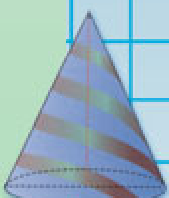
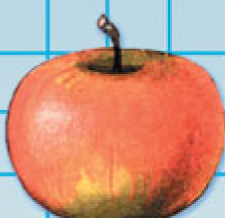
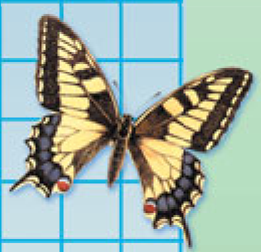
Г. В. Апостолова

Геометрія

7







УДК 514(075.2)
ББК 22.151я721
А76

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист МОН України від 20.07.2015 № 777)

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Навчальне видання

АПОСТОЛОВА Галина Вадимівна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Головний редактор *Наталія Заблоцька*. Редактор *Оксана Єргіна*. Обкладинка, макет, ілюстрації *Василя Марущинця*. Технічний редактор *Цезарина Федосіхіна*. Комп'ютерна верстка, технічні малюнки *Юрія Лебедєва*. Коректори *Лариса Леуська, Інна Іванюсь*.

Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. 17,496. Обл.-вид. арк. 16,27. Тираж 710 пр. Вид. № 1712. Зам. №

Видавництво «Генеза», вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 3966 від 01.02.2011.

Виготовлено на ТОВ «Поліпрінт», вул. Лугова, 1-а, м. Київ, 04073.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи серія ДК № 1250 від 27.02.2003.

Апостолова Г. В.
А76 Геометрія : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г.В. Апостолова. — Київ : Генеза, 2015. — 216 с. : іл.

ISBN 978-966-11-0679-5.

Пропонований підручник є багаторівневим. Він дає змогу працювати з учнями за різними ступенями змістового наповнення — від обов'язкового до факультативного — за рахунок подання теоретичного навчального матеріалу на трьох рівнях: обов'язковому, для ознайомлення і для допитливих. Дидактичний матеріал диференційовано на практичні роботи й завдання чотирьох рівнів складності. Головну (опорну) інформацію додатково винесено на поля підручника.

УДК 514(075.2)
ББК 22.151я721

ISBN 978-966-11-0679-5

Я вдячна всім своїм учням за спільний пошук шляхів відкриття світу, за те, що разом раділи й дивувалися красі та гармонійності його математичної моделі. У цьому підручнику є часточка від зустрічі з кожним з вас.

Любий учню!

Ти відкриваєш книжку – це твій підручник (від словосполучення «під рукою»). Разом з ним ти ввійдеш у новий для тебе Світ – Світ Геометрії. Підручник буде найважливішою зі стежинок до пізнання цього Світу. Ти будеш узагальнювати досвід тисячоліть і почнеш побудову сучасної геометрії разом зі старогрецьким математиком Евклідом Александрійським. Ти попрацюєш будівельником-проектантом, розв'язуючи задачі на побудову, і станеш справжнім детективом, який за допомогою строгих логічних міркувань приходить до істини.

Геометрія – це практика, логіка і фантазія!

Давньогрецький філософ Платон
(428(427)–448(447) рр. до н. е.) казав:

«Геометрія вабить душу до істини і підносить думку. Геометрія, безперечно, наука про пізнання вічного буття».

Нехай цей підручник допоможе тобі розпочати шлях саме такого пізнання!

Автор

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ УЧНІВ

У підручнику використано такі піктограми:

– означення; О.З. – опорна задача;

Т – теорема; Н – наслідок;

– матеріал для ознайомлення;

– додатковий матеріал.

На поля підручника винесено *головну (опорну)* інформацію. Це допоможе її запам'ятати та за потреби повторити.

Параграфи, які позначено піктограмою , бажано прочитати, ознайомившись з їх змістом. Це полегшить подальше розуміння навчального матеріалу та допоможе у розв'язуванні задач.

Параграфи та матеріал, які позначено піктограмою , рубрики «*Для допитливих*» та «*Додаткові задачі*», розділ «*Цікаві додатки*» призначено для більш ширшого і глибшого ознайомлення з геометрією та з історією її виникнення і розвитку.

Приступаючи до розв'язування задач, бажано спочатку виконати *практичні роботи* та звернути увагу на *опорні задачі* (їх позначено піктограмою О.З.).

Під час розв'язування задач, номери яких виділено двома зірочками, окрім знань, вам знадобляться ще й кмітливість і фантазія.

Завдання рубрик «*Запитання для повторення*», «*Задачі та вправи*», «*Готуємося до тематичного оцінювання*» допоможуть закріпити вивчене та підготуватися до самостійних і контрольних робіт, а розділ «*Узагальнення і систематизація знань з курсу геометрії 7 класу*» – до підсумкового оцінювання.

У кінці підручника на тебе чекає «*Словничок-покажчик*» термінів та понять з геометрії, що вивчатимуться, а «*Відповіді й поради*» допоможуть переконатися у правильності виконання завдань, інколи ще й підкажуть шлях до їх розв'язання.

Символи та позначення, що використовуються для запису математичних, зокрема й геометричних, тверджень, подано на форзацах підручника. Окрім того, форзаци містять грецьку абетку, яку також використовують для позначень, та перелік одиниць вимірювання довжини у їх взаємозв'язку та історичному розвитку.

Автор

ІНФОРМАЦІЯ ДЛЯ ВЧИТЕЛІВ

Головна мета підручника – допомогти вчителю сформувати в учнів чітке уявлення про принципи будови геометрії як математичної науки, сприяти розвитку в них послідовного логічного мислення та пошукової активності, зацікавити їх геометрією як частиною культури людства, реалізувати диференційований підхід у роботі зі школярами.

Автор намагалася створити *підручник нового покоління*, у якому:

- обсяг матеріалу є дещо ширшим, ніж мінімальні вимоги програми та ніж може бути використано на уроці (свобода вибору вчителя);
- учитель пропонує учням більше, ніж вимагає потім для перевірки навчальних досягнень (свобода вибору учня, диференційований підхід);
- учень може самостійно опрацювати певний матеріал (уміння працювати з інформацією), бо підручник містить елементи «книжки для читання»;
- обсяг матеріалу дозволяє підготувати учнів до математичних змагань або подальшого навчання у класах з поглибленим вивченням математики (профорієнтація).

У підручнику, окрім програмного, подано ще й історичний та позапрограмний матеріал, матеріал для узагальнення і систематизації знань, великий обсяг дидактичного матеріалу, що *звільнить учителя* від «бібліотечного пошуку», *допоможе організувати* не тільки уроки, а й позакласну роботу, математичні змагання, самостійну роботу учнів тощо, *забезпечити практичну та мотиваційну спрямованість* занять.

Важливо, особливо на початку вивчення курсу, залучити учнів до *практичної діяльності*. З цією метою після кожного параграфа пропонується одна або кілька *практичних робіт*, кожна з яких містить 2–6 завдань із чіткою послідовністю кроків їх виконання.

Під час опрацювання першого розділу підведіть учнів до *розуміння принципу будови геометрії* та *логічного кроку доведення*. Історичні відомості та життєві задачі, пропоновані опорні схеми вам у цьому допоможуть. Зауважимо, що не треба вимагати від учнів на початку вивчення курсу формулювання аксіом Евкліда (їхні мовні знання предмета ще є недостатніми для цього). Важливо, щоб вони мали уявлення про них, розуміли їх зміст й були здатні пояснити логічну схему будови геометрії.

Вивчаючи матеріал другого розділу, зверніть увагу учнів, що *письмовий запис розв'язання не повинен повторювати вербальний його опис біля дошки*. Тому доведення деяких теорем розділу повторюється двічі – удруге скорочено (письмовою математичною мовою), а зразки запису розв'язання задач пропонуються в різних формах (нехай учень обере той, що йому зручніший).

Протягом вивчення всього курсу *звертайте увагу учнів на опорні задачі* (їх виділено шрифтом і піктограмами, винесено на поле підручника та в узагальнюючі параграфи й опорні схеми). Можна, наприклад, запропонувати переносити опорні задачі в «колекційний» зошит.

Параграфи з піктограмами, якими позначено *матеріал для ознайомлення* та *додатковий матеріал* (позапрограмний, необов'язковий для вивчення й оцінювання), наприклад, «Види математичних тверджень», «Властивості прямокутних трикутників», «Кути з відповідно перпендикулярними сторонами», «Зовнівписане коло трикутника», «Четверта ознака рівності трикутників», «Задачі на побудову та їх роз'язування» тощо, допоможуть систематизувати та узагальнити вивчене, полегшать розуміння навчального матеріалу, його використання під час розв'язування задач.

Окрім піктограм, назви цих параграфів виділено кольором, у тому числі й у «Змісті» підручника. Відповідний матеріал та матеріал окремих додатків можна використовувати для організації позакласних занять, підготовки учнів до ЗНО та математичних змагань, самостійного опрацювання окремими учнями, написання рефератів тощо.

«*Запитання для повторення*» наприкінці кожного розділу допоможуть повторити та узагальнити вивчене.

Дидактичний матеріал поділено за *чотирма рівнями складності*. Його обсяг дозволяє обрати достатню кількість задач необхідного для учнів рівня. Підкреслимо, що *розв'язати всі задачі підручника неможливо й робити цього не потрібно*.

Задачі та вправи, які наведено після кожного параграфа, містять:

- задачі початкового рівня складності (*практичні роботи* та завдання з кружечком біля номера);
- середнього рівня складності (без позначки), що є основними;
- задачі підвищеної складності (зірочка біля номера);
- задачі, що за складністю межують із задачами олімпіадних змагань (дві зірочки біля номера).

Кольором позначено номери задач, що рекомендовано для домашньої роботи учнів.

Задачі розділу «*Узагальнення і систематизація знань з курсу геометрії 7 класу*» містять завдання лише початкового та середнього рівнів складності.

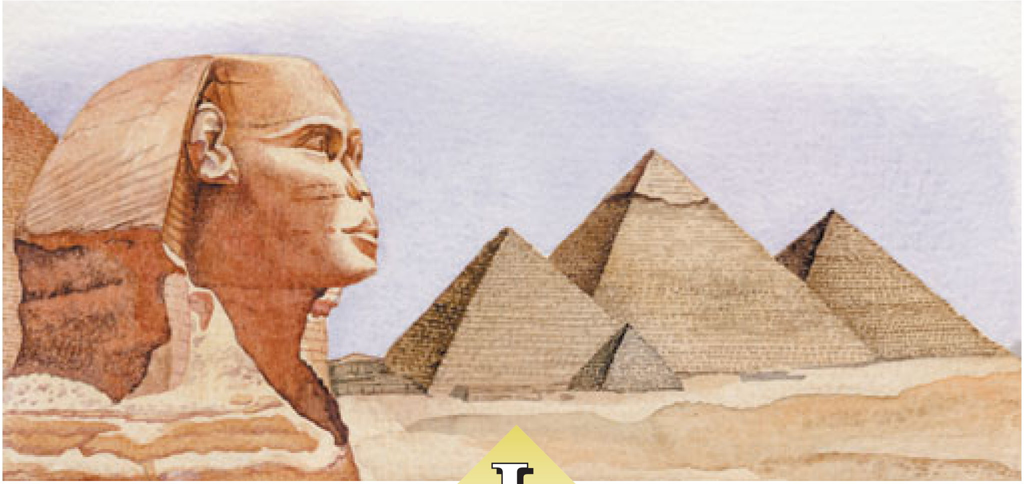
«*Додаткові задачі*» у кінці кожного розділу орієнтовано на два вищих рівні складності.

Радимо під час проведення занять використовувати історичний матеріал з рубрики «Для допитливих» та з розділу «Цікаві додатки» (зокрема, про вітчизняних учених, стародавні софізми, одиниці вимірювання довжини і часу тощо). Це «оживить» проведення уроку, буде сприяти формуванню в учнів відчуття того, що математику створювали живі реальні люди (у тому числі й наші співвітчизники).

Зауважимо, що підручник містить 31 параграф, з яких 8 – необов'язкові для вивчення. Подання основного теоретичного навчального матеріалу за кожним з них розраховано приблизно на 5–10 хвилин навчального часу. Чітко реалізувати це вам допоможе «Геометрія в опорних схемах і малюнках, 7 клас» (щоб учні не переписували відповідний теоретичний матеріал з дошки). Тоді більшість навчального часу можна присвятити розв'язуванню задач, повторенню й узагальненню вивченого. *Календарно-тематичне планування* з методичними вказівками за змістом підручника та *програму факультативного курсу «Геометрія – це практика, логіка і фантазія»* можна знайти на веб-сайті видавництва *www.geneza.ua*.

ТАЛАНУ ВАМ, КОЛЕГИ!

Автор



I
ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

У цьому розділі ми з вами обговоримо:
- **що таке геометрія і чим вона вирізняється серед інших наук;**
- **що таке «аксіома» і які аксіоми геометрії запропонував Евклід;**
- **логічну схему побудови геометрії як сучасної науки;**
- **основні поняття та деякі означення геометрії.**

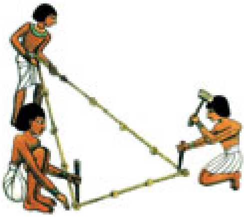
§ 1. Про те, що вивчає наука геометрія і як вона виникла

Слово **геометрія** прийшло до нас із Стародавньої Греції. Воно складається з двох грецьких слів – «гео», що в перекладі означає *земля*, і «метріо» – *вимірюю*.

Геометри цікавляться предметами навколишнього світу з точки зору їх числових характеристик (розмір, площа, об’єм) та розташування один відносно одного. Їх зовсім не цікавить маса, колір або смак предметів. У такому трактуванні предмети ще називають *тілами*, *фігурами* або *формами*.

Геометрію вирізняє те, що вона є математичною наукою. На відміну від інших наук, вона вивчає об’єкти реального світу в найбільш *абстрактній формі*, тобто *незалежно від їх конкретного наповнення змістом*.

Абстрактний характер геометрії як математичної науки дає змогу будувати *ланцюжок логічних переходів від умови до висновку (дедуктивний метод)*.



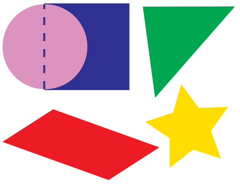
Тілом, *фігурою* або *формою* називають предмети, коли цікавляться лише їх числовими характеристиками (розміром, площею, об’ємом, розташуванням...).

Геометрія – це наука про просторові форми.

Геометрія – це математична наука, яка спирається на *дедуктивний метод* – побудову ланцюжка логічних переходів від умови до висновку.

Усі абстрактні фігури геометрії, усі її начебто вигадані задачі, які ми з вами розв'язуватимемо, – це мова, в основі якої лежить найреальніший світ – світ, до якого можна доторкнутися.

Планіметрія вивчає фігури на площині.

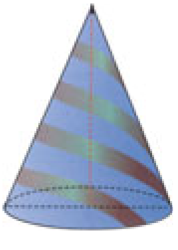


Традиційно геометрію поділяють на два розділи: **планіметрію** і **стереометрію**. Планіметрія вивчає фігури на площині («планум» у перекладі з латинської – *площина*). Стереометрія вивчає фігури у просторі («стереос» у перекладі з грецької – *просторовий*).

Планіметрію ми вивчатимемо у 7–9-х класах, а стереометрію – у 10–11-х. Проте, вивчаючи планіметрію, будемо ознайомлюватися і з деякими просторовими формами.

Поділ математики на алгебру та геометрію відбувся не так давно. Стародавні вчені, як і середньовічні, які займалися математикою в нашому розумінні, називали себе геометрами. На сьогодні *деякі твердження геометрії є найдавнішими пам'ятками культури людства*.

Стереометрія вивчає фігури у просторі.



Давньогрецькі автори стверджують, що батьківщиною перших геометричних фактів є Стародавній Єгипет. Зрозуміло, геометрія виникала скрізь, де вирувало життя. Можливо, у Єгипті вона раніше, ніж деінде, набрала певних форм.

Картину «зародження» планіметрії можна уявити собі так. Щороку на початку літа головна річка Єгипту Ніл (староєгипетська назва – Хапі) широко розливалася, затоплюючи водою всі або майже всі культурні землі. Через деякий час вода спадала, залишаючи товстий шар родючого мулу. Оскільки межі земельних ділянок губилися під мулом, з'явилася особлива категорія людей, обов'язком яких було розмежовувати ці землі. За допомогою шнурів вони виконували необхідні геометричні побудови для розмежування ділянок.

Ця робота виконувалася протягом багатьох сотень років, у її процесі набувалися (суто практично) початкові знання про властивості геометричних фігур.

Набуті знання передавалися наступним поколінням, які додавали до них щось своє.

Цікаво будували єгиптяни у стародавні часи прямий кут за допомогою шнура й кілочків (бл. 2300 р. до н. е.).

Для цього вони ділили шнур за допомогою вузлів на дванадцять рівних частин. Потім натягували його між трьох кілочків так, щоб утворився трикутник, сторони якого містять 3, 4 і 5 частин цього шнура (мал. на полі).

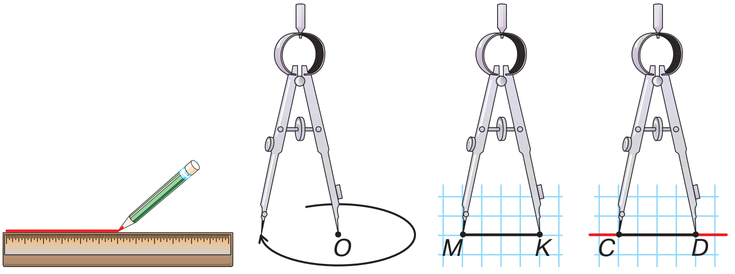
Кут, протилежний до більшої зі сторін цього трикутника, буде прямим.

Тобто за багато років до нашої ери єгиптяни вже знали про існування прямокутного трикутника з довжинами сторін 3, 4 і 5 од. Тому такий трикутник називають *єгипетським*.

Ми з вами, як сучасні геометри, будемо виконувати свої побудови не на піску, а на папері за допомогою вже відомих вам креслярських інструментів: лінійки, циркуля, косинця, транспортира.

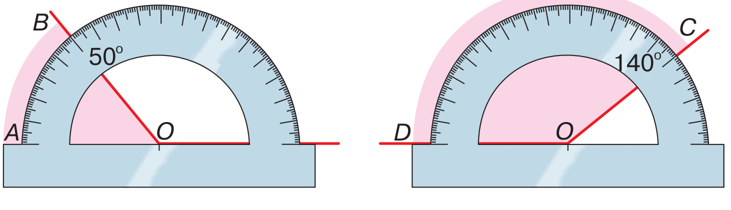
За допомогою лінійки на кресленні зображають прямі лінії (мал. 1).

Циркуль допоможе не тільки накреслити коло (мал. 2), а й відкласти рівні між собою відрізки (на малюнку 3 $CD = MK$).



Мал. 1 Мал. 2 Мал. 3

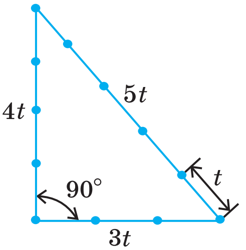
Для вимірювання і побудови кутів використовують *транспортир* (мал. 4).



Мал. 4

У Єгипті початкові знання про властивості геометричних фігур формувалися з практики розмежовування земельних ділянок за допомогою шнура.

Єгипетський трикутник

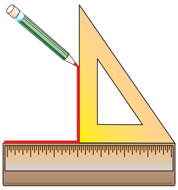


t – довільна одиниця вимірювання.

Циркулем:
– відкладаємо відрізки, що дорівнюють даним;
– креслимо коло.

Транспортиром вимірюємо градусну міру кутів.

Прямий кут дорівнює 90°.



Мал. 5

Якщо треба зобразити прямий кут, можна скористатися *косинцем* і *лінійкою* (мал. 5).

Зауваження. У геометрії для побудови геометричних фігур *основними інструментами* вважають лінійку (без поділок) і циркуль. Усі інші інструменти – *допоміжні*.

Стандартна міжнародна одиниця вимірювання довжини – **1 м**.

Стандартною міжнародною одиницею вимірювання довжини обрано метр (1 м). Еталон метра має вигляд спеціального металевого бруса з нанесеними на ньому двома штрихами. Відстань між ними при 0 °С і приймається за 1 метр. Цей еталон зберігається в Міжнародному бюро мір і ваги у Франції.

Нагадаємо **сучасні одиниці вимірювання довжини**:

1 см = 10 мм,
1 дм = 10 см = 100 мм,
1 м = 10 дм = 100 см = 1000 мм,
1 км = 1000 м.

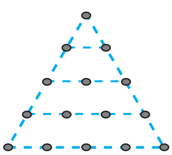
Для допитливих

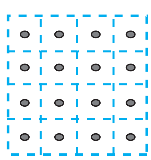
Піфагор Самоський – стародавній філософ (VI ст. до н. е.), що народився у Греції на острові Самос. Походив з багатої аристократичної родини й здобув блискучу на ті часи освіту в Єгипті й навіть далекому Вавилоні. Коли він повернувся на рідний Самос, слава про його мудрість уже прокотилася від Греції до Вавилона. Біля Піфагора почала гуртуватися молодь, що прагнула осягнути таємниці мудрості. Розповідають, що кімната, у якій викладав учений, поділялася полотняною перегородкою на дві частини. В одній перебував Піфагор зі своїми учнями, а в другій – так звані акусматики (слухачі). Школа Піфагора мала ще одну особливість: неодмінною умовою вступу до неї було вміння зберігати таємницю.

Піфагор. Апокрифічний (символічний) портрет. З гравюри XVI ст. невідомого автора

З усіх наук найбільшу перевагу піфагорійці надавали математиці, причому з релігійно-містичним забарвленням.

Піфагорійці тісно пов'язували числа з геометричними фігурами. Вони, розкладаючи певну кількість камінців або черепашок у певному порядку, складали геометричну фігуру. Кількість використаних камінців дорівнювала відповідному числу. Інакше кажучи, зображували числа точками, розташованими в певному геометричному порядку. У такий спосіб вони отримували «трикутні» числа, «квадратні» числа та ін. Наприклад, на малюнку зображено «трикутне» число 15 та «квадратне» число 16.

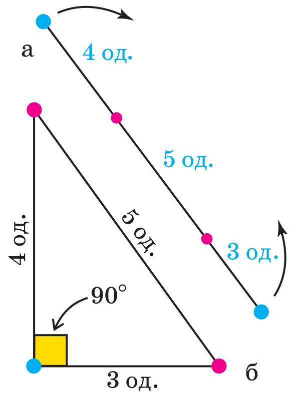




Практична робота 1. ***Побудова єгипетського трикутника***

Пропонуємо відтворити побудову прямого кута, як це робили стародавні єгиптяни. Для цього виконайте дії у такій послідовності.

- Візьміть шнур (або мотузку) завдовжки 12 одиниць вимірювання. Одиницею вимірювання може слугувати метр, сантиметр, дециметр, ширина долоні, довільний відрізок.
- Зав'яжіть на ньому два вузли: один на відстані 3 од. вимірювання від одного кінця, а другий – на відстані 4 од. від другого (червоні точки на мал. 6а).
- Прикріпіть шнур до плоскої поверхні в місцях, позначених червоними точками на мал. 6а, і з'єднайте кінці шнура, закріпивши їх положення на площині (мал. 6б). Більший з кутів трикутника, що утворився, – прямий. Перевірте це за допомогою косинця і транспортира.



Мал. 6

1. Побудуйте єгипетський трикутник (як описано вище), взявши за одиницю вимірювання: а) 2 см; б) 3 см.

2. Виміряйте за допомогою транспортира кути утворених трикутників. Зробіть висновок і запишіть його.

3*. Які ще способи побудови прямого кута ви можете запропонувати?

Задачі та вправи

Уявіть себе єгипетськими землемірами, що мають виконати бажання замовника, і спробуйте поділити задану ділянку на певні частини відповідно до замовлення (за умовою задачі). Пам'ятайте, що у вас є лише шнури й кілочки.

1°. Поділіть за допомогою шнура заданий відрізок навпіл.

2. Поділіть за допомогою шнура заданий відрізок на 3 рівні частини.

3*. Поділіть за допомогою шнура заданий відрізок на 6 рівних частин (двома способами).

4. Поділіть квадратну ділянку на 2 рівні частини різними способами (способи вважати різними, якщо частини, що утворилися, не можна сумістити, повертаючи малюнок):
а) двома способами;
б*) трьома способами.

5. Поділіть квадратну ділянку на 4 рівні частини:
а°) одним способом;
б) двома способами;
в*) скільки способів поділу ви можете запропонувати?

6. Поділіть квадратну ділянку на 3 рівні за площею частини:
а°) одним способом;
б) двома способами;
в*) скільки способів поділу ви можете запропонувати?

§ 2. Вчимося мислити логічно

«Математика – це велетенський пінцет наукової логіки», – стверджував Дж. Голстед.

Геометрія є математичною наукою. Як математична наука вона спирається на *логічне виведення* (*доведення*) закономірностей із сукупності фактів. Слово «логіка» – грецького походження, перекладається як *вчення* або *правильне мислення*.

Наприклад, нехай нам відомо, що «там, де є дим, є і вогонь» і що «на пагорбі є дим». Тоді нам немає потреби підніматися на пагорб, аби переконатися, що там є вогонь, – його існування на пагорбі ми довели.

Уміння логічно мислити не з'являється одразу, цього треба навчитися. Потренуємося «правильно», тобто логічно, мислити.

Твердження – ВИСЛІВ, що є або істинним, або хибним.

Про вислови, які є або істинними, або хибними (незалежно від того, чи відома нам їх істинність або хибність), кажуть, що вони є *твердженнями*.

Наприклад, речення «2 є найменшим простим числом» – істинне твердження, «Париж – столиця Англії» також є твердженням, але хибним. А речення «Чи правильно, що $5 > 1$?» не є твердженням.

Твердження може мати вигляд формули (якщо її проговорити словами). Наприклад, «$x = 1$» ми читаємо словами: «Ікс дорівнює одиниці».

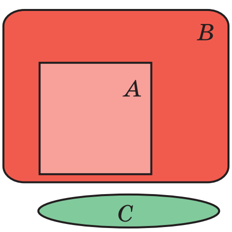
Логічний крок:
1. Вихідне твердження (кілька тверджень);
2. «Тоді»;
3. Твердження-висновок.

А тепер потренуємося робити логічні висновки. **Логічний крок міркування** має таку структуру: формулюємо *вихідне твердження* (або кілька вихідних тверджень), після чого кажемо слово «ТОДІ» і наводимо *твердження-висновок*.

Як приклад розглянемо кілька тверджень і проаналізуємо їх з точки зору логічних міркувань.

З'ясувати правильність логічного кроку інколи допомагають схематичні зображення множин об'єктів, про які йдеться. Нагадаємо, що *множина – це сукупність об'єктів, які ми уявляємо як єдине ціле*. Наприклад, кіт належить множині вусатих (тобто тих, хто має вуса). Схематичне зображення множин називають *діаграмами Венна*.

Діаграма Венна

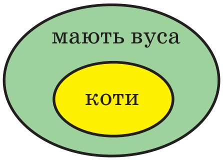


Приклад 1. «Це кіт, тоді він має вуса». Проілюструємо цей логічний крок діаграмою (мал. 7).

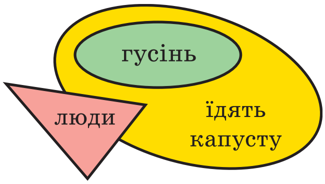
Висновок правильний, бо всі коти мають вуса.

Приклад 2. «Уся гусінь їсть капусту. Я їм капусту. Тоді я – гусінь». Представимо умовно множини гусені, людей і тих, хто їсть капусту, діаграмами (мал. 8). Зрозуміло, що множини людей і гусені не перетинаються. Тому наведений висновок є хибним.

Множина – це сукупність об'єктів, які ми уявляємо як єдине ціле.



Мал. 7



Мал. 8

Позначають:
«$K \in A$» – *K належить* множині A.

«$K \notin A$» – *K не належить* множині A.

Зверніть увагу, **якщо деяке твердження є правильним, то обернене йому може виявитися хибним!**

Так твердження «Хтось має вуса, тоді він кіт», обернене до твердження в прикладі 1, є хибним. Справді, усі коти мають вуса, але якщо в тебе є вуса, то ти необов'язково є котом. Множина вусатих є *ширшою* від множини котів.

Задачі та вправи

7. а) Які з наведених нижче висловлень є твердженнями; **б)** які з тверджень є істинними, а які – хибними?

1) Дніпро впадає в Чорне море.
2) Чи є Місяць супутником Землі?
3) Дільником кожного парного числа є число 2.
4) У річці Дніпро водяться крокодили.
5) У курки – дві лапи.
6) Київ – столиця України.
7) Той, хто має дві ноги, – курка.
8) Хай живе математика!
9) Кіт має вуса.
10) Відкрийте підручник на сторінці 35.
11) Той, хто має вуса, – кіт.
12) Усі риби вміють плавати.
13*) Число 0 є натуральним.
14*) Число 1 є простим.
15*) Дріб 8,7 більший або дорівнює числу 9.
16*) Правильний дріб більший за одиницю або дорівнює їй.

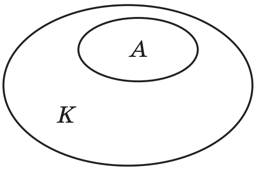
8. Петрик міркував так: «Зазвичай діти вчаться у школі. Тоді всі діти – школярі» і намалював відповідну діаграму (мал. 9а). Надійка сказала, що Петрик помиляється, і намалювала іншу діаграму (мал. 9б). Хто з них правий?

а б

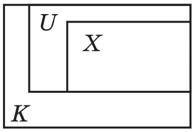
Мал. 9

9. Визначте, чи є відповідність між наведеними поняттями і діаграмами. Виправте помилки, якщо вони є.

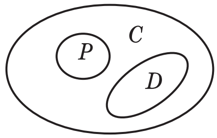
1) Квіти (*K*), айстри (*A*).



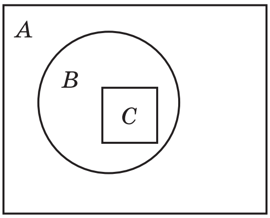
2) Україна (*U*), Хрещатик (*X*), Київ (*K*).



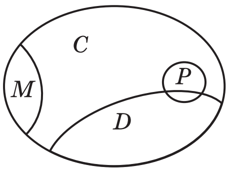
3) Слова української мови (*C*), прикметники (*P*), дієслова (*D*).



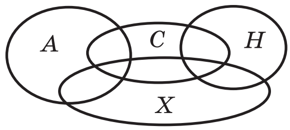
4*) Автомобілі (*A*), автомобілі «Жигулі» (*B*), автомобілі синього кольору (*C*).



5*) Пиріжки (*C*), пиріжки з картоплею (*D*), пиріжки з грибами (*M*), пиріжки з картоплею і грибами (*P*).



6**) Частина учнів класу вивчає англійську мову (*A*), усі інші – німецьку (*H*). Певна частина цього класу співає (*C*), а всі інші грають у шахи (*X*).



10. З'ясуйте, які з міркувань є правильними. Відповідь обґрунтуйте (скористайтеся діаграмами Венна).

1) Метелики мають крила й літають. Тоді ті, що мають крила, уміють літати.
2) Деякі люди вміють співати, тоді деякі зі співаків – люди.
3*) Усі курки мають по дві ноги. У мене дві ноги. Тоді я – курка.
4*) Деякі коники є рибами. Усі риби вміють плавати. Тоді деякі коники вміють плавати.
5*) Деякі діти полюбляють банани. Усі мавпи полюбляють банани. Тоді деякі діти – мавпи.

Для допитливих

За переказами, Піфагор був спостережливою людиною. Він випадково відкрив, що три струни створюють гармонійний акорд, якщо їх довжини відносяться як 6 : 4 : 3. Зміна чисел порушувала або встановлювала цю гармонію; висновок: числове співвідношення є внутрішньою рушійною силою явища природи. Узагальнюючи висновок з одиничного спостереження, піфагорійці приходили до того, що таке саме гармонійне співвідношення притаманне й радіусам «небесних сфер», на яких знаходяться Місяць, Сонце і нерухомі зорі. Ці сфери обертаються навколо «центрального вогню» – це «музика сфер».

Так склалося характерне для школи Піфагора вчення про число як про «причину стрункості й порядку, що лежить в основі буття». Піфагорійці вважали, що числа мають великий вплив на долю людини.

Чи можете ви, як математики, вважати, що своє твердження піфагорійці довели?

§ 3. Поняття про основні геометричні фігури: точку, відрізок, пряму, промінь і площину

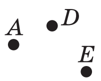
Самі греки пов'язували з діяльністю Піфагора народження геометрії як науки. Він та його послідовники ввели в геометрію поняття точки та лінії, які розглядатимемо далі.

Уявіть найменшу фігуру, яку можна зобразити. Зрозуміло, що цей малюнок можна зменшити. Попри всі намагання, узявши лупу або мікроскоп, ми все одно побачимо, що розміри малюнка можна зменшити ще... Приходимо до поняття точки.

1. Точка. «***Точка не має ані довжини, ані ширини, її форму ми не можемо визначити***».

Зауважимо, що наведене твердження лише дає поняття про точку, але не є означенням точки.

Зрозуміло, що зобразити таку фігуру, яка не має ані довжини, ані ширини, неможливо. Ми *лише умовно позначаємо олівцем або крейдою місце, де знаходиться точка.*



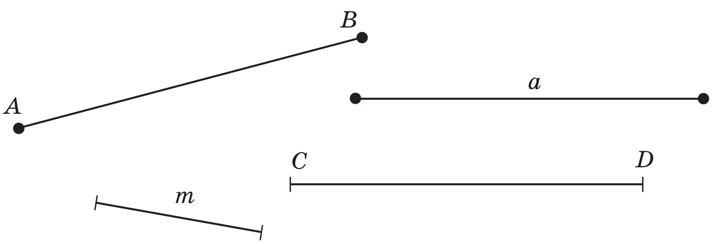
Мал. 10

Точки традиційно *позначають* (*називають*) великими літерами латинського алфавіту: A, B, C, D, E... (мал. 10).

2. Відрізок.

Уявіть собі, як два землеміри у Стародавньому Єгипті втикали в землю два кілки й натягували між ними шнур – то була межа ділянки. Товщина шнура практично не мала значення, важливою була лише довжина шнура. Натягнутий між двома кілками уявний шнур (що не має товщини) разом з його кінцями (уявними кілочками-точками) будемо вважати *відрізком*.

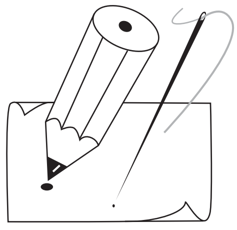
Відрізок *позначають* (*називають*) двома великими літерами відповідно до його кінців AB, CD, LH, FN, ... або однією малою латинською літерою a, d, l, m, n, ... (мал. 11).



Мал. 11

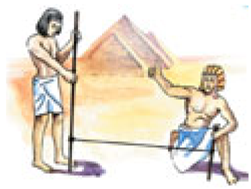
Усі точки відрізка, окрім його кінців, називають *внутрішніми* точками цього відрізка.

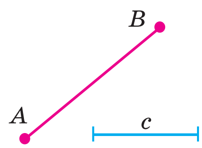
Ми лише умовно позначаємо місце, де знаходиться **точка**.



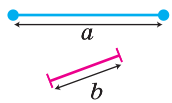
Точка не має форми, ширини, довжини.

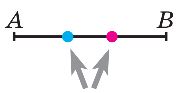
Натягнута між двома точками нитка, яка не має товщини, – **відрізок**.





Довжина уявного шнура, який сполучає дві точки, – **відстань** між цими двома точками.





внутрішні

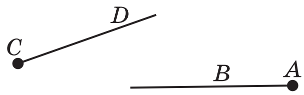
3. Промінь і пряма.

Зрозуміло, що будь-який відрізок можна продовжити.

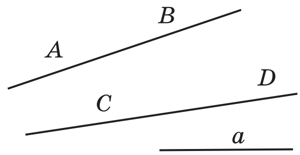
Промінь одержимо, якщо необмежено продовжимо відрізок за один з його кінців, при цьому другий кінець буде *початком променя*.

Промінь ще називають *півпрямою*.

Промінь *позначають* (*називають*) двома латинськими літерами: початком (перша літера) і довільною точкою на ньому (друга літера), наприклад AB, CD (мал. 12).



Мал. 12



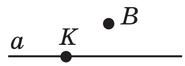
Мал. 13

Пряму одержимо, якщо відрізок продовжимо нескінченно за обидва його кінці.

Пряму *позначають* (*називають*) двома будь-якими точками, що їй належать (у довільному порядку), AB, BA, CD, DC, ... або однією малою літерою латинського алфавіту (мал. 13).

Кажуть, що точка *належить* прямій або *лежить* на прямій, якщо пряма проходить через цю точку.

На малюнку 14 точка K належить прямій a, а точка B цій прямій не належить. Скорочено це можна записати так: $K \in a$, $B \notin a$.



Мал. 14

Будь-яка точка прямої ділить її на дві півпрямі – два промені (мал. 14), які називають *доповняльними*.

Якщо на землю просто покласти нитку, яка не має товщини, – отримаємо уявлення про лінію. *Лінія не має ані ширини, ані товщини*, її можна уявити як траєкторію (слід) переміщення точки.

Про пряму інколи кажуть: *пряма лінія*.

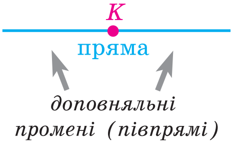
4. Площина.

Ми кажемо: поверхня яблука, поверхня повітряної кулі... ***Поверхня геометричного тіла*** є його межею (оболонкою), що *не має товщини*. Це також одне з основних абстрактних понять геометрії, основою якого є реальний світ.

Існують такі поверхні, як поверхня спокійної води, тонке віконне скло, поверхня стола або ковзанки тощо. А тепер уявімо собі, що якась із останніх поверхонь розширюється, розширюється безмежно, – це ***площина***. Вона не має краю і не має товщини.

початок променя, або півпрямої

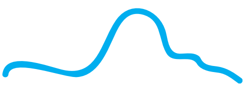
Будь-яка точка прямої ділить її на два промені.



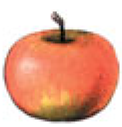
$B \notin a$
↑
не належить

$A \in a$
↑
належить

Лінію отримуємо від руху точки. Лінія не має ширини і товщини.



Поверхня – це межа геометричного тіла, вона не має товщини.

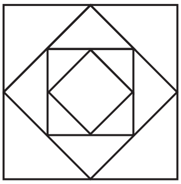


Ми розглянули *поняття основних геометричних фігур планіметрії*: *точки, відрізка, прямої, променя і площини*. Підкреслимо, що ці поняття сформувалися як узагальнення людського досвіду. Ці фігури не мають чіткого означення (не можна сказати: точкою називають...).

Надалі усім іншим геометричним фігурам ми даватимемо означення, спираючись на ці поняття.

Практична робота 2. ***Чи має форму точка*?**

1. Побудуйте в зошиті довільний квадрат (розміром не менше як на півсторінки).
2. Позначте середини сторін квадрата й сполучіть їх послідовно відрізками. Утвориться квадрат меншої площі (мал. 15).
3. Знайдіть середини його сторін і сполучіть їх послідовно відрізками. Отримаємо ще один квадрат.
4. Продовжуйте знаходити середини сторін квадратів, що утворилися, і будувати нові й нові квадрати меншої площі.



Мал. 15

5. Яку фігуру отримаємо за умови нескінченної кількості таких побудов?
6. Виконайте аналогічну побудову, почавши з прямокутника, трикутника або шестикутника. Що отримаємо при необмеженій кількості таких побудов?
7. Запишіть висновок.

Практична робота 3

1. **а)** Проведіть пряму й позначте на ній точку. На малюнку виконайте відповідні позначення і назвіть пряму.
   б) Скільки променів маєте? Назвіть їх.
   в) Чи можна сказати, що точка поділила пряму на два відрізки? А на два промені?
   г) Позначте дві точки так, щоб одна з них належала вашій прямій, а друга – їй не належала.
2. **а)** Позначте точку в площині свого зошита, назвавши її літерою A.
   б) Проведіть кілька прямих через цю точку. Дайте їм назви.
   в) Скільки променів з початком у точці A утворилось? Які з них є доповняльними?

Практична робота 4

1. **а)** Проведіть пряму й позначте її.
   б) Позначте кілька точок, що належать цій прямій. Назвіть їх літерами.
   в) Позначте кілька точок, що не належать цій прямій. Назвіть їх літерами.
2. **а)** Проведіть пряму й відкладіть на ній відрізок AB.
   б) Позначте кілька внутрішніх точок відрізка AB. Назвіть їх.
   в*) Позначте кілька зовнішніх точок відрізка AB, які містяться на прямій AB. Назвіть їх. Скільки відрізків утворилося?

Задачі та вправи

11. Розмістіть: **а)** на двох прямих 3 точки так, щоб на кожній з прямих було по 2 точки; **б)** на чотирьох прямих 6 точок так, щоб на кожній з прямих було по 3 точки.

12*. Накресліть 5 однакових за довжиною відрізків і позначте 9 точок так, щоб на кожному з відрізків містилося по 3 точки із цих дев'яти.

13.** Накресліть 6 відрізків і позначте: а) 9 точок так, щоб на кожному з відрізків було по 3 точки; б) 12 точок так, щоб на кожному з відрізків було по 4 точки.

§ 4. Перші означення

Означення – це назва із чітким поясненням, що саме ми так називаємо.

Означення – це назва із чітким поясненням, що саме ми так називаємо.

Означення зазвичай містить слово «називається» або «називають».

Уводити нові означення можна лише спираючися на вже відомі нам поняття.

Уводити ***нові означення*** можна лише ***спираючися на вже відомі*** нам поняття.

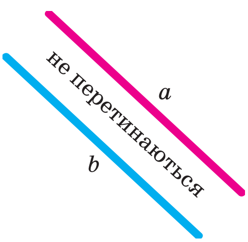
1. Паралельність двох прямих

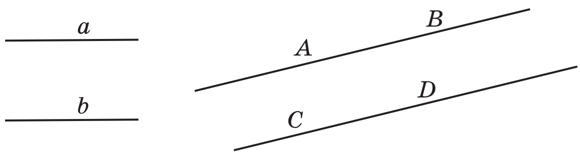
Паралельними називають дві прямі, які лежать в одній площині і не перетинаються.

Для записів паралельність двох прямих позначають знаком «∥».

Наприклад: $AB \parallel CD$; $a \parallel b$ (мал. 16).

$a \parallel b$



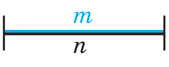


Мал. 16

2. Рівність відрізків. Відстань між двома точками

Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Два відрізки називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.



$m = n$

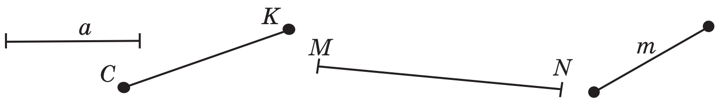
Відстань між двома точками – це довжина відрізка з кінцями в цих точках, тобто додатне число, біля якого вказано одиниці вимірювання (метр, сантиметр тощо). Рівні між собою відрізки мають однакову довжину.

Довжини рівних відрізків є рівними.

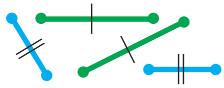
З двох відрізків більшим вважають той, що має більшу довжину.

Якщо дві точки збігаються, то вважають, що відстань між ними дорівнює нулю.

Відрізки, як і довжини відрізків, позначають малими латинськими літерами або великими літерами – кінцями відрізків (мал. 17).



Мал. 17



Рівні відрізки позначають однаковою кількістю рисочок.

Якщо є необхідність наголосити, що працюємо саме з прямою, променем, відрізком або його довжиною, то використовуємо такі позначення:

(AB) – *пряма* AB;

[AB) – *промінь* AB *з початком у точці* A;

[AB] – *відрізок* AB;

$|AB|$ – *довжина відрізка* AB.

Необов'язково всі твердження записувати, використовуючи ці позначення, але вони можуть допомогти лаконічно й чітко записати доведення або розв'язання геометричної задачі.

(AB) – пряма AB;
[AB) – промінь AB;
[AB] – відрізок AB;
$|AB|$ – довжина відрізка AB.

3. Кут

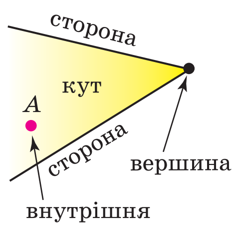
Кутом називають частину площини, що обмежена двома променями, які виходять з однієї точки.

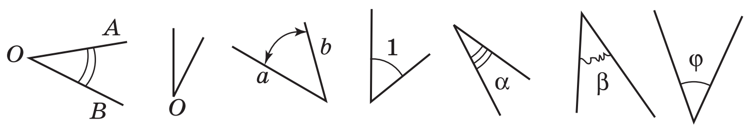
Кут – це частина площини, що обмежена двома променями, які виходять з однієї точки.

Промені, що обмежують кут, називають *сторонами* кута, а точку, з якої вони виходять, – *вершиною* кута.

З а у в а ж е н н я. Точки, які лежать на сторонах кута, належать цьому куту.

Усі точки кута, які не лежать на його сторонах, називають *внутрішніми* точками цього кута.





Мал. 18

Кут зазвичай *позначають* трьома великими літерами, середня з яких є вершиною кута, а крайні вказують по одній точці на кожній з його сторін. Наприклад, говорять: «кут AOB» або «кут BOA» (мал. 18).

Кут можна позначати й інакше (мал. 18): кут O; $\angle O$; кут (ab); $\angle ab$; $\angle(a;\ b)$; $a\hat{\ }b$; α; кут β; $\angle AOB$; $\angle BOA$; кут *1*; $\angle 1$ тощо. Знаки «∠» і «ˆ» вживають замість слова «кут». Якщо кути позначають грецькими літерами α (альфа), β (бета), γ (гамма), δ (дельта), φ (фі), λ (лямбда) та іншими, знак «∠» не пишуть.

Знаки «∠» і «ˆ» замінюють слово «кут».

Знаком «ˆ» зручно користуватися для позначення кутів через назви променів, що є його сторонами.

Наведені вище записи використовують для позначення як самого кута, так і його міри.

Серед усіх кутів виділимо той, сторони якого утворюють пряму.

Розгорнутим кутом називають кут, сторони якого утворюють пряму *(тобто є доповняльними променями).*

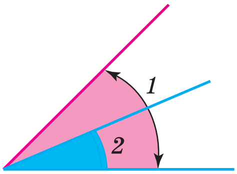
Якщо провести пряму й позначити на ній точку, матимемо два розгорнутих кути з вершиною в цій точці.

Два кути називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

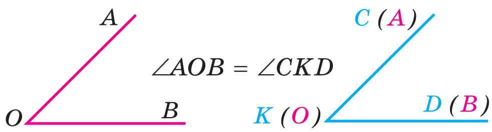
4. Рівність кутів

Два кути називають між собою рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

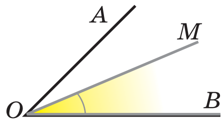
На малюнку 19 $\angle AOB = \angle CKD$, бо їх можна сумістити.



$\angle 1 > \angle 2$



Мал. 19



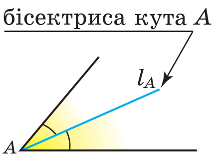
$\angle AOB > \angle MOB$

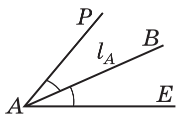
Мал. 20

Якщо накладанням сумістити вершини двох кутів і одну з їх сторін, то більшим буде той кут, який міститиме другий (мал. 20).

Рівні між собою кути позначають однаковою кількістю дужок.

Бісектрисою кута називають промінь, який виходить з вершини кута і ділить його на два рівних між собою кути.





Мал. 21

На малюнку 21 $\angle PAB = \angle BAE$, тому AB – бісектриса кута PAE.

Найчастіше бісектрису позначають літерою l. Якщо промінь AB є бісектрисою кута A, то домовимося позначати його так: $AB \equiv l_A$ (мал. 21).

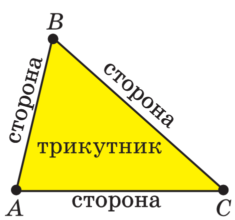
«≡» — є, збігається, тотожна рівність.

В а ж л и в о! Далі розглядатимемо кути, які менші за розгорнутий кут або дорівнюють йому.

Зрозуміло, що бісектриса ділить такий кут на два кути, що не перевищують прямого кута.

5. Трикутник

Позначимо на площині три точки, які не лежать на одній прямій, і сполучимо їх відрізками. Внутрішню частину площини, обмежену цими відрізками, називають *трикутником.*



A, *B* і *C* – вершини трикутника *ABC*.

Ці три точки називають *вершинами трикутника*, а відрізки, що їх сполучають, – *сторонами трикутника.*

З а у в а ж е н н я. Точки, які містяться на сторонах трикутника, належать цьому трикутнику.

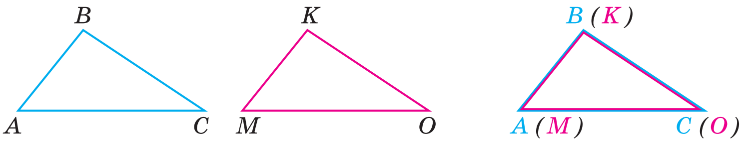
Трикутник називають за його вершинами в будь-якому порядку: трикутник ABC, або трикутник CBA, або просто $\triangle BCA$. Знак «$\triangle$» вживають замість слова «трикутник». Уперше знак трикутника був використаний давньогрецьким ученим Героном (I ст. н. е.).

Символ «$\triangle$» означає «трикутник».

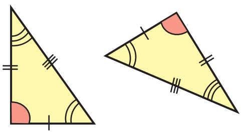
6. Рівність трикутників

Якщо два трикутники виготовити з паперу, то ми можемо спробувати сумістити їх. Якщо трикутники можна сумістити, то вони між собою рівні. (Так міркував і давньогрецький математик Евклід.) Суміщаються при цьому і сторони, і вершини, і кути трикутників (мал. 22).

Два трикутники називають рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.



Мал. 22


рівні трикутники

Два трикутники називають між собою рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Задачі та вправи

14°. Накресліть довільний відрізок та відрізок, рівний йому. Як ви це зробили?

15°. 1) Виріжте з аркуша паперу трикутник, обведіть його. Чи є вирізаний і отриманий після обведення трикутники рівними між собою? Поясніть чому. 2) Виконайте таке саме завдання для довільного кута.

16°. Чому дорівнює відстань між двома точками? А якщо ці точки збігаються?

17°. Чи є правильним твердження: «Точка має дуже маленький розмір»?

18°. Чи можна вказати форму точки? А товщину прямої?

19. Чи можна вказати, де міститься більше точок, – на прямій чи на її відрізку? Чому?

20. Як порівняти два кути (без вимірювання їх градусної міри)?

21. Як порівняти довжини двох відрізків (без їх вимірювання)?

22. Позначте три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій, і точку M – внутрішню точку відрізка BC. Усі вказані точки сполучіть прямими. Скільки кутів з вершиною в точці M утворилося?

23. Накресліть трикутник ABC. На його стороні AC позначте точки P і T та сполучіть їх з точкою B. Скільки кутів з вершиною в точці B утворилося?

24. Скільки відрізків утвориться, якщо на прямій позначити: **а°)** 2 точки; **б)** 3 точки; **в*)** 4 точки?

25.** Накресліть пряму та промінь, що має початок на цій прямій (промінь прямій не належить). Проведіть бісектриси кутів, що утворилися. Скільки маємо кутів? Які із цих кутів між собою рівні?

26*. Чи є правильним таке твердження: якщо $AB = 3$ од. вим. і $CK = 3$ од. вим., то вони рівні? Чому?

27*. Знайдіть умову, за якої відрізки AB і CK будуть рівними, якщо $AB = 30$ од. вим., а $CK = 3$ од. вим.

28*. Чи може виконуватися співвідношення $AB < CM$, якщо $AB = 2$, а $CM = 1$?

29*. На стороні AB кута BAC позначили точку M і провели через неї пряму MD. 1) Чи може пряма MD не мати спільних точок з променем AC? 2) Намалюйте таке розташування прямої MD, при якому вона утворюватиме з прямою AB кут, що дорівнюватиме куту BAC. (Скільки розв'язків має це завдання?)

30.** Розмістіть 10 точок на п'яти прямих так, щоб на кожній з прямих було по 4 точки.

31.** На прямій позначили кілька точок. Потім між кожними двома сусідніми точками позначили ще по одній точці, і так кілька разів. Доведіть, що загальна кількість точок на отриманому малюнку буде непарною.

§ 5. Аксіоми планіметрії. Вимірювання відрізків і кутів

Аксіому приймають без доведення.

Слово «аксіома» у перекладі з грецької означає *гідна довіри*.

Аксіоми геометрії – це вихідні твердження геометрії, які математики домовилися приймати без доведення.

Теорему доводять певним логічним міркуванням (доведенням).

Аксіоми, що стали основою геометрії та які ми з вами вивчаємо сьогодні, сформулював давньогрецький математик *Евклід* ще у III ст. до н. е. у творі «Начала».

Доведення спирається на аксіоми і твердження, що доведені раніше.

Спираючись на аксіоми, геометрія формулює інші твердження, *теореми*, у правильності яких пересвідчуємося після певного логічного міркування – *доведення*. Під час доведення можна спиратися лише на аксіоми й твердження, які було доведено раніше.

Евклідова геометрія спирається на аксіоми, що були сформульовані Евклідом.

Аксіоми евклідової геометрії не є вільним витвором Евкліда, їх здобуто людством у процесі багатовікового досвіду, вони відображають реальну дійсність.

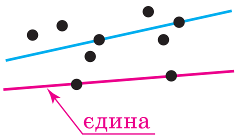
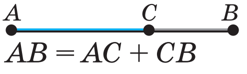
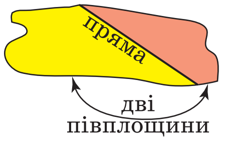
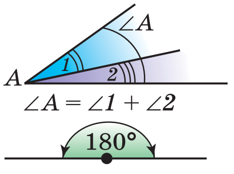
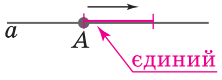
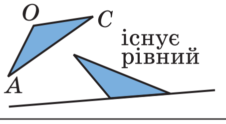
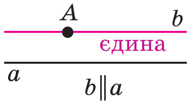
Є дев'ять вихідних тверджень-аксіом, на яких базується *геометрія Евкліда*.

Для допитливих

Уперше знак рівності «=» почав використовувати в 1556 р. англійський математик *Роберт Рекорд* (1510–1558).

Слово «теорема» грецького походження. «Теорео» у перекладі означає *спостерігаю, придивляюсь, розглядаю*.

Аксіоми евклідової геометрії

A-I. 	I. **Якою б не була пряма, існують точки, що належать цій прямій, і точки, що їй не належать. Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.**
A-II. 	II. **З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.**
A-III. 	III. **Кожен відрізок має певну довжину, більшу за нуль. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю точкою.**
A-IV. 	IV. **Пряма розбиває площину на дві півплощини.**
A-V. 	V. **Кожен кут має певну міру, більшу за нуль. Міра кута дорівнює сумі мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що виходить з його вершини і проходить між його сторонами. Градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°.**
A-VI. 	VI. **На будь-якій прямій від заданої точки в заданому напрямі можна відкласти відрізок даної довжини і при цьому тільки один.**
A-VII. 	VII. **Від будь-якої півпрямої в задану півплощину можна відкласти заданий кут з вершиною в початку цієї півпрямої і при цьому тільки один.**
A-VIII. 	VIII. **Яким би не був трикутник, існує трикутник, рівний даному в заданому розміщенні відносно заданої прямої.**
A-IX. 	IX. **Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, паралельну даній.**

ЛОГІЧНА СХЕМА БУДОВИ ГЕОМЕТРІЇ:

Побудова геометрії:
1) основні поняття;
2) аксіоми;
3) означення інших фігур та доведення тверджень про їх властивості.

1. ***Приймаємо основні поняття геометрії*** (точка, відрізок, промінь, пряма і площина).
2. ***Приймаємо аксіоми геометрії*** (див. табл., с. 23).
3. ***Іншим геометричним фігурам даємо означення, спираючися на вже відомі поняття.***
4. ***Інші твердження про властивості геометричних фігур, крім прийнятих аксіом, необхідно доводити.***

Наслідок – твердження, що безпосередньо випливає з твердження-аксіоми або твердження-теореми.

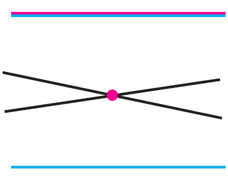
Зробимо перші логічні висновки з тверджень-аксіом, які безпосередньо з них випливають, тобто сформулюємо *наслідки* деяких аксіом.

Повернімося до аксіоми I.

Із цієї аксіоми маємо такий наслідок.

Будь-які дві різні прямі мають не більше ніж одну спільну точку.

Дві прямі на площині: *або* збігаються, *або* перетинаються в одній точці, *або* не мають спільних точок.



Якби дві різні прямі мали б дві спільні точки, то це суперечило б аксіомі I.

Тобто маємо таку властивість прямих.

Дві прямі на площині або збігаються, або перетинаються в одній точці, або не мають спільних точок.

Повернімося до аксіоми V.

Відповідно до цієї аксіоми, розгорнутий кут дорівнює 180°. Якщо поділити розгорнутий кут на 180 рівних кутів, то мірою кожного з них буде 1° (один градус). Тобто

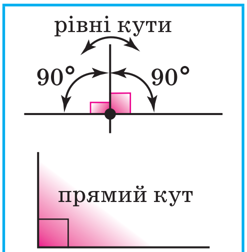
1 градус – це $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута.

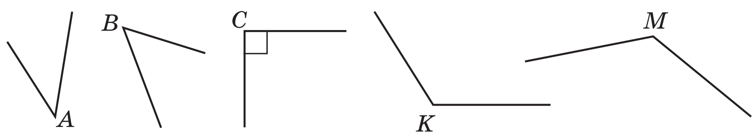
Нагадаємо: розглядаємо кути, що не перевищують розгорнутий кут:

Прямим кутом називають половину розгорнутого кута. Прямий кут дорівнює 90°.

Кут, градусна міра якого менша від 90°, називають *гострим кутом*.

Кут, градусна міра якого більша за 90° (але менша від 180°), називають *тупим кутом*.

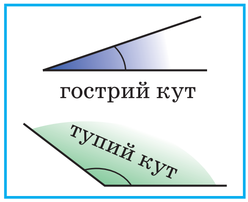




Мал. 23

Наприклад, на малюнку 23 кути A і B – гострі, кут C – прямий, а кути K і M – тупі.

Аналогічно до того, як ми ділили розгорнутий кут на 180 рівних частин, можна ділити на частини і кут, що дорівнює 1°. Для точних вимірювань кутів (у фізиці, мореплавстві, астрономії) інколи використовують дрібніші одиниці вимірювання кутів – мінуту і секунду.



Мінутою називають одну шістдесяту частину градуса:

$$1' = \frac{1^\circ}{60}, \quad 1^\circ = 60'.$$

Секундою називають одну шістдесяту частину мінути:

$$1'' = \frac{1'}{60}, \quad 1' = 60''.$$

1 градус = 60 мінут
1° = 60′

1 мінута = 60 секунд
1′ = 60″

Якщо кут вимірюють у градусах, мінутах, секундах (або їх частинах), то говорять про ***градусну міру*** *кута.*

Практична робота 5. ***Відкладання відрізків***

1. Проведіть промінь AB.
2. Довільним розхилом циркуля відкладіть від початку променя відрізок.
3. Взявши отриманий відрізок за одиницю вимірювання (од. вим.), відкладіть за допомогою циркуля на промені AB від його початку відрізки такої довжини: 2 од. вим.; 5 од. вим.; 3 од. вим.
4. Назвіть кінці відрізків і запишіть довжину кожного з відрізків, що утворилися на промені AB.
5. Порівняйте їх довжини й запишіть відповідні співвідношення.
6. Запишіть відрізки в порядку зростання їх довжини.
7. Виберіть довільні три з отриманих точок і запишіть, яка з них лежить між двома іншими.
8. Порівняйте довжини відрізків, кінцями яких є ці три точки.

Практична робота 6. ***Вимірювання кутів***

1. **а)** Проведіть 3 промені, які мають спільний початок. Назвіть їх.
б) Назвіть усі кути, які утворилися, запишіть їх у зошит.
в) Виміряйте ці кути за допомогою транспортира. Запишіть їх градусні міри.
г) Порівняйте знайдені міри кутів і запишіть кути в порядку зростання.

Для допитливих

Латинською «градус» означає *крок*, *ступінь*. Знак градуса «°» з'явився лише у XVI ст. У XVIII ст. для вимірювання кутів користувалися метричною одиницею «град». Один град – це сота частина прямого кута: 1 град = 0,9°.

У навігації й геодезії до сьогодні використовують таку одиницю вимірювання кута, як «румб». Один румб визначають як одну восьму частину прямого кута: 1 румб = 11,25°.

2. **а)** Проведіть 4 промені, які мають спільний початок. Назвіть їх.
б) Назвіть усі кути, які утворилися, запишіть їх у зошит.
в) Виміряйте кути за допомогою транспортира. Запишіть їх градусні міри.
г) Порівняйте знайдені значення і запишіть кути в порядку зростання.

Практична робота 7. ***На розуміння аксіоми VIII***

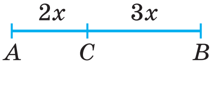
1. Побудуйте на окремому аркуші паперу довільний трикутник зі сторонами різної довжини й виріжте його.
2. Проведіть у зошиті горизонтальну пряму й позначте на ній послідовно точки A, M, B.
3. Прикладіть вирізаний трикутник до прямої так, щоб найбільша його сторона лежала на промені MA, причому вершина середнього за розмірами кута збігалася з точкою M, а весь трикутник лежав у верхній півплощині. Користуючись трикутником як трафаретом, зафіксуйте це розташування трикутника відносно прямої.
4. Прикладіть вирізаний трикутник до променя MB так, щоб найменша його сторона лежала на промені, причому вершина найбільшого кута збігалася з точкою M, а весь трикутник лежав у нижній півплощині. Зафіксуйте це розташування трикутника відносно прямої.
5. Придумайте ще одне розташування трикутника відносно прямої AB і зобразіть його.
6. Скільки є різних способів розташування трикутника відносно променя MA. А відносно прямої MB?

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 1. Точка C – внутрішня точка відрізка AB. Знайдіть його довжину, якщо $AC = 2$ м, $AC : CB = 2 : 3$.

Р о з в' я з а н н я

1) За умовою $AC : CB = 2 : 3$ і C міститься між точками A і B. Тоді $AC = 2x$, $CB = 3x$, $AB = 5x$.



2) $AC = 2$ м $= 2x$. Тоді $x = 1$ м і $AB = 5$ м.

Відповідь: 5 м.

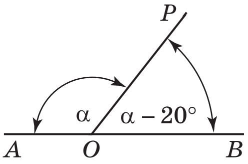
Для допитливих

Уперше термін «аксіома» увів давньогрецький філософ Арістотель. Довгий час під аксіомами математики розуміли ті істини або положення, які через їх очевидність можна приймати без доведення.

У сучасній математиці терміну «аксіома» надають ширшого значення, а саме: аксіома – це одне з вихідних тверджень, яке прийнято без доведення і покладено в основу якоїсь теорії.

Розрізняють аксіоми загальні, які стосуються всіх скінченних величин (наприклад, ціле більше від своєї частини; дві величини, кожна з яких дорівнює третій, рівні між собою тощо), а також аксіоми окремих математичних дисциплін. Прикладом останніх є система аксіом евклідової геометрії.

П р и к л а д 2. З точки O прямої AB проведено промінь OP. Знайдіть $\angle AOP$, якщо він більший за $\angle BOP$ на 20°.



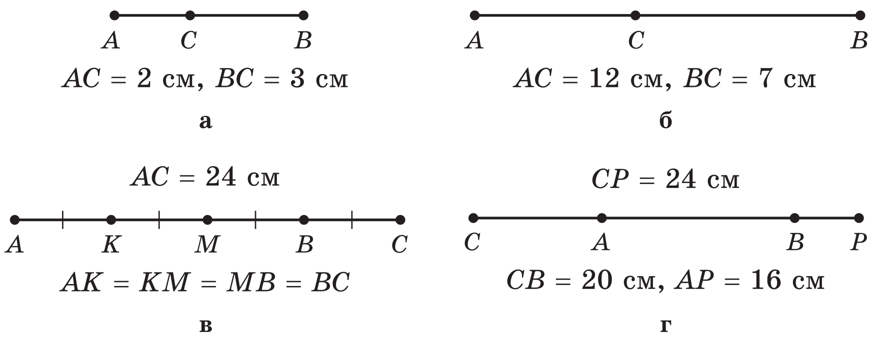
Р о з в ’ я з а н н я

1) Нехай $\angle AOP = \alpha$, тоді $\angle BOP = \alpha - 20°$.
2) $\angle AOB = 180°$ (як розгорнутий).
3) Тоді $\alpha + (\alpha - 20°) = 180°$, $\alpha = 100°$.

Відповідь: 100°.

Задачі та вправи

32°. За малюнком 24 знайдіть довжину відрізка AB.



Мал. 24

33°. Перенесіть у зошит малюнок 24а. Побудуйте на прямій AB відрізок $AM = AC$. Чи обов’язково точки C і M збігаються?

34°. Накресліть у зошиті три відрізки зі спільним кінцем так, щоб другий був удвічі довший за перший, а довжина третього: **а)** дорівнювала сумі двох перших; **б)** дорівнювала різниці двох перших; **в)** була більшою за довжину першого, але меншою за довжину другого. Скільки розв’язків має задача? Чи обов’язково кінці відрізків лежатимуть на одній прямій?

35. Позначте дві точки A і B. Позначте на відрізку AB всі такі точки M, для яких виконується співвідношення:
1°) $AM = BM$; **2°)** $AM = 2BM$; 3) $AM \geqslant BM$; **4)** $AM \leqslant BM$.

36. На прямій дано точки A і B. Позначте на цій прямій всі такі точки M, для яких виконується співвідношення:
1) $AM = BM$; **2)** $AM = 2BM$; **3*)** $AM = 0{,}5BM$;
4*) $AM \geqslant BM$; **5*)** $AM \leqslant BM$; 6**) $AM \geqslant 2BM$.

37. Довжина відрізка AB дорівнює 9 см. Точка M належить відрізку AB. Знайдіть довжину відрізка BM, якщо:
1°) $AM = 3$ см; 2°) M – середина AB;
3°) $AM = BM$; 4°) $AM = 2BM$;
5°) AM менший від AB на 2 см;
6°) BM менший від AB на 1 см;
7°) BM менший від AB у 3 рази;
8*) AM менший від BM на 1 см;
9) $AM = 0{,}5BM$; **10)** $2AM = 3BM$;

11) $AM : BM = 1 : 5$;

12) $AM : BM = 2 : 3$;

13*) $AM : MK : KB = 1 : 2 : 3$, точка K належить прямій AB.

38. На прямій a містяться точки A, B і C, причому $AB = 4$ см, $BC = 5$ см. Якою може бути довжина відрізка AC?

39. На прямій від точки A відклали два відрізки: $AB = 2$ м і $AC = 4$ м. Знайдіть відстань між точками B і C. Скільки розв'язків має задача?

40. Точка C міститься на прямій між точками A і B. Знайдіть відстань між точками A і B, якщо відстань між серединами відрізків AC і CB дорівнює 7 см.

41*. На прямій послідовно позначено точки A, B, C, D, де $AC = 10$ см, $BD = 15$ см, $AD = 22$ см. Обчисліть довжину відрізка BC.

42*. На прямій послідовно позначено точки A, B, C, D, K. Знайдіть суму довжин двох відрізків, що сполучають середини відрізків AB і BC та CD і DK відповідно, якщо $AK = 12$ м.

43.** Уздовж прямолінійної сільської дороги послідовно стоять чотири хати A, B, C, D на відстані 100 м одна від одної. У якій точці вздовж цієї дороги треба викопати колодязь, щоб сума відстаней від нього до усіх хат була найменшою?

44.** У селі A живе 100 школярів, а в селі B – 75. Відстань між селами дорівнює 5 км. У якій точці вздовж прямолінійної дороги від A до B треба побудувати школу, щоб сума відстаней, яку долають усі школярі, була найменшою?

45.** Маємо дві лінійки без поділок. На одній відмітили лише відрізок завдовжки 7 см, а на другій – 5 см. Як, користуючися тільки цими лінійками, побудувати відрізок завдовжки 1 см?

46.** Довжина мого хвоста, – сказав кіт, – складає 12 см і ще половину мого хвоста. То яка довжина мого хвоста?

47°. Побудуйте за допомогою транспортира $\angle AOB = 120°$. Проведіть між сторонами кута промінь OC так, щоб кут AOC дорівнював 30°. Обчисліть градусну міру кута BOC і перевірте відповідь за допомогою транспортира.

48°. Побудуйте довільний гострий кут AOB. Виміряйте його за допомогою транспортира. Проведіть промінь OC так, щоб кут AOC був на 15° більшим за кут AOB.

49°. Бісектриса кута утворює з його стороною кут 20°. Знайдіть градусну міру заданого кута.

50°. Кут дорівнює 124°. Знайдіть кут, який утворює бісектриса цього кута з його стороною.

Для допитливих

За поширеністю і тривалістю свого впливу «Начала» є найважливішим у світі науковим твором, який аж до XX ст. вважали зразком у справі обґрунтування й викладання геометрії. Протягом століть цю книгу багаторазово перевидавали, доповнювали й перекладали багатьма мовами.

Евклідові «Начала» були такі важкі для засвоєння, що про теореми, які там містилися, говорили так: перші дві теореми є теоремами, а третя «ефелюга», що в перекладі означало «втеча учня». Мало хто витримував те неймовірне напруження думки, якого вони потребували. Пізніше їх значно спростили й пристосували для розуміння навіть учнями у школі.

51. $\angle AOB = 120°$. Точка M є внутрішньою точкою кута AOB. Знайдіть $\angle AOM$, якщо:

1°) OM – бісектриса кута AOB;
2°) $\angle AOB = 4\angle AOM$;
3°) $\angle AOM$ менший від $\angle AOB$ на 30°;
4°) $\angle AOB$ більший за $\angle AOM$ на 45°;
5°) $\angle AOM$ утричі менший від $\angle AOB$;
6) $\angle AOM = 2\angle MOB$;
7) $2\angle AOM = 3\angle MOB$;
8) $\angle AOM : \angle MOB = 1 : 5$;
9) $\angle AOM : \angle MOB = 2 : 3$;
10) $\angle AOM : \angle MOB = 3 : 7$;
11) $\angle AOM$ менший від $\angle MOB$ у 4 рази;
12) $\angle AOM$ більший за $\angle MOB$ у 3 рази;
13*) Піврізниця кутів $\angle AOM$ і $\angle MOB$ дорівнює 10°;
14*) $\angle AOM : \angle MOK : \angle KOB = 1 : 2 : 3$, де K – деяка точка.

52*. Знайдіть $\angle AOK$, якщо $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOK = \beta$, де: а) $\alpha = 67°$, $\beta = 23°$; б) $\alpha = 158°$, $\beta = 162°$.

53*. Від променя AB в одну й ту саму півплощину відкладено кути: $\angle CAB = 20°$, $\angle DAB = 40°$, $\angle FAB = 80°$. Між сторонами яких кутів проходять промені AC і AD? Скільки кутів утворилося на малюнку? Знайдіть градусну міру кожного з них.

54*. Від променя a в різні півплощини відклали рівні між собою кути (ab) і (ac). З'ясувалося, що кут (bc) не містить променя a. Які кути відклали: гострі, тупі, прямі?

55.** Від променя a відклали кути $\angle ab$ і $\angle ac$. Причому другий кут більший за перший. Промінь b не проходить між сторонами кута (ac). В одну чи в різні півплощини відносно прямої a відклали кути?

56.** Від променя a відклали кути (ab) і (ac). Причому $\angle ab + \angle bc \neq \angle ac$ і $\angle ac + \angle bc \neq \angle ab$. В одну чи в різні півплощини відносно прямої a відклали кути?

Запитання для повторення розділу I

1. Чи є правильним твердження: «точка має форму круга»? Чому?
2. **а)** На яких основних поняттях ґрунтується геометрія?
   б) Чи можна сформулювати їх означення?
3. Чим відрізняються між собою математичні твердження «аксіома» та «теорема»?
4. Поясніть принцип побудови геометрії.
5. Чому геометрію, яку ви вивчаєте, називають «евклідовою»?

Для допитливих

У зошиті написано 100 таких тверджень:
1) У цьому зошиті рівно одне твердження хибне.
2) У цьому зошиті рівно два твердження хибне.
....
100) У цьому зошиті рівно сто тверджень хибних.
Яке із цих тверджень правильне?

6. Поясніть, які промені називають доповняльними. Наведіть приклад.
7. Яку міру має кут, сторонами якого є доповняльні промені?
8. Які види кутів ви знаєте?
9. Скільки прямих можна провести через: **а)** одну точку; **б)** дві точки?
10*. Дві (різні) точки належать і прямій AB, і прямій CP. Що можна сказати про ці прямі?
11. Які відрізки називають між собою рівними?
12. Скільки відрізків заданої довжини можна відкласти на заданій прямій від заданої точки? А на промені від його початку?
13. Сформулюйте основну властивість вимірювання відрізків. Чи можна довести це твердження?
14. Які одиниці вимірювання довжин ви знаєте? Укажіть співвідношення між ними.
15. Скільки кутів, що дорівнюють заданому, можна відкласти від заданого променя з вершиною у його початку? А у певну півплощину?
16. Які кути називають між собою рівними?
17*. Скільки кутів, що дорівнюють заданому, можна відкласти від заданої прямої з вершиною в заданій точці? А у певну півплощину?
18. Сформулюйте основну властивість вимірювання кутів. Чи можна довести це твердження?
19. Що таке «бісектриса кута»?
20. Як знайти міру кута, якщо бісектриса цього кута утворює з його стороною кут $n°$?
21. Чи поміститься на відрізку завдовжки 3 мм мільйон точок?
22*. Скільки променів можуть мати спільний початок?
23*. Чи можна всередині розгорнутого кута помістити мільйон кутів?
24*. Чи можна пряму поділити точками так, щоб утворилося два відрізки і два промені?
25**. Яку найменшу кількість променів з початком в одній точці можна провести на площині так, щоб усі кути, які обмежено сусідніми променями, були гострими?
26**. Як без усяких інструментів знайти бісектрису даного на папері кута?

