами якого приймалося рішення про зарахування до закладу. Абітурієнти складали тест, який містив розділи англійською, французькою, німецькою, латинською та грецькою мовами, а також розділи з історії, математики, хімії та фізики.

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Учні 8-го класу проходять комп'ютерне тестування: спочатку виконують тест із алгебри, потім — із геометрії. Тест із алгебри містить певну кількість завдань, за правильне виконання яких можна набрати загальну суму 90 балів. Кількість завдань із геометрії на 5 менша, ніж з алгебри, і за правильне виконання всіх завдань можна набрати загальну суму 80 балів. Визначте кількість завдань із геометрії, якщо всі завдання в межах кожного тесту є рівноцінними, а одне завдання з геометрії оцінюється на 2 бали вище, ніж одне завдання з алгебри.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі у вигляді таблиці, позначивши кількість завдань з алгебри через x. Тоді кількість завдань із геометрії дорівнює $(x-5)$. Ураховуючи, що кількість балів за одне завдання дорівнює відношенню загальної кількості балів до кількості завдань, можна знайти кількість балів, якою оцінюється одне завдання з кожного предмета.

Предмет	Загальна кількість балів	Кількість завдань	Кількість балів за одне завдання
Алгебра	90	x	$\frac{90}{x}$
Геометрія	80	$x-5$	$\frac{80}{x-5}$, на 2 бали більше, ніж

За умовою задачі складемо рівняння: $\frac{80}{x-5}-\frac{90}{x}=2$.

Це дробово-раціональне рівняння, розв'язання якого зводиться до розв'язання квадратного рівняння.

ГОЛОВНА ІДЕЯ

Ви вже знаєте, які рівняння називають цілими, а які — дробовими. Квадратні рівняння належать до цілих рівнянь і відіграють важливу роль у курсі алгебри. Виявляється, значну частину як цілих, так і дробових рівнянь можна звести до квадратних. У цьому параграфі ви розглянете різні способи розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних.

Для розв'язування рівнянь вигляду $f(x)=0$ застосовують **спосіб розкладання лівої частини на множники.**

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- область допустимих значень рівняння
- дробово-раціональне рівняння
- способи розв'язування рівнянь
- біквадратне рівняння

СЛІД ЗНАТИ!

- $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$
- $abc=0$, якщо $a=0$, або $b=0$, або $c=0$

ПРИКЛАД 1

Розв'яжіть рівняння $2x^3-8x=0$.

Розв'язання

Застосуємо **винесення спільного множника за дужки** та використаємо **формули скороченого множення.**

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо ліву частину рівняння на множники.	$2x(x^2-4)=0$; $2x(x-2)(x+2)=0$
КРОК 2	Скористаємося правилом рівності добутку нулю.	$2x=0$, або $x-2=0$, або $x+2=0$; $x=0$; $x=2$; $x=-2$

Відповідь: $\{-2;0;2\}$.

ПРИКЛАД 2

Розв'яжіть рівняння $5x^3-2x^2+10x-4=0$.

Розв'язання

Застосуємо розкладання на множники **способом групування.**

Рівняння n-го степеня має не більше ніж n коренів

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Розкладемо ліву частину рівняння на множники способом групування.	$\underline{5x^3}-2x^2+\underline{10x}-4=0$; $(5x^3+10x)-(2x^2+4)=0$; $5x(x^2+2)-2(x^2+2)=0$; $(x^2+2)(5x-2)=0$

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Скористаємося правилом рівності добутку нулю: $ab=0$, якщо $a=0$ або $b=0$.	$x^2+2=0$ або $5x-2=0$; $x^2=-2$; розв'язків немає; $5x=2$; $x=\frac{2}{5}=0,4$

Відповідь: $x=0,4$.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Розв'яжіть рівняння:

1) $3x(x^2-9)=0$;
2) $7x(81-x^2)=0$;
3) $4x^3-4x=0$;
4) $50x-2x^3=0$;
5) $2x^3-7x^2+6x=0$;
6) $3x^3+2x^2-8x=0$;
7) $2x^3-5x^2+6x-15=0$;
8) $5x^3+3x^2-20x-12=0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Рівносильні рівняння — рівняння, які мають однакові множини розв'язків або не мають розв'язків.

$\Leftrightarrow$ — знак рівносильності

Одним із рівносильних перетворень рівняння є додавання до обох його частин (віднімання від обох його частин) одного й того самого виразу, визначеного на області допустимих значень рівняння.

СЛІД ЗНАТИ!

Необхідною складовою розв'язання раціонального рівняння є обов'язкова перевірка належності знайдених коренів області допустимих значень вихідного рівняння.

Значна кількість текстових задач розв'язується за допомогою рівнянь, зокрема дробово-раціональних. Більшість дробово-раціональних рівнянь зводяться до одного з таких:

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0, \text{ або } \frac{A(x)}{C(x)}=\frac{B(x)}{C(x)}, \text{ або } \frac{A(x)}{C(x)}=\frac{B(x)}{D(x)}.$$

Ці рівняння, у свою чергу, розв'язуються за допомогою рівносильних систем.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Наведені схеми розв'язування рівнянь широко використовуються в шкільному курсі математики, проте вони є орієнтовними.

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=0, \\ B(x)\neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{A(x)}{C(x)}=\frac{B(x)}{C(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)-B(x)=0, \\ C(x)\neq 0 \end{cases}$$

$$\frac{A(x)}{C(x)}=\frac{B(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)D(x)-B(x)C(x)=0, \\ C(x)\neq 0, \\ D(x)\neq 0 \end{cases}$$

Зазвичай розв'язування дробово-раціональних рівнянь зводиться до першої з наведених схем, у якій рівняння має такий вигляд: у лівій частині — раціональний дріб, у правій — нуль. Такі рівняння, як правило, розв'язуються за алгоритмом.

Алгоритм розв'язування дробово-раціонального рівняння

1. Знайдіть область допустимих значень рівняння.
2. Зведіть рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$.
3. Використайте правило рівності дробу нулю й розв'яжіть рівняння $P(x)=0$.
4. Перевірте, чи задовольняють знайдені розв'язки рівняння $P(x)=0$ область допустимих значень. Вилучіть сторонні корені.
5. Запишіть відповідь.

АЛГОРИТМ

ПРИГАДАЙТЕ!

Рівняння називається **дробово-раціональним**, якщо хоча б одна з його частин є дробовим раціональним виразом (тобто в знаменнику міститься вираз зі змінною).

Розглянемо кілька прикладів розв'язування дробово-раціональних рівнянь.

ПРИКЛАД 3

Розв'яжіть рівняння $\frac{t^2-5t+4}{16-t^2}=0$.

Розв'язання

Спосіб 1

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Скористаємося правилом рівності дробу нулю: дріб дорівнює нулю, якщо чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля. Запишемо систему, рівносильну даному рівнянню.	$t^2-5t+4=0$ і $16-t^2\neq 0$, тобто $\begin{cases} t^2-5t+4=0, \\ 16-t^2\neq 0 \end{cases}$
КРОК 2	Знайдемо ОДЗ рівняння, тобто вилучимо з множини розв'язків заданого рівняння корені рівняння $16-t^2=0$.	$16-t^2=0$; $t^2=16$; $t=\pm 4$, отже, ОДЗ: $t\neq 4$ і $t\neq -4$
КРОК 3	Розв'яжемо рівняння $t^2-5t+4=0$. За теоремою Вієта $\begin{cases} t_1\cdot t_2=4, \\ t_1+t_2=5. \end{cases}$ $t_1\cdot t_2>0$, тому корені t_1 і t_2 мають один знак; $t_1+t_2=5$, тобто $t_1+t_2>0$, тому $t_1>0$ і $t_2>0$.	Очевидно, що $t_1=1$, $t_2=4$
КРОК 4	Перевіримо, чи задовольняють отримані корені ОДЗ рівняння.	1) $t_1=1$ задовольняє ОДЗ; 2) $t_2=4$ не задовольняє ОДЗ

Спосіб 2

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область допустимих значень заданого рівняння.	$16-t^2=0$; $t^2=16$; $t=\pm4$, отже, ОДЗ: $t\neq4$ і $t\neq-4$
КРОК 2	Розкладемо тричлен у чисельнику заданого дробу на лінійні множники за формулою: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, $a\neq0$, де x_1, x_2 — корені тричлена.	$t^2-5t+4=0$; $t_1=1$, $t_2=4$, тоді $t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$
КРОК 3	Запишемо рівняння у вигляді, коли чисельник і знаменник розкладено на множники.	$\frac{(t-1)(t-4)}{(4-t)(4+t)}=0$
КРОК 4	У чисельнику винесемо знак «–» за дужки множника $(t-4)$ й поставимо його перед дробом.	$-\frac{(t-1)(4-t)}{(4-t)(4+t)}=0$
КРОК 5	Ураховуючи, що $t\neq4$ (ОДЗ), скоротимо дріб на $(4-t)$.	$-\frac{t-1}{4+t}=0$
КРОК 6	Помножимо обидві частини рівняння на (-1).	$\frac{t-1}{4+t}=0$
КРОК 7	Скористаємося правилом рівності дробу нулю: $\frac{a}{b}=0$, коли $a=0$, $b\neq0$.	1) $4+t\neq0$ згідно з ОДЗ; 2) $t-1=0$; $t=1$

Відповідь: $\{1\}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2-x-2}{x-2}=0$;

2) $\frac{x^2-3x-18}{x+3}=0$;

3) $\frac{x^2+8x}{x+5}+\frac{15}{x+5}=0$;

4) $\frac{x^2+2x}{x-4}-\frac{24}{x-4}=0$;

5) $\frac{x^2-7x-30}{9-x^2}=0$;

6) $\frac{56-x-x^2}{x^2-49}=0$;

7) $\frac{2x^2-7x}{20-x-x^2}-\frac{6x+15}{20-x-x^2}=0$;

8) $\frac{5x+2}{x^2-6x+8}-\frac{5x^2-4x}{x^2-6x+8}=0$.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Книжка з палітуркою коштує 57 грн 80 к. Яка вартість палітурки, якщо сама книжка коштує на 57 грн дорожче за палітурку?

ПРИКЛАД 4

Знайдіть розв'язки рівняння $\frac{2}{x-3}+\frac{5}{x+3}=\frac{1}{4}$.

Розв'язання

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Знайдемо область допустимих значень рівняння.	ОДЗ: $x \neq \pm 3$
КРОК 2	Перенесемо доданок $\frac{1}{4}$ в ліву частину рівняння. Зведемо до спільного знаменника дроби в лівій частині та виконаємо дії додавання і віднімання раціональних дробів.	$\frac{2^{\backslash 4(x+3)}}{x-3}+\frac{5^{\backslash 4(x-3)}}{x+3}-\frac{1^{\backslash x^2-9}}{4}=0$; $\frac{8(x+3)+20(x-3)-(x^2-9)}{4(x-3)(x+3)}=0$
КРОК 3	Скористаємося правилом рівності дробу нулю: $\frac{a}{b}=0$, коли $a=0$, $b\neq 0$. З урахуванням ОДЗ розглянемо рівність чисельника нулю. Зведемо отримане рівняння до квадратного й помножимо обидві частини рівняння на (-1).	$8x+24+20x-60-x^2+9=0$; $-x^2+28x-27=0$; $-x^2+28x-27=0 \mid \cdot(-1)$; $x^2-28x+27=0$
КРОК 4	Визначимо коефіцієнти отриманого квадратного рівняння і розв'яжемо його за формулою $x_{1,2}=\frac{-k\pm\sqrt{D_1}}{a}$ для парного другого коефіцієнта. Зазначимо, що це рівняння має «зручні» коефіцієнти, тому легко розв'язується також за теоремою Вієта.	$a=1$, $b=-28$, $c=27$, $k=-14$; $D_1=k^2-ac$, $D_1=(-14)^2-1\cdot 27=169$ $\sqrt{D_1}=13$; $x=14\pm 13$; $x_1=1$, $x_2=27$
КРОК 5	Перевіримо, чи задовольняють отримані корені ОДЗ рівняння.	$x_1=1$ задовольняє ОДЗ; $x_2=27$ задовольняє ОДЗ

Відповідь: $\{1;27\}$.

ТРЕНУЄМОСЯ

3 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{6}{x+1}=x$;

2) $x=\frac{4}{x-3}$;

3) $x+\frac{6}{x+1}=4$;

4) $x-\frac{2}{x-2}=3$;

5) $\frac{1}{x-2}+\frac{4}{x+2}=\frac{1}{3}$;

6) $\frac{2}{x-5}+\frac{6}{x+5}=\frac{1}{2}$;

7) $\frac{6}{x^2-16}=\frac{3}{x^2-4x}-\frac{x-2}{x^2+4x}$;

8) $\frac{2}{x^2-3x}-\frac{x+2}{x^2+3x}=\frac{4}{x^2-9}$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Четвертий степінь для алгебраїчних рівнянь є найвищим, при якому існує аналітичне розв'язання у загальному вигляді (тобто при будь-якому значенні коефіцієнтів).

У подальшому ви часто матимете справу з рівняннями, у яких степінь змінної буде вищим за другий. Такі рівняння називають рівняннями вищих степенів. Окремим видом цих рівнянь є **біквадратні рівняння**.

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Означення. Рівняння виду $ax^4+bx^2+c=0$, де x — змінна, a, b, c — числа, причому $a\neq 0$, називають **біквадратним**.

Спосіб розв'язання: метод заміни змінної.

СЛІД ЗНАТИ!

Метод заміни змінної

Вводимо нову змінну t таку, що $x^2=t$ $(t>0)$. Тоді біквадратне рівняння відносно змінної x перетворюється у квадратне рівняння відносно змінної t: $at^2+bt+c=0$.

ПРИКЛАД 5

Знайдіть корені рівняння $2t^4-7t^2-4=0$.

Розв'язання

Використаємо **метод заміни змінної**.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Замінимо змінну t^2 змінною y, щоб понизити степінь рівняння.	$t^2=y$, тоді $t^4=\left(t^2\right)^2=y^2$
КРОК 2	Запишемо задане рівняння з використанням змінної y.	$2y^2-7y-4=0$
КРОК 3	Розв'яжемо отримане квадратне рівняння $2y^2-7y-4=0$. Визначимо його коефіцієнти й знайдемо дискримінант.	$a=2$, $b=-7$, $c=-4$; $D=b^2-4ac$; $D=(-7)^2-4\cdot 2\cdot(-4)=49+32=81$, $D>0$
КРОК 4	Обчислимо корені рівняння y_1 та y_2.	$y=\frac{7\pm 9}{4}$; $y_1=\frac{7+9}{4}=4$, $y_2=\frac{7-9}{4}=-\frac{1}{2}$
КРОК 5	Повернемося до початкової змінної.	$y_1=4$ або $y_2=-\frac{1}{2}$; $x^2=4$ або $x^2=-\frac{1}{2}$
КРОК 6	Розв'яжемо отримані неповні квадратні рівняння.	$x^2=4$ або $x^2=-\frac{1}{2}$; $x=\pm 2$; розв'язків немає

Відповідь: ± 2.

ТРЕНУЄМОСЯ

4 Знайдіть корені рівняння:

1) $x^4+10x^2+9=0$;
2) $x^4+6x^2+8=0$;
3) $x^4-26x^2+25=0$;
4) $x^4-17x^2+16=0$;
5) $2x^4-17x^2-9=0$;
6) $5x^4-x^2-4=0$;
7) $4\left(\frac{3x}{2}-1\right)^4-5\left(\frac{3x}{2}-1\right)^2+1=0$;
8) $9\left(\frac{4x}{3}+5\right)^4-17\left(\frac{4x}{3}+5\right)^2-2=0$.

ПРИГАДАЙТЕ!

Якщо $x^2=a$ і $a<0$, то рівняння не має коренів; якщо $x^2=a$ і $a>0$, то $x=\pm\sqrt{a}$

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

1 Розв'яжіть рівняння:

1) $8x^2-8x^4=0$;
2) $-2x^3+\frac{1}{2}x=0$;
3) $-17x^3+34x=0$;
4) $36x^3-\frac{1}{4}x=0$.