Для допитливих

Точка не має виміру.

Про пряму кажуть, що вона *одновимірна*, маючи на увазі, що вимірювання на прямій можна виконувати лише вздовж неї.

Про площину кажуть, що вона *двовимірна*. Справді, частину площини (від слова «площа») можна уявити як один, кілька або велику кількість прямокутників, форму яких можна задати двома вимірами – довжинами двох сусідніх сторін.

Окрім цього, можна уявити, що площину отримуємо перетином двох прямих, одна з яких є фіксованою, а друга ковзає вздовж неї. Кожна така пряма має один вимір, площина, що утворилася, – два.

Додаткові задачі до розділу I

57. Довжина прямокутної огорожі 24 м. Скільки в огорожі стовпів, якщо кожні два сусідніх стовпи віддалені між собою на 2 метри?

58. Навколо клумби квадратної форми треба розмістити 14 камінців так, щоб уздовж кожної сторони кількість камінців була однаковою. Чи можливо це зробити?

59. Мати дала Ганні кілька мотузок і доручила нарізати зав'язок для мішків. Через деякий час Ганна підрахувала, що зробила 12 розрізів і отримала 19 маленьких зав'язок. Скільки мотузок дала мати Ганні?

60. Є кілька мотузок завдовжки 1 м і завдовжки 2 м. Сума довжин усіх мотузок дорівнює 18 м. Якою може бути найменша кількість розрізів (без накладання мотузок), щоб розрізати всі мотузки на шматки завдовжки 50 см?

61. Населені пункти A, B, C розташовані послідовно на прямій трасі довжиною n, причому $AC : BC = 5 : 2$. Кількість палива, що витрачає двигун машини, прямо пропорційна відстані, яку долає машина. Знайдіть відношення витрат палива на подолання відстаней: 1) AC і AB; 2) BC і BA.

62. Побудуйте за допомогою транспортира кут AOB, який дорівнює $100°$. Проведіть поза кутом промінь OC так, щоб кут AOC містив $30°$. Знайдіть градусну міру кута BOC.

63. На скільки градусів повертається за 1 хв: **а)** хвилинна стрілка годинника; **б)** годинна стрілка годинника?

64. Знайдіть градусну міру кута між стрілками годинника, якщо він показує: **а)** 6 год; **б)** 9 год; **в)** 12 год 30 хв; **г)** 2 год 45 хв; **д)** 9 год 15 хв.

65. Дано точки A і B. Де на прямій AB містяться такі точки, відстань від яких до точки A є більшою, ніж до точки B?

66. Маємо гострий кут градусної міри $45°$. Через його вершину провели пряму, яка утворює прямий кут з однією зі сторін цього кута. Скільки кутів різної градусної міри утворилося? Знайдіть їх градусні міри.

67. Дві прямі a і b перетинаються в точці A. На кожній із цих прямих по обидва боки від точки A відклали відрізки завдовжки l. Через кожні дві точки, що є кінцями побудованих відрізків, провели прямі. Скільки прямих отримали?

68. Яку найбільшу кількість променів можна провести з початком у даній точці площини, щоб усі кути, сторонами яких будуть ці промені, були тупими?

69. Яку найменшу кількість променів з початком в одній точці можна провести на площині, щоб усі кути, які обмежені сусідніми променями, були гострими?

70. Скількома способами з відрізків завдовжки 7 см і 12 см можна скласти відрізок завдовжки 1 м?

71. Гусінь повзе по стовбуру тополі. Уночі вона піднімається на 4 м, а вдень спускається на 2 м. На восьму ніч гусінь досягла вершини дерева. Якою може бути висота цієї тополі?

Готуємося до тематичного оцінювання № 1

ВАРІАНТ 1

До завдання 1 запишіть тільки відповідь.

1. (2 б.) До кожного словосполучення лівого стовпчика доберіть словосполучення з правого стовпчика так, щоб утворилося правильне твердження. У відповідь усі пари запишіть у вигляді «число – літера».

1. Поняття точки	**А.** приймається за означенням.
2. Поняття кута	**Б.** приймається без означення.
3. Теорема – це твердження, що	**В.** вимагає доведення.
	Г. приймається без доведення.

До завдань 2 і 3 виконайте малюнок та запишіть відповідь.

2. (2 б.) Проведіть пряму й позначте на ній точки C, H і M так, щоб M не належала променю CH. Знайдіть градусну міру кута MCH.

3. (2 б.) На стороні KB трикутника KBM позначили точки P і T та сполучили їх з точкою M. Скільки кутів з вершиною в точці M утворилося?

До завдань 4 і 5 запишіть розв'язання та відповідь.

4. (3 б.) Відрізок AB завдовжки 50 см поділено точкою T так, що $AT : TB = 3 : 7$. Знайдіть довжину відрізка TB.

5. (3 б.) Точка T – внутрішня точка кута KMN, градусна міра якого дорівнює $120°$. Знайдіть градусні міри кутів, на які поділяє даний кут промінь MT, якщо різниця цих кутів дорівнює $30°$.

ВАРІАНТ 2

До завдання 1 запишіть тільки відповідь.

1. (2 б.) До кожного словосполучення лівого стовпчика доберіть словосполучення з правого стовпчика так, щоб утворилося правильне твердження. У відповідь усі пари запишіть у вигляді «число – літера».

1. Поняття рівності двох кутів	**А.** приймається без означення.
2. Поняття відрізка	**Б.** приймається за означенням.
3. Аксіома – це твердження, що	**В.** приймається без доведення.
	Г. вимагає доведення.

До завдань 2 і 3 виконайте малюнок та запишіть відповідь.

2. (2 б.) Накресліть пряму. Позначте на ній точки A, B і P так, щоб для довжин відрізків, що утворилися, виконувалося співвідношення $AB < AP < PB$. Позначте довжини двох менших з них як a і b та знайдіть довжину більшого із цих відрізків.

3. (2 б.) Три точки A, B і C не лежать на одній прямій. Точки P і T – внутрішні точки відрізка AB. Скільки кутів з вершинами в точках P і T утвориться, якщо всі задані точки сполучити прямими?

До завдань 4 і 5 запишіть розв'язання та відповідь.

4. (3 б.) Дано відрізок AB завдовжки 1 м і точку C на ньому. Знайдіть довжину відрізка CB, якщо він на 2 дм коротший від відрізка AC.

5. (3 б.) Промінь PM ділить кут BPC на два кути. Знайдіть міру кута BPC, якщо $BPM : MPC = 1 : 3$, а менший з кутів, що утворилися, дорівнює $9°$.

Для допитливих

Перший у Східній Європі вищий навчальний заклад – **Києво-Могилянську колегію** – було створено у 1632 р. (з 1701 р. – Києво-Могилянська академія). До 1817 р. це була загальна вища школа, яка за структурою відрізнялася від тодішніх західноєвропейських університетів. У ній було шість класів з однорічним терміном навчання і один з дворічним (іноді трирічним). Київська академія була створена більш як за 20 років до приєднання України до Росії і за 55 років до того, як у Росії (у Москві) почав працювати аналогічний заклад (Елліно-грецька академія, пізніше – Слов'яно-латинська академія). Києво-Могилянська академія набула популярності. У ній навчалися студенти з різних країн Європи (навіть із Греції) та арабського Сходу.

Історія Київської академії розпочинається набагато раніше за 1632 р. – із часів правління Ярослава Мудрого, сина Володимира Великого. Як пише автор «Історії Русів»: «Ярослав Володимирович, який поширив і утвердив Християнство, заснував у Києві головну школу Богослов'я та інших красних наук з багатою, із Греції виписаною бібліотекою».

Після розпаду Київської Русі Академія офіційно припинила своє існування, а неофіційно, за словами автора «Історії Русів», перейшла на нелегальне становище і переховувалася «по монастирях та печерах».

У 1632 році Академія була відновлена митрополитом Петром Могилою з допомогою членів Київського православного братства, до якого, зокрема, входив тодішній гетьман Петро Сагайдачний.

Зі стін Києво-Могилянської академії вийшло багато відомих випускників. До її вихованців належали гетьмани Іван Мазепа, Пилип Орлик, Павло Полуботько, Іван Скоропадський та Іван Самойлович. Тут навчалися філософ Григорій Сковорода, російський науковець зі світовим ім'ям Михайло Ломоносов, архітектор Іван Григорович-Барський, композитор Максим Березовський.

Києво-Могилянська академія була закрита владою Російської імперії у 1817 році з політичних міркувань, щоб послабити духовний вплив Києва на життя всієї імперії. Натомість у 1819 році в приміщеннях Києво-Могилянської академії почала діяти Київська духовна академія, закрита в 1919 р. радянською владою, але яка неофіційно діяла до середини 20-х рр.

19 вересня 1991 року, згідно з розпорядженням Голови Верховної Ради України «Про відродження Києво-Могилянської академії», було створено Університет «Києво-Могилянська академія» на історичній території Києво-Могилянської академії.

Деякий час університет мав дві філії в Острозі та в Миколаєві. Тепер вони стали окремими університетами — Національним університетом «Острозька академія» та Чорноморським державним університетом ім. Петра Могили.

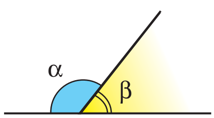
II
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

Вивчаючи цей розділ, ви дізнаєтеся:
- **про суміжні й вертикальні кути та їх властивості;**
- **як можна скорочено записати розв'язання геометричної задачі;**
- **про перпендикулярні й паралельні прямі, їх властивості та ознаки;**
- **що таке «спосіб доведення від супротивного»;**
- **про види математичних тверджень.**

§ 6. Суміжні кути

О з н а ч е н н я. ***Два кути називають суміжними, якщо в них одна сторона є спільною, а дві інші утворюють пряму (є доповняльними променями).***

ВЛАСТИВОСТІ СУМІЖНИХ КУТІВ



$\alpha + \beta = 180°$

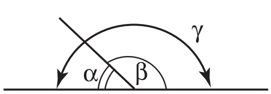
Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Т е о р е м а. ***Сума суміжних кутів дорівнює*** **180°.**

Д о в е д е н н я

Два суміжних кути утворюють розгорнутий кут (мал. 25). Тому (за аксіомою про відкладання кутів) їх сума дорівнює 180°, *що й вимагалося довести*.

Скорочений запис доведення цієї теореми зручно подати в такому вигляді.



Мал. 25

Дано: α і β – суміжні кути.
Довести: $\alpha + \beta = 180°$.

1) γ – розгорнутий кут. Тоді $\gamma = 180°$;
2) $\alpha + \beta = \gamma = 180°$. *Щ. в. д.*

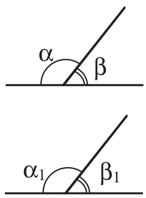
«*Щ. в. д.*» – скорочення від «що й вимагалося довести».

Н **Наслідок.** ***Якщо два кути між собою рівні, то і суміжні з ними кути між собою рівні.***

Якщо два кути рівні, то і суміжні з ними кути рівні.

Доведення

Нехай кут β є суміжним з кутом α, а кут β_1 – суміжний з кутом α_1 і $\alpha = \alpha_1$ (мал. 26). Доведемо, що $\beta = \beta_1$.



Мал. 26

1) За умовою кути α і β – суміжні.
Тоді $\alpha + \beta = 180°$.
2) За умовою кути α_1 і β_1 – суміжні.
Тоді $\alpha_1 + \beta_1 = 180°$.
3) За умовою $\alpha = \alpha_1$.
Тоді $\beta = 180° - \alpha = 180° - \alpha_1 = \beta_1$. *Щ. в. д.*

Як записують розв'язання геометричних задач

Перш ніж перейти до розв'язування задач, домовимося, що запис розв'язання геометричної задачі – це виокремлення і запис логічних кроків її розв'язування. Запис доцільно виконувати математичною мовою, а не відтворювати письмово мовний опис процесу розв'язування. (Це допомагає скоротити записи.)

Розв'язування задач з планіметрії, як правило, передбачає такі етапи:

1) виконання малюнка до задачі;
2) нанесення позначень на малюнок;
3) скорочений запис вихідних даних умови задачі через уведені позначення;
4) запис твердження, яке треба довести, або того, що треба знайти;
5) позначення того, що запис умови закінчено: зазвичай проводять горизонтальну риску або пишуть слово «розв'язання» («доведення»);
6) запис логічних кроків розв'язання (доведення):
   – треба доводити ті співвідношення, що ми використовуємо і які не збігаються з твердженнями умови та не є аксіомами або теоремами;

Етапи розв'язування:

1) малюнок;

2) позначення на малюнку;

3) скорочений запис вихідних даних умови;

4) скорочений запис того, що треба довести (знайти);

5) відокремлення умови від початку розв'язання;

6) запис логічних кроків міркувань та обчислень;

7) відповідь (щ. в. д.).

Для допитливих

Вислів «Що й вимагалося довести» уперше застосував видатний грецький математик Евклід. У його книзі «Начала» цими словами закінчувалося доведення кожного математичного твердження.

Серед сучасних математиків можна почути такий жарт: «Довершеністю своїх "Начал" Евклід затримав розвиток геометрії на дві тисячі років!».

– логічний крок має структуру: вихідне твердження; «тоді» («→»); твердження-висновок;
– вихідними твердженнями логічного кроку можуть бути: твердження умови задачі, аксіоми і теореми геометрії та твердження, які було доведено в попередніх логічних кроках;

7) записати відповідь або «що й вимагалося довести» (скорочено «щ. в. д.»).

Приклади такого запису доведення математичною мовою ми вже наводили раніше.

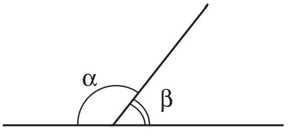
Під час запису розв'язання *можна використовувати* скорочення та позначення*. (Див. форзац у кінці підручника.)

З а у в а ж е н н я. Застосування позначень і скорочень не є обов'язковим. Але вони можуть допомогти чітко й лаконічно записати умову або розв'язання геометричної задачі.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 1. **Доведіть, що кожний із суміжних кутів менший від 180°.**

Дано: α і β – суміжні.
Довести: $\alpha < 180°$, $\beta < 180°$.



Д о в е д е н н я

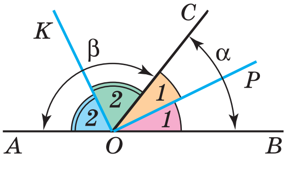
1) α і β – суміжні $\rightarrow \alpha + \beta = 180°$;

2) $\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta = 180° \\ \alpha > 0 \\ \beta > 0\end{array}\right| \rightarrow \alpha < 180°$ і $\beta < 180°$.

Щ. в. д.

П р и к л а д 2. **Доведіть, що бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут.**

Дано: α і β – суміжні, $OP \equiv l_\alpha$, $OK \equiv l_\beta$.
Довести: $\angle KOP = 90°$.



1) $\angle POB = COP \triangleq \angle 1$; $\angle AOK = \angle KOC \triangleq \angle 2$.

2) α і β – суміжні $\rightarrow 2\angle 1 + 2\angle 2 = 180°$.

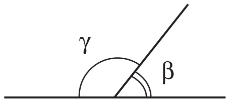
3) $\angle KOP = \angle 1 + \angle 2 = 90°$.

Щ. в. д.

П р и к л а д 3. Один із суміжних кутів на 30° більший за другий. Знайдіть ці кути.

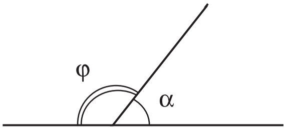
* Радимо в запису розв'язування задач користуватися стрілкою «→». Запис через знак логічного слідування «⇒» може приводити до фактичних помилок, оскільки знак теорії множин (предиката) вимагає переліку *всіх* вихідних умов, з яких випливає наслідок, зокрема і тверджень умови, позначень, тверджень, отриманих у попередніх логічних кроках, які ми інколи не пишемо, а маємо на увазі. (Так, у прикладі 2, с. 36 у п. 2 маємо на увазі, що $\alpha = 2\angle 1$, $\beta = 2\angle 2$.)

Дано: γ і β – суміжні; $\gamma - \beta = 30°$.
Знайти: γ, β.



1) γ і β – суміжні $\rightarrow \gamma + \beta = 180°$.
2) $\left.\begin{array}{l}\gamma + \beta = 180° \\ \gamma = \beta + 30°.\end{array}\right| \rightarrow \beta + 30° + \beta = 180°;\ 2\beta + 30° = 180°.$
3) Отже, $\beta = 75°$, $\gamma = 180° - 75° = 105°$.
Відповідь: 105°; 75°.

Приклад 4. Знайдіть суміжні кути, якщо їх градусні міри відносяться як 3 : 7.



Дано: α і φ – суміжні; $\alpha : \varphi = 3 : 7$.
Знайти: α, φ.

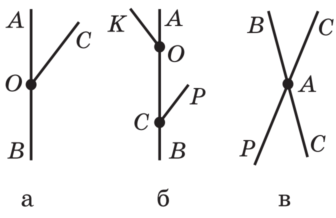
Розв'язання

1) α і φ – суміжні, тоді $\alpha + \varphi = 180°$;
2) $\alpha : \varphi = 3 : 7$, тоді $\alpha = 3t$, $\varphi = 7t$; $\alpha + \varphi = 10t$;
3) $\alpha + \varphi = 180° = 10t$, тоді $t = 18°$ і $\alpha = 3 \cdot 18° = 54°$, $\varphi = 7 \cdot 18° = 126°$.
Відповідь: 54°; 126°.

Практична робота 8

1. Побудуйте три довільних кути: гострий, тупий і прямий. Для кожного з них побудуйте суміжний кут. Скількома способами це можна зробити? Що можна сказати про побудовані кути?
2. Проведіть дві прямі, які перетинаються в точці *A*. Назвіть усі пари суміжних кутів, що при цьому утворилися.
3. Проведіть 3 прямі, які мають спільну точку *O*, і назвіть усі пари суміжних кутів, що утворилися. Скільки таких пар?
4*. Скільки пар суміжних кутів утвориться при перетині шести прямих, що проходять через спільну точку?
5.** А якщо прямих у задачі 4 буде *n*?

Задачі та вправи



Мал. 27

72°. Скільки пар суміжних кутів на малюнку 27? Назвіть їх.
73°. Чи може сума двох суміжних кутів дорівнювати 123°?
74°. Чи можуть обидва суміжні кути бути: **а)** гострими; **б)** тупими; **в)** прямими?
75°. Чи може кут, суміжний з прямим, бути: **а)** гострим; **б)** тупим; **в)** прямим?
76°. Які з наступних пар кутів можуть бути суміжними: **а)** 23° і 157°; **б)** 20° і 163°; **в)** 120° і 35°; **г)** 81° і 99°?
77°. Знайдіть кут, суміжний з кутом градусної міри: **а)** 30°; **б)** 120°; **в)** 90°.
78°. Один із суміжних кутів дорівнює 32°. Знайдіть другий кут.
79°. Знайдіть градусну міру кута, якщо відомо, що суміжний з ним кут дорівнює 123°.

80°. Якщо продовжити одну зі сторін кута, то утвориться кут градусної міри 47°. Знайдіть міру заданого кута.

81. Один кут більший за другий. Порівняйте кути, суміжні з ними.

82. Один кут менший за другий. Порівняйте кути, суміжні з ними.

83. Один із суміжних кутів удвічі більший за другий. Знайдіть градусні міри цих кутів.

84. Один із суміжних кутів утричі менший за другий. Знайдіть градусні міри цих кутів.

85. Знайдіть градусні міри суміжних кутів, якщо їх різниця дорівнює 30°.

86. Один із суміжних кутів на 20° більший за другий. Знайдіть ці кути.

87. Один із суміжних кутів складає $\frac{2}{3}$ від їх суми. Знайдіть градусні міри цих кутів.

88. Відомо, що один із суміжних кутів становить $\frac{2}{3}$ від другого. Знайдіть ці кути.

89*. Різниця двох суміжних кутів дорівнює половині їх суми. Знайдіть ці кути.

90*. Один кут удвічі менший за другий. Чи правильно, що кут, суміжний з першим, удвічі більший за кут, суміжний з другим?

91*. Третина одного кута дорівнює четвертій частині іншого кута. Який із суміжних з ними кутів є більшим?

92*. Установіть, які з наступних тверджень є правильними. Відповідь обґрунтуйте.

1) Якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то ці кути суміжні.
2) Якщо сума двох кутів зі спільною вершиною дорівнює 180°, то ці кути суміжні.
3) Якщо сума двох кутів, по одній стороні яких належить спільній прямій, дорівнює 180°, то ці кути суміжні.
4) Якщо сума двох кутів зі спільною стороною і спільною вершиною дорівнює 180°, то ці кути суміжні.

93*. Знайдіть градусні міри двох суміжних кутів, якщо вони відносяться як: **а)** 3 : 1; **б)** 2 : 3; **в)** 5 : 7.

94.** Знайдіть суміжні кути ABC і PBC, якщо бісектриса кута PBC утворює з променем BA кут, більший за кут ABC на 30°.

95.** Менший із суміжних кутів у 4 рази менший, ніж різниця цих суміжних кутів. Знайдіть ці кути.

96.** Різниця двох суміжних кутів становить 30 % від їх суми. Знайдіть ці кути.

97.** Бісектриса кута утворює з його стороною кут, градусна міра якого дорівнює куту, суміжному з даним. Знайдіть градусну міру заданого кута.

98.** Скільки разів на добу стрілки годинника утворюють:

а) розгорнутий кут;

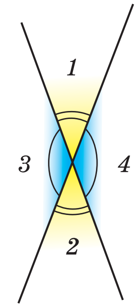
б) прямий кут?

§ 7. Вертикальні кути

Означення. ***Два кути називають вертикальними, якщо сторони одного з них є доповняльними променями сторін другого.***

Дві прямі при перетині утворюють дві пари вертикальних кутів.

Дві прямі при перетині утворюють дві пари вертикальних кутів.



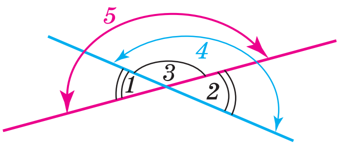
$\angle 1$ і $\angle 2$ – вертикальні;
$\angle 3$ і $\angle 4$ – вертикальні.

ВЛАСТИВІСТЬ ВЕРТИКАЛЬНИХ КУТІВ

Теорема. ***Вертикальні кути між собою рівні.***

Вертикальні кути рівні між собою.

Доведення



Мал. 28

Розгорнуті кути *4* і *5* (мал. 28) містять один і той самий кут *3*. Усі розгорнуті кути рівні між собою. Тоді якщо від рівних кутів *4* і *5* відняти один і той самий кут *3*, то отримаємо рівні кути *1* і *2*.

Теорему доведено.

Наведемо це саме доведення у вигляді ланцюжка логічних кроків, записаних математичною мовою.

Дано: $\angle 1$ і $\angle 2$ – вертикальні.

Довести: $\angle 1 = \angle 2$.

Доведення

1) $\angle 1$ і $\angle 3$ – суміжні $\rightarrow \angle 1 + \angle 3 = 180°$;

2) $\angle 2$ і $\angle 3$ – суміжні $\rightarrow \angle 2 + \angle 3 = 180°$;

3) $\left.\begin{array}{l} \angle 1 + \angle 3 = 180° \\ \angle 2 + \angle 3 = 180° \end{array}\right| \rightarrow \angle 1 = \angle 2$. *Щ. в. д.*

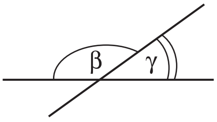
Для допитливих

У Стародавній Греції за часів грецького вченого *Фалеса Мілетського* (бл. 624–547 рр. до н. е.) починається новий етап у розвитку геометрії. Геометрія набуває характерного для неї сьогодні абстрактного напрямку; в математику приходить доведення. Саме Фалесу й приписують відкриття ідеї доведення в геометрії. Зрозуміло, що без попереднього нагромадження багатьма поколіннями геометричних фактів про потребу виникнення доведення не могло бути й мови. Новий етап у математиці – це природне продовження того, що було підготовлено перед тим.

Через деякий час після Фалеса накопичилося стільки математичних тверджень, що виникла потреба звести їх у певну систему, що й зробив Евклід (III ст. до н. е.).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Два із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться як 1 : 2. Знайдіть градусну міру цих кутів.



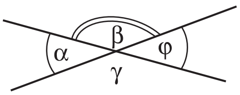
Дано: $\gamma : \beta = 1 : 2$.
Знайти: γ, β.

Розв'язання

γ і β – або суміжні, або вертикальні. Якщо γ і β – вертикальні, то $\gamma = \beta$, що суперечить умові. Тоді γ і β – суміжні.
1) $\gamma + \beta = 180°$;
2) $\gamma : \beta = 1 : 2 \to \gamma = t$, $\beta = 2t$;
3) $\gamma + \beta = 180° = 3t \to t = 60°$, тоді $\gamma = 60°$, $\beta = 2 \cdot 60° = 120°$.

Відповідь: 60°, 120°.

Приклад 2. Знайдіть міру кожного з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо сума двох з них дорівнює 56°.



Дано: $\alpha + \varphi = 56°$.
Знайти: α, φ, γ, β.

Розв'язання

1) Якщо α і φ – суміжні, то $\alpha + \varphi = 180° \neq 56°$. Тоді α і φ – вертикальні, $\alpha = \varphi$;
2) $\alpha = \varphi = 56° : 2 = 28°$;
3) γ, β – суміжні з рівними між собою кутами $\to \gamma = \beta$;
4) β і α – суміжні $\to \beta + \alpha = 180°$, $\beta = 180° - 28° = 152° = \gamma$.

Відповідь: 28°, 28°, 152°, 152°.

Практична робота 9

1. Побудуйте три довільні кути: гострий, прямий і тупий. Для кожного з них побудуйте вертикальний кут.
2. Проведіть прямі AB і CK, які перетинаються в точці M. Назвіть вертикальні кути, які утворилися при перетині цих прямих.

Для допитливих

Доведення теореми про властивість вертикальних кутів приписують Фалесу Мілетському. Ця властивість була відома вавилонянам та єгиптянам і до Фалеса, але вони встановили її з практичного досвіду вимірювання кутів (на прикладі окремих випадків). Фалес уперше довів цю властивість у загальному вигляді.

Фалеса за давньою традицією відносять до так званих «семи мудреців світу». Він був одним з найвидатніших математиків свого часу. Деякі теореми геометрії, які сьогодні вивчають у школі, носять його ім'я. У галузі астрономії вважають, що саме Фалес визначив тривалість року (365 днів).

Фалес Мілетський. Фрагмент стародавньої гравюри

3. Проведіть три прямі, що перетинаються в одній точці. Виконайте необхідні позначення і назвіть промені, що утворилися. Скільки променів ви отримали? Визначте пари вертикальних кутів і запишіть їх. Скільки пар вертикальних кутів ви отримали?

4. Виконайте п. 3 для чотирьох прямих.

5*. Якщо через одну точку провести 10 прямих, то скільки утвориться променів і скільки пар вертикальних кутів? А якщо n прямих?

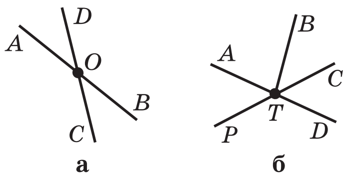
Задачі та вправи

99°. Скільки прямих, що перетинають дану пряму в заданій точці, можна провести?

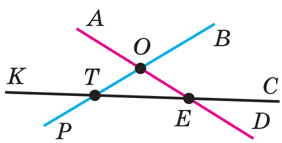
100°. Скільки можна утворити пар вертикальних кутів, що мають спільну вершину в заданій точці?

101°. Сформулюйте властивість вертикальних кутів. Чи вимагає вказана вами властивість доведення? Чому?

102°. Назвіть пари вертикальних кутів, які утворено прямими: **а°)** на малюнку 29; **б)** на малюнку 30; **в)** на малюнку 32.



Мал. 29



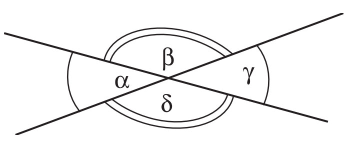
Мал. 30

103°. Знайдіть градусну міру кожного з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо всі ці кути рівні між собою.

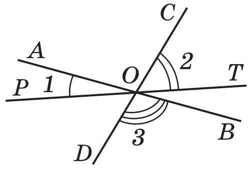
104°. Побудуйте кут і позначте його α. Побудуйте кут, вертикальний до кута α, і позначте його β. Знайдіть кут β, якщо:
а) $\alpha = 30°$; **б)** $\alpha = 10°$; **в)** $\alpha = 120°$.

105°. Знайдіть кожний з кутів, що утворилися при перетині двох прямих (мал. 31), якщо: **а)** $\alpha = 56°$; **б)** $\beta = 124°$; **в)** $\gamma = 100°$.

106. Чи можуть міри кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відноситися між собою як: **а)** 2 : 3 : 4 : 3; **б)** 2 : 3 : 2 : 5? Чому?



Мал. 31



Мал. 32

107. Знайдіть міру кожного з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо їх значення відносяться як 1 : 5 : 1 : 5.

108. Знайдіть міру кожного з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо значення двох з них відносяться як 1 : 2.

109*. Кути BAC і KAP вертикальні. Знайдіть ці кути, якщо кут BAC на 20° менший від кута BAK.

110*. Кути AOK і MOP – вертикальні. Кут AOK становить 80 % від кута AOM. Знайдіть кут MOP.

111*. Знайдіть значення кожного з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо деякий з них утричі більший за один з трьох інших кутів.

112*. При перетині двох прямих утворилося чотири кути. Знайдіть кути між бісектрисами цих кутів.

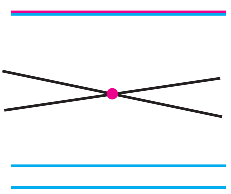
113*. Доведіть, що бісектриси кутів, що утворилися при перетині двох прямих, належать двом взаємно перпендикулярним прямим.

114.** Три прямі утворили при перетині шість кутів (мал. 32). Доведіть, що для них виконується рівність $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

115.** П'ять прямих перетинаються в одній точці. На скільки кутів вони ділять площину? Яке значення ми отримаємо, якщо додамо градусні міри цих кутів, беручи їх через один?

§ 8. Властивості прямих. Кут між двома прямими. Паралельні та перпендикулярні прямі. Спосіб доведення від супротивного

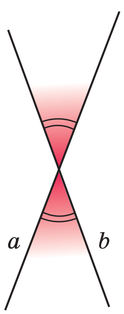
Дві прямі на площині:
або збігаються,
або перетинаються в одній точці,
або не мають спільних точок.



У попередньому розділі ми обговорювали поняття прямих, означення паралельних прямих та їх властивості за аксіомами Евкліда. Нагадаємо.

- *Через дві точки можна провести пряму і тільки одну* (аксіома, с. 23, А-І).
- *Будь-які дві різні прямі мають не більше ніж одну спільну точку* (наслідок з аксіоми, с. 24).
- Дві прямі на площині називають *паралельними*, якщо вони не перетинаються.
- ОСНОВНА ВЛАСТИВІСТЬ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ. *Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна повести лише одну пряму, паралельну даній* (аксіома, с. 23, А-ІХ).

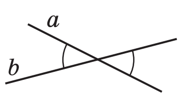
Таким чином, **дві прямі на площині або паралельні (не мають спільних точок), або збігаються (усі точки спільні), або перетинаються (в одній точці).**



$\angle(a;\, b) \leqslant 90°$

Два *відрізки (промені) називають паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Означення. ***Кутом між двома прямими називають менший з кутів, що утворилися при їх перетині*** (мал. 33).



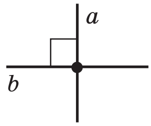
Мал. 33

Його позначають як $a\hat{\ }b$, або $\angle(a;\, b)$. Кут між прямими не може перевищувати 90°.

За властивістю вертикальних кутів, якщо один із чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 90°, то решта із цих кутів – також по 90°. Про такі прямі кажуть, що вони *перпендикулярні*.

Перпендикулярність позначають знаком «⊥».

Наприклад: $a \perp b$ (мал. 34).

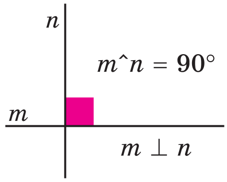


Мал. 34

Два *відрізки (промені)* називають *перпендикулярними*, якщо вони лежать на перпендикулярних прямих.

Пряму, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього, називають *серединним перпендикуляром*.

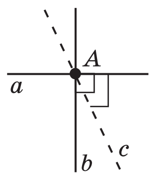
Перпендикулярні прямі



Т е о р е м а. ***Через задану точку прямої можна провести тільки одну перпендикулярну до неї пряму.***

Д о в е д е н н я

Нехай пряма b перетинає пряму a в точці A під прямим кутом. Доведемо, що така пряма буде єдиною.

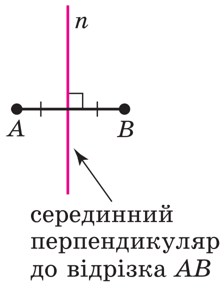


Мал. 35

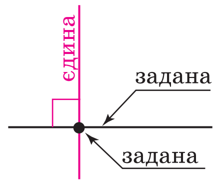
Нехай існує ще одна пряма $c \perp a$, яка проходить через точку A (мал. 35). Тоді маємо два прямих кути з вершинами в точці A, які відкладено від прямої a в одну півплощину.

Цього бути не може, бо це суперечить аксіомі про відкладання кутів (A-VII, с. 23). Тобто прямі b і c збігаються. Отже, пряма b – єдина.

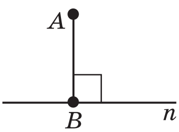
Теорему доведено.



З а у в а ж е н н я. За аксіомою про відкладання кутів існує пряма b, яка утворює кут 90° з прямою a і проходить через задану точку A.



О з н а ч е н н я. ***Перпендикуляром, проведеним з даної точки до даної прямої, називають відрізок, перпендикулярний до цієї прямої, кінцями якого є задана точка та точка прямої.***



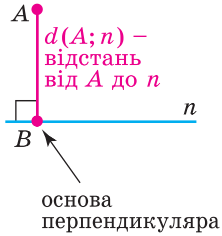
Мал. 36

Наприклад, на малюнку 36 відрізок AB – перпендикуляр до прямої n, проведений з точки A.

Основою перпендикуляра AB називають спільну точку B перпендикуляра і прямої.

Довжина відрізка AB – це *відстань від точки A до прямої n*.

Відстань від точки A до прямої n *позначають* як $d(A;\, n)$.



СПОСІБ ДОВЕДЕННЯМ ВІД СУПРОТИВНОГО

Спосіб (або метод), яким ми довели останню теорему, називають ***доведенням від супротивного, або зведенням до логічного протиріччя (абсурду).***

Доведення від супротивного:
1) формулюємо твердження, супротивне до того, що треба довести;
2) доводимо його хибність;
3) приходимо до висновку.

Першу назву цей спосіб отримав тому, що *на початку міркування припускається супротивне (протилежне) тому, що треба довести.*

Зведенням до абсурду він називається тому, що, *міркуючи на підставі нашого припущення, ми приходимо до протиріччя.* Такий висновок змушує нас відкинути зроблене спочатку припущення і прийняти те, що треба було довести.

Цей спосіб дуже часто застосовують для доведення тверджень у геометрії.

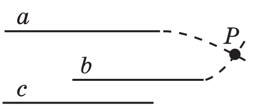
Доведемо від супротивного вже відому нам одну з властивостей суміжних кутів: «Кожний із суміжних кутів не перевищує 180°».

«Доведення від супротивного», таке любе Евклідові, – це чи не найбільш витончена зброя математики.
Г. Харді (1877–1947) – англійський математик

Припустимо, що один із суміжних кутів більший за 180°. Тоді сума цих суміжних кутів перевищуватиме 180°, чого бути не може, бо суперечить теоремі про суму суміжних кутів. Висновок: припущення хибне, отже, вихідне твердження є правильним.

Доведемо способом від супротивного таку властивість паралельних прямих.

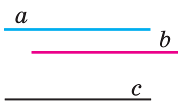
Т е о р е м а 2. ***Дві різні прямі, що паралельні третій, паралельні між собою.***



Мал. 37

Дано: $a \parallel c$, $b \parallel c$ (мал. 37).
Довести: $a \parallel b$.

$\left.\begin{array}{l} a \parallel c \\ b \parallel c \end{array}\right| \rightarrow a \parallel b$



Д о в е д е н н я

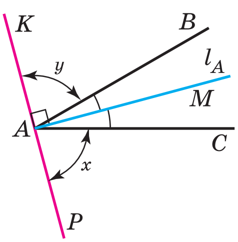
Припустимо протилежне: прямі a і b перетинаються в точці P.

Тоді через точку P проходять дві прямі a і b, які паралельні прямій c, чого не може бути (суперечить аксіомі А-IX). Висновок: припущення хибне, отже, $a \parallel b$.

Теорему доведено.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 1. Через вершину кута A, градусна міра якого 30°, провели пряму KP перпендикулярно до його бісектриси. Обчисліть кути, які утворює пряма KP зі сторонами кута A.



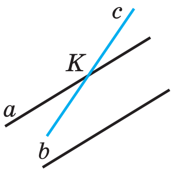
Дано: $\angle BAC = 30°$, $AM \equiv l_A$, $KP \perp AM$.
Знайти: $\angle KAB$, $\angle CAP$, $\angle KAC$, $\angle BAP$.

Нагадаємо позначення:
$\equiv$ – збігається, тотожна рівність
l_A – бісектриса кута A

1) $AM \equiv l_A \rightarrow \angle BAM = \angle MAC = \angle A : 2 = 15°$.
2) $MA \perp KP \rightarrow x = y = 90° - 15° = 75°$.
3) $\angle KAC = y + \angle A = x + \angle A = \angle BAP = 105°$.

Відповідь: 75°, 75°, 105°, 105°.

О.3 **Приклад 2. Доведіть, що якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу.**



Дано: $a \parallel b$, $c \cap a$.
Довести: $c \cap b$.

знак «$\cap$» замінює слово «перетинає»

Маємо: $a \parallel b$, $c \cap a = K$.
Доведемо способом від супротивного.
1) Припустимо, що c не перетинає b. Тоді $c \parallel b$.
2) $c \parallel b$ і $a \parallel b$ $\rightarrow$ через точку K проходять дві прямі, які паралельні прямій b. Це суперечить аксіомі (А-IX, с. 23).
3) Отже, наше припущення є хибним. Тому c перетинає b.
Щ. в. д.

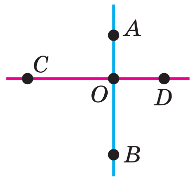
Практична робота 10

1. На прямій AB позначте точку M. За допомогою косинця проведіть через цю точку пряму, перпендикулярну до прямої AB. Скільки розв'язків має задача?

2. Проведіть дві взаємно перпендикулярні прямі AB і CD. Нехай O – точка їх перетину. За допомогою транспортира проведіть промінь OM так, щоб $\angle AOM = \angle MOC = 45°$.

3. Продовжіть промінь OM за точку O і виміряйте кути, що утворилися. Висновок запишіть.

Задачі та вправи



Мал. 38

116°. Чи може кут між прямими дорівнювати: **а)** 130°; **б)** 30°; **в)** 90°; **г)** 91°?

117°. Накресліть дві прямі, що перетинаються, та виміряйте кути, що утворилися. Запишіть міру кута між цими прямими.

118°. На малюнку 38 маємо перпендикулярні прямі. Укажіть усі пари перпендикулярних: **а)** відрізків; **б)** променів.

119°. Два прямолінійних шляхи між пунктами A і B та C і $Д$ не мають спільних точок. Чи можна вважати їх паралельними?

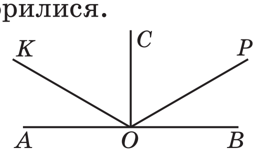
120°. Чи можна через точку поза заданою прямою провести дві різні прямі, паралельні даній? Відповідь обґрунтуйте.

121°. Прямі a і b перетинаються. Чи можна провести пряму, що буде: **а)** паралельною і прямій a, і прямій b; **б)** паралельною прямій a і перетинатиме пряму b?

122. Прямі a і b взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці O. Через точку O провели пряму n. Знайдіть кут між прямими a і n, якщо прямі b і n утворюють між собою кут 20°.

123. Прямі AB і CP взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці O. Через точку O під кутом 60° до прямої AB провели пряму OK. Знайдіть усі кути, що при цьому утворилися.

124. Точка O належить прямій AB. З початком у точці O в одну півплощину відносно прямої AB провели промені OK, OC і OP (мал. 39). Причому $\angle AOK = \angle POB$ і $\angle KOC = \angle COP$. Доведіть, що $OC \perp AB$.



Мал. 39

125. Прямі b і c паралельні прямій a, а пряма n паралельна прямій b. Як розміщена пряма n відносно: **а)** прямої c; **б)** прямої a?

126. Скільки променів, паралельних даній прямій, можна провести з початком у точці поза цією прямою?

127. Скільки відрізків, паралельних даній прямій, можна провести через точку поза цією прямою? А променів?

128*. Прямі AB і PK взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці O. Промінь OM утворює з прямою AB кут $30°$. Знайдіть кути, які утворює промінь OM з променями OP і OK.

129*. Нехай задано кут, що дорівнює $21°$. Чи можна, користуючися лише олівцем і косинцем, побудувати кут, градусна міра якого становить $69°$?

130*. Через вершину кута ABC, градусна міра якого дорівнює $100°$, проведено пряму MP, перпендикулярну до його бісектриси. Обчисліть кути, які утворює пряма MP зі сторонами кута ABC.

131*. Прямі n і m паралельні прямій c, пряма d паралельна прямій m, а пряма k перетинає пряму c. Як розміщена пряма k відносно: **а)** прямої n; **б)** прямої m; **в)** прямої d?

132*. Доведіть способом від супротивного.

1) Дві різні прямі мають не більш як одну спільну точку.
2) Якщо кожний з кутів гострий, то вони не суміжні.
3) Якщо один з кутів гострий, а другий – тупий, то вони не вертикальні.
4) Один із суміжних кутів не перевищує $90°$.
5) Один із суміжних кутів не менший від $90°$.
6*) Вертикальні кути між собою рівні.
7*) Якщо кути між собою рівні, то суміжні з ними кути також між собою рівні.
8*) Хоча б один з кутів, що утворюються при перетині двох прямих, не перевищує $90°$.
9*) Якщо два промені ділять розгорнутий кут на три частини, то хоча б один із цих кутів не менший від $60°$.
10**) Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає третю пряму, то і друга з паралельних прямих перетинає цю пряму.

133.** З вершини кута проведено промінь, перпендикулярний до його бісектриси. Цей промінь утворює зі стороною даного кута гострий кут α. Знайдіть даний кут.

134.** Через вершину гострого кута провели дві прямі, перпендикулярні до сторін кута. Доведіть, що сума даного гострого кута і тупого кута між проведеними прямими дорівнює $180°$.

Для допитливих

Пошук шляху розв'язування задачі – справа нелегка. Вона нагадує роботу дослідника, коли той намагається вирішити певну проблему. Видатний французький учений *Анрі Пуанкаре* стверджував, що пошук розв'язування треба здійснювати з насолодою, відчувати красу – красу умовиводів і красу світу, який ми досліджуємо. Ось його слова: «Вчений досліджує природу не тому, що це корисно; він досліджує її тому, що це приносить йому насолоду, тому що природа прекрасна. Якби природа не була прекрасною, вона не заслуговувала б на пізнання; життя не заслуговувало б на те, щоб бути прожитим».

135**. Перпендикулярно до сторін тупого кута з початком у його вершині провели два промені так, що утворений цими променями кут – гострий. Доведіть, що сума цього гострого кута і заданого тупого кута дорівнює 180°.

Запитання для повторення до § 6–8

1°. Які кути називають суміжними?
2°. Сформулюйте властивість суміжних кутів.
3°. Чи можуть обидва суміжні кути бути: **а)** гострими; **б)** тупими; **в)** прямими? Чому?
4°. Визначте вид кута, якщо суміжний з ним кут є: **а)** гострим; **б)** тупим; **в)** прямим.
5°. Порівняйте два кути, про які відомо, що: **а°)** суміжні з ними кути між собою рівні; **б)** суміжний з першим більший від суміжного з другим.
6°. Які два кути називають вертикальними?
7°. Сформулюйте властивість вертикальних кутів. Чи вимагає вона доведення?
8°. Сформулюйте означення паралельності двох прямих.
9°. Скільки прямих можна провести паралельно заданій прямій через задану точку поза даною прямою? Чи вимагає вказана вами відповідь доведення?
10°. Чи рівні між собою два кути, якщо вони є вертикальними до рівних між собою кутів?
11°. Який кут називають кутом між двома прямими?
12°. Які дві прямі називають перпендикулярними?
13°. Поясніть, що є: **а)** перпендикуляром до прямої, проведеним з даної точки; **б)** основою перпендикуляра, проведеного з даної точки до прямої; **в)** відстанню від точки до прямої. Наведіть приклад з довкілля.
14. Доведіть, що існує тільки одна пряма, яку можна провести перпендикулярно до даної прямої через дану на прямій точку. Як називають спосіб доведення, яким ви скористалися?
15. а) Поясніть, що таке спосіб доведення від супротивного. **б)** Які логічні кроки міркування вимагає його застосування? **в)** Наведіть приклад застосування цього способу.
16. Відомо, що пряма є паралельною одній з двох паралельних прямих. Як вона розміщена відносно другої із цих паралельних прямих? Доведіть правильність своєї відповіді.
17. Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то чи завжди вона перетинатиме другу? Доведіть правильність своєї відповіді.

Для допитливих

Із давньогрецької «*parallelos*» перекладається як *ті, що йдуть поряд*. Ця назва використовувалася піфагорійцями 2500 років тому.

Давньогрецький учений *Папп* позначав паралельні прямі символом «=». Після того як англієць *Роберт Рекорд* увів знак рівності «=», знак паралельності оновили, змінивши направлення рисочок. У XVIII ст. його стали писати так, як сьогодні його пишемо ми, – «∥».

Додаткові задачі до § 6–8

136. $\angle AOB$ і $\angle COP$ – вертикальні. Промінь OK є бісектрисою кута AOB і утворює з променем OA кут $20°$. Знайдіть $\angle AOB$, $\angle POC$, $\angle KOC$.

137. Два кути мають спільну вершину. Їх відповідні сторони взаємно перпендикулярні. Чи можуть ці кути бути вертикальними?

138. На аркуші паперу накреслили кут, але його вершина на цей аркуш не вмістилася. Чи можна, користуючись лише олівцем, провести бісектрису цього кута без допомоги інших креслярських інструментів?

139. Знайдіть кожний з кутів, які утворилися при перетині двох прямих, якщо:

1) міра одного з них становить $\frac{8}{9}$ від прямого кута;
2) сума двох з них дорівнює $56°$;
3) різниця двох з них дорівнює $58°$;
4) сума двох з них дорівнює $240°$;
5) один з них становить 50 % від суміжного з ним;
6) сума двох з них становить 80 % від суми двох інших;
7) сума двох з них у 5 разів більша за суму двох інших.

140. Знайдіть градусну міру кута між бісектрисами:
а) суміжних кутів; **б)** вертикальних кутів.

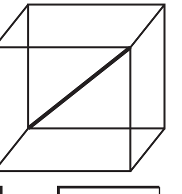
141. Бісектриса кута утворює зі стороною цього кута кут, градусна міра якого дорівнює третині кута, суміжного з даним. Знайдіть міру заданого кута.

142. Бісектриси двох суміжних кутів утворюють рівні кути з їх спільною стороною. Що можна сказати про ці суміжні кути? Відповідь обґрунтуйте.

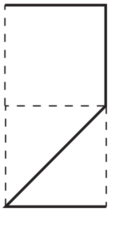
143. Доведіть способом від супротивного, що
1) два тупих кути не можуть бути суміжними;

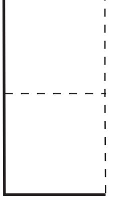
Для допитливих

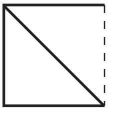
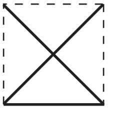
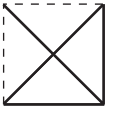
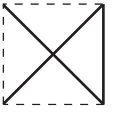
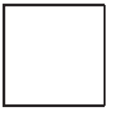
1. Куб зробили з дроту і з'єднали шматочками цього дроту дві протилежні вершини куба, як показано на малюнку. Намалюйте, що ви побачите, якщо подивитеся на цей куб: **а)** зверху; **б)** знизу; **в)** спереду; **г)** ззаду.



2. Аліса запустила павука у прозору коробку. Коли через деякий час вона подивилася на неї спереду, то побачила павутиння у вигляді **(а)**, а подивившись з правого боку, – у вигляді **(б)**. На якому з малюнків **(А, Б, В, Г, Д)** зображено павутиння, якщо на нього дивитися зверху? Намалюйте загальний вигляд цього павутиння.


а


б

А 
Б 
В 
Г 
Д 

2) прямий і гострий кути не можуть бути парою вертикальних кутів;
3) кожний кут має лише одну бісектрису;
4) якщо бісектриси кутів AOB і COP не лежать на одній прямій, то ці кути не вертикальні.

144. Знайдіть суміжні кути, якщо бісектриса одного з них утворює зі стороною другого кут, менший від одного з даних кутів на 36°.

145. Чи можна за допомогою шаблона кута градусної міри 27° побудувати дві взаємно перпендикулярні прямі?

Готуємося до тематичного оцінювання № 2

ВАРІАНТ 1

У завданні 1 наведено п'ять тверджень, серед яких може бути КІЛЬКА правильних. Оберіть усі правильні, на вашу думку, твердження і вкажіть літери, якими їх позначено.

1. (2 б.) Укажіть правильні твердження.

А. Два суміжних кути не можуть бути прямими.
Б. Два вертикальних кути можуть бути тупими.
В. Якщо два кути мають спільну вершину, то такі кути суміжні.
Г. Якщо два кути між собою рівні, то й суміжні з ними кути між собою рівні.
Д. Відношення градусних мір кутів, що утворилися при перетині двох прямих, може дорівнювати 20 : 17 : 20 : 17.

Завдання 2 і 3 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДИН є правильним. Оберіть правильний, на вашу думку, варіант відповіді.

2. (1 б.) Знайдіть градусну міру кута, якщо суміжний з ним кут дорівнює 52°.

А	Б	В	Г	Д
38°	138°	90°	128°	142°

3. (1 б.) При перетині двох прямих утворилося чотири кути, один з яких дорівнює 120°. Знайдіть усі інші кути.

А	Б	В	Г	Д
120°, 60°, 120°	60°, 120°, 60°	30°, 150°, 30°	150°, 30°, 150°	інша відповідь

До завдань 4 і 5 треба записати відповідь (за потреби виконати малюнок).

4. (1 б.) Знайдіть градусні міри двох суміжних кутів, якщо вони відносяться як 2 : 3.

5. (2 б.) Знайдіть кожний з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо сума двох з них дорівнює 58°.

У завданнях 6 і 7 треба виконати малюнок, записати розв'язання і відповідь.

6. (2 б.) Прямі AB і KM взаємно перпендикулярні і перетинаються в точці C. Промінь CH проходить між променями CA і CK та утворює $\angle ACH = 63°$. Знайдіть $\angle HCM$.

7. (2 б.) Доведіть способом від супротивного твердження, що якщо кути між собою не рівні, то вони не вертикальні.

ВАРІАНТ 2

У завданні 1 наведено п'ять тверджень, серед яких може бути КІЛЬКА правильних. Оберіть усі правильні, на вашу думку, твердження і вкажіть літери, якими їх позначено.

1. (2 б.) Укажіть правильне твердження.

А. Два суміжних кути можуть бути між собою рівними.

Б. Два вертикальних кути не можуть бути тупими.

В. Якщо два кути мають спільну вершину й спільну сторону, то такі кути суміжні.

Г. Якщо два кути між собою рівні, то й вертикальні до них кути рівні між собою.

Д. Відношення градусних мір кутів, що утворилися при перетині двох прямих, може дорівнювати 2 : 5 : 5 : 6.

Завдання 2 і 3 мають по п'ять варіантів відповідей, з яких тільки ОДИН є правильним. Оберіть правильний, на вашу думку, варіант відповіді.

2. (1 б). Знайдіть градусну міру кута, якщо суміжний з ним кут дорівнює 24°.

А	Б	В	Г	Д
166°	154°	156°	128°	66°

3. (1 б.) При перетині двох прямих утворилося чотири кути, один з яких дорівнює 20°. Знайдіть усі інші кути.

А	Б	В	Г	Д
20°, 160°, 20°	60°, 120°, 60°	160°, 20°, 160°	70°, 20°, 70°	інша відповідь

До завдань 4 і 5 треба записати відповідь (за потреби виконати малюнок).

4. (1 б.) Знайдіть градусні міри суміжних кутів, якщо один з них на 120° менший від другого.

Для допитливих

Символ «⊥», який ми вживаємо для позначення перпендикулярності, ввів 1634 року французький математик і астроном П'єр Ерігон. Того самого року він запропонував вживати символ «<» для позначення кута. Сучасного ж вигляду символу кута надав англійський математик Уїльям Оутред у 1657 році. Саме з того часу кути позначають символом «∠».

5. (2 б.) Знайдіть кожний з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, якщо градусні міри двох з них відносяться як 2 : 7.

До завдань 6 і 7 треба виконати малюнок, записати розв'язання і відповідь.

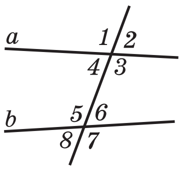
6. (2 б.) Прямі EF і PQ взаємно перпендикулярні й перетинаються в точці O. Промінь OA проходить між променями OE і OP і утворює $\angle FOA = 117°$. Знайдіть $\angle AOP$.

7. (2 б.) Доведіть способом від супротивного твердження, що якщо сума двох кутів не дорівнює 180°, то ці кути не є суміжними.

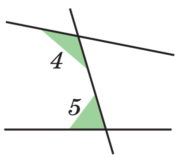
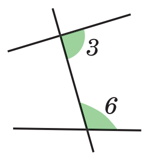
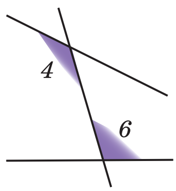
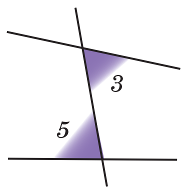
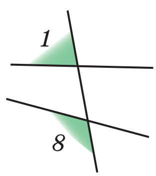
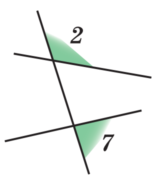
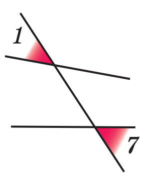
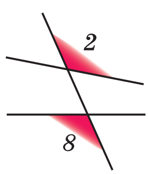
§ 9. Кути, що утворюються при перетині двох прямих третьою

Якщо дві прямі перетнути третьою прямою, яку називають *січною*, то утвориться вісім кутів, позначених на малюнку 40 цифрами.

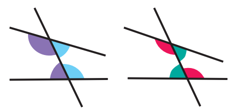
Ці кути та їх назви наведено в таблиці.



Мал. 40

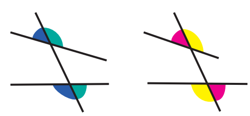
Внутрішні односторонні	кути *4* і *5* 	кути *3* і *6* 
Внутрішні різносторонні	кути *4* і *6* 	кути *3* і *5* 
Зовнішні односторонні	кути *1* і *8* 	кути *2* і *7* 
Зовнішні різносторонні	кути *1* і *7* 	кути *2* і *8* 

внутрішні кути



односторонні різносторонні

зовнішні кути

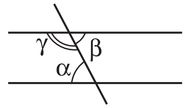


односторонні різносторонні

Теорема 1. ***Якщо внутрішні різносторонні кути між собою рівні, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.***

Доведення

Нехай $\alpha = \beta$ (мал. 41). Доведемо, що $\alpha + \gamma = 180°$.

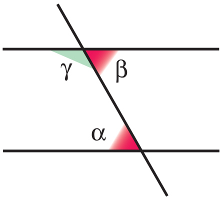


Мал. 41

Кути β і γ – суміжні, тоді $\beta + \gamma = 180°$.

$\alpha = \beta$. Тоді $\alpha + \gamma = \beta + \gamma = 180°$.

Теорему доведено.



$\alpha + \gamma = 180°$

$\alpha = \beta$

Нескладно довести й обернене твердження.

Теорема 2. ***Якщо сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то внутрішні різносторонні кути рівні.***

Доведення

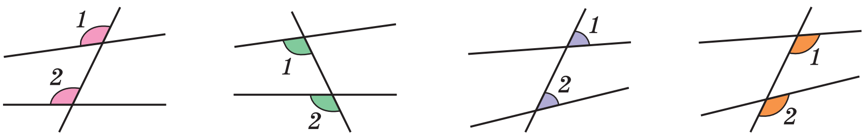
Нехай $\alpha + \gamma = 180°$ (мал. 41). Доведемо, що $\alpha = \beta$.

Кути β і γ – суміжні, тоді $\beta + \gamma = 180°$.

Маємо $\alpha + \gamma = 180° = \beta + \gamma$, отже, $\alpha = \beta$.

Теорему доведено.

Зауваження. Кути *1* і *2*, зображені на малюнку 42, називають *відповідними*.



а б в г

Мал. 42

Практична робота 11

1. Проведіть прямі AB і CD та січну KM. Позначте точки перетину прямих і назвіть: **а)** внутрішні односторонні кути; **б)** зовнішні односторонні кути; **в)** внутрішні різносторонні кути; **г)** зовнішні різносторонні кути; **д)** відповідні кути.
2. Скільки пар рівних між собою кутів утворилося? Запишіть їх.
3. Проведіть дві прямі так, щоб, перетнувши їх січною, при перетині утворити пару рівних внутрішніх різносторонніх кутів. Виміряйте всі кути, що утворилися, і порівняйте їх між собою.
4. Поміркуйте, чи може при перетині двох прямих січною утворитися лише одна пара рівних між собою кутів. А дві такі пари? Запишіть відповідь та її обґрунтування.

Задачі та вправи

146°. Дві прямі перетнули третьою (мал. 40). Відомо, що кути *2* і *6* рівні між собою. Чи дорівнює їм кут *4*? Чому?

147°. При перетині двох прямих третьою утворилося вісім кутів. Внутрішні різносторонні кути рівні між собою. Чи рівні між собою зовнішні різносторонні кути? Чому?

148°. При перетині двох прямих третьою утворилося вісім кутів (мал. 40). Відомо, що сума кутів *4* і *5* дорівнює 180°. Порівняйте між собою кути: **а)** *3* і *5*; **б)** *2* і *6*.

149. При перетині двох прямих третьою утворилося вісім кутів. Відомо, що кути однієї з двох пар зовнішніх різносторонніх кутів дорівнюють 30° і 40°. Знайдіть градусні міри: **а)** іншої пари зовнішніх різносторонніх кутів; **б)** обох пар внутрішніх односторонніх кутів.

150. При перетині двох прямих третьою утворилося 8 кутів. Знайдіть градусні міри відповідних кутів, якщо в одній з пар зовнішніх односторонніх кутів кути дорівнюють 20° і 110°.

151. Відомо, що сума внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох прямих січною, дорівнює 142°. Знайдіть суму: **а)** іншої пари внутрішніх односторонніх кутів; **б)** кожної пари зовнішніх односторонніх кутів.

152. При перетині двох прямих третьою утворилося 8 кутів (див. мал. 40). Чи будуть рівними відповідні кути, якщо сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°? Відповідь обґрунтуйте.

153*. При перетині двох прямих третьою утворилося 8 кутів (див. мал. 40). Відомо, що $\angle 4 = 130°$, а $\angle 7$ у п'ять разів менший від відповідного йому кута. Чи будуть рівними між собою внутрішні різносторонні кути?

154*. При перетині двох прямих третьою утворилося 8 кутів. Півсума зовнішніх односторонніх кутів у 12 разів більша за їх піврізницю, яка дорівнює $\frac{1}{9}$ від прямого кута. Знайдіть внутрішні односторонні кути.

155.** При перетині двох прямих третьою утворилося 8 кутів (див. мал. 40). Відомо, що $\angle 4 = 130°$, а $\angle 7 = 25°$. Чи будуть рівними між собою внутрішні різносторонні кути? Відповідь обґрунтуйте способом доведення від супротивного.

156.** При перетині двох прямих третьою утворилося 8 кутів (див. мал. 40). Відомо, що $\angle 4 = 150°$, а $\angle 7 = 30°$. Чи будуть рівними між собою відповідні кути? Відповідь обґрунтуйте способом доведення від супротивного.

Для допитливих

Розповідають, що єгипетський цар Птоломей I, почувши про незвичайну мудрість Евкліда та його твір «Начала», побажав особисто познайомитися зі славетним математиком і його не менш уславленим твором. Цар прибув до Александрійської бібліотеки, де працював Евклід, і попросив його викласти зміст славетної книги. Цар милостиво вислухав доведення перших двох теорем, але вже на початку третьої, здивувавшись від того, яких труднощів завдало засвоєння істин, з жахом вигукнув:

– Невже немає інших шляхів для того, щоб зрозуміти ці речі?!

На це Евклід з гідністю відповів:

– Ні, в математиці навіть для царів немає інших шляхів.

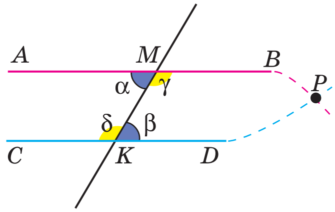
Саме з описаним епізодом пов'язують вислів *«царський шлях»*. Коли вдається відкрити спосіб розв'язування задачі, який незрівнянно швидше веде до мети, ніж способи, що існували до цього, то говорять: та це ж справжній царський шлях!

§ 10. Ознаки паралельності двох прямих

Т е о р е м а 1. ***Дві прямі паралельні, якщо при перетині їх січною внутрішні різносторонні кути між собою рівні.***

Д о в е д е н н я

Нехай дано дві прямі AB, CD, їх січну MK і $\alpha = \beta$ (мал. 43). Доведемо, що $AB \parallel CD$ від супротивного.

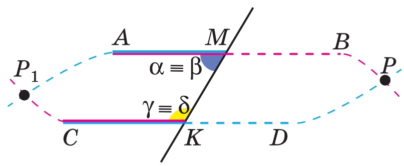


Мал. 43

Припустимо протилежне: прямі AB і CD перетинаються у деякій точці P (мал. 43).

1) $\alpha = \beta$, тоді й суміжні їм кути також рівні: $\gamma = \delta$.

2) Розріжемо площину на дві півплощини по прямій MK і накладемо їх одна на одну так, щоб сумістилися кути β і α та γ і δ (мал. 44). Тоді за аксіомами про відкладання відрізків і кутів промінь MB суміститься з променем KC, а KD – з MA.



Мал. 44

3) Промені MB і KD перетинаються в точці P. Тоді промені KC і MA перетинаються в деякій точці P_1.

4) Маємо, що через дві точки P і P_1 проведено дві різні прямі AB і CD. Цього бути не може (за аксіомою про єдиність прямої, що проходить через дві дані точки), тобто маємо суперечність.

Отже, наше припущення хибне, тому прямі AB і CD не перетинаються.

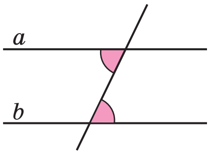
Теорему доведено.

Н а с л і д о к 1. ***Дві прямі між собою паралельні, якщо при перетині їх січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.***

Н а с л і д о к 2. ***Дві прямі, що перпендикулярні до третьої, паралельні між собою.***

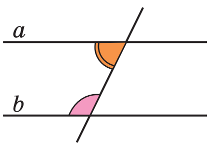
$a \parallel b$, якщо:

внутрішні різносторонні кути рівні



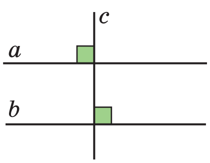
або

сума внутрішніх односторонніх кутів 180°



або

$a \perp c$ і $b \perp c$



Нагадаємо властивість паралельних прямих, доведену нами раніше (§ 8), що також є ознакою паралельності двох прямих.

Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.

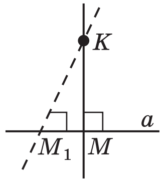
Спираючись на теорему 1, доведемо таку властивість перпендикуляра до прямої.

Теорема 2. ***Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної.***

Доведення

Доведемо від супротивного.

Нехай з точки K провели дві перпендикулярні прямі до прямої a (мал. 45). За наслідком 2 з теореми 1 вони паралельні між собою і тому не можуть мати спільної точки.



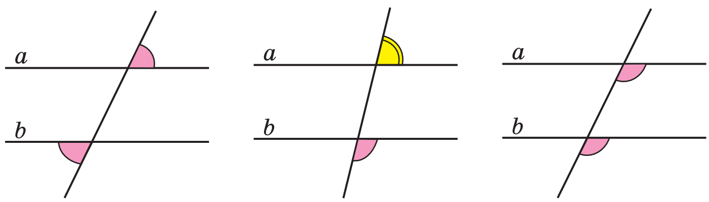
Мал. 45

Прийшли до протиріччя, отже, наше припущення є хибним, тому перпендикуляр, проведений до прямої a через точку K, – єдиний.

Пропонуємо самостійно, спираючись на теорему 1 і властивості суміжних і вертикальних кутів, довести такі твердження.

Дві прямі між собою паралельні, якщо при перетині їх січною:

- **зовнішні різносторонні кути між собою рівні** (мал. 46а)
  або
- **сума зовнішніх односторонніх кутів дорівнює 180°** (мал. 46б)
  або
- **відповідні кути між собою рівні** (мал. 46в).

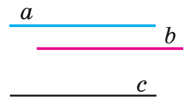


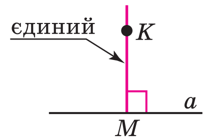
а б в

Мал. 46

$a \parallel b$, якщо

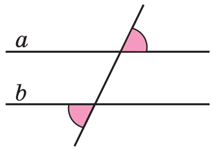
$a \parallel c$, $b \parallel c$





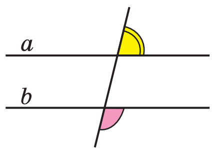
$a \parallel b$, якщо

зовнішні різносторонні кути рівні



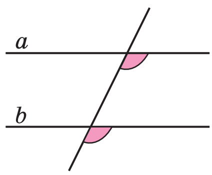
або

сума зовнішніх односторонніх кутів 180°



або

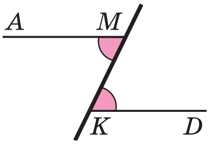
відповідні кути рівні



Для допитливих

Ознаки паралельності прямих з’явилися ще в «Началах» Евкліда. Поняття про них Евклід розпочинає з означення: «Паралельні прямі, які знаходяться в одній площині і, будучи продовженими в обидві сторони необмежено, у жодній із цих сторін не зустрічаються».

Практична робота 12



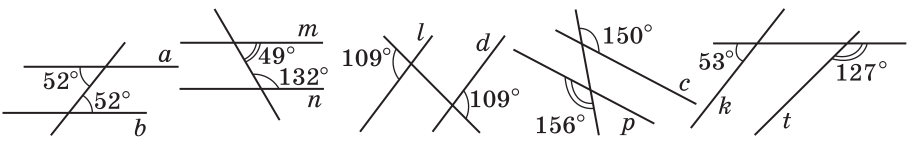
Мал. 47

1. На прозорому папері накресліть відрізок MK і відкладіть за допомогою транспортира два рівних між собою кути AMK та MKD так, щоб точки A і D містилися в різних півплощинах відносно прямої MK (див. мал. 47).
2. Проведіть прямі AM і KD. Зафарбуйте рівні між собою кути однаковим кольором.
3. Розріжте аркуш по прямій MK і сумістіть отримані його частини так, щоб кути одного кольору збігалися. Зробіть висновок.

Задачі та вправи

157°. Накресліть пряму, позначте її a. Через дві довільні точки прямої a проведіть (за допомогою косинця) прямі b і c перпендикулярно до прямої a. Визначте градусні міри всіх кутів, що утворилися. Чи можуть прямі b і c перетинатися? Чому?

158°. На малюнку 48 позначено кути, що утворилися при перетині двох прямих січною. Знайдіть пари паралельних прямих.



а б в г д

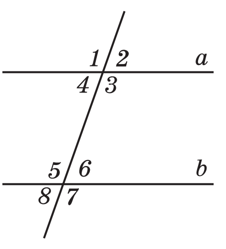
Мал. 48

159°. Пряма n перпендикулярна до прямої c, і пряма m перпендикулярна до прямої c. Що можна сказати про взаємне розміщення прямих n і m?

160°. Чи можуть прямі n і m з попередньої задачі бути не паралельними?

161°. Пряма a перпендикулярна до прямої c, а пряма b не перпендикулярна до прямої c. Чи може бути таке, що $a \parallel b$? Чому?

162°. Проведіть пряму AB і позначте точку M поза нею. За допомогою косинця проведіть через точку M пряму, перпендикулярну до прямої AB. Скільки таких прямих можна провести? Чому?



Мал. 49

163. За малюнком 49 визначте, чи паралельні між собою прямі a і b, якщо:
1) $\angle 1 = \angle 7$;
2) $\angle 1 + \angle 8 = 180°$;

Для допитливих

1. Газету зігнули навпіл 4 рази (щоразу змінюючи напрям згину), а після того відрізали 4 кути й розгорнули. Скільки отворів утворилося?
2. Газету розрізали на 4 частини. Одну її частину знову розрізали на 4 частини. Потім так само зробили ще кілька разів. Скільки всього шматочків газети одержали після 13 розрізань?

3) $\angle 5 = 120°$, а $\angle 3$ удвічі менший від $\angle 7$;

4) $\angle 8 = 45°$, а $\angle 2$ утричі менший від $\angle 5$.

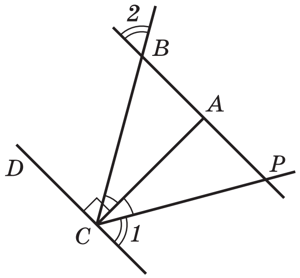
164. Чи можуть бути непаралельними між собою дві прямі, при перетині яких січною утворилося рівно чотири рівних між собою кути?

165. Чи можуть бути непаралельними між собою дві прямі, при перетині яких січною утворилися рівно чотири кути по 77°?

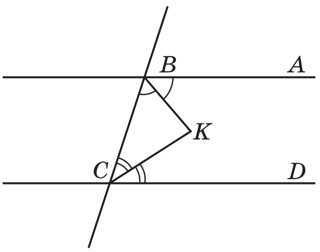
166. Чи можуть бути паралельними між собою дві прямі, при перетині яких січною утворилися лише два рівних між собою кути?

167. Чи правильне твердження: «Якщо при перетині двох прямих січною утворилося рівно два кути по 95°, то прямі між собою не паралельні»?

168*. Чи правильне твердження: «Якщо при перетині двох прямих січною утворилося не менше як три кути по 95°, то прямі між собою паралельні»?



Мал. 50



Мал. 51

169*. Кут ABC дорівнює 40°, а кут BCD – 50°. Чи паралельні між собою прямі AB і CD?

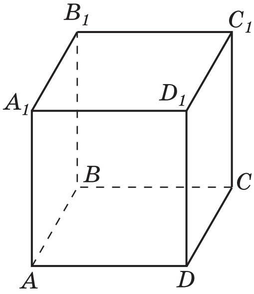
170*. На малюнку 50 CA – бісектриса кута BCP, $AC \perp CD$, $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $AB \parallel DC$.

171*. Дано пряму і точку, що їй не належить. Є шаблон кута 25°. Як за допомогою цього шаблона побудувати пряму, яка проходить через дану точку, паралельно даній прямій?

172.** BK – бісектриса кута ABC, CK – бісектриса кута BCD (мал. 51). $\angle KCB + \angle KBC = 90°$. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

Для допитливих

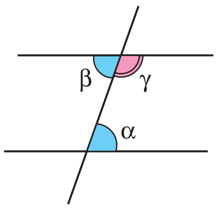
На малюнку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Серед його ребер укажіть пари паралельних і перпендикулярних ребер. Три четвірки його ребер паралельні між собою, назвіть їх.



Через ребра AA_1 і CC_1 можна провести площину (кажуть: діагональний переріз куба). У цій площині $A_1C_1 \parallel AC$. А ось пара ребер AA_1 і D_1C_1 – особлива. Не існує площини, яка містила б обидва відрізки. Прямі, що містять ці відрізки, не перетинаються, але їх не можна назвати паралельними, бо вони не лежать в одній площині. Такі відрізки і прямі, через які не можна провести площину, називають мимобіжними. Знайдіть ще кілька пар мимобіжних ребер куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

§ 11. Властивості паралельних прямих

$a \parallel b$
$\downarrow$

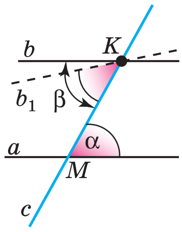


$\alpha = \beta$
$\alpha + \gamma = 180°$

Т е о р е м а 1. (обернена до теореми на с. 53). ***При перетині двох паралельних прямих третьою внутрішні різносторонні кути між собою рівні.***

Д о в е д е н н я

Нехай дано дві прямі *a*, *b* і січну *c*, яка перетинає прямі *a* і *b* у точках *M* і *K* відповідно (мал. 52). Доведемо, що $\alpha = \beta$ від супротивного.



Мал. 52

Припустимо, що $\alpha \neq \beta$.

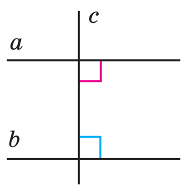
1) Проведемо через точку *K* пряму b_1 так, щоб $c\hat{\ }b_1 = \alpha$. Тоді за ознакою паралельності прямих $b_1 \parallel a$.

2) Прямі *b* і b_1 проходять через точку *K* паралельно *a*, чого не може бути, бо суперечить аксіомі (А-IX, с. 23).

Отже, наше припущення є хибним, а рівність $\alpha = \beta$ істинною.

Теорему доведено.

$\left.\begin{matrix} b \parallel a \\ c \perp a \end{matrix}\right| \rightarrow c \perp b$

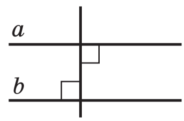


Н а с л і д о к 1. ***При перетині двох паралельних прямих третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.***

Твердження виконуються за теоремою про кути, що утворилися при перетині двох прямих січною (с. 51).

Н а с л і д о к 2. ***Якщо пряма є перпендикулярною до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої.***

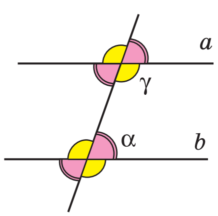
Оскільки прямі паралельні, то внутрішні різносторонні кути рівні (мал. 53). Тому якщо один з них прямий, то і другий також прямий.



Мал. 53

Наслідок доведено.

$a \parallel b$
$\downarrow$



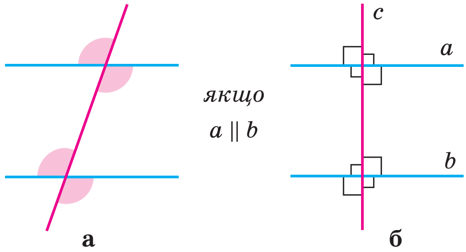
чотири кути міри α
і
чотири кути міри γ

Спираючись на властивості суміжних та вертикальних кутів, легко довести наступні опорні факти. Пропонуємо зробити це самостійно.

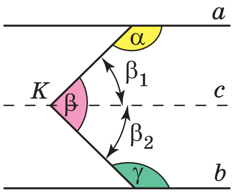
П р и к л а д 1. **При перетині двох паралельних прямих третьою:**

- **зовнішні різносторонні кути між собою рівні;**
- **сума зовнішніх різносторонніх кутів дорівнює 180°.**

П р и к л а д 2. **При перетині двох паралельних прямих третьою утворюється або дві четвірки рівних між собою кутів** (мал. 54а), **або вісім прямих кутів** (мал. 54б).



Мал. 54



Мал. 55

0.3. Приклад 3. **Доведіть, що $\alpha + \beta + \gamma = 360°$, якщо $a \parallel b$ (мал. 55).**

Розв'язання

Проведемо через точку K пряму c таку, що $c \parallel a$.

1) $c \parallel a \to \alpha + \beta_1 = 180°$ (як внутрішні односторонні).

2) $c \parallel a$, $b \parallel a \to c \parallel b$, тому $\gamma + \beta_2 = 180°$ (як внутрішні односторонні).

3) $\alpha + \beta + \gamma = (\alpha + \beta_1) + (\beta_2 + \gamma) = 180° + 180° = 360°$.

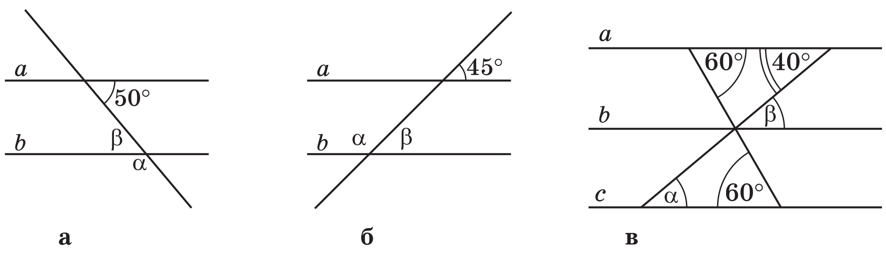
Щ. в. д.

Практична робота 13

1. За допомогою лінійки й косинця побудуйте дві паралельні між собою прямі. Як ви це зробили?
2. Проведіть січну, не перпендикулярну до ваших паралельних прямих. Скільки кутів утворилося?
3. Позначте кути, що утворилися, і виміряйте їх за допомогою транспортира. Скільки рівних між собою кутів отримали?

Задачі та вправи

173°. На малюнку 56 прямі a і b паралельні. Знайдіть кути α і β.



Мал. 56

174°. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює: **а)** 56°; **б)** 107°. Знайдіть решту кутів.

175°. Два кути з восьми, що утворилися при двох паралельних і січній, дорівнюють по 32°. Чи можуть ці кути бути: **а)** внутрішніми односторонніми; **б)** відповідними?

176°. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 132°. Чи може серед решти кутів бути кут 35°?

177. Чи можна серед кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих третьою, знайти:
1°) п’ять тупих кутів;
2°) чотири гострих кути;
3°) рівно три гострих кути;
4°) лише два рівних між собою кути;
5) не більш як чотири тупих кути;
6) п’ять рівних між собою кутів?

178. Чи може серед кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, бути три кути різних градусних мір?

179. При перетині двох паралельних прямих січною утворилося вісім рівних між собою кутів. Знайдіть їх градусну міру.

180. Дві паралельні між собою прямі перетнули третьою. Чи може бути таке, що сім кутів з тих, що утворилися, рівні між собою?

181. При перетині двох паралельних прямих січною утворилося вісім кутів. Знайдіть усі кути, що утворилися, якщо два з них, які є суміжними: **а)** відносяться як 7 : 2; **б)** мають однакові градусні міри.

182. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих третьою, дорівнює 110°. Знайдіть решту кутів.

183. При перетині двох паралельних прямих третьою утворилося вісім кутів. Знайдіть їх градусну міру, якщо: **а)** відношення двох внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 1 : 2; **б)** один із зовнішніх односторонніх кутів удвічі більший за другий; **в)** різниця двох зовнішніх односторонніх кутів дорівнює 40°.

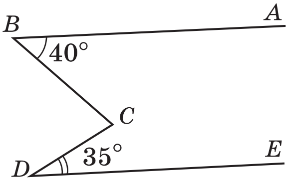
184. Чи може сума внутрішніх різносторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнювати 180°? Відповідь обґрунтуйте.

185*. Сума трьох кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 72°. Знайдіть решту кутів.

186*. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, у 4 рази більший за другий. Знайдіть решту кутів.

187*. Один з кутів, що утворився при перетині двох паралельних прямих січною, складає 20 % від одного з решти. Знайдіть решту кутів.

О.З. **188*.** Доведіть, що **бісектриси внутрішніх різносторонніх кутів при перетині двох паралельних прямих січною між собою паралельні**.



Мал. 57

189.** $AB \parallel ED$ (мал. 57). Знайдіть $\angle BCD$, якщо $\angle ABC = 40°$, $\angle CDE = 35°$.

190.** Сформулюйте твердження, обернене до твердження задачі № 188. Чи є воно правильним?

§ 12. Види математичних тверджень

Ви вже зрозуміли, що *всі властивості фігур, які встановлюються геометрами шляхом логічних міркувань, подаються у вигляді тверджень*.

У цьому параграфі ми узагальнимо набутий вами досвід, проаналізуємо, з якими видами математичних тверджень ми працюємо.

О з н а ч е н н я. ***Означення – це твердження, у яких роз'яснюється (через відомі поняття), які саме об'єкти або властивості підпадають під дану назву.***

Означення – назва з поясненням, що́ саме ми так називаємо.

Наприклад, ми вже знаємо означення трикутника, суміжних кутів тощо.

А к с і о м и. ***Аксіома, як ми вже знаємо, це твердження, яке приймається без доведення.***

Аксіома – приймається без доведення.

Ми з вами вже формулювали й обговорювали аксіоми планіметрії. Ми не можемо просто так, за власним бажанням, додати до переліку аксіом геометрії ще якесь твердження. Аксіоми евклідової геометрії формувалися з практики протягом багатьох тисячоліть і узгоджені між математиками-геометрами всього світу.

Т е о р е м и. ***Теореми – це твердження, правдивість яких виявляється тільки після певних міркувань (доведення).***

Теорема – істинність встановлюється доведенням.

З попередніх параграфів ми вже маємо кілька прикладів таких тверджень та їх доведень.

Теорема складається з двох тверджень: твердження-умови (вихідних даних) і твердження-висновку (вимоги). Теорему завжди можна записати у вигляді: «ЯКЩО» – «твердження про умову», «ТО» – «твердження-висновок».

Теорема складається з твердження-умови і твердження-висновку.

Наприклад, теорему «Вертикальні кути між собою рівні» можна сформулювати в такому вигляді: «ЯКЩО два кути є вертикальними, ТО вони між собою рівні». Тут за умовою дано два вертикальних кути. Треба довести, що вони рівні між собою.

Теорему «Через задану точку прямої можна провести тільки одну перпендикулярну до неї пряму» можна сформулювати так: «ЯКЩО задані пряма і точка на ній, ТО через цю точку можна провести єдину пряму, перпендикулярну до даної».

Спробуйте переформулювати в той самий спосіб теореми: «Сума суміжних кутів дорівнює 180°»; «Бісектриси суміжних кутів взаємно перпендикулярні».

Наслідок – безпосередній висновок з теореми або аксіоми.

Н а с л і д к и. ***Як ми вже зазначали раніше, наслідками називають твердження, які безпосередньо випливають з аксіом або теорем.***

Чи можна назвати наслідок теоремою? Так, бо ми повинні це твердження довести. При цьому доведення спиратиметься на теорему або аксіому, наслідком якої її називають, і це доведення міститиме невелику кількість логічних кроків.

Наприклад, твердження про властивості суміжних кутів (с. 32) складаються з теореми і її наслідка.

Пряма і обернена теореми – міняються місцями умова і висновок.

О б е р н е н а т е о р е м а. ***Теоремою, оберненою до даної, називають таку, у якій умовою є висновок, а висновком – умова даної теореми.***

Наприклад, у попередніх параграфах ми розглянули такі дві теореми:

Твердження, обернене до теореми, вимагає доведення.

Якщо внутрішні різносторонні кути між собою рівні, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

Якщо сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то внутрішні різносторонні кути між собою рівні.

Якщо навести приклади (навіть дуже багато прикладів), коли твердження виконується, то це не є його доведенням.

Ці дві теореми обернені одна до одної. Якщо одну з них назвати *прямою*, то другу слід назвати *оберненою*.

З а у в а ж е н н я. ***Якщо теорему доведено, то правильність оберненої до неї теореми не можна вважати само собою зрозумілою.***

Обернене твердження не завжди є істинним (у курки є дві ноги, але якщо в когось є дві ноги, то це необов'язково курка). Наведемо приклад, коли обернене математичне твердження не виконується:

Щоб встановити хибність якогось твердження, достатньо навести один контрприклад (приклад, коли дане твердження не виконується).

Якщо два кути є вертикальними, то вони між собою рівні.

Якщо два кути між собою рівні, то вони – вертикальні.

Не треба плутати твердження-властивість із твердженням-ознакою.

В л а с т и в і с т ь. ***Властивістю в геометрії називають твердження, яке виконується за умови належності фігури певній множині.***

Тобто ці твердження мають вигляд: ЯКЩО «фігура належить певній множині» – ТОДІ «висновок».

Ознака в геометрії – теорема, яка за висновок має належність фігури (фігур) певній множині, яку вже було визначено раніше.

Наприклад, у § 11 ми вивчали властивості паралельних прямих. Правильність цих тверджень доводилася тільки для множини паралельних прямих.

О з н а к а. ***Ознакою в геометрії називають теорему, яка стверджує, що виконання певних умов***

забезпечує належність фігури (фігур) певній множині, яку вже було визначено раніше.

Наприклад, пригадайте ознаки паралельності двох прямих (див. § 10).

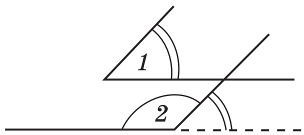
Для допитливих

Кути з відповідно паралельними і відповідно перпендикулярними сторонами

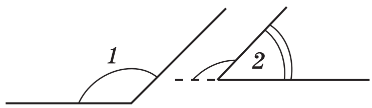
Доведіть, спираючись на малюнки 58–62, такі теореми та наслідки з них.

Т е о р е м а 1. ***Якщо сторони одного кута паралельні сторонам другого кута і якщо ці кути обидва гострі або обидва тупі, то вони між собою рівні.***

Н а с л і д о к. ***Якщо сторони одного кута паралельні сторонам другого і один з них гострий, а другий тупий, то їх сума дорівнює 180°.***

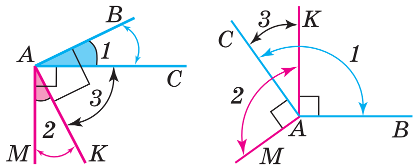


Мал. 58



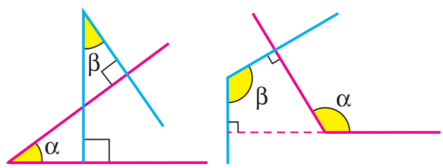
Мал. 59

Т е о р е м а 2. ***Якщо сторони одного кута перпендикулярні до сторін другого і обидва ці кути гострі або обидва тупі, то такі кути між собою рівні.***



а б

Мал. 60



а б

Мал. 61

Н а с л і д о к. ***Якщо сторони одного кута перпендикулярні до сторін другого і один з них тупий, а другий гострий, то їх сума дорівнює 180°.***

а б

Мал. 62

Пропонуємо теореми 1 і 2 та наслідки з них довести самостійно, спираючись на малюнки 58–62.

Запитання для повторення до § 9–12

1. Як називають кути, що утворилися при перетині двох прямих третьою? (Зобразіть дві паралельні прямі, їх січну і поясніть.)
2. Сформулюйте означення паралельності двох прямих.
3. Скільки прямих, паралельних заданій прямій, можна провести через точку поза нею? Чому?
4. Сформулюйте: **а)** властивості двох паралельних прямих; **б)** ознаки двох паралельних прямих; **в)** у чому відмінність між твердженнями а) і б)?
5. Зобразіть дві паралельні прямі та їх січну. Позначте однаковою кількістю дужок кути, що рівні між собою. Скільки рівних між собою кутів утворилося?
6. Чому дорівнює сума всіх кутів, що утворилися при двох паралельних і січній? Яку частину становить певний з них (позначте його як α): **а)** від суми всіх восьми кутів; **б)** від суми інших семи кутів?
7. Чи можна вважати два відрізки паралельними, якщо вони не мають спільних точок?
8. Чи можуть бути непаралельними дві прямі, при перетині яких січною утворилося чотири прямих кути? Чому?
9. Чи можуть бути непаралельними дві прямі, при перетині яких січною утворилося чотири рівних між собою непрямих кути? Чому?
10. Чи можуть бути п'ять кутів, що утворилися при перетині січною двох прямих (які не паралельні), рівними між собою? Чому?
11. Чи можуть усі кути, що утворилися при перетині січною двох прямих, бути рівними між собою? Чому?
12. **а)** Скільки перпендикулярів можна провести до даної прямої з точки, що лежить поза нею?
    б)* Доведіть цей факт від супротивного, спираючись на ознаку паралельності двох прямих, що перпендикулярні до третьої.
13. Що таке означення і чи всі поняття, з якими працюють геометри, мають означення? Наведіть приклад.
14. Поясніть відмінність між твердженням-аксіомою і твердженням-теоремою. Наведіть приклад.
15. Поясніть відмінність між твердженням-властивістю і твердженням-ознакою. Наведіть приклад.
16. Поясніть, що таке умова і вимога теореми. Із чого складається доведення теореми? Що таке наслідок з теореми?
17. Чи завжди твердження, обернене до правильного, є правильним? Наведіть приклад.
18*. Доведіть для двох паралельних прямих і січної способом від супротивного, що: **а)** бісектриси двох внутрішніх різносторонніх кутів паралельні між собою; **б)** бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів перпендикулярні.
19**. Що ви знаєте про кути з відповідно паралельними сторонами?
20**. Що ви знаєте про кути з відповідно перпендикулярними сторонами?

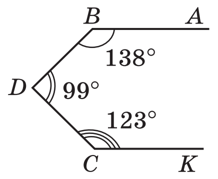
Додаткові задачі до § 9–12

191. Сума двох кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 142°. Знайдіть градусні міри всіх восьми кутів.

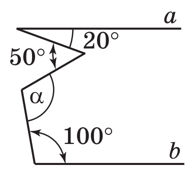
192. Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, у 8 разів більший за другий. Знайдіть градусні міри всіх восьми кутів.

193. При перетині двох прямих січною утворилося вісім кутів. Відомо, що різниця двох з них дорівнює 18°. Чи є задані прямі паралельними між собою? Відповідь обґрунтуйте.

194. Чи є паралельними прямі *AB* і *CK* на малюнку 63?



Мал. 63



Мал. 64

195. За малюнком 64 знайдіть кут α, якщо $a \parallel b$.

196. Доведіть, що бісектриси двох відповідних кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

197. Відомо, що сума двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох прямих січною, дорівнює 170°. Доведіть методом від супротивного, що: **а)** дані дві прямі не є паралельними між собою; **б)** внутрішні різносторонні кути, що утворилися, не є між собою рівними.

198. Дано пряму й точку, яка їй не належить, та шаблон кута 44°. Як за допомогою цього шаблона побудувати пряму, яка проходить через дану точку паралельно даній прямій?

199. На аркуші паперу зобразили кут так, що на аркуш вмістилися лише вершина й дуже малі частинки сторін. Тому виміряти градусну міру цього кута транспортиром неможливо. Як визначити градусну міру цього кута?

200. Відомо, що сторони кута *ABC* перпендикулярні до сторін кута *KLM*, а сторони кута *KLM* перпендикулярні до сторін кута *PQR*. Що можна сказати про сторони кутів *ABC* і *PQR*? Чи рівні між собою ці кути?

201. Відомо, що сторони кута *ABC* перпендикулярні до сторін кута *KLM*, а сторони кута *KLM* паралельні сторонам кута *PQR*. Що можна сказати про сторони кутів *ABC* і *PQR*? Чи будуть рівними між собою ці кути?

202. Один із двох кутів з відповідно паралельними сторонами вдвічі більший за другий. Знайдіть ці кути.

203. Різниця двох кутів з відповідно перпендикулярними сторонами дорівнює 72°. Знайдіть ці кути.

204. Відношення двох кутів з відповідно паралельними сторонами дорівнює 4 : 5. Знайдіть ці кути.

205. Один із двох кутів з відповідно перпендикулярними сторонами становить 80 % від другого. Знайдіть ці кути.

Готуємося до тематичного оцінювання № 3

ВАРІАНТ 1

До завдань 1 і 2 запишіть тільки відповідь.

1. (4 б.) Установіть відповідність: до кожного твердження стовпчика ліворуч доберіть правильний коментар зі стовпчика праворуч. Запишіть кожну пару (число–літера) у відповідь до завдання.

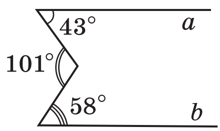
1. Усі кути, що утворилися при перетині двох прямих січною, можуть бути між собою рівними.	**А.** Таке твердження – правильне.
2. Сума всіх кутів, розміщених праворуч від січної, що перетинає дві паралельні прямі, дорівнює 180°.	
3. Якщо дві прямі між собою паралельні, то бісектриси двох внутрішніх різносторонніх кутів також паралельні між собою.	**Б.** Виконується не завжди.
4. Сума двох внутрішніх різносторонніх кутів може дорівнювати 70°.	**В.** Цього бути не може.

2. (1 б.) Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 32°. Знайдіть решту кутів.

До завдань 3–5 запишіть розв'язання (з виділенням логічних кроків).

3. (2 б.) Чи паралельні прямі a і b, зображені на малюнку 65?

4. (2 б.) Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, складає четверту частину від суми градусних мір усіх інших кутів. Знайдіть міру цього кута.



Мал. 65

5. (3 б.) Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх різносторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні між собою.

Для допитливих

Архімед народився близько 287 р. до н. е. у бідній сім'ї. Навчався протягом 20 років в Александрії, а потім повернувся до рідних Сиракуз. Легендою стали створені ним машини для захисту міста (у випадку нападу із суші та моря, для ближнього та дального бою). Не менше відомими є роботи Архімеда як математика. Значну частину творів Архімеда загублено, проте багато й збереглося (упродовж двадцяти двох століть!). Найвідоміша з його робіт «Книга лем» містить багато геометричних фактів, цікавих і до сьогодні. Більшість із цих фактів Архімед наводив без доведення, «щоб кожен математик мав задоволення самостійно отримати цей результат». Зауважимо, що Архімед, як і інші давньогрецькі геометри, виконував свої креслення на піску. Інколи, для зручності, ящик з піском ставили на стіл.

ВАРІАНТ 2

До завдань 1 і 2 запишіть тільки відповідь.

1. (4 б.) Установіть відповідність: до кожного твердження стовпчика ліворуч доберіть правильний коментар зі стовпчика праворуч. Запишіть кожну пару (число–літера) у відповідь до завдання.

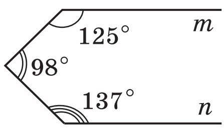
1. При перетині двох непаралельних прямих можуть утворитися чотири рівних між собою кути.	**А.** Таке твердження – правильне.
2. Сума градусних мір усіх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 360°.	
3. Якщо дві прямі між собою паралельні, то бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів також між собою паралельні.	**Б.** Виконується не завжди.
4. Зовнішні різносторонні кути при двох паралельних прямих і січній рівні між собою.	**В.** Цього бути не може.

2. (1 б.) Один з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 132°. Знайдіть решту кутів.

До завдань 3–5 запишіть розв'язання (з виділенням логічних кроків).

3. (2 б.) Чи паралельні прямі m і n, зображені на малюнку 66?

4. (2 б.) Градусна міра одного з кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, складає 20 % від суми градусних мір усіх інших кутів. Знайдіть міру цього кута.

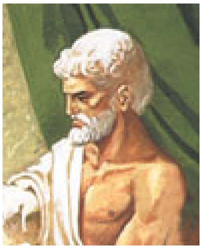


Мал. 66

5. (3 б.) Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, взаємно перпендикулярні.

Для допитливих

Серед стародавніх греків була поширена особлива гра. Вона полягала в суперечці двох людей – ***А*** і ***В***. На початку гри ***А*** вживав певні положення, які вважав правильними без доведення (постулати). ***В*** висував твердження, з якими ***А*** був змушений погоджуватися у разі, якщо вони були логічним наслідком з постулатів. Мета гри полягала в тому, що ***В*** мав змусити ***А*** погодитися з двома твердженнями, що суперечили одне одному. Арістотель написав два посібники до цієї гри – логічні трактати.



Зусиллями *Евкліда* геометрія із системи практичних фактів перетворилася на науку. Головний твір Евкліда «Начала» складено так, ніби Евклід поставив собі за мету точно дотримуватися правил цієї гри: спочатку формулюються твердження, які приймаються без доведення (аксіоми), після чого з них строго логічно виводяться наслідки – теореми. Кожний, хто прийняв аксіоми, змушений був прийняти і всі теореми.

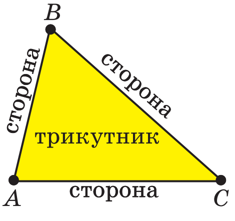
III ТРИКУТНИК

У цьому розділі ми будемо вивчати геометрію трикутника.

Це один з найголовніших розділів геометрії. Майже вся наука геометрія із часів Евкліда базується на теоремах про трикутник.

§ 13. Трикутник і його елементи. Види трикутників

Найпростіший з многокутників – трикутник – відіграє в геометрії особливу роль. Будь-який многокутник можна поділити на трикутники. Тому вивчення властивостей многокутників зводиться до вивчення властивостей трикутників, з яких вони складаються. Інколи кажуть про «геометрію трикутника» як про самостійний розділ геометрії.



Ми вже обговорювали поняття трикутника, коли ознайомлювалися з аксіомами Евкліда. Нагадаємо.

Трикутником називають внутрішню частину площини, обмежену трьома відрізками, що сполучають три точки цієї площини, які не лежать на одній прямій.

Ці три точки називають *вершинами* трикутника, а відрізки, що їх сполучають, – *сторонами* трикутника. (Точки на сторонах трикутника належать трикутнику.)

Для трикутника використовують символ «△».

Трикутник позначають символом «△» і називають за його вершинами в будь-якому порядку. Наприклад, трикутник, зображений на малюнку 67, позначають як $\triangle ABC$, або $\triangle ACB$, або $\triangle CBA$ і т. д. Читають відповідно «трикутник ABC», «трикутник ACB»...

Кути BAC, ABC і ACB – *кути трикутника* ABC. Їх позначають відповідно $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$.

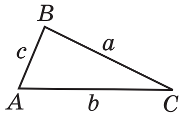
Для трикутника ABC (мал. 67) кажуть, що

$\angle A$ *протилежний* до сторони BC;

$\angle A$ *прилеглий* до сторони AB;

$\angle A$ *прилеглий* до сторони AC;

$\angle A$ *лежить між сторонами* AC і AB.



Мал. 67

Кути трикутника ще називають його *внутрішніми кутами*.

Сторони трикутника, із часів Евкліда, позначають малими літерами латинського алфавіту відповідно до позначення протилежних вершин (мал. 67).

Периметром трикутника називають суму довжин усіх його сторін. Периметр зазвичай позначають через P, а півпериметр (дорівнює $P : 2$), – через p. Так, для трикутника ABC (мал. 67) маємо:

$$P = a + b + c; \ \ p = (a + b + c) : 2.$$

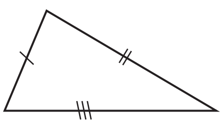
ВИДИ ТРИКУТНИКІВ

Залежно від сторін трикутники бувають:

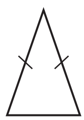
– **різносторонні** – довжини всіх сторін різні (мал. 68);

– **рівнобедрені** – дві сторони мають однакову довжину (мал. 69);

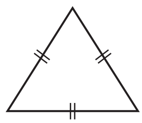
– **рівносторонні (правильні)** – усі довжини сторін між собою рівні (мал. 70).



Мал. 68

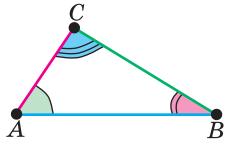


Мал. 69

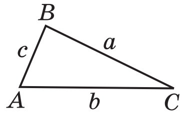


Мал. 70

У *рівнобедреному трикутнику* дві рівні між собою сторони називають *бічними*, третю сторону – *основою*, а коли кажуть: *вершина* рівнобедреного трикутника, мають на увазі його вершину, що лежить проти основи.



КАЖУТЬ:
$\angle A$ протилежний до сторони BC;
$\angle A$ прилеглий до сторони AB;
$\angle A$ прилеглий до сторони AC;
$\angle A$ лежить між сторонами AC і AB.



У $\triangle ABC$ позначають сторони: a, b, c.

Залежно від сторін:

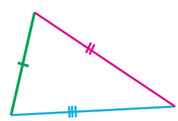
рівнобедрений

– – –

рівносторонній

– – –

різносторонній



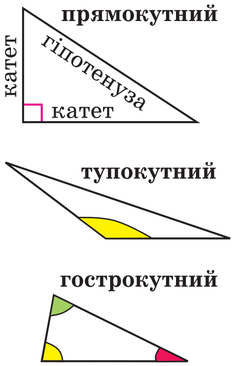
Для допитливих

Математик **Чарльз Лютвидж Доджсон** (1832–1898), професор Оксфордського університету, всесвітньо відомий як дитячий письменник **Льюїс Керрол**. Коли 1932 року святкували столітній ювілей письменника Льюїса Керрола, рукопис його книги «Аліса в Країні Чудес» було продано за 30 000 фунтів стерлінгів золотом. На той час то була найбільша сума, коли-небудь сплачена за книгу.

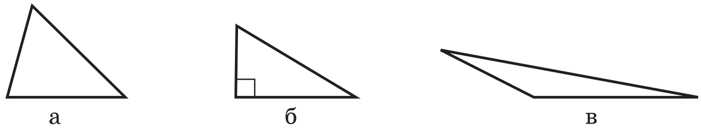
Математика – це велика вигадка без обману!

Містер Доджсон

Залежно від кутів:



Залежно від кутів трикутники бувають:
– **гострокутні** – усі кути гострі (мал. 71а);
– **прямокутні** – серед кутів є прямий (мал. 71б);
– **тупокутні** – серед кутів є тупий (мал. 71в).



Мал. 71

У прямокутному трикутнику сторони, що утворюють прямий кут, називають *катетами*, а сторону, що лежить проти прямого кута, – *гіпотенузою*.

Практична робота 14

1. Накресліть довільний трикутник ABC. Назвіть сторони, протилежні до кутів A і B. Назвіть кути, протилежні до сторін AC і BC. Назвіть кути, прилеглі до сторони AB. Назвіть кут між сторонами BC і BA.
2. Накресліть довільні різносторонній, рівнобедрений і рівносторонній трикутники, позначте їх вершини. Назвіть усі кути і сторони цих трикутників. За допомогою лінійки виміряйте периметр кожного і відповідь запишіть.
3. За допомогою косинця накресліть прямокутний трикутник. Позначте його вершини та вкажіть катети і гіпотенузу трикутника. Чи може він бути рівнобедреним?
4. Накресліть гострокутний та тупокутний трикутники. Чим вони відрізняються один від одного та від прямокутного трикутника?

Задачі та вправи

206°. З'ясуйте вид трикутника за його сторонами: **а)** 3 см, 3 см, 5 см; **б)** 5 см, 5 см, 5 см; **в)** 2 см, 5 см, 6 см.

207°. З'ясуйте вид трикутника, якщо один з його кутів дорівнює: **а)** 90°; **б)** 125°.

208°. Чи може трикутник мати лише один катет?

209°. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 5 см, а бічна сторона – 12 см. Знайдіть периметр трикутника.

210°. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 35 см, а бічна сторона – 12 см. Знайдіть основу трикутника.

211°. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 27 см, а основа – 11 см. Знайдіть бічну сторону трикутника.

Для допитливих

Уперше науковий підхід до розгляду властивостей кутів і трикутників ми знаходимо у Стародавній Греції. Саме греки класифікували (розподіляли по групах) кути й трикутники за їх видами.

Символ «△» замість слова «трикутник» уперше зустрічається в давньогрецького вченого Герона (І ст. н. е.).

212. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо одна з його сторін дорівнює 5 см, друга – на 3 см довша за неї, а третя – на 2 см довша за другу.

213. Одна зі сторін трикутника дорівнює 10 см. Вона на 5 см менша від другої і вдвічі менша за третю сторону. Знайдіть периметр трикутника.

214. Периметр трикутника дорівнює 45 см. Знайдіть довжини сторін цього трикутника, якщо вони відносяться як: **а°)** 1 : 1 : 1; **б)** 2 : 3 : 4.

215. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 48 дм, а довжини сторін відносяться як: **а°)** 1 : 1 : 1; **б)** 3 : 4 : 5; **в)** 7 : 7 : 10.

216*. Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо $AB + BC = 19$ см, $AB + AC = 20$ см, $BC + AC = 29$ см.

217*. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 88 см, одна з його сторін удвічі менша за другу, а третя становить 70 % від другої.

218*. Середнє арифметичне всіх сторін трикутника дорівнює 15 м. Знайдіть периметр цього трикутника.

219.** Поділіть площину за допомогою двох трикутників на: **а)** три частини; **б)** чотири частини; **в)** п’ять частин; **г)** сім частин. Яку найменшу і яку найбільшу кількості частин площини можна отримати при такому поділі?

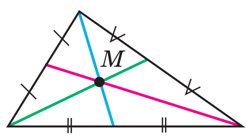
§ 14. Медіана, бісектриса та висота трикутника

З кожним трикутником пов’язують кілька відрізків, які мають спеціальні назви.

1. Медіани трикутника

Медіаною трикутника називають відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони (мал. 72а).

У трикутнику можна провести три медіани. Вони *перетинаються в одній точці*, яку називають **центроїдом** трикутника.



M – **центроїд**

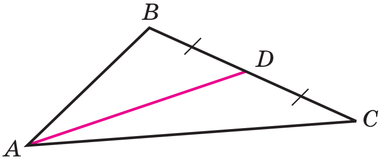
Домовимося позначати медіану трикутника як m_a, якщо вона проведена до сторони a; m_b – якщо до сторони b і т. д. Індекс указує, до якої саме сторони трикутника проведено медіану.

Для допитливих

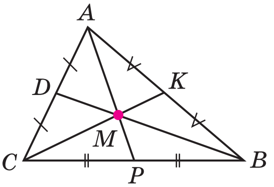
Архімед (бл. 287–212 рр. до н. е.) за допомогою математичних розрахунків сконструював силу-силенну всіляких механізмів, які так вдало допомагали у війні проти римлян під час облоги Сиракуз, що римський полководець Марцелл змушений був визнати: «Треба припиняти війну проти геометра!» Пізніше тільки зрада допомогла римлянам увійти до Сиракуз.

Наприклад, на малюнку 72б $BD \equiv m_b$; $AP \equiv m_a$; $CK \equiv m_c$.

Нагадаємо:
«≡» – є, тотожна рівність



а



б

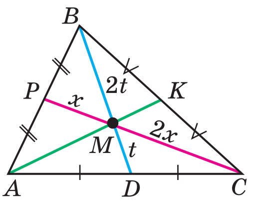
Мал. 72

На малюнку 72б точка M – центроїд (центр мас) трикутника ABC.

Пізніше (у 8-му класі) ми доведемо, що медіани трикутника перетинаються в одній точці.

Про точку перетину медіан трикутника (центроїд) ще кажуть: *центр мас* трикутника, маючи на увазі точку, до якої прикладено силу тяжіння, або точку, за яку якщо підвісити тіло, то воно знаходитиметься в рівновазі (це одна й та сама точка).

Медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить їх у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершин.

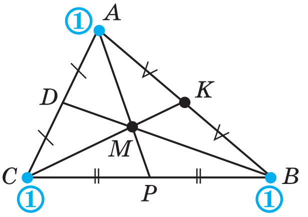


M – центр мас, або центроїд, трикутника.

$AM : MK = 2 : 1$
$BM : MD = 2 : 1$
$CM : MP = 2 : 1$

А зараз наведемо **міркування Архімеда (III ст. до н. е.), чому точка перетину медіан трикутника є центром його мас**.

Розмістимо у вершинах довільного трикутника ABC одиничні маси (мал. 73) і знайдемо центр мас трикутника. (Сторони трикутника вважаємо невагомими.)



Мал. 73

Центр мас відрізка AB міститься в його середині – точці K. Тобто маси A і B можемо замінити подвійною масою в точці K.

Центром мас трикутника буде центр мас відрізка CK, у якого маса в точці K вдвічі більша за масу

Для допитливих

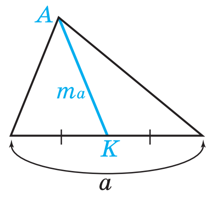
Слова «медіана», «медіатр», «медіа» мають спільний корінь. Вони походять від слова «медіум» – середній, посередник. Медіатр – предмет, який дає змогу музикантам (наприклад, гітаристу) здобувати звук зі свого музичного інструмента. Першу літеру *m* цього латинського слова й використовують для позначення медіани.

в точці C. Центр мас трикутника ABC розміститься на медіані KC у точці M, відстань від якої до точки K буде вдвічі меншою, ніж до точки C, тобто $CM = 2MK$.

Аналогічно можна визначити розташування центра мас трикутника ABC, розглянувши спочатку центри мас відрізків BC або AC.

Оскільки центр мас у тіла лише один, маємо, що **медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить їх у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершин.**

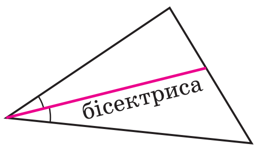
Тепер зрозуміло, чому точку перетину медіан трикутника ще називають **центром мас трикутника**.



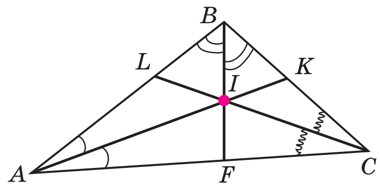
$AK \equiv m_a$

2. Бісектриси трикутника

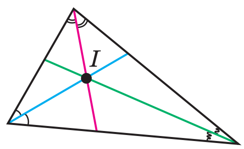
Бісектрисою трикутника називають відрізок бісектриси кута трикутника від його вершини до точки перетину з протилежною стороною **(мал. 74).**



Мал. 74



Мал. 75

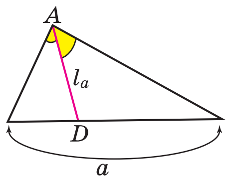


Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці – **інцентрі** трикутника.

У трикутнику можна провести три бісектриси. **Три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці** (доведемо це у § 28). Точку перетину бісектрис трикутника називають ***інцентром***.

На малюнку 75 точка I – інцентр трикутника ABC.

Домовимося позначати бісектрису трикутника як l_a (або l_A), де індекс указує, яку саме сторону трикутника перетинає бісектриса (або з якої вершини виходить). Наприклад, на малюнку 75 $AK \equiv l_a$, $CL \equiv l_c$, $BF \equiv l_b$.



$\boldsymbol{AD \equiv l_a \equiv l_A}$

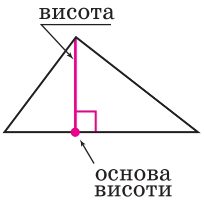
3. Висоти трикутника

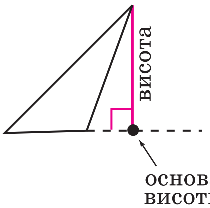
З кожної вершини будь-якого трикутника можна провести перпендикуляр до протилежної сторони трикутника або до її продовження.

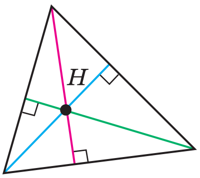
Висотою трикутника називають перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить протилежну сторону трикутника.

Для допитливих

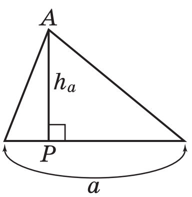
1. Намалюйте чотирикутник. Як розрізати його на два, три, чотири, п’ять трикутників?
2. Чи можна розрізати чотирикутник на довільно вказану кількість трикутників?





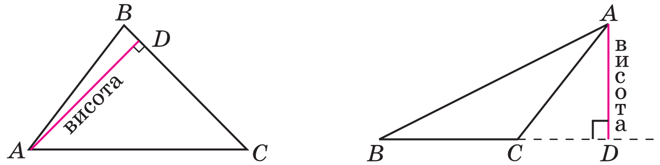


Прямі, що містять висоти трикутника, перетинаються в одній точці – **ортоцентрі** трикутника.



$\boldsymbol{AP \equiv h_a}$

Основу такого перпендикуляра називають *основою висоти трикутника.*



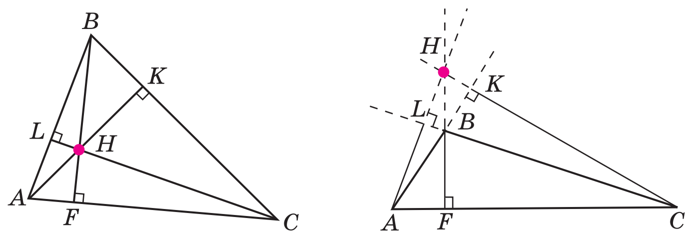
а б

Мал. 76

Наприклад, відрізок AD є висотою трикутника ABC, яку проведено до сторони BC (мал. 76а) або до її продовження (мал. 76б). Точка D – основа цієї висоти.

У трикутнику можна провести три висоти. *Прямі, яким належать висоти трикутника, перетинаються в одній точці* (доведемо це пізніше, с. 141). Точку перетину висот трикутника називають ***ортоцентром***.

На мал. 77 точка H – ортоцентр трикутника ABC. Домовимося позначати висоту трикутника як h_a. Індекс указує, до якої саме сторони трикутника (або її продовження) проведено цю висоту. Наприклад, на малюнку 77 $AK \equiv h_a$, $CL \equiv h_c$, $BF \equiv h_b$.



а б

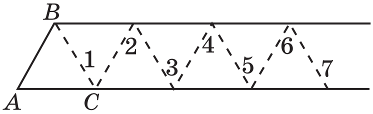
Мал. 77

Практична робота 15

1. Виріжте з паперу довільний трикутник. Як, згинаючи папір, отримати його: **а)** висоту; **б)** медіану; **в)** бісектрису?
2. Виріжте з паперу три гострокутних трикутники. Згинанням визначте в одному точку перетину медіан, у другому – точку перетину бісектрис, у третьому – точку перетину висот.

Для допитливих

Довга стрічка паперу поділена пунктирною лінією так, як показано на малюнку. Стрічку складають згинанням по пунктирних лініях у послідовності, указаній числами. При цьому стрічка завжди займає горизонтальне положення, а трикутники ліворуч після складання повинні лежати зверху трикутників, що знаходяться праворуч. У якому положенні опиняться вершини A, B, C після 2017-ти складань? Намалюйте відповідний трикутник.



3. Накресліть прямокутний трикутник. За допомогою косинця визначте точку перетину його висот. Зробіть висновок.

Задачі та вправи

220°. Накресліть довільний трикутник. За допомогою лінійки позначте середини його сторін і проведіть медіани трикутника. Знайдіть і позначте центр мас трикутника – точку перетину його медіан.

221°. Накресліть довільний трикутник. За допомогою транспортира і лінійки проведіть його бісектриси. Знайдіть і позначте інцентр трикутника – точку перетину його бісектрис.

222°. Накресліть довільні гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники. За допомогою косинця проведіть висоти в кожному з трикутників. Знайдіть і позначте ортоцентр кожного з трикутників – точку перетину його висот або їх продовжень.

223°. Чим відрізняються між собою бісектриса трикутника й бісектриса кута?

224°. Чи може міститися поза трикутником його: **а)** бісектриса; **б)** висота; **в)** медіана?

225°. Чи може висота трикутника збігатися з його стороною?

226°. Чи може лише одна висота трикутника збігатися з його стороною?

227. Визначте вид трикутника ABC, якщо його висота AP міститься поза трикутником.

228. Одна з висот трикутника міститься поза цим трикутником. Що можна сказати про розміщення інших двох висот цього трикутника?

229*. Знайдіть медіану AK трикутника ABC, якщо: **а)** відстань від вершини A до центра мас M дорівнює 10 см; **б)** $MK = 3$ см.

Для допитливих

Про поїздку відомого французького енциклопедиста **Дідро** до Росії на запрошення імператриці Катерини II розповідають таке.

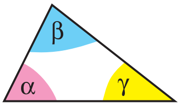
Дідро був атеїстом, не приховував своїх переконань і наполегливо їх пропагував. Імператриця вважала висловлювання Дідро дотепними, проте один з її вельмож порадив їй припинити його атеїстичні виступи та з метою запобігання філософським промовам Дідро звернутися до видатного математика **Леонарда Ейлера**. Леонард Ейлер, геній, який відкрив людству нові напрямки математики, був людиною глибоко релігійною і мав неабияке почуття гумору. Ейлер сповістив Дідро, що йому вдалося знайти доведення існування Бога і цим доведенням він із задоволенням поділиться з Дідро в присутності всього імператорського двору. Дідро погодився на диспут.

І от наступного дня на запрошення Катерини II найповажніші вельможі зібралися за величезним столом. Ейлер, користуючись тим, що Дідро зовсім не розуміється на математиці, підвівся і, дивлячись у вічі своєму опоненту, замогильним голосом сповістив: «**А** в квадраті мінус **В** в квадраті дорівнює **А** мінус **В**, помножене на **А** плюс **В**. Звідси випливає, що Бог існує. Ви згодні?». Натовпом прокотився сміх, а Дідро розгубився і одразу звернувся до імператриці за дозволом повернутися до Франції.

§ 15. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника

Т Теорема 1. **Сума кутів трикутника дорівнює 180°.**

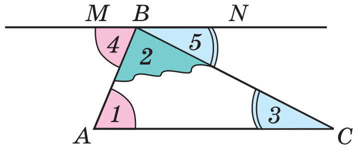
Сума кутів трикутника дорівнює 180°.



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Доведення

Нехай дано трикутник ABC (мал. 78). Доведемо, що $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.



Мал. 78

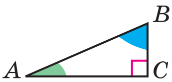
1) Проведемо через вершину B пряму MN так, що $MN \parallel AC$.

2) $\angle MBN$ – розгорнутий, тоді $\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$.

3) Оскільки $MN \parallel AC$, то:
$\angle 1 = \angle 4$ – як внутрішні різносторонні при січній AB;
$\angle 3 = \angle 5$ – як внутрішні різносторонні при січній BC.

4) Маємо: $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180°$.

Теорему доведено.

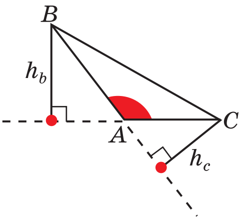


$\angle C = 90°$
↓
$\angle A + \angle B = 90°$

Н Наслідок 1. **У будь-якому прямокутному трикутнику сума гострих кутів дорівнює 90°.**

Доведемо, спираючися на теорему 1, уже знайомий вам з практики факт.

Н Наслідок 2. **Висоти тупокутного трикутника, які проведено до тих сторін, що утворюють тупий кут, лежать поза цим трикутником.**



$\angle A > 90°$
↓
h_c і h_b поза $\triangle ABC$

Доведемо від супротивного.

Нехай у трикутнику ABC $\angle A$ – тупий (мал. 79). Припустимо, що висота BK міститься всередині трикутника. Тоді у трикутнику ABK $\angle BAK + \angle BKA > 180°$, що суперечить теоремі про суму кутів трикутника.

Для допитливих

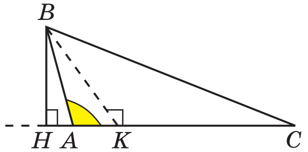
1. Плиточки, що мають форму рівних між собою рівносторонніх трикутників, викладають на площині так, що одна з вершин у них спільна, а сторони двох сусідніх збігаються. Чи можна скласти в такий спосіб «розетку» без зазорів? Якщо можна, то скільки плиточок для цього треба взяти? Знайдіть градусну міру кута, який утворено двома сусідніми відрізками зовнішньої межі «розетки».
2. Нехай тепер плиточки мають форму рівних між собою прямокутних трикутників. Складіть задачу, аналогічну до попередньої, і розв'яжіть її.

Отже, наше припущення є хибним, тому висота BH лежить поза трикутником ABC.

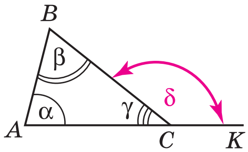
ЗОВНІШНІЙ КУТ ТРИКУТНИКА

Кут, суміжний з кутом трикутника, називають його зовнішнім кутом.

Наприклад, на малюнку 80 зовнішнім кутом трикутника ABC при вершині C є кут δ.



Мал. 79



Мал. 80

Т е о р е м а 2. **Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх, не суміжних з ним.**

Д о в е д е н н я

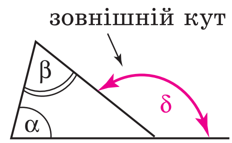
Нехай дано $\triangle ABC$ (мал. 80). Доведемо, що

$$\delta = \alpha + \beta.$$

1) Кути γ і δ – суміжні, тоді $\gamma + \delta = 180°$.

2) За теоремою про суму кутів трикутника:
$\alpha + \beta + \gamma = 180° = \delta + \gamma$, тоді $\delta = \alpha + \beta$.

Теорему доведено.



$\delta = \alpha + \beta$
$\delta > \alpha$ і $\delta > \beta$

Н а с л і д о к . **Зовнішній кут трикутника більший за кожний з внутрішніх кутів цього трикутника, з ним не суміжних.**

Кожний з доданків завжди менший від їх суми. Дійсно, оскільки $\delta = \alpha + \beta$, то $\delta > \alpha$ і $\delta > \beta$.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 1. **У будь-якому трикутнику принаймні два кути є гострими.**

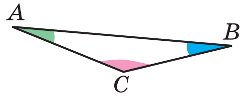
Д о в е д е н н я

Доведемо від супротивного.

Нехай у деякому трикутнику два кути не є гострими. Тоді їх сума буде не меншою від 180° і сума всіх кутів цього трикутника перевищить 180°, що суперечитиме теоремі про суму кутів трикутника.

Отже, наше припущення хибне, тому в будь-якому трикутнику є принаймні два гострих кути.

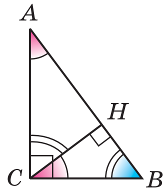
Щ. в. д.



$\angle C > 90°$
$\downarrow$
$\angle A < 90°$
і $\angle B < 90°$

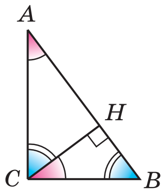
Приклад 2.

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, CH – висота.
Довести: $\angle ACH = \angle B$, $\angle BCH = \angle A$.



У прямокутних трикутниках ACB і CHB $\angle B$ – спільний, тоді $\angle HCB = \angle A$. Доведіть самостійно, що $\angle ACH = \angle B$.

Якщо $\angle C = 90°$



Приклад 3. Визначте вид трикутника ABC, якщо $\angle A + 2\angle C = 80°$.

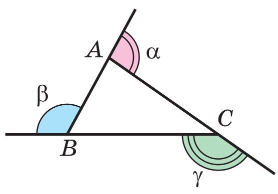
Розв'язання

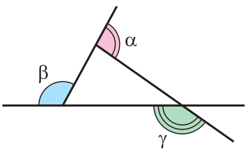
1) $\angle A + 2\angle C = 80° \rightarrow \angle A + \angle C = 80° - \angle C$.
2) $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C) = 180° - (80° - \angle C) = 100° + \angle C > 90°$.

Відповідь: тупокутний.

Приклад 4. Доведіть, що сума зовнішніх кутів трикутника (взятих по одному при кожній вершині) дорівнює 360°.

Дано: $\triangle ABC$.
Довести: $\alpha + \beta + \gamma = 360°$.





$\alpha + \beta + \gamma = 360°$

1) $\angle A + \alpha = \angle B + \beta = \angle C + \gamma = 180°$ (за властивістю суміжних кутів). Тоді
$(\angle A + \alpha) + (\angle B + \beta) + (\angle C + \gamma) = 3 \cdot 180°$.
2) $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ (за властивістю кутів трикутника).
3) $\alpha + \beta + \gamma = 3 \cdot 180° - (\angle A + \angle B + \angle C) = 3 \cdot 180° - 180° = 360°$.
Щ. в. д.

Приклад 5. Зовнішні кути трикутника, які взято по одному при кожній вершині, відносяться як 3 : 4 : 5. Знайдіть відношення внутрішніх кутів трикутника (див. мал. до прикладу 4).

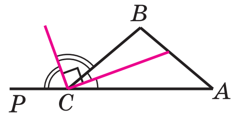
Дано: $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5$.
Знайти: $\angle A : \angle B : \angle C$.

Варто скористатися: якщо $a : b : c = 3 : 5 : 2$, то $a = 3x$, $b = 5x$; $c = 2x$.

1) $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 4 : 5 \rightarrow \alpha = 3x$, $\beta = 4x$, $\gamma = 5x$.
2) α, β, γ – зовнішні $\rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 360° = 12x$.
Тоді $180° = 6x$.
3) $\angle A = 180° - \alpha = 6x - 3x = 3x$;
$\angle B = 180° - \beta = 6x - 4x = 2x$;
$\angle C = 180° - \gamma = 6x - 5x = x$;
$\angle A : \angle B : \angle C = 3x : 2x : x = 3 : 2 : 1$.

Відповідь: 3 : 2 : 1.

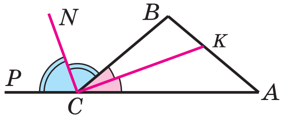
О.З. Приклад 6. **Бісектриси внутрішнього й зовнішнього кутів трикутника при одній вершині утворюють прямий кут. Доведіть це.**



$l_{BCA} \perp l_{BCP}$

Дано: $\triangle ABC$, $CK = l_{\angle BCA}$, $CN = l_{\angle PCB}$.

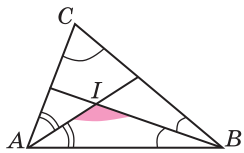
Довести: $\angle NCK = 90°$.



Кути ACB і BCP – суміжні. Тоді за властивістю бісектрис суміжних кутів (див. § 6, с. 36) $\angle KCN = 90°$.

Щ. в. д.

О.З. Приклад 7. **Доведіть, що в трикутнику *ABC* $\angle AIB = 90° + \dfrac{\angle C}{2}$, де *I* – інцентр.**

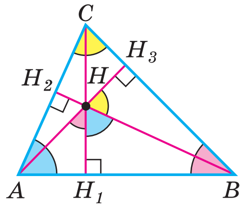


$\angle AIB = 90° + \dfrac{\angle C}{2}$

Доведення.

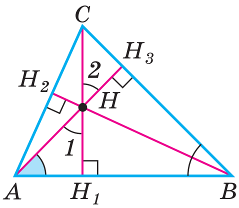
$$\angle AIB = 180° - \left(\frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}\right) = 180° - \frac{180° - \angle C}{2} = 90° + \frac{\angle C}{2}.$$

О.З. Приклад 8. **Доведіть, що кути, утворені висотами гострокутного трикутника з вершинами в його ортоцентрі, дорівнюють кутам даного трикутника.**



$\angle(h_a; h_b) = \angle C$
$\angle(h_c; h_b) = \angle A$
$\angle(h_a; h_c) = \angle B$

Доведення



Прямокутні трикутники AHH_1 і AH_3B мають спільний кут HAB. Тоді $\angle 1 = \angle B$. Тобто $\angle(h_a; h_c) = \angle B$. Аналогічно: $\angle(h_a; h_b) = \angle C$; $\angle(h_c; h_b) = \angle A$.

Практична робота 16

1. Накресліть гострокутний трикутник і, продовживши його сторони, утворіть зовнішні кути (по одному при кожній з вершин трикутника). Позначте та виміряйте їх. Які кути ви отримали – гострі, прямі чи тупі? Сформулюйте висновок і запишіть його.
2. Виконайте попереднє завдання у випадку: **а)** тупокутного трикутника; **б)** прямокутного трикутника.

Задачі та вправи

230°. Накресліть довільний гострокутний трикутник ABC і його зовнішній кут при вершині A. Виміряйте всі кути, що утворилися, і порівняйте зовнішній кут при вершині A з: **а)** внутрішніми кутами трикутника; **б)** сумою двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.

231°. Виконайте попередню вправу у випадку: **а)** тупокутного трикутника ABC ($\angle A > 90°$); **б)** прямокутного трикутника ABC ($\angle A = 90°$).

232°. Знайдіть третій кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють: **а)** $\angle A = 35°$ і $\angle B = 49°$; **б)** $\angle A = 135°$ і $\angle C = 27°$; **в)** $\angle C = 87°$ і $\angle B = 69°$.

233°. Чи буде гострокутним трикутник, два кути якого дорівнюють: **а)** 43° і 27°; **б)** 53° і 42°; **в)** 57° і 33°?

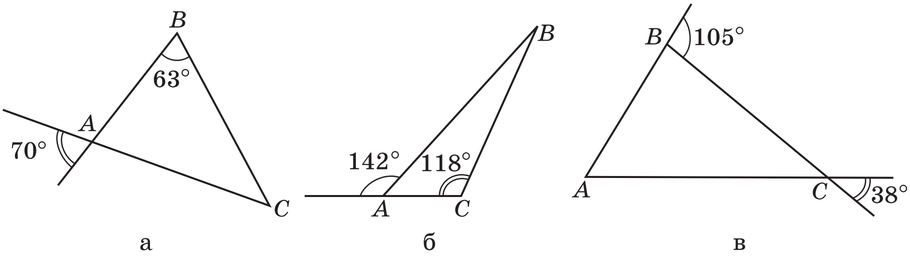
234°. Знайдіть інший гострий кут прямокутного трикутника, якщо один з його гострих кутів дорівнює: **а)** 30°; **б)** 46°; **в)** 78°.

235°. Два кути трикутника дорівнюють по 60°. Знайдіть третій кут трикутника.

236°. Чи можуть кути трикутника дорівнювати: **а)** 51°, 47°, 82°; **б)** 63°, 101°, 16°; **в)** 40°, 50°, 60°; **г)** 50°, 60° і 70°?

237°. Чи існує трикутник, у якого: **а)** два кути прямі; **б)** два кути тупі; **в)** два кути гострі? Чому?

238°. Знайдіть за малюнком 81 невідомі кути трикутника ABC.



Мал. 81

239°. Що можна сказати про вид трикутника, якщо один з його зовнішніх кутів дорівнює: **а)** 35°; **б)** 90°? Відповідь поясніть.

240°. Один із внутрішніх кутів трикутника дорівнює 70°. Чи може зовнішній кут, не суміжний з ним, дорівнювати: **а)** 75°; **б)** 65°; **в)** 70°?

241°. Знайдіть зовнішній кут при вершині C трикутника ABC, якщо кути A і B дорівнюють: **а)** по 60°; **б)** 30° і 60°; **в)** 28° і 72°.

242°. Сума двох кутів трикутника дорівнює 112°. Знайдіть кут, суміжний до третього його кута.

243. Якщо в трикутнику два кути рівні між собою, то вони гострі. Доведіть це.

244. Визначте вид трикутника ABC, якщо: **а)** $\angle A + \angle B = 90°$; **б)** $\angle A + \angle B = 60°$; **в)** $\angle A + 2\angle B = 90°$.

245. Знайдіть кути трикутника, якщо вони пропорційні числам: **а)** 1, 2 і 3; **б)** 2, 3 і 4; **в)** 5, 5 і 8.

246. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів на 64° більший за другий. Знайдіть кути цього трикутника.

247. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо їх різниця: **а)** дорівнює одному з них; **б)** удвічі більша за менший з них.

248. Знайдіть внутрішні кути трикутника, якщо два його зовнішні кути дорівнюють: **а)** 115° і 100°; **б)** 100° і 140°. Знайдіть третій зовнішній кут.

249. Доведіть, що бісектриси внутрішнього й зовнішнього кутів трикутника при одній вершині взаємно перпендикулярні.

250. Скільки зовнішніх кутів у трикутнику можуть бути: **а)** гострими; **б)** прямими; **в)** тупими?

251. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 115°. Знайдіть кути трикутника, якщо один із внутрішніх кутів дорівнює: **а)** 30°; **б)** 78°; **в)** 102°.

252. У прямокутному трикутнику з гострим кутом 56° знайдіть кут, який утворює: **а)** бісектриса цього кута з другим катетом; **б)** бісектриса прямого кута з гіпотенузою; **в)** висота, проведена з вершини прямого кута, з кожним із катетів.

253. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle A + \angle B = 143°$, $\angle A + \angle C = 111°$.

254*. Доведіть, що в будь-якому трикутнику хоча б один з кутів: **а)** менший від 60°; **б)** більший за 60°.

255*. Знайдіть кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини C трикутника ABC, якщо: **а)** $\angle A = 75°$, $\angle B = 60°$; **б)** $\angle A = 45°$, $\angle B = 63°$.

256*. Внутрішні кути трикутника відносяться як: **а)** 1 : 4 : 7; **б)** 1 : 2 : 4. Знайдіть відношення зовнішніх кутів цього трикутника, не знаходячи самих кутів.

257.** Зовнішні кути трикутника відносяться як: **а)** 4 : 5 : 7; **б)** 5 : 7 : 10. Знайдіть відношення внутрішніх кутів трикутника, не знаходячи їхньої градусної міри.

258*. Кути A і B трикутника ABC рівні між собою. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині C паралельна стороні цього трикутника.

259*. У трикутнику ABC інцентр позначено як I.

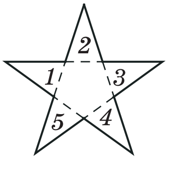
1) Знайдіть $\angle AIB$, якщо $\angle C = 40°$.

2) Знайдіть кут B, якщо він менший від кута AIC на 50°.

3) Доведіть, що кути AIB, BIC, AIC можуть бути лише тупими.

4) Знайдіть кути трикутника ABC, якщо кут AIC більший за кут A на 30°, а за кут C – на 90°.

260*. Знайдіть суму п'яти кутів при вершинах п'ятикутної зірки (мал. 82).



Мал. 82

261*. Знайдіть кути трикутника, сторони якого лежать на прямих, кути між якими дорівнюють 20°, 30° і 50°.

262*. Доведіть, що в будь-якому трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) для кута α між бісектрисою CD і висотою CK, проведеними до гіпотенузи, виконується рівність $\alpha = |45° - \angle A| = |45° - \angle B|$.

263.** З вершини кута, що дорівнює 60°, провели бісектрису і висоту. Знайдіть невідомі кути трикутника, якщо вказані висота і бісектриса утворюють між собою кут 10°.

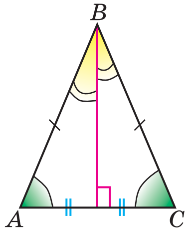
264.** Доведіть, що кожен зовнішній кут трикутника є меншим від суми двох зовнішніх кутів при інших вершинах трикутника.

Для допитливих

Французький математик **П'єр Еригон** відомий не лише тим, що запровадив символьне позначення кута та перпендикулярності в геометрії. Викладаючи математику в Парижі, протягом 1634–1637 років він написав латинською і французькою мовами шеститомник «Курс математики», у якому систематизував усі математичні знання з арифметики та алгебри, відомі на той час. Цей твір мав значний успіх і 1644 року був перевиданий. Зокрема, його часто цитували видатні математики Блез Паскаль (1623–1662) та Вільгельм Готфрід Лейбніц (1646–1716).

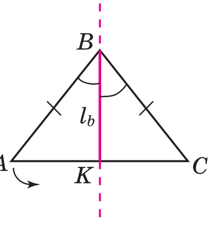
§ 16. Властивості рівнобедреного трикутника

Т Теорема. **У рівнобедреному трикутнику:**
– кути при основі рівні;
– бісектриса трикутника, яку проведено до основи, є його медіаною і висотою.



$AB = BC$
↓
$\angle A = \angle C$
$l_b \equiv m_b \equiv h_b$

Доведення



Мал. 83

Нехай дано трикутник ABC, у якого $AB = BC$ (мал. 83). Доведемо, що $\angle A = \angle C$; $l_b \equiv m_b$; $l_b \equiv h_b$.

Проведемо бісектрису BK і зігнемо малюнок по прямій BK.

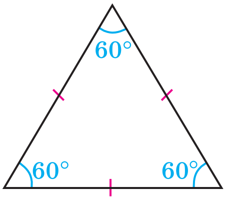
1) $\angle ABK = \angle CBK$, тому промені BA і BC сумістяться.

2) За умовою $AB = BC$, тоді за аксіомою про відкладання відрізків точка A суміститься з точкою C.

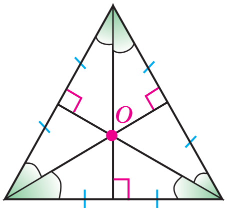
3) Трикутники ABK і CBK сумістилися. Тоді сумістилися й відрізки AK і KC та кути A і C. Тому $\angle A = \angle C$, BK – медіана.

4) Кути BKA і BKC є суміжними й сумістилися, тоді вони дорівнюють по $180° : 2 = 90°$, тобто BK – висота.

Теорему доведено.



↑
у рівносторонньому трикутнику
↓



O – центр рівностороннього трикутника

Н Наслідок 1. **У рівносторонньому трикутнику всі кути між собою рівні. Кожен кут рівностороннього трикутника дорівнює 60°.**

Рівносторонній трикутник є рівнобедреним (за основу можна взяти будь-яку з його сторін). Тоді за теоремою усі його кути між собою рівні й дорівнюють: $180° : 3 = 60°$.

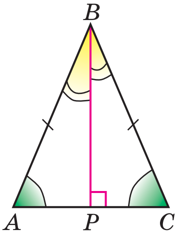
Рівносторонній трикутник ще називають *правильним трикутником*.

Н Наслідок 2. **У правильному трикутнику всі бісектриси є його медіанами і висотами та перетинаються в одній точці.**

Точку перетину медіан, бісектрис і висот правильного трикутника називають *центром правильного (рівностороннього) трикутника*.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

О.З. Приклад 1. **Доведіть, що кути при основі будь-якого рівнобедреного трикутника гострі.**

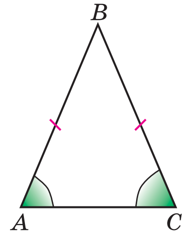


Дано: $AB = BC$.
Довести: $\angle A < 90°$, $\angle B < 90°$.

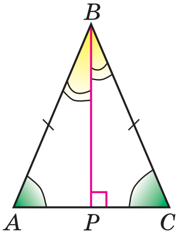
1) $BP \equiv l_b \to BP \equiv h_b$ і міститься всередині $\triangle ABC$.

2) Кути APB і CPB прямі. Тоді $\angle A < 90°$ і $\angle B < 90°$ як кути прямокутних трикутників APB і CPB.

Щ. в. д.



Приклад 2. Доведіть, що сума двох нерівних між собою кутів рівнобедреного трикутника більша за 90°.



Дано: $AB = BC$.

Довести: $\angle A + \angle B > 90°$.

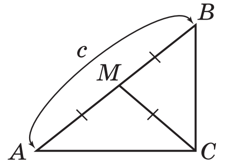
---

1) $BP \equiv l_b \to BP \equiv h_b$ (властивість рівнобедреного трикутника).

2) У $\triangle ABP$ ($\angle P = 90°$) $\angle A + \angle B : 2 = 90°$.

3) $\angle A + \angle B > \angle A + \angle B : 2 = 90°$. *Щ. в. д.*

О.3. Приклад 3. **Якщо медіана трикутника дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то трикутник — прямокутний.** Доведіть це.



Дано: $AM = MB = MC$.

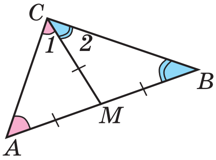
Довести: $\angle ACB = 90°$.

$$m_c = \frac{c}{2}$$
$$\downarrow$$
$$\angle ACB = 90°$$

1) У $\triangle AMC$: $AM = MC \to \angle A = \angle 1$.

2) У $\triangle BMC$: $BM = CM \to \angle B = \angle 2$.

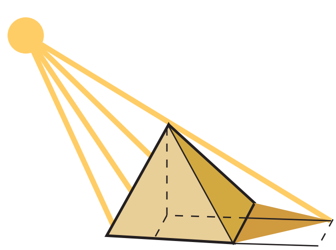
3) У $\triangle ABC$: $\angle A + \angle B + \angle C =$
$= 2\angle 1 + 2\angle 2 = 180°$;
$\angle C = \angle 1 + \angle 2 = 90°$. *Щ. в. д.*



Для допитливих

Одним із семи давніх наймудріших є **Фалес Мілетський** (бл. 624–547 рр. до н. е.). Його вважають батьком грецької математики. Переказують, що одного разу, коли Фалес відвідував у справах Єгипет, фараон запропонував йому розв'язати задачу. Фараон хотів знати висоту піраміди, але нікому не вдавалося її визначити. Фалес легко впорався із цим завданням. Він обрав час, коли його власна тінь дорівнювала його зросту і саме в той момент часу виміряв довжину тіні піраміди від її центра (див. мал.) та сказав, що вона дорівнює висоті піраміди. Зрозуміло, що перш ніж зробити таке вимірювання, Фалес повинен був знайти й довести, що кути при основі рівнобедреного трикутника між собою рівні, що проти рівних між собою кутів у трикутнику лежать рівні між собою сторони і що сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Практична робота. Виміряйте висоту дерева або стовпа, скориставшись ідеєю Фалеса та дещо змінивши її. (У нашій місцевості Сонце не часто підіймається так високо над обрієм, щоб тінь ставала рівною довжині предмета, який її відкидає.) Поставте метрову лінійку вертикально й виміряйте довжину її тіні. Потім, прийнявши довжину цієї тіні за 1 м, виміряйте цією міркою довжину тіні дерева (стовпа).



Практична робота 17

1. Накресліть на аркуші паперу рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$). Проведіть (за допомогою транспортира) бісектрису BK цього трикутника. Виріжте $\triangle ABC$ з аркушу.
2. Перегніть $\triangle ABC$ по його бісектрисі BK. Чи збіглися: **а)** точки A і C; **б)** відрізки AK і CA; **в)** кути BKA і BKC?
3. Сформулюйте висновок і запишіть його.

Практична робота 18

1. Відкладіть на прямій довільний відрізок AB і позначте його середину точкою M.
2. Позначте точку C так, щоб $CM = AB : 2$ і точка C не містилася на прямій AB.
3. З'єднайте точки A, B, C. Виміряйте (за допомогою транспортира) кут ACB. Зробіть висновок.

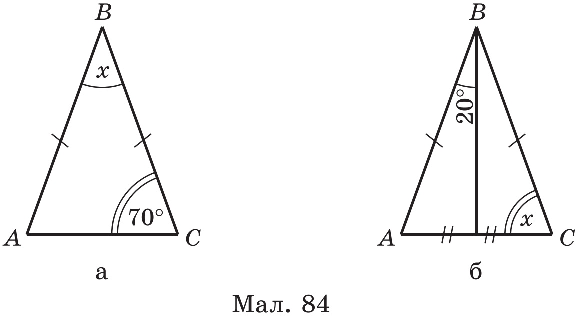
Задачі та вправи

265°. Знайдіть кут при вершині рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює: **а)** 45°; **б)** 63°; **в)** 25°. Як можна назвати ці рівнобедрені трикутники?

266°. Знайдіть кут при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут при вершині дорівнює: **а)** 36°; **б)** 82°; **в)** 104°.

267°. Знайдіть кути рівнобедреного прямокутного трикутника.

268°. Знайдіть кут x за малюнком 84.



Мал. 84

269°. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) провели медіану AK. Знайдіть кути трикутника ABK, якщо кут BAC дорівнює: **а)** 60°; **б)** 120°; **в)** 90°; **г)** 82°.

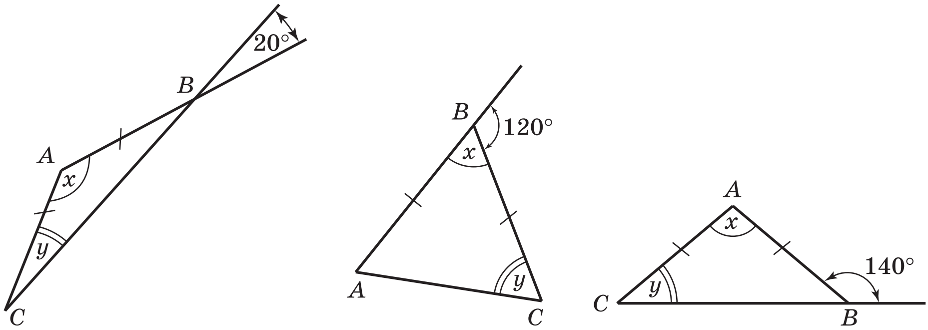
270°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$), якщо його медіана BP утворює зі стороною AB кут градусної міри: **а)** 15°; **б)** 30°; **в)** 45°.

271°. Сума двох не рівних кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 140°. Знайдіть кути цього трикутника.

272°. Знайдіть кути x і y за малюнком 85.

273. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, зовнішній кут якого, прилеглий до кута: **а)** при основі, дорівнює 168°; **б)** при вершині, дорівнює 140°.

274. Пряма відтинає на сторонах кута рівні між собою відрізки. Доведіть, що ця пряма перетинає сторони заданого кута під однаковими кутами.



а б в

Мал. 85

275. Чи може кут при основі рівнобедреного трикутника бути: **а)** тупим; **б)** прямим; **в)** гострим? Відповідь обґрунтуйте.

276. Чи може кут при вершині рівнобедреного трикутника бути: **а)** тупим; **б)** прямим; **в)** гострим? Відповідь обґрунтуйте.

277. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює: **а)** 45°; **б)** 74°; **в)** 102°. Розгляньте всі можливі випадки.

О.З. **278. Якщо один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то такий трикутник – рівносторонній. Доведіть це.**

279. Чи може зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника бути: **а)** гострим; **б)** прямим; **в)** тупим? Відповідь обґрунтуйте.

280. Чи може зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника бути: **а)** гострим; **б)** прямим; **в)** тупим? Відповідь обґрунтуйте.

281. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його зовнішніх кутів дорівнює: **а)** 30°; **б)** 100°; **в)** 90°; **г)** 15°.

282*. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо сума двох з них дорівнює: **а)** 70°; **б)** 140°; **в)** 90°; **г)** 110°.

283*. У рівнобедреному трикутнику медіана, яку проведено до основи, дорівнює половині цієї основи. Знайдіть кути трикутника.

284*. З точки перетину бісектрис рівнобедреного трикутника ABC його бічну сторону видно під кутом 115°. Знайдіть кути трикутника.

285*. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.

286*. У трикутника ABC медіана AD дорівнює половині сторони BC. Знайдіть кути даного трикутника, якщо кут ADC дорівнює 120°.

287*. Відрізки AB і CD перетинаються в точці P. $\angle DBP = 40°$. Знайдіть $\angle PAC$, якщо: **а)** $AC = CP$ і $PD = DB$; **б)** $AP = PC$ і $PD = PB$; **в)** $AC = CP$ і $PD = PB$.

288.** Дві висоти рівнобедреного трикутника (або їх продовження) при перетині утворюють кут α. Знайдіть кути трикутника, якщо α дорівнює: **а)** 80°; **б)** 40°.

289.** З точки перетину висот рівнобедреного трикутника його бічну сторону видно під кутом 110°. Знайдіть кути трикутника.