2 Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^3+x^2-8x-4=0$;
2) $5x^3-4x^2+5x-4=0$.

3 Знайдіть корені біквадратного рівняння:

1) $y^4-4y^2-45=0$;
2) $2x^4-3x^2-12=0$.

4 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{36+5x-x^2}{81-x^2}=0$;
2) $\frac{2t^2-t-1}{t^2-4t+3}=0$.

5 Знайдіть корені рівняння:

1) $x^2-4x+\frac{1}{x-5}=5+\frac{1}{x-5}$;
2) $t^2+49-\frac{1}{t^2-49}=50t-\frac{1}{t^2-49}$.

6 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{9}{x-3}-\frac{4}{x}=2\frac{1}{3}$;
2) $\frac{4}{y+5}+\frac{2}{5-y}=2{,}25$.

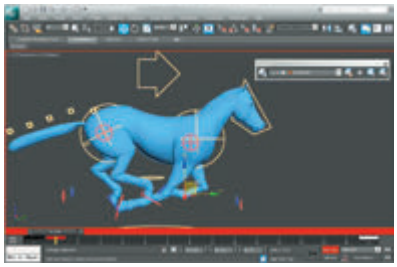
7 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{4y-6}{y^2+2y}+\frac{1}{y+2}=\frac{2y-3}{y}$;
2) $\frac{x}{x-4}-\frac{2}{x+4}=\frac{16}{x^2-16}$.

8 Розв'яжіть рівняння, використавши метод заміни змінної:

1) $\left(x^2-3x\right)^2-14\left(x^2-3x\right)+40=0$;
2) $\left(8x^2-3x+1\right)^2-18\left(8x^2-3x+1\right)+72=0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?



Проблема розв'язування рівнянь 4-го степеня виникає, наприклад, в алгоритмах комп'ютерної графіки, які використовуються для створення нерухомих зображень, спецефектів у фільмах, мультиплікації чи телебаченні, у комп'ютерних іграх.

Обов'язково знайдіть ОДЗ рівняння!

Мар'ям Мірзахані — іранський математик, професор Стенфордського університету, перша жінка в історії, яка отримала медаль Філдса (2014 р.) — найпрестижнішу у світі нагороду в галузі математики.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними.

1) Рівняння $x^4+2x^2-5=0$ після заміни $x^2=t$ набуває вигляду $t^2+2t-5=0$.

2) Рівняння $\left(x+\frac{3}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{3}{x^2}\right)-10=0$ після заміни $x+\frac{3}{x^2}=t$ набуває вигляду $t^2-4t-10=0$.

3) Рівняння $x^4=x^2$ має лише три різні корені.

4) Крейсерська швидкість x км/год літака «Боїнг-747», яку визначають із рівняння $(x+960)(x-980)=0$, дорівнює 960 км/год.

5) Середня температура повітря x °C на Північному полюсі взимку, яку визначають із рівняння $(3x+120)(4x-32)=0$, становить −40 °C.

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 15

1 Розкладіть на множники квадратний тричлен x^2+x-2.

А	$(x-1)(x+2)$	В	$(x-1)(x-2)$
Б	$(x+1)(x-2)$	Г	$(x+1)(x+2)$

2 Скоротіть дріб $\frac{x^2-6x+5}{x-1}$, де $x\neq 1$.

А	Б	В	Г
$x-6$	$x+6$	$x+5$	$x-5$

3 Виберіть можливий розклад квадратного тричлена ax^2+bx+c, $a\neq 1$, на множники, якщо $b^2-4ac=0$.

А	$(x+5)(x-8)$	В	$a(x+5)^2$
Б	$(x+5)^2$	Г	$a(x+5)(x-8)$

4 У рівнянні $(x^2+2x)(x^2+2x-2)=3$ зроблено заміну $x^2+2x=t$. Яке рівняння отримали?

А	$t^2-2t-3=0$	В	$t^2-3=0$
Б	$t^2-5=0$	Г	$t^2-2t+3=0$

5 Поїзд Одеса — Київ рухається зі швидкістю x км/год, а поїзд Київ — Одеса — зі швидкістю $(x+30)$ км/год. Яка відстань (у км) буде між поїздами за 1 год до їх зустрічі?

А	Б	В	Г
$\frac{x+30}{x}$	$2x+30$	$x(x+30)$	30

6 Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів (А–Г).

1	$x(x^2-16)=0$	А	Один
2	$\frac{x^2-5x+6}{x-3}=0$	Б	Два
3	$x^4-3x^2-4=0$	В	Три
		Г	Чотири

7 Скоротіть дріб $\frac{7x-3x^2-2}{9x^2-6x+1}$, з'ясуйте знак отриманого виразу за умови, що $x>2$.

8 Розв'яжіть рівняння $(x+3)^4-13(x+3)^2+36=0$.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «МАЙСТЕР-КЛАС ДЛЯ ПІЦМЕЙКЕРІВ»

Для вдосконалення майстерності кухарів та підвищення якості обслуговування було проведено майстер-клас для піцмейкерів. Під час заходу своє мистецтво продемонстрували майстри з піцерій «Сорренто» та «Палермо».

Майстер із «Сорренто» приготував піцу «Сицилійська» на 3 хв швидше за майстра із «Палермо». Працюючи разом, піцмейкери приготували таку саму піцу за 6 хв 40 с.

Користуючись підказками, поданими нижче, дайте відповіді на запитання.

1. За скільки хвилин приготував піцу майстер із «Сорренто»?
2. За скільки хвилин приготував піцу майстер із «Палермо»?
3. Скільки піцмейкерів із «Сорренто» потрібно, щоб приготувати 15 піц за 30 хв? Вважайте, що всі піцмейкери працюють з однаковою продуктивністю.
4. За який час 5 піцмейкерів із «Палермо» приготують 10 піц? Вважайте, що всі піцмейкери працюють з однаковою продуктивністю.

$$\text{продуктивність } p \text{ праці} = \frac{\text{об'єм роботи (тобто 1)}}{\text{час виконання роботи}}$$

$$\text{час виконання роботи} = \frac{\text{об'єм роботи (тобто 1)}}{\text{продуктивність праці}}$$

$$p_{\text{заг}} = p_1 + p_2$$

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

- Найшвидший піцмейкер може виготовити 14 піц за 2 хвилини 35 секунд. А ось з'їдають піцу повільніше: рекордсмен у цьому «виді спорту» може з'їсти 45 шматків піци за 10 хвилин.
- Найбільша у світі піца круглої форми, яку було виготовлено в 1990 р., мала діаметр 37,4 м і масу понад 12 тонн. Найбільша у світі піца прямокутної форми, виготовлена в 2005 р., мала довжину близько 39 м і ширину 30 м.
- Найбільша відстань, на яку було доставлено піцу, — 11 042 км.

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1 Розв'яжіть рівняння:

1) $6x(64-x^2)=0$;
2) $20x-5x^3=0$;
3) $3x^3-5x^2-2x=0$;
4) $2x^3+3x^2-18x-27=0$.

Див. приклади 1, 2

2 Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-\frac{1}{x-3}=9-\frac{1}{x-3}$;
2) $y^2+y-\frac{4}{y-1}=2y+\frac{4}{1-y}$;
3) $y^2-10y+\frac{2}{y^2-25}=\frac{2}{y^2-25}-25$;
4) $3x^2+16+\frac{7}{x^2-4}=14x-\frac{7}{4-x^2}$.

Див. приклад 3

3 Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x^2+8x+12}{x+6}=0$;

2) $\frac{x^2-3x}{x+2}-\frac{10}{x+2}=0$;

3) $\frac{32+14x-x^2}{x^2-4}=0$;

4) $\frac{7x-8}{x^2-15x+14}-\frac{2x^2-3}{x^2-15x+14}=0$.

Див. приклад 4

4 Розв'яжіть рівняння:

1) $x=\frac{15}{x-2}$;

2) $x-\frac{4}{x-2}=5$;

3) $\frac{2}{x-3}+\frac{2}{x+3}=\frac{1}{2}$;

4) $\frac{4}{x^2-7x}-\frac{x-1}{x^2+7x}=\frac{8}{x^2-49}$.

Див. приклад 5

5 Знайдіть корені рівняння:

1) $x^4+12x^2+27=0$;

2) $x^4-13x^2+36=0$;

3) $6x^4+x^2-7=0$;

4) $4\left(\frac{5x}{2}+3\right)^4-13\left(\frac{5x}{2}+3\right)^2+9=0$.

6 Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-3)^4-17(x-3)^2+16=0$;

2) $(2x+1)^4+(2x+1)^2-90=0$;

3) $(x^2-5)^2+2(x^2-5)-8=0$;

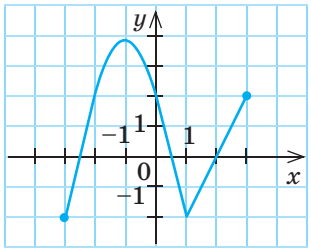
4) $(x^2+7)^2-13(x^2+7)+22=0$.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

У XI ст. перський поет і математик Омар Хайям (1048–1131) виявив, що кубічне рівняння може мати більш ніж один корінь, та зробив повну класифікацію кубічних рівнянь з їх загальними геометричними розв'язаннями.

ВПРАВИ НА ПОВТОРЕННЯ

На рисунку зображено графік функції $y=f(x)$, де x задовольняє нерівність $-3\leqslant x\leqslant 3$. Знайдіть кількість коренів рівняння:



1) $f(x)=-3$;

2) $f(x)=1$;

3) $f(x)=x$;

4) $f(x)=-x$;

5) $f(x)=x^2$;

6) $f(x)=-x^2$;

7) $f(x)=\frac{1}{x}$;

8) $f(x)=-\frac{1}{x}$.

Працювати варто заради моментів, коли ти вигукуєш: «Ось воно! Еврика!» Саме вони приносять найбільшу віддачу.

Мар'ям Мірзахані

§ 25 РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ. КВАДРАТНЕ РІВНЯННЯ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРИКЛАДНОЇ ЗАДАЧІ

ВЧОРА — Ви навчилися розв'язувати квадратні рівняння та рівняння, що зводяться до квадратних

СЬОГОДНІ — Ви навчитеся розв'язувати задачі на рух, на сумісну роботу та інші за допомогою квадратних та дробово-раціональних рівнянь

ЗАВЖДИ — Ви зможете складати математичні моделі реальних життєвих ситуацій і здійснювати потрібні розрахунки для досягнення певної мети

АКТУАЛЬНА ЗАДАЧА

Видатний французький письменник XIX ст. Фредерік Стендаль захоплювався в юності математикою. Це захоплення почалося зі знайомства із задачею, вміщеною в підручнику Леонарда Ейлера. Розглянемо її.

Задача. Дві селянки принесли на ринок разом 100 яєць, одна більше, ніж інша. Обидві вторгували однакові суми. Перша тоді сказала другій: «Якби в мене був твій кошик яєць, я б уторгувала 15 крейцерів». Друга відповіла: «А якби твій кошик яєць був у мене, я вторгувала б за них $6\frac{2}{3}$ крейцера». Скільки яєць принесла кожна селянка?

Стендаль розв'язав цю задачу, звівши її до розв'язання дробово-раціонального рівняння $\frac{15}{100-x}\cdot x=\frac{6\frac{2}{3}}{x}\cdot(100-x)$, яке, у свою чергу, було перетворене на квадратне рівняння. (Ознайомитися з розв'язанням ви можете на сайті interactive.ranok.com.ua.)

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Стендаль — це літературний псевдонім письменника, його справжнє ім'я Марі-Анрі Бейль (1783–1842). З автобіографії Стендаля відомо, яке велике враження в роки навчання справила на нього задача Ейлера: «Я зрозумів, що означає користуватися знаряддям, яке називається алгеброю».

ГОЛОВНА ІДЕЯ

За допомогою рівнянь: лінійних, квадратних, дробово-раціональних тощо — можна розв'язати більшість текстових задач шкільного курсу математики.

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

1) Розв'язуючи задачі за допомогою рівнянь, ви маєте знайти не просто корені рівняння, а розв'язок задачі. Тому важливо пам'ятати, що саме є шуканим у задачі.
2) Значення коренів можуть задовольняти ОДЗ рівняння, але не задовольняти умову задачі.

КЛЮЧОВІ ТЕРМІНИ

- математична модель задачі
- аналіз умови задачі
- аналіз розв'язків рівняння
- алгоритм розв'язання задачі

Можна виокремити кілька етапів розв'язування текстової задачі, серед яких ключовими є створення математичної моделі та складання рівняння.

АЛГОРИТМ

Аналіз умови задачі
↓
Математична модель задачі
↓
Рівняння
↓
Розв'язування рівняння
↓
Аналіз отриманих результатів
↓
Відповідь

Алгоритм розв'язування текстової задачі

1. Проаналізувати умову задачі (основні величини, зв'язки між ними, вимоги задачі).
2. Створити математичну модель (у вигляді таблиці, рисунка, тексту тощо).
3. Скласти рівняння до задачі.
4. Розв'язати отримане рівняння.
5. Проаналізувати отримані результати з огляду на умову задачі.
6. Записати відповідь.

Розглянемо кілька прикладів розв'язання текстових задач за допомогою рівнянь.

ПРИКЛАД 1

У шаховому турнірі кожний учасник зіграв із кожним по одній партії. Скільки шахістів узяли участь у турнірі, якщо кількість зіграних партій становила 78?

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини: кількість учасників; кількість партій, зіграних кожним учасником; загальна кількість зіграних партій.

Аналіз кількості партій, зіграних кожним учасником: кількість цих партій чисельно дорівнює кількості учасників, зменшеній на одиницю. Отже, якщо кількість учасників n, то кількість партій, зіграних кожним учасником, дорівнює $(n-1)$.

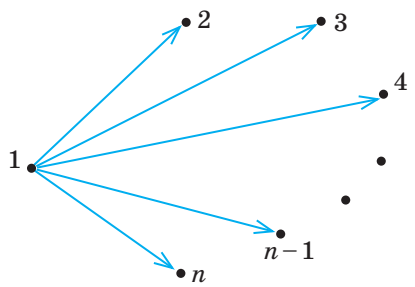


Рис. 1

КЛЮЧОВИЙ МОМЕНТ

Учасник не грає сам із собою!

2 Створюємо математичну модель задачі

Кількість учасників n, кожний із них зіграв із кожним $(n-1)$ партій (рис. 1). Але загальну кількість зіграних партій не можна знайти як добуток $n(n-1)$. Оскільки партія «$1 \to 2$» — це та сама партія, що й «$2 \to 1$» (рис. 2), то в добутку $n(n-1)$ кожна партія враховується двічі.

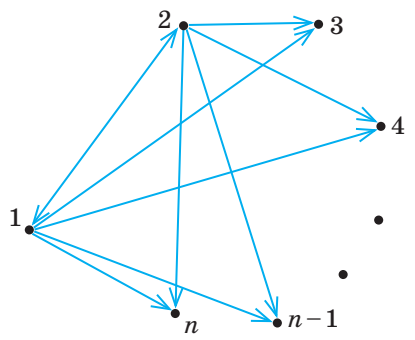


Рис. 2

Звідси загальна кількість зіграних партій дорівнює $\frac{n(n-1)}{2}$, що становить 78 партій.

3 Складаємо рівняння

$$\frac{n(n-1)}{2} = 78.$$

4 Розв'язуємо отримане рівняння

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Помножимо обидві частини рівняння на 2, розкриємо дужки й зведемо дане рівняння до квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$.	$\frac{n(n-1)}{2}=78 \Big\vert \cdot 2$; $n(n-1)=156$; $n^2-n-156=0$
КРОК 2	Розв'яжемо отримане квадратне рівняння.	$D=1-4\cdot(-156)=625$; $\sqrt{D}=25$; $n_{1,2}=\frac{1\pm 25}{2}$; $n_1=13$, $n_2=-12$

Висновок: корені рівняння 13 і –12.

5 Аналізуємо отримані розв'язки рівняння з огляду на умову задачі

Оскільки n — кількість учасників турніру, то від'ємний корінь $n_2=-12$ не задовольняє умову задачі. Шукана кількість учасників $n=13$.

6 Записуємо відповідь

Відповідь: 13 шахістів.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Марія Музичук — українська шахістка з міста Стрий Львівської області, чемпіонка світу серед жінок 2015 р.; у складі жіночої збірної України чемпіонка світу 2013 р., чемпіонка Європи 2013 р., бронзовий призер шахових олімпіад 2012 і 2014 рр.

ПРИКЛАД 2

У рамках проведення фестивалю європейських мов видавництво підготувало подарунки учасникам — однакову кількість книжок для кожного. Разом усі учасники отримали 150 книжок. Якби учасників було на 5 більше, то всі вони теж отримали б однакову кількість книжок, проте кожний — на 1 книжку менше. Скільки було учасників?

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини: загальна кількість книжок; кількість учасників; кількість книжок, отриманих кожним учасником.

Аналіз загальної кількості книжок: за умовою задачі кількість усіх книжок залишається незмінною за умови будь-якого розподілу і становить 150 штук.

Аналіз кількості учасників: оскільки ця величина є невідомою і шуканою, то її доцільно позначити змінною x. Кількість учасників за умови другого розподілу книжок є більшою на 5. Отже, якщо фактична кількість учасників — x, то у випадку другого розподілу було б $(x+5)$ учасників.

Аналіз кількості книжок, отриманих кожним учасником: щоб знайти цю величину, слід загальну кількість книжок поділити на кількість учасників. За умовою у випадку другого розподілу кількість книжок, отриманих кожним учасником, на 1 менша, ніж у випадку першого розподілу.

ЗАДАЧА

на арифметичне співвідношення між об'єктами

2 Створюємо математичну модель задачі у вигляді таблиці

Порядок заповнення таблиці:

1) стовпчик «Загальна кількість книжок» — величини, що за умовою задачі не змінюються;
2) стовпчик «Кількість учасників» — величини, позначені через змінну x та вираз зі змінною x;
3) стовпчик «Кількість книжок у кожного» — величини, що розраховуються за формулою:

$$\text{кількість книжок у кожного} = \frac{\text{загальна кількість книжок}}{\text{кількість учасників}}$$

	Загальна кількість книжок	Кількість учасників	Кількість книжок у кожного
I розподіл (фактичний)	150	x	$\frac{150}{x}$
II розподіл	150	$x+5$	$\frac{150}{x+5}$, на 1 менше, ніж

3 Складаємо рівняння

За умовою задачі величина $\frac{150}{x+5}$ менша від величини $\frac{150}{x}$ на 1. Складемо рівняння: $\frac{150}{x}-\frac{150}{x+5}=1$.

4 Розв'язуємо отримане дробово-раціональне рівняння

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Перенесемо всі доданки в ліву частину рівняння та знайдемо їх спільний знаменник і доповняльні множники до чисельників дробів.	$\frac{150}{x}^{\backslash x+5}-\frac{150}{x+5}^{\backslash x}-1^{\backslash x^2+5x}=0$; спільний знаменник $x(x+5)$
КРОК 2	Зведемо всі доданки в лівій частині рівняння до спільного знаменника. Запишемо рівняння у вигляді $\frac{A(x)}{B(x)}=0$ і скористаємося схемою: $\frac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=0, \\ B(x)\neq 0. \end{cases}$	$\frac{150(x+5)-150x-(x^2+5x)}{x(x+5)}=0$; $\begin{cases} 150(x+5)-150x-(x^2+5x)=0, \\ x(x+5)\neq 0 \end{cases}$
КРОК 3	Розглянемо умову $x(x+5)\neq 0$, яка визначає ОДЗ рівняння.	$x(x+5)\neq 0$; ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq -5 \end{cases}$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Щороку 26 вересня відзначають Європейський день мов, запроваджений Радою Європи у 2001 р. на підтримку лінгвістичного розмаїття та розвитку викладання мов у світі.
- Літературний твір, що зазнав найбільшу кількість перекладів, — це «Заповіт» Т. Г. Шевченка, перекладений 147 мовами народів світу.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 4	Розв'яжемо рівняння $150(x+5)-150x-(x^2+5x)=0$. Перевіримо, чи задовольняють отримані корені ОДЗ вихідного рівняння.	$150x+750-150x-x^2-5x=0$; $-x^2-5x+750=0$; $x^2+5x-750=0$; $D=25-4\cdot(-750)=3025$; $\sqrt{D}=55$; $x_{1,2}=\frac{-5\pm55}{2}$; $x_1=25$, $x_2=-30$; обидва корені задовольняють ОДЗ рівняння

Висновок: корені рівняння 25 і –30.

5 Аналізуємо отримані розв'язки рівняння з огляду на умову задачі

Оскільки x — кількість учасників фестивалю, то від'ємний корінь $x_2=-30$ не задовольняє умову задачі. Шукана кількість учасників $x_1=25$.

6 Записуємо відповідь

Відповідь: 25 учасників.

ТРЕНУЄМОСЯ

1 Розв'яжіть задачі.

1) Знаменник звичайного дробу на 2 більший за чисельник. Якщо до цього дробу додати обернений до нього дріб, то отримаємо $\frac{34}{15}$. Складіть рівняння для визначення чисельника початкового дробу, позначивши його через x $(x>0)$. Знайдіть чисельник початкового дробу.

2) Кілька студентів розподілили між собою порівну 120 задач, які необхідно розв'язати за тиждень. Якби студентів було на 2 особи більше, то кожний мав би розв'язати на 2 задачі менше. Складіть рівняння для визначення кількості студентів, позначивши її через x. Знайдіть x.

3) Ландшафтний дизайнер мав виконати 60 замовлень. Виконуючи щотижня на 1 замовлення більше, ніж планувалося, він закінчив роботу на 2 тижні раніше строку. Скільки замовлень виконував дизайнер щотижня?

4) На розв'язування завдань контрольної роботи відводиться 40 хв. Складність завдань було підвищено, тому час на виконання кожного з них збільшився в середньому на 2 хв. Знайдіть початкову кількість завдань, якщо після ускладнення їх кількість зменшили на 1.

МАЙБУТНЯ ПРОФЕСІЯ

Ландшафтний дизайн — це мистецтво благоустрою та озеленення території. Отже, ландшафтний дизайнер має бути і художником, і садівником, і архітектором, володіти знаннями з різних галузей (біологія, хімія, ґрунтознавство, нарисна геометрія, креслення, мистецтво, психологія, комп'ютерні технології тощо), вміти розробляти кошториси на реалізацію проектів, користуватися спеціалізованими комп'ютерними програмами.

ЗАДАЧА НА РУХ

ПРИКЛАД 3

О 10:15 туристи вирушили від турбази до водоспаду на байдарці вниз за течією річки. Пройшовши річкою 10 км, вони зупинилися біля водоспаду для відпочинку, який тривав 5 год. Потім туристи попливли назад і прибули на турбазу о 19:00. Визначте власну швидкість байдарки, якщо швидкість течії 2 км/год.

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини: час руху, швидкість руху, відстань.

Аналізуємо час руху: подорож розпочалася о 10:15 і завершилася о 19:00. Отже, загальний час подорожі становить 8 год 45 хв. Оскільки відпочинок тривав 5 год, то час руху до водоспаду і назад дорівнює $t_{заг} = 3 \text{ год } 45 \text{ хв} = 3\frac{3}{4}$ год.

Аналізуємо швидкість руху: за умовою $v_{течії} = 2$ км/год. Шуканою є власна швидкість байдарки, її доцільно ввести як змінну: нехай $v_{власна} = x$ км/год. Тоді швидкість байдарки за течією $v_{за\ течією} = (x+2)$ км/год, а проти течії $v_{проти\ течії} = (x-2)$ км/год.

Аналізуємо пройдену відстань: оскільки байдарка рухалася за тим самим маршрутом, то відстані, пройдені в обидва боки, є однаковими. Таким чином, $s_{за\ течією} = s_{проти\ течії} = 10$ км.

2 Створюємо математичну модель задачі у вигляді таблиці

Порядок заповнення таблиці:

1) стовпчик «v» — величини, подані через змінну x;
2) стовпчик «s» — величини, що за умовою задачі не змінюються;
3) стовпчик «t» — величини, що розраховуються за формулою $t = \frac{s}{v}$.

	v, км/год	s, км	t, год
За течією	$x+2$	10	$\frac{10}{x+2}$ } $3\frac{3}{4}$
Проти течії	$x-2$	10	$\frac{10}{x-2}$ }

3 Складаємо рівняння

За умовою $t_{заг} = 3\frac{3}{4}$ год, тому складемо рівняння, знайшовши загальний час руху:

$$t_{за\ течією} + t_{проти\ течії} = t_{заг}, \text{ тобто } \frac{10}{x+2} + \frac{10}{x-2} = 3\frac{3}{4}.$$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Червоногоро́дський (Джу́ринський) водоспад, що утворився в долині річки Джурин на Тернопільщині, вважається найвищим рівнинним водоспадом України. Його висота становить 16 м. Поблизу водоспаду лежать руїни зниклого міста Червонограда. Назва цього давнього міста пов'язана з червоним кольором місцевих пісковиків.

Червоногородський водоспад входить до складу регіонального ландшафтного парку «Дністровський каньйон».

4 Розв'язуємо отримане дробово-раціональне рівняння

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Переведемо мішане число $3\frac{3}{4}$ у неправильний дріб, перенесемо його в ліву частину рівняння й поділимо обидві частини рівняння на 5.	$3\frac{3}{4}=\frac{15}{4}$; $\frac{10}{x+2}+\frac{10}{x-2}-\frac{15}{4}=0 \,\Big\vert :5$; $\frac{2}{x+2}+\frac{2}{x-2}-\frac{3}{4}=0$
КРОК 2	Знайдемо спільний знаменник усіх дробів і доповняльні множники до чисельників кожного дробу.	Спільний знаменник $4(x+2)(x-2)$; $\frac{2^{\backslash 4(x-2)}}{x+2}+\frac{2^{\backslash 4(x+2)}}{x-2}-\frac{3^{\backslash x^2-4}}{4}=0$
КРОК 3	Зведемо до спільного знаменника ліву частину рівняння, отримаємо рівняння вигляду $\frac{A(x)}{B(x)}=0$.	$\frac{8(x-2)+8(x+2)-3(x^2-4)}{4(x+2)(x-2)}=0$; $\frac{-3x^2+16x+12}{4(x+2)(x-2)}=0$
КРОК 4	Скориставшися схемою: $\frac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=0, \\ B(x)\neq 0, \end{cases}$ зведемо отримане рівняння до системи.	$\begin{cases} -3x^2+16x+12=0, \\ 4(x-2)(x+2)\neq 0 \end{cases}$
КРОК 5	Розглянемо умову $4(x-2)(x+2)\neq 0$, яка визначає ОДЗ рівняння.	$4(x-2)(x+2)\neq 0$; ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 2, \\ x\neq -2 \end{cases}$
КРОК 6	Розв'яжемо квадратне рівняння $-3x^2+16x+12=0$, помноживши спочатку обидві його частини на (-1).	$-3x^2+16x+12=0 \,\Big\vert \cdot(-1)$; $3x^2-16x-12=0$; $D_1=(-8)^2-3\cdot(-12)=100$; $\sqrt{D_1}=10$; $x_{1,2}=\frac{8\pm 10}{3}$; $x_1=6$, $x_2=-\frac{2}{3}$

Висновок: корені рівняння 6 і $-\frac{2}{3}$.

5 Аналізуємо отримані розв'язки рівняння з огляду на умову задачі

Оскільки x — власна швидкість байдарки, то корінь $x_2=-\frac{2}{3}$ не задовольняє умову задачі. Отже, $x_1=6$, $6>2$; тож $v_{\text{власна}}=6$ км/год.

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Щоб байдарка могла рухатися проти течії річки, має виконуватися умова:

$$v_{\text{власна}} > v_{\text{течії}}$$

6 Записуємо відповідь

Відповідь: 6 км/год.

ЗАДАЧА
на сумісну роботу

ПРИКЛАД 4

Софійка та Юрко прикрашали фруктами приготовлені птіфури. Усі тістечка Софійка може прикрасити на 6 хв швидше, ніж Юрко. За який час може прикрасити всі птіфури Юрко, якщо вдвох усі тістечка діти можуть прикрасити за 7,2 хв?

Розв'язання

1 Аналізуємо умову задачі

Основні величини:

- час, за який Софійка сама може прикрасити всі птіфури;
- час, за який Юрко сам може прикрасити всі птіфури;
- час, за який діти можуть разом прикрасити всі птіфури.

2 Створюємо математичну модель задачі

Нехай x хв — час, за який Софійка прикрасить усі птіфури. Тоді $(x+6)$ хв — час, за який цю работу виконає Юрко.

Загальну кількість тістечок приймемо за одиницю, оскільки ця величина в умові не зазначена й не впливає на розв'язання задачі. Швидкість прикрашання всіх птіфурів обчислюється за формулою:

$$\text{швидкість прикрашання птіфурів} = \frac{\text{загальна кількість птіфурів}}{\text{час, за який буде прикрашено всі птіфури}}$$

Тоді швидкість прикрашання тістечок Софійкою дорівнює $\frac{1}{x}$ тістечок за хвилину, а Юрком — $\frac{1}{x+6}$ тістечок за хвилину.

3 Складаємо рівняння

Спільна швидкість прикрашання всіх птіфурів обома дітьми становить $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}\right)$ тістечок за хвилину. За умовою вона дорівнює $\frac{1}{7,2}$. Складемо рівняння: $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+6}=\frac{1}{7,2}$.

4 Розв'язуємо отримане дробово-раціональне рівняння

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 1	Перетворимо дріб $\frac{1}{7,2}$. Перенесемо всі доданки в ліву частину рівняння та знайдемо спільний знаменник усіх дробів і доповняльні множники до кожного чисельника.	$\frac{1}{7,2}=\frac{1}{7\frac{1}{5}}=\frac{1}{\frac{36}{5}}=\frac{5}{36}$. $\frac{1^{\backslash 36(x+6)}}{x}+\frac{1^{\backslash 36x}}{x+6}-\frac{5^{\backslash x^2+6x}}{36}=0$; спільний знаменник $36x(x+6)$

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Птіфури — маленькі тістечка або печива з одного тіста, але з різною начинкою та оформленням. Птіфур у перекладі з французької означає «маленька піч». Це поняття виникло у Франції у XVIII ст., коли їжу готували в кам'яних печах на вугіллі. Печі нагрівалися до високої температури та повільно охолоджувалися. Кмітливі кухарі використовували це тепло для випікання невеликих вишуканих тістечок.

Крок	Зміст дії	Результат дії
КРОК 2	Зведемо до спільного знаменника ліву частину рівняння, отримаємо рівняння вигляду $\frac{A(x)}{B(x)}=0$.	$\frac{36x+216+36x-5x^2-30x}{36x(x+6)}=0$; $\frac{-5x^2+42x+216}{36x(x+6)}=0$
КРОК 3	Розв'яжемо рівняння, звівши його до системи $\begin{cases}A(x)=0,\\B(x)\neq 0.\end{cases}$	$\begin{cases}-5x^2+42x+216=0\\36x(x+6)\neq 0;\end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases}x\neq 0,\\x\neq -6;\end{cases}$ $-5x^2+42x+216=0 \mid \cdot(-1); 5x^2-42x-216=0$; $D_1=(-21)^2-5\cdot(-216)=1521$; $\sqrt{D_1}=39$; $x_{1,2}=\frac{21\pm 39}{5}$; $x_1=12$; $x_2=-\frac{8}{5}$

Висновок: корені рівняння 12 і $-\frac{8}{5}$.

5 Аналізуємо отримані розв'язки рівняння з огляду на умову задачі

Оскільки x — проміжок часу, то $x>0$. Отже, від'ємний корінь $x_2=-\frac{8}{5}$ не задовольняє умову задачі, а $x_1=12$ — задовольняє. Тоді Софійка може прикрасити всі птіфури за 12 хв, а Юрко — за $12+6=18$ (хв).