290.** Бісектриси кутів рівнобедреного трикутника перетинаються в точці, з якої бічну сторону видно під кутом, що дорівнює одному з кутів трикутника. Знайдіть кути трикутника.

291.** У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) бісектриси перетинаються в точці I. Знайдіть кути трикутника, якщо: **а)** кут AIC дорівнює $100°$; **б)** кут AIC більший за кут AIB на $15°$.

Запитання для повторення до § 13–16

1°. На які види поділяють трикутники залежно від: **а)** довжин сторін; **б)** міри кутів?

2°. Поясніть відмінність між поняттями «кут трикутника» і «зовнішній кут трикутника».

3°. Як називають сторони рівнобедреного прямокутного трикутника?

4°. Як знайти довжину сторони рівностороннього трикутника, якщо задано його периметр?

5°. Що таке висота; медіана; бісектриса трикутника? Чи завжди вони містяться всередині трикутника?

6°. У якому трикутнику висота: **а)** міститься поза трикутником; **б)** збігається зі стороною трикутника?

7°. Чому дорівнює сума кутів трикутника?

8°. Знайдіть градусну міру кутів правильного трикутника.

9°. Як записати міру зовнішнього кута трикутника через: **а)** кут трикутника при тій самій вершині трикутника; **б)** кути трикутника, несуміжні з ним?

10°. Сформулюйте властивості рівнобедреного трикутника.

11. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів трикутника (по одному при кожній його вершині)?

12. Як знайти периметр трикутника, якщо відомо середнє арифметичне довжин його сторін?

13. Чи може лише одна висота трикутника: **а)** міститися поза трикутником; **б)** збігатися зі стороною трикутника?

14. Чи може трикутник мати два: **а)** тупих кути; **б)** прямих кути; **в)** гострих кути? Відповідь обґрунтуйте.

15. Чи можуть два зовнішніх кути трикутника бути: **а)** гострими; **б)** прямими; **в)** тупими? Відповідь обґрунтуйте.

16. Чи може зовнішній кут трикутника дорівнювати сумі двох зовнішніх кутів при інших вершинах цього трикутника?

17. Чи може кут при основі рівнобедреного трикутника бути: **а)** тупим; **б)** прямим? Відповідь обґрунтуйте.

18. Чи може зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника бути: **а)** гострим; **б)** тупим; **в)** прямим? Відповідь обґрунтуйте.

19. Чи може зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника бути: **а)** гострим; **б)** прямим; **в)** тупим? Чому?

20. Доведіть, використовуючи теорему про суму кутів трикутника, що з даної точки можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної прямої.

21*. У трикутнику ABC бісектриси перетинаються в точці I. Чи може кут B дорівнювати куту AIC?

22*. Доведіть, що з точки перетину бісектрис трикутника будь-яку з його сторін видно під тупим кутом.

23*. Доведіть, що з точки перетину висот трикутника будь-яку з його сторін видно під кутом, що дорівнює сумі кутів трикутника, вершини яких є кінцями цієї сторони.

24*. Чи може у гострокутному трикутнику медіана дорівнювати половині сторони, до якої її проведено? А в тупокутному? Чому?

Додаткові задачі до § 13–16

292. Один з кутів трикутника на 48° більший, ніж другий, і на 12° більший, ніж третій. Знайдіть кути трикутника.

293. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Знайдіть кути трикутника.

294. Кут A рівнобедреного трикутника ABC дорівнює 104°. Знайдіть кут між бісектрисою кута B і стороною AC.

295. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника перетинає його бічну сторону під кутом, який дорівнює куту при основі трикутника. Знайдіть кути трикутника.

296. Кут, який утворює бісектриса прямого кута прямокутного трикутника з його гіпотенузою, дорівнює одному з гострих кутів трикутника. Знайдіть кути цього трикутника.

297. Відомо, що кут між висотами трикутника дорівнює 84°. Знайдіть той кут трикутника, до сторін якого ці висоти проведено. Розгляньте два випадки.

298. У трикутнику ABC $\angle A = 45°$, $\angle B = 63°$. Знайдіть кут між висотою і бісектрисою цього трикутника, проведеними з вершини C.

299. У прямокутному трикутнику один з гострих кутів у 4 рази більший, ніж кут між бісектрисою і висотою, проведеними з вершини прямого кута. Знайдіть гострі кути трикутника.

300. Точка H – точка перетину висот трикутника ABC, у якому $AB = BC$, $\angle AHC = 140°$. Знайдіть кути трикутника.

301. Прямі, на яких лежать бісектриси зовнішніх кутів трикутника ABC, попарно перетинаються в точках O_1, O_2 і O_3. Доведіть, що $\triangle O_1O_2O_3$ гострокутний. Знайдіть його кути, якщо відомо кути трикутника ABC.

Готуємося до тематичного оцінювання № 4

ВАРІАНТ 1

У завданні 1 наведено п'ять тверджень, серед яких може бути КІЛЬКА правильних. Оберіть усі правильні, на вашу думку, твердження і вкажіть літери, якими їх позначено.

1. (4 б.) Укажіть правильне твердження.

А. Зовнішній кут трикутника не може бути гострим.

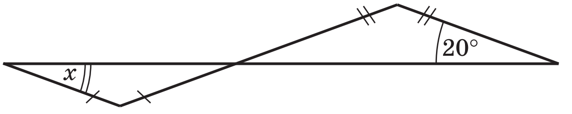
Б. Якщо в трикутнику два кути між собою рівні, то вони – гострі.

В. Якщо в трикутнику один із зовнішніх кутів прямий, то трикутник – прямокутний.

Г. Зовнішній кут трикутника завжди більший за внутрішній, несуміжний з ним.

До завдань 2–4 записати тільки відповідь.

2. **(1 б.)** За малюнком 86 знайдіть градусну міру кута x.



Мал. 86

3. **(1 б.)** Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 34 см, а основа на 4 см більша за бічну сторону.

4. **(1 б.)** Один з кутів трикутника дорівнює 60°, а градусні міри двох інших відносяться як 1 : 4. Знайдіть градусні міри невідомих кутів трикутника.

До завдання 5 наведено п'ять відповідей, з яких тільки ОДНА є правильною. Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь і запишіть у відповіді літеру, якою її позначено.

5. **(2 б.)** Визначте вид трикутника ABC, якщо $\angle A + 2\angle C = 90°$.

А	Б	В	Г	Д
прямокутний	тупокутний	гострокутний	такого трикутника не існує	рівнобедрений

До завдання 6 запишіть розв'язання (з виділенням логічних кроків).

6. **(3 б.)** У трикутнику ABC $\angle A = 62°$, $\angle B = 78°$. Знайдіть кут між бісектрисами цих кутів.

ВАРІАНТ 2

У завданні 1 наведено п'ять тверджень, серед яких може бути КІЛЬКА правильних. Оберіть усі правильні, на вашу думку, твердження і вкажіть літери, якими їх позначено.

1. (2 б.) Укажіть правильне твердження.

А. Трикутник може мати два гострих зовнішніх кути.

Б. Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника не може бути гострим.

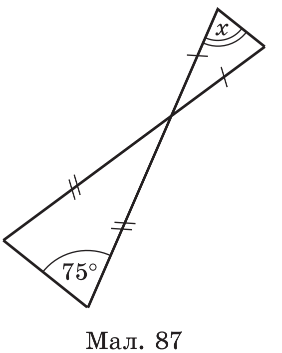
В. Сума кутів трикутника може дорівнювати 90°.

Г. Зовнішній кут трикутника завжди дорівнює сумі двох внутрішніх кутів трикутника, несуміжних з ним.

До завдань 2–4 записати тільки відповідь.

2. (1 б.) За малюнком 87 знайдіть градусну міру кута x.

3. (2 б.) Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см, а основа на 5 см менша від бічної сторони.



Мал. 87

4. (2 б.) Один з кутів трикутника дорівнює 40°, а градусні міри двох інших відносяться як 3 : 1. Знайдіть градусні міри невідомих кутів трикутника.

До завдання 5 наведено п'ять відповідей, з яких тільки ОДНА є правильною. Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь і запишіть у відповіді літеру, якою її позначено.

5. (2 б.) Визначте вид трикутника ABC, якщо $\angle B + 2\angle A = 70°$.

А	Б	В	Г	Д
тупокутний	прямокутний	гострокутний	такого трикутника не існує	рівнобедрений

До завдання 6 запишіть розв'язання (з виділенням логічних кроків).

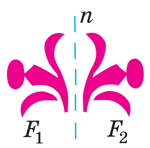
6. (3 б.) У трикутнику ABC $\angle A = 54°$, $\angle B = 47°$. Знайдіть кут між висотами, проведеними з вершин A і B.

§ 17. Рівність фігур. Перша ознака рівності трикутників

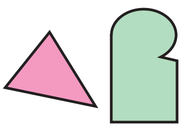
Ви вже ознайомилися з поняттям рівності відрізків, кутів, трикутників (§ 4). У цьому параграфі будемо вивчати рівність трикутників та ознаки, за якими можна встановити їх рівність.

Спочатку узагальнимо поняття рівності геометричних фігур.

Уявіть, що дві фігури виготовили з паперу. Тоді можна спробувати накласти одну з них на другу. Якщо їх можна сумістити накладанням, тобто після накладання фігури збігатимуться, то вони між собою рівні. (Так міркував і давньогрецький математик Евклід). На малюнку 88 зображено дві рівні між собою фігури F_1 і F_2, їх можна сумістити, наприклад згинанням малюнка по прямій n. Фігури, які бачимо на малюнку 89, не можна сумістити накладанням, отже, вони між собою не рівні.



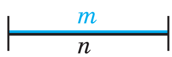
Мал. 88



Мал. 89

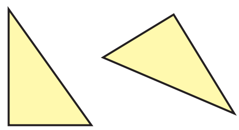
Дві геометричні фігури називають між собою рівними, якщо їх можна сумістити накладанням.

Рівність двох фігур записують з використанням знака «=». Наприклад, $AB = CP$, $\angle A = \angle B$, $\triangle ABC = \triangle KMP$. На малюнку 88 маємо $F_1 = F_2$.



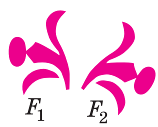
$m = n$

рівні відрізки



рівні трикутники

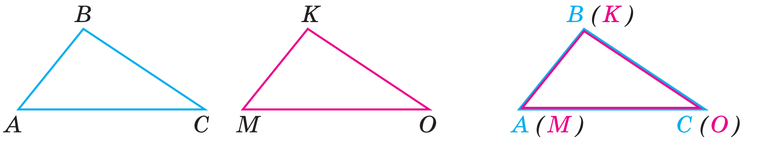
Дві геометричні фігури рівні, якщо їх можна сумістити накладанням



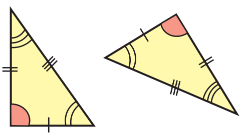
$F_1 = F_2$

Зрозуміло, якщо дві фігури дорівнюють третій, то всі вони рівні між собою (бо всі три можна сумістити).

Підкреслимо, якщо дві фігури між собою рівні, то при накладанні суміщаються всі точки цих фігур. На малюнку 90 ми бачимо два рівних між собою трикутники ABC і MKO. При накладанні сумістилися і сторони, і вершини, і кути цих трикутників.



Мал. 90



рівні трикутники

У рівних трикутників відповідні лінійні елементи між собою рівні.

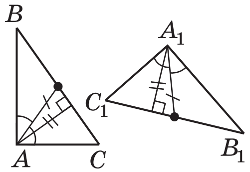
У рівних трикутниках проти рівних між собою кутів лежать рівні між собою сторони, а проти рівних між собою сторін – рівні між собою кути. Якщо $\triangle ABC = \triangle MKO$ (мал. 90), то $AB = MK$, $BC = KO$, $AC = MO$, $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle K$, $\angle C = \angle O$. Рівні між собою елементи рівних трикутників називають *відповідними* елементами. У даному випадку відповідними є сторони AB і MK, BC і KO, AC і MO, а відповідними кутами $\angle A$ і $\angle M$, $\angle B$ і $\angle K$, $\angle C$ і $\angle O$.

У рівних трикутників відповідні сторони між собою рівні і відповідні кути між собою рівні.

Зрозуміло, якщо два трикутники сумістилися, то сумістилися й середини відповідних сторін, точки, що містяться на бісектрисах відповідних кутів, тощо.

Тобто *в рівних трикутниках рівними між собою будуть відповідні медіани, бісектриси, висоти*, відрізки, що сполучають середини відповідних сторін та інші *відповідні лінійні елементи*.

У рівних трикутників відповідні лінійні елементи між собою рівні.

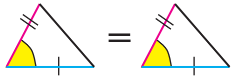


$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$

За аксіомою (А-VIII, с. 23), завжди існує трикутник, рівний даному, тобто який можна сумістити із заданим трикутником.

ПЕРША ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ – ***за двома сторонами і кутом між ними.***

ОЗНАКА I

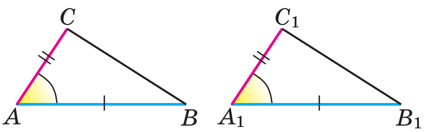


– за двома сторонами й кутом між ними.

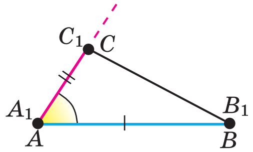
Т е о р е м а 1. **Якщо дві сторони і кут, що лежить між ними, одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту, що лежить між ними, другого трикутника, то такі трикутники рівні.**

Д о в е д е н н я

Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ – два трикутники, у яких: $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ (мал. 91). Доведемо, що ці трикутники між собою рівні.



Мал. 91



Мал. 92

1) Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб рівні відрізки AB і A_1B_1 сумістилися (мал. 92).

2) Унаслідок рівності кутів A і A_1 сумістяться промені AC і A_1C_1 (за аксіомою про відкладання кутів).

3) На променях AC і A_1C_1 від їх спільного початку ($A \equiv A_1$) відкладено рівні відрізки AC і A_1C_1, тому точки C і C_1 збігатимуться (за аксіомою про відкладання відрізків).

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ сумістилися, отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

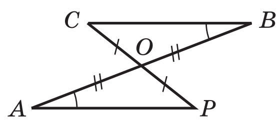
Теорему доведено.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Два відрізки AB і CP точкою їх перетину O діляться навпіл. Доведіть, що прямі AP і CB паралельні.

Дано: $AO = OB$, $OP = OC$.

Довести: $AP \parallel CB$.



1) $\angle AOP = \angle BOC$ (як вертикальні);

$AO = OB$, $OP = OC$ (за умовою).

Тоді $\triangle AOP = \triangle BOC$ (за першою ознакою).

2) $\angle PAO = \angle CBO$ (як відповідні кути рівних трикутників).

3) Маємо рівність внутрішніх різносторонніх кутів при прямих AP і CB та січній PC. Тоді $AP \parallel CB$ (за ознакою паралельності прямих).

Щ. в. д.

Практична робота 19

1. Виріжте з паперу довільний трикутник ABC. Обведіть його в зошиті. Назвіть отриманий трикутник. Чи дорівнює він трикутнику ABC? Чому?

2. Укажіть відповідні вершини, кути, сторони цих трикутників.

3. Проведіть з пари відповідних вершин цих трикутників висоти, бісектриси та медіани. Виміряйте їх та порівняйте отримані довжини. Зробіть висновок і запишіть його.

4. Позначте довільні точки M і K відповідно на сторонах AB і CB трикутника ABC. Знайдіть відповідні до M і K точки на сторонах другого трикутника. Порівняйте відстань між цими точками з довжиною відрізка MK. Сформулюйте висновок.

Практична робота 20

1. Побудуйте за допомогою лінійки і транспортира трикутник ABC, у якого $AB = 5$ см, $BC = 3$ см і $\angle B = 45°$, а на окремому аркуші трикутник $A_1B_1C_1$, у якого $A_1B_1 = 5$ см, $B_1C_1 = 3$ см і $\angle B_1 = 45°$.

2. Виміряйте решту сторін і кутів цих трикутників. Виріжте трикутник $A_1B_1C_1$ і накладіть на трикутник ABC. Чи сумістилися вони? Зробіть висновок. За якою ознакою ваш висновок можна було б передбачити?

Задачі та вправи

302°. Два трикутники рівні. Визначте вид одного із цих трикутників, якщо другий: **а)** тупокутний; **б)** прямокутний; **в)** рівнобедрений; **г)** рівносторонній.

303°. Трикутники ABC і MKP між собою рівні (відповідні вершини: A і M, B і K, C і P). Висота AT трикутника ABC дорівнює 10 см, а медіана ME трикутника MKP – 12 см. Знайдіть відповідні даним висоту та медіану трикутників. З яких вершин їх проведено?

304°. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ між собою рівні. До того ж при накладанні суміщаються точки: A і A_1, B і B_1, C і C_1. Укажіть відповідні сторони та відповідні кути цих трикутників.

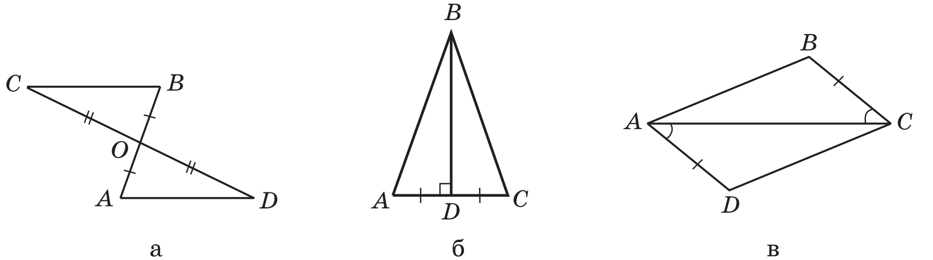
305°. Трикутники ABC і PMT між собою рівні. До того ж при накладанні суміщаються точки: A і P, B і M, C і T. Укажіть відповідні сторони та відповідні кути цих трикутників.

306. У рівних між собою трикутниках ABC і CPA сторони AB і PC – відповідні. Доведіть, що: **а)** $AB \parallel PC$; **б)** $AP \parallel BC$.

307. Чи є правильним твердження: «Якщо $\triangle ABC = \triangle CPA$, то прямі AB і PC паралельні»? Відповідь проілюструйте малюнком та обґрунтуйте.

308°. Чи рівні між собою трикутники ABC і MNK, якщо: **а)** $AB = MN$, $BC = NK$, $\angle B = \angle N$; **б)** $AB = 5$ см, $MN = 5$ см, $BC = 7$ см, $NK = 7$ см, $\angle B = \angle N = 48°$?

309°. Знайдіть на малюнку 93 пари рівних між собою трикутників.



Мал. 93

310°. Доведіть рівність двох прямокутних трикутників за двома катетами.

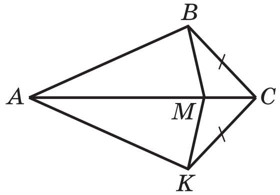
311*. Доведіть рівність двох рівнобедрених трикутників за бічною стороною і кутом при: **а°)** вершині; **б)** основі.

312*. На малюнку 94 $\triangle ABC = \triangle AKC$. Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle AMK$.

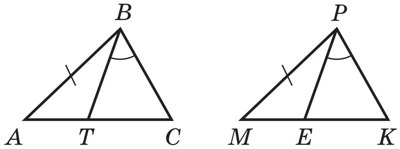
313. На малюнку 95 $\triangle ABC = \triangle MPK$. Доведіть, що $\triangle TBC = \triangle EPK$.

314. У трикутнику ABC $\angle A = \angle B$. На сторонах AC і BC відповідно відкладено відрізки AK і BM, причому $AK = BM$. Чи виконується рівність $\triangle ABK = \triangle BAM$? Чому?

315. Відрізки AB і AC між собою рівні, AM – бісектриса кута BAC, O – довільна точка на ній. Доведіть, що $\triangle ABO = \triangle ACO$.



Мал. 94



Мал. 95

316. Через середину O відрізка AB перпендикулярно до нього проведено пряму, M – довільна точка на ній. Доведіть, що $\triangle AOM = \triangle BOM$.

317*. Відомо, що трикутники ABC і ABD рівнобедрені зі спільною основою AB, причому точки C і D лежать у різних півплощинах відносно прямої AB. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle BCD$, та з'ясуйте, як розташовані ці трикутники відносно прямої CD.

318*. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O і діляться нею навпіл. $AC = 5$ см.

1) Знайдіть BD.

2) Доведіть, що прямі AC і BD між собою паралельні.

§ 18. Друга і третя ознаки рівності трикутників

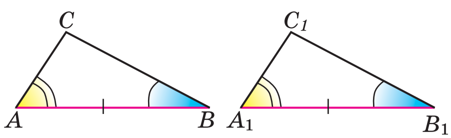
ДРУГА ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ – ***за стороною і прилеглими до неї кутами.***

Теорема 1. **Якщо сторона і два прилеглих до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні і двом прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.**

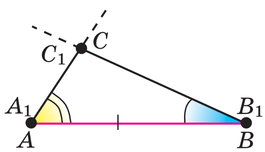
Доведення

Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ – два трикутники, у яких:

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (мал. 96). Доведемо, що ці трикутники між собою рівні.



Мал. 96



Мал. 97

1) Накладемо трикутник ABC на трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб відрізки AB і A_1B_1 сумістилися (мал. 97).

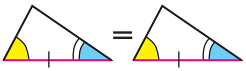
2) Унаслідок рівності кутів A і A_1 та B і B_1 сумістяться промені AC і A_1C_1 та промені BC і B_1C_1.

3) Оскільки дві прямі можуть перетнутися лише в одній точці, точки C і C_1 збігатимуться.

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ сумістилися, отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Теорему доведено.

ОЗНАКА II



– за стороною і прилеглими до неї кутами.

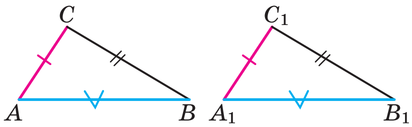
Скористаємося теоремою про властивості рівнобедреного трикутника для доведення третьої ознаки рівності трикутників.

ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ – ***за трьома сторонами.***

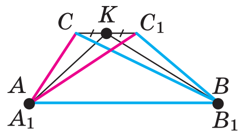
Т е о р е м а 2. **Якщо три сторони одного трикутника відповідно дорівнюють трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.**

Д о в е д е н н я

Нехай ABC і $A_1B_1C_1$ – два трикутники, у яких $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$, $CB = C_1B_1$ (мал. 98). Доведемо, що ці трикутники рівні, від супротивного.



Мал. 98



Мал. 99

ОЗНАКА III

– за трьома сторонами.

1) Накладемо трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ так, щоб рівні відрізки AB і A_1B_1 сумістилися, а точки C і C_1 містилися в одній півплощині відносно прямої AB.

2) Припустимо, що точки C і C_1 не збігатимуться (мал. 99). Тоді утвориться два рівнобедрених трикутники: $\triangle ACC_1$ $(AC = AC_1)$ і $\triangle BCC_1$ $(BC = BC_1)$.

3) Позначимо через K – середину відрізка CC_1. Тоді AK і BK – медіани рівнобедрених трикутників ACC_1 і BCC_1, тобто і їх висоти.

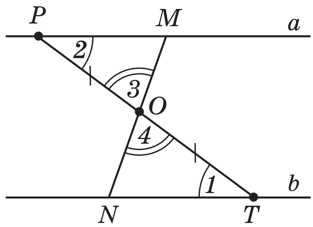
4) Отже, через точку K до прямої CC_1 проходить два перпендикуляри, чого бути не може.

Значить наше припущення є хибним, а тому точки C і C_1 збігаються.

Теорему доведено.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 1. Дві прямі MN і PT перетинають паралельні прямі a і b відповідно в точках M, P і T, N. Доведіть, якщо точка O перетину відрізків MN і PT ділить один з них навпіл, то і другий із цих відрізків ділиться точкою O навпіл.



Дано: $a \parallel b$, $PO = OT$.
Довести: $MO = ON$.

1) $a \parallel b$, PT – січна, тому $\angle 1 = \angle 2$ (як внутрішні різносторонні).

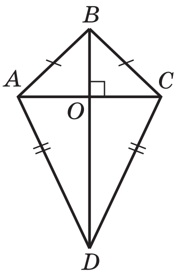
2) $\angle 3 = \angle 4$ (як вертикальні).

3) $PO = OT$, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4 \rightarrow \triangle POM = \triangle TON$ (за другою ознакою).

4) $MO = NO$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

Щ. в. д.

Приклад 2. Два рівнобедрених трикутники ABC і ADC мають спільну основу AC і містяться в різних півплощинах відносно AC. Доведіть, що $BD \perp AC$.



Дано: $AB = BC$, $AD = DC$.

Довести: $BD \perp AC$.

---

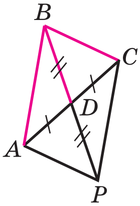
1) $AB = BC$, $AD = DC$, BD – спільна, тому $\triangle ABD = \triangle CBD$ (за третьою ознакою).

2) Проведемо у $\triangle ABD$ і $\triangle CBD$ висоти AO і CO_1. Тоді $BO = BO_1$ (як відповідні лінійні елементи рівних трикутників).

3) Значить точки O і O_1 збігаються, $O \in AC$ і $BD \perp AC$.

Щ. в. д.

0.3. Приклад 3. **Доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.**



Дано: $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $BD \equiv m_b = m_b' \equiv B'D'$.

Довести: $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

---

1) Продовжимо BD на $DP = BD$; $AD = DC$ (за умовою); $\angle ADP = \angle BDC$ (як вертикальні). Тоді $\triangle ADP = \triangle CDB$ (за першою ознакою) і $AP = BC$ (як відповідні сторони).

2) Аналогічно $A'P' = B'C'$. Тоді $\triangle ABP = \triangle A'B'P'$ (за третьою ознакою) і $AD = A'D'$ (як відповідні медіани рівних трикутників).

3) $AC = 2AD = 2A'D' = A'C'$. Тоді $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (за третьою ознакою).

Щ. в. д.

Практична робота 21

1. Побудуйте за допомогою лінійки і транспортира $\triangle ABC$, у якого $AB = 6$ см, $\angle A = 54°$ і $\angle B = 62°$, і $\triangle A_1B_1C_1$, у якого $A_1B_1 = 6$ см, $\angle A_1 = 54°$ і $\angle B_1 = 62°$. Виміряйте решту сторін і кутів цих трикутників.
2. Виріжте трикутник $A_1B_1C_1$ і накладіть його на трикутник ABC. Чи сумістилися вони? Зробіть висновок. За якою ознакою ваш висновок можна було б передбачити?

Практична робота 22

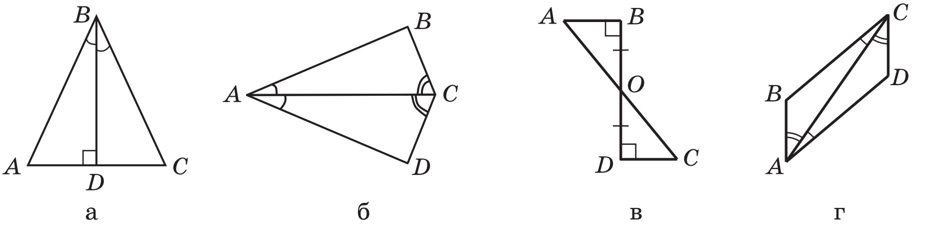
1. Побудуйте за допомогою лінійки та циркуля $\triangle ABC$, у якого $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AC = 5$ см, і $\triangle A_1B_1C_1$, у якого $A_1B_1 = 4$ см, $B_1C_1 = 5$ см і $A_1C_1 = 5$ см.
2. Виміряйте транспортиром кути цих трикутників. Виріжте трикутник $A_1B_1C_1$ і накладіть його на трикутник ABC. Чи сумістилися вони? Зробіть висновок. За якою ознакою ваш висновок можна було б передбачити?

Задачі та вправи

Друга ознака рівності трикутників

319°. Чи рівні трикутники ABC і MNK, якщо: **а)** $AB = MN$, $\angle B = \angle N$, $\angle A = \angle M$; **б)** $AB = MN$, $\angle B = 56°$, $\angle M = 62°$, $\angle A = 62°$, $\angle N = 56°$?

320. Знайдіть на малюнку 100 пари рівних трикутників.



Мал. 100

321. Доведіть рівність двох рівнобедрених трикутників за основою і кутом при: **а°)** основі; **б)** вершині.

322. Доведіть рівність двох прямокутних трикутників за катетом і гострим кутом: **а°)** прилеглим до даного катета; **б)** протилежним даному катету.

323. Доведіть, що якщо через довільну точку O бісектриси кута провести пряму, перпендикулярну до цієї бісектриси, то утвориться два рівних трикутники.

324. Доведіть, що якщо з довільної точки бісектриси кута провести перпендикуляри до сторін цього кута, то утвориться два рівних трикутники.

325. Точка K – середина основи рівнобедреного трикутника ABC ($AC = CB$). На сторонах AC і BC відповідно позначено точки E і P так, що $\angle EKA = \angle PKB$. Чи рівні трикутники AKE і BKP?

326. У чотирикутнику $ABCD$ протилежні сторони попарно паралельні. Доведіть, що: **а)** $\triangle ABC = \triangle CDA$; **б)** $\triangle ABD = \triangle CDB$.

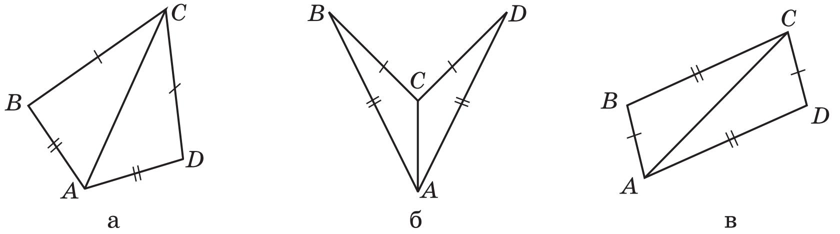
327. На рівних між собою сторонах AB і BC рівнобедреного трикутника ABC позначено відповідно точки T і P так, що $\angle TCA = \angle PAC$. Доведіть рівність трикутників PAC і TCA.

328*. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O. $AC = 5$ см. Знайдіть BD, якщо відомо, що $CO = OD$ і: **а)** $AC \parallel DB$; **б)** $\angle CAO = \angle DBO$.

Третя ознака рівності трикутників

329°. У трикутниках ABC і MNK: **а)** $AB = MN$, $AC = MK$, $BC = NK$; **б)** $AB = MN = 3$ см, $AC = MK = 4$ см, $BC = NK = 5$ см. Чи рівні між собою ці трикутники?

330. Знайдіть на малюнку 101 пари рівних між собою трикутників.



Мал. 101

331°. Доведіть рівність правильних трикутників за їх стороною.

332. Трикутники ABC і APC рівносторонні. Доведіть рівність трикутників: **а)** ABC і APC; **б)** ABP і CBP.

333. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за периметром і: **а)** основою; **б)** бічною стороною.

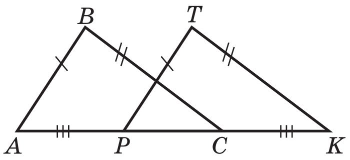
334. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників: **а)** за основою і бічною стороною; **б)** за бічною стороною і проведеною до неї медіаною.

335. На прямій позначено дві точки A і B, а в одній півплощині відносно цієї прямої точки C і D так, що $AB = CD$ і $AD = BC$. Чи рівні між собою трикутники ABC і ADC?

336. Трикутники ABC і APC рівнобедрені ($AB = BC$, $AP = PC$). Доведіть рівність трикутників ABP і CBP, якщо точки B і P містяться: **а)** у різних півплощинах відносно AC; **б)** в одній півплощині відносно AC.

337*. У чотирикутнику протилежні сторони рівні. Доведіть: **а)** рівність протилежних кутів цього чотирикутника; **б)** паралельність протилежних сторін цього чотирикутника.

338*. На малюнку 102 $AB = PT$, $BC = TK$, $AP = CK$. Доведіть, що $BC \parallel TK$.

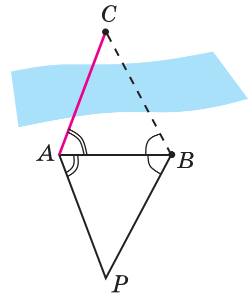


Мал. 102

Ознаки рівності трикутників

339. Доведіть, спираючись на ознаки рівності трикутників, що в рівних трикутниках будуть рівними проведені з відповідних вершин: **а)** медіани; **б)** бісектриси; **в)** висоти.

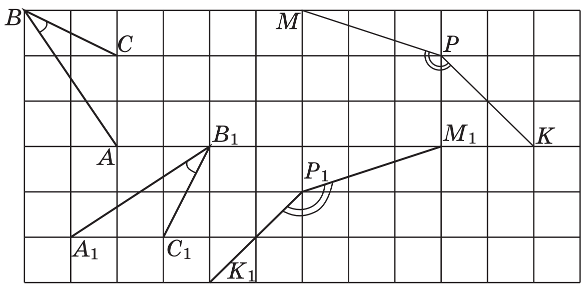
340°. За малюнком 103 поясніть, як можна знайти відстань AC до недоступної точки, скориставшись ознакою рівності трикутників. Чи можна аналогічним способом визначити ширину перешкоди?



Мал. 103

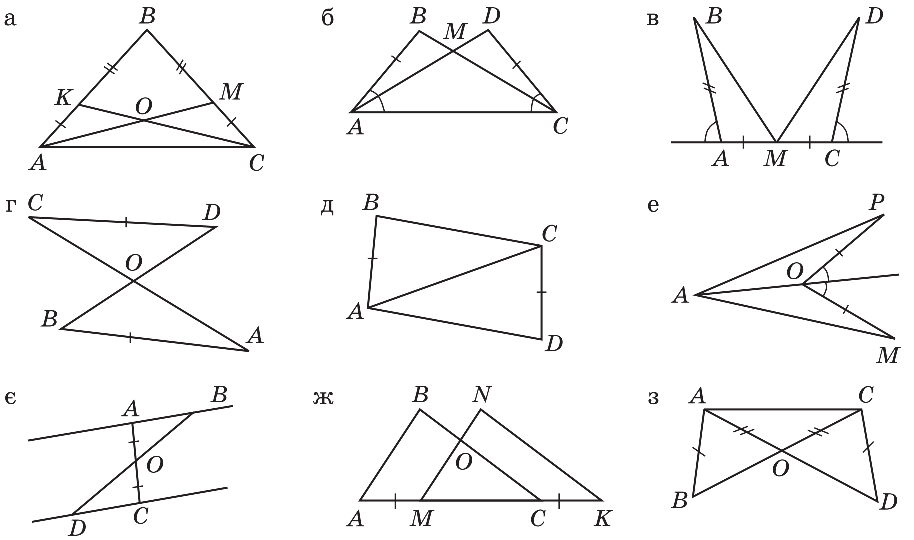
341. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику між собою рівні: **а)** медіани, проведені до бічних сторін; **б)** бісектриси, проведені до бічних сторін; **в)** висоти, проведені до бічних сторін.

342. Чи рівні кути (мал. 104): **а)** ABC і $A_1B_1C_1$; **б)** MPK і $M_1P_1K_1$?



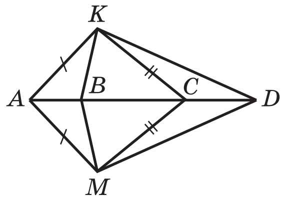
Мал. 104

343. Знайдіть на малюнку 105 (а–з) рівні між собою трикутники.



Мал. 105

344*. Доведіть за малюнком 106 рівність трикутників BKD і BMD.



Мал. 106

345*. Доведіть рівність трикутників за стороною, медіаною, проведеною до неї, і кутом, що утворює медіана із цією стороною.

346*. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї із цих сторін.

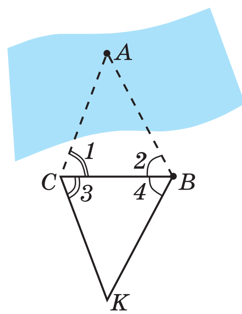
347*. Доведіть рівність трикутників за кутом, бісектрисою цього кута і кутом, що бісектриса утворює зі стороною, яку перетинає.

348*. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

349.** Доведіть рівність трикутників за стороною і медіанами, проведеними до двох інших сторін.

Для допитливих

Фалес Мілетський довів теорему про рівність двох трикутників за стороною і двома прилеглими кутами і знайшов, як можна виміряти відстань від конкретного місця на березі до корабля, який знаходиться в морі. Щоб визначити відстань від точки B (на березі) до точки A (у морі), треба провести на березі довільну пряму BC і виміряти $\angle BCA$ і $\angle ABC$ ($\angle 1$ і $\angle 2$ відповідно). Потім відкласти на березі від CB з вершинами у точках C і B кути, що дорівнюють виміряним кутам: $\angle 3 = \angle 1$, $\angle 4 = \angle 2$, і продовжити сторони цих кутів до перетину в точці K. Тоді $\triangle CBK = \triangle CBA$. (Чому?) Довжина відрізка BK – *шукана* відстань між точками B і A.



§ 19. Ознаки рівності прямокутних трикутників

Пригадаємо, що сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°. Тобто з рівності одного з гострих кутів двох прямокутних трикутників випливає рівність і другого з гострих кутів цих трикутників.

З першої та другої ознак рівності трикутників (з врахуванням наведеного зауваження) безпосередньо випливають ознаки рівності прямокутних трикутників за двома катетами, катетом і гострим кутом, гіпотенузою і гострим кутом. Тобто маємо такі ознаки.

Два прямокутних трикутники між собою рівні, якщо:

1) катети одного з них дорівнюють катетам другого;

2) катет і гострий кут одного з них дорівнює катету і гострому куту другого;

3) гіпотенуза і гострий кут одного з них дорівнює гіпотенузі і гострому куту другого.

Доведемо ще одну ознаку рівності прямокутних трикутників.

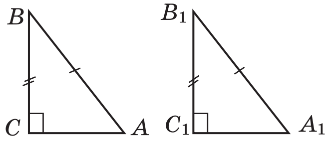
Ознака рівності прямокутних трикутників ***за гіпотенузою і катетом.***

ТП **Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють гіпотенузі і катету другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.**

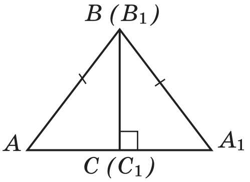
Доведення

Нехай дано $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ (мал. 107).

Доведемо, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.



Мал. 107



Мал. 108

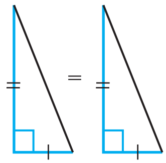
1) Прикладемо трикутники один до одного так, як показано на малюнку 108. (Катети BC і B_1C_1 можна сумістити, бо за умовою вони рівні.)

2) $\angle C = \angle C_1 = 90°$, тоді лінія ACA_1 – пряма.

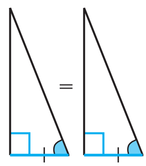
3) $AB = A_1B_1$. Тоді $\triangle ABA_1$ – рівнобедрений, отже, $\angle A = \angle A_1$.

4) Маємо: $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, тоді $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ (за катетом і гострим кутом).

Теорему доведено.



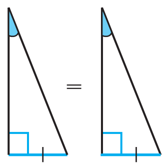
– за двома катетами.

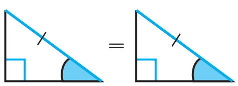


↑

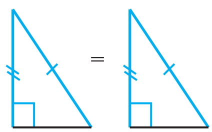
– за катетом і гострим кутом.

↓





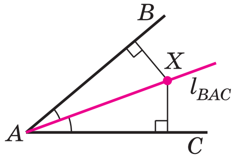
– за гіпотенузою і гострим кутом.



– за гіпотенузою і катетом.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

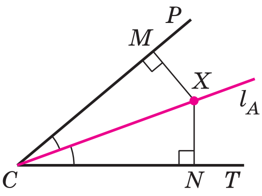
$d(X; AB)$ – відстань від точки X до прямої AB.



$X \in l_{BAC}$
$\downarrow\uparrow$
$d(X; AB) =$
$= d(X; AC)$

0.3 П р и к л а д 1. **Доведіть, що будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.**

Дано: $X \in l_A$.
Довести: $d(X; CP) = d(X; CT)$.



1) З довільної точки $X \in l_A$ проведемо перпендикуляри XM і XN до сторін кута C. Доведемо, що $XM = XN$.

2) $\triangle CMX = \triangle CNX$ (за гіпотенузою і гострим кутом). Тоді $XM = XN$ (як відповідні катети), тобто $d(X; CP) = d(X; CT)$. *Щ. в. д.*

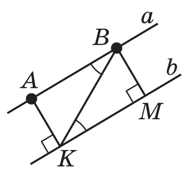
0.3 П р и к л а д 2. **Точка кута, рівновіддалена від його сторін, лежить на бісектрисі цього кута.**

Дано: $d(X; CP) = d(X; CT)$.
Довести: $X \in l_A$.

Прямокутні трикутники CMX і CNX (мал. до прикладу 1) рівні за гіпотенузою і катетом. Тоді $\angle MCX = \angle NCX$ (як відповідні кути рівних трикутників). Отже, CX – бісектриса кута C. *Щ. в. д.*

0.3 П р и к л а д 3. **Доведіть, що відстані від будь-яких двох точок прямої до паралельної їй прямої рівні.**

Дано: $a \parallel b$, $A \in a$, $B \in a$.
Довести: $d(A; b) = d(B; b)$.



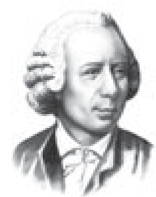
Відстані від точок A і B до прямої b – це довжини перпендикулярів AK і BM, проведених із цих точок до прямої b.

1) $a \parallel b$, $AK \perp b$, тоді $AK \perp a$.

2) $\triangle ABK$ і $\triangle MKB$ – прямокутні ($\angle BAK = 90° = \angle BMK$), KB – спільна, $\angle ABK = \angle BKM$ (як внутрішні різносторонні для $a \parallel b$ і січної BK). Тоді $\triangle ABK = \triangle MKB$ за гіпотенузою і гострим кутом, тому $AK = BM$ (як відповідні сторони рівних трикутників). *Щ. в. д.*

З а у в а ж е н н я. Відстань від довільної точки однієї з двох паралельних прямих до другої називають *відстанню між цими паралельними прямими* (у прикладі 3 $AK = d(a; b) = BM$).

Для допитливих



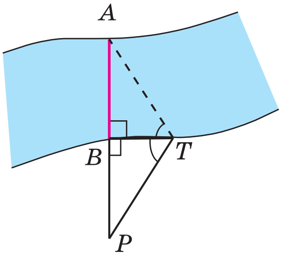
Враховуючи винятковий вплив Ейлера на науку, Паризька академія наук, усупереч статуту і з дозволу уряду Франції, обрала його своїм 9-м членом (повинно бути 8). Цей знак поваги до генія був виявлений у 1775 р., коли Ейлеру було 68 років.

Ейлеру належить 886 досліджень з найважливіших питань математики.

Задачі та вправи

350°. Чи рівні між собою прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (кути C і C_1 – прямі), якщо: **а)** $AC = A_1C_1$ і $BC = B_1C_1$; **б)** $AC = A_1C_1$ і $BA = B_1A_1$; **в)** $AC = A_1C_1$ і $\angle B = \angle B_1$?

351°. За малюнком 109 поясніть, як можна знайти ширину перешкоди, користуючись ознакою рівності прямокутних трикутників.



Мал. 109

352°. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до бічних сторін, рівні між собою.

353. Точка M лежить на прямій, що ділить відрізок навпіл, і рівновіддалена від кінців відрізка. Доведіть, що дана пряма перпендикулярна до даного відрізка.

354. Точка M лежить на прямій, перпендикулярній до відрізка AB, і рівновіддалена від точок A і B. Доведіть, що пряма ділить відрізок AB навпіл.

355. Доведіть, що довільна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.

О.З. **356. 1) Доведіть, що довільна точка всередині кута, рівновіддалена від його сторін, належить бісектрисі цього кута. 2) Доведіть обернене твердження.**

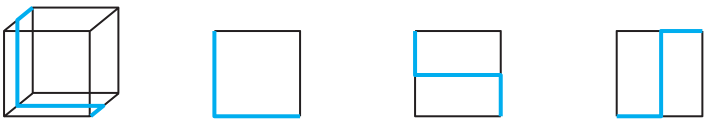
О.З. **357. Пряма *a* перетинає відрізок *AB* в його середині і перпендикулярна до нього. Доведіть, що відстані від довільної точки прямої *a* до точок *A* і *B* рівні між собою.**

358. Перпендикулярно до бісектриси кута A проведено пряму, яка перетинає сторони даного кута в точках B і C. Доведіть, що $AB = BC$.

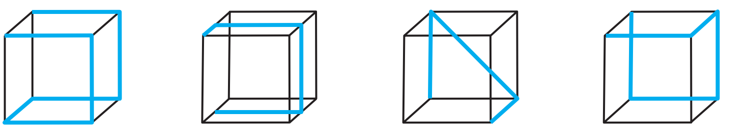
359. Доведіть, що відстані від будь-яких двох точок прямої до паралельної їй прямої рівні між собою.

Для допитливих

На поверхні скляного куба кольоровою фарбою намальовано ламану (малюнок а) загальний вигляд). Дивлячись на куб спереду, зверху і зліва, ми бачимо цю ламану й можемо зобразити три її проекції (б)–г)):



а) загальний вигляд б) вигляд спереду в) вигляд зверху г) вигляд зліва



А Б В Г

А тепер розгляньте уважно ламані, намальовані на прозорих кубах **А–Г**, і накресліть для кожного з них три проекції (вигляд спереду, зверху і зліва).

360. Доведіть рівність гострокутних трикутників за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони.

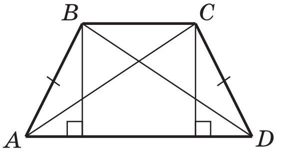
361. Доведіть рівність трикутників за висотою і кутами, які вона утворює з прилеглими сторонами.

362*. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і: **а)** медіаною, проведеною до іншого катета; **б)** бісектрисою, що перетинає інший катет; **в)** висотою, проведеною до гіпотенузи; **г)** бісектрисою прямого кута.

363*. Нехай AM і BN – медіани рівнобедреного трикутника, проведені до бічних сторін, K – точка їх перетину. Доведіть, що відстані від точки K до бічних сторін трикутника рівні між собою.

364*. Через вершину A прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) провели пряму AN так, що $AN \parallel CB$. Бісектриса зовнішнього кута при вершині C перетинає AN у точці P. Доведіть, що: **а)** точки A і P рівновіддалені від прямої CB; **б)** відрізки AP і CB рівні.

365*. На малюнку 110 $BC \parallel AD$, $AB = CD$. Доведіть, що $\triangle ABD = \triangle DCA$.



Мал. 110

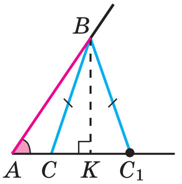
Для допитливих

ЧЕТВЕРТА ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

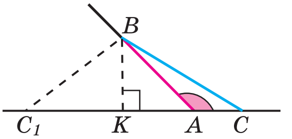
Якщо дві сторони і кут не між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту не між ними другого трикутника і при цьому цей кут тупий або відомо, що обидва трикутники гострокутні (тупокутні), то такі трикутники рівні.

Нехай дано кут A і відрізки c та a.

Припустимо, що $\angle A$ – гострий (мал. 111). Відкладемо на одній з його сторін відрізок $AB = c$ і проведемо дугу радіуса a із центром у точці B, яка перетинає другу сторону кута A в точках C і C_1. Одержали два не рівних між собою трикутники ABC і ABC_1, у яких дві сторони дорівнюють відрізкам a і c, а кут A – спільний. При цьому $\triangle ABC$ – гострокутний, а $\triangle ABC_1$ – тупокутний. Проведемо до прямої AC перпендикуляр BK, він міститься всередині кута A.



Мал. 111



Мал. 112

Якщо заданий кут A – тупий (мал. 112), то перпендикуляр BK розміститься зовні кута A. Маємо єдиний трикутник, що відповідає вказаній умові.

Єдиний трикутник відповідатиме даній умові й тоді, якщо ми до неї додамо твердження: «Обидва трикутники – гострокутні» або «Обидва трикутники – тупокутні».

Ми довели твердження, яке називають *четвертою ознакою рівності трикутників*.

366*. У трикутнику ABC провели бісектрису BK і перпендикуляри KT і KP до сторін AB і BC. Доведіть, що $BK \perp PT$.

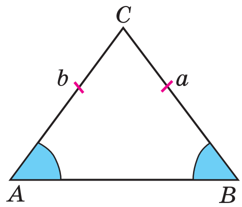
367.** Чи є рівними два трикутники, якщо основа й проведені до неї висота і медіана одного трикутника відповідно дорівнюють основі і проведеним до неї висоті й медіані другого трикутника?

368.** На бічних сторонах рівнобедреного трикутника зовні побудовано два рівносторонніх трикутники. Доведіть, що відрізки, які сполучають вершини рівносторонніх трикутників, відмінні від вершин даного трикутника, із серединою основи рівнобедреного трикутника, рівні між собою.

369.** Доведіть рівність двох трикутників за двома сторонами і кутом між сторонами, до яких ці висоти проведено.

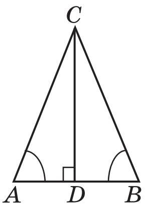
§ 20. Ознаки рівнобедреного трикутника

У цьому параграфі ми з'ясуємо, як серед трикутників розпізнати рівнобедрені. (Пригадайте, чим ознака відрізняється від означення.)



$\angle A = \angle B \to a = b$

Т е о р е м а 1. ***Якщо у трикутнику два кути між собою рівні, то він рівнобедрений.***



Мал. 113

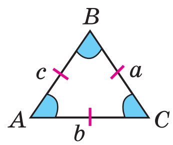
Д о в е д е н н я

Нехай у трикутнику ABC $\angle A = \angle B$ (мал. 113). Доведемо, що $AC = CB$.

1) Проведемо висоту CD і розглянемо трикутники ADC і BDC: CD – спільна, $\angle A = \angle B$. Тоді ці трикутники рівні за гострим кутом і катетом.

2) $\triangle ADC = \triangle BDC$, тому $AC = CB$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

Теорему доведено.



$\angle A = \angle B = \angle C$

$\downarrow$

$a = b = c$

Н а с л і д о к. **Якщо в трикутнику всі кути рівні, то він рівносторонній.**

Т е о р е м а 2. **Якщо медіана трикутника збігається з його висотою, то він рівнобедрений.**

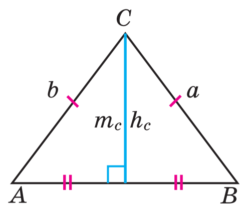
Д о в е д е н н я

Нехай у трикутнику ABC $m_c \equiv h_c$ (мал. 114). Доведемо, що $AC = CB$.

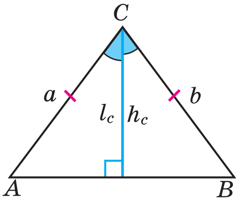
1) Розглянемо прямокутні трикутники ADC і BDC: $AD = DB$, CD – спільна. Отже, трикутники рівні за двома катетами.

2) $\triangle ADC = \triangle BDC$, тому $AC = CB$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

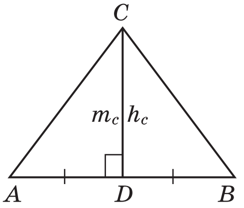
Теорему доведено.



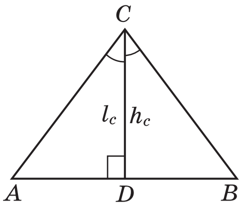
$m_c \equiv h_c \to a = b$



$l_c \equiv h_c \to a = b$



Мал. 114



Мал. 115

Т е о р е м а 3. **Якщо бісектриса трикутника збігається з його висотою, то він рівнобедрений.**

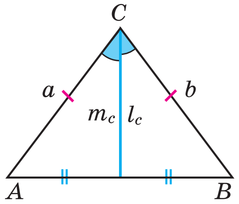
Д о в е д е н н я

Нехай у трикутнику ABC $l_c \equiv h_c$ (мал. 115). Доведемо, що $AC = CB$.

1) Розглянемо прямокутні трикутники ADC і BDC: $\angle ACD = \angle DCB$, CD – спільна. Тоді вони рівні за катетом і гострим кутом.

2) $\triangle ADC = \triangle BDC$, тому $AC = CB$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

Теорему доведено.



$m_c \equiv l_c \to a = b$

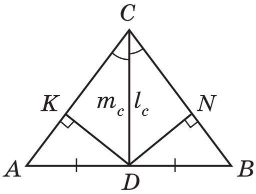
Т е о р е м а 4. **Якщо медіана трикутника збігається з його бісектрисою, то він рівнобедрений.**

Д о в е д е н н я

Нехай у трикутнику ABC $m_c \equiv l_c$ (мал. 116). Доведемо, що $AC = CB$.

1) Проведемо $DK \perp AC$ і $DN \perp CB$.

2) Розглянемо прямокутні трикутники CDK і CDN: $\angle ACD = \angle DCB$, CD – спільна. Ці трикутники рівні за катетом і гострим кутом, тому $KD = DN$ (як відповідні сторони рівних трикутників).



Мал. 116

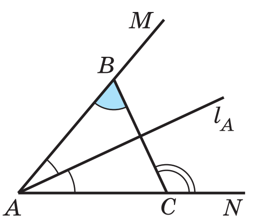
3) Розглянемо прямокутні трикутники ADK і BDN: $KD = DN$, $AD = DB$. Ці трикутники рівні за гіпотенузою і катетом, тому $\angle A = \angle B$ (як відповідні кути рівних трикутників).

4) $\angle A = \angle B$, тоді $AC = CB$ за теоремою 1 (ознакою рівнобедреного трикутника).

Теорему доведено.

ПРИКЛАДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 1. Пряма перетинає сторони кута MAN у точках B і C (мал. 117). Доведіть, що ця пряма перпендикулярна до бісектриси даного кута, якщо $\angle ABC = 50°$, а $\angle BCN = 130°$.



Мал. 117

Розв'язання

1) $\angle BCA$ і $\angle BCN$ суміжні, тоді $\angle BCA = 180° - \angle BCN = 50°$.

2) $\angle ABC = \angle BCN = 50°$, тому $\triangle ABC$ – рівнобедрений (за ознакою), у якого $AB = AC$.

3) l_A містить бісектрису кута при вершині рівнобедреного трикутника з основою BC. Тоді $l_A \perp BC$.

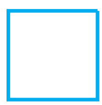
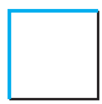
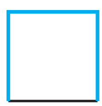
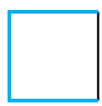
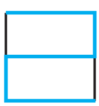
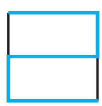
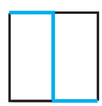
Щ. в. д.

Практична робота 23

1. Накресліть довільний відрізок AB і за допомогою транспортира від променів $[AB)$ і $[BA)$ відкладіть рівні кути з вершинами у точках A і B так, щоб їх сторони перетиналися. Виміряйте сторони трикутника, що утворився. Який трикутник отримали? Чому?
2. Накресліть довільний відрізок KF і знайдіть його середину (за допомогою масштабної лінійки або згинанням). Використовуючи косинець, проведіть пряму, перпендикулярну до відрізка в його середині. Сполучіть довільну точку X цієї прямої з кінцями відрізка. Виміряйте довжини сторін трикутника KFX. Який трикутник отримали? Чому?
3. Накресліть довільний кут D і побудуйте його бісектрису (за допомогою транспортира або згинанням). Використовуючи косинець, проведіть пряму, перпендикулярну до бісектриси кута у довільній її точці X. Позначте точки M і N перетину прямої зі сторонами кута. Виміряйте сторони трикутника DMN. Який трикутник отримали? Чому?
4. Накресліть довільний кут P і знайдіть його бісектрису (за допомогою транспортира або згинанням). З довільної точки бісектриси, як із центра кола, проведіть за допомогою циркуля дугу, що перетинає сторони кута. Позначте отримані точки перетину як T і K. Виміряйте сторони трикутника PTK. Який трикутник отримали? Чому?

Для допитливих

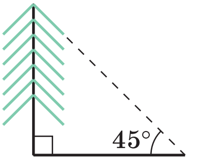
На скляних кубах кольоровою фарбою намальовано ламані. Дано проекції ламаних спереду, зверху та з лівого боку. Зобразіть загальний вигляд ламаної на кубі для кожного з випадків а)–в).

	Вигляд спереду	Вигляд зверху	Вигляд зліва
а)			
б)			
в)			

Задачі та вправи

370°. Чи є $\triangle ABC$ рівнобедреним, якщо: **а)** $\angle A = 56°$, $\angle B = 56°$; **б)** $\angle A = 63°$, $\angle C = 73°$; **в)** $\angle A = 48°$, $\angle B = 84°$?

371°. За малюнком 118 поясніть, як можна виміряти висоту дерева, користуючись ознакою рівнобедреного трикутника. Чи можна у такий самий спосіб виміряти ширину перешкоди або відстань до недоступного об'єкта?



Мал. 118

372°. Чи є рівнобедреним трикутник ABC, якщо його медіана AM: **а)** ділить кут A навпіл; **б)** перпендикулярна до сторони BC?

373. У рівнобедреному трикутнику з основою AC бісектриси AA_1 і CC_1 перетинаються в точці I. Доведіть, що: **а°)** трикутник AIC – рівнобедрений; **б)** $AC_1 = CA_1$.

374. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює 36°. Доведіть, що бісектриса кута при основі ділить цей трикутник на два рівнобедрених трикутники.

375. Пряма, паралельна основі рівнобедреного трикутника ABC, перетинає бічні сторони AB і AC в точках M і N відповідно. Доведіть, що трикутник MAN – рівнобедрений.

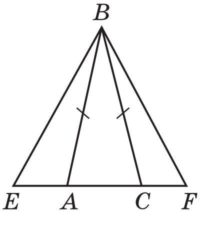
376. Доведіть, що середини сторін: **а)** рівнобедреного трикутника є вершинами рівнобедреного трикутника; **б)** рівностороннього трикутника є вершинами рівностороннього трикутника.

377. Доведіть такі ознаки рівнобедреного трикутника.

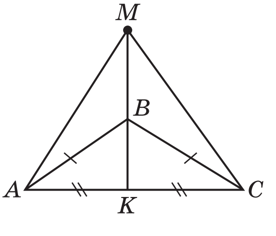
1) Якщо в трикутнику дві висоти між собою рівні, то він рівнобедрений.
2) Якщо бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то цей трикутник рівнобедрений.
3) Якщо в трикутника один із зовнішніх кутів удвічі більший за один з кутів, не суміжних з ним, то такий трикутник рівнобедрений.
4*) Сформулюйте й доведіть ще кілька ознак рівнобедреного трикутника. (У пошуках під час доведення не забувайте про улюблений спосіб Евкліда – доведення від супротивного.)

378. На продовженні основи AC рівнобедреного трикутника ABC взяли точки E і F так, щоб $AE = CF$. Доведіть, що $\triangle BEF$ – рівнобедрений (мал. 119).

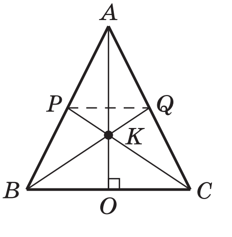
379. На продовженні за точку B медіани BK рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) позначили довільну точку M. Доведіть, що $\triangle AMC$ – рівнобедрений (мал. 120).



Мал. 119



Мал. 120

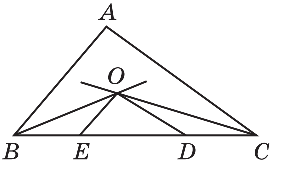


Мал. 121

380. AM – бісектриса трикутника ABC. Через точку M проведено пряму, паралельну стороні AC, яка перетинає сторону AB в точці E. Доведіть, що $\triangle AME$ – рівнобедрений.

381*. У рівнобедреному трикутнику ABC на висоті AO, що проведена до основи, вибрали точку K, через яку провели відрізки BQ і CP так, як показано на малюнку 121. Доведіть, що трикутник APQ – рівнобедрений.

382*. На малюнку 122 BO і CO – бісектриси кутів B і C трикутника ABC, $OE \parallel AB$ і $OD \parallel AC$. Доведіть, що периметр трикутника EDO дорівнює довжині відрізка BC.



Мал. 122

383*. У рівнобедреному трикутнику ABC на бічних сторонах AB і AC позначили відповідно точки P і Q так, що $AP = AQ$. Відрізки CP і BQ перетинаються в точці O. Доведіть, що: **а)** $\triangle BOC$ – рівнобедрений; **б)** пряма OA проходить через середину основи BC перпендикулярно до неї.

384*. Через точку перетину бісектрис BB_1 і CC_1 трикутника ABC проведено пряму, паралельну стороні BC. Пряма перетинає сторони AB і AC в точках M і N відповідно. Доведіть, що $MN = BM + CN$.

385.** Чи може шмат фанери мати форму такого рівнобедреного трикутника, щоб його можна було розрізати на дві трикутні частини з такими самими кутами, як і у початкового трикутника?

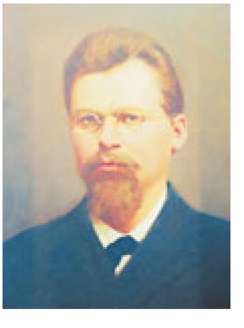
386.** Чи можуть дві бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинатися під прямим кутом?

387.** Чи може бісектриса внутрішнього кута трикутника ділити навпіл іншу бісектрису цього трикутника?

388.** У трикутнику ABC бісектриса AL і медіана CP перетинаються в точці K. Чи може точка K бути рівновіддаленою від точок A, C і P?

389.** Учитель математики розрізав трикутний торт на 6 частин уздовж трьох його бісектрис. Собі він узяв шматочок у формі прямокутного трикутника. Чи мав цей торт форму рівнобедреного трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

Для допитливих



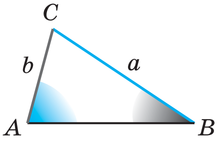
Вороний Георгій Феодосійович (1868–1908) належить до когорти найвідоміших українських математиків минулого. За своє коротке життя він устиг надрукувати лише шість великих праць та шість невеликих заміток. Але всі його праці, багаті новими й глибокими ідеями, мали величезний вплив на розвиток математичної науки в галузі теорії чисел.

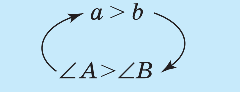
Народився Георгій Вороний у селі Журавка, що на Полтавщині. Закінчив Петербурзький університет, працював професором Варшавського університету й Варшавського політехнічного інституту. За заповітом поховали його в рідному селі.

§ 21. Нерівності трикутника

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ І КУТАМИ ТРИКУТНИКА

Т е о р е м а 1. **У трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут.**





Д о в е д е н н я

Нехай у трикутнику ABC $BC > AB$ (мал. 123). Доведемо, що $\angle A > \angle C$.

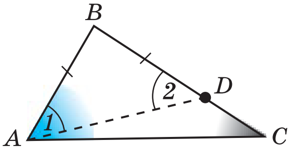
На стороні BC відкладемо відрізок $BD = AB$.

1) У трикутнику ABD $BD = AB$, тому $\angle 1 = \angle 2$.

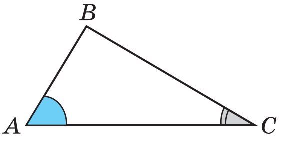
2) Для $\triangle ADC$ кут 2 – зовнішній, тому $\angle 2 > \angle C$.

3) $\angle 1$ є частиною кута A, тому $\angle A > \angle 1 = \angle 2 > \angle C$.

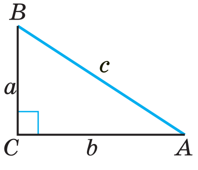
Теорему доведено.



Мал. 123



Мал. 124



$\angle C = 90°$

$\downarrow$

$c > a$, $c > b$

Т е о р е м а 2 (обернена до теореми 1). **У трикутнику проти більшого кута лежить більша сторона.**

Д о в е д е н н я

Нехай у трикутнику ABC $\angle A > \angle C$ (мал. 124). Доведемо, що $BC > AB$ від супротивного.

1) Припустимо, що $BC < AB$. Тоді $\angle A < \angle B$, що суперечить умові.

2) Припустимо, що $BC = AB$. Тоді $\triangle ABC$ – рівнобедрений, тобто $\angle A = \angle B$, що також суперечить умові.

Отже, наше припущення хибне, тому $BC > AB$.

Теорему доведено.

Н а с л і д о к. **Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за його катет.**

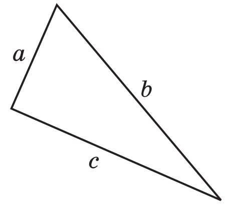
Для допитливих

Англійцю *Рінду* 1858 року трапився стародавній єгипетський папірус, який приблизно за півтори тисячі років до нашої ери написав придворний переписувач фараона Раауса Ахмес. Ширина папіруса – 33 см, а довжина – 544 см. Він склеєний з листя очерету й містить 80 записаних на ньому задач. Серед арифметичних задач є і задачі на знаходження площі земельних ділянок, що мають форму квадрата, прямокутника, трикутника тощо. Папірус зберігається в Британському музеї. Інколи його називають *папірусом Рінда*.

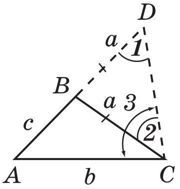
Оскільки гострий кут менший від прямого, а гіпотенуза лежить проти прямого кута, то вона більша за катет.

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ ТРИКУТНИКА

Т Теорема. **У трикутнику кожна зі сторін менша від суми двох інших і більша за їх різницю.**



Доведення



Мал. 125

Нехай дано $\triangle ABC$ (мал. 125).

Доведемо, що:

$$c - a < b < c + a,$$
$$a - b < c < a + b,$$
$$b - c < a < b + c.$$

$c - a < b < c + a$
$a - b < c < a + b$
$b - c < a < b + c$

Продовжимо сторону AB на відрізок $BD = BC = a$.

1) $\triangle DBC$ – рівнобедрений, тоді $\angle 1 = \angle 2$.

2) Кут 3 містить кут 2, тоді $\angle 3 > \angle 2 = \angle 1$.

3) У трикутнику ACD $\angle 1 < \angle 3$, тоді

$$b < AD = c + a.$$

Аналогічно маємо: $c < a + b$, $a < b + c$.

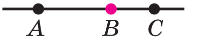
4) Віднімемо від обох частин отриманих нерівностей відповідно c, a і b, матимемо*:

$$b - c < a,\ c - a < b,\ a - b < c.$$

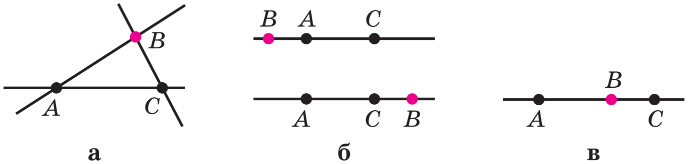
Теорему доведено.

Н Наслідок *(ознака розташування трьох точок на одній прямій).* ***Якщо для трьох точок A, B, C виконується рівність AB + BC = AC, то ці точки лежать на одній прямій і точка B міститься між точками A і C.***

$AB + BC = AC$
↓
A, B, C лежать на одній прямій



Доведіть це твердження самостійно. Розгляньте всі можливі випадки взаємного розташування трьох точок на площині (мал. 126).



Мал. 126

* Якщо обидві частини правильної нерівності зменшити (або збільшити) на одне й те саме число, то вона залишиться правильною. Переконайтеся в цьому на прикладі порівняння двох купок цукерок (камінців тощо).

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

0.3. Приклад 1. **Доведіть, що у прямокутному трикутнику проти меншого з катетів лежить кут, менший від 45°, а проти більшого – більший за 45°.**

Сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°. Тоді за теоремою про співвідношення між сторонами й кутами трикутника твердження є істинним.

Приклад 2. Доведіть, що сторона трикутника менша від його півпериметра.

Доведення

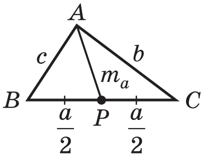
Нехай маємо $\triangle ABC$. Доведемо, що $a < p$, де p – півпериметр.

1) $a < c + b$ (за нерівністю трикутника).

2) Додамо до обох частин цієї нерівності довжину сторони a: $2a < a + b + c$. Тоді $a < (a + b + c) : 2 = p$.

Щ. в. д.

Приклад 3. Доведіть, що медіана трикутника менша від його півпериметра.



Дано: $AP \equiv m_a$.

Довести: $AP < p$.

---

1) З $\triangle BAP$: $m_a < a : 2 + c$.

2) З $\triangle CAP$: $m_a < a : 2 + b$.

3) $2m_a < (c + a : 2) + (b + a : 2) = a + b + c = 2p$.

Тоді $m_a < p$. *Щ. в. д.*

Практична робота 24

1. Накресліть довільний трикутник. Позначте його вершини та сторони. Виміряйте його сторони (масштабною лінійкою) і кути (транспортиром). Запишіть отримані значення довжин сторін у порядку зростання, під ними – мір кутів у порядку зростання. Проаналізуйте отримані послідовності й запишіть висновок.
2. Порівняйте суму довжин кожної з пар сторін з довжиною третьої сторони. Запишіть висновок.
3. Порівняйте різницю довжин кожної з пар сторін з довжиною третьої сторони. Запишіть висновок.
4. Накресліть (за допомогою косинця) довільний прямокутний трикутник. Виміряйте його сторони. Порівняйте довжину гіпотенузи з довжиною кожного з катетів. Запишіть висновок.

Задачі та вправи

390°. Яка зі сторін $\triangle ABC$ є найбільшою, а яка – найменшою, якщо: **а)** $\angle A = 35°$, $\angle B = 47°$; **б)** $\angle A = 83°$, $\angle B = 52°$; **в)** $\angle A = 61°$, $\angle B = 53°$? Відповідь поясніть.

391°. Який з кутів $\triangle ABC$ є найбільшим, а який – найменшим, якщо: **а)** $AB = 4{,}6$ см, $BC = 5{,}6$ см, $AC = 7{,}3$ см; **б)** $AB = 24{,}3$ см, $BC = 15{,}2$ см, $AC = 37{,}7$ см; **в)** $AB = 41$ см, $BC = 53$ см, $AC = 47$ см? Відповідь поясніть.

392. Порівняйте кути трикутника ABC, якщо: **а°)** $AB > BC > AC$; **б°)** $AB > BC = AC$; **в)** $AB = BC > AC$; **г)** Чи може $\angle A$ бути тупим у кожному із цих випадків?

393. Порівняйте сторони трикутника KLM, якщо: **а°)** $\angle K > \angle L > \angle M$; **б)** $\angle K = \angle M < \angle L$.

394. Який з кутів трикутника ABC буде найменшим, якщо $AB = BC$ і $AC > BC$?

395°. Доведіть, що точки A, B і C лежать на одній прямій, якщо: **а)** $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 2$ см; **б)** $AB = 7$ см, $BC = 40$ см, $AC = 47$ см; **в)** $AB = 45$ см, $BC = 36$ см, $AC = 9$ см.

396°. Чи можуть сторони трикутника дорівнювати: **а)** 1 см, 2 см і 3 см; **б)** 2 см, 3 см і 4 см; **в)** 3 см, 7 см і 11 см; **г)** 4 см, 5 см і 9 см; **д)** 38 см, 55 см, 82 см? Відповідь поясніть.

397. У рівнобедреному трикутнику довжини двох сторін дорівнюють 25 см і 11 см. Яка з них є основою трикутника?

398. Знайдіть третю сторону рівнобедреного трикутника, якщо дві інші дорівнюють: **а)** 8 см і 2 см; **б)** 10 см і 5 см; **в)** 8 см і 10 см.

399. У трикутнику дві сторони дорівнюють 5 см і 6 см. Чи може третя сторона бути: **а)** 4 см; **б)** 10 см; **в)** 6 см; **г)** 15 см? У яких межах знаходиться довжина третьої сторони?

400. Довжини двох сторін трикутника дорівнюють a і b ($a > b$). У яких межах може змінюватися: **а)** довжина третьої сторони; б*) периметр трикутника?

401*. У трикутнику ABC довжина однієї сторони дорівнює 1,8 см, другої – 0,6 см. Знайдіть довжину третьої сторони, якщо відомо, що вона є натуральним числом.

402*. Доведіть, якщо у трикутнику ABC зовнішній кут при вершині A більший за зовнішній кут при вершині B, то $BC < AC$.

403*. У гострокутному трикутнику висота більша за сторону, до якої її проведено. Доведіть, що: **а)** ця висота утворює з двома іншими сторонами трикутника кути, менші за 45°; **б)** кожний з кутів трикутника при інших його вершинах більший за 45°.

404.** Доведіть, що висота трикутника менша від його півпериметра. Розгляньте випадки гострокутного й тупокутного трикутників.

405.** Доведіть, що медіана BM трикутника ABC менша від півсуми двох його сторін BA і BC.

406.** Доведіть, що з медіан будь-якого трикутника можна побудувати трикутник (тобто що існує трикутник, довжини сторін якого дорівнюють цим медіанам).

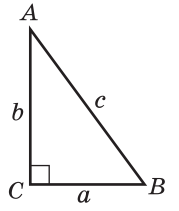
§ 22. Властивості прямокутних трикутників

У цьому параграфі ми узагальнимо вивчене про прямокутний трикутник і дещо поглибимо знання про нього.

Майже вся наука геометрія із часів Евкліда базується на теоремах про трикутники. У свою чергу, серед трикутників чільне місце належить прямокутним трикутникам. За багато років до нашої ери єгиптяни знали про прямокутний трикутник з довжинами сторін 3, 4 і 5 од. Вони використовували ці знання для побудови прямих кутів (див. с. 5). Тому такий трикутник сьогодні називають *єгипетським*.

Пригадаємо факти про прямокутний трикутник, доведені раніше.