6 Записуємо відповідь

Відповідь: 18 хв.

ТРЕНУЄМОСЯ

2 Складіть математичну модель задачі, розв'яжіть задачу.

1) Микола проїхав на квадроциклі 20 км зі швидкістю x км/год і 15 км зі швидкістю на 10 км/год меншою. На всю подорож Микола витратив 1 год. Знайдіть x.

2) Валентина посадила 200 кущів самшиту до обіду, висаджуючи щогодини x кущів, та 90 кущів — після обіду, висаджуючи щогодини на 20 кущів менше, ніж до обіду. На всю роботу Валентина витратила 7 год. Знайдіть x.

3) Пішохід пройшов відстань 6 км з пункту A до пункту B, рухаючись із постійною швидкістю x км/год. Назад із пункту B до пункту A він повертався, збільшивши швидкість на 1 км/год, унаслідок чого витратив на зворотний шлях на 12 хв менше. Знайдіть x.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

- Вітер — екологічно чисте джерело енергії.
- Завдяки вітру людство може отримати енергії у 50 разів більше, ніж зможе використати.
- Найбільша у світі вітрова електростанція — це вітровий енергетичний центр у місті Абілін, штат Техас. У центрі налічується 400 турбін, які загалом виробляють 735 МВт електроенергії.

4) Дві бригади робітників клали тротуарну плитку. Кожна бригада мала покласти 2400 плиток. Перша бригада клала x тротуарних плиток щогодини, а друга — на 50 плиток більше. Друга бригада закінчила всю роботу на 4 год швидше, ніж перша. Знайдіть x.

5) Два робітники встановили каркасний басейн за 2 год 15 хв. Спочатку перший робітник почав установлювати басейн самостійно, а через 1 год до нього приєднався другий робітник. Після чого робітники разом закінчили роботу через 1 год 15 хв. За скільки годин може встановити басейн кожний робітник, працюючи самостійно, якщо другий робітник виконує цю роботу на 2 год довше, ніж перший?

6) Екскурсійний катер пройшов за течією річки 12 км і повернувся назад, витративши на подорож $1\frac{7}{20}$ год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

Кожний із двох братів має певну кількість грошей. У старшого на 25 % більше, ніж у молодшого. Скільки відсотків своїх грошей повинен віддати старший брат молодшому, щоб грошей у них стало порівну?

ІНТЕЛЕКТУАЛЬНИЙ ФІТНЕС

Створіть математичну модель задачі у вигляді таблиці та складіть рівняння, користуючись наведеними підказками.

1 Під час змагань зі спортивного орієнтування Дмитро подолав 7 км по шосе і 5 км путівцем. По шосе Дмитро рухався зі швидкістю на 4 км/год більшою, ніж путівцем. Визначте швидкість його руху по шосе, якщо на весь шлях Дмитро витратив 1 год.

До розв'язання

	v, км/год	s, км	t год	
По шосе	x			1 год
Путівцем				

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!

Схема для складання рівняння:

$$t_{\text{шосе}} + t_{\text{путівцем}} = t_{\text{заг}}$$

Через змінну x можна позначити також швидкість путівцем.

2 Літак виконує рейси між Берліном і Києвом, відстань між якими 1440 км. Рейс із Берліна до Києва тривав на 1 год більше, ніж зворотний рейс, оскільки літак рухався зі швидкістю на 72 км/год меншою.

1) Знайдіть швидкість літака під час зворотного рейсу. Вважайте погоду спокійною, знехтуйте швидкістю вітру.

2) Андрій вилетів рейсом із Берліна о 15 : 30 за київським часом. З'ясуйте, чи встиг він того самого дня на концерт у Києві, що розпочався о 19 : 00.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Найстарішою авіакомпанією у світі вважається авіакомпанія KLM, заснована у 1919 р. в Амстердамі. А першою стюардесою стала американка Еллен Черч у 1930 р.

1) *До розв'язання*

	v, км/год	s, км	t год
Київ — Берлін		1440	$t_1 =$ _____
Берлін — Київ	x	1440	$t_2 =$ _____, на $\Delta t = 1$ год більше

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!
Схема для складання рівняння:
$t_2 - t_1 = \Delta t$.

3 Турист проплив 10 км проти течії річки на моторному човні, власна швидкість якого становить 15 км/год. Назад турист повернувся на плоту. Відомо, що плотом він плив на 1 год більше, ніж човном.
1) Знайдіть швидкість течії річки.
2) Визначте, скільки часу витратив би турист на зворотний шлях, якби повернувся на човні.

1) *До розв'язання*

	v, км/год	s, км	t, год
Проти течії	$15 - x$		$t_1 =$ _____
Плотом	x		$t_2 =$ _____, на 1 год більше

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!
Позначте швидкість течії річки через x км/год.

4 Ірина та Ольга, влаштовуючись на роботу в супермаркет, виконували тестове завдання з розміщення продукції у відділі. Ірина, працюючи самостійно, виконала завдання на 2 год швидше, ніж Ольга. За який час Ірина впоралася із завданням, якщо обидві дівчини, працюючи разом, виконали б запропоноване завдання за $3\frac{3}{7}$ год?

До розв'язання
Основні величини:
- p — продуктивність праці (обсяг роботи, яку виконано за одиницю часу);
- V — загальний обсяг роботи;
- t — час, протягом якого кожний виконує весь обсяг роботи, працюючи самостійно.

СЛІД ЗНАТИ!
$$V = p \cdot t \Rightarrow p = \frac{V}{t}$$
Якщо не зазначено, який саме обсяг роботи виконується, і це не впливає на розв'язання задачі, то вважають, що $V = 1$.

	Продуктивність праці p	Загальний обсяг роботи $V = 1$	Час t, год
Ірина		1	x
Ольга		1	$x + 2$

$\Big\}\ 3\frac{3}{7}$ год

ЗВЕРНІТЬ УВАГУ!
Схема для складання рівняння:
$p_{\text{Ірини}} + p_{\text{Ольги}} = p_{\text{спільн}}$,
де $p_{\text{спільн}} = \dfrac{1}{t_{\text{спільн}}}$

Михайло Йосипович Ядренко (1932–2004) — видатний український математик, член-кореспондент Національної академії наук України, один із засновників теорії випадкових полів. Понад 40 років він займався організацією шкільних математичних олімпіад різних рівнів, математичних гуртків для школярів і студентів, із 1970 р. очолював журі Всеукраїнських олімпіад для школярів.

ЗАВДАННЯ ІЗ ЗІРКОЮ

Поміркуйте, чи є подані твердження правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Перший потяг вирушив із Харкова до Києва, а через 1 год другий потяг вирушив із Києва до Харкова. Якщо кожний потяг рухатиметься з постійною швидкістю 90 км/год, то в момент їх зустрічі перший потяг буде ближче до Києва, ніж другий.
2) Певний вид бактерій розмножується зі швидкістю дві бактерії за хвилину (тобто кожну хвилину з однієї бактерії утворюються дві). Відомо, що якщо помістити в колбу одну бактерію, то колба заповниться бактеріями за 200 хв. Якщо в порожню колбу помістити дві такі бактерії, то ця колба заповниться за 100 хв.
3) На борту кожного судна, що стоять в Одеському порту, розміщено однакову кількість контейнерів. Якщо з борта першого судна переставити на борт другого судна 30 контейнерів, то на борту другого судна буде на 60 контейнерів більше, ніж на борту першого.
4) Наталія й Олена замовили фірмову страву «Львівський сирник із маком». Якщо Наталія скуштує половину від третини всього сирника, а Олена скуштує третину від половини всього сирника, то дівчата скуштують однакові частини сирника.
5) Якщо 3 снігові гармати вкривають слаломну трасу штучним снігом за 3 год, то 2 снігові гармати вкриють таку саму трасу за 2 год.

Відповіді та інший варіант роботи: interactive.ranok.com.ua

ЗНАЮ, ВМІЮ, МОЖУ

САМОСТІЙНА РОБОТА № 16

1 Площа прямокутного майданчика для паркування велосипедів 27 м^2, а його ширина на 6 м менша від довжини. Складіть рівняння для визначення ширини майданчика, позначивши її через x. Знайдіть x.

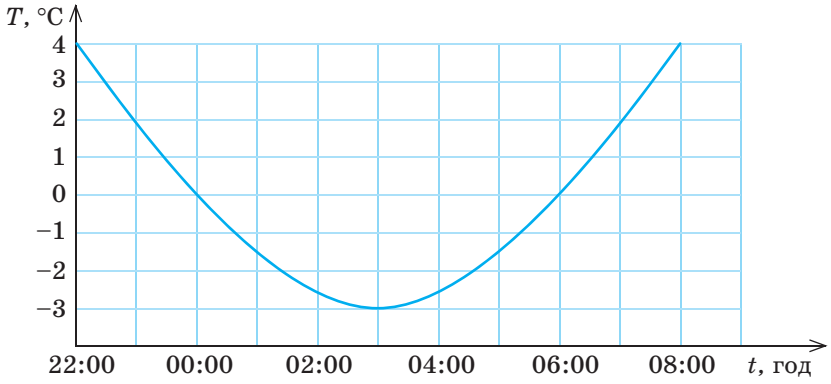
2 З Вінницької області до Житомира планувалося перевезти вантажівкою 36 т полуниці за кілька рейсів. Але через несправність вантажівки довелося використати іншу машину, вантажопідйомність якої була на 2 т меншою. Унаслідок цього для перевезення всієї полуниці знадобилося на 3 рейси більше, ніж планувалося. Складіть рівняння для визначення вантажопідйомності машини, на якій перевезли полуницю, позначивши її вантажопідйомність через x. Знайдіть x.

3 Потяг вирушив від станції A до станції B, відстань між якими 160 км, із запізненням на 20 хв. Щоб прибути на станцію B вчасно, машиніст збільшив заплановану швидкість на 16 км/год. Складіть рівняння для визначення запланованої швидкості, позначивши її через x. Знайдіть x.

MATH FOR LIFE

ЗАДАЧА «ТЕМПЕРАТУРА ПОВІТРЯ»

За результатами вимірювання температури повітря автоматичною метеостанцією протягом 10 годин — від 22 години 7 березня до 8 години 8 березня — було побудовано графік (див. рисунок). Користуючись графіком, дайте відповіді на запитання.



1. У який день та о котрій годині було зафіксовано найвищу температуру повітря?
2. У який день та о котрій годині було зафіксовано найнижчу температуру повітря?
3. Протягом скількох годин температура повітря була нижчою від 0 °C?
4. Якою була найнижча температура повітря?
5. Протягом якого часу температура повітря зростала?
6. О котрій годині температура повітря становила 0 °C?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Розвиток метеорологічних спостережень у Харкові пов'язаний з іменем В. Н. Каразіна — засновника Харківського університету. У 1810 р. в селі Кручик (50 км від Харкова) Каразін заснував метеорологічну станцію і склав програму спостережень за температурою, тиском, опадами, напрямом вітру.

ПЕРЕРВА НА ЛОГІКУ

5 рибалок з'їли 5 щук за 5 днів. За скільки днів 15 рибалок з'їдять 15 щук?

ДОМАШНЄ ЗАВДАННЯ

1. Розв'яжіть задачу.

1) Після циркової вистави група із 45 дітей залишилася на екскурсію по цирку. Кілька аніматорів розподілили групу так, що кількість дітей, яких розважав кожний аніматор, була однаковою. Якби аніматорів було на 2 особи більше, то в кожного аніматора в групі було б на 6 дітей менше. Складіть рівняння для визначення кількості аніматорів, позначивши її через x. Знайдіть x.

Див. приклад 2

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Харківський учений Анатолій Малихін винайшов спосіб проведення «безкровного» аналізу крові. На основі наукових розробок ученого було створено прилад — аналізатор формули крові, що дозволяє за кілька хвилин отримати 131 параметр життєдіяльності організму людини. Для вимірювань використовуються 5 датчиків, що прикріплюються до тіла людини.

2) З Херсона до Львова планувалося перевезти вантажівкою 90 т кавунів за кілька рейсів. Але через несправність вантажівки довелося використати іншу машину, вантажопідйомність якої була на 5 т більшою. Унаслідок цього для перевезення всіх кавунів знадобилося на 3 рейси менше, ніж планувалося. Складіть рівняння для визначення вантажопідйомності машини, на якій перевезли кавуни, позначивши її вантажопідйомність через x. Знайдіть x.

3) На прийом до лікаря-кардіолога записалися 24 пацієнти. Приймаючи щогодини на 1 особу більше, ніж планувалося, лікар закінчив прийом на 2 год раніше запланованого строку. Скільки пацієнтів приймав лікар щогодини?

2 Складіть математичну модель задачі, розв'яжіть задачу.

1) Вероніка проїхала на автомобілі 20 км зі швидкістю x км/год та 25 км зі швидкістю на 10 км/год більшою. На весь шлях Вероніка витратила 1 год. Знайдіть x.

2) До обідньої перерви Василь приготував 36 штук хачапурі, готуючи щогодини x штук. Після перерви він приготував 75 штук, готуючи щогодини на 3 штуки більше, ніж до перерви. Знайдіть x, якщо робочий день Василя становить 8 год (без обідньої перерви).

3) З бухти A до бухти B, відстань між якими становить 60 км, яхта йшла із середньою швидкістю x км/год. На зворотному шляху середня швидкість яхти збільшилася на 3 км/год завдяки сприятливому напрямку вітру. Тому на зворотний шлях було витрачено на 1 год менше. Знайдіть x.

Див. приклади 3, 4

4) Кожен із двох дизайнерів має зробити 90 однотипних ілюстрацій. Щодня перший дизайнер створював x ілюстрацій, а другий — на 6 ілюстрацій більше. Другий дизайнер закінчив усю роботу на 4 дні раніше. Знайдіть x.

5) За одну зміну таксист витрачає в середньому 32 л пального. Після того як таксисту було замінено машину, кількість пального, що витрачається на 1 км, зменшилася на 0,02 л. Отже, відстань, яку став проїжджати таксист за зміну, збільшилася на 80 км. Який об'єм пального став витрачатися на кожні 100 км після заміни машини?

«Я впевнений, що Україна подолає економічні труднощі, збереже державність і стане процвітаючою країною Європи. Вірю, що будуть збережені найкращі здобутки нашої освіти, буде ліквідована видавнича криза і наші учні матимуть найкращі підручники, науково-популярні книжки та журнали. Вірю в процвітання нашої освіти та науки.»

М. Й. Ядренко

ПІДСУМОВУЄМО ВИВЧЕНЕ В § 23—25

1 Ви дізналися, як розкладати квадратний тричлен на лінійні множники.

Формула розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$,

де $a\neq 0$, x_1, x_2 — корені тричлена

Алгоритм розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

1. Знайти корені квадратного тричлена ax^2+bx+c $(a\neq 0)$, тобто розв'язати відповідне квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$.
2. Якщо рівняння має корені x_1 і x_2, то:
   - при $x_1\neq x_2$ маємо $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$;
   - при $x_1=x_2=x_0$ маємо $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$.
3. Якщо рівняння **не має коренів**, то квадратний тричлен неможливо розкласти на лінійні множники.

2 Ви дізналися, як розв'язувати рівняння, що зводяться до квадратних.

Схеми розв'язування дробово-раціональних рівнянь

1) $\dfrac{A(x)}{B(x)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=0, \\ B(x)\neq 0 \end{cases}$

2) $\dfrac{A(x)}{C(x)}=\dfrac{B(x)}{C(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)=B(x), \\ C(x)\neq 0 \end{cases}$

3) $\dfrac{A(x)}{C(x)}=\dfrac{B(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} A(x)D(x)=B(x)C(x), \\ C(x)\neq 0, \\ D(x)\neq 0 \end{cases}$

Алгоритм розв'язування дробово-раціонального рівняння

1. Знайти область допустимих значень рівняння.
2. Звести рівняння до вигляду $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$.
3. Використати правило рівності дробу нулю й розв'язати рівняння $P(x)=0$.
4. Перевірити, чи задовольняють знайдені розв'язки область допустимих значень. Вилучити сторонні корені.
5. Записати відповідь.

Необхідною складовою розв'язання раціонального рівняння є **обов'язкова перевірка належності знайдених коренів** ОДЗ вихідного рівняння.

Деякі **способи й методи** розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних:

- розкладання на множники
- групування
- заміна змінної (підстановка)
- виділення цілої частини з дробу
- виділення повного квадрата

Рівняння вигляду $ax^4+bx^2+c=0$, де x — змінна, a, b, c — числа, причому $a\neq 0$, називають **біквадратним**.

Розв'язання біквадратного рівняння методом заміни змінної

Якщо ввести нову змінну t таку, що $x^2=t$ $(t>0)$, то біквадратне рівняння відносно змінної x перетвориться у квадратне рівняння відносно змінної t: $at^2+bt+c=0$.

3 Ви навчилися створювати математичні моделі прикладних задач та розв'язувати задачі за допомогою квадратних рівнянь.

Аналіз умови задачі
↓
Математична модель задачі
↓
Рівняння
↓
Розв'язування рівняння
↓
Аналіз отриманих результатів
↓
Відповідь

Алгоритм розв'язування задач

1. Проаналізувати умову задачі (основні величини, зв'язки між ними, вимоги задачі).
2. Створити математичну модель (у вигляді таблиці, рисунка, тексту тощо).
3. Скласти рівняння до задачі.
4. Розв'язати отримане рівняння.
5. Проаналізувати отримані результати з огляду на умову задачі.
6. Записати відповідь.

Задачі на роботу

Якщо V — об'єм роботи, p — продуктивність (швидкість) роботи, t — час, то:

$$V = pt, \quad p = \frac{V}{t}, \quad t = \frac{V}{p}.$$

- Якщо працюють декілька людей, то продуктивності їхньої роботи додаються.
- Якщо об'єм роботи не зазначений, то його приймають за одиницю.

Задачі на рух

Якщо s — відстань, v — швидкість, t — час, то:

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}, \quad t = \frac{s}{v}.$$

Задачі на рух по воді

Якщо v — власна швидкість плавзасобу у стоячій воді, a — швидкість течії, то:

- $v + a$ — швидкість плавзасобу за течією;
- $v - a$ — швидкість плавзасобу проти течії.

Схема задачі на запис числа

	Цифра десятків	Цифра одиниць	Значення числа
I число	x	y	$10x + y$
II число			

Схема задачі на співвідношення чисельників і знаменників дробу

	Чисельник	Знаменник	Значення дробу
I дріб	x	y	$\frac{x}{y}$
II дріб			

Схема задачі на продуктивність роботи

	Продуктивність роботи	Час роботи	Об'єм роботи
I працівник	p	t	$V = pt$
II працівник			

Схема задачі на купівлю товарів

	Ціна	Кількість	Вартість
I товар	x	y	$A = xy$
II товар			

Схема задачі на рух

	Швидкість	Час	Відстань
I об'єкт	v	t	$s = vt$
II об'єкт			

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 6

Варіант 1

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ

Виконайте варіант 2 контрольної роботи на сайті interactive.ranok.com.ua

1 Розкладіть на множники квадратний тричлен x^2-2x-3.

А	$(x-1)(x+3)$	В	$(x-1)(x-3)$
Б	$(x+1)(x-3)$	Г	$(x+1)(x+3)$

2 Скоротіть дріб $\frac{x+5}{x^2+4x-5}$, де $x\neq 1$, $x\neq -5$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{x+1}$	$x+1$	$x-1$	$\frac{1}{x-1}$

3 Розклад квадратного тричлена ax^2+bx+c на множники має вигляд $3(x-9)(x+12)$. Визначте корені квадратного тричлена.

А	Б	В	Г
9; –12	12; –9	3	9; –12; 3

4 У рівнянні $\left(\frac{2x-1}{x}\right)^2-\frac{6(2x-1)}{x}+5=0$ здійснено заміну $\frac{2x-1}{x}=t$. Зазначте отримане квадратне рівняння відносно змінної t.

А	$t^2-t+5=0$	В	$t^2-6t+5=0$
Б	$t^2+6t+5=0$	Г	$t^2+t+5=0$

5 Скільки коренів має рівняння $\frac{3x}{x^2+x}=0$?

А	Б	В	Г
Жодного	Один	Два	Більше двох

6 Земельна ділянка для будівництва гаражу має форму прямокутника. Довжина ділянки на 8 м більша від її ширини, а площа дорівнює 48 м². Виберіть рівняння, що відповідає умові задачі, якщо довжину ділянки позначено через x м.

А	$x(x+8)=48$
Б	$x(x-8)=48$
В	$2x+2(x+8)=48$
Г	$2x+2(x-8)=48$

7 Дано вираз $\frac{x^2+4x-12}{x^2-7x+10}$.

1) Скоротіть заданий дріб та знайдіть область допустимих значень змінної;
2) знайдіть значення виразу, якщо $x=5{,}1$.

8 Дано вираз $\frac{24b^2+7ab}{ab}$.

1) Спростіть заданий дріб;
2) знайдіть його значення, якщо $\frac{b}{a}=0{,}25$.

9 Розв'яжіть рівняння $x^4-2x^2-24=0$.

10 Швидкість течії річки дорівнює 5 км/год. Моторна яхта пройшла за течією річки 50 км і повернулася назад, витративши на весь шлях $2\frac{1}{4}$ год. 1) Складіть рівняння для визначення власної швидкості яхти, позначивши цю швидкість через x. 2) Зведіть отримане рівняння до вигляду $9x^2-400x-225=0$, дискримінант якого дорівнює $D=168100=410^2$. Користуючись наведеними даними, знайдіть x.

Бонусне завдання. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{3x-11}-\frac{12}{\sqrt{3x-11}}+4=0$.

§ 26 ПОВТОРЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ НАВЧАЛЬНОГО МАТЕРІАЛУ

1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

Див. § 1

$|x| = a,\ a \geqslant 0,\ x = \pm a$

1 Знайдіть область допустимих значень змінної виразу:

1) $\dfrac{5a}{4a+4} - \dfrac{2}{a-6}$;

2) $\dfrac{3x}{x+1} - \dfrac{2}{5x-5}$;

3) $\dfrac{3y}{2y-6} + \dfrac{1}{y^2-9}$;

4) $\dfrac{21m}{8-4m} - \dfrac{m-3}{m^2-4}$;

5) $\dfrac{5t^3}{t^2+2} - \dfrac{1}{12-3|t|}$;

6) $\dfrac{4b}{5|b|-20} - \dfrac{b+1}{b^2+16}$.

2 Визначте знак дробу:

1) $\dfrac{8+a}{a+3}$, якщо $a > -1$;

2) $\dfrac{4-y}{y+3}$, якщо $y < -10$.

3 Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{\frac{2}{5}a+4}{\frac{1}{3}a-2}$, якщо $a = -15$;

2) $\dfrac{8x^4+12t^{10}}{-2t^5-3x^7}$, якщо $x = t = -1$.

Спрощуючи вирази, пам'ятайте про **порядок дій**.

Див. § 2, 4–6

4 Спростіть вираз:

1) $\left(\dfrac{a+7}{a-7} - \dfrac{a-7}{a+7}\right) : \dfrac{14}{a^2-7a}$;

2) $\dfrac{7c}{c+2} - \dfrac{c-8}{3c+6} \cdot \dfrac{84}{c^2-8c}$;

3) $\left(\dfrac{a+3}{a^2-1} - \dfrac{1}{a^2+a}\right) : \dfrac{3a+3}{a^2-a}$;

4) $\dfrac{1+\frac{m-1}{m}}{1-\frac{m-1}{m}} \cdot \dfrac{m}{1-2m}$.

Див. § 7

5 Розв'яжіть задачу:

1) Чисельник дробу на 4 менший за його знаменник. Якщо чисельник збільшити на 6, а знаменник — на 9, то дістанемо дріб $\dfrac{11}{18}$. Знайдіть початковий дріб.

2) Ольга та Світлана працюють у кафе швидкого харчування. На пакування кількох гамбургерів Світлана витрачає вдвічі менше часу, ніж Ольга. Скільки часу витрачає на пакування цих гамбургерів кожна дівчина, якщо разом дівчата можуть упакувати їх за 4 хв?

Для $a \neq 0,\ b \neq 0$:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$;

$a^m : a^n = a^{m-n}$; $(ab)^n = a^n b^n$;

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Див. § 8

6 Обчисліть значення виразу:

1) $\left(27^2 \cdot 3^{-9}\right)^{-1} : 3^4$;

2) $\left(2^{-6} + 4^{-3}\right) \cdot 2^7$;

3) $4^{11} \cdot \dfrac{1}{2^{25}} \cdot 2^{-7} \cdot 16^3$;

4) $\dfrac{25^{-6} \cdot 0{,}5^9}{5^{-6} \cdot (0{,}4)^{-8}} \cdot \left(5^3\right)^5$.

7 Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y=-\frac{2}{x}$ і $y=2x-5$. Визначте за графіками точки їх перетину.

Див. § 10

8 Знайдіть відстань, яку пройде сонячний промінь за 4 с, якщо швидкість світла 300 000 000 м/с. Запишіть відповідь у стандартному вигляді.

Див. § 9

ЧИ ВІДОМО ВАМ?
Найбільша швидкість, яку змогли розвинути люди за допомогою технічних засобів, становить 39 897 км/год.

2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ. ДІЙСНІ ЧИСЛА

1 Побудуйте в одній системі координат графіки заданих функцій. Визначте кількість точок перетину побудованих графіків.

1) $y=x^2$ і $y=4+2x$;
2) $y=-x^2$ і $y=-x+3$;
3) $y=x^2$ і $y=-\frac{3}{x}$;
4) $y=-x^2$ і $y=\frac{2}{x}$;
5) $y=\sqrt{x}$ і $y=\frac{1}{2}x+1$;
6) $y=-\sqrt{x}$ і $y=-\frac{4}{x}$.

Див. § 10, 11, 18

2 Розв'яжіть графічно рівняння:

1) $x^2=x+2$;
2) $\frac{3}{x}=2x+1$;
3) $x+5+x^2=0$;
4) $x+\frac{2}{x}-3=0$;
5) $\sqrt{x}-\frac{1}{2}x=0$;
6) $\sqrt{x}-\frac{8}{x}=0$.

3 Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{1\frac{9}{16}\cdot 1\frac{7}{25}}-\sqrt{18}+\sqrt{\frac{7}{64}\cdot 2\frac{30}{49}}$;

2) $16\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{13}\right)^2+\frac{1}{7}\left(4\sqrt{14}\right)^2$.

Див. § 15, 16, 17

4 Спростіть вираз:

1) $\frac{0{,}15m^{13}}{0{,}3n^3}\sqrt{\frac{4n^6}{m^{12}}}:\frac{1}{mn}$, якщо $m>0$, $n>0$;

2) $\sqrt{2{,}56\cdot a^{40}b^{18}c^{25}}$, якщо $a\geqslant 0$, $b<0$, $c\geqslant 0$.

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$;

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, $a\geqslant 0$, $b>0$;

$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$, $a\geqslant 0$;

$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a, \text{ якщо } a\geqslant 0,\\ -a, \text{ якщо } a<0\end{cases}$

Див. § 17

5 Спростіть вираз:

1) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$;

2) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{11}+\sqrt{3}\right)$;

3) $\frac{1}{7}\left(8-2\sqrt{3}\right)\left(8+2\sqrt{3}\right)$;

4) $\frac{1}{6}\left(4+2\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{7}-4\right)$;

5) $\left(\sqrt{7}+2\sqrt{5}\right)^2$;

6) $\left(3\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2$.

Див. § 15, 16

6 Винесіть множник із-під знака кореня та спростіть вираз:

1) $9\sqrt{m^6}$, якщо $m \leqslant 0$;

2) $\frac{1}{6}\sqrt{36(y-4)^2}$, якщо $y \geqslant 4$;

3) $\frac{\sqrt{9(5+t)^2}}{3}$, якщо $t \geqslant 12$;

4) $\frac{(n-6)^2}{\sqrt{(6-n)^2}}$, якщо $n < 6$.

Див. § 17

7 Скоротіть дріб:

1) $\frac{y^2-5}{\sqrt{5}+y}$;

2) $\frac{m-\sqrt{2m}}{m}$;

3) $\frac{a+4\sqrt{a}}{a-16}$;

4) $\frac{y+6\sqrt{y}+9}{9-y}$;

5) $\frac{8+\sqrt{56}}{\sqrt{7}+\sqrt{8}}$;

6) $\frac{7-\sqrt{28}}{3\sqrt{7}-6}$.

8 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу:

1) $\frac{4}{\sqrt{9a}}$;

2) $\frac{x^2}{2\sqrt{x}}$;

3) $\frac{m+5}{\sqrt{m+5}}$;

4) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

5) $\frac{21}{2\sqrt{2}-1}$;

6) $\frac{40}{\sqrt{35}-\sqrt{15}}$.

Див. § 15, 16, 17

9 Обчисліть значення виразу:

1) $\sqrt{\left(5-2\sqrt{7}\right)^2}+\sqrt{\left(2\sqrt{7}-3\right)^2}$; 2) $\sqrt{74^2-24^2}$; 3) $\sqrt{66^2+99^2}$.

$\sqrt{a^2}=|a|$;

$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a-b)(a+b)}$;

$\sqrt{(ak)^2+(bk)^2}=\sqrt{k^2\left(a^2+b^2\right)}=$
$=|k|\sqrt{a^2+b^2}$

10 Спростіть вираз:

1) $\frac{6}{2-\sqrt{5}}+\frac{6}{2+\sqrt{5}}$;

2) $\frac{11}{1-2\sqrt{3}}-\frac{11}{1+2\sqrt{3}}$;

3) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;

4) $\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}-\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3}$.

Див. § 13

11 Розв'яжіть задачі:

1) У 8-А класі 8 учнів відвідують секцію легкої атлетики, 14 учнів — секцію футболу, причому 3 учні відвідують обидві секції. Ще 7 учнів класу не відвідують цих секцій. Скільки всього учнів у 8-А класі?

2) У класі 35 учнів. Кожний із учнів користується хоча б одним із таких видів громадського транспорту: трамвай, тролейбус, маршрутний автобус. Відомо, що трамваєм і автобусом користуються 15 учнів, трамваєм і тролейбусом — 13 учнів, тролейбусом і автобусом — 9 учнів, причому 6 учнів класу користуються всіма трьома видами транспорту. Визначте, скільки учнів користуються лише одним видом транспорту.

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Перший в Україні електричний трамвай вирушив вулицями Києва у 1892 р.

3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

1 Скоротіть дріб:

1) $\dfrac{t^2-t-12}{t^2-16}$; 3) $\dfrac{3x^2-7x+2}{3x^2+14x-5}$;

2) $\dfrac{x^2+6x+9}{4x+12}$; 4) $\dfrac{t^2+t-56}{2t^2+15t-8}$.

Див. § 2, 23

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, $a\neq 0$, x_1, x_2 — корені квадратного тричлена

2 Визначте, при якому значенні m один із коренів рівняння $3x^2-7x+m=0$ дорівнює -1.

Див. § 21

3 Визначте, при якому значенні k одним із коренів рівняння $2x^2+3kx-2=0$ є число, що становить 30 % від $-\dfrac{20}{3}$.

a % від M становить $\dfrac{a}{100}\cdot M$

4 Знайдіть усі значення m, при яких рівняння $2x^2-5x-5m=0$:

1) не має коренів;

2) має один корінь $(x_1=x_2)$;

3) має два різні корені $(x_1\neq x_2)$.

- Якщо $D<0$, то рівняння не має коренів.
- Якщо $D=0$, то рівняння має один корінь $(x_1=x_2)$.
- Якщо $D>0$, то рівняння має два різні корені $(x_1\neq x_2)$

Теорема Вієта для рівняння $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1\cdot x_2$$

5 Не розв'язуючи рівняння $5x^2-x-2=0$, знайдіть:

1) $\dfrac{1}{x_1x_2^2}+\dfrac{1}{x_1^2x_2}$; 2) $x_1^2+x_2^2$; 3) $x_1^3+x_2^3$.