$\angle C = 90°$



- $\angle A + \angle B = 90°$
- $c > a$, $c > b$
- $a = b$ $\Updownarrow$ $\angle A = \angle B = 45°$
- $a > b$ $\Updownarrow$ $\angle A > 45°$, $\angle B < 45°$

ВЛАСТИВОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

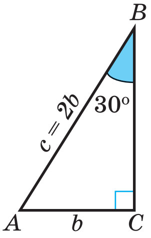
- **Сума двох гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°** (с. 76).
- **Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за його катет** (с. 108).
- **У прямокутному трикутнику проти більшого з катетів лежить кут, більший за 45°, а проти меншого — менший від 45°** (с. 109).

До зазначених властивостей прямокутного трикутника треба ще додати вже відомі нам ознаки рівності прямокутних трикутників.

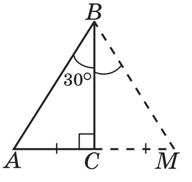
Доведемо ще дві властивості прямокутних трикутників.

- **У прямокутному трикутнику з кутом 30° катет, що лежить проти цього кута, дорівнює половині гіпотенузи.**

$\angle C = 90°$



$\angle B = 30°$ $\Updownarrow$ $b = \frac{1}{2}c$



Мал. 127

Доведення

Нехай в трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$ (мал. 127).

Доведемо, що $AC = \frac{1}{2}AB$.

Продовжимо катет AC і відкладемо відрізок $CM = AC$.

1) У $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 90° - 30° = 60°$.

2) У трикутнику ABM висота BC є його медіаною. Тоді цей трикутник рівнобедрений і $\angle M = \angle A = 60°$, а $\angle ABC = \angle CBM = 30°$.

3) Кожний кут трикутника ABM дорівнює 60°, отже, він рівносторонній.

4) $AB = AM = 2AC$, тоді $AC = \frac{1}{2}AB$.

Теорему доведено.

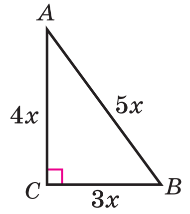
Зауваження. Нескладно довести твердження, обернене до доведеного.

- **Якщо у прямокутному трикутнику катет дорівнює половині гіпотенузи, то кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.**

Доведіть самостійно. Для цього виконайте додаткову побудову, як у попередньому доведенні.

ОЗНАКИ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

- **Якщо сторони трикутника відносяться як 3 : 4 : 5, то такий трикутник прямокутний, його називають єгипетським** (с. 5, 7).
- **Якщо медіана трикутника дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то такий трикутник – прямокутний** (с. 82).



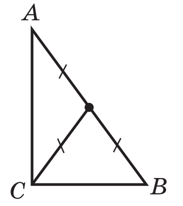
$a : b : c = 3 : 4 : 5$

$\downarrow$

$\angle C = 90°$

$\uparrow$

$m_c = \frac{1}{2}c$



ВЛАСТИВОСТІ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА І ПОХИЛИХ

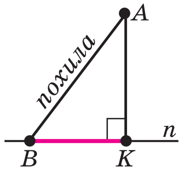
Похилою, проведеною з даної точки до даної прямої, називають відрізок, який сполучає дану точку з будь-якою точкою прямої і не є перпендикуляром до цієї прямої. Тоді:

– проекцію даної точки на дану пряму називають *основою перпендикуляра* (точка K на мал. 128);

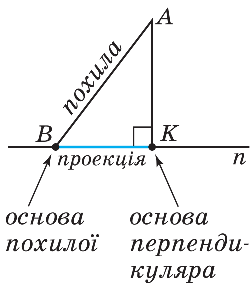
– спільну точку похилої і даної прямої – *основою похилої* (точка B на мал. 128);

– відрізок прямої, кінцями якого є основа перпендикуляра і основа похилої, – *проекцією похилої на пряму*.

На малюнку 128 BK – проекція похилої AB на пряму n. Скорочено це можна записати так: $BK \equiv \text{Пр}_n AB$.



Мал. 128



$BK \equiv \text{Пр}_n AB$

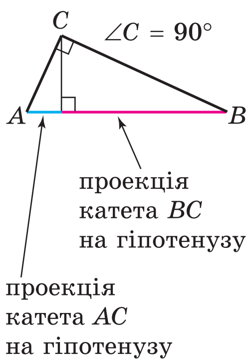
З а у в а ж е н н я. Якщо точка лежить на прямій, то її проекцією на цю пряму вважають саму цю точку.

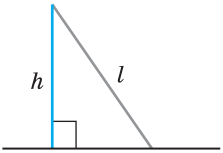
Безпосередньо з нерівності для сторін прямокутного трикутника та ознак рівності прямокутних трикутників випливають такі властивості перпендикуляра і похилих.

- **Довжина перпендикуляра, проведеного з точки до прямої, менша від довжини будь-якої похилої, проведеної з тієї самої точки до тієї самої прямої.**

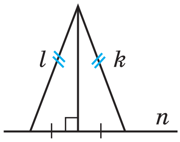
Зауважимо, що саме завдяки цій властивості довжину перпендикуляра, проведеного з точки до прямої, називають *відстанню від точки до прямої*.

- **Якщо проекції похилих, проведених з однієї точки до даної прямої, рівні, то рівні й самі похилі.**
- **Якщо похилі, проведені з однієї точки до прямої, рівні, то рівні і їх проекції на цю пряму.**
- **З двох похилих, проведених з однієї точки до прямої, більшою є та, що має більшу проекцію.**

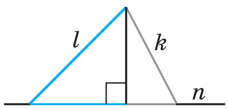




$h < l$

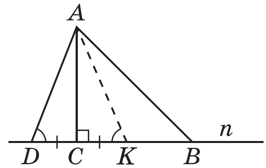


$l = k$
$\downarrow\uparrow$
$Пр_n l = Пр_n k$



$l > k$
$\downarrow\uparrow$
$Пр_n l > Пр_n k$

Нехай проекція BC похилої AB на пряму n більша за проекцію DC похилої AD на цю саму пряму (мал. 129).



Мал. 129

Відкладемо $CK = CD$ (мал. 129). $\triangle ADC = \triangle AKC$ за двома катетами. Тоді $AD = AK$.

У прямокутному трикутнику ACK $\angle AKC$ – гострий, тому суміжний з ним $\angle AKB$ – тупий.

У трикутнику AKB $\angle AKB$ – тупий. Тоді $\angle B$ – гострий, $\angle AKB > \angle B$. Отже, $AB > AK = AD$.

Правильним буде й обернене твердження.

- **З двох похилих, проведених з однієї точки до прямої, більша похила має більшу проекцію.**

Доведіть це самостійно (від супротивного).

Практична робота 25

1. Проведіть пряму AB і позначте дві точки C і D, які лежать відносно цієї прямої: **а)** в одній півплощині; **б)** у різних півплощинах. Побудуйте проекції цих точок на пряму AB. Укажіть проекцію відрізка CD на пряму AB.

2. Накресліть довільний трикутник ABC та проекції його сторін AB і AC на пряму BC. Коли сума довжин цих проекцій дорівнюватиме довжині сторони BC?

3. Накресліть такий трикутник ABC, щоб сума довжин проекцій сторін AB і AC на пряму BC була більшою за довжину сторони BC.

Задачі та вправи

407°. Знайдіть гострий кут прямокутного трикутника, якщо інший його гострий кут дорівнює: **а)** 30°; **б)** 60°; **в)** 45°; **г)** 20°; **д)** 72°.

408°. Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 6 м, 8 м і 10 м.
1) Знайдіть довжину гіпотенузи цього трикутника.
2) Укажіть довжину катета, який лежить проти кута, що більший за 45°.
3) Укажіть довжину катета, який лежить проти кута, що менший від 45°.
4) Чи може гострий кут цього трикутника дорівнювати 45°?

409°. Розв'яжіть попередню задачу для випадку, коли сторони прямокутного трикутника дорівнюють 15 см, 20 см і 25 см.

410°. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо: **а)** один з них на 20° менший від другого; **б)** один з них удвічі більший за другий.

411°. У прямокутному трикутнику ABC катет $AC = 4$ см, а $\angle B = 30°$. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

412°. У прямокутному трикутнику ABC гіпотенуза $AB = 12$ см, $\angle B = 30°$. Знайдіть довжину катета AC.

413. З точки A до прямої n проведено дві похилі AK і AM. Порівняйте довжини проекцій цих похилих на пряму n, якщо: **а°)** $AK = AM$; **б)** $AK > AM$; **в)** $AK < AM$.

414. Доведіть, що висота трикутника не більша: **а)** за медіану, проведену з тієї самої вершини; **б)** за бісектрису, проведену з тієї самої вершини.

415. У прямокутному трикутнику KML гіпотенуза KM дорівнює 34 см, а $\angle K = 60°$. Знайдіть довжину катета LK.

416. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) катет a більший за катет b. У яких межах міститься градусна міра: **а)** кута A; **б)** кута B?

417. Знайдіть кут, під яким видно гіпотенузу прямокутного трикутника з точки перетину його бісектрис.

418. 1) Чи може бісектриса гострого кута прямокутного трикутника перетинати сторону цього трикутника під прямим кутом? 2) А якщо це буде бісектриса прямого кута трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

419. Доведіть, що бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника перетинаються під кутом 45°.

420. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, утворює з одним із катетів кут 30°. Знайдіть: **а)** гострі кути цього трикутника; **б)** довжину гіпотенузи, якщо менший з катетів дорівнює 3 м.

421. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) висота BK удвічі менша за бічну сторону AB. Знайдіть кути трикутника ABC.

422. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°, а сума гіпотенузи і меншого катета – 48 см. Знайдіть ці сторони трикутника.

423. У рівнобедреному трикутнику ABC кут при вершині B дорівнює 120°. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини B, якщо бічна сторона $AB = 6$ см.

424. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику довжина відрізка, що сполучає будь-яку точку основи з його вершиною, не перевищує довжину бічної сторони.

425*. У рівнобедреному трикутнику один з кутів дорівнює 120°, а основа – 10 см. Знайдіть висоту, проведену до бічної сторони.

426*. З точки A до прямої a проведено дві похилі AB і AC. Відомо, що $AB > AC$. Порівняйте кути, що утворюють ці похилі з прямою a.

О.З. **427*. Доведіть, що в прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.** (Застосуйте метод від супротивного.)

428*. Нехай K – довільна точка на висоті BD трикутника ABC. Доведіть, що $AK < AB$.

429.** Гіпотенуза прямокутного трикутника в чотири рази більша за висоту, проведену до неї. Знайдіть гострі кути трикутника. (Вказівка: проведіть медіану до гіпотенузи трикутника.)

430.** Знайдіть кути трикутника ABC, у якому $AB = BC$, а висота AH удвічі коротша від бісектриси AK.

Запитання для повторення до § 17–22

1. Сформулюйте означення рівності двох трикутників. Поясніть відмінність між поняттями «ознака» й «означення».
2. Сформулюйте три ознаки рівності трикутників.
3. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.
4. Доведіть, що довільна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.
5. Доведіть, що якщо довільна точка всередині кута рівновіддалена від його сторін, то вона лежить на бісектрисі цього кута.
6. Доведіть, що довільна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від його кінців.
7. Доведіть, що якщо довільна точка рівновіддалена від кінців відрізка, то вона лежить на серединному перпендикулярі до цього відрізка.
8. Сформулюйте для рівнобедреного трикутника: **а)** властивості; **б)** ознаки.
9. Поясніть, у чому відмінність між поняттями «ознаки» і «властивості».
10. Доведіть способом від супротивного ознаки рівнобедреного трикутника.
11. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику між собою рівні: **а)** висоти, які проведено до бічних сторін; **б)** медіани, які проведено до бічних сторін; **в)** бісектриси кутів при основі.
12. Які властивості прямокутних трикутників ви знаєте?
13. Чи знаєте ви якесь твердження, яке можна назвати ознакою прямокутного трикутника?
14. Які нерівності трикутника вам відомі?
15. Доведіть, що висота трикутника не більша за медіану і бісектрису цього трикутника, які виходять з тієї самої вершини.
16. Доведіть, що відрізок, який сполучає вершину трикутника з довільною точкою протилежної їй сторони, не більший за хоча б одну з його сторін.
17. Доведіть, що в прямокутному трикутнику з кутом $30°$ катет, що лежить проти цього кута, дорівнює половині гіпотенузи.
18. Доведіть твердження, обернене до попереднього.
19. Чи можуть обидва гострих кути прямокутного трикутника бути: **а)** меншими від $45°$; **б)** більшими за $45°$? Чому?
20. Порівняйте довжини катетів прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо: **а)** $\angle A = 45°$; **б)** $\angle A > 45°$; **в)** $\angle A < 45°$.

21*. Чи можуть рівні між собою похилі мати не рівні між собою проекції на одну й ту саму пряму? Якщо так, то наведіть приклад.

22*. Чи завжди є правильним твердження: якщо проекції похилих між собою рівні, то і похилі між собою рівні? Наведіть контрприклад.

23*. Запишіть через міри гострих кутів прямокутного трикутника міри: **а)** кутів між висотою, проведеною до гіпотенузи, і сторонами цього трикутника; **б)** кута між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута; **в)** кута між висотою і медіаною, проведеними з вершини прямого кута.

Додаткові задачі до § 17–22

431. Визначте вид трикутника ABC, якщо $\angle A + 2\angle B = 180°$.

432. Рівнобедрені трикутники ABC і APC мають спільну основу і лежать в одній півплощині відносно прямої AC. Доведіть рівність кутів APB і CPB, якщо: **а)** $AB > AP$; **б)** $AB < AP$.

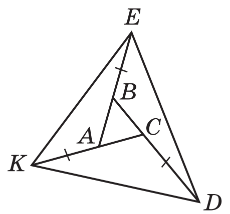
433. Кут між висотою і бісектрисою, що проведено з вершини прямого кута прямокутного трикутника, дорівнює 10°. Знайдіть кути цього трикутника.

434. Через вершину C трикутника ABC паралельно бісектрисі AA_1 проведено пряму, яка перетинає пряму AB в точці D. Доведіть, що $AC = AD$.

435. Доведіть рівність трикутників за стороною, прилеглим кутом і бісектрисою цього кута.

436. Чи може сума двох сторін трикутника дорівнювати його півпериметру?

437. Сторони рівностороннього трикутника ABC продовжено так, що $AK = BE = CD$ (мал. 130). Доведіть, що трикутник KED – рівносторонній.



Мал. 130

438. На кожній стороні правильного трикутника взято по точці. Сторони трикутника з вершинами в цих точках перпендикулярні до сторін заданого трикутника. У якому відношенні кожна із цих точок ділить сторону заданого трикутника?

439. Чи можуть дві висоти трикутника, перетинаючися, поділити одна одну навпіл?

440. Чи можуть висота і бісектриса трикутника, перетинаючись, поділити одна одну навпіл?

441. Чи може бісектриса внутрішнього кута трикутника ділити навпіл висоту цього трикутника?

442. Чи може бісектриса внутрішнього кута трикутника ділити навпіл медіану цього трикутника?

443. У трикутнику ABC кут A дорівнює 30°, а медіана BM дорівнює висоті CH. Знайдіть кути B і C.

444. У трикутнику ABC кут A – тупий, а перпендикуляри до сторін AB і CA, які виходять з точки A, ділять сторону BC на три рівні частини. Знайдіть кути трикутника ABC.

445. Доведіть, що сума всіх медіан трикутника більша за його периметр.

Для допитливих

Геометрія Евкліда – це чудо думки, логічна система, висновки якої з такою точністю випливають один з одного, що жодний з них не був підданий якомусь сумніву.

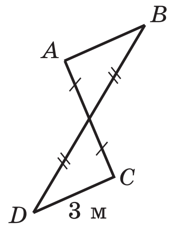
А. Ейнштейн,
фізик-теоретик, лауреат Нобелівської премії з фізики

Готуємося до тематичного оцінювання № 5

ВАРІАНТ 1

До завдання 1 запишіть тільки відповідь.

1. (1 б.) Знайдіть довжину відрізка AB (мал. 131).



Мал. 131

До завдання 2 наведено п'ять відповідей, з яких тільки ОДНА є правильною. Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь і запишіть літеру, якою її позначено.

2. (2 б). Визначте вид трикутника ABC, якщо $\angle A + 2\angle C = 180°$.

А	Б	В	Г	Д
гостро-кутний	тупокутний	прямо-кутний	рівнобе-дрений	рівносто-ронній

У завданні 3 наведено п'ять тверджень, серед яких може бути КІЛЬКА правильних. Оберіть усі правильні, на вашу думку, твердження і вкажіть літери, якими їх позначено.

3. (4 б.) Укажіть правильні твердження.

1) У прямокутному трикутнику катет, прилеглий до кута 30°, удвічі більший за гіпотенузу.

2) Якщо кожний зовнішній кут трикутника вдвічі більший за внутрішній, суміжний з ним, то такий трикутник рівносторонній.

3) Якщо бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то цей трикутник рівнобедрений.

4) Відношення довжин сторін трикутника не може дорівнювати 1 : 1 : 2.

5) Якщо у трикутнику провели всі висоти й медіани і з'ясувалося, що таких відрізків рівно п'ять, то такий трикутник – рівносторонній.

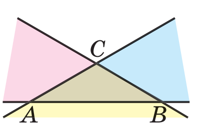
До завдань 4 і 5 запишіть розв'язання (з виділенням логічних кроків).

4. (2 б.) Доведіть рівність двох прямокутних трикутників за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.

5. (3 б.) У рівносторонньому трикутнику ABC проведено його бісектриси AP, BT і CK. Доведіть, що трикутник PTK – рівносторонній.

Для допитливих

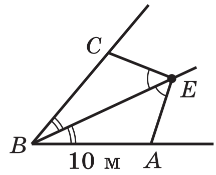
Означення трикутника можна сформулювати ще й так. Якщо A, B, C – точки, що не лежать на одній прямій, то трикутником ABC називається частина площини, яка належить одночасно кутам BAC, ABC і ACB.



ВАРІАНТ 2

До завдання 1 запишіть тільки відповідь.

1. (1 б.) Знайдіть довжину відрізка CB (мал. 132).



Мал. 132

До завдання 2 наведено п'ять відповідей, з яких тільки ОДНА є правильною. Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь і запишіть літеру, якою її позначено.

2. (2 б.) Визначте вид трикутника ABC, якщо $\angle A = 180° - 2\angle B$.

А	Б	В	Г	Д
гостро-кутний	тупокутний	прямо-кутний	рівнобед-рений	рівносто-ронній

У завданні 3 наведено п'ять тверджень, серед яких може бути КІЛЬКА правильних. Оберіть усі правильні, на вашу думку, твердження і вкажіть літери, якими їх позначено.

3. (4 б.). Укажіть правильні твердження.

1) Якщо кут у трикутнику дорівнює 30°, то одна зі сторін трикутника вдвічі менша за одну з двох інших.

2) Якщо в трикутнику один із зовнішніх кутів удвічі більший за кут трикутника, не суміжний з ним, то такий трикутник рівнобедрений.

3) У трикутнику відношення сторін може дорівнювати 3 : 3 : 5.

4) Коли у трикутнику провели всі бісектриси й медіани і таких відрізків виявилося шість, то такий трикутник – рівнобедрений.

5) Якщо бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів при одній вершині трикутника взаємно перпендикулярні, то цей трикутник – рівнобедрений.

До завдань 4 і 5 запишіть розв'язання (з виділенням логічних кроків).

4. (2 б.) Доведіть рівність двох прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до другого катета.

5. (3 б.) Сторони AB, BC і CA рівностороннього трикутника ABC продовжили на рівні відрізки BP, CT і AK. Доведіть, що трикутник PTK – рівносторонній.

Для допитливих

В єгипетських папірусах розв'язування багатьох задач супроводжувалось вказівкою «Роби, як робиться, і ти дістанеш правильне». Це була відповідь на запитання «як?»: як виміряти площу або об'єм фігури, обчислити, скільки робітників потрібно, щоб викопати рів, звести стіну, побудувати дорогу...

Грецькі вчені пішли далі – вони шукали відповідь на запитання «Чому?».

Для допитливих

...Ранком 9 березня 1942 року на глибину 1,5 м було заховано у вічну мерзлоту тіло в'язня Михайла Кравчука – видатного українського математика, академіка, який був учителем легендарного конструктора Сергія Корольова. Так закінчився земний шлях одного з найвидатніших математиків XX сторіччя.

Народився Михайло Кравчук у селі Човниці на Волині. Його батько працював землеміром, а мати вільно володіла кількома європейськими мовами і вчила своїх чотирьох дітей німецькій, французькій і польській. Але головною мовою в сім'ї була українська. Тому не випадково, що академік Кравчук першим в Україні розробив проект алгебраїчної і геометричної термінології. Під його керівництвом у 1920-ті роки співробітники Інституту української наукової мови склали тритомний словник української математичної термінології. А студенти Михайла Пилиповича ще довго після його арешту пригадували красу думки й красу мови, що панували на лекціях.

Кравчук приділяв велику увагу виявленню та вихованню обдарованої молоді. Його учнями були Архип Люлька (конструктор першого у світі двоконтурного турбореактивного двигуна, винахідник літака з надзвуковою швидкістю), Сергій Корольов (ученийконструктор, один з основоположників радянської космонавтики).

Михайло Кравчук устиг до арешту написати 180 наукових праць (10 з них – монографії з різних галузей математики).

9 березня 1930 року в Харкові розпочався судовий процес над організацією «Спілка визволення України». То був початок погрому української інтелігенції. Дату процесу було обрано не випадково – 9 березня – День народження Тараса Шевченка. Михайлу Кравчуку, всесвітньо відомому вченому, друзями якого були поважні люди – учені, поети, літературознавці, – запропонували виступити на цьому процесі зі звинуваченнями. Він відмовився... Почалася травля академіка: у газетах друкувалися розгромні статті, такі як «Академік Кравчук рекламує ворогів», а самому Кравчуку погрожували знищити всю сім'ю, якщо він не погодиться взяти на себе злочини, яких не скоював...

У 1938 р. «за антирадянську націоналістичну діяльність на науково-педагогічному фронті» М.П. Кравчука було засуджено як «ворога народу» на 20 років ув'язнення та 5 років заслання. У 60-градусний мороз академік із хворим серцем повинен був виконувати денну норму на копальнях Колими – півтори тонни руди. У хвилини відпочинку каторжник Кравчук писав якісь формули на шматках паперу і кожен вечір здавав свої записи начальнику концтабору – лише за такої умови йому дозволяли займатися математикою. З табору Кравчук писав академіку А.М. Люльці, що здійснив важливе математичне відкриття. Усі записи академіка, на превеликий жаль, було знищено.

IV

КОЛО І КРУГ

У цьому розділі ми з вами ознайомимося з поняттям «геометричне місце точок площини» та як через нього може бути подано коло і бісектриса кута.

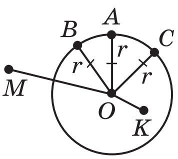
Вивчатимемо:

- **властивості кола та круга;**
- **взаємне розміщення кола і прямої;**
- **взаємне розміщення двох кіл.**

Попрацюємо і як архітектори, і як будівельники, і як прискіпливі начальники, що приймають зведену будівлю. Навчимося виконувати елементарні побудови й використовувати їх у більш складних геометричних побудовах.

§ 23. Коло, круг. Властивості хорд кола

Припустимо, що треба знайти точку площини, яка віддалена від заданої точки O на деяку відстань r.



Мал. 133

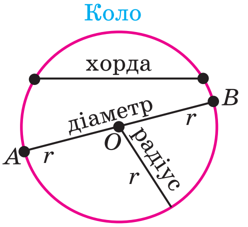
Проведемо довільний промінь з початком у точці O і відкладемо на ньому відрізок $OA = r$ (мал. 133).

Точка A – *шукана*, бо вона віддалена від точки O на відстань r. У той самий спосіб отримаємо точки B, C, ... : $OA = OB = OC = \ldots = r$.

Точки M і K не задовольняють указану умову, бо $OM > r$, а $OK < r$.

Геометричним місцем точок площини (скорочено ГМТ) ***називають сукупність (множину) ВСІХ точок площини, які задовольняють певну умову.***

Геометричне місце точок – це множина ВСІХ точок, які задовольняють певну умову.



O – центр кола;
діаметр $AB = 2r$

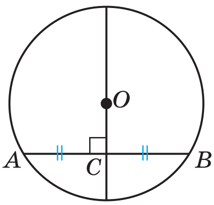
Отже, ми отримали фігуру, яка є множиною точок, віддалених від заданої точки O на відстань r; її називають *колом*. На площині не існує інших точок, які були б віддалені від точки O на відстань r. Справді, на промені OA можна відкласти лише один відрізок завдовжки r (за аксіомою про відкладання відрізків) і це відрізок OA.

Колом називають геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданої точки.

Цю точку називають **центром кола**, а відстань, на яку віддалені точки кола від його центра, – **радіусом**.

Пам'ятаємо:

- *радіус* – відрізок, який сполучає довільну точку кола із центром кола;
- *хорда* – відрізок, який сполучає дві довільні точки кола;
- *діаметр* – хорда, що проходить через центр кола;
- *круг* – коло разом з його внутрішньою областю (це множина точок площини, віддалених від центра кола на відстань, не більшу за радіус).

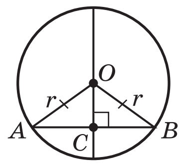


$OC \perp AB \rightarrow AC = CB$

Т е о р е м а 1. Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.

Д о в е д е н н я

Нехай AB – хорда кола, $OC \perp AB$ (мал. 134). Доведемо, що точка C є серединою хорди AB.



Мал. 134

$\triangle AOB$ – рівнобедрений ($OA = OB$ як радіуси кола), OC – його висота, отже, і медіана, тому $AC = CB$.

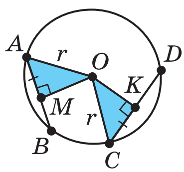
Теорему доведено.

Нагадаємо позначення:
$d(O; AB)$ – відстань від точки O до AB.

Н а с л і д о к 1. Рівні між собою хорди рівновіддалені від центра кола.

$OM \equiv d(O; AB)$
$OK \equiv d(O; CD)$
$AB = CD$
$\downarrow\uparrow$
$OM = OK$

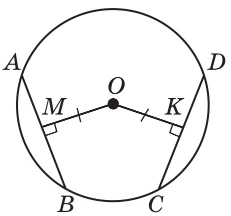
Нехай AB і CD – хорди кола і $AB = CD$ (мал. 135). Відстань від центра кола O до цих хорд дорівнює довжині перпендикулярів OM і OK, проведених з точки O до хорд AB і CD.



Мал. 135

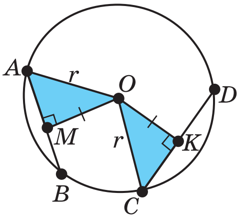
За теоремою, доведеною вище, $BM = MA$ і $CK = KD$. Хорди AB і CD між собою рівні, тоді рівні між собою і їх половини AM і KC.

$\triangle OMA = \triangle OKC$ (за катетом і гіпотенузою). Тоді $OM = OK$ (як відповідні катети).

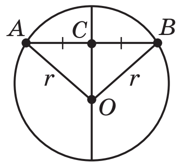


Н а с л і д о к 2 (обернений до наслідка 1). **Хорди, рівновіддалені від центра кола, між собою рівні.**

Доведіть це твердження самостійно (за мал. 136).

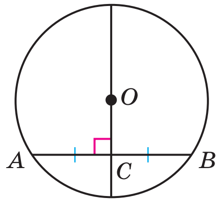


Мал. 136



Мал. 137

Т е о р е м а 2 (обернена до теореми 1). **Діаметр кола, що проходить через середину хорди, є перпендикулярним до цієї хорди.**



$AC = CB \rightarrow OC \perp AB$

Д о в е д е н н я

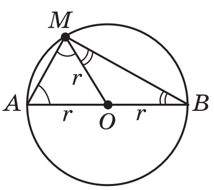
Нехай AB – хорда кола, $AC = CB$ (мал. 137). Доведемо, що $OC \perp AB$.

$\triangle AOB$ – рівнобедрений ($OA = OB$ як радіуси), OC – його медіана, а отже і висота, тому $OC \perp AB$.

Теорему доведено.

Т е о р е м а 3. Діаметр з будь-якої точки кола (крім кінців діаметра) видно під прямим кутом.

Д о в е д е н н я



Мал. 138

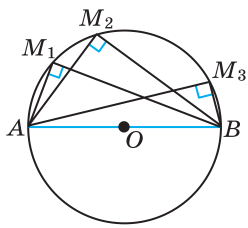
Нехай AB – діаметр кола, M – довільна точка кола, відмінна від точок A і B (мал. 138). Доведемо, що $\angle AMB = 90°$.

1) $\triangle AOM$ і $\triangle BOM$ – рівнобедрені ($OA = OM = OB$ як радіуси кола).

Тоді $\angle OMA = \angle A$, $\angle OMB = \angle B$.

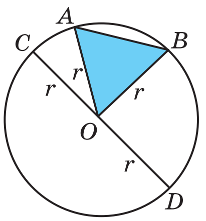
2) Запишемо суму кутів трикутника AMB: $\angle A + \angle AMB + \angle B = 2\angle A + 2\angle B = 180°$. Тоді $\angle A + \angle B = \angle AMB = 180° : 2 = 90°$.

Теорему доведено.



ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 1. **Доведіть, що діаметр є найбільшою з хорд кола.**



Дано: AB – хорда кола, CD – діаметр кола.

Довести: $AB \leqslant CD$.

Д о в е д е н н я

1) $CD = 2r$.

2) Якщо $AB \neq CD$, то за нерівністю для сторін трикутника AOB: $AB < AO + OB = 2r$, тобто $AB < CD$.

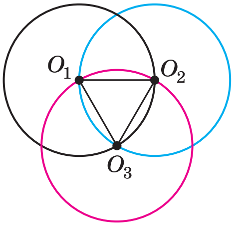
3) Якщо $AB = CD$, то $AO + OB = 2r = CD$.

4) Отже, $CD = 2r = AO + OB \geqslant AB$.

Щ. в. д.

П р и к л а д 2. Кожні два з трьох даних кіл проходять через центр третього кола. Доведіть, що дані кола мають однакові радіуси.

Д о в е д е н н я



Нехай O_1, O_2, O_3 – центри даних кіл, а R_1, R_2, R_3 – відповідно їх радіуси. Доведемо, що

$$R_1 = R_2 = R_3.$$

1) Оскільки точки O_2 і O_3 лежать на колі із центром O_1, то $O_1O_2 = O_1O_3 = R_1$.
2) Аналогічно $O_2O_1 = O_2O_3 = R_2$ та $O_3O_1 = O_3O_2 = R_3$.
3) Маємо: $O_1O_2 = R_1 = R_2$, $O_2O_3 = R_2 = R_3$, звідки $R_1 = R_2 = R_3$.

Щ. в. д.

Практична робота 26

1. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см. **а)** Позначте точку, яка віддалена від центра кола на відстань, меншу за 4 см. **б)** Позначте точку, яка віддалена від центра кола на відстань, більшу за 4 см. **в)** Проведіть у цьому колі радіус, діаметр, хорду і позначте їх. Скільки хорд можна провести через дану точку на колі?

2. Накресліть коло, радіус якого 3 см. Позначте на колі дві точки і проведіть через них пряму. Укажіть усі точки цієї прямої, віддалені від центра кола на відстань: **а)** меншу від радіуса кола; **б)** більшу за радіус кола.

3. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 5 см, і позначте в його внутрішній області довільну точку. Проведіть через цю точку радіус кола, діаметр, хорду. Скількома способами це можна зробити? Як зміниться відповідь, якщо вибрана точка – центр кола?

4*. Накресліть два кола однакового радіуса так, щоб кожне з них проходило через центр другого. Складіть задачу, аналогічну до Прикладу 2.

Задачі та вправи

446°. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює: **а)** 2 см; **б)** 3,5 см; **в)** a см.

447°. Знайдіть радіус кола, діаметр якого дорівнює: **а)** 48 см; **б)** 5,6 см; **в)** b см.

448. Позначте точку A і зобразіть усі точки, віддалені від A на відстань: **а°)** $d = 2{,}5$ см; **б°)** $d \leqslant 2$ см; **в°)** $d < 3{,}5$ см; **г°)** $d \geqslant 3$ см; **д)** 3 см $< d \leqslant 4$ см.

449°. Радіус кола дорівнює 5 см. Чи можна всередині цього кола побудувати трикутник зі сторонами: **а)** 6 см, 7 см, 11 см; **б)** 5 см, 8 см, 12 см?

450°. У яких межах може змінюватися довжина хорди кола, якщо радіус кола дорівнює: **а)** 3 м; **б)** 12 дм?

451. Знайдіть усі точки, які лежать на даній прямій a і віддалені від заданої точки A на 4 см: **а°)** якщо A належить a; **б)** якщо A не належить a. **в)** Чи завжди п. б) має розв'язок?

452°. У колі із центром O і радіусом 6 см знайдіть довжину хорди AB, якщо кут AOB дорівнює 60°.

О.З. **453. Два кола із центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що: а°) $\triangle O_1AO_2 = \triangle O_1BO_2$; б) $AB \perp O_1O_2$.**

454. Довжина відрізка AB дорівнює 8 см. Як знайти всі точки, що віддалені від A на 4 см і від B: **а)** на 6 см; **б)** на 5 см?

455. Через кінці діаметра AB кола провели рівні між собою хорди AC і BP. Доведіть, що $AC \parallel BP$.

456. Доведіть, що дві паралельні між собою хорди кола, що проходять через кінці діаметра, мають однакову довжину.

457. У колі проведено діаметри AB і CD. Доведіть, що хорди AC і BD рівні й паралельні між собою.

458. На площині проведено коло, але не позначено його центр. За допомогою косинця знайдіть і позначте центр кола.

459. Кут між радіусами OA і OB кола дорівнює 60°. Знайдіть хорду AB, якщо радіус кола дорівнює R.

460. Знайдіть кут між радіусами OA і OB, якщо відстань від центра O кола до хорди AB: **а)** удвічі менша від AB; **б)** удвічі менша від OA.

461. Хорда кола AB перетинає його діаметр у точці K під кутом 30°. Знайдіть відстані від кінців хорди до даного діаметра, якщо $AK = 12$ см, а $KB = 8$ см.

462. Через точку кола проведено діаметр і хорду, яка дорівнює радіусу. Знайдіть кут між ними.

463. У колі проведено дві рівні між собою хорди AB і BC, O – центр кола. Доведіть, що $\angle BOA = \angle BOC$.

464*. Через точку A кола із центром у точці O проведено діаметр AB і хорду AC. Доведіть, що кут BAC удвічі менший за кут BOC.

465*. Яку лінію утворюють точки, відстань від яких до центра кола – точки O: **а)** удвічі менша від радіуса кола R; **б)** удвічі більша за радіус кола R?

466*. Доведіть, що прямі, які проходять через середину паралельних між собою хорд, проходять і через центр кола.

467*. Доведіть, що з двох хорд кола, які перетинаються і не проходять через центр кола, хоча б одна не ділиться точкою їх перетину навпіл.

О.З. **468**. Доведіть, що чим більша хорда, тим ближче вона до центра кола.**

О.З. **469**. Сформулюйте і доведіть твердження, обернене до попереднього.**

470.** За допомогою лінійки, яка коротша від діаметра кола, знайдіть центр цього кола, якщо: **а)** лінійка має масштабні поділки; **б)** лінійка не має поділок, але має дві паралельні сторони, відстань між якими менша від радіуса кола.

Для допитливих

Доведення теореми про те, що будь-який кут, вписаний у півколо (вершина кута належить півколу, сторони кута перетинають півколо в кінцях його діаметра), – прямий, приписують Фалесу Мілетському. Саме він увів у практику *доводити теореми* і цим заклав підґрунтя створення геометрії як науки.

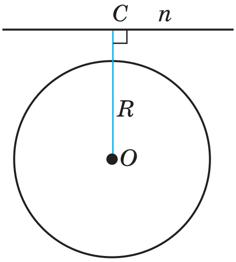
§ 24. Взаємне розміщення прямої і кола. Дотична до кола, її властивості

Розглянемо всі можливі випадки взаємного розміщення прямої і кола.

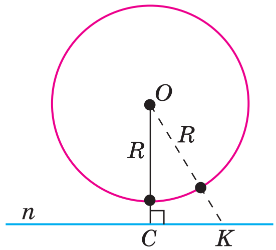
1. Пряма і коло не перетинаються, тобто не мають спільних точок

Тоді довільна точка K прямої n (мал. 139), за властивістю перпендикуляра і похилої, буде віддалена від центра кола O на відстань $OK > OC > R$ (де $OC \perp n$).

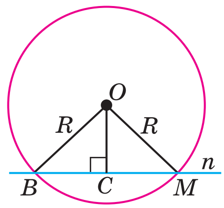
У цьому випадку *відстань від центра кола до прямої більша за радіус*.



$d\ (O;\ n) = OC > R$



Мал. 139



Мал. 140

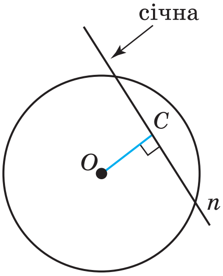
2. Пряма і коло перетинаються

Січною називають пряму, яка має з колом дві спільні точки.

Відстань від двох точок кола B і M до центра кола дорівнює радіусу кола R: $OB = R = OM$ (мал. 140).

Тоді, за властивістю перпендикуляра і похилих, відстань OC від центра кола O до прямої n буде меншою від R: $OC < R$.

Отже, *відстань від центра кола до січної менша від радіуса*.

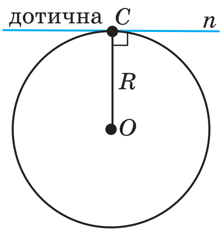


$d\ (O;\ n) = OC < R$

3. Пряма і коло мають лише одну спільну точку

Дотичною до кола називають пряму, яка має з колом лише одну спільну точку.

Дотичною називається пряма, яка має лише одну спільну точку з колом.



n – дотична
$\downarrow$
$OC \perp n$

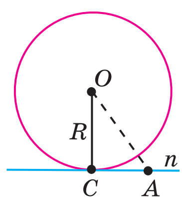
ВЛАСТИВОСТІ ДОТИЧНОЇ

Теорема 1. **Радіус, проведений у точку дотику, перпендикулярний до дотичної.**

Доведення

Нехай точка C – єдина спільна точка кола і прямої n (мал. 141). Тоді $OC = R$. Будь-яка інша точка A прямої n лежить поза колом, і $OA > R$.

OC – найменший з відрізків, який сполучає точку O з точками прямої n.



Мал. 141

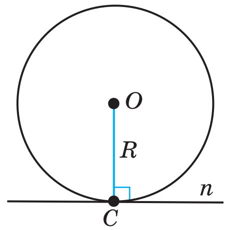
Але таким відрізком є перпендикуляр, проведений з точки O до прямої, і він єдиний. Тоді $OC \perp n$.

Теорему доведено.

$d\ (O;\ n) = R = OC$

Наслідок. **Відстань від центра кола до дотичної дорівнює радіусу кола.**

Теорема 2 (обернена до теореми 1). **Пряма, перпендикулярна до радіуса в точці, що належить колу, є дотичною до кола.**

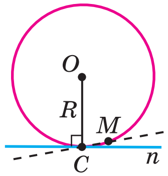


$OC \perp n$

$\downarrow$

n – дотична

Доведення



Мал. 142

Нехай пряма n перпендикулярна до радіуса OC у точці C кола (мал. 142).

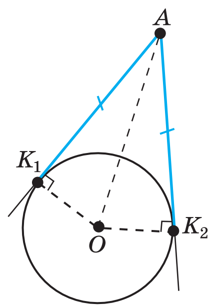
Доведемо від супротивного.

Припустимо, що пряма n не є дотичною до кола. Тоді вона має ще одну спільну точку з колом, назвемо її M.

$\triangle COM$ – рівнобедрений, бо $OC = R = OM$, тому $\angle OMC = \angle OCM = 90°$ (як рівні кути при основі CM). Але цього бути не може. Прийшли до протиріччя теоремі про суму кутів трикутника.

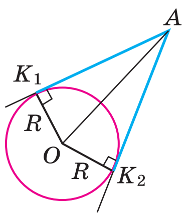
Отже, наше припущення є хибним, тому n є дотичною до кола. *Теорему доведено.*

Теорема 3. **Відрізки дотичних, проведених з однієї точки до кола, що обмежені цією точкою і точками дотику, рівні між собою.**



$AK_1 = AK_2$

Доведення



Мал. 143

Нехай AK_1 і AK_2 – дотичні до кола, точки K_1 і K_2 – точки їх дотику (мал. 143). Доведемо, що $AK_1 = AK_2$.

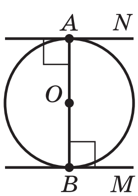
1) OK_1 і OK_2 – радіуси, проведені в точки дотику. Тоді $\angle OK_1A = \angle OK_2A = 90°$.

2) У прямокутних трикутниках AK_1O і AK_2O гіпотенуза AO – спільна, $OK_1 = OK_2$ (як радіуси кола). Тоді $\triangle AK_1O = \triangle AK_2O$ (за катетом і гіпотенузою) і $AK_1 = AK_2$ (як відповідні сторони).

Теорему доведено.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

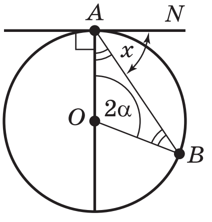
Приклад 1. Доведіть, що дотичні, які проведено до кола через кінці його діаметра, паралельні між собою.



Дано: AN і BM – дотичні; AB – діаметр кола.
Довести: $AN \parallel BM$.

1) AN і BM – дотичні $\to AB \perp AN$ і $AB \perp BM$.
2) $AN \perp AB$ і $BM \perp AB \to AN \parallel BM$.
Щ. в. д.

0.3 Приклад 2. **Через точку A кола з центром O провели дотичну і хорду AB. Доведіть, що кут між дотичною і хордою дорівнює половині кута AOB.**



Дано: AN – дотична до кола. $\angle AOB = 2\alpha$.
Довести: $\angle BAN = \alpha$.

Доведення

1) AN – дотична, тому $\angle NAO = 90°$ (за теоремою 1).

2) $\triangle AOB$ – рівнобедрений ($OA = OB = R$), тому $\angle OAB = \angle OBA = (180° - 2\alpha) : 2 = 90° - \alpha$.

3) $\angle BAN = \angle NAO - \angle OAB = 90° - (90° - \alpha) = \alpha = \frac{1}{2}\angle AOB$.

Щ. в. д.

Задачі та вправи

471°. Накресліть коло радіуса 5 м і пряму так, щоб відстань від центра кола до прямої дорівнювала: **а)** 3 м; **б)** 12 м; **в)** 4 м; **г)** 5 м.

472°. Накресліть коло, радіус якого дорівнює 4 см, і позначте на ньому точку C. Проведіть за допомогою косинця дотичну до кола, що проходить через точку C. Як це зробили?

473°. З точки M, що лежить поза колом, проведено до кола дві дотичні MA і MB. Чи завжди $MA = MB$? Чому?

474. До кола радіуса R із центром O з точки P проведено дві дотичні PA і PB. Знайдіть кут APB, якщо: **а°)** $PA = AB$; **б)** $OP = 2R$; **в°)** $AB = R$; **г°)** $PAB = 32°$; **д)** $\angle AOB = 150°$; **е)** $AP = R$.

475°. Доведіть, що дотичні до кола, які проведено через кінці діаметра, паралельні між собою.

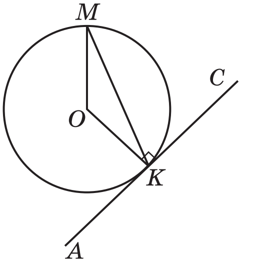
476°. З точки M, що лежить поза колом радіуса 5 см і центром O, провели дотичну MK. Знайдіть кут KMO, якщо: **а)** $OM = 10$ см; **б)** $KM = 5$ см.

477. Дві прямі дотикаються до кола із центром O в точках A і B та перетинаються в точці C. Відомо, що $\angle ACB = 120°$. Доведіть, що $AC + BC = OC$.

478. З точки M до кола із центром O проведені дві дотичні MA і MB. Доведіть, що MO – бісектриса кута AMB.

479. Через точку кола провели дотичну і хорду. Знайдіть кут між ними, якщо хорду видно із центра кола під кутом: **а)** 60°; **б)** 120°; **в)** α.

480. Пряма AC дотикається до кола в точці K (мал. 144). Знайдіть кут MKC, якщо кут $MOK = 132°$.



Мал. 144

481. Пряма c перетинає дві паралельні між собою прямі a і b у точках A і B відповідно. Коло із центром O дотикається до прямих a, b, c відповідно в точках M, P, T. Доведіть: **а)** $AB = AM + BP$; **б)** $\angle AOB = 90°$; **в)** $MTP = 90°$.

482*. Дано коло із центром O. На продовженні хорди AB за точку B відкладено відрізок BC, який дорівнює радіусу. Через точки C і O проведено січну CD. Доведіть, що $\angle AOD = 3\angle ACD$.

483*. Дві прямі дотикаються до кола із центром O в точках A і B та перетинаються в точці C. Знайдіть кут між цими прямими, якщо $\angle ABO = 34°$.

484*. Коло із центром O перетинає всі сторони трикутника ABC і відтинає на його сторонах рівні відрізки, які є хордами цього кола. Доведіть, що висоти трикутників OAB, OAC і OBC, проведені з вершини O, рівні між собою.

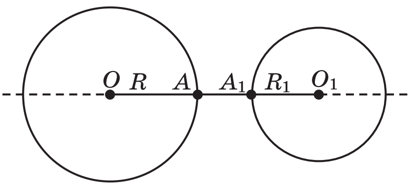
485.** Коло дотикається до сторони BC трикутника ABC у точці M і до продовжень двох інших його сторін. Доведіть, що пряма AM ділить периметр трикутника навпіл.

§ 25. Взаємне розміщення двох кіл

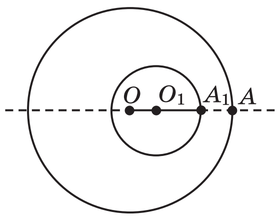
Очевидно, що два кола можуть мати три таких взаємних розташування.

1. Два кола не перетинаються

Кажуть, що *два кола не перетинаються, якщо вони не мають спільних точок*. Можливі такі випадки:



Мал. 145



Мал. 146

1) $OO_1 = OA + AA_1 + A_1O_1$, $OO_1 > R + R_1$ (мал. 145).

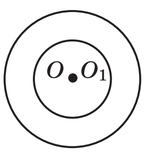
2) $OA = OO_1 + O_1A_1 + A_1A$, $OO_1 + A_1A = OA - O_1A_1$, $OO_1 < R - R_1$ (мал. 146).

Два кола називають концентричними, якщо вони мають спільний центр (мал. 147).

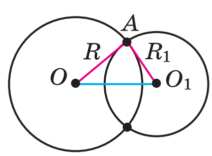
У цьому випадку $OO_1 = 0$.

2. Два кола перетинаються

Кажуть, що *два кола перетинаються, якщо вони мають дві спільні точки*.

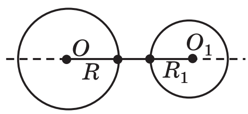


Мал. 147



Мал. 148

З нерівності для сторін трикутника OAO_1 (мал. 148) маємо $OO_1 < R + R_1$ і $OO_1 > R - R_1$, якщо $R > R_1$.



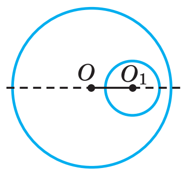
$OO_1 > R + R_1$

↑

не перетинаються

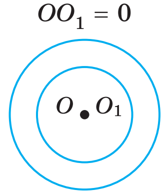
↓

$OO_1 < R - R_1$

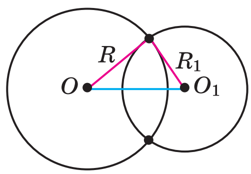


концентричні кола

$OO_1 = 0$



перетинаються



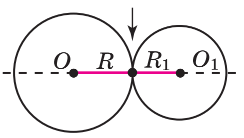
$OO_1 < R + R_1$

$OO_1 > R - R_1$

Пряма OO_1 – лінія центрів.

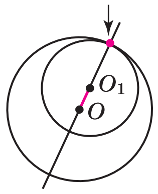
Два кола називають дотичними, якщо вони мають одну спільну точку.

зовнішній дотик



$OO_1 = R + R_1$

внутрішній дотик



$OO_1 = R - R_1$

Пряму, яка проходить через центри двох кіл, називають *лінією центрів*.

3. Два кола дотикаються

Два кола називають дотичними, якщо вони мають одну спільну точку.

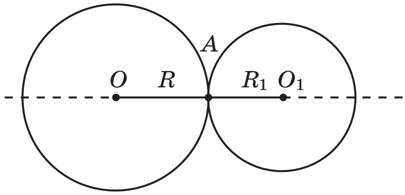
Можливі два випадки:

1) $OO_1 = R + R_1$.

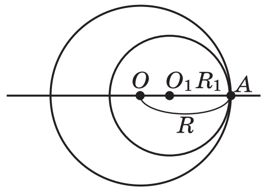
Дотик двох кіл називається *зовнішнім,* якщо кола розміщені одне за одним (мал. 149).

2) $OO_1 = R - R_1$.

Дотик двох кіл називається *внутрішнім*, якщо одне з кіл лежить усередині другого (мал. 150).

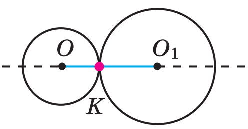


Мал. 149

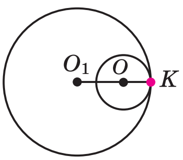


Мал. 150

Т е о р е м а. **Якщо два кола дотикаються, то точка дотику лежить на лінії центрів.**



$K \in OO_1$



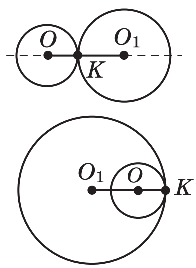
Д о в е д е н н я

Нехай два кола дотикаються в точці K (мал. 151). Доведемо, що $K \in OO_1$ від супротивного.

Якщо зігнути площину кола по його діаметру, усі точки півкіл сумістяться. Кажуть, що коло є симетричним відносно свого діаметра.

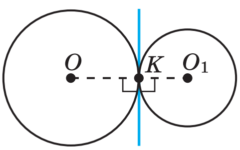
Нехай $K \notin OO_1$, тоді існує інша спільна точка K_1 двох кіл, симетрична точці K відносно OO_1, отже, кола перетинаються, що суперечить умові, тому $K \in OO_1$.

Теорему доведено.

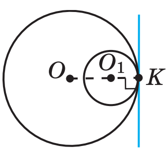


Мал. 151

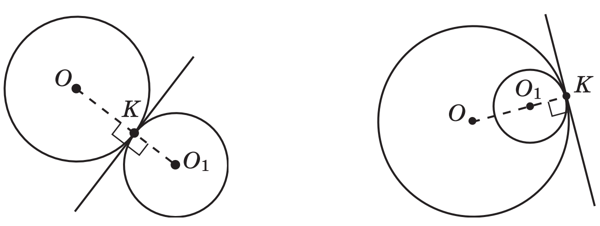
Кола, що дотикаються мають спільну дотичну в точці дотику.



$K \in OO_1$



Н а с л і д о к. **Два дотичні кола мають спільну дотичну в точці дотику.**

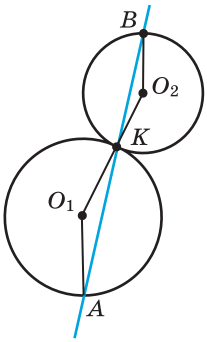


Мал. 152

Точка K дотику кіл належить лінії центрів OO_1 (мал. 152). Дотична є перпендикулярною до радіуса кола, проведеного в точку дотику K. Тоді вона перпендикулярна до прямої OO_1. (Через точку K до OO_1 можна провести лише одну перпендикулярну пряму.)

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

О.З. Приклад 1 (лема* Архімеда). **Через точку дотику двох кіл провели пряму, яка не збігається з лінією центрів і не є дотичною до кіл. У точки перетину цієї прямої з колами провели радіуси кіл. Доведіть, що ці радіуси паралельні між собою.**



Розглянемо випадок зовнішнього дотику даних кіл.

Дано: K – точка дотику кіл.

Довести: $O_1A \parallel O_2B$.

---

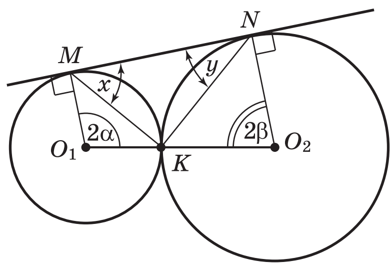
1) $\angle O_1KA = \angle O_2KB$ (як вертикальні), $\triangle AO_1K$ і $\triangle BO_2K$ – рівнобедрені. Тоді $\angle O_1AK = \angle O_1KA = \angle O_2KB = \angle O_2BK$.

2) Внутрішні односторонні кути при прямих O_1A та O_2B і січній AB рівні, тоді $O_1A \parallel O_2B$.

Щ. в. д.

Випадок внутрішнього дотику двох кіл розгляньте самостійно.

О.З. Приклад 2. **До двох кіл, що дотикаються зовнішньо в точці K, провели спільну дотичну, що дотикається до даних кіл у точках M і N. Доведіть, що $\angle MKN = 90°$.**



Дано: дотичні в точці K кола; MN – їх спільна дотична.

Довести: $\angle MKN = 90°$.

---

1) MN – дотична до кіл, тому $O_1M \perp MN$ і $O_2N \perp MN$, отже, $O_1M \parallel O_2N$.

2) Нехай $\angle KMN = x$, $\angle KNM = y$, $\angle O_1 = 2\alpha$, $\angle O_2 = 2\beta$. Тоді за О.З. (приклад 2 на с. 128) $x = \alpha$, $y = \beta$.

3) $O_1M \parallel O_2N$, тому $2\alpha + 2\beta = 180°$ (як внутрішні односторонні при січній O_1O_2), отже, $\alpha + \beta = 90°$.

4) У трикутнику MKN $\angle MKN = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - 90° = 90°$.

Щ. в. д.

Практична робота 27

1. Накресліть відрізок AB завдовжки 6 см і коло із центром у точці A. Радіус кола дорівнює 4 см. Накресліть коло із центром у точці B так, щоб кола: **а)** не перетиналися; **б)** дотикалися

---

* *Лема* – невелика теорема.

зовнішньо; **в)** дотикалися внутрішньо; **г)** перетиналися. Яким повинен бути радіус другого кола, щоб відповідні кола можна було побудувати?

2. Накресліть коло радіуса 4 см і позначте точку M зовні кола. **а)** Подумайте, як знайти радіус кола із центром у точці M, яке дотикалося б до заданого кола. Зробіть відповідні вимірювання і накресліть таке коло. **б)** Накресліть коло, яке є концентричним із заданим колом і проходить через задану точку M.

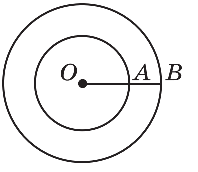
Задачі та вправи

486. Два кола, радіуси яких 5 см і 7 см, перетинаються. Чи правильно, що відстань між точками перетину не перевищує 1 дм?

487. Скільки спільних точок мають два кола, радіуси яких відповідно дорівнюють 19 см і 40 см, якщо відстань між їх центрами дорівнює: **а)** 10 см; **б)** 15 см; **в)** 21 см; **г)** 40 см; **д)** 59 см?

488. Радіуси двох кіл дорівнюють 6 см і 27 см. Якою має бути відстань між їх центрами для того, щоб кола: **а)** дотикалися внутрішньо; **б)** дотикалися зовнішньо?

489. Два кола мають спільний центр O (мал. 153). Відомо, що $AB = 6$ см, а радіуси кіл відносяться як 7 : 5. Знайдіть радіуси цих кіл.



Мал. 153

490. Дано два концентричні кола і пряму, яка їх перетинає. Доведіть, що відрізки цієї прямої, що містяться між даними колами, є між собою рівними.

491. Два кола із центрами O_1 і O_2 перетинаються в точках A і B. Доведіть, що $AB \perp O_1O_2$.

492. Три кола, радіуси яких 7 см, 9 см і 13 см, попарно мають зовнішній дотик. Знайдіть периметр трикутника з вершинами в центрах цих кіл.

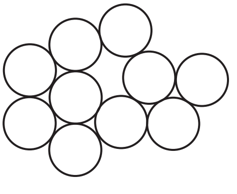
493*. Три кола попарно дотикаються зовні. Відрізки, що сполучають їх центри, утворюють трикутник зі сторонами 12 см, 14 см і 16 см. Знайдіть радіуси цих кіл.

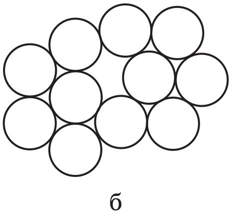
494*. Хорда більшого з двох концентричних кіл дотикається до меншого кола. Доведіть, що точка дотику ділить цю хорду навпіл.

Для допитливих

На малюнках (а) і (б) ви бачите 10 і 11 кіл. Чи можна їх розфарбувати трьома різними кольорами так, щоб ніякі два сусідніх кола не були однакового кольору?

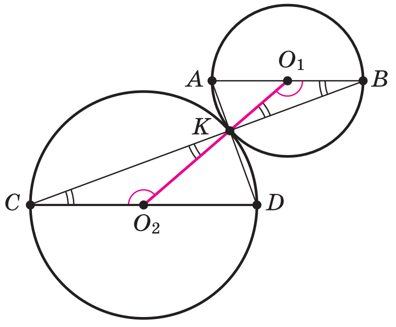
Спробуйте обґрунтувати відповідь.


а


б

495*. Точка A лежить зовні даного кола із центром O. Коло з діаметром OA перетинається з даним колом у точках B і C. Доведіть, що прямі AB і AC є дотичними до даного кола.

496*. *Лема Архімеда про паралельні діаметри.* **AB і DC – паралельні діаметри двох кіл, що дотикаються зовнішньо в точці K** (мал. 154). **Доведіть, що точки A, D і K лежать на одній прямій.** (Підказка на малюнку.)



Мал. 154

497.** Доведіть *лему Архімеда про паралельні діаметри* для випадку внутрішнього дотику двох кіл.

498.** Два кола дотикаються зовнішньо в точці K. Через точку K провели січну, яка перетинає дані кола в точках A і B. Доведіть, що дотичні до цих кіл у точках A і B паралельні між собою.

499.** З точки M, яка лежить зовні двох концентричних кіл, проведено чотири прямі, що дотикаються до кіл у точках A, B, C і D. Доведіть, що точки M, A, B, C, D лежать на одному колі.

§ 26. Властивості й ознаки серединного перпендикуляра до відрізка та бісектриси кута. Геометричне місце точок

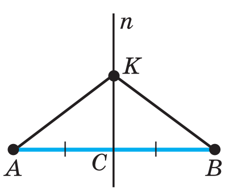
Нагадаємо *властивість* серединного перпендикуляра до відрізка.

Будь-яка точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від його кінців.

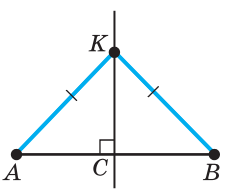
Правильність цього твердження маємо з рівності прямокутних трикутників за двома катетами (мал. 155).

Правильним буде й обернене твердження – *ознака* того, що точка міститься на серединному перпендикулярі до відрізка.

Будь-яка точка, рівновіддалена від кінців відрізка, належить серединному перпендикуляру до цього відрізка.



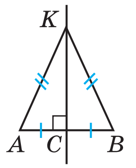
Мал. 155



Мал. 156

Правильність останнього твердження випливає з рівності двох прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом (мал. 156).

Серединний перпендикуляр до відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.



$$\frac{KC \perp AB,\ AC = CB}{\downarrow \qquad \uparrow}$$
$$KA = KB$$

Тобто немає точок, які мали б зазначену властивість і не належали серединному перпендикуляру до відрізка.

Скорочено вказані два твердження формулюють так.

Серединний перпендикуляр до відрізка є геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.

Ми вже стикалися з поняттям геометричного місця точок, коли шукали означення кола. Нагадаємо:

геометричним місцем точок (ГМТ) називають множину ВСІХ точок, які задовольняють певну умову.

Щоб стверджувати, що деяка фігура є певним геометричним місцем точок, треба довести два взаємно обернених твердження:

Доведення твердження, що певна фігура є геометричним місцем точок площини:
1. *Усі точки фігури мають таку властивість.*
2 *(обернене до* ***1****). Усі точки, що мають таку властивість, належать фігурі.*

1. *Довести*, що всі точки цієї фігури задовольняють указану умову, – *властивість фігури*.

2. *Довести* обернене, тобто що всі точки, які задовольняють указану умову, містяться на заданій фігурі, – *ознаку фігури*.

Як приклад розглянемо твердження про бісектрису кута.

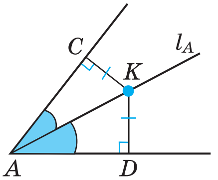
Бісектриса кута є геометричним місцем точок внутрішньої області кута, які рівновіддалені від сторін цього кута.

Для того щоб прийняти це твердження як правильне, треба довести дві теореми.

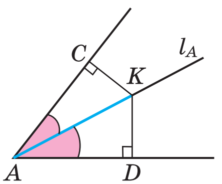
Теорема 1. **Будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін цього кута.**

Правильність цього твердження випливає з рівності двох прямокутних трикутників AKC і AKD за гіпотенузою і гострим кутом (мал. 157).

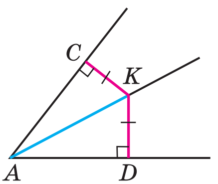
Бісектриса кута є ГМТ, рівновіддалених від сторін цього кута.



$K \in l_A$
$\downarrow\uparrow$
$d(K; AC) =$
$= d(K; AD)$



Мал. 157



Мал. 158

Теорема 2 (обернена до теореми 1). **Будь-яка точка, що лежить у внутрішній області кута і рівновіддалена від його сторін, належить бісектрисі цього кута.**

Правильність твердження випливає з рівності двох прямокутних трикутників AKC і AKD за гіпотенузою і катетом (мал. 158).

Отже, зазначене раніше твердження про бісектрису кута як ГМТ площини є правильним.

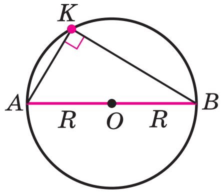
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

О.3. П р и к л а д. **Доведіть, що геометричним місцем точок, з яких заданий відрізок AB видно під кутом 90°, є коло, діаметр якого – заданий відрізок (без точок A і B).**

Д о в е д е н н я

Доведемо, що ВСІ точки C, які розміщені поза даним відрізком AB, лежать на колі діаметра AB.

I. Якщо точка C лежить на колі, то $\angle ACB = 90°$ за властивістю точок кола (теорема 3 у § 23).



K належить колу

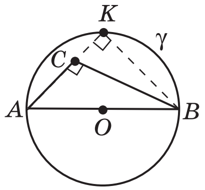
↓↑

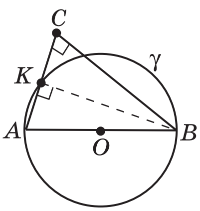
$\angle AKB = 90°$

II. Доведемо, що якщо $\angle ACB = 90°$, то точка C лежить на колі, від супротивного.

Нехай $\angle ACB = 90°$ і C не лежить на колі. Тобто C лежить або всередині кола, або зовні.

Позначимо точку перетину прямої AC з колом через K.





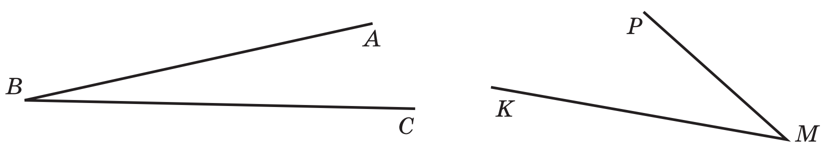
За властивістю кола $\angle AKB = 90°$. Тоді з точки B до прямої AC проведено два перпендикуляри BC і BK, чого бути не може.

Прийшли до суперечності, отже, C належить колу.

Твердження доведено.

Практична робота 28

1. За допомогою косинця проведіть до відрізків AB і BC серединні перпендикуляри. Чи завжди вони перетинаються? Яку властивість має точка перетину цих перпендикулярів (якщо вони перетинаються)?
2. Накресліть довільний кут ABC і за допомогою транспортира побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від його сторін BA і BC.
3. Перенесіть малюнок 159 у зошит. За допомогою транспортира побудуйте геометричне місце точок, одночасно рівновіддалених від сторін кута ABC і від сторін кута KMP.



Мал. 159

Задачі та вправи

500. Сформулюйте означення: **а)** кола як ГМТ; **б)** круга як ГМТ; **в)** півкола як ГМТ.

501. Сформулюйте властивість і ознаку: **а)** бісектриси кута як ГМТ; **б)** серединного перпендикуляра до відрізка як ГМТ.

502. Позначте точки K, L, M і N. За допомогою косинця знайдіть точку, яка: **а)** рівновіддалена від точок K і L і знаходиться на відстані 4 см від точки M; **б)** лежить на прямій MN і рівновіддалена від точок K і L; **в)** рівновіддалена від точок K і L та від точок M і N. Виконайте малюнок.

503. Зобразіть: **а)** ГМТ рівновіддалених від двох даних паралельних прямих; **б)** ГМТ рівновіддалених від даної прямої на задану відстань.

504. Чому, щоб довести твердження про ГМТ, треба провести два доведення? Наведіть приклад.

505. Знайдіть геометричне місце точок, відстань від яких до даної точки A менша ніж 4 см.

506. Знайдіть ГМТ прямої, що віддалені від певної точки M даної прямої на відстань: **а)** 2 см; **б)** меншу ніж 3 см; **в)** більшу ніж 5 см.

507. Розв'яжіть попередню задачу для випадку, коли точка A не лежить на заданій прямій.

508. Знайдіть геометричне місце точок площини, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються.

509. У трикутнику ABC $\angle C = 30°$, AM – бісектриса. Знайдіть відстань від точки M до сторони AB цього трикутника, якщо $MC = 10$ см.

510. Якою фігурою є ГМТ, з яких даний відрізок видно під прямим кутом?

511*. Обґрунтуйте відповідь на попереднє запитання.

512*. $\triangle ABC$ – прямокутний ($\angle A = 90°$), BD і CE – його бісектриси, а відрізки DK і EM – перпендикуляри до BC. Знайдіть кут KAM.

513*. Знайдіть геометричне місце точок, відстань від яких до точки A більша за 4 см і менша від 6 см.

514*. Знайдіть геометричне місце точок, які віддалені від точки A на відстань 3 см, а від точки B – на 4 см. Якою має бути довжина відрізка AB, щоб таке геометричне місце точок існувало?

515*. Знайдіть ГМТ, що є центрами кіл даного радіуса, які проходять через задану точку.

516.** Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін даного кута на задану відстань.

517.** AB – хорда даного кола. Знайдіть геометричне місце середин усіх хорд цього кола, довжина яких дорівнює AB.

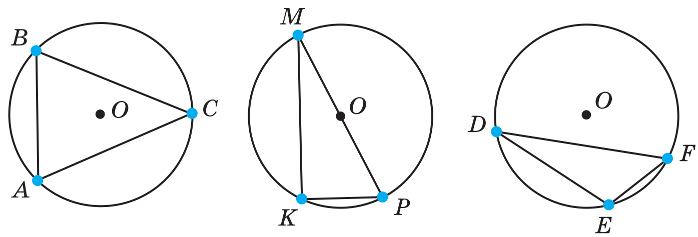
518.** Знайдіть геометричне місце точок середин усіх хорд даного кола, паралельних заданій прямій.

Для допитливих

Вивчаючи властивості фігур, Фалес Мілетський переконався, що кут, вписаний у півколо, завжди прямий. Це дало можливість вписувати в коло прямокутні трикутники і доводити теорему про суму внутрішніх кутів трикутника, а також про те, що кути можна додавати так само, як відстані.

§ 27. Коло, описане навколо трикутника

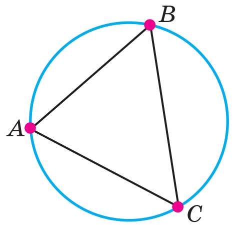
Коло називають описаним навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини (мал. 160).



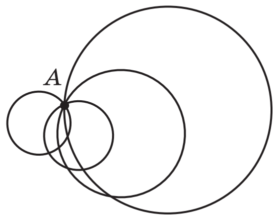
а б в

Мал. 160

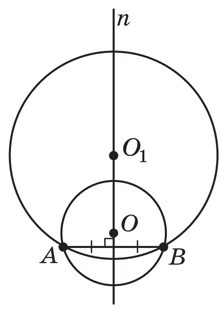
Описане коло



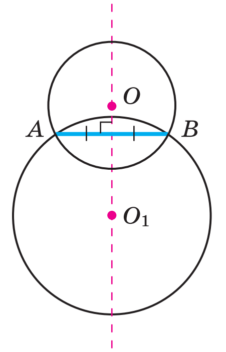
Очевидно, що через одну точку можна провести скільки завгодно кіл: центри їх можна брати довільно, а радіусом буде відстань між центром і заданою точкою A (мал. 161).



Мал. 161



Мал. 162

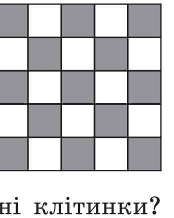


центри кіл на серединному перпендикулярі до AB

Якщо дано дві точки, через які треба провести коло, то його центр має бути рівновіддаленим від обох заданих точок. Тоді центр шуканого кола лежить на серединному перпендикулярі до відрізка, що сполучає ці точки (мал. 162).

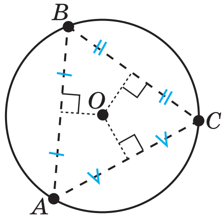
Для допитливих

1. Клітчасту дошку 5×5 розфарбували як показано на малюнку. У кожну клітинку цієї дошки посадили по жабеняті. По команді жабенята стрибають на сусідні клітинки по горизонталі або вертикалі. Чи всі клітинки після такої вправи будуть знову зайняті?



2. У кожній клітинці дошки 9×9 сидить жук. У певний момент часу всі жуки переповзають на сусідні клітинки по горизонталі або вертикалі. Чи залишаться порожні клітинки? Якщо так, то скільки їх буде?
3. Розв’яжіть попередню задачу за умови, що жуки будуть переповзати лише по діагоналі.

Через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести коло і до того ж тільки одне.

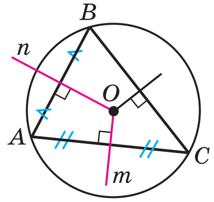


Центр описаного навколо трикутника кола є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

Т е о р е м а. **Через три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести коло і до того ж тільки одне.**

Д о в е д е н н я

Нехай дано точки A, B і C, які не лежать на одній прямій (мал. 163). Доведемо, що існує точка, рівновіддалена від заданих точок, і до того ж тільки одна.



Мал. 163

1) Проведемо серединні перпендикуляри n і m до відрізків AB і AC відповідно. Точку їх перетину позначимо через O.

За властивістю серединного перпендикуляра до відрізка маємо: $AO = OB$ і $AO = OC$. Тоді $OB = OC$.

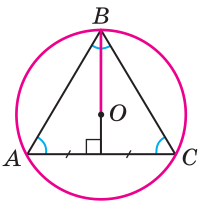
2) Отже, $OB = OC$. Тоді за ознакою серединного перпендикуляра до відрізка, точка O належить серединному перпендикуляру до відрізка BC.

3) Ми довели, що точка O рівновіддалена від трьох заданих точок. Отже, через ці точки можна провести коло.

4) Дві прямі n і m можуть перетинатися лише в одній точці. Тому точка O – єдина і описане навколо трикутника коло – єдине.

Теорему доведено.

$\triangle ABC$ – правильний



$$R = \frac{2}{3}h_a = \frac{2}{3}h_b = \frac{2}{3}h_c$$

Н а с л і д о к 1. **Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.**

Н а с л і д о к 2. **Навколо будь-якого трикутника можна описати коло і до того ж тільки одне.**

Н а с л і д о к 3. **Центр описаного навколо трикутника кола є точкою перетину серединних перпендикулярів до його сторін.**

ОПОРНІ ФАКТИ ПРО КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА

Узагальнимо вивчене й сформулюємо головні опорні факти, які допоможуть у розв'язуванні задач та подальшому вивченні геометрії.

1. Центр кола, описаного навколо правильного трикутника, збігається із центром трикутника, що є для такого трикутника і ортоцентром, і інцентром,

Для допитливих

Слово *коло*, має той самий корінь, що й *колесо*, *колія*, *околиця*, *колобок* тощо. До XIX сторіччя коло і круг називали однаково «округ» або «колесо». Як наслідок цієї плутанини між поняттями маємо сьогодні назви: «полярне коло», «коло пошани».

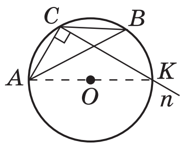
і центроїдом, а висота є серединним перпендикуляром, бісектрисою і медіаною. Як відомо (див. § 14), медіани трикутника точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини. Тоді **радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, дорівнює двом третинам висоти цього трикутника**.

2. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, – середина його гіпотенузи.

Правильність цього твердження випливає з опорного факту про геометричне місце точок, з яких даний відрізок видно під прямим кутом (приклад 1, § 26).

3. З попереднього маємо, що в **будь-якому прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи** (бо збігається з радіусом кола, описаного навколо цього трикутника).

4. Центр кола, описаного навколо тупокутного трикутника, міститься зовні цього трикутника.



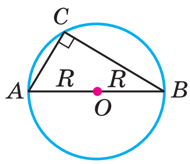
Мал. 164

Нехай в трикутнику ABC кут C – тупий (мал. 164) і навколо трикутника описали коло. Проведемо через точку C пряму $n \perp AC$. Позначимо точку перетину прямої n з колом через K.

Кут ACK менший від кута ACB, отже, промінь CK міститься всередині кута ACB і перетинає пряму AB. Отже, точка K і діаметр AK лежать зовні трикутника ABC.