Див. § 22

Див. § 24

Квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, має корені $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2}$, де $D=b^2-4ac$ — дискримінант квадратного рівняння.

6 Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{3x^2+x}{4}-\dfrac{3x^2+17}{10}=\dfrac{2-7x}{5}$;

2) $\dfrac{3x+12}{2x^2+5x-12}=0$;

3) $9y^4-37y^2+4=0$;

4) $\dfrac{3y^2+y-24}{9-y^2}+2=0$;

5) $\left(2t^2+1\right)^2-4\left(2t^2+1\right)+3=0$;

6) $\dfrac{4}{1-9x^2}+\dfrac{3}{x+3x^2}=\dfrac{4}{1+9x^2+6x}$;

7) $y^2+y-3=\dfrac{12}{y^2+y-2}$;

8) $x(x-3)=\dfrac{12}{(x-4)(x+1)}$.

Див. § 25

7 Розв'яжіть задачі:

1) На подолання дистанції зі штучними перешкодами на баггі відводилося 60 хв. Складність кожної перешкоди було підвищено таким чином, що в середньому на її подолання тепер витрачається на 2 хв більше, ніж до ускладнення. Знайдіть початкову кількість штучних перешкод, якщо після ускладнення їх кількість зменшили на 1, а час на подолання всієї дистанції не змінився.

2) Екскурсія в Музеї шоколаду мала тривати 80 хв. Але виявилося, що три із запланованих для ознайомлення тематичних залів закрито для відвідувачів. Тому на огляд кожного з інших залів було відведено в середньому на 6 хв більше. Яку кількість залів відвідали екскурсанти, якщо тривалість екскурсії не змінилася?

3) Патрульний катер пройшов 72 км за течією річки та повернувся назад, витративши на весь шлях 7 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.

4)* Усередину судна через тріщину надходила вода зі швидкістю 6 л/с. Коли об'єм води всередині судна становив 840 л, увімкнули дві помпи з однаковою продуктивністю (у л/с), які почали відкачувати воду. Коли об'єм води знизився наполовину, одну помпу вимкнули. Поки всередині судна була вода, тріщину не латали, тобто вода продовжувала надходити з тією самою швидкістю. Усю воду, що була всередині судна, відкачали за 135 с, після чого тріщину залатали. З якою швидкістю (у л/с) кожна помпа відкачувала воду?

ЧИ ВІДОМО ВАМ?

Баггі (англ. buggy) — транспортні засоби, що мають жорстку раму, великі колеса, широкі шини та призначені для катання по піску та пересіченій місцевості. Історія баггі почалася в 50-ті роки XX ст. в Америці. В конструкції баггі поєднуються високі технології і найпростіші рішення. Сучасні баггі можуть форсувати броди завглибшки до 700 мм, «перелазити» через наземні перешкоди заввишки до 600 мм, підніматися на круті схили (з кутом нахилу до 70°).

КОНТРОЛЬНА РОБОТА № 7

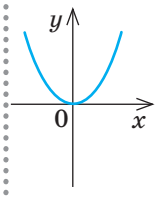
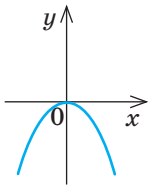
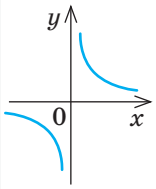
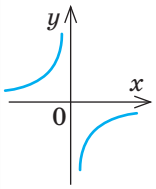
Варіант 1

ІНТЕРНЕТ-ПОСИЛАННЯ
Варіант 2 контрольної роботи № 7 див. на сайті interactive.ranok.com.ua

1 Скоротіть дріб $\frac{10a^3}{5a^6}$.

А	Б	В	Г
$\frac{2}{a^2}$	$\frac{5}{a^3}$	$\frac{5}{a^2}$	$\frac{2}{a^3}$

2 Виберіть графік функції $y = x^2$.

А	Б	В	Г
			

3 Обчисліть значення виразу $\left(3\sqrt{5}\right)^2$.

А	Б	В	Г
15	45	75	30

4 Виконайте дії: $\frac{n^2-4}{2} \cdot \frac{2}{n+2}$.

А	Б	В	Г
$\frac{1}{n+2}$	$n+2$	$n-2$	$\frac{1}{n-2}$

5 Скільки коренів має рівняння $\frac{x^2+x-12}{x+4} = 0$?

А	Б	В	Г
Жодного	Один	Два	Більше двох

6 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{15}{\sqrt{5}}$.

А	Б	В	Г
15	3	$15\sqrt{5}$	$3\sqrt{5}$

7 Визначте суму коренів рівняння $x^2+8x-5=0$.

А	Б	В	Г
−8	8	−5	5

8 Виберіть правильне твердження.

А	Б	В	Г
$-5 \in N$	$0{,}8 \in Z$	$\sqrt{144} \in Q$	$\sqrt{0{,}9} \in Q$

9 Знайдіть корені рівняння $y^2+6y-16=0$.

А	Б	В	Г
−8; −2	8; 2	8; −2	−8; 2

10 Спростіть вираз $\sqrt{32}-\sqrt{18}$.

А	Б	В	Г
$\sqrt{14}$	$3\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$

11 Виберіть вираз, у якому число 12 000 записане в стандартному вигляді.

А	Б	В	Г
$12\cdot10^3$	$120\cdot10^2$	$0{,}12\cdot10^5$	$1{,}2\cdot10^4$

12 Якщо $m<0$, то $\sqrt{m^{14}}=$

А	Б	В	Г
m^7	m^{12}	$-m^{12}$	$-m^7$

13 Доведіть тотожність

$$\left(\frac{a}{a-3}-\frac{2}{a+3}\right):\frac{5a^2+5a+30}{a^2-9}=\frac{1}{5},\ a\neq\pm3.$$

14 Обчисліть: $\frac{\sqrt{3}-2}{4}\cdot\sqrt{\left(\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}-2}\right)^2}$.

15 Розв'яжіть рівняння

$$\frac{2x^2-15}{x^2-4x+4}-\frac{x-1}{x^2-2x}=\frac{2x+1}{x}.$$

16 Відомо, що $M=\frac{22}{2\sqrt{3}-1}$.

1) Звільніться від ірраціональності в знаменнику поданого дробу.

2) Виконайте дії: $\frac{M}{\left(2\sqrt{3}+1\right)^2}-\frac{2}{2\sqrt{3}-1}$.

17 Для журналу кожен із двох фотографів має зробити 240 фотографій дикої природи. Щодня перший фотограф робив x фотографій, а другий — на 10 фотографій більше. Другий фотограф закінчив роботу на 2 дні раніше.

1) Складіть рівняння для визначення x.

2) Визначте, скільки фотографій робив кожний фотограф щодня.

18 Розв'яжіть рівняння $\left(x^2-3\right)^2+x^2-3=2$.

Бонусне завдання. Дано функцію

$$y=\frac{6\sqrt{x}-12}{x\sqrt{x}-2x}.$$

1) Знайдіть область її визначення $D(y)$.

2) Побудуйте графік цієї функції.

ВІДПОВІДІ ДО ЗАВДАНЬ

Контрольна робота № 1

Варіант 1. **1.** В. **2.** Б. **3.** Г. **4.** В. **5.** А. **6.** Г. **7.** $\frac{3}{20}$. **8.** $(-6;1)$. **9.** 1) $\begin{cases} x+y=28, \\ x-y=6; \end{cases}$ 2) 17 і 11 телефонів відповідно. **10.** 2) при $3<x<6$. **Бонусне завдання:** 0; 3.

Контрольна робота № 2

Варіант 1. **1.** В. **2.** Г. **3.** В. **4.** Б. **5.** А. **6.** Г. **8.** $x+3x^6-\frac{7}{x}$. **9.** $\frac{12}{c-3}$. **10.** $\frac{1}{n-1}$; 10. **Бонусне завдання:** −4,1.

Контрольна робота № 3

Варіант 1. **1.** В. **2.** А. **3.** Б. **4.** Г. **5.** Б. **6.** Г. **7.** −10. **9.** 1) $\frac{1200}{50}-\frac{1200}{50+x}=4$; 2) 10. **10.** $D(y)$: $x\neq 0$, $x\neq 2$. **Бонусне завдання.** 19.

Контрольна робота № 4

Варіант 1. **1.** А. **2.** Б. **3.** Г. **4.** В. **5.** В. **6.** Б. **7.** 176. **8.** −2. **9.** −2; 1. **10.** $-\frac{1}{\sqrt{a}}$; −1,8. **Бонусне завдання.** 5.

Контрольна робота № 5

Варіант 1. **1.** В. **2.** А. **3.** Б. **4.** Б. **5.** В. **6.** Г. **7.** $\frac{1+\sqrt{61}}{6}$, $\frac{1-\sqrt{61}}{6}$. **8.** 3; −5. **9.** 1) $x^2+4x-2700=0$; 2) 50; 3) 100 г. **10.** 1) $x_1=-1$, $x_2=-5$; $m=-\frac{1}{3}$. **Бонусне завдання.** −12; 0.

Контрольна робота № 6

Варіант 1. **1.** Б. **2.** Г. **3.** А. **4.** В. **5.** А. **6.** Б. **7.** 1) $\frac{x+6}{x-5}$, $x\neq 2$, $x\neq 5$; 2) 111. **8.** 1) $24\frac{b}{a}+7$; 2) 13. **9.** $\pm\sqrt{6}$. **10.** 1) $\frac{50}{x+5}+\frac{50}{x-5}=2\frac{1}{4}$; 2) $x=45$. **Бонусне завдання.** $x=5$.

Контрольна робота № 7

Варіант 1. **1.** Г. **2.** А. **3.** Б. **4.** В. **5.** Б. **6.** Г. **7.** А. **8.** В. **9.** Г. **10.** В. **11.** Г. **12.** Г. **14.** $-\frac{1}{2}$. **15.** 3; $-\frac{1}{3}$. **16.** 1) $2\left(2\sqrt{3}+1\right)$. 2) $-\frac{4}{11}$. **17.** 1) $\frac{240}{x}-\frac{240}{x+10}=2$; 2) 30 та 40. **18.** ± 1, ± 2. **Бонусне завдання** 1) $D(y)=(0;4)\cup(4;+\infty)$.

РОЗДІЛ 1

§ 1

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 3, 4; неправильне твердження — 1, 2, 5.

Самостійна робота № 1

1. Б. **2.** В. **3.** Г. **4.** А. **5.** В. **6.** 1 — Г; 2 — В; 3 — А. **7.** 1) знак «−»; 2) знак «−»; **8.** 1) $x\neq\pm 7$; 2) −1.

Домашнє завдання

1. 1) −0,25; 2) −2; 3) 1,2; 4) 24.
2. 1) $x\neq 0$; 2) $x\neq 0$; 3) $x\neq 12$; 4) $x\neq -1$; 5) $x\neq -9$; 6) $x\neq 8$; 7) $x\neq\pm 4$; 8) $x\neq\pm 0{,}5$.
3. 1) $x\neq 0$, $x\neq 3$; 2) $x\neq 1$, $x\neq\pm 6$; 3) $x\neq -11$, $x\neq\pm 3$; 4) $x\neq\pm 4$.
4. 1) «−»; 2) «−»; 3) «+»; 4) «+».
5. 1) $\frac{4n}{5}$; 2) $\frac{xy}{2}$; 3) $483-80x$; 4) $\frac{120(b-a)}{b}$.

§ 2

Завдання із зіркою. Правильне твердження — 5; неправильні твердження — 1–4.

Самостійна робота № 2: **1.** Б. **2.** А. **3.** Г. **4.** Г. **5.** В. **6.** 1 — Б; 2 — Г; 3 — А. **7.** 1) 4; 2) 19. **8.** $\frac{5(3x-a)}{4}$.

Math for Life. Задача «Страхові консультанти»:
1. Віталій, 213. **2.** Віталій, Софія, Олена, Антон. **3.** 136. **4.** Середа, 97.

Домашнє завдання

1. 1) $\frac{5}{2y^2}$; 2) $\frac{b}{2+b}$; 3) $\frac{9x+1}{9x-1}$; 4) $\frac{a+6}{a-6}$; 5) $\frac{3x-y}{y}$; 6) $\frac{x-7y}{x+7y}$.
2. 1) $\frac{18ab^5}{8a^2b^2}$; 2) $\frac{a(a-3b)}{a^2-9b^2}$; 3) $\frac{7b(4b-3)}{16b^2-24b+9}$; 4) $\frac{49x^2-y^2}{49x^2+14x+y^2}$.
3. У $\frac{3x}{x+2}$ разу; 1) 2,4; 2) 2,5.
4. 1) 3; 2) $\frac{2}{p-5}$; 3) $\frac{8}{(x-1)^2}$; 4) $\frac{(x+1)^3}{27}$; 5) $\frac{1}{25}$; 6) 36.
5. 1) 4; 2) 5; 3) 8.
6. 1) $\frac{1}{3}$; 2) 0,5; 3) 0,25; 4) 5.

§ 3

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 3, 4 і 5; неправильні твердження — 1, 2.

Самостійна робота № 3: 1. А. **2.** Г. **3.** Б. **4.** В. **5.** Г. **6.** 1 — Б; 2 — В; 3 — Г. **7.** $\frac{x+3}{x-1}$.

Math for Life. Задача «Стартап»: 12,5.

Домашнє завдання

1. 1) $\frac{7}{a}$ при $a \neq 0$; 2) 1 при $x \neq 2{,}25$; 3) $y-4$ при $y \neq -4$; 4) $\frac{x-5}{x+y}$ при $x \neq -y$, $x \neq 5$.

2. 1) $1+\frac{1}{b}$; 2) $y^2-\frac{3}{y^2}$; 3) $3-m^7+\frac{2}{m}$; 4) $5n^8+2n^3-\frac{1}{n}$.

3. 1) $\frac{1}{a-2}$; 2) 1; 3) $\frac{9}{(b-1)^2}$; 4) $\frac{1}{y-5}$; 5) 5; 6) $\frac{3}{4k-c}$; 7) 1; 8) $y-2$.

4. 2.

§ 4

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 1, 3, 4, 5; неправильне твердження — 2.

Math for Life. Задача «Тріатлон»:

1. $\left(\frac{1}{2v}+\frac{11}{8v}+\frac{6}{v+6}\right)$ год. **2.** $1\frac{11}{16}$ год. **3.** Не потрапив.

Самостійна робота № 4: 1. А. **2.** В. **3.** Б. **4.** Г. **5.** Б. **6.** 1 — В; 2 — Г; 3 — Б. **7.** $\frac{4}{m+5n}$.

Домашнє завдання

1. 1) $\frac{b}{2}$; 2) $\frac{8y}{3}$; 3) $\frac{11}{3a}$; 4) $\frac{11}{4x}$; 5) $\frac{x+6n}{n^2}$; 6) $\frac{9-nb}{b^3}$; 7) $\frac{2m-ny^3}{8y^6}$; 8) $\frac{5ax^2+6b}{12x^5}$.

2. 1) $4x^3(x-y)$; 2) $5(a+b)(a-b)^2$.

3. 1) $\frac{3}{a-2}$ при $a \neq 2$, $a \neq 0$; 2) $\frac{4}{a+3}$ при $a \neq -3$, $a \neq 0$; 3) $\frac{b}{(b+5)(b-2)}$ при $b \neq 2$, $b \neq -5$; 4) $\frac{3}{(b-3)(b+1)}$ при $b \neq 3$, $b \neq -1$; 5) $\frac{x-3}{x+3}$ при $x \neq \pm 3$; 6) $\frac{b+4}{b-4}$ при $b \neq \pm 4$; 7) $\frac{16}{n-4}$ при $n \neq \pm 4$; 8) $\frac{6}{a+4b}$ при $a \neq 4b$, $a \neq -4b$.

4. 1) $\frac{3y}{y-1}$; 2) $\frac{2x}{x-2}$; 3) $-\frac{n}{n+1}$; 4) $\frac{2m}{m+2}$; 5) $\frac{x^2}{x+y}$; 6) $\frac{n^2}{m+n}$; 7) b; 8) x.

5. $\frac{5}{v-3}+\frac{5}{v+3}$.

6. 1) $\frac{4}{a+5}$; 2) $\frac{3}{n+8}$; 3) $\frac{5}{xy}$; 4) $\frac{4a+5}{4a-5}$.

§ 5

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 1, 5; неправильні твердження — 2, 3, 4.

Самостійна робота № 5: 1. А. **2.** Г. **3.** Б. **4.** В. **5.** Б. **6.** 1 — Г; 2 — В; 3 — Б. **7.** $\frac{5}{x+4}$; 50. **8.** $-\frac{a+2b}{4b}$; -1.

Math for Life. Задача «Вигідна пропозиція»:

1. $\frac{S}{q}$. **2.** 340. **3.** 264.

Домашнє завдання

1. 1) $\frac{8}{7}$; 2) $\frac{5}{b^2}$; 3) $\frac{18}{y^3}$; 4) $\frac{4}{ba^4}$.

2. 1) 1 при $y \neq -9$; 2) $\frac{1}{10}$ при $x \neq 0$, $m \neq n$; 3) $-\frac{5a}{b+6}$ при $b \neq \pm 6$; 4) $-\frac{n}{2}$.

3. 1) $\frac{x^2}{64y^2}$; 2) $\frac{27c^{12}}{d^{21}}$; 3) $\frac{625a^{32}}{16x^{36}y^4}$; 4) $\frac{729x^6y^{27}}{512m^{90}n^{18}}$.

4. 1) $\frac{x^4}{16y^4}$; 2) $-\frac{c^6}{27d^{18}}$; 3) $\frac{81x^2y^8}{64a^{14}}$; 4) $-\frac{32k^{15}n^{70}}{243x^{20}y^{25}}$.

5. 1) $\frac{1}{n^8}$; 2) $\frac{y^3}{x^3}$; 3) c^4; 4) $\frac{16y^4}{x^{17}}$.

6. 1) $\frac{3c}{x}$ при $c \neq 0$, $x \neq 0$; 2) $\frac{d^3}{c^2}$ при $c \neq 0$, $d \neq 0$; 3) $\frac{1}{5a^6m^3}$ при $a \neq 0$, $m \neq 0$; 4) $\frac{8c^6x}{45y^2}$ при $c \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.

7. 1) k; 2) $-\frac{2}{x^4}$; 3) $-\frac{y-11}{4y^2}$; 4) $\frac{x-y}{5k+m}$.

8. 1) 46 грн; 2) 1104 грн; 3) 770 грн.

9. 1) $b=4a$; 2) $x=\frac{4}{5}y$; 3) $y=\frac{3mx}{k}$; 4) $m=\frac{ky}{4x}$.

§ 6

Завдання із зіркою. Усі твердження правильні.

Math for Life. Задача «Вільний час»:

1. $900-5t_1$. **2.** 800. **3.** 50 %.

Самостійна робота № 6: 1. В. **2.** Б. **3.** А. **4.** Г. **5.** А. **6.** 1 — А; 2 — В; 3 — Б. **7.** $\frac{8}{x}$; 6,4.

Домашнє завдання

1. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{a^3}{b}$; 3) $\frac{7(m+k)}{m}$; 4) $\frac{4c+k}{4c-k}$.

2. 1) $\frac{12y-1}{4}$; 2) $\frac{15y-3}{16}$; 3) $-\frac{c}{2}$; 4) -12.

4. 1) $y-2$; 2) $\frac{y}{y-2}$; 3) $\frac{k-1}{k}$; 4) $-n$.

5. 1) 272 грн; 2) на 68 грн менше; 3) 476 грн; 4) на 204 грн менше; 5) 10 рюкзаків.

§ 7

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 1, 2, 4, 5; неправильне твердження — 3.

Math for Life. Задача «Call-центр»:

1. 2. **2.** 1) $\frac{15}{x}$; 2) $2+\frac{15}{x}$. **3.** $2+\frac{15}{x}=\frac{300}{60}$. **4.** $x=5$. **5.** 270.

Самостійна робота № 7: 1. Б. **2.** Г. **3.** В. **4.** А. **5.** А. **6.** 1 — Г, 2 — А, 3 — Б. **7.** $-\frac{3}{7}$. **8.** 4.

Домашнє завдання

1. 1) -5; 2) -6; 3) 1; 4) -7; 5) коренів немає; 6) коренів немає.

2. 1) 3; 2) коренів немає; 3) $\frac{11}{16}$; 4) $-\frac{1}{7}$.

3. 1) 7; 2) коренів немає; 3) 6; 4) коренів немає.

4. 1) 28; 2) 7; 3) $\frac{5}{11}$; 4) $\frac{4}{7}$.

5. 1) $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{40}$; 2) $\frac{1}{20}+\frac{1}{x}$; 3) $\frac{1}{20}+\frac{1}{x}=\frac{1}{12}$; 4) 30 хв.

§ 8

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 1, 2, 5; неправильні — 3, 4.

Math for Life. Задача «Серцевий ритм»: $1{,}104\cdot10^9$.

Домашнє завдання 1. 1) $\frac{1}{49}$; 2) $\frac{1}{16}$; 3) $\frac{2}{3}$; 4) 3; 5) 28; 6) 54; 7) 32; 8) 32.

2. 1) $\frac{1}{7}$; 2) $\frac{27}{64}$; 3) $\frac{1}{8}$; 4) $\frac{1}{81}$; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{243}$.

3. 1) $m^{-2}n^{-1}$; 2) $4x^2$; 3) m^4n^{-2}; 4) x^3y^2; 5) $a^{-6}b^2$; 6) $4x(a+b)^{-2}$.

4. $1{,}9\cdot10^3$.

5. 1) ab; 2) x^3y^2; 3) $\frac{a^2}{b^8}$; 4) $\frac{y^3}{x}$; 5) $\frac{b}{a}$; 6) $\frac{y^{10}}{x}$; 7) $\frac{a^2}{b^8}$; 8) $\frac{z}{x^{10}}$.

6. 1) $x^5(7x^3+1)$; 2) $x^7(x^4+5)$; 3) $x^{-8}(x^3+7)$; 4) $x^{-11}(5x^4+1)$; 5) $x^{-4}(4x-6+x^8)$; 6) $x^{-6}(1+2x^9-8x^4)$; 7) $x^{-5}(3-x^{13}+2x^5)$; 8) $x^{-4}(x^5+x^4-8)$.

7. $3\cdot10^{-3}$ кг; $3\cdot10^3$ кг; 10^{-3} кг; 10^2 кг.

§ 9

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 3, 4, 5; неправильні твердження — 1, 2.

Math for Life. Задача «Запаси прісної води»:

1. $2{,}4\cdot10^7$; $1{,}05\cdot10^7$; $9{,}3\cdot10^4$; $3{,}4\cdot10^5$.

2. 1) У $\approx 2{,}6\cdot10^2$ разів; 2) у $\approx 2{,}3$ рази.

Самостійна робота № 8: 1. В. **2.** А. **3.** Б. **4.** Г. **5.** А. **6.** 1 — В; 2 — Б; 3 — А. **7.** 25. **8.** b^{-8}; 10^8.

Домашнє завдання

1. 1) $5{,}7\cdot10^4$; 2) $4{,}1\cdot10^5$; 3) $3{,}7\cdot10^{-5}$; 4) $5{,}76\cdot10^{-4}$.

2. 1) $3{,}2\cdot10^{10}$ байт; 2) $m=5\cdot10^{-8}$ кг.

3. 1) $4{,}95\cdot10^2$ ккал; 2) $2{,}52\cdot10^2$ ккал; 3) у $\approx 2{,}8\cdot10$ разів; 4) у $\approx 5{,}4\cdot10^2$ разів.

4. 1) 18; 2) -17; 3) 16; 4) -7.

5. 1) -9; 2) 8; 3) -13; 4) 22.

§ 10

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 1, 3, 4, 5; неправильне твердження — 2.

Самостійна робота № 9: 1. В. **2.** Г. **3.** Б. **4.** А. **5.** А. **6.** 1 — Г; 2 — Б; 3 — В. **7.** 1) 2,5; 2) проходить. **8.** 1) $D(y): x\neq0,\ x\neq-3$.

Math for Life. Задача «Телефонні розмови»:

1. $k=8400$. **2.** 140. **3.** 420 хв. **4.** Правильний.

Домашнє завдання

1. а) 1) -1; -5; 5; 1; 2) -1; $\approx-2{,}5$; -5; 5; $\approx2{,}5$; $\approx1{,}25$; 1; 3) при $x>0$; 4) при $x<0$; 5) $y(2)>y(5)$; 6) $y(-4)<y(-5)$; 7) $y(-3)\cdot y(4)<0$; 8) $-\frac{y(2)\cdot y(5)}{y\left(-\frac{5}{3}\right)}>0$;

б) 1) 1; 2; -4; -1; 2) 1; 2; 4; -4; -2; $-1\frac{1}{3}$; -1; 3) при $x<0$; 4) при $x>0$; 5) $y(3)>y(2)$; 6) $y(-4)<y(-3)$; 7) $y(-4)\cdot y(5)<0$; 8) $-\frac{y(2)\cdot y(4)}{y\left(-\frac{8}{7}\right)}<0$.

2. 1) $(-4;-1)$, $(1;4)$; 2) $(1;-1)$.

3. 1) Проходить; 2) проходить; 3) $k=-48$; 4) не проходить.

РОЗДІЛ 2

§ 11

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 2, 3 і 5, неправильні твердження — 1, 4.

Math for Life. Задача «Маркетинг»:
1. 100 тис.; **2.** 20; **3.** $n=t^2$; **4.** 2500 тис.

Домашнє завдання
2. 1) $y(0)<y(2)$; 2) $y(-4)>y(0)$; 3) $y(-3)>y(-2)$; 4) $y(0{,}9)-y\left(-\frac{3}{2}\right)<0$.
3. 1) Одна; 2) жодної; 3) $(-3;9)$, $(3;9)$; 4) $(0;0)$, $(2;4)$.
4. 1) $(-3;9)$, $(1;1)$; 2) $(1;1)$.
5. 1) Два; 2) один; 3) –1; 1; 4) 1.
6. 1) –2; 2) –1; 3) –3; 2; 4) –2; –1.

§ 12

Завдання із зіркою. Усі твердження, крім 1, правильні.

Самостійна робота № 10
1. Г. **2.** А. **3.** Б. **4.** Г. **5.** А. **6.** 1 — Б, 2 — А, 3 — В. **7.** $x_1=-4$ і $x_2=-1$. **8.** $x=-23$.

Math for Life. Задача «Піца з морепродуктами»:
1. «Сімейну». **2.** «Стандартну». **3.** «Стандартна» піца — 28,26 г. о., а «Сімейна» — 50,24 г. о.

Домашнє завдання
1. 1) 9; 2) 0,8; 3) $\frac{6}{13}$; 4) $1\frac{2}{9}$.
2. 1) –3; 2) –9; 3) –19; 4) 93.
3. 1) 38; 2) 10; 3) –5; 4) 48.
4. 1) 56; 2) 7; 3) 15; 4) 7.
5. 1) 16; 2) 25; 3) 0,04; 4) 0,49.
6. 1) 36; 2) 25; 3) –46,5.

§ 13

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 1, 2 і 4, неправильні твердження — 3, 5.

Math for Life. Задача «Києво-Могилянська академія»:
1. Д. **2.** Б. **3.** А. **4.** 35. *Розв'язання.* Оскільки кандидатів було 4, то переможець набрав не менше ніж $\frac{1}{4}\cdot 135=33{,}75$ голосів. Проте кількість набраних голосів може бути лише натуральним числом. Якщо це число 34, то у решти кандидатів може бути набрано 34, 34, 33 голосів, що не гарантує перемоги. Якщо ж це число 35, то в інших кандидатів може бути 34, 33, 33 голосів, що задовольняє умову задачі.

Домашнє завдання
1. 1) $P\subset S$; 2) $M\subset S$; 3) $M\subset G\subset P$; 4) $P\subset M\subset K\subset \mathbf{Z}$.
2. 1) 19; 2) 22; 3) 10; 4) 9.

§ 14

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 3, 4 і 5, неправильні твердження — 1, 2.

Самостійна робота № 11
1. Г. **2.** Б. **3.** А. **4.** В. **5.** Г. **6.** 1 — Б, 2 — В, 3 — А. **7.** $-\sqrt{64}<-\sqrt{61}$. **8.** $\frac{5}{33}$; $0{,}(15)>\frac{2\sqrt{6}}{33}$.

Math for Life. Задача «Поїздка в маршрутному таксі»:
1. 24 км. **2.** 6 грн. **3.** 18 хв. **4.** 2 маршрутних таксі.

Домашнє завдання
1. 1) $0{,}(3)$; 2) $0{,}(18)$; 3) $0{,}9(4)$; 4) $0{,}2(87)$;
2. 1) $\frac{5}{9}$; 2) $\frac{16}{99}$; 3) $\frac{13}{90}$; 4) $\frac{26}{55}$.
3. 1) $a>b$; 2) $k>m$; 3) $c>n$; 4) $x<y$; 5) $a<m$; 6) $b>k$; 7) $a<c<b$; 8) $y<z<x$.

§ 15

Завдання із зіркою. Всі твердження, крім 5, правильні.

Math for Life. Задача «Таксі»:
1. «Оптимальне». **2.** 24,9 грн. **3.** 71 грн. **4.** «Браво».

Домашнє завдання
1. 1) 3; 2) 10; 3) 15; 4) 55; 5) 56; 6) 34; 7) –2,4; 8) –3,5.
2. 1) 1,4; 2) 1,5; 3) 4,8; 4) 8,8.
3. 1) $|k|$; 2) $5|m|$; 3) a; 4) $5b$.
4. 1) 9; 2) 49; 3) 27; 4) 16.
5. 1) $7y^{18}$; 2) $2n^{20}$; 3) c^{10}; 4) z^{32}.
6. 1) $y+4$; 2) $1-a$; 3) $2-x$; 4) $x+5$; 5) $5(t+6)$; 6) $c-1$; 7) –1; 8) 1.

§ 16

Завдання із зіркою. Всі твердження, крім 5, правильні.

Math for Life. Задача «Тренажерний зал»:
4. Частота пульсу прийшла до норми менш ніж за 6 хв.

Домашнє завдання
1. 1) 140; 2) 15; 3) 60; 4) 42; 5) 1,75; 6) 2,88.
2. 1) 27; 2) 28; 3) 35; 4) 45; 5) $9\sqrt{7}$; 6) $15\sqrt{3}$.
3. 1) 10; 2) 2; 3) 3; 4) 28; 5) 45; 6) 210.
4. 1) $5\sqrt{c}$, де $c\geqslant 0$; 2) $7\sqrt{n}$, де $n\geqslant 0$; 3) $20\sqrt{y}$, де $y\geqslant 0$; 4) $14\sqrt{k}$, де $k\geqslant 0$; 5) $8\sqrt{-b}$, де $b\leqslant 0$; 6) $6\sqrt{-m}$, де $m\leqslant 0$; 7) $4\sqrt{ab}=4\sqrt{|a|}\sqrt{|b|}$, де a і b мають один знак; 8) $30\sqrt{-np}=30\sqrt{|n|}\sqrt{|p|}$, де n і p мають різні знаки.
5. 1) $\frac{2}{5}$; 2) $\frac{6}{7}$; 3) $\frac{12}{13}$; 4) $\frac{17}{20}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{4}{7}$; 7) $1\frac{1}{9}$; 8) $1\frac{4}{7}$.

6. 1) 5; 2) $\frac{8}{9}$; 3) 1; 4) 3; 5) 108; 6) 336.

7. 1) $\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$; 3) $\frac{\sqrt{5p}}{\sqrt{z}}$; 4) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{11y}}$; 5) $\frac{\sqrt{-6a}}{\sqrt{-m}}$; 6) $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{-17k}}$; 7) $\frac{\sqrt{-7c}}{\sqrt{-yz}}$; 8) $\frac{\sqrt{bm}}{\sqrt{-19p}}$.