5. Центр кола, описаного навколо гострокутного трикутника, міститься всередині цього трикутника.

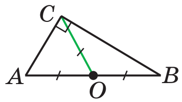
Доведення (аналогічно до попереднього) здійсніть самостійно.



$O \in AB$, $R = c : 2$

↓↑

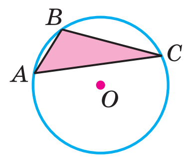
$\triangle ABC$ – прямокутний



$\angle C = 90°$

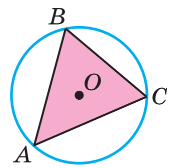
↓↑

$m_c = c : 2$



$\triangle ABC$ – тупокутний

$O \notin \triangle ABC$



$\triangle ABC$ – гострокутний

$O \in \triangle ABC$

Практична робота 29

1. Позначте в зошиті дві точки A і B. Проведіть через них коло. Як ви це зробили? Скільки кіл можна провести через ці дві точки?
2. Проведіть через дві задані точки найбільше з усіх можливих кіл. Як ви це зробили?
3. Накресліть довільний гострокутний трикутник на окремому аркуші й виріжте його. Як, перегинаючи гострокутний трикутник, знайти центр кола, описаного навколо нього? Виконайте дії і перевірте, що знайдена точка насправді є центром описаного кола.
4. Накресліть три кола. Проведіть у кожному з них хорду AB. На кожному з малюнків відкладіть від AB з вершиною в точці B відповідно гострий, прямий та тупий кути так, щоб друга сторона утвореного кута перетинала коло. Позначте точку їх перетину через C. На кожному з малюнків сполучіть точки A і C. Проаналізуйте розміщення утворених трикутників і центрів описаних навколо них кіл.

Задачі та вправи

519°. Накресліть довільний: **а)** гострокутний трикутник; **б)** прямокутний трикутник; **в)** тупокутниий трикутник. За допомогою косинця знайдіть центр описаного навколо нього кола і проведіть це коло.

520°. У рівносторонньому трикутнику проведено дві медіани. Чи можна вважати точку їх перетину центром описаного кола?

521. Навколо правильного трикутника ABC описано коло із центром O.
1°) Доведіть рівність трикутників AOB, BOC і AOC.
2°) Під яким кутом бачимо з точки O сторону цього трикутника?
3°) Доведіть, що O є точкою перетину бісектрис цього трикутника.
4) Знайдіть радіус цього кола, якщо медіана AP трикутника ABC дорівнює 12 см.

522°. Доведіть, що трикутник є рівнобедреним, якщо центр описаного навколо трикутника кола належить: **а)** його висоті; **б)** його медіані; **в)** його бісектрисі.

523. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, якщо висота трикутника дорівнює: **а)** 36 см; **б)** 108 см.

524. Радіус кола, описаного навколо правильного трикутника, дорівнює 4 м. Знайдіть: **а)** відстань від центра цього кола до сторони заданого трикутника; **б)** висоту даного трикутника; **в)** бісектрису і медіану заданого трикутника.

525°. Центр кола, описаного навколо трикутника, міститься на його стороні. Визначте вид трикутника.

526°. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює 8 см. Знайдіть: **а)** гіпотенузу трикутника; **б)** медіану, проведену до гіпотенузи трикутника.

527°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника, якщо центр кола міститься на стороні трикутника, довжина якої дорівнює 5 см.

528. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 6 см. Знайдіть: **а)** радіус кола, описаного навколо трикутника; **б)** гіпотенузу трикутника.

529. Медіана трикутника дорівнює половині сторони трикутника, до якої її проведено. Знайдіть довжину вказаної сторони трикутника, якщо радіус кола, описаного навколо трикутника, дорівнює 10 м.

530. Через центр кола, описаного навколо трикутника ABC, провели пряму n, перпендикулярну до AC і яка перетинає сторону CB у точці E. Знайдіть довжину відрізка AE, якщо $CE = 10$ см.

531. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC з основою AC, лежить на медіані BB_1 або на її продовженні.

532. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника ABC, якщо сторона AB є діаметром кола, описаного навколо даного трикутника.

533. Центр кола, описаного навколо трикутника, міститься на його стороні. Доведіть, що цей трикутник прямокутний.

534*. Навколо рівнобедреного трикутника ABC ($AC = AB$) описано коло із центром O.
1) Під яким кутом видно сторону CB з точки O, якщо: **а)** $\angle BAC = 20°$; **б)** $\angle BAC = 30°$; **в)** $\angle BAC = 60°$?

2) Знайдіть радіус даного кола, якщо відстань від точки O до BC дорівнює 2 дм, а $\angle BAC = 60°$.

3) Доведіть, що $\angle BOC$ удвічі більший за $\angle AOC$.

О.З. **535*. Якщо центр кола, описаного навколо трикутника ABC, лежить: а) зовні трикутника, то трикутник тупокутний; б) на стороні, то трикутник прямокутний; в) усередині трикутника, то трикутник гострокутний. Доведіть це.**

536.** Відрізок AB рухається так, що його кінці лишаються на сторонах даного прямого кута. Знайдіть геометричне місце точок середин цього відрізка.

Для допитливих

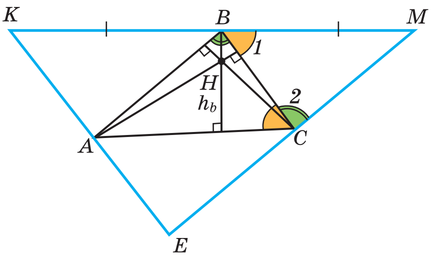
Доведемо, користуючись властивостями кола, описаного навколо трикутника, що його висоти перетинаються в одній точці.

Т Теорема. **Прямі, яким належать висоти трикутника, перетинаються в одній точці – ортоцентрі трикутника.**

Доведення

Нехай дано трикутник ABC і його висоти h_a, h_b і h_c. Доведемо, що вони перетинаються в одній точці.

Проведемо через вершини трикутника ABC прямі, паралельні його сторонам. Позначимо точки перетину цих прямих через K, M і E (див. мал.).



1) $KM \parallel AC$, BC – січна. Тоді $\angle 1 = \angle C$ (внутрішні різносторонні).

2) $EM \parallel AB$, BC – січна. Тоді $\angle 2 = \angle B$ (внутрішні різносторонні).

3) У трикутниках ABC і MBC сторона BC – спільна, $\angle 1 = \angle C$, $\angle 2 = \angle B$. Тоді $\triangle ABC = \triangle MBC$ (за другою ознакою) і $BM = AC$.

4) Аналогічно маємо, що $KB = AC = BM$, тобто B – середина відрізка KM.

5) $KM \parallel AC$, $h_b \perp AC$. Тоді $h_b \perp KM$, тобто h_b належить серединному перпендикуляру до відрізка KM.

6) Аналогічно маємо, що h_a належить серединному перпендикуляру до BC, а h_c – серединному перпендикуляру до AB.

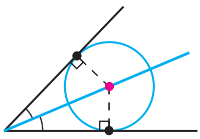
7) Серединні перпендикуляри до сторін трикутника KME перетинаються в одній точці H, яка є центром кола, описаного навколо цього трикутника. Тоді h_a, h_b і h_c перетинаються в одній точці.

Теорему доведено.

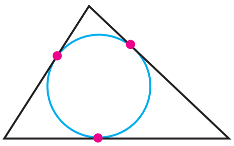
§ 28. Коло, вписане у трикутник

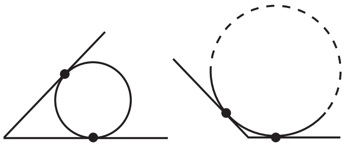
Коло називають вписаним у кут, якщо воно дотикається до обох його сторін (мал. 165).

Коло називають вписаним у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін (мал. 166).

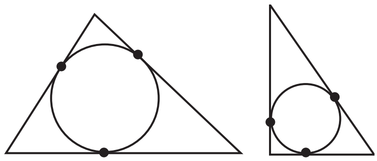


вписане коло



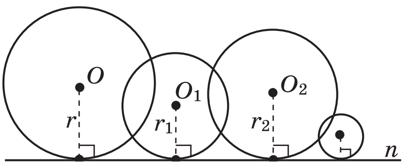


Мал. 165

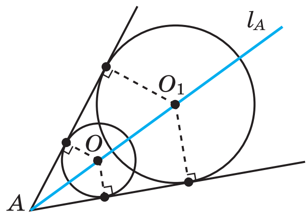


Мал. 166

Існує безліч кіл, що дотикаються до заданої прямої. Центром таких кіл є будь-яка точка площини, що не лежить на заданій прямій, а радіусами – відстані від цих точок до прямої (мал. 167).

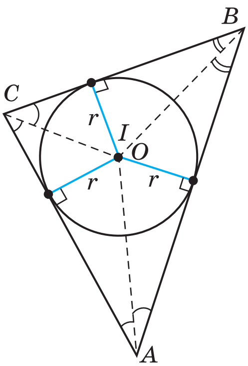


Мал. 167



Мал. 168

У трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне.



$O \equiv I$ – точка перетину бісектрис (інцентр).
$d\ (I;\ AB) = r$
$d\ (I;\ AC) = r$
$d\ (I;\ CB) = r$

Існує безліч кіл, які дотикаються до обох сторін заданого кута. Але центр такого кола не може обиратися довільно – ним має бути точка, рівновіддалена від сторін кута. Геометричним місцем точок (всередині кута), рівновіддалених від сторін кута, є його бісектриса. Тоді **центр кола, вписаного в кут, лежить на бісектрисі цього кута** (мал. 168).

Т е о р е м а. **Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці, рівновіддаленій від сторін трикутника.**

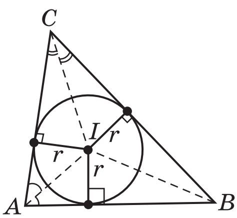
Д о в е д е н н я

Розглянемо довільний трикутник ABC (мал. 169), де I – точка перетину його бісектрис l_A і l_C.

Тоді $d(I;\ AB) = d(I;\ AC)$;
$d(I;\ AC) = d(I;\ BC)$.

Отже, $d(I;\ AB) = d(I;\ BC) = d(I;\ AC)$, тобто $BI \equiv l_B$ і точка I рівновіддалена від усіх сторін трикутника ABC.

Теорему доведено.



Мал. 169

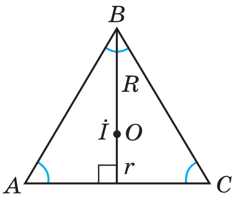
З доведеної теореми маємо такі наслідки.

Наслідок 1. **У трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне.**

Наслідок 2. **Центр кола, вписаного в трикутник (інцентр), є точкою перетину його бісектрис.**

Зауваження. **Центр кола, вписаного в правильний трикутник, збігається із центром трикутника,** що є для такого трикутника і ортоцентром, і інцентром, і центроїдом, а висота є бісектрисою і медіаною. Медіани трикутника точкою їх перетину діляться у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини (див. § 14). Тоді **радіус кола, вписаного в правильний трикутник, дорівнює третині висоти цього трикутника і вдвічі менший за радіус кола, описаного навколо цього трикутника.**

$\triangle ABC$ – правильний



$r = \frac{1}{3}h_a = \frac{1}{3}h_b = \frac{1}{3}h_c$

$2r = R$

$\dot{I} \equiv O$ – центр $\triangle ABC$

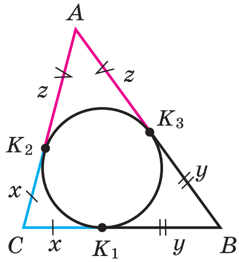
$\equiv$ – «збігається», «тотожна рівність»

$\triangleq$ – «позначили як»

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. **Відстань від вершини трикутника до точки дотику вписаного в цей трикутник кола дорівнює різниці півпериметра трикутника і довжини сторони, яка лежить навпроти вказаної вершини.** Доведіть це.

Дано: K_1, K_2, K_3 – точки дотику.
Довести: $AK_3 = p - a$.

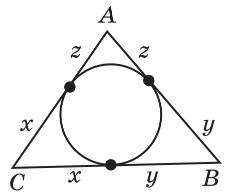


$2p \triangleq a + b + c$

1) Нехай $2p = a + b + c$, де p – півпериметр трикутника ABC; a, b, c – довжини сторін трикутника. Позначимо, користуючись властивістю відрізків дотичних:

$CK_1 = CK_2 \triangleq x$; $BK_1 = BK_3 \triangleq y$;
$AK_2 = AK_3 \triangleq z$.

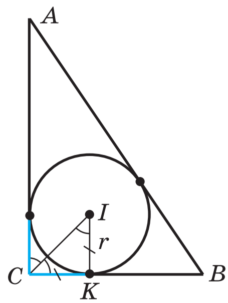
2) Маємо: $2p = 2x + 2y + 2z$; $p = x + y + z$;
$z = p - (x + y) = p - a$. *Щ. в. д.*



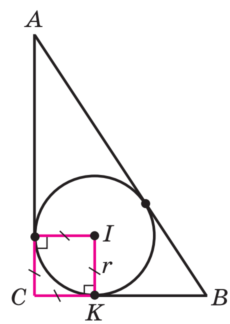
$z = p - a$
$y = p - b$
$x = p - c$
p – півпериметр

Приклад 2. **Доведіть, що радіус r кола, вписаного в прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), обчислюється за формулою $r = p - c$.**

1) Нехай I – центр вписаного кола. Тоді CI – бісектриса кута C, $\angle ACI = \angle ICK = 45°$.
2) K – точка дотику вписаного кола. Тоді $IK \perp CB$.
3) У $\triangle IKC$: $\angle K = 90°$, $\angle ICK = 45°$. Тоді $\angle CIK = 45° = \angle ICK$, $CK = IK = r$.



$\angle C = 90°$

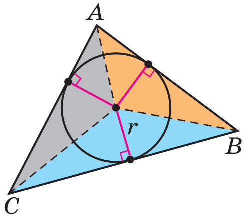


$r = p - c$

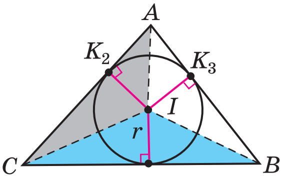
4) K – точка дотику вписаного кола. Тоді $CK = p - c$ (О.З. приклад 1, с. 143), отже, $r = p - c$.

Щ. в. д.

О.З. П р и к л а д 3. **Доведіть, що площа трикутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус кола, вписаного в цей трикутник.**



$S_\triangle = p \cdot r$



1) Оскільки K_1, K_2, K_3 – точки дотику, то $IK_1 = IK_2 = IK_3 = r$. Тому $IK_1 \perp a$, $IK_2 \perp b$, $IK_3 \perp c$.
2) Із $\triangle CIB$, $\triangle AIC$, $\triangle AIB$:
$S_{ABC} = S_{CIB} + S_{CIA} + S_{AIB} =$

$$= S_{ABC} = \frac{1}{2}a \cdot r + \frac{1}{2}b \cdot r + \frac{1}{2}c \cdot r = \frac{a+b+c}{2} \cdot r = p \cdot r.$$

Щ. в. д.

Практична робота 30

1. Накресліть трикутник ABC і за допомогою транспортира проведіть у ньому бісектриси кутів A і B. Позначте точку їх перетину через I.

2. За допомогою косинця проведіть перпендикуляри з точки I до сторін трикутника. Виміряйте їх довжини. Впишіть в трикутник ABC коло. Як ви це зробили? Сформулюйте висновок.

Задачі та вправи

537°. Накресліть на окремому аркуші довільний трикутник та виріжте його. Як, перегинаючи трикутник, знайти центр кола, вписаного в цей трикутник? Виконайте дії і перевірте, що знайдена точка – справді центр вписаного кола.

538°. У рівносторонній трикутник вписано коло і навколо нього описано коло. 1) Доведіть, що центри цих кіл збігаються. 2) Знайдіть відношення радіусів вписаного та описаного кіл даного трикутника.

539°. Висота правильного трикутника дорівнює 12 см. Знайдіть радіуси вписаного та описаного кіл даного трикутника.

540°. Знайдіть довжину бісектриси рівностороннього трикутника, якщо радіус кола: а) вписаного у цей трикутник, дорівнює 5 см; б) описаного навколо даного трикутника, дорівнює 6 см.

541°. Периметр правильного трикутника ABC дорівнює 18 см. Знайдіть відстань від вершини A до точки дотику зі стороною AB вписаного в цей трикутник кола.

542°. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, якщо довжина його медіани дорівнює: **а)** 48 см; **б)** 126 см.

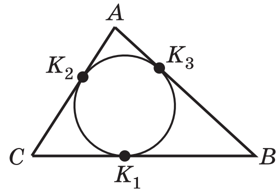
543°. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола міститься на висоті, що проведена до його основи.

544°. Доведіть, що трикутник є рівнобедреним, якщо центр вписаного в трикутник кола міститься на його: **а)** висоті; **б)** медіані.

545°. Під яким кутом видно сторону правильного трикутника з центра вписаного у нього кола?

546°. Коло, вписане в трикутник ABC, дотикається до його сторін у точках K_1, K_2, K_3 (мал. 170).

1) Знайдіть сторони цього трикутника, якщо $CK_1 = 2$ дм, $AK_2 = 1$ дм, $BK_3 = 3$ дм.
2) Знайдіть довжину сторони AB, якщо периметр трикутника дорівнює 24 см, $CK_1 = 4$ см, $AK_2 = 2$ см.



Мал. 170

547. У трикутник ABC вписане коло, яке дотикається до сторони AB у точці M. Нехай $AM = d$, $BC = a$. Знайдіть периметр трикутника ABC.

548. Доведіть, що в прямокутному трикутнику точка дотику вписаного кола відтинає від катета відрізок, що дорівнює радіусу цього кола.

549. Коло, радіус якого дорівнює 2 см, вписане в прямокутний трикутник і розбиває його гіпотенузу на відрізки 3 см і 10 см. Знайдіть периметр трикутника.

550. Знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник зі сторонами 3 м, 4 м і 5 м.

551. Радіус кола, вписаного в трикутник з периметром 24 см, дорівнює 2 см. Знайдіть площу цього трикутника.

552. Знайдіть радіус кола, вписаного в трикутник, площа якого – 6 см^2, а периметр – 12 см.

553. Знайдіть периметр прямокутного трикутника з гіпотенузою 5 м і радіусом вписаного кола 1 м.

554. Коло, вписане в прямокутний трикутник, ділить гіпотенузу точкою дотику на два рівних між собою відрізки. Знайдіть гострі кути цього трикутника.

555*. До кола, вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною a, проведено дотичну, яка перетинає дві сторони трикутника. Знайдіть периметр трикутника, який відтинається цією дотичною.

556*. Точка D лежить на стороні BC трикутника ABC. У трикутники ABD і ACD вписано кола із центрами O_1 і O_2. Доведіть, що відрізок O_1O_2 видно з точки D під прямим кутом.

557*. Коло відтинає на сторонах трикутника рівні між собою відрізки. Доведіть, що його центр є центром вписаного в трикутник кола.

558.** У трикутник зі сторонами 6 см, 10 см і 12 см вписано коло. До кола проведено дотичну так, що вона перетинає дві більші сторони трикутника. Знайдіть периметр трикутника, який відтинається цією дотичною.

559.** У рівнобедрений трикутник з основою a вписано коло і до цього кола проведено три дотичні, які відтинають від даного трикутника три маленьких трикутники, сума периметрів яких дорівнює m. Знайдіть бічну сторону даного трикутника.

560.** Коло, радіус якого дорівнює R, дотикається до гіпотенузи і продовжень катетів прямокутного трикутника. Знайдіть периметр трикутника.

Запитання для повторення до § 23–28

1. Поясніть, чим відрізняються між собою поняття кола й круга.
2. Яка з хорд кола є найбільшою? Чому?
3. Під яким кутом видно діаметр кола з точки на цьому колі? Чому?
4. **а)** Сформулюйте теорему про діаметр кола, перпендикулярний до його хорди. **б)** Сформулюйте теорему, обернену до теореми а).
5. **а)** Сформулюйте твердження про хорди, рівновіддалені від центра кола. **б)** Сформулюйте твердження, обернене до твердження а).
6. Яке твердження називають оберненим до даного? Чи вимагає воно доведення, якщо виконується перше з тверджень? Наведіть приклади.
7. Сформулюйте: **а)** означення дотичної до кола; **б)** властивості дотичної до кола.
8. Доведіть, що довжини двох дотичних, проведених зі спільної точки до одного кола, між собою рівні.
9. Доведіть, що відрізок, який сполучає центр кола з точкою поза ним, з якої провели до кола дві дотичні, є бісектрисою кута між цими дотичними.
10. **а)** Які два кола називають дотичними? **б)** Намалюйте зображення зовнішнього і внутрішнього дотику двох кіл. **в)** Як розміщені центри й точка дотику таких кіл і чому? **г)** Скільки дотичних можна провести до цих кіл у точці їх дотику і чому?
11. Які два кола називають концентричними?
12. Запишіть відстань між центрами двох кіл заданих радіусів, які: **а)** мають зовнішній дотик; **б)** мають внутрішній дотик; **в)** не мають спільних точок (два випадки); **г)** перетинаються.
13. Поясніть зміст словосполучення «УСІ ТОЧКИ» в означенні поняття геометричного місця точок площини.
14. Чому, щоб довести твердження про геометричне місце точок, треба провести два доведення? Наведіть приклад.
15. Сформулюйте означення кількох геометричних фігур як геометричного місця точок.
16. Сформулюйте властивість і ознаку: **а)** бісектриси кута як геометричного місця точок; **б)** серединного перпендикуляра до відрізка як геометричного місця точок.
17. Зобразіть ГМТ: **а)** що рівновіддалені від даної точки на задану відстань; **б)** що рівновіддалені від даної прямої на задану відстань; **в)** що рівновіддалені від двох даних паралельних між собою прямих; **г)** що рівновіддалені від двох прямих, які перетинаються; **д*)** хорд заданої довжини, рівновіддалених від центра кола.
18. Скільки кіл можна провести через: **а)** дану точку; **б)** дві дані точки; **в)** три дані точки? Укажіть розміщення центрів відповідних кіл.
19. Яке коло називають описаним навколо трикутника? Де міститься центр такого кола і чому?
20. Скільки можна провести кіл, дотичних до: **а)** даної прямої; **б)** сторін даного кута; **в)** трьох сторін даного трикутника? Де містяться центри відповідних кіл і чому?

21. Яке коло називають вписаним у даний трикутник? Де міститься центр такого кола? Чому?

22. Чи може центр кола, описаного навколо трикутника, збігатися із центром кола, вписаного в цей трикутник?

23. Доведіть, що в правильному трикутнику радіус описаного кола вдвічі більший за радіус вписаного.

24. Як обчислити довжину відрізка, що відтинається від сторони трикутника точкою дотику вписаного в цей трикутник кола, через півпериметр трикутника і довжину однієї з його сторін? Відповідь обґрунтуйте.

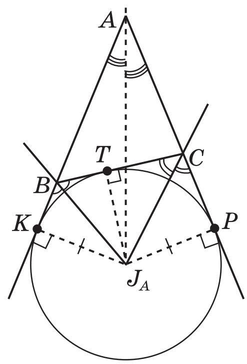
25. Доведіть, що точка перетину бісектриси трикутника з його стороною рівновіддалена від двох інших його сторін.

26. Якщо точка на стороні трикутника рівновіддалена від його сторін, то вона лежить на бісектрисі цього трикутника. Доведіть.

27. Як сформулювати зазначені у двох попередніх пунктах властивості трикутника через поняття ГМТ?

Для допитливих

Зовнівписане коло трикутника



Як було доведено раніше, бісектриси трикутника перетинаються у точці (інцентрі), яка рівновіддалена від сторін трикутника. А якщо шукати точку, рівновіддалену від прямих, що містять сторони трикутника?

Розглянемо трикутник ABC. Проведемо бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C трикутника. Точку їх перетину позначимо через J_A. Вона рівновіддалена від прямих AC, CB та AB і є центром кола, яке дотикається до сторони BC трикутника та продовжень двох інших його сторін.

Зауважимо, що оскільки J_a рівновіддалена від сторін кута BAC, то через неї проходить бісектриса кута A.

Коло називають зовнівписаним колом трикутника, якщо воно дотикається до однієї зі сторін трикутника і продовжень двох інших його сторін.

Доведемо таку властивість зовнівписаного кола.

Якщо зовнівписане коло дотикається до сторони BC трикутника ABC, то подвоєна відстань між вершиною A і точкою дотику кола до прямої AC дорівнює периметру трикутника.

Позначимо точки дотику кола до прямих AB, AC і BC через K, T, P відповідно (див. мал.).

1) $BK = BT$, як відрізки дотичних, проведених з точки B.

2) $CT = CP$, як відрізки дотичних, проведених з точки C.

3) $P_{\triangle ABC} = P = AB + BT + TC + CA = AB + BK + TC + CA = AK + AP$.

4) $AK = AP$, як відрізки дотичних, проведених з точки A.

Маємо $AK = AP = P : 2 = p$.

Твердження доведено.

Додаткові задачі до § 23–28

561. На круглому торті довільним чином розмістили круглу шоколадку. Як одним розрізом поділити і торт, і шоколадку на дві рівних частини? А якщо торт буде квадратним? А якщо торт має форму прямокутника?

562. Скільки спільних точок мають два кола, радіуси яких відповідно дорівнюють 23 см і 35 см, якщо відстань між їх центрами: **а)** 10 см; **б)** 12 см; **в)** 21 см; **г)** 40 см; **д)** 58 см; **е)** 62 см?

563. CH – висота прямокутного трикутника ABC, проведена з вершини прямого кута. Доведіть, що сума радіусів кіл, вписаних у трикутники ACH, BCH, ABC, дорівнює CH.

564. Знайдіть геометричне місце точок центрів кіл даного радіуса R, кожне з яких дотикається до даної прямої a.

565. Дано точки A і B. Знайдіть геометричне місце точок, відстань від яких до точки A більша за їх відстань до точки B.

566. Дано кут AOB. Знайдіть геометричне місце точок, відстань від яких до променя OA не менша від відстані до променя OB.

567. Два кути трикутника дорівнюють 20° і 60°. Коло, вписане в цей трикутник, дотикається до його сторін у точках K_1, K_2, K_3. Знайдіть кути трикутника $K_1K_2K_3$.

568. Пряма, що проходить через дві з трьох точок дотику вписаного в трикутник кола, паралельна третій стороні. Доведіть, що цей трикутник рівнобедрений.

569. Доведіть, що для довільного трикутника з висотами h_a, h_b, h_c і радіусом вписаного кола r виконується рівність $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}$.

570. Два кола, що мають зовнішній дотик, дотикаються внутрішньо до третього кола. Знайдіть периметр трикутника, вершинами якого є центри цих кіл, якщо радіуси цих кіл дорівнюють R_1, R_2, R_3.

571. Коло із центром O дотикається внутрішньо до більшого кола в точці A. З точки B більшого кола, яка є діаметрально протилежною точці A, провели хорду BC більшого кола, яка дотикається до меншого кола в точці M. Доведіть, що $OM \parallel AC$.

572. У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 30°. Доведіть, що в цьому трикутнику відрізок серединного перпендикуляра до гіпотенузи, що міститься всередині трикутника, утричі менший від його більшого катета.

573. Доведіть, що точка перетину бісектрис трикутника ABC, точки B і C, а також точка перетину бісектрис зовнішніх кутів з вершинами в точках B і C лежать на одному колі.

574. Нехай A, B, C – точки площини, які не лежать на одній прямій. Знайдіть геометричне місце точок M площини таких, що: **а)** пряма CM перетинає відрізок AB; **б)** промінь CM перетинає відрізок AB; **в)** відрізок CM перетинає відрізок AB; **г)** $AM = BM = CM$.

575. Дано коло і точку A на ньому. Знайдіть геометричне місце точок M таких, щоб задане коло відрізок AM ділило навпіл.

576. Усередині круга позначили точку. Розріжте круг на: **а)** дві; **б)** три частини так, щоб з них можна було скласти новий круг, у якого позначена точка була б центром.

Готуємося до тематичного оцінювання № 6

ВАРІАНТ 1

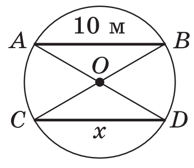
До завдання 1 наведено п'ять відповідей, з яких лише ОДНА є правильною. Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. (1 б.) Укажіть відстань між центрами кіл радіусів 10 см і 3 см, які дотикаються внутрішньо.

А	Б	В	Г	Д
$O_1O_2 = 10$ см	$O_1O_2 > 7$ см	$O_1O_2 = 7$ см	$O_1O_2 < 7$ см	$O_1O_2 = 13$ см

До задач 2–4 запишіть тільки відповідь.

2. (1 б.) За малюнком 171 знайдіть x, якщо O – центр кола і $AB \parallel CD$.



Мал. 171

3. (1 б.) Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, якщо радіус кола, вписаного в нього, дорівнює 4 дм.

4. (4 б.) До кожного твердження стовпчика ліворуч доберіть правильний коментар зі стовпчика праворуч. Запишіть кожну таку пару (число–літера) у відповідь до завдання.

1. Коло радіуса 6 см можна описати навколо трикутника, одна зі сторін якого дорівнює 8 см.
2. Якщо центр кола, описаного навколо трикутника, міститься на його стороні, то такий трикутник – рівносторонній.
3. Радіуси вписаного й описаного кіл деякого трикутника можуть бути між собою рівними.
4. Дотичні до кола, проведені через кінці діаметра, паралельні між собою.

А. Твердження є правильним.
Б. Цього бути не може.
В. Не завжди.

До задач 5–6 запишіть розв'язання (з виділенням логічних кроків).

5. (2 б.) У колі із центром O проведено діаметр CD і хорду CM. $\angle OMC = 36°$. Знайдіть $\angle MOD$.

6. (3 б.) AB – дотична до кола із центром у точці O (B – точка дотику), C – точка, що лежить на колі. Знайдіть градусну міру кута ABC, якщо $\angle BOC = 54°$.

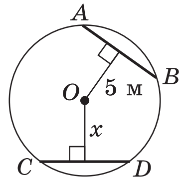
ВАРІАНТ 2

До завдання 1 наведено п'ять відповідей, з яких лише ОДНА є правильною. Оберіть правильну, на вашу думку, відповідь.

1. (1 б.) Знайдіть відстань між центрами кіл радіусів 12 см і 4 см, які дотикаються зовнішньо.

А	Б	В	Г	Д
$O_1O_2 = 8$ см	$O_1O_2 = 16$ см	$O_1O_2 < 8$ см	$O_1O_2 < 16$ см	$O_1O_2 > 16$ см

До задач 2–4 запишіть тільки відповідь.



Мал. 172

2. (1 б.) За малюнком 172 знайдіть x, якщо O – центр кола і $AB = CD$.

3. (1 б.) Знайдіть радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, якщо радіус кола, описаного навколо нього, дорівнює 8 дм.

4. (4 б.) До кожного твердження стовпчика ліворуч оберіть правильний коментар зі стовпчика праворуч. Запишіть кожну таку пару (число–літера) у відповідь до завдання.

1. Якщо центр кола, описаного навколо трикутника, міститься на його стороні, то такий трикутник – прямокутний.
2. Центри описаного й вписаного кіл трикутника збігаються.
3. Площа довільного трикутника дорівнює добутку його півпериметра на радіус кола, вписаного в цей трикутник.
4. Радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, дорівнює його стороні.

А. Твердження є правильним.
Б. Цього бути не може.
В. Не завжди.

До задач 5 і 6 запишіть розв'язання (з виділенням логічних кроків).

5. (2 б.) У колі із центром O проведено діаметр CD і хорду CM. $\angle MOD = 36°$. Знайдіть $\angle OMC$.

6. (3 б.) Із точки A, що лежить поза колом із центром у точці O, проведено дотичні AB і AC (B і C – точки дотику). Відомо, що $\angle BAC = 60°$. Знайдіть довжину радіуса кола, якщо $OA = 12$ см.

§ 29. Задачі на побудову та їх розв'язування

Розв'язати задачу на побудову означає:
1) указати послідовність елементарних побудов;
2) довести, що саме ця фігура є шуканою.

Елементарні побудови виконуються за допомогою лінійки (без метричних поділок) і циркуля.

Протягом вивчення курсу геометрії ви неодноразово виконували завдання на побудову геометричних фігур за певними даними, використовуючи для цього лінійку, косинець, транспортир, циркуль. У цьому розділі ми будуватимемо фігури лише за допомогою «класичних» інструментів, тобто таких, якими користувалися геометри ще в Стародавній Греції. Це циркуль і лінійка без метричних поділок.

Розв'язати задачу на побудову геометричної фігури – це значить указати послідовність елементарних побудов, після виконання яких отримаємо певну фігуру, і *довести*, що саме ця фігура має властивості, передбачені умовою, тобто *що саме ця фігура є шуканою.*

Елементарні побудови виконуються за допомогою лінійки (без метричних поділок) і циркуля.

При цьому варто пам'ятати таке.

За допомогою лінійки можна провести:

– довільну пряму;

– довільну пряму, що проходить через задану точку;
– пряму, що проходить через дві задані точки.

Зауважимо, що ніяких інших операцій виконувати лінійкою не можна, зокрема, не можна відкладати відрізки заданої довжини або використовувати косинець для побудови прямого кута.

За допомогою циркуля можна:
– провести коло або його частину (дугу) з даного центра даним радіусом;
– відкласти на даній прямій відрізок даної довжини.

ЕТАПИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ

Для розв'язування задач на побудову можна виділити такі етапи.

1. Аналіз – міркування в процесі пошуку способів розв'язування. (Коли припускається, що шукану побудову виконано.)

Запис цього етапу розв'язання *не є обов'язковим* і його можна наводити в довільній формі або не наводити зовсім (не записувати).

2. План побудови – *є обов'язковим* елементом запису розв'язування. Наводиться послідовний *план* (алгоритм) побудови, у якому використовуються дані за умовою елементи та опорні задачі на побудову.

3. Доведення – *є обов'язковим* елементом запису розв'язування. Треба довести, що побудована фігура є тією, яку вимагалося побудувати, тобто *шуканою*. (Доведення починаємо з переліку того, що маємо за побудовою.)

4. Дослідження – з'ясування умов, коли за даними елементами відповідна побудова можлива, а коли ні. (Цей етап не є обов'язковим елементом розв'язування.)

З а у в а ж е н н я. У запису плана побудови не треба описувати, як саме здійснюються *опорні побудови*, використані при розв'язуванні задачі. Перелік відповідних опорних задач буде наведено в узагальнюючій схемі в кінці розділу.

ОСНОВНІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

Розглянемо *основні побудови*, які надалі будуть опорними «деталями» в інших побудовах.

Радимо опрацювати наведені далі задачі на побудову практично, тобто виконати власноруч вказані кроки відповідного плану побудови.

У **розв'язуванні** та запису задач на побудову виділяємо етапи:
1. Аналіз.
2. Побудова.
3. Доведення.
4. Дослідження.

Аналіз (запис не обов'язковий) – уявити, що побудова здійснена, і міркувати.

У запису **побудови** спираємося на:
1. Елементарні побудови.
2. Опорні задачі побудови.

Доведення починаємо з переліку того, що маємо за побудовою.

Дослідження – дослідження того, коли відповідна побудова можлива, а коли ні.

Нагадаємо позначення*:
$[a]$ – відрізок a;
(a) – пряма a;
$[OP)$ – промінь OP;
$\in$ – належить.

* Звертаємо увагу, що використання вказаної символіки не є обов'язковим.

1. Побудова суми і різниці двох відрізків

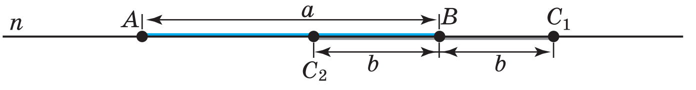
Нехай маємо два відрізки a і b (мал. 173):

Мал. 173

Побудуємо відрізки, що дорівнюють сумі та різниці відрізків a і b.

План побудови

1) За допомогою лінійки проведемо довільну пряму n (мал. 174).



Мал. 174

2) За допомогою циркуля на цій прямій відкладемо відрізок $AB = a$.

3) За допомогою циркуля на прямій від точки B по різні боки від неї відкладемо відрізки $BC_1 = BC_2 = b$. Отримаємо точки C_1 і C_2. Відрізки AC_1 і AC_2 – *шукані*.

Доведення

За аксіомою вимірювання відрізків маємо, що $AC_1 = a + b$, $AC_2 = a - b$.

Дослідження

Побудова відрізка $a - b$ можлива за умови $a > b$.

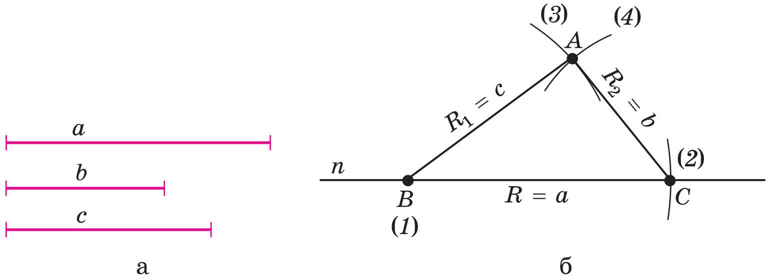
2. Побудова трикутника за трьома сторонами

Дано три відрізки, треба побудувати трикутник, сторони якого дорівнюють даним відрізкам.

Нехай маємо три відрізки a, b і c (мал. 175а):

Побудуємо трикутник, сторонами якого будуть саме відрізки такої довжини.

План побудови



Мал. 175

1) За допомогою лінійки проведемо довільну пряму n і позначимо на ній довільну точку B (*1*)* (мал. 175б).

* Номери в дужках на малюнку вказують послідовність дій.

2) На прямій n за допомогою циркуля відкладемо відрізок $BC = a$ (дуга (*2*)).
3) За допомогою циркуля опишемо дугу (*3*) кола радіуса c із центром у точці B.
4) У тій самій півплощині відносно прямої n, де провели дугу (*3*), опишемо дугу (*4*) кола радіуса b із центром у точці C.
5) Точку перетину дуг (*3*) і (*4*) позначимо через A і сполучимо її відрізками з точками C і B.

Трикутник ABC – шуканий.

Доведення

За побудовою маємо: $BC = a$, $CA = b$ і $AB = c$.

Дослідження

Чи завжди можлива вказана побудова?

Побудову можна виконати тоді, коли будь-який з даних відрізків менший за суму двох інших (за нерівністю для сторін трикутника).

3. Поділ відрізка навпіл

Дано відрізок, треба знайти його середину, тобто точку, що ділить його навпіл.

Нехай маємо відрізок AB. Знайдемо його середину.

Аналіз

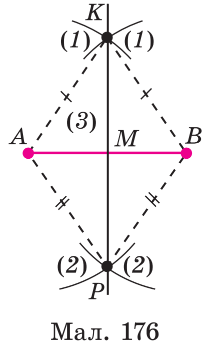
Середина відрізка лежить на серединному перпендикулярі, проведеному до цього відрізка (за властивістю серединного перпендикуляра).

План побудови

1) Із центрами в точках A і B опишемо дуги радіуса, більшого за половину відрізка AB, до їх перетину в точці K (в одній півплощині відносно прямої AB) і в точці P (в іншій півплощині відносно прямої AB) (мал. 176).

2) Через точки K і P проведемо пряму, яка перетне даний відрізок у точці M.

Точка M – *шукана*.



Мал. 176

Доведення

За побудовою маємо: $AK = BK$, $PA = PB$. Тоді KP – серединний перпендикуляр до відрізка AB, тобто KP проходить через його середину – точку M.

Щ. в. д.

4. Побудова прямої, перпендикулярної до даної, яка проходить через задану її точку

Через точку на заданій прямій треба побудувати перпендикулярну до неї пряму.

Нехай маємо пряму a і точку A на цій прямій. Проведемо через точку A пряму b таку, що $b \perp a$.

Аналіз

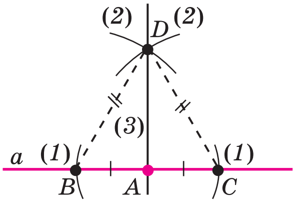
Точка A є однією з точок шуканої прямої. Щоб провести певну пряму, треба мати дві її точки. Очевидно, що друга точка не належить прямій a. Якби шукана пряма була серединним перпендикуляром до якогось відрізка, то така друга точка була б визначена як рівновіддалена від кінців цього відрізка.

План побудови

1) На даній прямій a за допомогою циркуля від точки A відкладаємо два рівних відрізки: $AB = AC$ (мал. 177).

2) Із центрами в точках B і C опишемо дуги (2) радіусом, більшим від попередніх відкладених відрізків в одній півплощині відносно a.

3) Точку перетину цих дуг позначимо через D. Через точки A і D проведемо пряму.



Мал. 177

Пряма AD і є *шуканою*.

Доведення

За побудовою маємо: точка A – середина відрізка BC, $BD = DC$ (за побудовою). Тоді точки A і D лежать на серединному перпендикулярі до відрізка BC, тобто $AD \perp a$.

Щ. в. д.

5. Побудова прямої, перпендикулярної до даної, яка проходить через точку, що лежить поза даною прямою

Через точку, що лежить поза даною прямою, треба побудувати пряму, перпендикулярну до даної прямої.

Нехай дано пряму a і точку A поза цією прямою. Проведемо через точку A пряму b таку, що $b \perp a$.

Аналіз

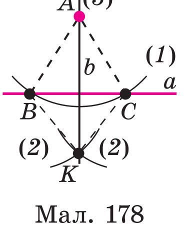
Аналогічно до попередньої побудови доцільно скористатися властивістю серединного перпендикуляра до відрізка.

План побудови

1) З точки A проведемо дугу довільного радіуса (більшого за відстань до прямої), яка перетне пряму a в точках B і C (мал. 178).

2) Із центрами в цих точках опишемо дуги радіусом, більшим за половину відрізка BC, в одній півплощині відносно прямої a так, щоб вони перетнулися. Точку їх перетину позначимо через K.

3) Через точки A і K проведемо пряму.



Мал. 178

Пряма AK і є *шуканою*.

Доведення

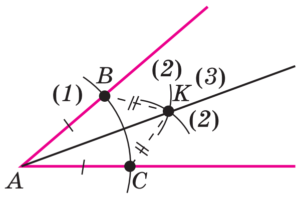
За побудовою маємо: $AB = AC$, $KB = KC$. Тоді точки A і K належать серединному перпендикуляру до відрізка BC, тобто $AK \perp a$.

Щ. в. д.

6. Побудова бісектриси кута

Нехай дано кут A. Треба побудувати його бісектрису.

П л а н   п о б у д о в и



Мал. 179

1) Із центром у точці кута A проведемо дугу довільного радіуса (*1*), яка перетне сторони кута в точках B і C (мал. 179).

2) Із центрами в точках B і C радіусом, більшим за половину відрізка BC, опишемо дуги (*2*) всередині кута до їх перетину. Отримаємо точку K.

3) З точки A через точку K проведемо промінь AK (*3*).

Промінь AK – *шукана* бісектриса кута A.

Д о в е д е н н я

За побудовою маємо: $AB = AC$, $BK = CK$, AK – спільна сторона трикутників ABK і ACK. Тоді $\triangle ABK = \triangle ACK$ (за третьою ознакою). Тоді $\angle BAK = \angle CAK$ (як відповідні кути рівних трикутників), тому $AK \equiv l_A$.

Щ. в. д.

7. Побудова кута, рівного даному

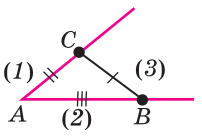
Треба побудувати кут, що буде рівним даному куту.

Нехай дано кут A і промінь OP. Від променя OP з вершиною в точці O відкладемо кут, рівний куту A.

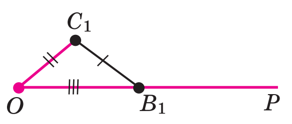
А н а л і з

У рівних між собою трикутниках відповідні кути рівні. Отже, треба побудувати трикутник з кутом A, а потім побудувати рівний йому трикутник.

П л а н   п о б у д о в и



Мал. 180



Мал. 181

1) Позначимо на сторонах даного кута дві довільні точки B і C та сполучимо їх відрізком (мал. 180). Отримали $\triangle ABC$.

2) Побудуємо за трьома сторонами трикутник OB_1C_1, рівний трикутнику ABC: $OB_1 = AB$ і належить променю OP, $OC_1 = AC$, $C_1B_1 = CB$ (мал. 181).

$\angle C_1OB_1$ – *шуканий*.

Д о в е д е н н я

За побудовою $\triangle OB_1C_1 = \triangle ABC$. Тоді $\angle O = \angle A$ (як відповідні кути рівних трикутників).

Щ. в. д.

Зауважимо, що побудова дещо спрощується, якщо на сторонах кута A відрізки AB і AC мають однакову довжину.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Наведені далі приклади можна розглядати як опорні задачі побудови, тобто в запису більш складних задач можливе посилання на них без деталізації кроків відповідної побудови.

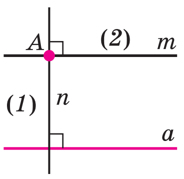
П р и к л а д 1. **Побудуйте пряму, що проходить через задану точку, паралельно даній прямій.**

Нехай дано пряму a і точку A поза нею. Проведемо через точку A пряму m таку, що $m \parallel a$.

А н а л і з

Якщо б ми мали такі паралельні прямі, то пряма, проведена перпендикулярно до однієї з них, була б перпендикулярною і до іншої.

П л а н п о б у д о в и



1) Через точку A проведемо пряму n, $n \perp a$.
2) Через точку A проведемо пряму m, $m \perp n$.

Пряма m – *шукана*.

Д о в е д е н н я

За побудовою маємо: $m \perp n$ і $a \perp n$. Тоді $m \parallel a$.
Щ. в. д.

П р и к л а д 2. **Знайдіть центр даного кола.**

Треба за допомогою геометричних побудов визначити положення центра даного кола.

Нехай дано коло, положення центра якого нам невідомо. Позначимо дане коло через γ.

А н а л і з

Центр кола, описаного навколо трикутника, є точкою перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

Для допитливих

Зауважимо, що розв'язування задачі на побудову нагадує життєву задачу побудови будинку.

А н а л і з. Спочатку приходить архітектор і малює ескіз (наближене зображення) будівлі, яка добре вписалася б у місцевість, якби була побудованою.

П л а н п о б у д о в и. Архітектор розробляє детальний план будівництва.

Д о в е д е н н я. Приходить комісія і перевіряє, чи відповідає споруда вимогам, які до неї висували.

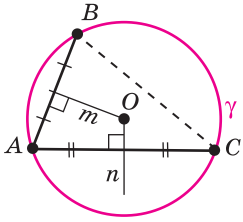
План побудови можна уявити як «інструкцію для будівельника», який розуміється на опорних задачах побудови.

План побудови

1) Позначимо на даному колі три довільні точки A, B і C. Сполучимо їх відрізками.

2) Побудуємо серединні перпендикуляри m і n до відрізків AB і AC (основна задача на побудову, с. 154). Точку їх перетину позначимо через O.

Точка O – *шукана*.

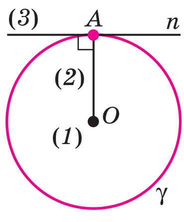


Доведення

За побудовою маємо: m – серединний перпендикуляр до AB, n – серединний перпендикуляр до AC. Тоді O, точка перетину m і n, є центром кола, описаного навколо трикутника ABC, тобто центром заданого кола γ. *Щ. в. д.*

0.3. Приклад 3. **Побудуйте дотичну до даного кола в заданій його точці.**

Нехай дано коло γ і точку A на ньому. Проведемо дотичну до кола γ в точці A.



План побудови

1) Знайдемо центр O кола (приклад 2).
2) Сполучимо точки A і O відрізком.
3) Проведемо пряму $n \perp OA$ в точці A (основна задача на побудову, с. 154).

Пряма n – *шукана*.

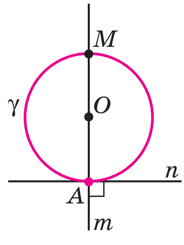
Доведення

За побудовою маємо: $OA \perp n$, OA – радіус кола. Тоді пряма n є дотичною до кола. *Щ. в. д.*

Запис розв'язування наведених раніше задач на побудову ми здійснювали дуже детально, мовою, близькою до повного пояснення. Тепер, коли ви отримали певний досвід розв'язування таких задач, пропонуємо навчитися скороченому запису їх розв'язання. Це дозволить не тільки зменшити обсяг записів та витрати часу на їх виконання, а й полегшить моделювання розв'язань для більш складних задач.

Приклад 4. Побудувати коло даного радіуса, яке дотикається до даної прямої в заданій точці.

Дано: n, $A \in n$, a.
Побудувати коло γ: $R = a$, дотичне до n у точці A.



Аналіз

Радіус кола – відстань від центра кола до дотичної.

План побудови

1) Будуємо: $m \perp n$, $A \in m$.
2) Відкладаємо на m $[AO] = a$.
3) Із центром O і $R = a$ описуємо коло γ.

Коло γ – *шукане*.

Доведення

За побудовою маємо: $OA = R = a$, $OA \perp n \to n$ – дотична до кола з $R = a$ в точці A. *Щ. в. д.*

Наведений план побудови скорочено можна записати ще й так.

1) $n, A \to [AM) \perp n$;

2) $[AM), a \to AO = a$;

3) $[AO] \to \gamma$ з ц. O і $R = a$.

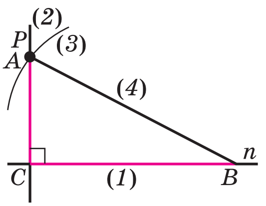
Зауваження. Остання форма запису зручна тим, що спрощує формування умови для етапу доведення. А саме: «*за побудовою маємо*» – це те, що стоїть праворуч від знака «→».

О.З. Приклад 5. **Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою.**

Дано: m, k.

Побудувати $\triangle ABC$: (1) $a = m$; (2) $c = k$; (3) $\angle C = 90°$.

План побудови



1) На довільній прямій n відкладаємо $[CB] = m$.

2) Побудуємо $CP \perp n$.

3) Із центром у точці B радіусом $R = k$ описуємо дугу до перетину з $[CP)$, отримали точку A.

4) Сполучаємо точки A і B.

$\triangle ABC$ – *шуканий*.

Доведення

За побудовою маємо: $a = m$; $c = k$; $\angle C = 90°$, тоді вимоги (1) – (3) виконуються. *Щ. в. д.*

Дослідження

Побудова можлива за умови $m < k$, бо гіпотенуза прямокутного трикутника довша за катет.

Зауваження. Під час пошуку розв'язання у пригоді стануть кольорові олівці. Задані умовою фігури (відрізки, кола, кути тощо) зображати, наприклад, червоним кольором, а ті, що можна знайти елементарними побудовами, – синім. Тоді легко буде побачити опорну задачу, яку можна використати в даній побудові (найчастіше – це трикутник, який вміємо будувати).

У наступних прикладах використаємо приклад 5 як опорну задачу.

Приклад 6. Побудуйте трикутник за його стороною і висотою та медіаною, проведеними до цієї сторони.

Дано: t; n; k.

Побудувати $\triangle ABC$: (1) $a = t$; (2) $h_a = n$; (3) $m_a = k$.

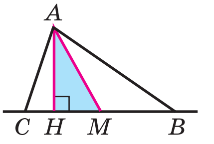
План побудови

1) $n, k \to \triangle AHM$ ($\angle AHM = 90°$, $AH = n$, $AM = k$).

2) $t \to t : 2$.

3) (HM), $M \to MB = \dfrac{t}{2}$, $CM = \dfrac{t}{2}$.

$\triangle ABC$ – *шуканий*.



Доведення

Маємо за побудовою: $\angle AHM = 90°$, $AH = n$, $AM = k$, $MB = CM = \frac{t}{2}$.

1) Виконується за побудовою: $AH \equiv h_a$, $AM \equiv m_a$, $AH = n$, $AM = k$ і (2), (3) дов.

2) $CB = CM + MB = \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = t$, і (1) вик.

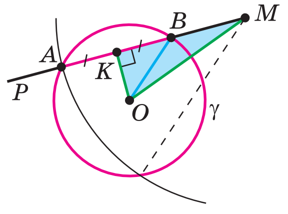
Щ. в. д.

Приклад 7. Через задану точку проведіть пряму, на якій дане коло відтинає хорду заданої довжини.

Дано: γ, a, M.

Побудувати (MP): $(MP) \cap \gamma = \{A; B\}$, $AB = a$.

План побудови



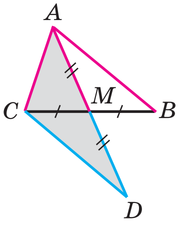
1) $\gamma \to O$ – центр, R;
2) $a \to a : 2$;
3) $\frac{a}{2}$, $R \to \triangle OKB$ (за катетом і гіпотенузою);
4) $[OK]$, $[OM] \to \triangle OKM$ (за катетом і гіпотенузою).
5) $[MK]$, $\frac{a}{2} \to \gamma_1$ з ц. M і $R = MK + \frac{a}{2}$.

Промінь MP – *шуканий* (два розв'язки).

Доведення

Проведіть самостійно.

О.З. Приклад 8. **Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.**



Дано: n, k, t.

Побудувати $\triangle ABC$: $AC = n$ (1), $AB = k$ (2), $m_a = t$ (3).

Аналіз

Див. О.З. приклад 3 (§ 18, с. 95).

План побудови

1) n, k, $2t \to \triangle ACD$ за трьома сторонами ($AC = n$, $CD = k$, $AD = 2t$).
2) $[AD] \to M$ – середина AD.
3) $[CM] \to MB = MC$.
$\triangle ABC$ – *шуканий*.

Доведення

Проведіть самостійно, спираючись на О.З. приклад 3 (§ 18, с. 95).

Практична робота 31

За допомогою циркуля й лінійки (без поділок) виконайте опорні задачі на побудову (див. § 30) за планом, наведеним до кожної з них.

Задачі та вправи*

577°. Дано відрізки a і b ($a > b$). Побудуйте відрізок: **а)** $2a$; **б)** $2a - b$; **в)** $b + 2a$; **г)** $a : 2$; **д)** $b : 4$.

578°. Побудуйте кут, градусна міра якого становить: **а)** 90°; **б)** 45°; **в)** 60°; **г)** 30°; **д)** 15°.

579°. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців заданого відрізка.

580°. Побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін заданого кута.

581°. Побудуйте геометричне місце точок, віддалених від заданої точки A на задану відстань a.

582°. Побудуйте геометричне місце точок, віддалених від заданої прямої n на задану відстань a.

583°. Побудуйте трикутник:
1) за стороною і двома прилеглими кутами;
2) за двома сторонами і кутом між ними;
3) за стороною і двома кутами, один з яких є протилежним до даної сторони.

584°. Побудуйте прямокутний трикутник:
1) за двома катетами;
2) за катетом і гіпотенузою;
3) за гіпотенузою і гострим кутом;
4) за катетом і прилеглим гострим кутом;
5) за катетом і протилежним гострим кутом.

585. Побудуйте кут градусної міри: **а)** 75°; **б)** 120°; **в)** 22°30′.

586. Побудуйте трикутник зі сторонами a, b, c, якщо дано три відрізки $b + c$, $b - c$, a.

587. Побудуйте трикутник зі сторонами a, b, c ($b > a$), якщо дано три відрізки $2b + c$, $2a + c$, a.

588. Побудуйте рівносторонній трикутник за радіусом: **а)** описаного навколо нього кола; **б)** вписаного в нього кола.

589. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник: **а)** за катетом; **б)** за гіпотенузою; **в)** за радіусом описаного навколо нього кола.

590. Впишіть у коло прямокутний трикутник: **а)** один з катетів якого проходить через дві задані точки; **б)** катети якого проходять через дві задані точки.

591. Побудуйте прямокутний трикутник, вершини якого лежать на трьох заданих паралельних прямих. Скільки розв'язків має задача?

592. Через задану точку всередині заданого кута проведіть пряму, яка відтинає на сторонах кута рівні відрізки.

---

* Під час пошуку розв'язання у пригоді може стати узагальнюючий конспект опорних задач на побудову (с. 174).

593. Через задану точку поза даним кутом проведіть пряму, яка відтинає на сторонах кута рівні відрізки.

594. Побудуйте коло, вписане в заданий кут. Скільки розв'язків має задача?

595. У даний кут впишіть коло, яке дотикається до однієї зі сторін цього кута в заданій точці.

596. Побудуйте трикутник за двома його сторонами і радіусом кола, описаного навколо цього трикутника.

597. Побудуйте трикутник за стороною і сумою та різницею двох прилеглих до неї кутів.

598. Побудуйте квадрат: **а)** за двома даними вершинами; **б)** за серединами двох протилежних сторін; **в*)** за серединами двох суміжних сторін; **г**)** за відрізком, довжина якого дорівнює сумі довжин сторони і діагоналі квадрата.

599*. Побудуйте трикутник ABC за сумами його сторін $a + b$, $b + c$ і $a + c$.

600*. Дано відрізок AB, розміщений з краю аркуша паперу. Потрібно до цього відрізка через його середину провести перпендикуляр. Як це зробити?

601*. Вершина C трикутника ABC не помістилася на малюнку. Побудуйте основи: а) висоти; б) бісектриси; проведених з вершини C.

602*. Побудуйте коло даного радіуса, вписане в заданий кут.

603*. Через задану точку всередині даного кута проведіть пряму, яка відтинає від цього кута рівнобедрений трикутник.

604*. Через задану точку, розміщену поза даним кутом, проведіть пряму, яка відтинає від цього кута рівнобедрений трикутник.

605*. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і висотою, проведеною до гіпотенузи.

606*. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і проекцією одного з катетів на гіпотенузу.

607.** Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.

608.** Побудуйте коло даного радіуса, яке дотикається до даної прямої і проходить через задану точку.

609.** Побудуйте такий трикутник, щоб три дані прямі, які перетинаються в одній точці, були його бісектрисами.

610.** Дано коло і точку A поза ним. Через точку A проведіть січну так, щоб коло відтинало на ній два рівних між собою відрізки.

Для допитливих

У моральному плані математика навчає нас суворо ставитися до того, що стверджується як істина, що висувається як аргумент чи висловлюється як доведення. Математика вимагає ясності понять та тверджень і не терпить ані туману, ані бездоказових заяв.

О. Д. Александров (1912–1999)
математик, фахівець з геометрії,
лауреат Міжнародної премії ім. Лобачевського

Наступні задачі допоможуть розв'язувати вправи на зовнівписане коло, про яке йшлося у рубриці «Для допитливих» (с. 147).

611**. Побудуйте коло, дотичне до трьох заданих прямих, які попарно перетинаються у трьох точках. (Знайдіть чотири розв'язки.)

612**. Побудуйте коло, дотичне до гіпотенузи та продовжень катетів прямокутного трикутника, не спираючись на побудову бісектрис кутів.

613**. У прямий кут впишіть коло так, щоб дотична до цього кола, проведена до меншої з дуг кола, обмежених точками дотику, відтинала від кута трикутник заданого периметра.

614**. Через задану всередині даного кута точку проведіть пряму, яка відтинає від цього кута трикутник заданого периметра.

615**. Через точку, задану поза даним кутом, проведіть пряму, яка відтинає від цього кута трикутник заданого периметра.

§ 30. Базові трикутники – опорні задачі на побудову

Приклади 6, 7 попереднього параграфа ми розв'язували за допомогою *базового трикутника*. Тобто спочатку навчилися будувати трикутник за трьома сторонами, прямокутний трикутник за катетом і гіпотенузою (приклад 5), а потім скористалися цим під час розв'язування задач у прикладах 6, 7.

Пошук розв'язування багатьох задач на побудову та його запис значно спрощуються через застосування базового трикутника. Суть такого підходу коротко можна сформулювати так: **«ШУКАЙ ТРИКУТНИК, який вмієш будувати»**.

У цьому параграфі ми розширимо перелік опорних задач на побудову трикутників. Запам'ятати цей перелік дуже легко – він відповідає ознакам рівності трикутників.

Базовими трикутниками *будемо називати трикутники, які ми вміємо будувати*.

Тоді під час розв'язування задач достатньо тільки вказати такі трикутники і, якщо ми вже вміємо їх будувати, описувати їх побудову не потрібно.

Застосування таких трикутників у задачах на побудову називають ***методом базових трикутників***. Цей метод значно спрощує розв'язування задач на побудову. Зазвичай після побудови базового трикутника нам стають відомими ті елементи шуканої фігури, яких не було дано в умові задачі.

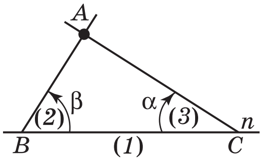
БАЗОВІ ТРИКУТНИКИ

1. Побудова трикутника за трьома сторонами

У § 29 ми вже розглядали таку задачу серед основних задач на побудову (с. 153).

2. Побудова трикутника за стороною і двома прилеглими до неї кутами (мал. 182)

Дано: m, α, β.
Побудувати $\triangle ABC$:
(1) $a = m$; (2) $\angle B = \beta$; (3) $\angle C = \alpha$.



Мал. 182

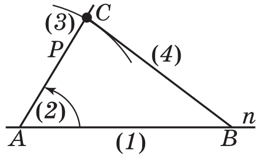
План побудови

1) На довільній прямій n відкладаємо $[BC] = m$.
2) Від прямої n з вершиною в точці B відкладаємо $\angle B = \beta$.
3) Від прямої n з вершиною в точці C відкладаємо $\angle C = \alpha$. Точку перетину не спільних сторін цих кутів позначаємо через A.
$\triangle ABC$ – *шуканий*.

Доведення

За побудовою маємо: $a = m$; $\angle B = \beta$; $\angle C = \alpha$, тоді вимоги (1) – (3) виконано. *Щ. в. д.*

3. Побудова трикутника за двома сторонами і кутом між ними (мал. 183).
Дано: m, k, α.
Побудувати $\triangle ABC$:
(1) $c = m$; (2) $b = k$; (3) $\angle A = \alpha$.



Мал. 183

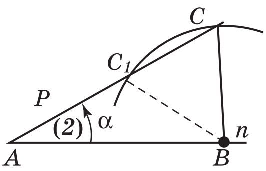
План побудови

1) На довільній прямій n відкладаємо $[AB] = m$ (мал. 183).
2) Від (n) з вершиною в точці A відкладаємо $\angle BAP = \alpha$.
3) На $[AP)$ відкладаємо $[AC] = k$.
4) Сполучаємо точки B і C відрізком.
$\triangle ABC$ – *шуканий*.

Доведення

За побудовою маємо: $c = m$; $b = k$; $\angle A = \alpha$, тоді вимоги (1) – (3) виконано. *Щ. в. д.*

4. Побудова трикутника за двома сторонами і кутом, що не лежить між ними (мал. 184).
Дано: m, k, α.
Побудувати $\triangle ABC$:
(1) $c = m$; (2) $a = k$; (3) $\angle A = \alpha$.



Мал. 184

План побудови

1) На довільній прямій n відкладаємо $[AB] = m$ (мал. 184).
2) Від прямої n з вершиною в точці A відкладаємо $\angle BAP = \alpha$.
3) Із центром у точці B і радіусом $R = k$ описуємо дугу, яка перетне промінь AP у точках C і C_1.
Маємо два розв'язки: $\triangle ABC$ і $\triangle ABC_1$.

Доведення

За побудовою маємо: $c = m$; $BC = BC_1 = k$; $\angle A = \alpha$, тоді вимоги (1) – (3) виконано. *Щ. в. д.*

Дослідження

Дослідження проведемо з використанням додаткового матеріалу § 19, у якому ми обговорювали рівність двох трикутників за двома сторонами і кутом, що не лежить між ними (див. с. 102).

Задача має один розв'язок у випадках, коли:

– шуканий трикутник є прямокутним;

– $\angle A$ – тупий;

– за умовою задачі $\triangle ABC$ – гострокутний;

– за умовою задачі $\angle C$ – тупий.

Зауваження. Ознаки базових трикутників збігаються з ознаками рівності трикутників.

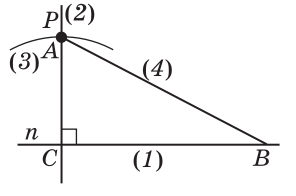
БАЗОВІ ПРЯМОКУТНІ ТРИКУТНИКИ

1. Побудова прямокутного трикутника за двома катетами.

Дано: m, k.

Побудувати $\triangle ABC$:

(1) $a = m$; (2) $b = k$; (3) $\angle C = 90°$.



Мал. 185

План побудови

1) На довільній прямій n відкладаємо $[CB] = m$ (мал. 185).

2) Будуємо $CP \perp n$.

3) На $[CP)$ відкладаємо $[CA] = k$.

4) Сполучаємо точки A і B.

$\triangle ABC$ – *шуканий*.

Доведення

За побудовою маємо: $a = m$; $\angle C = 90°$; $b = k$, тоді вимоги (1) – (3) виконуються.

Щ. в. д.

2. Побудова прямокутного трикутника за катетом і гіпотенузою

У § 29 ми вже розв'язували таку задачу (О.З. приклад 5, с. 158).

3. Побудова прямокутного трикутника за катетом і гострим кутом.

Випадок І. Заданий гострий кут є прилеглим до даного катета.

Дано: m, α.

Побудувати $\triangle ABC$: (1) $a = m$; (2) $\angle B = \alpha$; (3) $\angle C = 90°$.

План побудови

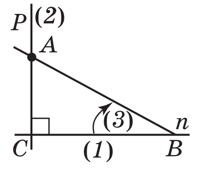
1) На довільній прямій n відкладаємо $[CB] = m$ (мал. 186).

2) Будуємо $CP \perp n$.

3) Від прямої n з вершиною в точці B відкладаємо $\angle B = \alpha$.

Точку перетину сторони цього кута, яка не належить (n), з $[CP)$ позначимо через A.

$\triangle ABC$ – *шуканий*.



Мал. 186

Д о в е д е н н я

За побудовою маємо: $a = m$; $\angle B = \alpha$; $\angle C = 90°$, тоді вимоги (1) – (3) виконуються. *Щ. в. д.*

Д о с л і д ж е н н я

Зрозуміло, що побудова завжди можлива для довільного відрізка m і $\alpha < 90°$.

В и п а д о к II. Заданий гострий кут є протилежним до даного катета.

Дано: m, β.

Побудувати $\triangle ABC$: (1) $a = m$; (2) $\angle A = \beta$; (3) $\angle C = 90°$.

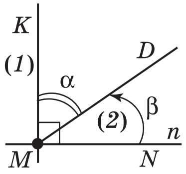
А н а л і з

Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°, тому прилеглий до даного катета кут дорівнює $90° - \beta$.

П л а н п о б у д о в и

1) До довільної прямої n проведемо перпендикуляр KM (мал. 187).

2) Від прямої n з вершиною в точці M відкладаємо кут β. Тоді $\angle KMD = 90° - \beta \triangleq \alpha$ дорівнює куту, прилеглому до заданого катета. Маємо випадок I.



Мал. 187

Д о с л і д ж е н н я

Побудова можлива за умови $\beta < 90°$.

4. Побудова прямокутного трикутника за гіпотенузою і гострим кутом.

Дано: m, α.

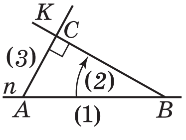
Побудувати $\triangle ABC$: (1) $c = m$; (2) $\angle B = \alpha$; (3) $\angle C = 90°$.

П л а н п о б у д о в и

1) На довільній прямій n відкладаємо $[AB] = m$ (мал. 188).

2) Від прямої n з вершиною в точці B відкладаємо $\angle ABK = \alpha$.

3) Через точку A проводимо перпендикуляр до KB. Основу цього перпендикуляра позначимо через C. $\triangle ABC$ – *шуканий*.



Мал. 188

Д о в е д е н н я

За побудовою маємо: $c = m$; $\angle B = \alpha$; $\angle C = 90°$, тоді вимоги (1) – (3) виконуються.

Щ. в. д.

Д о с л і д ж е н н я

Побудова завжди можлива за умови $\alpha < 90°$.

З а у в а ж е н н я. Повторити опорні задачі на побудову (зокрема, базових триктуників) вам допоможе таблиця на с. 174.

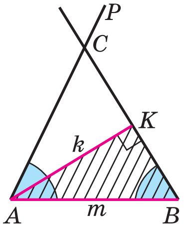
ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

Приклад 1. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою і висотою, проведеною до бічної сторони.

Дано: m, k.

Побудувати $\triangle ABC$: (1) $a = b$; (2) $c = m$; (3) $h_a = k$.

План побудови



1) $k, m \to$ *базовий* $\triangle AKB$ ($\angle K = 90°$, $AB = m$, $AK = k$).
2) Від $[AB]$ відкладаємо $\angle BAP = \angle B$. $(BK) \cap (AP) = C$. $\triangle ABC$ – *шуканий*.

Доведення

За побудовою маємо: $\angle K = 90°$, $AB = m$, $AK = k$; $\angle A = \angle B$.

1) Вимоги (2) і (3) виконуються за побудовою.
2) $\angle A = \angle B \to a = b$, і вимога (1) виконується. *Щ. в. д.*

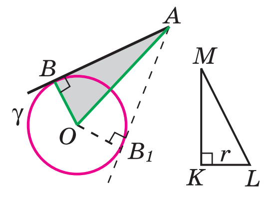
Дослідження

Побудова можлива при $m > k$.

0.3. Приклад 2. **Побудувати дотичну до даного кола, яка проходить через точку, задану поза колом.**

Дано: γ, A.

Побудувати: дотичну AB до γ.



Аналіз

Якщо AB – шукана дотична, OB – радіус кола, то $\triangle AOB$ – прямокутний з відомими гіпотенузою і катетом.

План побудови

1) $\gamma \to O$ – центр, r.
2) $[OA]$, $r \to$ *базовий* $\triangle KLM$ ($\angle K = 90°$, $LM = OA$, $KL = r$).
3) A, $[MK] \to \gamma$, з ц. A і $R = MK$, $\gamma_1 \cap \gamma = \{B; B_1\}$. AB (AB_1) – *шукана* дотична (два розв'язки).

Доведення

За побудовою маємо: $\angle K = 90°$, $KL = r$, $LM = OA$; $AB = MK$.

$\triangle OAB = \triangle KML$ (за трьома сторонами). Тоді $\angle OBA = 90°$ і AB – дотична до кола. *Щ. в. д.*

Дослідження

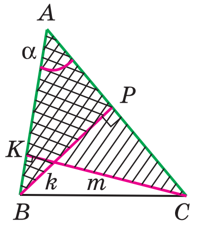
Побудова можлива завжди для точки A, що лежить поза колом. Можна провести рівно дві дотичні через задану точку, що лежить поза даним колом.

Приклад 3. Побудувати трикутник за кутом і висотами, проведеними до сторін, які утворюють даний кут.

Дано: α, m, k.

Побудувати $\triangle ABC$: (1) $A = \alpha$; (2) $h_b = k$; (3) $h_c = m$.

П л а н   п о б у д о в и



1) Будуємо *базовий* прямокутний трикутник BPA за катетом і протилежним гострим кутом: $\angle P = 90°$; $\angle A = \alpha$; $[BP] = k$. Маємо відрізок AB.

2) Будуємо *базовий* прямокутний трикутник CKA за катетом і протилежним гострим кутом: $\angle K = 90°$; $\angle A = \alpha$; $[KC] = m$. Маємо відрізок AC.

3) Будуємо трикутник ABC за двома сторонами AB і AC та кутом між ними α.

$\triangle ABC$ – *шуканий*.

Д о в е д е н н я

За побудовою маємо: $\angle A = \alpha$, $BP = k$, $BP \perp AC$, $CK = m$, $CK \perp AB$. Вимоги (1) – (3) *виконуються* за побудовою.

З а у в а ж е н н я. План побудови для цієї задачі можна скорочено записати так:

1) α; $k \to \triangle BPA$ ($\angle P = 90°$, $\angle A = \alpha$; $BP = k$);

2) α; $m \to \triangle CAK$ ($\angle K = 90°$, $\angle A = \alpha$; $CK = m$);

3) $[AC]$, $[AB]$, $\alpha \to \triangle ABC$ (за двома сторонами і кутом між ними).

Задачі та вправи*

616. Побудуйте рівнобедрений трикутник за висотою, проведеною до основи, і кутом при основі.

617. Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом при основі і бічною стороною.

618. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

619. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

620. Побудуйте трикутник за кутом, бісектрисою цього кута і однією зі сторін трикутника, прилеглих до цього кута.

621. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і медіаною, проведеною до іншого катета.

622. Побудуйте трикутник за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої його сторони.

623*. Побудуйте трикутник за стороною і проведеними до неї висотою і медіаною.

624. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою і кутом при вершині.

625. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною і проведеною до неї висотою.

626. Побудуйте трикутник за радіусом вписаного в нього кола і відрізками, на які точка дотику ділить одну з його сторін.

627*. Побудуйте прямокутний трикутник за гострим кутом і радіусом вписаного кола.

---

* Не забувайте про базові трикутники! Намагайтеся знайти такий трикутник ще на етапі аналізу задачі на побудову. У цьому пошуку вам допоможуть «Відповіді і поради» та табличка на с. 174.

628. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.

629*. Побудуйте трикутник за його висотою і двома кутами.

630*. Побудуйте трикутник за його висотами і кутом між сторонами, до яких проведено ці висоти.

631. Побудуйте прямокутний трикутник за висотою і медіаною, проведеними до гіпотенузи.

632. Побудуйте трикутник за стороною, протилежним кутом і висотою, проведеною до однієї з двох інших сторін.

633*. Побудуйте трикутник за стороною і висотами, проведеними до двох інших сторін.

634*. Побудуйте трикутник за його кутом та бісектрисою і висотою, що проведені з вершини цього кута.

635*. Побудуйте трикутник за кутом, бісектрисою цього кута і висотою, проведеною до іншої сторони.

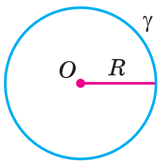
636*. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим кутом і радіусом вписаного кола.