§ 17

Завдання із зіркою. Всі твердження, крім 4, правильні.

Math for Life. Задача «Тест при прийомі на роботу». Так, буде прийнятий на роботу.

Домашнє завдання

1. 1) $11\sqrt{c}$; 2) $8\sqrt{m}$; 3) $-7\sqrt{y}$; 4) $-8\sqrt{k}$.

2. 1) $11\sqrt{x}$; 2) $-14\sqrt{t}$; 3) $-2\sqrt{3a}$; 4) $26\sqrt{2n}$.

3. 1) 1; 2) 0,2; 3) $4\sqrt{2}$; 4) 4.

4. 1) 3; 2) −4; 3) 7; 4) $30-6\sqrt{2}$.

5. 1) 8; 2) 51; 3) $87-12\sqrt{42}$; 4) 36.

6. 1) $-\sqrt{150}$; 2) $-\sqrt{5r^2}$; 3) $-\sqrt{50}<-\sqrt{49}$; 4) $-2\sqrt{5}$.

7. 1) $\sqrt{10}-1$; 2) $a-\sqrt{17}$; 3) $\frac{y+\sqrt{2}}{2\left(y-\sqrt{2}\right)}$; 4) $\frac{\sqrt{3c}+1}{3\left(\sqrt{3c}-1\right)}$.

8. 1) $\frac{6\sqrt{5}}{5}$; 2) $8\sqrt{10}$; 3) $3\sqrt{19}-12$; 4) $\frac{\sqrt{77}-9}{2}$.

§ 18

Завдання із зіркою. Всі твердження, крім 5, правильні.

Самостійна робота № 12

1. В. **2.** Г. **3.** А. **4.** А. **5.** Б. **6.** 1 — В, 2 — Г, 3 — А, **7.** 1) $\frac{\sqrt{14}}{2}$; 2) $\sqrt{11}+3$, **8.** 14.

Math for Life. Задача «Морозиво»:

1. 500; **2.** 16 °C; **3.** $n=\sqrt{t}$; **4.** 600. **5.** Так, правильний.

Домашнє завдання

1. 1) $\sqrt{11}>\sqrt{8}$; 2) $3<\sqrt{10}$; 3) $2\sqrt{3}>3$; 4) $4<2\sqrt{5}$; 5) $\frac{1}{3}\sqrt{63}<\frac{1}{2}\sqrt{32}$; 6) $\frac{1}{4}\sqrt{80}<\frac{1}{2}\sqrt{24}$.

2. 1) 1; 2) 3; 3) 4; 4) 4; 5) 4; 5; 6) 3; 4; 5; 6.

3. 1) $a=\sqrt{a_c\cdot c}$; 2) $c=\sqrt{\frac{E}{m}}$; 3) $q=\sqrt{2CW_e}$.

4. 1) Два; 2) жодної

5. 1) 1; 2) 9.

РОЗДІЛ 3

§ 19

Завдання із зіркою. Правильні твердження —1, 2, 3 і 5, неправильне твердження — 4.

Math for life. Задача «Морська екскурсія». У той день, коли немає течії. Розв'язання. Нехай s — відстань по морю між пунктами A і B, v — власна швидкість катера, u — швидкість течії. Тоді $(v+u)$ — швидкість катера за течією, і $(v-u)$ — швидкість катера проти течії. Час, витрачений на проходження маршруту A — B — A у той день, коли немає течії, дорівнює $T_1=\frac{s}{v}+\frac{s}{v}=\frac{2s}{v}$. Час, витрачений на проходження того самого маршруту, коли є течія, дорівнює $T_2=\frac{s}{v+u}+\frac{s}{v-u}=\frac{2sv}{v^2-u^2}$. Порівняємо величини T_1 і T_2, для цього знайдемо їх відношення. $\frac{T_1}{T_2}=\frac{2s}{v}:\frac{2sv}{v^2-u^2}=\frac{v^2-u^2}{v^2}=1-\frac{u^2}{v^2}$. Оскільки $1-\frac{u^2}{v^2}<1$, то $T_1<T_2$. Отже, на проходження маршруту катером у той день, коли немає течії, часу витрачається менше.

Домашнє завдання

1. 1) $a=-7$, $b=1$, $c=6$; 2) $a=\frac{1}{6}$, $b=0$, $c=-2$; 3) $a=-9$, $b=\frac{1}{7}$, $c=0$.

2. 1) $\frac{1}{3}x^2-2{,}5x-8=0$; 2) $-3{,}3x^2+9x-\frac{1}{2}=0$.

3. 1) $7x^2-3$, $a=7$, $b=0$, $c=-3$; 2) $2x^2-29x+18$, $a=2$, $b=-29$, $c=18$; 3) $75x^2-26x-27$, $a=75$, $b=-26$, $c=-27$.

4. 1) 7; 2) 2,4; 3) 5.

§ 20

Завдання із зіркою. Всі твердження, крім 4, правильні.

Math for life. Задача «Фасувально-пакувальний автомат»:

1. $x+10$. **2.** $x^2-10x-1200=0$. **3.** 30. **4.** За 50 хв.

Домашнє завдання

1. 1) −5; 0; 2) −4; 0; 3) −0,1; 0; 4) −2,5; 0.

2. 1) −9; 9; 2) −3; 3; 3) $-\frac{5}{6}$; $\frac{5}{6}$; 4) −3; 3.

3. 1) 0; −4; 2) коренів немає; 3) $\sqrt{5}-4$; $-\sqrt{5}-4$; 4) $7-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}+7$.

4. 1) $(x-3)(x+3)=40$; 4 і 10;
2) $(3x-2)(3x+2)=896$; 28.

§ 21

Завдання із зіркою. Всі твердження правильні.

Самостійна робота № 13

1. В. **2.** Б. **3.** Г. **4.** В. **5.** А. **6.** 1 — А, 2 — В, 3 — Б. **7.** 11. **8.** −15; 45.

Math for life. Задача «Художня виставка»:

1. 15. **2.** 14. **3.** 47 хв. **4.** 21.

Домашнє завдання

1. 1) −15; −1; 2) −2,25; −0,25; 3) $-6-\sqrt{42}$; $-6+\sqrt{42}$; 4) $\frac{5-\sqrt{65}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{65}}{2}$.

2. 1) −6; 4; 2) −3; 0,5; 3) $\frac{-6-\sqrt{21}}{6}$; $\frac{-6+\sqrt{21}}{6}$; 4) $-1\frac{2}{3}$; −1; 1; $1\frac{2}{3}$.

3. 1) 3; 5; 2) $-2\frac{2}{3}$; 2; 3) $\frac{1}{7}$; 1; 4) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$; $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{10}}{2}$.

4. 1) −2; 4; 2) −7; 2; 3) 1; 14; 4) −2; −1,6.

§ 22

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 3, 4 і 5, неправильні твердження — 1, 2.

Самостійна робота № 14

1. А. **2.** В. **3.** Г. **4.** Б. **5.** А. **6.** 1 — В, 2 — А, 3 — Б. **7.** 1) 196; 2) $\frac{14}{c}$. **8.** 1) $x^2+5x-24=0$; 2) 3 кг.

Math for life. Задача «Екскурсія до Острозької академії»:

1. 15; **2.** 6.

Домашнє завдання

1. 1) $p=19$, $q=48$; 2) $p=-20$, $q=84$; 3) $p=2$, $x_2=5$; 4) $c=0{,}9$, $x_2=1{,}5$.

2. 1) 8; −9; корені мають різні знаки; 2) −3; $-\frac{2}{3}$; корені мають різні знаки; 3) 4; $\frac{3}{2}$; обидва корені додатні; 4) $-\frac{8}{5}$; $\frac{2}{5}$; обидва корені від'ємні.

3. 1) $b>0$, $c>0$; 2) $b>0$, $c>0$.

4. 1) Ні; 2) так; 3) −9; 5; 4) 1; $-\frac{10}{3}$.

5. 1) $x^2+4x-21=0$; 2) $9x^2-71x-90=0$; 3) $4x^2-2x-1=0$; 4) $x^2-2x-23=0$.

6. 1) −14; 2) 40; 3) 1; 4) 49.

§ 23

Завдання із зіркою. Всі твердження правильні.

Math for life. Задача «Страхова компанія»:

1. 18. **2.** 12.

Домашнє завдання

1. 1) $(x-5)(x+1)$; 2) неможливо розкласти; 3) $(3x-4)(x-1)$; 4) $-(4x+11)(x-2)$.

2. 1) $x-6$; 2) $\frac{x+6}{x}$; 3) $\frac{x-8}{x-3}$; 4) $\frac{x-3}{2x-3}$;

3. 1) x – 3; −6; 2) $\frac{x-6}{2}$; −3,1; 3) $\frac{x+2}{x-1}$; 7; 4) $\frac{2x+3}{x-3}$; $\frac{4+9\sqrt{2}}{2}$.

§ 24

Завдання із зіркою. Всі твердження, крім 4, правильні.

Самостійна робота № 15

1. А. **2.** Г. **3.** В. **4.** А. **5.** Б. **6.** 1 — В, 2 — А, 3 — Б. **7.** $\frac{2-x}{3x-1}$; знак «−». **8.** 0;−6; −1; −5.

Math for Life. Задача «Майстер-клас для піцмейкерів»:

1. 12 хв. **2.** 15 хв. **3.** 6. **4.** 30 хв.

Домашнє завдання

1. 1) −8; 0; 8; 2) −2; 0; 2; 3) $-\frac{1}{3}$; 0; 2; 4) −3; −1,5; 3.

2. 1) −3; 2) 0; 3) немає розв'язків; 4) $2\frac{2}{3}$.

3. 1) −2; 2) 5; 3) 16; 4) 2,5.

4. 1) −3; 5; 2) 1; 6; 3) −1; 9; 4) −3.

5. 1) Коренів немає; 2) −3; −2; 2; 3; 3) −1; 1; 4) −1,8; −1,6; −0,8; −0,6.

6. 1) −1; 2; 4; 7; 2) 1; −2; 3) ±1; $\pm\sqrt{7}$; 4) ±2.

§ 25

Завдання із зіркою. Правильні твердження — 3, 4; неправильні твердження — 1, 2, 5.

Самостійна робота № 16

1. $x(x+6)=27$; $x=3$. **2.** $\frac{36}{x}-\frac{36}{x+2}=3$; $x=4$.

3. $\frac{160}{x}-\frac{160}{x+16}=\frac{1}{3}$; $x=80$.

Math for Life. Задача «Температура повітря»:

1. О 22:00 7 березня та о 8:00 8 березня. **2.** О 3:00 8 березня. **3.** 6 год. **4.** −3 °С. **5.** З 3:00 до 8:00 8 березня, 5 год. **6.** О 00:00 та о 6:00 8 березня.

Домашнє завдання

1. 1) $\frac{45}{x}-\frac{45}{x+2}=6$, $x=3$; 2) $\frac{90}{x-5}-\frac{90}{x}=3$, $x=15$; 3) 4.

2. 1) $\frac{20}{x}+\frac{25}{x+10}=1$, $x=40$; 2) $\frac{36}{x}+\frac{75}{x+3}=8$, $x=12$; 3) $\frac{60}{x}-\frac{60}{x+3}=1$, $x=12$; 4) $\frac{90}{x}-\frac{90}{x+6}=4$, $x=9$; 5) 8 л.

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК

А
Алгоритм винесення множника з-під знака кореня 174
— внесення множника під знак кореня 178
— зведення дробу до нового знаменника 23
— знаходження ОДЗ виразу 45
— знаходження спільного знаменника дробів 37
— розв'язування текстової задачі 258
— скорочення дробу 21
Арифметичний квадратний корінь 128
— — — з добутку невід'ємних множників 161
— — — зі степеня 154
— — — з частки 166

В
Вираз дробовий 11
— підкореневий 129
— раціональний 11
— цілий 11
Вирази спряжені 174
Віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками 30
— — — з різними знаменниками 37
Властивості степеня з цілим показником 81, 111
— функції $y=\frac{k}{x}$ 97
— — $y=x^2$ 115
— — $y=\sqrt{x}$ 186

Г
Гіпербола 96
Графік функції $y=\frac{k}{x}$ 96, 97
— — $y=x^2$ 115
— — $y=\sqrt{x}$ 186

Д
Дискримінант 217
Ділення раціональних дробів 53
— арифметичних квадратних коренів 167
Добування квадратного кореня 129
Додавання раціональних дробів з однаковими знаменниками 30
— — — з різними знаменниками 37

К
Квадратний корінь 128
— тричлен 201
Коефіцієнти квадратного рівняння 201
— — тричлена 201
Корінь квадратного рівняння 202
— — тричлена 201

М
Математична модель задачі 73, 258, 273
Метод заміни змінної 252
Множення раціональних дробів 49
— арифметичних квадратних коренів 162
Множина 135

О
Обернена пропорційність 96
Область визначення функції 96
— допустимих значень 12
— значень функції 96
Основна властивість дробу 19

П
Парабола 115
Період числа 145
Піднесення раціонального дробу до степеня 51
Порядок числа 89

Р
Радикал 129
Рівносильні рівняння 69
Рівняння біквадратне 252
— дробове (дробово-раціональне) 68
— квадратне 201
— — зведене 202
— — неповне 208
— — повне 215
— раціональне 68
— ціле (ціле раціональне) 68
Розв'язування дробово-раціональних рівнянь способом зведення до рівносильної системи 69, 110, 248
— — — способом здійснення безпосередньої перевірки 70, 110
— неповних квадратних рівнянь 208, 210, 211
— рівнянь графічним способом 120
— рівнянь, що зводяться до квадратних 247, 248, 249, 252
Розкладання квадратного тричлена на множники 240, 241

С
Скорочення дробу 20
Стандартний вигляд числа 89
Степінь із цілим від'ємним показником 81

Т
Теорема Вієта 226
— обернена до теореми Вієта 228
Тотожні перетворення раціональних виразів 59

Ф
Формула коренів квадратного рівняння 216
Функція 114
— $y=\frac{k}{x}$ 96
— $y=x^2$ 114
— $y=\sqrt{x}$ 186

Ч
Числа дійсні 147
— ірраціональні 146
— натуральні 137
— періодичні 145
— раціональні 138, 144
— цілі 137

Відомості про користування підручником

№ з/п	Прізвище та ім'я учня / учениці	Навчальний рік	Стан підручника	
			на початку року	в кінці року
1				
2				
3				
4				
5				

Навчальне видання

ПРОКОПЕНКО Наталія Сергіївна
ЗАХАРІЙЧЕНКО Юрій Олексійович
КІНАЩУК Наталія Леонідівна

«АЛГЕБРА»
підручник для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Провідний редактор *І. Л. Морева*. Редактор *О. В. Костіна*
Обкладинка *Т. В. Федюк*. Художнє оформлення *Д. В. Ширяєв, Ю. В. Онищенко*
Технічний редактор *В. І. Труфен*. Комп'ютерна верстка *О. В. Сміян, С. В. Яшиш*
Коректор *Н. В. Красна*

Підписано до друку 30.06.2016. Формат 84×108/16.
Папір офсетний. Гарнітура Шкільна. Друк офсетний.
Ум. друк. арк. 30,24. Обл.-вид. арк. 39,31. Наклад 16 304 прим. Зам. № 4106-16

ТОВ Видавництво «Ранок».
Свідоцтво ДК № 3322 від 26.11.2008. 61071 Харків, вул. Кібальчича, 27, к. 135.
Адреса редакції: 61145 Харків, вул. Космічна, 21а, 7 поверх. E-mail: office@ranok.com.ua
Тел. (057) 701-11-22, 719-48-65, тел./факс (057) 719-58-67.
www.ranok.com.ua

Під час підготовки видання були використані фотоматеріали із сайтів:
freepik.com; freeimages.com; zhaldak.npu.edu.ua, morguefile.com; freebiefoto.com;
circus.kharkov.ua; uk.wikipedia.org; pixabay.com; stocksnap.com

Надруковано у друкарні ТОВ «Тріада Принт»
м. Харків, вул. Киргизська, 19. Тел. (057) 703-12-21. E-mail: sale@triada.kharkov.ua