637.** Проведіть спільну дотичну до двох даних кіл, які не мають спільних точок.

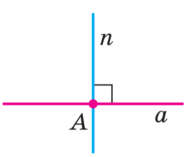
638.** Побудуйте трикутник за радіусом описаного навколо нього кола та висотою і медіаною, проведеними з однієї вершини.

639.** Побудуйте два кола із центрами на даній прямій a, які дотикаються одне до одного в заданій точці M і є дотичними до заданої прямої b.

§ 31. Методи розв'язування задач на побудову



γ – ГМТ, рівновіддалених від O на R.



n – ГМТ центрів кіл, дотичних до a в точці A.

Узагальнимо набутий нами досвід і сформулюємо, які методи застосовують для розв'язування задач на побудову.

МЕТОД БАЗОВИХ ТРИКУТНИКІВ

Його ми детально обговорили в попередньому параграфі.

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ ТОЧОК

Цей метод відомий ще із часів Платона (IV ст. до н. е.).

Фактично ми його неодноразово використовували, не заявляючи про це.

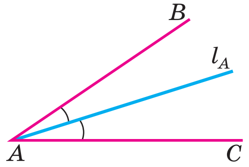
Так, ми з вами будували:

1) ГМТ, рівновіддалених від даної точки на задану відстань;
2) ГМТ – центрів кіл, що дотикаються до даної прямої у заданій на ній точці;
3) ГМТ, рівновіддалених від сторін кута;
4) ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка;
5) ГМТ, рівновіддалених від заданої прямої на задану відстань;
6) ГМТ, з якого бачимо заданий відрізок під прямим кутом.

Метод геометричних місць точок у задачах на побудову полягає ось у чому.

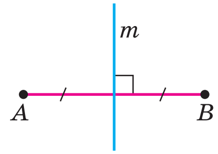
Припустимо, що розв'язування запропонованої задачі зводиться до пошуку деякої точки, яка має задовольняти дві певні умови.

Відкинемо яку-небудь одну із цих умов. Тоді задача стане неоднозначною, тобто її розв'язком буде нескінченна множина точок. Ці точки утворюють деяке геометричне місце точок. Побудуємо його.



l_A – ГМТ, рівновіддалених від AB і AC.

Потім візьмемо до уваги другу умову і відкинемо першу. Цій умові знову відповідатиме нескінченна множина точок, які є іншим геометричним місцем точок. Побудуємо його.



m – ГМТ, рівновіддалених від A і B.

Шукана точка, що задовольняє обидві умови, має належати до обох побудованих множин, тобто належатиме до їх перетину.

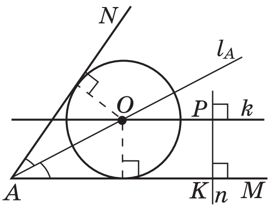
Розгляньмо ще кілька прикладів застосування цього методу.

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

П р и к л а д 1. У заданий кут вписати коло заданого радіуса.

Дано: $\angle MAN$, a.

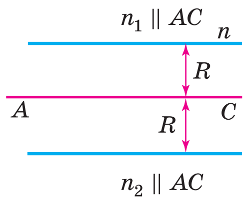
Побудувати: коло γ з $R = a$, дотичне до $[AM)$ і $[AN)$.



А н а л і з

1) ГМТ – центрів кіл, вписаних у даний кут, є бісектрисою цього кута.

2) ГМТ, рівновіддалених від даної прямої на задану відстань, – дві прямі, паралельні даній.



$n_{1,2}$ – ГМТ, віддалених від AC на відстань R.

3) Центр *шуканого* кола – перетин указаних ГМТ.

П л а н п о б у д о в и

1) $\angle A \to l_A$.
2) (AM), $a \to k \parallel AM$, $d(k; AM) = a$.
3) $k \cap l_A = O$, $a \to \gamma$ із ц. O і $R = a$.
γ – шукане.

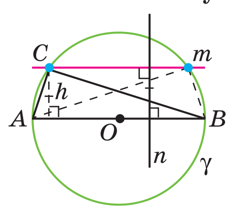
Д о в е д е н н я

Проведіть доведення самостійно.

П р и к л а д 2. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і висотою, проведеною до гіпотенузи.

А н а л і з

Коло, діаметр якого дорівнює гіпотенузі, – це ГМТ, якому належить вершина прямого кута шуканого трикутника.



Ця сама вершина віддалена від гіпотенузи на довжину заданої висоти, тобто належить ГМТ, які віддалені від прямої, що містить гіпотенузу, на цю довжину.

Шукана вершина – перетин указаних ГМТ.

Запис подальших етапів розв'язання виконайте самостійно. *Порада*: пишіть скорочено (використовуючи символи $\in$ – належить, $\cap$ – перетинає, d – відстань від точки до прямої).

Скільки розв'язків ви отримали?

МЕТОД СПРЯМЛЕННЯ

Обговоримо ще один метод, який часто називають методом *спрямлення*. Його застосовують у задачах на побудову, коли задано суму або різницю сторін трикутника. Коротко про його суть можна сказати так: «*Шукай рівнобедрений трикутник*».

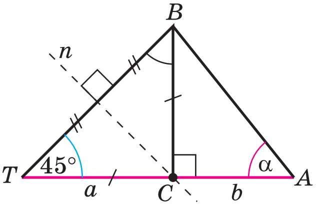
Наведемо приклади застосування цього методу.

П р и к л а д 3. Побудувати прямокутний трикутник за гострим кутом і сумою катетів.

Дано: α, t.

Побудувати $\triangle ABC$: (1) $\angle C = 90°$, (2) $a + b = t$, (3) $\angle A = \alpha$.

А н а л і з



Якщо продовжити відрізок CA за точку C на $TC = CB$, отримаємо відрізок AT заданої довжини $a + b$ і рівнобедрений прямокутний трикутник TCB. Тоді $\triangle TAB$ – *базовий* (його можна побудувати за стороною і двома прилеглими кутами).

П л а н п о б у д о в и

1) $\delta = 45°$.
2) $t, \delta, \alpha \to \triangle TBA$ ($\angle A = \alpha$, $\angle T = 45°$, $AT = t$).
3) $[TB] \to n$ – сер. пер., $n \cap AT = C$.

$\triangle ABC$ – *шуканий*.

Доведення того, що вимоги (1) – (3) виконуються, проведіть самостійно.

П р и к л а д 3. Побудуйте трикутник ABC за кутами A, C і сумою сторін $a + b$.

Дано: α, γ, t.

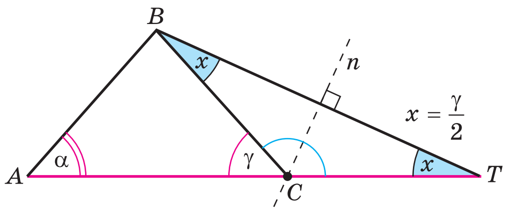
Побудувати $\triangle ABC$: (1) $\angle A = \alpha$; (2) $\angle C = \gamma$; (3) $a + b = t$.

Аналіз подано на малюнку. Здійсніть його запис та подальші етапи розв'язування самостійно.

Для допитливих

Якщо ви власними силами розв'язали задачу, ви зробили відкриття. Якщо задача нескладна, то ваше відкриття не може претендувати на грандіозність, проте воно від цього не перестає бути відкриттям.

Д. Пойя



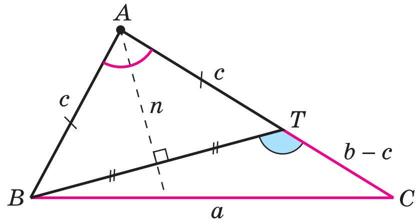
Приклад 4. Побудуйте трикутник ABC за кутом A, стороною a і різницею двох інших сторін $b - c$.

Дано: α, k, t.

Побудувати $\triangle ABC$: (1) $\angle A = \alpha$; (2) $BC = k$; (3) $AC - AB = t$.

Аналіз

Відкладемо на AC $[AT] = c$. Тоді $[TC]$ буде даної довжини t, а $\triangle BAT$ – рівнобедрений.



$$\angle BTC = 180° - (180° - \angle A) : 2 = 90° + \frac{\angle A}{2} > 90°.$$

$\triangle BTC$ – базовий (його можна побудувати за двома сторонами і кутом не між ними). Побудова такого трикутника є однозначною, бо $\angle BTC$ – тупий (див. § 30, с. 163).

Запис подальших етапів розв'язання задачі здійсніть самостійно.

Додаткові задачі до § 29–31

640. Знайдіть геометричне місце точок основ перпендикулярів, проведених з даної точки до прямих, що проходять через іншу задану точку.

641. Побудуйте коло заданого радіуса, яке відтинає від двох сторін заданого трикутника однакові відрізки заданої довжини.

642. Дано два кола зі спільним центром. Проведіть пряму так, щоб вона, перетинаючи обидва кола, утворила три рівних між собою відрізки.

Для допитливих

Геометричні побудови люди здійснювали ще в дохристові часи – робили креслення для виготовлення коліс для колісниць, певних споруд, розмежовували ділянки тощо. Тоді користувалися лише циркулем (спочатку то був кілочок зі шнуром) та лінійкою (тоді її заміняла натягнута мотузка). Слово *циркуль* – латинського походження, означає «коло», «круг». Слово *лінійка* – теж латинського походження, означає «льняна нитка», «лінія, проведена за допомогою мотузки».

643. Через точку перетину двох кіл проведіть січну так, щоб її відрізок, який належить обом колам, був даної довжини.

644. Через точку перетину двох кіл проведіть січну так, щоб її відрізок, який належить обом колам, був найдовшим.

645. Побудуйте трикутник за стороною, прилеглим до неї кутом та: **а)** сумою двох інших сторін; **б)** різницею двох інших сторін. Скільки розв'язків має задача?

646. Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом при основі і периметром.

647. Дано відрізок. Побудуйте рівносторонній трикутник, периметр якого дорівнює довжині заданого відрізка.

648. Побудуйте трикутник за двома його кутами і периметром.

649. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом та: **а)** сумою гіпотенузи і другого катета; **б)** різницею гіпотенузи і другого катета.

650. Побудуйте прямокутний трикутник за гострим кутом та: **а)** сумою гіпотенузи і катета; **б)** різницею гіпотенузи і катета.

651. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою і: **а)** сумою катетів; **б)** різницею катетів. Скільки розв'язків має задача.

652. Побудуйте трикутник за стороною, протилежним до неї кутом та: **а)** сумою двох інших сторін; **б)** різницею двох інших сторін. Скільки розв'язків має задача?

Для допитливих

Ім'я **Мирона Онуфрійовича Зарицького** – талановитого українського математика, обдарованого педагога і популяризатора математичних знань, майже невідоме в Україні, хоча свого часу на праці українського вченого посилалися або цитували їх окремі положення французький математик Фреше, німецький математик Гільберт, професор з Варшави Серпінський та інші.

Народився Мирон Зарицький на Тернопільщині в родині сільського священика. Початкову школу Мирон закінчив у свого діда, а ще до неї самотужки навчився читати, писати і рахувати. Середню освіту він здобув у гімназіях міст Бережани і Тернопіль, а потім два роки навчався в українській гімназії у Перемишлі, яку закінчив 1907 року. Того ж року Мирон Зарицький вступив до Віденського університету. Після першого курсу батьки перевели його до Львівського університету. Тут він студіював математичні та фізичні дисципліни, а також продовжував займатися філософією, самотужки вивчав французьку мову.

У 1912 році Мирон Зарицький закінчив університет, через рік склав учительський іспит і отримав звання учителя середніх шкіл з математики та фізики. Вчителюючи у гімназіях, він також робив перші кроки в науковій роботі з математики.

У 1925 році М.О. Зарицкий переїхав до Львова, де продовжив займатися науковою роботою. У той час учені-українці Галичини зосереджували свою наукову діяльність здебільшого на Науковому Товаристві ім. Т. Шевченка. У 1927 року М.О. Зарицького обирають дійсним членом цього Товариства.

Коло інтересів професора М.О. Зарицького не обмежувалось однією математикою. Він був обізнаний з природничими науками, зі світовою літературою, філософією. На науку він дивився, у першу чергу, як на правду і красу, що підносить людину на вищий щабель її духовного розвитку. Недаремно професора М. О. Зарицького називали «поетом формул». Окрім того, він був неперевершеним педагогом, працював у Львівському університеті, Львівському політехнічному інституті, Ужгородському університеті.

653. Побудуйте прямокутний трикутник, площа якого дорівнює площі даного рівностороннього трикутника.

Завдання для самостійної роботи

1. **а)** Проведіть пряму a і позначте на ній точку A. Побудуйте (вкажіть план побудови) пряму, яка проходить через точку A, перпендикулярно до a.

б) Проведіть пряму a і позначте точку A, яка їй не належить. Побудуйте (вкажіть план побудови) пряму, яка проходить через точку A, перпендикулярно до a.

2. **а)** Проведіть коло радіуса 3 см і позначте на ньому точку A. Побудуйте (вкажіть план побудови) дотичну до кола, що проходить через точку A. **б)** Проведіть коло, радіус якого 2 см, і позначте на ньому точку B. Побудуйте (вкажіть план побудови) дотичну до кола, що проходить через точку B.

3. **а)** Побудуйте (вкажіть план побудови) рівнобедрений трикутник за основою та медіаною, проведеною до основи. **б)** Побудуйте (вкажіть план побудови) рівнобедрений трикутник за бічною стороною та медіаною, проведеною до основи.

4. **а)** Побудуйте (вкажіть план побудови) прямокутний трикутник за гострим кутом та радіусом описаного кола. **б)** Побудуйте (вкажіть план побудови) прямокутний трикутник за катетом і радіусом описаного кола.

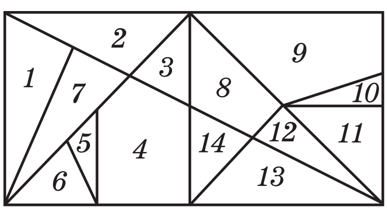
5. **а)** Проведіть відрізок AB. Побудуйте (вкажіть план побудови) два зовнішньо дотичні кола із центрами в точках A і B, радіуси яких відносяться як 1 : 3. **б)** Візьміть відрізок AB. Проведіть два внутрішньо дотичні кола із центрами в точках A і B, радіуси яких відносяться як 1 : 5.

Для допитливих

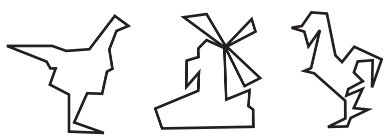
Стомахіон Архімеда. Переказують, що цю гру придумав Архімед.

Прямокутник, сторони якого відносяться як 1 : 2, розрізали на 14 частин (мал. А). Складіть із цих частин силует курки, вітряка, півня (мал. Б). Частини прямокутника можна класти на стіл будь-яким боком. Щільне прилягання їх, згідно з вказівкою Архімеда, не обов'язкове. Але при зображенні кожної фігури всі 14 елементів стомахіона має бути використано.

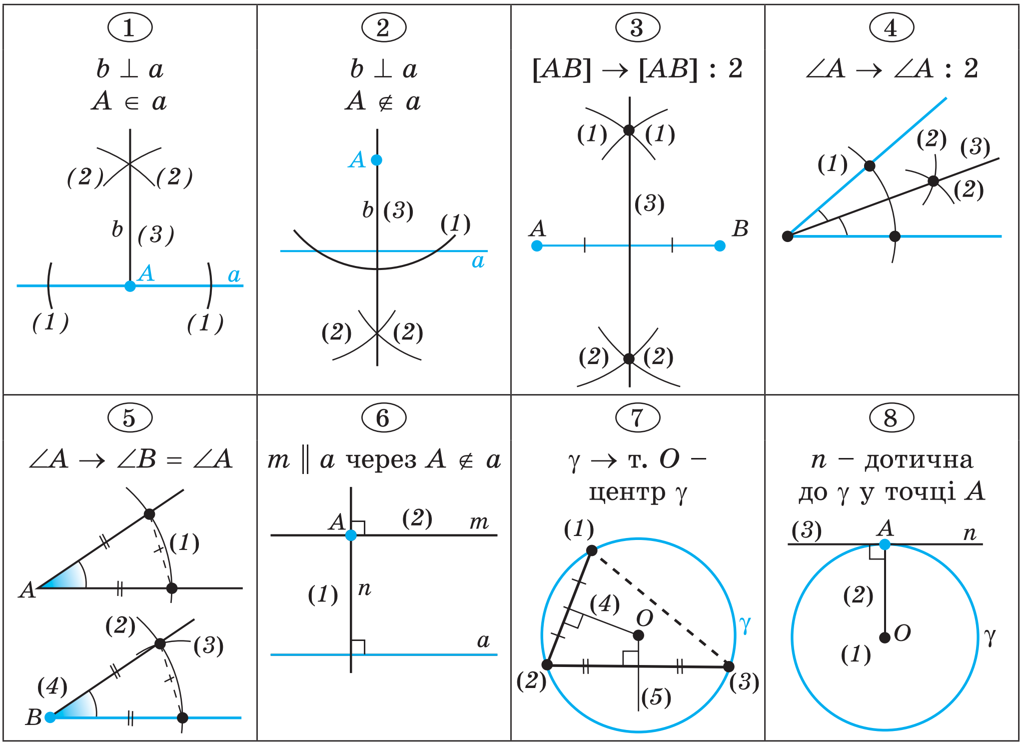
«Стомахіон» у перекладі з грецької мови означає «те, що викликає злість». Спробуйте свої сили в цій грі, і ви переконаєтесь, що така назва виправдана. Гра повна несподіванок, вона розвиває винахідливість, загострює розум, тренує зір у сприйнятті ліній і форм. Стомахіон – патріарх серед ігор-головоломок. Він витримав двохтисячорічне випробування часом і не застарів, як не застаріли теореми й закони Архімеда.



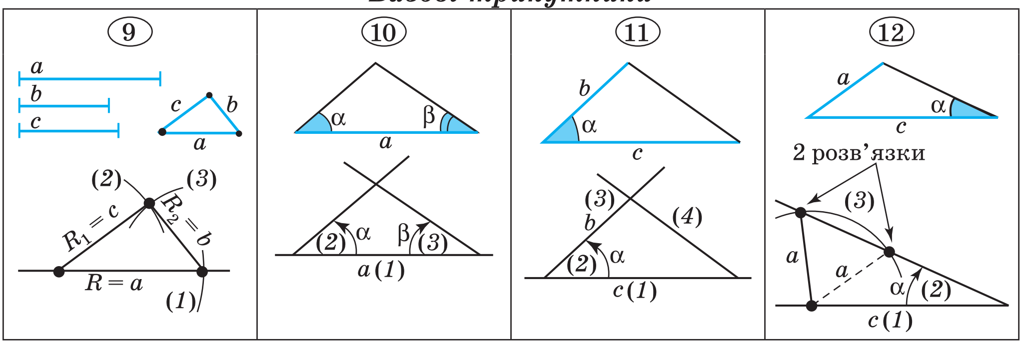
А


Б

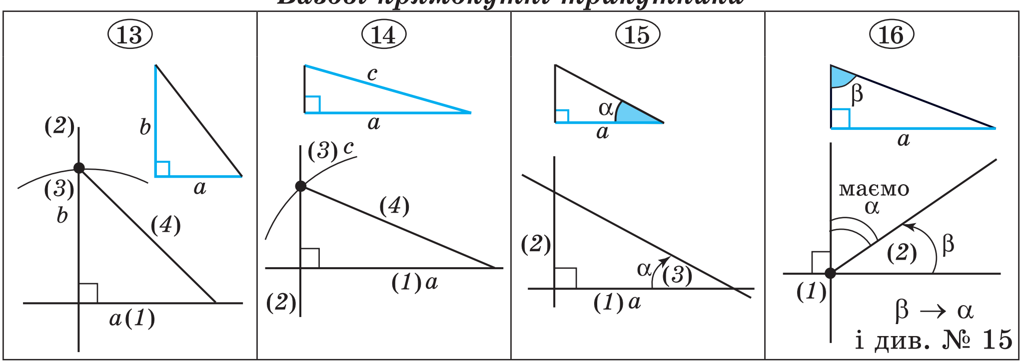
ПОВТОРЮЄМО ОПОРНІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ



Базові трикутники



Базові прямокутні трикутники



Пам’ять – вартовий усьому
і скарбничка всього.

Ціцерон

V

УЗАГАЛЬНЕННЯ І СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗНАНЬ З КУРСУ ГЕОМЕТРІЇ 7 КЛАСУ

Мета розділу – допомогти в повторенні навчального матеріалу за всіма темами 7 класу, підготуватися до підсумкової атестації.

Запитання для повторення курсу геометрії 7 класу

Пропоновані запитання допоможуть *повторити* опрацьований теоретичний матеріал, виділити в ньому *головні опорні факти*, підготуватися до *підсумкових атестацій*.

Зрозуміло, що наведені запитання є лише *орієнтовними**, тобто їхній перелік може бути розширено або скорочено вчителем залежно від конкретних особливостей певних навчальних закладів та їх учнів.

1. Яку будову має геометрія?

2. Яку будову має логічний крок доведення?

3. Поясніть, що таке твердження. Поясніть, що таке: **1)** аксіома; **2)** теорема; **3)** наслідок; **4)** означення; **5)** ознака; **6)** властивість; **7)** теорема, обернена до даної.

4. Що таке спосіб доведення від супротивного? Наведіть приклад доведення якогось твердження цим способом.

5. Сформулюйте властивості:

1) суміжних кутів;

2) вертикальних кутів;

---

* Зірочкою позначено запитання до необов’язкового для вивчення матеріалу, їх рекомендовано для тих, хто готується до подальшого навчання в класах з поглибленим вивченням математики.

3*) кутів між бісектрисами суміжних і вертикальних кутів;
4) внутрішніх і зовнішніх кутів трикутника;
5*) утворених бісектрисами внутрішніх і зовнішніх кутів трикутника;
6) кутів при двох паралельних і січній;
7*) утворених бісектрисами кутів при двох паралельних і січній;
8*) кутів із взаємно паралельними і взаємно перпендикулярними сторонами;
9*) кутів при інцентрі та ортоцентрі трикутника.

6. Сформулюйте властивості та ознаки паралельних прямих.

7. Які властивості й ознаки рівнобедреного трикутника ви знаєте?

8. Які ознаки рівності трикутників ви знаєте? А прямокутних трикутників?

9*. Що ви знаєте про четверту ознаку рівності трикутників?

10. Які властивості прямокутного трикутника ви знаєте? А ознаки?

11. Які нерівності для сторін і кутів трикутника ви знаєте?

12. Що таке геометричне місце точок (ГМТ), що задовольняють певну умову? Сформулюйте властивості бісектриси кута (серединного перпендикуляра до відрізка) як відповідних ГМТ. Які ще ГМТ ви знаєте?

13. Поясніть взаємне розміщення прямої і кола залежно від співвідношення відстані від центра кола до прямої і радіуса цього кола. Сформулюйте означення, властивості та ознаки дотичної до кола.

14. Які властивості хорд кола ви знаєте?

15*. Поясніть взаємне розміщення двох кіл залежно від співвідношення між їх радіусами. Які властивості двох кіл, що дотикаються, ви знаєте?

16*. Сформулюйте й доведіть лему Архімеда про паралельні діаметри (у випадках зовнішнього та внутрішнього дотику двох кіл).

17. Доведіть, що навколо довільного трикутника можна описати коло й до того ж тільки одне.

18. Доведіть, що в довільний трикутник можна вписати коло й до того ж тільки одне.

19. Які властивості кола, вписаного в прямокутний трикутник, ви знаєте? А описаного навколо прямокутного трикутника?

20*. Доведіть, що довжину відрізка між вершиною A трикутника ABC і точкою дотику кола до сторони AC можна обчислити за формулою $p - a$.

21*. Що таке зовнівписане коло тркутника і які властивості цього кола ви знаєте? Скільки зовнівписаних кіл можна побудувати для одного трикутника?

22*. Що означає «розв'язати задачу на побудову» в геометрії?

23*. Опишіть, як побудувати:
1) відрізок, що дорівнює даному;
2) суму двох даних відрізків;
3) різницю двох даних відрізків;
4) трикутник за трьома сторонами:
5) кут, рівний даному;
6) бісектрису кута;

7) перпендикуляр до даної прямої із заданої поза нею точкою;
8) пряму, що проходить через задану точку на даній прямій перпендикулярно до неї;
9) серединний перпендикуляр до відрізка.

24*. Ваш колега вміє робити всі побудови, перелічені в пункті 23. Запишіть для нього план побудови:
1) центра даного кола;
2) прямої, що проходить паралельно даній через задану точку;
3) трикутника за стороною і двома прилеглими кутами;
4) трикутника за стороною і двома кутами, один з яких не є прилеглим до даної сторони;
5) трикутника за двома сторонами і кутом між ними;
6) прямокутного трикутника за: **а)** двома катетами; **б)** катетом і гіпотенузою; **в)** гіпотенузою і гострим кутом; **г)** катетом і гострим кутом, прилеглим до нього; **д)** катетом і гострим кутом, протилежним йому.

25*. **а)** Чи можна здійснити побудову трикутника за двома сторонами і кутом не між ними? **б)** За якої умови така побудова буде визначати трикутник однозначно?

26. **а)** Укажіть ГМТ:
1) рівновіддалених від сторін кута;
2) рівновіддалених від двох заданих точок;
3) рівновіддалених від певної точки на задану відстань;
4) рівновіддалених від даної прямої на задану відстань;
5) рівновіддалених від двох заданих паралельних прямих.

б*) Побудуйте ці ГМТ.

27*. Поясніть, що таке розв'язати задачу на побудову методом: **а)** базового трикутника; **б)** методом ГМТ; **в)** методом спрямлення. Наведіть приклади.

Для допитливих

Остроградський Михайло Васильович (1801–1862) народився в с. Пашенна (тепер – Пашенівка) на Полтавщині в сім'ї дрібного поміщика.

У 1817 р. вступив на фізико-математичний факультет Харківського університету. Перший рік вчився погано й залишив університет, та через рік повернувся і у 1820 р. закінчив навчання, блискуче склавши всі іспити.

Проте через реакційних викладачів, які звинувачували Михайла Васильовича в антирелігійних настроях, він не одержав документа про закінчення університету. У 1822 р. М.В. Остроградський виїздить до Парижа, де вдосконалює свою математичну освіту.

Повернувшись у 1828 р. на батьківщину, оселився в Петербурзі. М.В. Остроградський залишив велику наукову спадщину в найрізноманітніших галузях математики. Він особисто був знайомий з Лапласом, Фур'є, Коші та іншими видатними математиками того часу. Характеризуючи науковий доробок М. В. Остроградського, М. Є. Жуковський говорив: «У творах Остроградського нас приваблює загальність аналізу, головна думка – така широка, як простір його рідних полів».

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Недостатньо мати хороший розум.
Головне – уміти його використовувати.

Рене Декарт

Дві третини задач подано в тестовій формі, що дозволить вам швидко отримати інформацію про рівень засвоєння відповідних тем курсу. Табличка відповідей, наведена в розділі «Відповіді і поради», допоможе з'ясувати правильність розв'язання завдань.

У завданнях 1–22 треба обрати з пропонованих відповідей ОДНУ, яка, на вашу думку, є правильною.

1. Укажіть, скільки з наведених нижче тверджень є правильними.
1) Точкою, за означенням, є круг дуже малого радіуса.
2) Аксіоми планіметрії – це математичні твердження, які довів Евклід.
3) Якщо два промені мають спільний початок, то вони обмежують розгорнутий кут.
4) Через дві точки можна провести безліч променів, але тільки одну пряму.
5) Якщо два промені належать одній прямій, то вони обмежують розгорнутий кут.

А	Б	В	Г	Д
Чотири	Три	Два	Одне	Жодного

2. Знайдіть серед наведених тверджень теорему.
А. Точка не має ані довжини, ані ширини, її форму не можна визначити.
Б. Кутом називається частина площини, обмежена двома променями, що виходять з однієї точки.
В. Два трикутники рівні, якщо їх можна сумістити накладанням.
Г. Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, паралельну даній.
Д. Через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної.

3. На прямій послідовно розміщено точки: A, B, C і M. Відстань між серединами відрізків AB і BC дорівнює 5 см, а між серединами відрізків BC і CM – 6 см. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і CM.

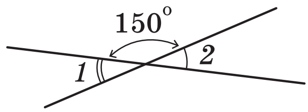
А	Б	В	Г	Д
Не можна визначити	22 см	16 см	11 см	Інша відповідь

4. Прямий кут поділено на три частини, градусні міри яких відносяться як 2 : 3 : 4. Знайдіть градусні міри цих частин.

А	Б	В	Г	Д
40°, 60°, 80°	10°, 15°, 20°	20°, 30°, 40°	18°, 27°, 55°	10°, 30°, 40°

5. На малюнку 189 зображено прямі, що перетинаються. Знайдіть значення суми кутів $\angle 1 + \angle 2$.

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	60°	180°	300°



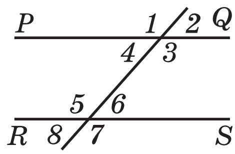
Мал. 189

6. Один з кутів, що утворилися при перетині двох прямих, у 5 разів більший за інший. Знайдіть градусні міри всіх утворених кутів.

А	Б	В	Г	Д
30° і 150°	100° і 20°	30°, 30°, 150°	100°, 20°, 100°, 20°	30°, 150°, 30°, 150°

7. Прямі PQ і RS паралельні (мал. 190). Сума яких двох кутів дорівнює 180°?

А	Б	В	Г	Д
$\angle 5 + \angle 7$	$\angle 3 + \angle 6$	$\angle 1 + \angle 5$	$\angle 1 + \angle 7$	$\angle 8 + \angle 2$



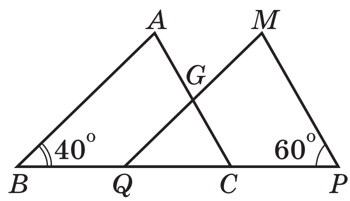
Мал. 190

8. Точка P належить заданій прямій. З неї як центра кола провели дугу, яка перетинає вказану пряму в точці M. Потім з точки M як центра кола провели дугу такого самого радіуса до перетину з першою дугою в точці E. Знайдіть градусну міру кута PEM.

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	75°	90°

9. Трикутники ABC і MQP рівні, $BC = PQ$ (мал. 191). Знайдіть кут QGC.

А	Б	В	Г	Д
20°	40°	60°	80°	100°



Б

Мал. 191

10. Зовнішні кути трикутника відносяться як 2 : 3 : 4. Знайдіть внутрішні кути трикутника.

А	Б	В	Г	Д
40°, 60°, 80°	20°, 60°, 100°	30°, 60°, 90°	30°, 70°, 80°	20°, 40°, 120°

11. Градусні міри кутів трикутника відносяться як 3 : 2 : 10. Знайдіть градусну міру найменшого з кутів цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
12°	36°	18°	24°	20°

12. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 82°. Знайдіть кут при основі цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
49°	90°	92°	41°	98°

13. Кут при основі рівнобедреного трикутника в чотири рази більший за кут при вершині. Знайдіть кут при вершині цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
30°	120°	60°	10°	20°

14. Один з гострих кутів прямокутного трикутника на 18° більший за інший. Знайдіть більший із цих кутів.

А	Б	В	Г	Д
54°	72°	32°	36°	30°

15. Градусні міри зовнішніх кутів трикутника ABC при вершинах A, B і C відносяться як 3 : 4 : 5. Знайдіть відношення градусних мір внутрішніх кутів трикутника ABC при вершинах A, B і C.

А	Б	В	Г	Д
3 : 4 : 5	5 : 4 : 3	3 : 2 : 1	7 : 8 : 9	9 : 8 : 7

16. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють 70° і 150°. Знайдіть внутрішній кут при третій вершині цього трикутника.

А	Б	В	Г	Д
140°	60°	100°	40°	30°

17. Два кути трикутника дорівнюють 50° і 70°. Знайдіть гострий кут між бісектрисами даних кутів.

А	Б	В	Г	Д
60°	30°	25°	35°	120°

18. Бісектриси двох кутів прямокутного трикутника при перетині утворюють кут 55°. Знайдіть менший з гострих кутів трикутника.

А	Б	В	Г	Д
70°	10°	30°	35°	20°

19. Бісектриси двох внутрішніх кутів гострокутного трикутника перетинають сторони цього трикутника під кутами 63° і 81°. Знайдіть кути трикутника.

А	Б	В	Г	Д
36°, 54°, 90°	82°, 80°, 18°	60°, 72°, 48°	30°, 66°, 84°	Знайти неможливо

20. У трикутнику ABC сторони AB і AC відповідно дорівнюють 3 м і 5 м. У яких межах може змінюватися довжина сторони BC?

А	Б	В	Г	Д
від 0 до 8 м	від 3 до 8 м	від 2 до 8 м	від 3 до 5 м	більше 8 м

21. Знайдіть хорду кола радіуса 10 см, якщо цю хорду видно з центра кола під кутом 60°.

А	Б	В	Г	Д
2,5 см	5 см	10 см	Не можна визначити	Інша відповідь

У завданні 22 сформуйте відповідні пари з виразів стовпчиків ліворуч і праворуч так, щоб, враховуючи умову, утворилися правильні твердження.

22. Точки O_1 і O_2 – центри двох кіл з радіусами $R_1 = 7$ см і $R_2 = 5$ см відповідно.

А. $O_1O_2 = 12$ см. **Б.** $O_1O_2 = 22$ см. **В.** $O_1O_2 = 4$ см. **Г.** $O_1O_2 = 0$ см. **Д.** $O_1O_2 = 2$ см. **Е.** $O_1O_2 = 1$ см.	**1.** Кола перетинаються. **2.** Кола дотикаються зовнішньо. **3.** Кола дотикаються внутрішньо. **4.** Кола не мають спільних точок, і одне розміщено всередині іншого. **5.** Круги, обмежені колами, не мають спільних точок. **6.** Кола – концентричні.

23. Із висловлень стовпчика ліворуч підберіть продовження зі стовпчика праворуч так, щоб утворилися правильні твердження. УВАГА, висловлення зі стовпчика праворуч можна використовувати кілька разів або не обирати жодного разу.

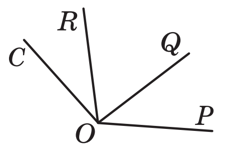
1. Центр вписаного кола трикутника – це **2.** Центр описаного кола трикутника – це **3.** Точка, рівновіддалена від усіх сторін трикутника, – це **4.** Точка, рівновіддалена від усіх вершин трикутника, – це **5.** Вершина прямого кута прямокутного трикутника – це **6.** Середина гіпотенузи прямокутного трикутника – це	**А.** точка перетину його висот. **Б.** точка перетину його медіан. **В.** точка перетину його бісектрис. **Г.** точка перетину його серединних перпендикулярів. **Д.** центр цього трикутника.

24. Установіть відповідність між довжинами сторін (1–4), які лежать проти кута 30° у прямокутному трикутнику, і довжинами діаметрів (А–Д) кіл, що описані навколо цих трикутників.

1. 2 см **2.** 14 см **3.** 20 см **4.** 5 см	**А.** 4 дм **Б.** 1 дм **В.** 4 см **Г.** 2 дм **Д.** 28 см

До завдань 25–45 запишіть тільки відповідь.

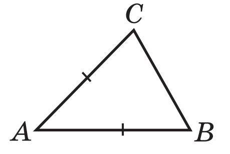
25. На малюнку 192 $\angle POR = 110°$, $\angle QOC = 90°$, $\angle POC = 140°$. Знайдіть кут QOR.



Мал. 192

26. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) зовнішній кут при вершині A дорівнює 60°. Знайдіть градусну міру найбільшого з кутів трикутника ABC.

27. Укажіть, як треба провести пряму, щоб вона поділила трикутник ABC (мал. 193) на два рівних між собою трикутники.



Мал. 193

28. Кут при вершині A трикутника ABC дорівнює 60°. Під яким кутом перетинаються бісектриси кутів B і C даного трикутника?

29. Кут при основі AB рівнобедреного трикутника ABC дорівнює 20°. Висоти перетинаються в точці H. Знайдіть кут AHB.

30. Кути A і C трикутника ABC дорівнюють 25° і 65° відповідно, висоти перетинаються в точці H. Знайдіть кут AHC.

31. З вершини A рівнобедреного трикутника ABC ($AC = CB$) провели медіану завдовжки 60 дм. Ця медіана утворює з бісектрисою кута C кут 60°. Знайдіть довжину бісектриси кута C.

32. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один із зовнішніх його кутів дорівнює: **а)** 48°; **б)** 116°. Скільки розв'язків має задача?

33. Градусні міри двох внутрішніх кутів трикутника відносяться як 2 : 3, а зовнішніх кутів при цих же вершинах 4 : 3. Знайдіть внутрішній кут трикутника при третій вершині.

34. У трикутнику ABC міри кутів A, B і C відносяться як 5 : 6 : 7. Знайдіть кут між висотою CP і бісектрисою AT.

35. Один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 120°. Знайдіть довжину основи, якщо висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 5 дм.

36. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться як 1 : 2. Знайдіть відношення меншого з катетів до гіпотенузи.

37. У колі із центром O провели діаметр AB і хорду BC. Знайдіть $\angle AOC$, якщо $\angle OCB = 62°$.

38. Хорда кола AC утворює з його діаметром CB кут 60°. Знайдіть довжину AC, якщо радіус кола 12 м.

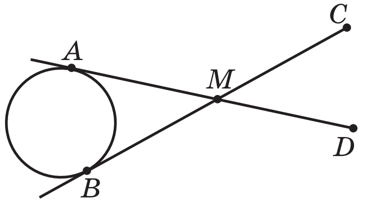
39. У колі із центром O провели хорду AK і дотичну в точці K. Знайдіть кут між хордою і дотичною, якщо $\angle AOK = 70°$.

40. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), якщо $AC = 16$ дм, а $\angle B = 30°$.

41. Трикутник ABC вписано в коло, центр якого міститься на стороні AB, а радіус дорівнює 5 м. Знайдіть: **а)** $\angle B$, якщо $\angle A = 62°$; **б)** медіану, проведену до сторони AB.

42. Через кінці хорди AB, що дорівнює радіусу кола, провели дві дотичні до цього кола, які перетинаються в точці M. Знайдіть: **а)** $\angle AMB$; **б)** AM, якщо точка M віддалена від центра кола на 64 см.

43. Прямі AD і BC перетинаються в точці M та дотикаються до кола в точках A і B (мал. 194). Відомо, що $AM = MD$, $BM = MC$, а хорду AB видно з точки M під кутом 20°. Знайдіть $\angle MCD$.



Мал. 194

44. У прямокутник вписано два кола, радіуси яких дорівнюють по 5 см. Кожне із цих кіл дотикається до трьох сторін прямокутника і до іншого кола. Знайдіть площу даного прямокутника.

45. Заповніть таблицю так, щоб утворилися правильні твердження.

1) ГМТ	середин рівних між собою хорд даного кола	є	
2) ГМТ	вершин прямокутних трикутників зі спільною гіпотенузою	є	
3) ГМТ	центрів кіл, що проходять через дві задані точки,	є	
4) ГМТ	центрів рівних кіл, що проходять через задану точку,	є	
5) ГМТ	центрів кіл, що дотикаються до даної прямої у заданій на ній точці,	є	

До задач 46–61 запишіть розв'язування (з виділенням основних логічних кроків) та відповідь.

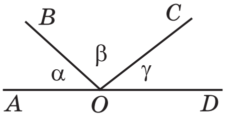
46. При перетині двох прямих утворилося два гострих і два тупих кути.

1) Чи може відношення градусних мір цих кутів дорівнювати 2 : 3 : 4 : 5?

2) Знайдіть градусні міри цих кутів, якщо: **а)** відношення двох з них дорівнює 1 : 2; **б)** один з них у п'ять разів менший за суму трьох інших.

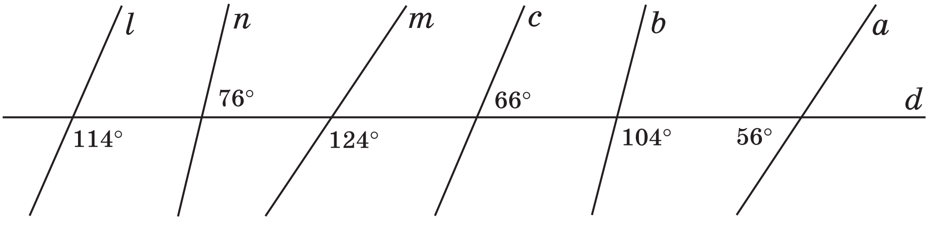
3) Доведіть, що бісектриси гострого і тупого кутів взаємно перпендикулярні.

47. Доведіть від супротивного, що хоча б один з кутів α, β, γ на малюнку 195 не менший від 60°, якщо $\angle AOD$ – розгорнутий.



Мал. 195

48. Знайдіть пари паралельних прямих на малюнку 196.



Мал. 196

49. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 32 см.

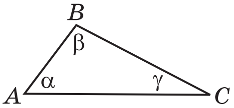
1) Знайдіть сторони цього трикутника, якщо бічна сторона менша від основи на 2 см.

2*) Знайдіть висоту, проведену до основи, якщо відношення сторін цього трикутника дорівнює 5 : 6 : 5.

50. Доведіть, що якщо коло, побудоване на стороні трикутника як на діаметрі, поділяє іншу сторону цього трикутника навпіл, то такий трикутник – рівнобедрений.

51. Знайдіть кути трикутника ABC за малюнками 197–200.

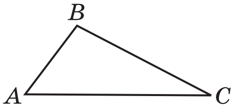
1)



$\beta = \alpha + \gamma$; $\gamma = \alpha - 20°$.

Мал. 197

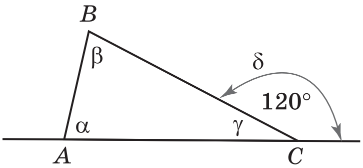
2)



$\angle A : \angle B : \angle C = 3 : 4 : 2$.

Мал. 198

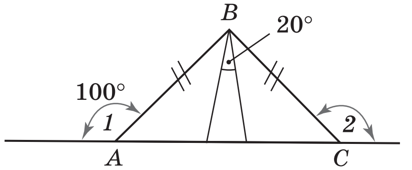
3)



$\delta = 120°$, $\beta = 2\alpha$.

Мал. 199

4)

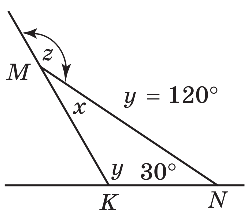


$\angle 1 = \angle 2 = 100°$.

Мал. 200

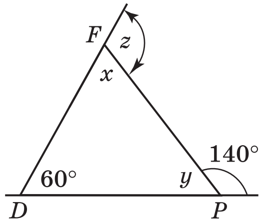
52. Обчисліть за малюнками 201–206 кути x, y, z.

1)



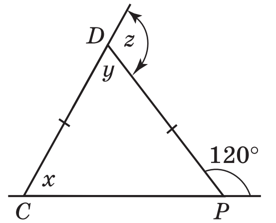
Мал. 201

2)



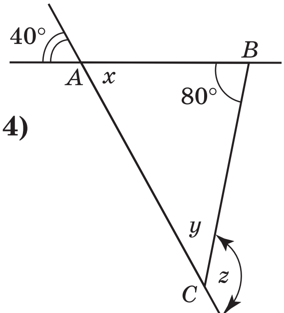
Мал. 202

3)



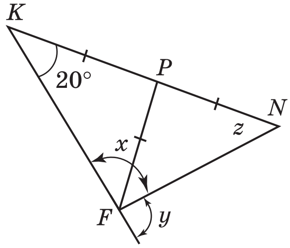
Мал. 203

4)



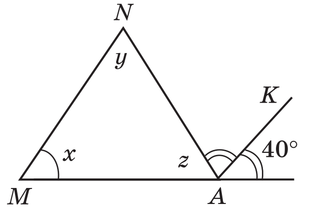
Мал. 204

5)



Мал. 205

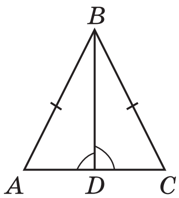
6)



Мал. 206

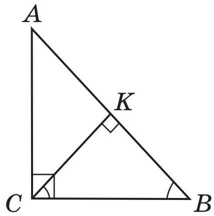
53. За малюнками 207–212 знайдіть пари рівних між собою трикутників і доведіть їх рівність.

1)



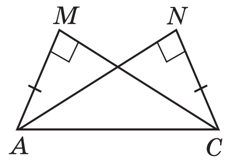
Мал. 207

2)



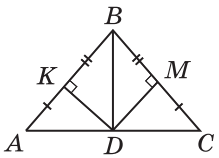
Мал. 208

3)



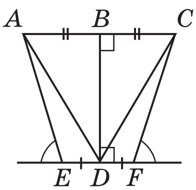
Мал. 209

4)



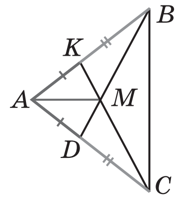
Мал. 210

5)



Мал. 211

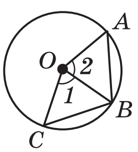
6)



Мал. 212

54. Виконайте завдання за малюнками 213–218.

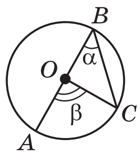
1)



Мал. 213

Дано: $\angle 1 = \angle 2$.
Довести:
$AB = CB$.

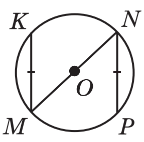
2)



Мал. 214

Довести: $\beta = 2\alpha$.

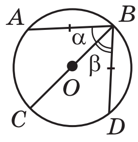
3)



Мал. 215

Дано: $KM = NP$.
Довести:
$KM \parallel NP$.

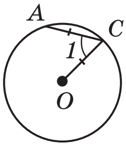
4)



Мал. 216

Дано: $AB = BD$.
Довести: $\alpha = \beta$.

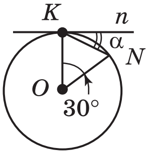
5)



Мал. 217

Дано: $AC = CO$.
Знайти: $\angle 1$.

6)



Мал. 218

Дано: n – дотична, $\angle KON = 30°$.
Знайти: α.

55. На прозорому аркуші паперу зображено два відрізки. Без будь-яких інструментів знайдіть на цьому аркуші точку, рівновіддалену від кінців одного відрізка і від кінців другого відрізка.

56. На прозорому аркуші паперу зображено кут, вершина якого є недоступною (міститься зовні малюнка). Як без будь-яких інструментів показати на цьому аркуші бісектрису цього кута?

57. На прозорому аркуші паперу зображено трикутник. Без будь-яких інструментів знайдіть на цьому аркуші центри описаного навколо трикутника і вписаного в нього кіл.

58. На прозорому аркуші паперу зображено коло. Без будь-яких інструментів знайдіть на цьому аркуші центр цього кола.

59. Коло, побудоване на катеті прямокутного трикутника, як на діаметрі, відтинає від гіпотенузи відрізок, рівний радіусу кола. Знайдіть градусні міри гострих кутів трикутника.

60. Коло, побудоване на катеті прямокутного трикутника, як на діаметрі, ділить гіпотенузу навпіл. Знайдіть градусні міри гострих кутів трикутника.

61. На сторонах AB і AC трикутника ABC, як на діаметрах, побудовано кола. Доведіть, що точка їх перетину, яка не збігається з точкою A, міститься на прямій BC.

Готуємося до підсумкового оцінювання

1. (2 б.) **а)** Сума трьох з восьми нерозгорнутих кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює $216°$. Знайдіть градусні міри кожного із цих кутів. Розгляньте різні випадки. **б)** Сума трьох з восьми нерозгорнутих кутів, що утворилися при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює $225°$. Знайдіть градусні міри кожного із цих кутів. Розгляньте різні випадки.

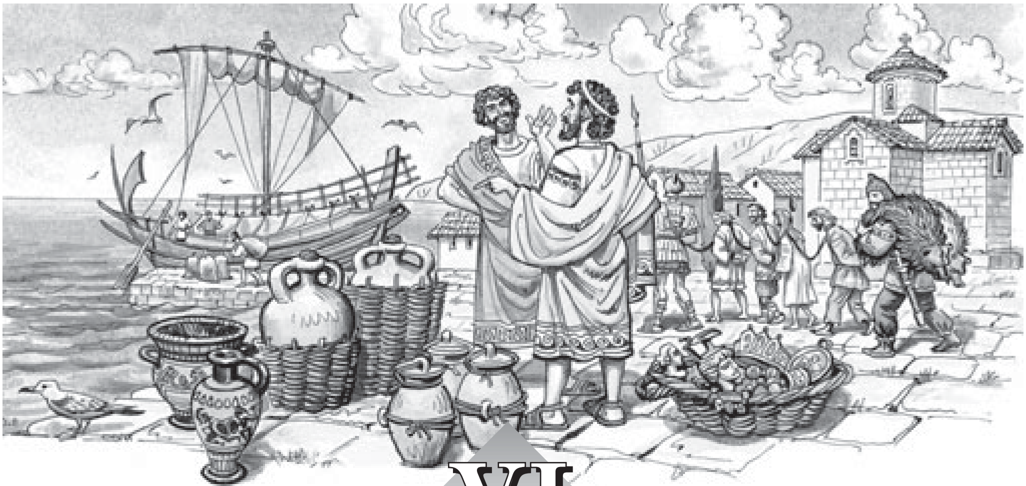
2. (2 б.) **а)** Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо відношення довжин бічної сторони й основи дорівнює $3 : 4$, а периметр трикутника – 70 см. **б)** Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, якщо відношення довжин основи і бічної сторони дорівнює $4 : 5$, а периметр трикутника – 140 см.

3. (2 б.) **а)** На висоті AD трикутника ABC позначили точку M так, що $\angle DMB = \angle DMC$. Доведіть рівність кутів DAB і DAC. **б)** На медіані AD трикутника ABC позначили точку M так, що $MB = MC$. Доведіть рівність кутів ABD і ACD.

4. (2 б.) **а)** Доведіть рівність двох трикутників за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони. **б)** Доведіть рівність двох трикутників за двома сторонами і бісектрисою, проведеною до третьої сторони.

5. (2 б.) **а)** Точки дотику вписаного в трикутник кола ділять його сторони на відрізки, довжини двох з яких дорівнюють 7 см і 8 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 42 см. **б)** Точки дотику вписаного в трикутник кола поділяють його сторони на відрізки, довжини двох з яких дорівнюють 5 см і 7 см. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 36 см.

6. (2 б.) **а)** Кут між висотою і бісектрисою прямокутного трикутника, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює $10°$. Знайдіть гострі кути трикутника. **б)** Кут між медіаною і бісектрисою прямокутного трикутника, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює $10°$. Знайдіть гострі кути трикутника.



VI
ЦІКАВІ ДОДАТКИ

Цей розділ – додатковий. Його призначено для тих, хто бажає більше дізнатися про геометрію та її практичне застосування. Ви дізнаєтеся про історію виникнення одиниць вимірювання довжини і часу, ознайомитеся із золотим перерізом, дізнаєтеся, що паралельні прямі можуть перетинатися і «побігаєте» за черепахою разом з Ахіллесом.

Додаток 1

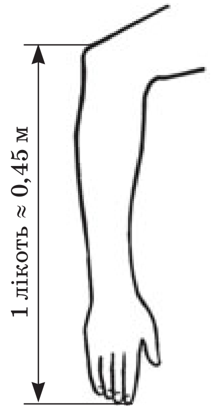
Як шукали одиниці вимірювання довжини

Нашим далеким предкам потрібно було вимірювати довжину земельних ділянок, визначати висоту кілків під час будівництва житла. У процесі виготовлення знаряддя праці також треба було вимірювати довжини. Спочатку для вимірювання довжини, як і для лічби, люди використовували руки, пальці. Наприклад, щоб виміряти довжину стріли, її порівнювали з довжиною руки від ліктя до кінчика середнього пальця. Це була стародавня одиниця довжини – *лікоть*, пізніше *аршин*. Перське «арш» означає *лікоть*. Ця одиниця вимірювання була дуже поширеною, і нею користувалися протягом тисячоліть.

1 лікоть = 6 долоней
1 долоня = 4 пальці

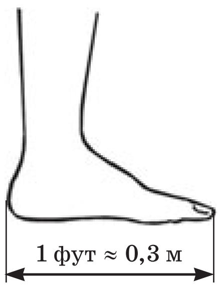
У Стародавньому Єгипті кілька тисячоліть одиницею довжини був лікоть. Єгиптяни встановили співвідношення між ліктем та іншими одиницями вимірювання довжини: 1 лікоть дорівнював 6 долоням, *1 долоня* містила *4 пальці*, тобто в одному лікті – 24 пальці.

На одній з кам’яних плит давньоєгипетського пам’ятника вибито: «...Ніл піднявся на 3 лікті і 10 пальців». Зразок одиниці виміру *«святий лікоть»* єгипетські жерці зберігали у храмі. Його використовували для перевірки довжин мірних лінійок.



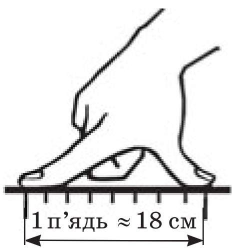
Іншу велику одиницю вимірювання довжини було встановлено у Вавилоні. Людина з появою першого сонячного променя, позначивши початок шляху, йшла по прямій. Коли весь сонячний диск виходив з-за обрію, людина зупинялася і позначала кінець шляху. Така одиниця вимірювання довжини використовувалася і в Стародавній Греції. Її називали *стадія*. Звідси і назва «стадіон», тобто місце, на якому для змагань відміряли стадію (дистанцію).

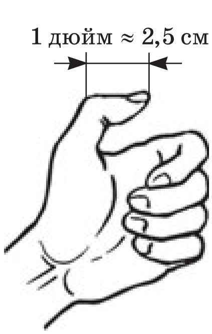
У Стародавньому Римі за одиницю вимірювання площі було прийнято *юген*. Це площа ділянки, яку можна було виорати парою волів за один робочий день.



В арабів за дрібну одиницю вимірювання довжини було взято довжину діаметра *перерізу круглого макового зернятка*. 7 таких одиниць становили довжину *поперечника зернятка гірчиці*. 7 гірчичних зерен дорівнювали довжині *зернятка ячменю*. 7 зерен ячменю становили відрізок, довжина якого дорівнювала довжині фаланги великого пальця. Довжина фаланги великого пальця була прообразом одиниці, яку потім назвали *дюймом*.

Відстань, на якій потрібно було забивати кілки під час будівництва житла, люди вимірювали або кроками, або довжиною своєї ступні. Звідси з’явилася одиниця виміру, яку в одних місцях назвали *лапоть*, а в інших – *фут* (у перекладі з англійської – «нога»). Ще в XI ст. на Русі довжину межі земельної ділянки селяни вимірювали у «*лаптях*», тобто довжиною ступні ноги, взутою в лапоть. А в одній англійській книзі XVI ст. сказано: «Треба, щоб 16 чоловіків, високих і низьких, коли вони, наприклад, заходять до церкви, поставили свої чоботи один за одним; ця довжина повинна бути законною мірою, якою належить вимірювати поля». Шістнадцята частина цієї міри і є «фут».





За часів Русі користувалися ще такою мірою довжини, як *сажень*. Було два види сажнів – *маховий* і *косовий*. Маховий сажень – це відстань між кінчиками середніх пальців розкинутих рук. Косовий сажень – відстань між кінчиком середнього пальця витягнутої вгору і вбік правої руки і носком відставленої вбік лівої ноги.

У 1101 р. король Англії Генріх I наказав виміряти відстань від кінчика його носа до кінчика середнього пальця його витягнутої руки. За цією міркою було виготовлено зразок *ярда*, який став офіційною одиницею вимірювання довжини в Англії.

Указом Петра I було уточнено міри довжини, якими користувалися в Росії:

1 *миля* = 7 *верст*;
1 *верста* = 500 *сажнів*;
1 *сажень* = 3 *аршини* = 7 *футів*;
1 *аршин* = 16 *вершків*;
1 *фут* = 12 *дюймів*;
1 *дюйм* = 10 *ліній*.

Таке розмаїття одиниць вимірювання, та ще й невпорядковане співвідношення між ними, ускладнювало розвиток техніки, господарської діяльності й торгівлі в окремих країнах і за їх межами. Тому в 1875 р. представники сімнадцяти країн підписали угоду про прийняття єдиної метричної системи. Цю систему розробили французькі вчені ще у 1799 р.

У метричній системі за одиницю довжини взято *метр*. Щоб визначити цю основну одиницю, комісія з видатних учених Франції майже 6 років обраховувала довжину меридіана Землі. За задумом цієї комісії, метр повинен був становити точно одну сорокамільйонну частину земного меридіана. Пізніше з'ясувалося, що вимірювання були неточними і метр дещо відрізнявся від наміченої довжини. Проте виправляти довжину еталона метра не стали, бо помилку було виявлено значно пізніше, ніж розповсюдилася метрична система. Крім того, вчені не були впевнені, що пізніше, з розвитком науки і техніки, не виникне потреба в нових уточненнях.

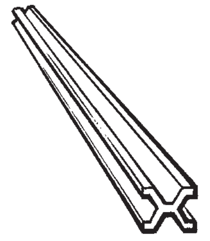
Метрична система зручна тим, що в ній 10 дрібніших одиниць (наприклад, міліметрів) утворюють нову одиницю (сантиметр), 10 наступних одиниць, у свою чергу, утворюють більш крупну одиницю (дециметр) і т. д. Інакше кажучи, ця система побудована на десятковій основі, як і система числення. Це дуже зручно під час здійснення розрахунків.

Проте звичка до старих одиниць вимірювання довжини довго стримувала поширення сучасної метричної системи. У Росії метричну систему було введено лише в 1918 році.

Хоча зараз усі ми користуємося метричною системою вимірювання довжини, варто знати й свої власні живі мірки. Корисно пам'ятати ширину долоні, довжину кроку, відстань між кінцями розведених

1 маховий сажень ≈ 2,1 м

1 косовий сажень ≈ 2,5 м

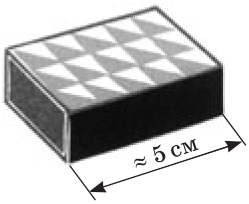


еталон метра

1 км = 1000 м
1 м = 10 дм
1 дм = 10 см
1 см = 10 мм

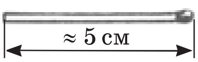
Кіло … – 10^3… , походить від грецького «тисяча».

крайніх пальців, довжину і ширину одного з пальців у сантиметрах. Ці мірки допоможуть оцінити за потреби певні довжини без допомоги лінійки.

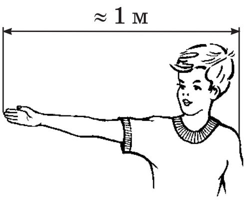


Щоб завершити нашу розмову про одиниці вимірювання довжини, наведемо співвідношення старовинних і сучасних одиниць вимірювання:

1 дюйм = 2,54 см;
1 фут = 0,3048 м;
1 ярд = 3 фути = 0,9136 м;
1 аршин = 0,711 м;
1 п’ядь = 1 аршин : 4 = 0,18 м = 18 см;
1 вершок = 1 п’ядь : 4 = 4,5 см;
1 сажень = 2,13 м;
1 косовий сажень = 2,48 м;
1 верста = 500 сажнів = 1065 м = 1,065 км;



1 морська англійська миля = 1,8532 км;
1 морська міжнародна миля = 1,852 км;
1 кабельтов = 1 морська миля : 10 = 0,18532 км;
1 атлетичний стадій = 185 м;
1 вавилонський стадій = 195 м;
1 сухопутне льє = 4,444 км;
1 морське льє = 5,556 км.



***Корисно знати*:**
ширина вашого нігтя приблизно дорівнює 1 см;
діаметр монети номіналом 1 копійка дорівнює 1,6 см;
діаметр монети номіналом 25 копійок дорівнює 2 см;
діаметр монети номіналом 5 копійок дорівнює 2,4 см;
діаметр монети номіналом 1 гривня дорівнює 2,6 см;
довжина сірника приблизно дорівнює 5 см.

Додаток 2

Одиниці вимірювання часу. Календар

Виміряти довжину просто, треба лише мати еталонну міру – палець, лікоть, лінійку тощо. А от як знайти міру для вимірювання часу? Її треба було шукати в природі. У давнину люди довго спостерігали за явищами природи, поки не збагнули, що найнадійнішою мірою для вимірювання часу є рух Сонця. Ранок, полудень, вечір, ніч – ось перші приблизні міри часу. Вони не були точними, але на той час задовольняли потреби людини, бо, глянувши на Сонце, можна було визначити, багато чи мало залишилося часу, щоб закінчити ту чи іншу роботу. Проте це можна було робити вдень. А вночі? Спостерігаючи за зорями, люди помітили, що вони також рухаються по небосхилу. Треба лише обрати певну яскраву зорю. Тоді за її положенням можна визначати, коли наступає північ і чи довго ще до світанку.

1 місяць ≈ 30 діб – період між появами нового Місяця.

1 рік – 365 днів – час обертання Землі навколо Сонця.

1 доба – час повного оберту Землі навколо своєї осі.

1 година – 1/24 частина доби.

1 хвилина – 1/60 частина години.

Спостереження надали змогу помітити, що Місяць постійно змінює свій вигляд. То він схожий на серп, то круглий, як хлібина. Потім знову перетворюється на серп, який тоншає, поки не зникне. Люди підрахували, що *від одного повного місяця до іншого* проходить приблизно 30 діб. Ці 30 діб і визначили кількість днів у *календарному місяці*.

Відомо, що чотири тисячі років тому у Вавилоні були звіздарі. Вони спостерігали за рухом небесних світил і користувалися природною мірою часу – добою як часом від одного світанку до наступного. Зараз ми знаємо, що доба – *це час одного повного оберту Землі навколо своєї осі*. Звіздарі користувалися й більшими одиницями вимірювання часу – місяцями як періодом між появою на небі нового Місяця. Спостерігаючи за розливом річки Тигр, вавилонські звіздарі встановили, що зміна явищ природи повторюється через 365 діб. Так було введено нову одиницю часу – рік.

Єгипетські жерці зі спостережень визначили, що розлив Нілу збігається з першою весняною появою на обрії зорі Сіріус. Вони вирахували кількість діб між двома такими появами Сіріуса – 365 і визнали цей інтервал часу за рік.

Сьогодні ми знаємо, що *рік – це час обертання Землі навколо Сонця*, і він на кілька годин більший за 365 діб. У результаті цього через деяку кількість років початок нового року почав відставати на кілька діб від руху Сіріуса, тобто від річного руху Землі.

Так, поступово, через спостереження за періодичністю явищ природи, люди змогли створити календар, який багато разів уточнювався, перш ніж набув сучасного вигляду. Проте він і зараз не є досконалим, наприклад, не всі місяці мають однакову кількість діб. Це пояснюється тим, що повна зміна фаз Місяця не дорівнює цілому числу діб, і тривалість річного оберту Землі навколо Сонця також не можна виразити цілим числом діб.

На малюнку 219 ви бачите *кам'яний календар римлян*. Зверху на ньому зображено богів: Сатурн, Сонце, Місяць, Марс, Меркурій, Юпітер, Венера. Римляни вважали, що ці боги управляють днями тижня. Суботою правив Сатурн, неділею – Сонце, понеділком – Місяць, вівторком – Марс, середою – Меркурій, четвергом – Юпітер, п'ятницею – Венера. Посередині малюнка – Зодіак (він указує місяці), а ліворуч від нього – числа місяця. Під зображенням богів, біля кожного із знаків зодіакального кола і біля кожного із чисел місяця висвердлені отвори: у них вставлялися палички. Ці

1 секунда – 1/60 частина хвилини.

1 хвилина – приблизно 60 ударів пульсу людини.

Календар – система лічби великих інтервалів часу, що ґрунтується на періодичних явищах природи, пов'язаних із рухом небесних світил.

Точний час 1 оберту Землі навколо Сонця – 365 діб 5 год 48 хв 46 с.

За єгипетським календарем 1 рік = 365 діб.

За римським календарем 1 рік = 355 діб.

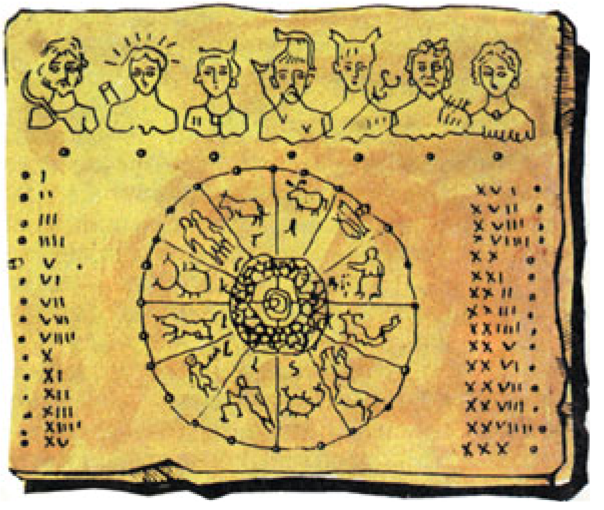
За юліанським календарем (запровадив Юлій Цезар у 46 р. до н. е.) 3 роки – по 365 діб, високосний рік (його номер кратний 4) – 366 діб.

Юліанський рік довший за нинішній у середньому на 11 хв 48 с (за 128 р. – запізнення на 1 добу).

У 1582 р. Папа Римський Григорій XIII здійснив реформу: 5 жовтня 1582 р. стало 15 жовтня; високосним став рік, число сотень якого кратне 4 (1600, 2000...). Це – григоріанський календар.

Григоріанський рік довший за нинішній у середньому на 26 с.

У XX і XXI ст. різниця між юліанським і григоріанським календарями становить 13 діб.



Мал. 219. Кам'яний календар римлян

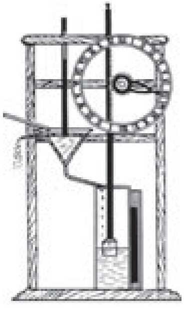
палички вказували відповідний день тижня, місяць року і дату (яким за рахунком від початку місяця є певний день). Це був своєрідний вічний календар.

З розвитком цивілізації з'явилася потреба в точнішому вимірюванні часу, бо для майстра або купця навіть невеличка частина доби була цінною. Треба було поділити добу на частини й відраховувати їх. Найраніше така потреба виникла у Вавилоні. Вавилонські мудреці додумалися поділити *добу на 24 години*. Потім *годину поділили на 60 хвилин*. І вже значно пізніше *хвилину було поділено на 60 секунд*. (Таке ділення вони провели за аналогією з діленням грошових одиниць – талану на 60 минів і мина на 60 шекелів.)

Пізніше таке співвідношення між добою, годиною, хвилиною і секундою перейшло з Вавилона до Індії та країн Європи.

Сонячний годинник

Першим приладом, який показував час, був *сонячний годинник*. На рівній ділянці закопували стовп – гномон, і за довжиною його тіні визначали час. За таким годинником час доби можна було вимірювати ліктями або навіть кроками.



Водяний годинник

Пізніше вавилоняни вдосконалили сонячний годинник – почали робити його із циферблатом. Роль стрілки в ньому відігравала тінь від стовпчика, що містився в середині циферблата під певним кутом.

Проте сонячний годинник показував час недостатньо точно й лише в сонячні дні. А людям треба було знати час незалежно від погоди і в будь-який період доби. Тому були створені *водяний*, *пісочний*, *вогняний* і, нарешті, *механічний* та *електронний годинники*.

До наших часів дійшов вислів: «Багато води збігло з того часу». Зрозуміло, що мався на увазі саме водяний годинник. Хто першим виготовив водяний годинник, невідомо, але його використовували ще в Стародавньому Єгипті.

Спробуйте виготовити *водяний годинник*, це нескладно. Треба у дні бляшанки зробити невелику дірку. Під бляшанкою поставити пляшку з горизонтальними позначками (на однакових відстанях одну від одної). Потім наповнити бляшанку водою і простежити, через які інтервали часу вода у пляшці підніметься від однієї позначки до наступної. Далі зробити відповідні написи біля позначок. Ось і готовий годинник.

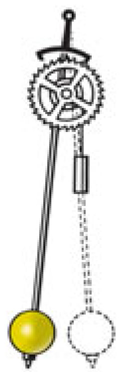
Аналогічно водяному працює і *пісочний годинник* – замість води з однієї посудини до другої пересипається пісок. До цього часу в деяких лабораторіях і процедурних кабінетах користуються саме пісочними годинниками. Довгий час пісочні годинники використовували на кораблях. Коли пісок пересипався з однієї посудини в другу, вахтовий матрос перевертав годинник і ударом у дзвони сповіщав про відповідний час. Пісочні годинники були скляні, звідси й пішов вислів «пробили склянки».

Пісочний годинник

У Китаї користувалися *вогняним будильником* (мал. 220). У чаші будильника повільно тлів стержень з тирси, склеєної смолою. Було відомо, скільки часу горить стержень певної довжини. На відповідній відстані від краю будильника через нього перекидали нитку з металевими кульками на кінцях. Як тільки вогонь доходив до нитки, вона перегоряла, кульки падали у підставлену до будильника чашу і створювали мелодійний дзвін.

Мал. 220. Вогняний будильник

До перших *механічних годинників* можна віднести годинник, створений Ктесібієм у I ст. до н. е. у Греції. Головною його частиною була посудина, у яку рівномірно надходила вода. Рівень її в посудині поступово підвищувався і піднімав легкий поплавець, на якому було закріплено стрілку, яка вказувала на барабан, що



Механічний годинник

обертався. На барабані було проведено лінії, проти яких стояли позначки годин і хвилин.

У 1583 р. італійський учений *Галілео Галілей* установив, що час одного коливання маятника залежить не від того, як далеко його відхилили від положення рівноваги, а від довжини самого маятника. (Це нескладно перевірити самому.) Це відкриття дало змогу сконструювати значно досконаліший за попередні *годинниковий механізм*. У 1612 р. в Празі було виготовлено годинник з маятником. Це вже був дуже точний механізм, який за рік відставав або поспішав не більше як на 1 секунду.

Проте й така точність не задовольняє сучасних вимог науки й техніки. Зараз сконструйовано *атомний годинник*, помилка якого у відліку часу в 100 разів менша, ніж у годинника з маятником.

Слід зазначити, що перш ніж створити прилади, які рахували б секунди, люди знайшли природний лічильник, який приблизно відповідає цій мірі часу, – *пульс* у кров'яних судинах людини. У здорової дорослої людини він складає приблизно 60 ударів за хвилину, тобто інтервал часу між ударами становить одну секунду. Мабуть, саме це стало приводом ділення хвилини на 60 частин, тобто секунд.

Розв'яжіть самостійно

1. Чи може людина прожити мільярд секунд? А мільярд хвилин?
2. Годинник показує 7 год 13 хв. Подумки поміняйте місцями стрілки годинника. Який час тепер він показує?
3. Славетний математик Архімед загинув під час облоги Сиракуз у 212 р. до н. е. Тоді йому було 75 років. Визначте рік народження Архімеда і скільки років пройшло після його смерті до сьогодні.

Додаток 3

Відкриття Лобачевським неевклідової геометрії

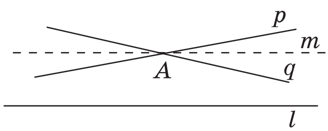
Микола Іванович Лобачевський (1792–1856)

На відміну від усіх інших, аксіома про паралельні прямі здавалася математикам не такою вже й очевидною. Вони, безумовно, вважали її істинною, але не настільки безперечною, щоб прийняти без доведення. Протягом багатьох і багатьох років до початку XIX ст. вчені намагалися довести цю властивість паралельних прямих, виходячи з інших аксіом.

23 лютого 1826 р. на засіданні фізико-математичного відділення Імператорського Казанського університету тридцятитрьохрічний професор *Микола Іванович Лобачевський* перший з усією категоричністю заявив, що очікуваного доведення не існує. Цей день став початком нової епохи в розвитку геометрії.

Лобачевський почав свої дослідження аксіоми паралельності також зі спроб її довести. Але, на відміну від своїх попередників, зрозумів безплідність цього шляху і прийшов до сміливого висновку: припустив можливість існування іншої аксіоми й тим самим іншої геометрії. Та як це не дивно здаватиметься, він припустив, що, окрім однієї прямої, на площині існують й інші прямі, які проходять через задану точку A і не перетинають задану пряму l. Унаслідок цього виникає така картина (мал. 221): існує нескінченна кількість прямих m, які проходять через точку A і не перетинають l.

Усі ці прямі містяться в парі вертикальних кутів, що утворено крайніми з них – прямими q і p. Прямі q і p також не перетинають l, але, якщо трохи повернути q або p, вони перетнуть l.

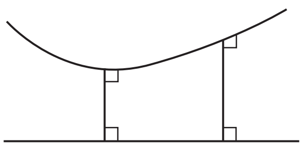


Мал. 221

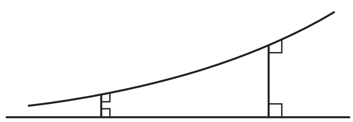
«Це безглуздя», – скажете ви, як це казали сучасники Лобачевського. Але це лише підкреслює безстрашність творчої думки. Ще в середні віки неприпустимою була думка, що Земля не є плоскою. У наші часи навіть маленькі діти природно сприймають те, що Земля має форму кулі й обертається навколо Сонця.

Ідеї Лобачевського, які вважалися сто років тому неприпустимим парадоксом, тепер широко розвинуті й узагальнені вченими. Виявилося, що за постулатами геометрії Лобачевського плоскі й просторові фігури може бути вивчено так само докладно, як і в звичайній геометрії, але мають вони дещо інші властивості.

Наприклад, у геометрії Лобачевського на площині для прямих, які не перетинаються (паралельні, за нашим розумінням, прямі), можливими є два варіанти розміщення.



Мал. 222

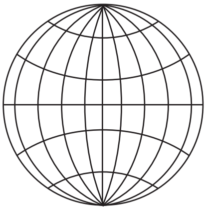


Мал. 223

По-перше, вони можуть необмежено розходитися по обидва боки від спільного перпендикуляра (мал. 222). По-друге, вони можуть необмежено віддалятися одна від одної з одного боку, а з іншого – необмежено зближатися так, що довжина спільного перпендикуляра між ними прямує до нуля (мал. 223). Притому вони не перетинаються!

Дослідження космічних питань привело до висновку про неевклідовість нашого простору світлових променів.

При розгляді земних питань ця неевклідовість така незначна, що її не можна виявити інструментами.



«Ви нас обдурюєте, – перше, що спаде вам на думку, – у всіх випадках накреслено не прямі, а криві лінії!» Хоч це заперечення здається непереборним, проте насправді воно непереконливе. Умовність наших малюнків і уявлень відчути можна, якщо уявити площину поверхні океану на земній кулі.

А географічна карта із зображенням півкуль? На такій карті неминучі значні спотворення. Наприклад, насправді довжини всіх меридіанів однакові, а на карті вони мають різну довжину.

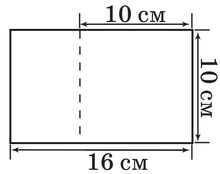
Складаючи карти різних частин земної поверхні, ми вважаємо, що в першому наближенні для них справджуються правила евклідової геометрії. Насправді ж ми розуміємо, що в масштабах земної кулі геометрія дещо інша.

Сучасні вчені й далі вивчають світ, розвиваючи геометрію Лобачевського.

Додаток 4

Про золотий переріз

Виріжте з паперу прямокутник з довжинами сторін 10 см і 16 см (мал. 224). Відріжте від нього квадрат, сторона якого дорівнює 10 см. Залишився прямокутник, сторони якого дорівнюють 6 см і 10 см, тобто одна довша за другу приблизно у 1,6 раза. Тепер від цього прямокутника відріжте квадрат зі стороною 6 см. Залишився прямокутник, одна сторона якого також приблизно в 1,6 раза довша за іншу. Такий процес можна продовжувати й далі.



Мал. 224

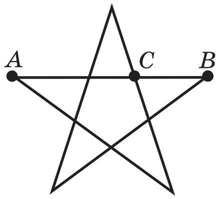
На прямокутники, у яких довжини сторін відносяться приблизно як 1,6 : 1, звернули увагу дуже давно.

На малюнку 225 ви бачите зображення храму Парфенон в Афінах (Греція). Навіть сьогодні це одна з найкрасивіших споруд у світі. Цей храм будували за строгими математичними законами в епоху розквіту старогрецької математики. Якщо описати навколо фасаду цього храму прямокутник, то з'ясується, що сторони цього прямокутника відносяться саме як 1,6 : 1.

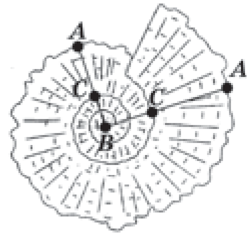
Мал. 225

Такий прямокутник ще у Стародавній Греції називали *золотим прямокутником*, а відношення його сторін – *золотим перерізом*. Математики дають таке означення золотого перерізу.

Золотий переріз – це таке ділення цілого на дві нерівні частини, при якому більша частина відноситься до цілого так, як менша до більшої (мал. 226).



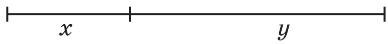
$\leftarrow AC : (AC + CB) =$
$= CB : AC \rightarrow$



Мал. 226

Це відношення лише приблизно (з точністю до 0,1) дорівнює 1,6. Якщо відрізок поділити на дві частини так, що менша матиме довжину x, а більша – y (мал. 227), то у випадку золотого перерізу це виглядає так:

$$\frac{y}{x+y}=\frac{x}{y}.$$



Мал. 227

Цікаво, що у правильній п'ятикутній зірці кожний з п'яти відрізків, що складають цю фігуру, поділяє інший у відношенні золотого перерізу (мал. 226).

Якщо розглядати черепашку (мал. 226), то з'ясується, що точка C поділяє відрізок AB приблизно в золотому відношенні.

ПОБУДУЙМО золотий прямокутник так, як його будували у Стародавній Греції. Тільки шнур, прив'язаний до двох кілочків, замінимо циркулем.

1. Почнемо з квадрата. (Пропонуємо отримати його згинанням аркуша паперу.)

2. Згинанням поділимо його на два рівних прямокутники (мал. 228а).

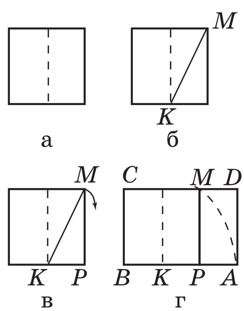
3. Проведемо в одному з них діагональ KM (мал. 228б).

4. Циркулем проведемо дугу кола з радіусом KM і центром у точці K (мал. 228в).

5. Продовжимо відрізок KP до перетину з отриманою дугою у точці A.

6. Згинанням аркуша паперу утворимо прямокутник $ABCD$ (мал. 228г). (Як це зробити, придумайте самі.)

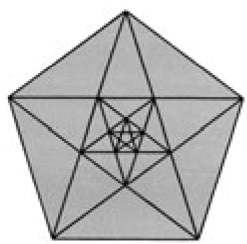
Прямокутник $ABCD$ – золотий! Як у цьому переконатися?



Мал. 228

Принцип золотого перерізу використовувався і використовується в архітектурі, живописі, графіці та інших сферах.

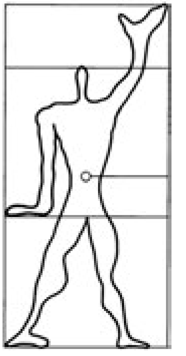
У XX ст. відродження золотого перерізу відбулося завдяки книзі американського мистецтвознавця Джейя Хембіджа «Елементи



Мал. 229

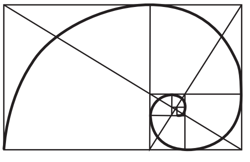
динамічної симетрії» (уперше видана у 1920 р.) і працям художника-конструктора Ле Корбюзьє.

Спираючися на принцип золотого перерізу, Ле Корбюзьє обрав за точки, які визначають простір малюнка, сонячне сплетіння, маківку голови і кінчики пальців витягнутої руки людини. Відстань від землі до сонячного сплетіння дорівнює відстані від сонячного сплетіння до кінчиків пальців витягнутої вгору руки (мал. 230). Вони відносяться до відстані від сонячного сплетіння до маківки голови людини в золотому відношенні. Таке саме співвідношення мають і відстань від сонячного сплетіння до маківки голови та відстань від сонячного сплетіння до долоні опущеної руки.

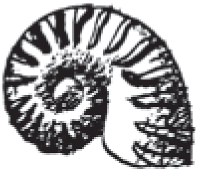


Мал. 230

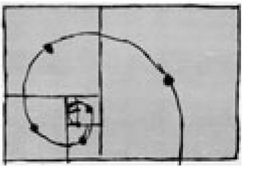
За золотим правилом Ле Корбюзьє отримав математичні співвідношення, які широко використовуються в архітектурі та графічному дизайні. На малюнку 231 зображено вісім прямокутників золотого перерізу.



Мал. 231



а



б

Мал. 232

На малюнку 232 бачимо, як Ле Корбюзьє зображує ту саму спіраль у природній формі (мал. 232а) та як ідею планування музейної будівлі (мал. 232б).

Додаток 5

Знайомимося із софізмами

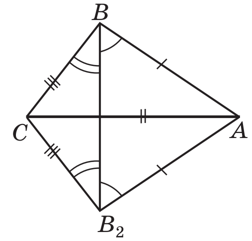
Софізм – це навмисно помилковий умовивід, який здається правильним. Тобто будь-який софізм містить одну або кілька замаскованих помилок. Особливо часто в математичних софізмах виконуються заборонені дії або не враховуються умови застосування теорем, формул чи правил, а інколи міркування проводять з використанням помилкового малюнка.

Розгляньте наведені нижче софізми й знайдіть помилки.

Софізм 1

Якщо у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ і $\angle B = \angle B_1$, то ці трикутники рівні (додаткова ознака рівності трикутників за двома сторонами і кутом, що не лежить між ними).

Доведення



Мал. 233

1) Побудуємо трикутник AB_2C, який дорівнює трикутнику $A_1B_1C_1$, при цьому точку B_2 розташуємо по інший бік від AC (мал. 233). (За аксіомами планіметрії такий трикутник існує.)

2) Трикутник BAB_2 рівнобедрений, тоді $\angle BB_2A = \angle B_2BA$.

3) Маємо $\angle BB_2C = \angle CB_2A - \angle BB_2A = \angle CBA - \angle B_2BA = \angle B_2BC$ і $\triangle BCB_2$ – рівнобедрений, тобто $CB = CB_2$. Тоді $\triangle ABC = \triangle AB_2C$ за трьома сторонами.

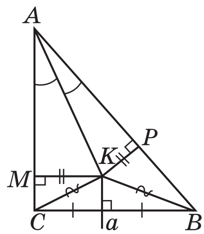
Рівність доведено?!

Софізм 2

У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює катету.

Доведення

Нехай маємо $\triangle ABC$ з прямим кутом C (мал. 234).



Мал. 234

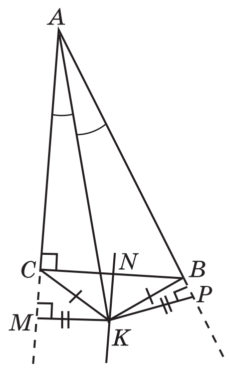
Проведемо бісектрису кута A і серединний перпендикуляр до BC. Позначимо через K точку їх перетину й проведемо із цієї точки перпендикуляри KM і KP до катета AC і гіпотенузи AB.

1) За властивістю бісектриси кута точка K рівновіддалена від AB і AC, тобто $KM = KP$. Тоді прямокутні трикутники AMK і APK рівні (за гіпотенузою і катетом). Отже, $AM = AP$.

2) $CK = KB$ за властивістю серединного перпендикуляра до BC, і прямокутні трикутники CMK і BPK рівні (за гіпотенузою і катетом). Тоді $MC = PB$.

3) $AC = AM + MC = AP + PB = AB$.

Рівність доведено?!



Мал. 235

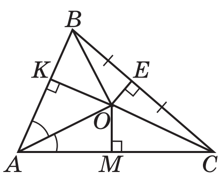
Ви можете сказати, що точка K повинна бути поза трикутником. Зробимо відповідний малюнок (мал. 235). Доведення для цього випадку залишається таким самим. Так у чому річ? Невже гіпотенуза справді дорівнює катету?

Софізм 3

Усі трикутники рівнобедрені.

Доведення

Нехай маємо довільний трикутник ABC (мал. 236).



Мал. 236

Проведемо бісектрису кута A і серединний перпендикуляр OE до відрізка BC. Точку їх перетину позначимо через O. З точки O опустимо перпендикуляри OK і OM на сторони AB і AC.

1) $\triangle AOK = \triangle AOM$ (за гострим кутом і гіпотенузою), тоді $OK = OM$, $AK = AM$.

2) OE – серединний перпендикуляр до BC, тоді $OB = OC$.

3) $\triangle BOK = \triangle MOC$ за гіпотенузою і катетом, тоді $BK = CM$.

4) $AB = AK + KB = AM + MC = AC$.

Твердження доведено?!

Софізм Зенона, або Загадка руху

У V ст. до н. е. в Давній Греції жив учений Зенон, який доводив те, чого начебто бути не може, тобто складав задачі-софізми. Тоді їх називали *апоріями* (у перекладі – *ускладнення*). Деякі його апорії не могли розгадати навіть наймудріші вчені того часу. Ось одна з таких апорій – «Ахіллес і черепаха».

Уявіть собі кілометрову стежку, на початку якої стоїть Ахіллес, а посередині – черепаха. Черепаха тікає від Ахіллеса зі швидкістю 1 км/год, а Ахіллес наздоганяє її зі швидкістю 10 км/год. Легко підрахувати, що Ахіллес наздожене черепаху. Але, з іншого боку, можна довести, що він її не дожене.

Справді, поки Ахіллес опиниться посередині стежки, черепаха за цей час зміститься вперед, поки Ахіллес досягне того самого місця, черепаха знову зміститься вперед і т. д. Таким чином, черепаха завжди буде попереду Ахіллеса, і він її ніколи не зможе наздогнати.

Аналогічно Зенон доводив, що Ахіллес взагалі не зможе пробігти певну дистанцію. І жоден мудрець того часу не зміг знайти помилку в цих міркуваннях Зенона!

Річ у тім, що в Стародавній Греції мислили інакше, ніж теперішні математики. Тоді розглядали певні інтервали часу та шляху, але не допускали, що їх можна ділити нескінченною множиною поділок. Сьогодні ми кажемо, що рух – неперервний. За дуже маленькі інтервали часу тіло, що рухається, проходить дуже маленькі відстані. При цьому інтервали часу і відстані можна ділити на менші й менші частини. Якщо дуже маленькі частинки складати дуже багато разів, то можна отримати значну величину. А якщо їх нескінченна кількість? Тут з’являються нові закономірності (кажуть, що вони визначаються властивістю неперервності руху). Їх вивчає диференціальне й інтегральне числення – розділ математики, який створили наприкінці XVII ст., незалежно один від одного, англієць І. Ньютон і німець Г. Лейбніц. Ви вивчатимете цей розділ математики у старших класах.

Ісаак Ньютон
(1643–1727)

Готфрід Вільгельм Лейбніц
(1646–1716)

Давні греки не визнавали нескінченного ділення, вважаючи, що так нівелюється поняття числа – головного поняття всієї грецької математики. Саме тому наведену вище задачу-апорію Зенона в ті часи розв’язати було неможливо.

Люди, що засвоїли великі принципи математики, мають на один орган чуття більше, ніж прості смертні.

Ч. Дарвін

СЛОВНИЧОК-ПОКАЖЧИК

Аксіома – твердження, що приймається без доведення (с. 22, 61).

Базовий трикутник – трикутник, який ми вміємо будувати (с. 162).

Бісектриса кута – промінь, який виходить з вершини кута й ділить цей кут навпіл (с. 20).

Бісектриса трикутника – відрізок бісектриси кута трикутника від його вершини до точки перетину з протилежною стороною (с. 73).

Бічна сторона рівнобедреного трикутника – одна з двох його рівних між собою сторін (с. 69).

Венна діаграма – схематичне зображення множини, запропоноване Венном (с. 12).

Вертикальні кути – два кути, сторони одного з яких є доповняльними променями сторін другого (с. 39).

Висота трикутника – перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить протилежну сторону трикутника (с. 73).

Відрізок – одне з основних абстрактних понять геометрії; сформувалося з узагальнення людського досвіду; не має чіткого визначення; можна уявити, як натягнутий між двома уявними кілками шнур, що не має товщини (с. 15).

Відстань
– *між даною точкою і даною прямою* – довжина відрізка прямої, перпендикулярної до даної, від заданої точки до даної прямої (с. 43);
– *між двома паралельними між собою прямими* – довжина спільного перпендикуляра до них, з кінцями на цих прямих (с. 100);
– *між двома точками* – довжина відрізка з кінцями в цих точках (с. 28).

Властивість – твердження, яке виконується за умови належності фігури певній множині (с. 62);
– ***паралельних прямих*** (с. 58).

Геометричне місце точок (ГМТ) – множина всіх точок, які задовольняють певну умову (с. 121).

Гіпотенуза – сторона прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута (с. 70).

Градус – міра кута, що складає $\frac{1}{180}$ частину розгорнутого кута (с. 24).

Діаметр кола – хорда, що проходить через центр кола (с. 122).

Доведення – логічне міркування, яке виявляє правдивість певного твердження (с. 12, 22).

Доведення від супротивного – спосіб доведення, коли припускається супротивне до того, що треба довести, і міркування на основі цього припущення призводять до логічного протиріччя (с. 43).

Дотична до кола – пряма, яка має одну спільну точку з колом (с. 126)
– *властивості* (с. 24);

Дотичні кола – кола, які мають одну спільну точку (с. 130).

Зовнівписане коло трикутника – коло, яке дотикається до однієї сторони трикутника і продовжень двох інших його сторін (с. 147).

Зовнішній кут трикутника – кут, суміжний з його внутрішнім кутом (с. 77).

Золотий переріз – це таке ділення цілого на дві не рівні між собою частини, при якому відношення більшої частини до цілого дорівнює відношенню меншої частини до більшої (с. 196).

Інцентр трикутника – точка перетину його бісектрис (с. 73).

Катети – сторони прямокутного трикутника, що утворюють прямий кут (с. 70).

Коло – геометричне місце точок площини, рівновіддалених від заданої точки (с. 122);

– ***вписане в кут*** – коло, яке дотикається до обох сторін кута (с. 142);
– ***вписане в трикутник*** – коло, яке дотикається до всіх сторін трикутника (с. 142);
– ***описане навколо трикутника*** – коло, яке проходить через усі його вершини (с. 137).

Контрприклад – приклад того, що певне твердження не виконується (с. 62).

Концентричні кола – кола, що мають спільний центр (с. 129).

Круг – внутрішня частина площини, обмежена колом (с. 122).

Кут – частина площини, обмежена двома променями, що виходять з однієї точки (с. 24);
– ***трикутника*** – кут, сторонами якого є промені, які виходять з однієї вершини трикутника і яким належать суміжні сторони трикутника (с. 69);
– ***гострий***, якщо його градусна міра менша за 90° (с. 24);
– ***між двома прямими*** – менший з кутів, що утворилися при їх перетині (с. 42);
– ***прямий***, якщо його градусна міра дорівнює 90° (с. 24);
– ***тупий***, якщо його градусна міра більша за 90° (с. 24).

Кути, утворені при перетині двох прямих січною
– ***внутрішні різносторонні, зовнішні різносторонні, внутрішні односторонні, зовнішні односторонні*** (с. 51);
– ***відповідні*** (с. 52).

Кути з відповідно паралельними і відповідно перпендикулярними сторонами (с. 63).

Лінія центрів двох кіл – пряма, що проходить через центри двох кіл (с. 130).

Логічний крок – міркування, яке складається з твердження-умови і твердження-висновку (с. 12).

Медіана трикутника – відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони (с. 71).

Метод
– ***базових трикутників*** – виділити в задачі на побудову базовий трикутник – див. базовий трикутник;
– ***геометричного місця точок*** – визначити точку як перетин двох ГМТ (с. 168);
– ***доведення від супротивного*** – див. доведення від супротивного;
– ***спрямлення*** – метод розв'язування задач на побудову, коли задано суму або різницю сторін трикутника (с. 170).

Мінута – міра кута, що складає $\frac{1}{60}$ частину градуса (с. 25).

Множина – сукупність об'єктів (об'єднаних за певною властивістю або правилом), які ми уявляємо як єдине ціле (с. 12, 13).

Наслідок – твердження, що безпосередньо випливає з твердження-аксіоми або твердження-теореми (с. 24, 62).

Обернена теорема до даної теореми – теорема, у якій умовою є висновок, а висновком – умова даної теореми (с. 62).

Ознака – теорема, яка стверджує, що виконання певних умов забезпечує належність фігури (фігур) певній множині, яку було визначено раніше (с. 62);
– ***паралельних прямих*** (с. 54).

Означення – твердження, у якому роз'яснюється, які саме об'єкти або властивості підпадають під дану назву (с. 61).

Ортоцентр трикутника – точка перетину його висот (с. 74).

Основа перпендикуляра – спільна точка перпендикуляра і прямої, до якої перпендикуляр проведено (с. 113).

Основа похилої – спільна точка похилої та прямої, до якої похила проведена (с. 113).

Основа рівнобедреного трикутника – його сторона, яка не дорівнює двом іншим (с. 69).

Паралельні прямі – дві прямі, які не мають спільних точок (с. 18).

Периметр трикутника – сума довжин усіх його сторін (с. 69).

Перпендикуляр до прямої, проведений з деякої точки, – відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, від заданої точки до заданої прямої (с. 43).

Перпендикулярні прямі – дві прямі, які перетинаються під прямим кутом (с. 42).

Похила, проведена з даної точки до даної прямої, – відрізок, який сполучає дану точку з будь-якою точкою прямої і який не перпендикулярний до цієї прямої (с. 113).

Правильний трикутник – див. трикутник.

Проекція похилої на пряму – відрізок, кінцями якого є основа похилої і основа перпендикуляра (с. 113).

Проекція точки на пряму – основа перпендикуляра, проведеного з даної точки на задану пряму (с. 113).

Радіус – відрізок, який сполучає довільну точку кола з його центром (с. 122).

Рівні фігури – фігури, які можна сумістити при накладанні (с. 89);
- – ***кути*** (с. 20);
- – ***трикутники*** (с. 21).

Розгорнутий кут – кут, сторони якого утворюють пряму (с. 24).

Секунда – міра кута, що складає $\frac{1}{60}$ частину мінути (с. 25).

Серединний перпендикуляр – пряма, перпендикулярна до відрізка, що проходить через його середину (с. 43, 133).

Січна двох прямих – пряма, яка перетинає дві дані прямі (с. 51).

Січна кола – пряма, яка має дві спільні точки з колом (с. 126).

Софізм – навмисно помилковий умовивід, який здається правильним (с. 198).

Суміжні кути – два кути, одна сторона в яких спільна, а дві інші разом утворюють пряму (с. 34).

Твердження – вислів, що є або істинним, або хибним (с. 12).

Теорема – відоме математичне твердження, правильність якого математики довели певним логічним міркуванням (доведенням) (с. 22, 61).

Трикутник – внутрішня частина площини, обмежена трьома відрізками, які сполучають три точки цієї площини, що не лежать на одній прямій (с. 20);
- – ***рівносторонній*** (*правильний*) – усі довжини сторін рівні між собою (с. 69, 82);
- – ***різносторонній*** – довжини всіх сторін різні (с. 69);
- – ***рівнобедрений*** – дві сторони однакової довжини (с. 69);
- – ***гострокутний*** – усі кути гострі (с. 70);
- – ***прямокутний*** – серед кутів трикутника є прямий (с. 70);
- – ***тупокутний*** – серед кутів трикутника є тупий (с. 70).

Хорда – відрізок, який сполучає дві довільні точки кола (с. 122).

Центр мас трикутника, або ***центроїд*** трикутника, – точка перетину його медіан (с. 71, 72).

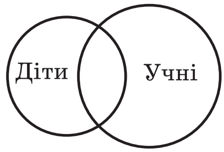
Центр кола – точка, від якої рівновіддалені усі точки кола (с. 122).

Центр правильного трикутника – точка перетину медіан, бісектрис і висот цього трикутника (с. 82).

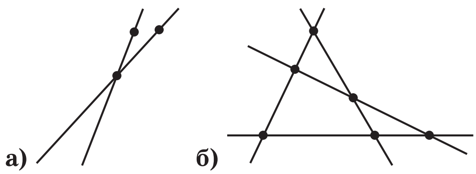
ВІДПОВІДІ І ПОРАДИ

РОЗДІЛ І

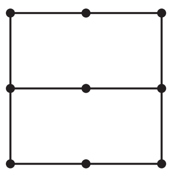
2. Складіть шнур відповідної довжини у три шари. **3.** *Порада.* Використайте розв'язання попередньої задачі. **4.** Будь-яка пряма, що проходить через точку перетину діагоналей квадрата, ділить його на дві рівні частини. **5.** *Порада.* Можна скористатися досвідом розв'язування завдання 4; можна намалювати квадрат на папері в клітинку; уважно придивитися до малюнка. **6.** *Порада.* Поділіть протилежні сторони квадрата на три рівні частини; можна скористатися зображенням квадрата на папері в клітинку; можна на одній стороні квадрата позначити дві точки на відстані 1/6 її довжини від кінців і сполучити ці точки із серединою протилежної сторони. В останній пораді ви побачите розв'язання, якщо знаєте формули для площ прямокутника і трикутника. **7.** Твердження: 1, 3–7, 9, 11, 12–16. Істинні: 1, 3, 5, 6, 9, 12. **8.** Обидва помиляються. Не всі діти школярі (є дошкільнята); не всі школярі – діти (є підлітки). Правильна діаграма на мал. В-1. **9. 1)** Так. **2)** Ні. **3)** Так. **4)** Діаграма не відповідає умові, бо не лише автомобілі «Жигулі» можуть бути синього кольору. **5)** Діаграма не відповідає умові, бо множина P (пиріжки з грибами і картоплею) повинна збігатися з перетином множин M і D. **6)** Діаграма не відповідає умові, бо за умовою в класі немає учнів, які б не вивчали німецьку чи англійську мову. **10. 1)** Хибне. **2)** Правильне. **3)** Хибне. **4)** Правильне. **5)** Хибне. **11.** Див. мал. В-2. **12.** Див. мал. В-3. **13. а)** Див. мал. В-4. **б)** Див. мал. В-5.



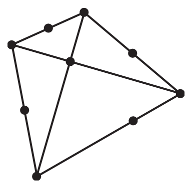
Мал. В-1



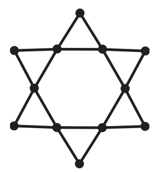
Мал. В-2



Мал. В-3

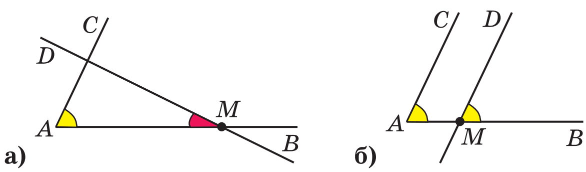


Мал. В-4

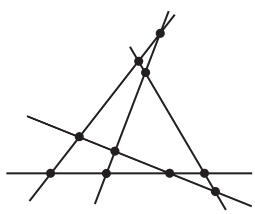


Мал. В-5

17. Ні, бо точка не має розміру. **18.** Ні. Ні. **19.** Ні, бо і на відрізку, і на прямій міститься нескінченна кількість точок, тому порівняти їх не можна. **20.** Накладанням. **21.** Накладанням. **22.** 4 (два з них розгорнуті). **23.** 6. **24. а)** 1; **б)** 3; **в)** 6. **25.** 10 (два з них – розгорнуті). **26.** Ні, наприклад, AB = 3 см і CK = 3 дм. **27.** AB = 30 см, а CK = 3 дм. **28.** Так, наприклад, 2 см < 1 м. **29. 1)** Так, якщо $MD \parallel AB$. **2)** Див. мал. В-6 (2 розв'язки). **30.** Див. мал. В-7. **31.** Якщо маємо на прямій n точок і між кожними двома позначаємо по одній точці, то матимемо $n - 1$ нових точок. Загальна кількість точок дорівнюватиме $n + (n - 1) = 2n - 1$, – число непарне, тобто щоразу останню кількість точок множимо на 2 і віднімаємо 1.

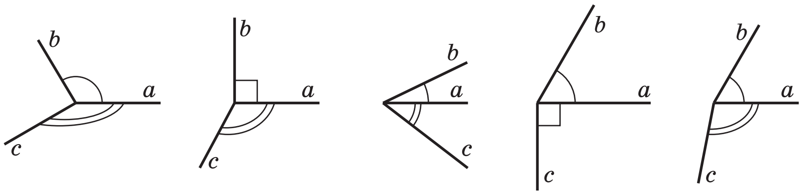


Мал. В-6

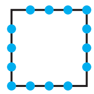


Мал. В-7

32. г) 12 см. **33.** Ні. **35. 1)** M – середина $[AB]$. **2)** M – удвічі ближча до B, ніж до A. **3)** $[CB]$, де C – середина AB. **4)** $[AC]$, де C – середина AB. **36. 1)** Середина $[AB]$. **2)** Точка M на $[AB]$, яка вдвічі ближча до B, ніж до A, і точка M поза $[AB]$ така, що $BM = AB$. **3)** Поміняйте в п. 2) точки A і B місцями. **4)** $[MB)$, де M – середина $[AB]$. **5)** Поміняйте в п. 4) точки A і B місцями. **6)** $[MB)$, де M міститься на $[AB]$ удвічі ближче до B, ніж до A; $[MK)$, де M міститься на продовженні $[AB]$ за точку B і $BM = AB$, точка K – на продовженні $[BM]$ за точку M. **37. 1)** 6 см. **2)** 4,5 см. **3)** 4,5 см. **5)** 2 см. **6)** 8 см. **7)** 3 см. **8)** 4 см. **9)** 6 см. **10)** 3,6 см. **11)** 7,5 см. **12)** 5,4 см. **13)** 7,5 см або 4,5 см. **38.** 9 см, 1 см. **39.** 2 см, 6 см. **40.** 14 см. **41.** 3 см. **42.** 6 см. **43.** У довільній точці X на $[BC]$. *Порада*. Візьміть до уваги, що $X \in [AD]$. Тоді шукана сума $x + |x - 1| + |x - 2| + (3 - x)$. Доведіть (піднесеням до квадрату), що $|a| + |b| \geqslant |a - b|$. **44.** У точці A. *Порада*. Шукана сума $AX \cdot 100 + BX \cdot 75 = 5 \cdot 75 + AX \cdot 25$. **45.** $1 = 5 \cdot 3 - 7 \cdot 2$. **46.** 24 см. *Порада*. 12 см – це довжина половини хвоста. **48.** 90°. **49.** 40°. **50.** 62°. **51. 1)** 60°. **2)** 30°. **3)** 90°. **4)** 75°. **5)** 40°. **6)** 40°. **7)** 72°. **8)** 20°. **9)** 48°. **10)** 36°. **11)** 24°. **12)** 90°. **13)** 70°. **14)** 20° або 60°. **52. а)** 90° або 44°; **б)** 40° або 4°. **53.** AC проходить між сторонами кутів BAD, BAF і CAF; 6 кутів мірами 20°, 40°, 60° і 80°. **54.** Тупі кути. **55.** Можливі випадки на мал. В-8. **56.** У різні. **57.** 24. **58.** Мал. В-9.



Мал. В-8


Мал. В-9

59. 7. *Порада*. Кількість малих зав'язок дорівнює сумі кількості розрізів і кількості мотузок. **60.** 37. *Порада*. Усі мотузки, окрім однієї, по 1 м (бо за умовою є мотузки по 2 м). **61. а)** 5 : 3; **б)** 2 : 3. **62.** 70° або 130°. **63. а)** 6°; **б)** 0,5° = 30′. **64. а)** 180°; **б)** 90°; **в)** 165°; **г)** 172°30′; **д)** 172°30′. **65.** Точки променя MB, без його початку – точки M, де M – середина $[AB]$. **68.** 3 промені. **69.** 5 променів. **70.** Одним. *Порада*. $100 = 7 \cdot 4 + 12 \cdot 6$. **71.** Від 6 м до 10 м. *Порада*. $H = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 2 + a$, де $0 \leqslant a \leqslant 4$.

РОЗДІЛ II

72. а) 1. **б)** 2. **в)** 4. **73.** Ні. **74. а)** Ні; **б)** ні; **в)** так. **75. а)** Ні; **б)** ні; **в)** так. **76.** Пари **а)** і **г)**. **77. а)** 150°; **б)** 60°; **в)** 90°. **78.** 148°. **79.** 57°. **80.** 133°. **81.** Кут, суміжний з першим, менший, ніж кут, суміжний з другим із даних кутів. **82.** Кут, суміжний з першим, більший, ніж кут, суміжний з другим із даних кутів. **83.** 120° і 60°. **84.** 45° і 135°. **85.** 75° і 105°. **86.** 80° і 100°. **87.** 120° і 60°. **88.** 108° і 72°. **89.** 45° і 135°. **90.** Ні. *Порада*. Розгляньте контрприклад: кути 20° і 40° мають за суміжні кути 160° і 140°. **91.** Суміжний з першим. *Порада*. З умови маємо: $4\alpha_1 = 3\alpha_2$. **92.** 4). **93. а)** 45° і 135°; **б)** 72° і 108°; **в)** 75° і 105°. **94.** 60° і 120°. **95.** 30° і 150°. **96.** 117° і 63°. **97.** 120°. **98.** Розгорнутий кут – 24 рази; прямий – 48 разів. *Порада*. Кожну годину стрілки годинника утворюють розгорнутий кут 1 раз, а прямий – 2 рази. **99.** Нескінченну кількість. **100.** Нескінченну кількість. **104. а)** 30°; **б)** 10°; **в)** 120°. **105. а)** 56°, 124°; **б)** 124°, 56°; **в)** 100°, 80°. **106. а)** Ні. **б)** Ні. **107.** 30°, 150°, 30°, 150°. **108.** 60°, 120°, 60°, 120°. **109.** 80° і 100°. **110.** 80° або 144°. **111.** 45°, 135°, 45°, 135°. **112.** 90° і 180°. **115.** 10 кутів; 180°. **116. а)** ні; **б)** так; **в)** так; **г)** ні. **119.** Ні. **120.** Ні. **121. а)** Ні; **б)** так. **122.** 70°. **123.** 60°, 30°, 90°, 120°, 150°, 180°. **126.** 2. **127.** Нескінченну кількість відрізків. **128.** 60° і 120°. **129.** Так. **130.** 40° і 40°.

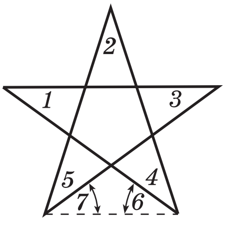
131. k перетинає прямі n, m і d. **133.** 180° – 2α. **136.** 40° і 40°. **137.** Так. **138.** *Порада*. Згинанням аркуша отримати відповідний промінь і навести його олівцем. Виміряти вертикальний йому кут. **139. 1)** 80°, 100°, 80°, 100°. **2)** 28°, 152°, 28°, 152°. **3)** 61°, 119°, 61°, 119°. **4)** 60°, 120°, 60°, 120°. **5)** 60°, 120°, 60°, 120°. **6)** 80°, 100°, 80°, 100°. **7)** 15°, 165°, 15°, 165°. **140. а)** 90°; **б)** 180°. **141.** 72°. **142.** Дані кути – прямі. **144.** 36° і 144°.

РОЗДІЛ III

146. Так. **147.** Так. **148. а)** $\angle 3 = \angle 5$; **б)** $\angle 2 = \angle 6$. **149. а)** 150° і 140°; **б)** 140° і 30° або 40° і 150°. **150.** 20° і 70° або 160° і 110°. **151. а)** 218°; **б)** 142° і 218°. **152.** Так. **153.** Ні. **154.** 130° і 110° або 50° і 70°. **155.** Ні. **156.** Так. **158. а), в), д). 159.** $n \parallel m$. **160.** Ні. **161.** Ні. **162.** Одну. **163. 1)** Так. **2)** Так. **3)** Ні. **4)** Так. **164.** Так. *Порада*. Приклад: січна перпендикулярна до однієї з даних прямих і не перпендикулярна до другої. **165.** Так. **166.** Ні. **167.** Так. **169.** Ні. **173. а)** 130° і 50°; **б)** 135° і 45°. **174. а)** 4 кути по 56° і 4 – по 124°; **б)** 4 кути по 107° і 4 – по 73°. **175. а)** Ні; **б)** так. **176.** Ні. **177. 1)** Ні. **2)** Так. **3)** Ні. **4)** Ні. **5)** Так. **6)** Так. **178.** Ні. **179.** 90°. **180.** Так. **181. а)** 4 кути по 40° і 4 – по 140°; **б)** 8 кутів по 90°. **182.** 4 кути по 70° і 4 – по 110°. **183. а)** 4 кути по 60° і 4 – по 120°; **б)** 4 кути по 60° і 4 – по 120°; **в)** 4 кути по 70° і 4 – по 110°. **184.** Так, якщо вони прямі. **185.** 24° і 4 кути по 156°. **186.** 3 кути по 36° і 3 – по 144°. **187.** 3 кути по 30° і 3 – по 150°. **189.** 75°. *Порада*. Проведіть через точку C пряму, паралельну AB. **191.** 71° і 109°. **192.** 20° і 160°. **193.** За даними задачі нічого не можна сказати про паралельність прямих. Самостійно знайдіть контрприклад. **194.** Так. **195.** Так. *Порада*. Проведіть через точку D пряму, паралельну AB. **200.** Або рівні, або в сумі дають 180°. **201.** Або рівні, або в сумі дають 180°. **202.** 120° і 60°. **203.** 126° і 54°. **204.** 80° і 100°. **205.** 100° і 180°.

РОЗДІЛ IV

206. а) Рівнобедрений; **б)** рівносторонній; **в)** різносторонній. **207. а)** Прямокутний; **б)** тупокутний. **209.** 29 см. **210.** 11 см. **211.** 8 см. **212.** 23 см. **213.** 45 см. **214. а)** 15, 15 і 15 см; **б)** 10, 15 і 20 см. **215. а)** 16, 16 і 16 см; **б)** 10, 15 і 20 см. **216.** 34 см. **217.** 20, 40 і 28 см. **218.** 45 см. **223.** Відрізок і промінь відповідно. **224. а)** Ні; **б)** так; **в)** ні. **225.** Так. **226.** Ні. **227.** Тупокутний. **228.** Одна поза трикутником, друга – ні. **229. а)** 15 см; **б)** 9 см. **232. а)** 96°; **б)** 18°; **в)** 24°. **233. а)** Ні; **б)** так; **в)** ні. **234. а)** 60°; **б)** 44°; **в)** 12°. **235.** 60°. **236. а)** Так; **б)** так; **в)** ні; **г)** так. **237. а)** Ні; **б)** ні; **в)** так. **238. а)** 70°, 47°; **б)** 24°, 38°; **в)** 38°, 75°, 67°. **239. а)** Тупокутний; **б)** прямокутний. **240. а)** Так; **б)** ні; **в)** ні. **241. а)** 120°; **б)** 90°; **в)** 100°. **242.** 112°. **243.** *Порада*. Застосуйте спосіб від супротивного. **244. а)** Прямокутний; **б)** тупокутний; **в)** тупокутний. *Порада*. Див. О.З. приклад 3, с. 78. **245. а)** 30°, 60°, 90°; **б)** 40°, 60°, 80°; **в)** 50°, 50°, 80°. **246.** 13°, 77°, 90°. **247. а)** 30°, 60°; **б)** 22,5°, 67,5°. **248. а)** 65°, 80°, 35° та 145°; **б)** 80°, 40°, 60° та 120°. **250. а)** 1; **б)** 1; **в)** 2 або 3. **251. а)** 30°, 65°, 85°; **б)** 78°, 65°, 37°; **в)** 102°, 65°, 13°. **252. а)** 62°; **б)** 79°; **в)** 34°, 56°. **253.** 37°, 69°, 74°. **255. а)** 7°; **б)** 9°. **256. а)** 11 : 8 : 5. *Порада*. Запишіть кути трикутника як x, $4x$, $7x$. Тоді зовнішні кути – $11x$, $8x$, $5x$; **б)** 6 : 5 : 3. **257. а)** 4 : 3 : 1; **б)** 6 : 4 : 1. **259. 1)** 110°. *Порада*. Див. О.З. приклад 7, с. 79. **2)** 80°. **3)** *Порада*. Див. О.З. приклад 7, с. 79. **4)** $\angle A = 90°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 30°$. **260.** 180°. *Порада*. Доведіть за мал. В-10, що сума кутів 1 і 3 дорівнює сумі кутів 6 і 7. **261.** 130°, 20°, 30°. *Порада*. Пригадайте означення кута між прямими й візьміть до уваги, що трикутника із вказаними в умові мірами кутів не існує. **263.** 50°, 70°. **265. а)** 90°; **б)** 54°; **в)** 130°. **266. а)** 72°; **б)** 49°; **в)** 38°. **267.** 90°; 45°; 45°. **273. а)** 156°,

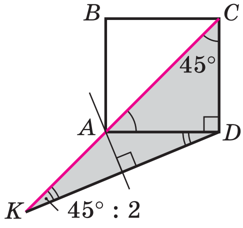


Мал. В-10

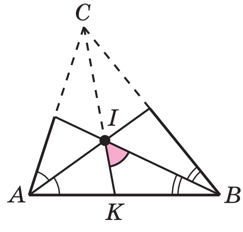
12°, 12°; **б)** 40°, 70°, 70°. **275 а)** Ні; **б)** ні; **в)** так. **276. а)** Так; **б)** так; **в)** так. **277. а)** 45°, 45°, 90° або 45°, 67,5°, 67,5°; **б)** 74°, 74°, 32° або 74°, 53°, 53°; **в)** 120°, 39°, 39°. **279. а)** Так; **б)** так; **в)** так. **280. а)** Ні; **б)** ні; **в)** так. **281. а)** 150°, 15°, 15°; **б)** 80°, 50°, 50° або 80°, 80°, 20°; **в)** 90°, 45°, 45°; **г)** 165°, 7,5°, 7,5°. **282. а)** 35°, 35°, 110°; **б)** 70°, 70°, 40° або 40°, 40°, 100°; **в)** 45°, 45°, 90°; **г)** 55°, 55°, 70° або 70°, 70°, 40°. **283.** 45°, 45°, 90°. *Порада*. Див. О.З. приклад 3, с. 83. **284.** 50°, 50°, 80°. *Порада*. Див. О.З. приклад 7, с 79. **286.** 30°, 60°, 90°. Див. О.З. приклад 3, с. 83. **287. а)** 40°; **б)** 40°; **в)** р.н. **288.** 40°, 40°, 100° або 20°, 20°, 140°. **289. а)** 20°, 80°, 80° або 80°, 50°, 50°; **б)** 40°, 40°, 100° або 20°, 20°, 140°. **290.** 108°, 36°, 36°. **291. а)** 20°, 80°, 80°; **б)** 50°, 50°, 80°. **292.** 32°, 68°, 80°. **293.** 150°, 15°, 15°. **294.** 57°. **295.** 72°, 72°, 36°. **296.** 22,5°, 67,5°, 90°. **297.** 84° або 180° – 84°. **298.** 9°. **299.** 60°, 30°. **300.** 40°, 70°, 70°. **301.** $90° - \frac{\angle A}{2}$, $90° - \frac{\angle B}{2}$, $90° - \frac{\angle C}{2}$. **307.** Прямі AB і PC або паралельні, або збігаються. **314.** Так. **318.** 5 см. **329. а)** Так; **б)** так. **385.** Так. Наприклад трикутник з кутами 72°, 72°, 36°. **386.** Ні. *Порада*. Візьміть до уваги О.З. приклад 7, с. 79. **387.** Ні. *Порада*. Тоді дана бісектриса – висота основи рівнобедреного трикутника. Далі див. № 386. **388.** Так. Якщо $\angle A = 90°$, $AB = 2AC$. **389.** Так. **390. а)** Найбільша – AB, найменша – BC; **б)** найбільша – BC, найменша – AB; **в)** найбільша – AB, найменша – AC. **391. а)** Кут B – найбільший, кут C – найменший; **б)** кут B – найбільший, кут A – найменший; **в)** кут A – найбільший, кут C – найменший. **392. а)** $\angle C > \angle A > \angle B$; **б)** $\angle C > \angle A = \angle B$; **в)** $\angle C = \angle A > \angle B$. Не може. **393. а)** $LM > KM > KL$; **б)** $LM = KL < KM$. **394.** 8 см. **396. а)** Ні; **б)** так; **в)** ні; **г)** ні; **д)** так. **397.** 11 см. **398. а)** 8 см; **б)** 10 см; **в)** 8 см або 10 см. **399. а)** Так; **б)** так; **в)** так; **г)** ні. Більше за 1 см і менше за 11 см. **400. а)** $a - b < c < a + b$; **б)** $2a < P < 2(a + b)$. **401.** 2 см. **404.** *Порада*. Скористайтеся нерівністю трикутника: $h_a < AB + a - x$ і $h_a < AC + x$, звідси: $2h_a < AB + a + AC$. **405.** *Порада*. Продовжіть медіану BM на відрізок $MB_1 = MB$ і скористайтеся співвідношеннями між сторонами для трикутника ABB_1. **408. 1)** 10 м; **2)** 8 м; **3)** 6 м; **4)** ні. **410. а)** 35°, 55°; **б)** 30°, 60°. **411.** 8 см. **412.** 6 см. **415.** 17 см. **416. а)** $45° < \angle A < 90°$; **б)** $0° < \angle B < 45°$. **417.** 135°. *Порада*. Див. О.З. приклад 7, с. 79. **418. 1)** Ні. **2)** Так. **419.** *Порада*. Див. № 417. **420. а)** 30°, 60°; **б)** 6 м. **421.** 30°, 30°, 60°. **422.** 16 см, 32 см. **425.** 5 см. *Порада*. Шукана висота – поза трикутником. **427.** *Порада*. Застосуйте метод від супротивного та О.З. приклад 3, с. 83. **429.** 30°, 60°. *Порада*. Див. № 427. **430.** 20°; 20°, 140°. **431.** Рівнобедрений. *Порада*. $\angle A + 2\angle B = 180° = \angle A + \angle B + \angle C$, тоді $\angle B = \angle C$. **433.** 35°, 55°. **436.** Ні. *Порада*. Застосуйте метод від супротивного. **438.** 2 : 1. *Порада*. Трикутники, що відтинаються від даного, – прямокутні, з гострим кутом 30°. Тоді точки ділять сторони трикутника на відрізки $2x$ і y, $2y$ і z, $2z$ і x. З рівностей $2x + y = 2y + z = 2z + x$ отримайте, що $x = y = z$. **440.** Ні. **441.** Ні. **442.** Так. *Порада*. Накресліть рівнобедрений $\triangle ABC$ ($AB = AC$); продовжіть AC на $CP = AC$. $\triangle BAP$ – шуканий. **443.** 60°, 90°. **444.** 30°, 30°, 120°. *Порада*. Доведіть, що вказані прямі ділять даний трикутник на два рівнобедрених трикутники та один рівносторонній (скористайтеся О.З. № 427.) **445.** *Порада*. Медіани трикутника ділять трикутник на 6 трикутників. Запишіть нерівності для сторін трьох з них (взятих через одного) і додайте їх.

РОЗДІЛ V

446. а) 4 см; **б)** 7 см; **в)** $2a$ см. **448. а)** коло із центром A і радіусом 1 см; **б)** точки круга із центром A і радіусом 2 см; **в)** точки круга із центром A і радіусом 1,5 см без точок кола, що його обмежує; **г)** точки кола та поза колом із центром A і радіусом 1 см; **д)** точки кільця, обмеженого колами із центром A і радіусами 1 см і 2 см, без точок кола меншого радіуса. **449. а)** Ні; **б)** ні. **450. а)** $0 < R \leqslant 6$ (см). **451. а), б)** Точки перетину прямої a з колом із центром A і радіусом 4 см; **в)** ні. **452.** 6 см. **453. б)** *Порада.* $\triangle AO_1B$ – рівнобедрений. **458.** *Порада.* Допоможе теорема 3, § 23. **459.** R. **460. а)** 90°; **б)** 120°. **461.** 6 см, 4 см. **462.** 60°. **465. а)** Коло, із центром O і радіусом $0{,}5R$; **б)** коло, із центром O і радіусом $2R$. **467.** *Порада.* Застосуйте спосіб від супротивного. **468.** *Порада.* Розгляньте паралельні хорди, що рівні заданим. **474. а)** 60°; **б)** 116°; **в)** 120°; **г)** 60°; **д)** 30°; **е)** 90°. **476. а)** 30°; **б)** 45°. **479.** 66°. *Порада.* Див. О.З. приклад 2, с. 128. **483.** 34° **486.** Так. **488. а)** 21 см; **б)** 33 см. **489.** 21 см; 15 см. **492.** 58 см. **493.** 9 см, 7 см. **495.** *Порада.* Доведіть, що $\angle ABO = \angle ACO = 90°$. **505.** Точки круга із центром A і радіусом 4 см без точок кола, що його обмежує. **506. а)** Точки перетину кола із центром M і радіусом 2 см з даною прямої; **б)** Точки перетину круга із центром M і радіусом 3 см без точок кола, що його обмежує, з даною прямою; **в)** Точки даної прямої, що містяться поза кругом із центром M і радіусом 5 см без точок кола, що його обмежує. **508.** Дві взаємно перпендикулярні прямі, що є бісектрисами двох пар вертикальних кутів, що утворилися. **509.** 5 см. *Порада.* $M \in l_A$, тому $d(M; AB) = d(M; AC)$. **510.** Коло із центром у середині даного відрізка і радіусом, що дорівнює половині цього відрізка без двох точок – кінців відрізка. **512.** 45°. *Порада.* Скористайтеся властивістю бісектриси кута як ГМТ і доведіть, що $\angle EAK = \angle C/2$, а $\angle DAM = \angle B/2$; $90° - (\angle C + \angle B) : 2 = 45°$. **513.** Кільце, обмежене концентричними колами даних радіусів, без точок цих кіл. **514.** Спільні точки двох кіл даних радіусів із центрами в точках A і B відповідно; 1 см $\leqslant AB \leqslant$ 7 см. **515.** Коло даного радіуса із центром у заданій точці. **516.** Точка перетину бісектриси кута з прямою, що перетинає даний кут, є паралельною до його сторони і віддалена від цієї сторони на задану відстань. **517.** Коло, концентричне даному, радіус якого дорівнює відстані від центра кола до AB. **518.** Діаметр даного кола, перпендикулярний до заданої прямої. **521. 2)** 120°; **4)** 8 см. **523. а)** 24 см; **б)** 72 см. **524. а)** 2 см; **б)** 6 см; **в)** 6 см. **525.** Прямокутний. **526. а)** 16 см; **б)** 8 см. **527.** 2,5 см. **528. а)** 6 см; **б)** 12 см. **529.** 20 см. **530.** 10 см. *Порада.* Доведіть, що дана пряма – серединний перпендикуляр до AC. **532.** 45°, 45°, 90°. **534. 1) а)** 40°; **б)** 60°; **в)** 120°. **2)** 4 см. **536.** Чверть кола із центром у вершині кута і радіусом $0{,}5AB$. **539.** 4 і 8 см. **540. а)** 15 см; **б)** 9 см. **541. 3** см. **545.** 120°. **546. 1)** 12 см. **2)** 8 см. **547.** $2(a + d)$. **549.** 30 см. **550.** 1 м. **551.** 24 см^2. **552.** 1 см. **553.** 12 см. **554.** 45°, 45°. **555.** a. **556.** *Порада.* Пригадайте властивість бісектрис суміжних кутів. **557.** *Порада.* Рівні між собою хорди рівновіддалені від центра кола, а точка, рівновіддалена від сторін кута, міститься на його бісектрисі. **558.** 14 см. **559.** $(m - a) : 2$. **560.** $2R$. **561.** Через центри кругів; центр круга шоколадки і точку перетину діагоналей квадрата (прямокутника). **562. а)** 0; **б)** 1; **в)** 2; **г)** 2; **д)** 1; **е)** 0. **564.** Дві прямі, паралельні до a, що віддалені від неї на відстань R. **565.** Півплощина, на яку площину ділить серединний перпендикуляр до $[AB]$, без точок самого перпендикуляра, що містить точку B. **566.** Півплощина, на яку ділить площину пряма, що містить бісектрису даного кута, у якій лежить $[OB)$. **567.** 80°, 60°, 40°. **569.** *Порада.* Скористайтеся тим, що площа трикутника $S = p \cdot r$ і запишіть сторони трикутника через його відповідні висоти та площу. **570.** $2R_3$, де R_3 – радіус більшого з кіл. **571.** *Порада.* Доведіть, що кути ACB і OMB прямі. **573.** *Порада.* Доведіть, що кути IBI_1 і ICI_1 прямі, де I і I_1 – точки перетину бісектрис трикутника та бісектрис вказаних зовнішніх його кутів відповідно. **574. а)** Кут ACB та вертикальний йому; **б)** кут ACB; **в)** частина кута ACB поза трикутником ABC; **г)** центр кола, описаного навколо $\triangle ABC$. **575.** Коло, радіус якого дорівнює діаметру даного кола, а центром є точка B, де AB – діаметр даного кола. **576. а)** По дузі кола, що міститься в середині даного круга, має за центр задану точку, а радіус дорівнює радіусу круга; **б)** треба розрізати одну з отриманих частин п. а) на дві частини. **583. 3)** *Порада.* Побудуйте кут, що доповнює суму даних кутів до 180°. **584. 5)** *Порада*. Побудуйте кут, що доповнює даний до 90°. **585.** *Порада*. Візьміть до уваги: **а)** 75° = 60° + 15°; **б)** 120° = 60° + 60° або 120° = 90° + 30°; **в)** 22,5° = 45° : 2. **587.** *Порада*. Візьміть до уваги, що $(2a + c) - 2a = c$. **588.** *Порада*. Візьміть до уваги: **а)** центр описаного кола міститься на висоті трикутника, а дві сторони утворюють із цією висотою кути по 30°; **б)** радіус описаного кола вдвічі більший за радіус вписаного і див. п. а). **589.** *Порада*. Візьміть до уваги: **а)** гострі кути такого трикутника по 45°; **б)** центр описаного кола – середина гіпотенузи. **590.** *Порада*. **а)** Проведіть хорду через дані точки і діаметр через кінець хорди – два розв'язки; **б)** побудуйте коло з центром у середині відрізка з кінцями у даних точках і радіусом, що дорівнює половині цього відрізка – точка перетину його з даним колом – вершина прямого кута шуканого трикутника (два розв'язки). **591.** Безліч розв'язків. *Порада*. Перетніть дані прямі довільною січною. Побудуйте коло із центром у середині найбільшого з відрізків, що відтинають дані прямі на січній і радіусом, що дорівнює половині цього відрізка – точка перетину з прямими – вершини шуканого трикутника. Спробуйте знайти інші способи побудови. **592.** *Порада*. Шукана пряма перпендикулярна до бісектриси кута. **593.** *Порада*. Див. пораду до № 592. **594.** Безліч розв'язків. *Порада*. Візьміть до уваги: центр шуканого кола міститься на бісектрисі кута. **595.** *Порада*. Візьміть до уваги: центр шуканого кола міститься на бісектрисі кута та на перпендикулярі до сторони кута. **596.** *Порада*. З довільної точки кола заданого радіуса проведіть дві хорди даних довжин. **597.** *Порада*. Візьміть до уваги: $(A + B) - (A - B) = 2B$, $(A + B) + (A - B) = 2A$. **598.** *Порада*. **в)** Візьміть до уваги: даний відрізок є гіпотенузою рівнобедреного прямокутного трикутника, катети якого – половини сторін квадрата. **г)** Побудуйте $\triangle KAD$ (мал. В-11) за даним відрізком і прилеглими кутами; серединний перпендикуляр до KD. **599.** *Порада*. Візьміть до уваги: $a = ((a + b) + (b + c) + (a + c)) : 2 - (b + c)$. **600.** *Порада*. Побудуйте в доступній півплощині дві точки, рівновіддалені від кінців даного відрізка (різними розхилами циркуля). **601.** *Порада*. **а)** Побудуйте дві інші висоти та перпендикуляр до AB з точки їх перетину. **б)** Побудуйте дві інші бісектриси й візьміть до уваги (мал. В-12), що $\angle KIB = \frac{\angle C}{2} + \frac{\angle B}{2} = 90° - \frac{\angle A}{2}$.



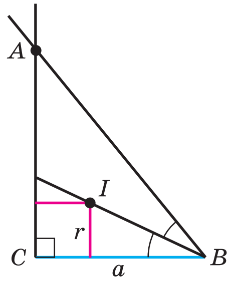
Мал. В-11



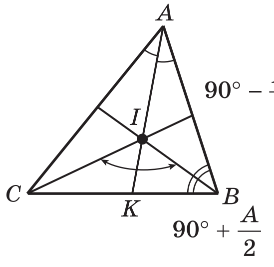
Мал. В-12

602. *Порада*. Візьміть до уваги: центр кола належить бісектрисі кута і прямій, паралельній стороні кута, що віддалена від цієї сторони на заданий радіус. **603.** Три розв'язки. *Порада*. Один – див. № 592. Інші – проведіть пряму, що перетинає одну зі сторін кута під кутом, рівним даному та пряму, паралельну до неї, що проходить через задану точку. **604.** *Порада*. Аналогічно до № 603. **605.** Чотири розв'язки. *Порада*. Побудуйте коло радіуса, що дорівнює половині гіпотенузи, діаметр кола та пряму паралельну до діаметра, віддалену від нього на відстань, рівну даній висоті. **606.** *Порада*. Побудуйте коло радіуса, що дорівнює половині гіпотенузи; на діаметрі кола від його кінця відкладіть задану проекцію; через отриману точку – перпендикуляр до діаметра. **607.** *Порада*. Побудуйте прямий кут і впишіть у нього квадрат із стороною, що дорівнює радіусу вписаного кола (мал. В-13). Відкладіть на стороні прямого кута відрізок CB, рівний катету. Від IB відкладіть кут, рівний IBC – отримаєте точку A. $\triangle ACB$ – шуканий. **608.** Два розв'язки. *Порада*. Візьміть до уваги, що центр шуканого кола перетин двох ГМТ: ГМТ, рівновіддалений від даної точки на відстань заданого радіуса, та ГМТ, рівновіддалених від даної прямої на відстань заданого радіуса. **609.** *Порада*. Будуємо

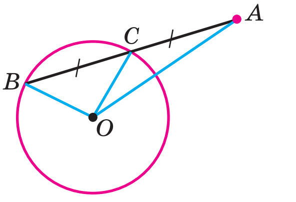
$\frac{\angle A}{2}$ (див. мал. В-14; О.З. приклад 7, с. 79; про $\angle KIB$ у пораді до № 601). Від довільної точки A прямої AK відкладаємо кути, рівні куту $\frac{\angle A}{2}$. Перетин сторін цих кутів з двома іншими даними прямими визначає точки C і B. $\triangle ABC$ – шуканий.
610. *Порада*. Див. мал. В-15, О.З. приклад 2, с. 157; О.З. приклад 8, с. 160.



Мал. В-13

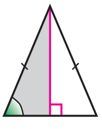


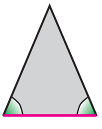
Мал. В-14

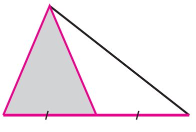


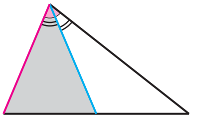
Мал. В-15

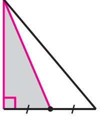
616. *Порада*. Див. мал. В-16. **617.** *Порада*. Див. мал. В-17. **618.** *Порада*. Див. мал. В-18. **619.** *Порада*. Див. приклад 8, с 157. **620.** *Порада*. Див. мал. В-19. **621.** *Порада*. Див. мал. В-20. **622.** *Порада*. Див. мал. В-21.

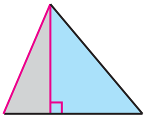

Мал. В-16

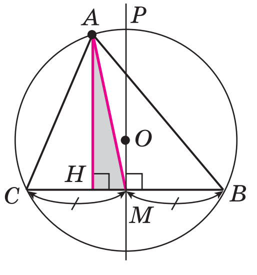

Мал. В-17


Мал. В-18


Мал. В-19

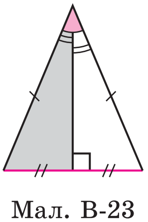

Мал. В-20

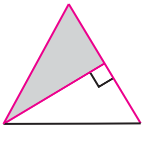

Мал. В-21

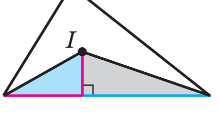


Мал. В-22

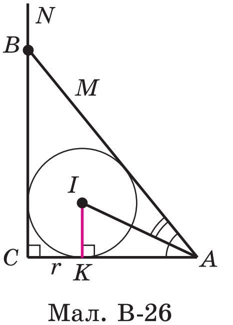
623. *Порада*. Див. мал. В-22. **624.** *Порада*. Див. мал. В-23. **625.** *Порада*. Див. мал. В-24. **626.** *Порада*. Див. мал. В-25. **627.** Будуємо (мал. В-26): $\frac{\angle A}{2}$; $\triangle IKA$; $KC = r$; $NC \perp CA$; $\angle IAM = \frac{\angle A}{2}$. **628.** *Порада*. Див. мал. В-27. **629.** *Порада*. Можливі два випадки (мал. В-28). Другий випадок зводиться до першого, якщо побудувати кут, який доповнює суму двох даних до 180°. **630.** *Порада*. Див. приклад 2, с. 164. **631.** *Порада*. Візьміть до уваги, що гіпотенуза $c = 2m_c$. Далі див. приклад № 623.


Мал. В-23

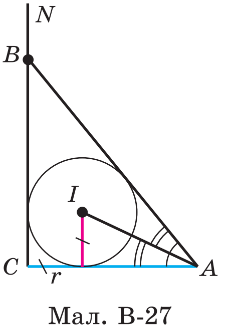

Мал. В-24



Мал. В-25

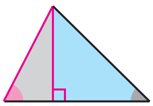


Мал. В-26

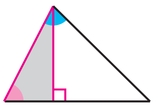


Мал. В-27

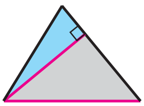
632. *Порада*. Див. мал. В-29. **633.** *Порада*. Див. мал. В-30. **634.** *Порада*. Див. мал. В-31. **635.** *Порада*. Див. мал. В-29. **636.** Будуємо (мал. В-32): $\triangle BAK$ (маємо AB); $\dfrac{\angle A}{2}$; $\triangle PAB$; $\angle PAC = \dfrac{\angle A}{2}$.



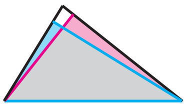
Мал. В-28, а



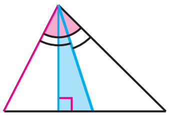
Мал. В-28, б



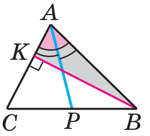
Мал. В-29



Мал. В-30

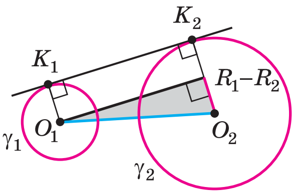


Мал. В-31

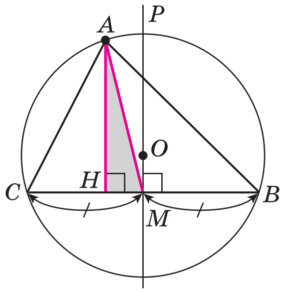


Мал. В-32

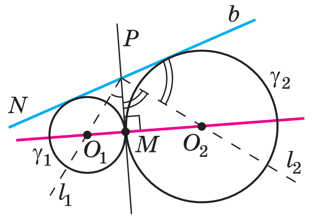
637. Будуємо (мал. В-33): центр O_1 і O_2 даних кіл; $\triangle O_1O_2T$; $(O_2T) \cap \gamma_2 = K_2$; $O_1K_1 \parallel O_2K_2$. **638.** Будуємо (мал. В-34): $\triangle AHM$; $PM \perp HM$; γ_1 даного R із центром A, $\gamma_1 \cap (PM) = O$; γ_2 даного R із центром O, $\gamma_2 \cap (HM) = \{C; B\}$. **639.** Будуємо (мал. В-35): $PM \perp a$; бісектрису l_1 кута NPM, $l_1 \cap a = O_1$; $l_2 \perp l_1$, $l_2 \cap a = O_2$; γ_1 і γ_2 заданими радіусами із центрами в точках O_1 і O_2. **640.** Коло, діаметром якого є відрізок з кінцями в даних точках (мал. В-36). **641.** На суміжних сторонах трикутника треба вікласти задані відрізки AM і AK (мал. В-37). Центр шуканого кола міститься на серединному перпендикулярі до MK на відстані R від точок K і M. Маємо три розв'язки (для трьох кутів трикутника).



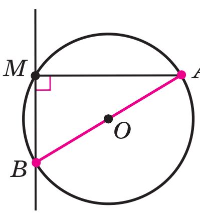
Мал. В-33



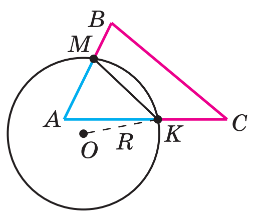
Мал. В-34



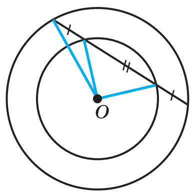
Мал. В-35



Мал. В-36

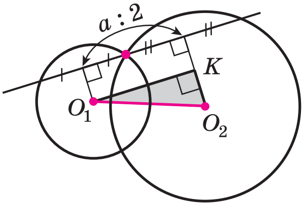


Мал. В-37

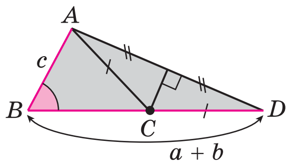


Мал. В-38

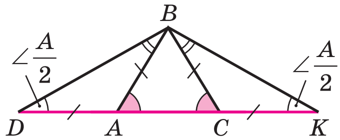
642. Зайдіть центр даних кіл. Тоді маємо радіуси цих кіл і опорну задачу (с. 157) на побудову трикутника за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони (мал. В-38). **643.** Знайдіть центри O_1 і O_2 даних кіл і поділіть даний відрізок a навпіл. $\triangle O_1O_2K$ – базовий (мал. В-39). **644.** Пряма паралельна лінії центрів кіл (див. № 643). **645.** *Порада*. **а)** Див. мал. В-40. **б)** Див. приклад 5, с. 168. **646.** *Порада*. Див. мал. В-41. **647.** *Порада*. Див. мал. В-42. **648.** *Порада*. Див. мал. В-43.



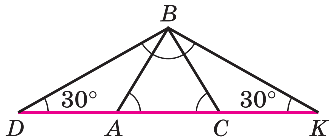
Мал. В-39



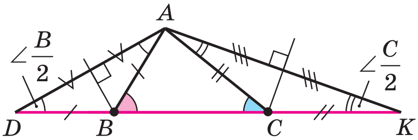
Мал. В-40



Мал. В-41

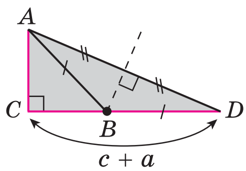


Мал. В-42

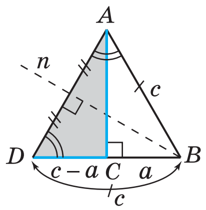


Мал. В-43

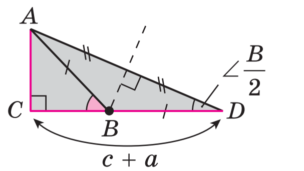
649. *Порада*. Див. мал. В-44. **650.** *Порада*. Див. мал. В-45. **651. а)** Два розв'язки. *Порада*. Див. мал. В-46а – аналіз, В-46б – побудова. **б)** Один розв'язок. *Порада*. Див. мал. В-47. **652. а)** Два розв'язки. *Порада*. Див. мал. В-48а – аналіз, В-48б – побудова. **653.** *Порада*. Побудуйте прямокутний трикутник, один катет якого збігається зі стороною даного трикутника, а другий дорівнює його висоті.



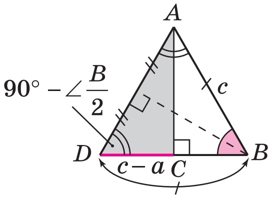
Мал. В-44, а



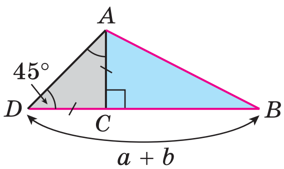
Мал. В-44, б



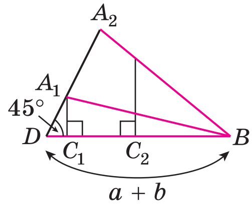
Мал. В-45, а



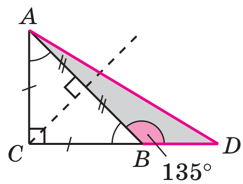
Мал. В-45, б



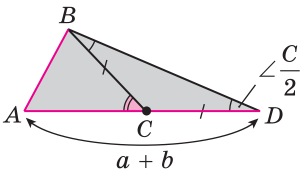
Мал. В-46, а



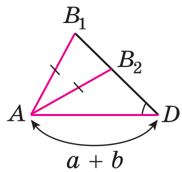
Мал. В-46, б



Мал. В-47



Мал. В-48, а



Мал. В-48, б

Готуємося до тематичного оцінювання № 1

ВАРІАНТ 1. **1.** 1-Б, 2-А, 3-В. **2.** 180°. **3.** 6. **4.** 35 см. **5.** 45°, 75°.
ВАРІАНТ 2. **1.** 1-Б, 2-А, 3-В. **2.** $a + b$. **3.** 4. **4.** 4 дм. 5. 36°.

Готуємося до тематичного оцінювання № 2

ВАРІАНТ 1. **1.** Б, Г, Д. **2.** Г. **3.** А. **4.** 72° і 108°. **5.** 24°, 156°, 24°, 156°. **6.** 153°.
ВАРІАНТ 2. **1.** А, Г. **2.** В. **3.** А. **4.** 30° і 150°. **5.** 40°, 140°, 40°, 140°. **6.** 27°.

Готуємося до тематичного оцінювання № 3

ВАРІАНТ 1. **1.** 1-А, 2-С, 3-А, 4-С. **2.** 4 кути по 148° і 3 – по 32°. **3.** Так. **4.** 144°.
ВАРІАНТ 2. **1.** 1-А, 2-С, 3-С, 4-А. **2.** 4 кути по 48° і 3 – по 132°. **3.** Так. **4.** 120°.

Готуємося до тематичного оцінювання № 4

ВАРІАНТ 1. **1.** Г. **2.** 20°. **3.** 10; 10; 14. **4.** 24°, 96°. **5.** Б. *Порада*. Враховуючи, що $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$ маємо, що $\angle B = 90° + \angle C$. **6.** 70°. *Порада*. Використайте О.З. (приклад 7, с. 79) і врахуйте, що кут між прямими не може бути тупим.

ВАРІАНТ 2. **1.** Г. **2.** 75°. **3.** 17; 17; 12. **4.** 105°, 35°. **5.** А. *Порада*. Врахувавши, що $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$, маємо: $\angle C = 110° + \angle A$. **6.** 79°. *Порада*. Використайте О.З. (приклад 8, с. 79) і врахуйте, що кут між прямими не може бути тупим.

Готуємося до тематичного оцінювання № 5

ВАРІАНТ 1. **1.** 3 см. **2.** Г. **3.** 2); 3).
ВАРІАНТ 2. **1.** 10 м. **2.** Г. **3.** 2); 3).

Готуємося до тематичного оцінювання № 6

ВАРІАНТ 1. **1.** В. **2.** 10 см. **3.** 4 см. **4.** 1-А . 2-А, 3-А, 4-А. **5.** 72°. **6.** 27° або 117°.
ВАРІАНТ 2. **1.** Б. **2.** 5 см. **3.** 8 см. **4.** 1-В, 2-В, 3-А, 4-Б. **5.** 72°. **6.** 6 см.

ЗАДАЧІ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1. Г. **2.**Д. **3.** Г. **4.** В. **5.** В. **6.** Д. **7.** Б. **8.** В. **9.** Г. **10.** Б. **11.** Г. **12.** А. **13.** Д. **14.** А. **15.** В. **16.** Г. **17.** А. **18.** Д. **19.** А. **20.** В. **21.** В. **22.** А-2, Б-5, В-1, Г-6, Д-3, Е-4. **23.** 1-В, 2-Д, 3-А, 4-Б. **24.** 1-В, 2-Г, 3-В, 4-Г, 5-А, 6-Г. **25.** 60°. **26.** $\angle A = 120°$. **27.** $AK \equiv h_a$. **28.** 30°. **29.** 40°. **30.** 90°. **31.** 60 см. **32.** **а)** 24°, 24°, 132° – один розв'язок; **б)** 58°, 58°, 64° або 64°, 64°, 52° – 2 розв'язки. **33.** 100°. **34.** 65°. **35.** 10 дм. **36.** 1 : 2. **37.** 56°. **38.** 12 см. **39.** 35°. **40.** 16 дм. **41.** **а)** 28°; **б)** 5 м. **42.** **а)** 120°; **б)** 32 см. **43.** 80°. **44.** 200 см^2. **45.** **1)** Коло, концентричне даному, радіуса, що дорівнює відстані даних хорд від центра кола. **2)** Коло із центром у середині гіпотенузи радіуса, що дорівнює її половині. **3)** Серединний перпендикуляр до відрізка з кінцями в даних точках. **4)** Коло із центром у даній точці довільного радіуса. **5)** Пряма, перпендикулярна до даної у заданій на ній точці. **46.** **1)** Ні. **2)** **а)** 60°, 120°, 60°, 120°; **б)** 60°, 120°, 60°, 120°. **48.** $l \parallel c$, $n \parallel b$, $m \parallel a$. **49.** **1)** 10 см, 10 см, 12 см; **2)** 8 см. *Порада*. У єгипетському прямокутному трикутнику відношення сторін 3 : 4 : 5. **51.** **1)** $\alpha = 55°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 35°$. **2)** $A = 54°$, $B = 37°$, $C = 36°$. **3)** $\alpha = 40°$, $\beta = 80°$, $\gamma = 60°$. 4) $A = 80°$, $B = 20°$, $C = 80°$. **51.** **1)** $x = 30°$, $y = 120°$, $z = 150°$. **2)** $x = 80°$, $y = 40°$, $z = 100°$. **3)** $x = 60°$, $y = 60°$, $z = 120°$. **4)** $x = 40°$, $y = 60°$, $z = 120°$. **5)** $x = 90°$, $y = 90°$, $z = 70°$. **6)** $x = 40°$, $y = 40°$, $z = 100°$. **55.–58.** *Порада*. Знайти серединний перпендикуляр до відрізка можна, згинаючи папір. **59.** 60°, 30°. **60.** 45°, 45°.

Готуємося до підсумкового оцінювання

1. а) 4 кути по 36°, 4 кути по 144° або 4 кути по 72°, 4 кути по 108°;
б) 4 кути по 45°, 4 кути по 135° або 4 кути по 75°, 4 кути по 105°.

2. а) 21 см, 21 см, 28 см; б) 30 см, 30 см, 40 см.

3. а) 13 см, 14 см, 15 см; б) 11 см, 12 см, 13 см.

4. а) 35°, 55°; б) 35°; 55°.