В.О. Тадеєв

ГЕОМЕТРІЯ

Основні фігури

Підручник для 7 класу

загальноосвітніх навчальних закладів

Підручник для учнів, які прагнуть знати більше,
та вчителів, які хочуть вчити краще

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН
2015

УДК 514 (075.3)
ББК 22.151я72
Т12

Рецензенти:
доктор фізико-математичних наук,
професор Київського національного університету ім. Тараса Шевченка
О.Г. Кукуш,
вчитель математики Червоноградської ЗОШ № 11, вчитель-методист
О.Г. Лапій

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України
від 20.07.2015 № 777)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Тадеєв В.О.
Т12 Геометрія : підручник для 7 кл. загальноосвітн. навч. закл. / В.О Тадеєв. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. — 296 с. : іл.

ISBN 978-966-10-3446-3

Пропонований підручник відповідає державному стандарту і чинній програмі з математики для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Він містить обов'язковий обсяг теоретичного матеріалу, а також незначне розширення «для тих, хто хоче знати більше». Наведені приклади розв'язування задач та задачі і вправи для групової і самостійної роботи. У кінці кожного розділу подається зведений перелік основних теоретичних відомостей, питання для самоконтролю та завдання для проведення контрольних робіт.

При викладі теоретичного матеріалу і підборі задач значна увага приділяється міжпредметним зв'язкам та питанням історичного, світоглядного і методологічного характеру.

Для учнів та вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 514 (075.3)
ББК 22.15я72

ISBN 978-966-10-3446-3

Піктограмою у підручнику позначено ті його електронні складові, які можна відкрити за посиланням:
http://www.bohdan-digital.com/edu.

Напутнє слово
всесвітньо відомих українських учених-астрофізиків
Клима Чурюмова і Світлани Герасименко*)

Дорогі семикласники!

Усі ми — зоряні діти. Унаслідок трансформації зір першого покоління, їхня речовина збиралася у величезні хмари, а з них народжувалися зорі другого покоління та оточуючі їх планети. Однією із зір другого покоління стало наше Сонце, а його планетою — Земля. Чи не тому таким пристрасним є прагнення людини до зір, частки яких є всередині кожного з нас? Однак для того, аби мати змогу осягати велич і гармонію Космосу, а в ньому унікальність нашої земної цивілізації, потрібно наполегливо вивчати точні науки — астрономію, фізику, математику.

За цим підручником ви приступаєте до вивчення геометрії — науки, котра, незважаючи на своє земне походження (а її назва в дослівному перекладі з грецької мови означає «вимірювання землі»), завжди була й космічною. Вже найдавніші учені-геометри спочатку шукали порядок і гармонію у Космосі і тільки після цього переносили її у свої земні теорії, а будівничі й митці втілювали у творіннях архітектури, техніки, живописного та декоративного мистецтва. Не меншою мірою ця космічна риса геометрії була характерною й для пізніших епох, а в нових формах — і для сьогодення. Глибоко символічно, що вимірювання довжин у метрах прийшло у геометрію з геодезії, а вимірювання кутів у градусах — з астрономії, а разом вони поєдналися в аксіоматичній основі сучасної геометрії. У цьому підручнику ви постійно матимете нагоду помічати ці космічні риси геометрії, чим він вигідно вирізняється з-поміж інших. І ми, як професійні учені, котрим доля дарувала щастя зробити свій внесок у розкриття Космічної гармонії, закликаємо вас з цікавістю й наполегливістю вивчати геометрію, що стала однією з найважливіших ланок у ланцюгу культурних надбань цивілізації і є потужним фундаментом для її майбутніх досягнень та злетів.

Вивчайте науки — і ваші зорі усміхнуться вам!

---

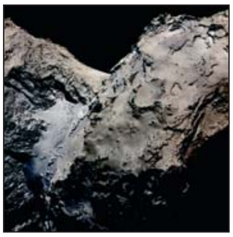
*) Відкривачі комети Чурюмова–Герасименко, яку в 2004 р. Європейське космічне агентство обрало для втілення унікального міжнародного проекту «Розетта» із запуску космічного зонда та посадки спускового модуля на ядро комети. Про них і про проект «Розетта» дивіться на наступній сторінці. — *Прим. видавництва.*

Клим Чурюмов і Світлана Герасименко: миті космічної одіссеї*)



Коли ми були молодими





Ліворуч. Напередодні запуску «Розетти». Космодром Куру, Французька Гвіана.
У центрі: старт ракети-носія «Аріан-5» (2 березня 2004 р.).
Праворуч. Знімок перемички ядра комети з космічного апарата «Розетти» (21 серпня 2014 р.).



Ліворуч і в центрі. Мить посадки модуля «Філи» на ядро комети Чурюмова–Герасименко (12 листопада, 2014 р.).
Праворуч. «Розетта» на орбіті комети Чурюмова–Герасименко, а її посадковий модуль «Філи» досліджує поверхню ядра (ілюстрація: E. Viktor).

*) **Клим Іванович Чурюмов** народився у 1937 р. в Миколаєві. Був четвертим з восьми дітей у сім'ї. Батько загинув під час Другої світової війни, у 1942 р. У 1949 р. сім'я переїхала до Києва. Після закінчення семирічки Клим вступив до Київського залізничного технікуму і в 1955 р. закінчив його з відзнакою. Це давало змогу одразу вступати до вищого навчального закладу. Клим обрав фізичний факультет Київського національного університету ім. Тараса Шевченка і закінчив його за спеціальністю «фізика-астрономія». Після закінчення аспірантури приступив до наукової робота під керівництвом видатного ученого-астронома професора С.К. Всехсвятського.

У 1969 р. Київський університет організував чергову експедицію до Астрофізичного інституту Алмати (Казахстан). Відрядили співробітника кафедри астрономії Клима Чурюмова, аспірантку Світлану Герасименко та фотолаборантку Людмилу Чиркову. Після повернення з експедиції до Києва, 22 жовтня 1969 р., К. Чурюмов і С, Герасименко, вивчаючи знімки короткоперіодичної комети Комас Сола, зроблені 9 та 11 вересня (спостереження С. Герасименко та Л. Чиркової), а також 21 вересня 1969 р. (спостереження К. Чурюмова), разом відкрили нову комету, якій було присвоєно ім'я комети Чурюмова-Герасименко.

Зараз К.І. Чурюмов — професор Київського університету імені Тараса Шевченка і за сумісництвом директор науково-просвітницького центру «Київський планетарій». Він є членом-кореспондентом Національної академії наук України і дійсним членом Нью-Йоркської академії наук, президентом Українського товариства любителів астрономії. Ім'ям К.І. Чурюмова названа мала планета № 2627, відкрита у 1984 р.

Світлана Іванівна Герасименко народилася у 1945 р. в районному містечку Баришівці на Київщині. Її батьками були вчителі математики, які й прищепили доньці любов до точних наук. Після закінчення школи із золотою медаллю Світлана вступила на відділення астрономії фізичного факультету Київського університету. У 1969 р. вона, вже аспіранткою, разом зі співробітником кафедри астрономії Климом Чурюмовим, стала учасницею експедиції до Алмати і там 9 та 11 вересня відзняла 3 фотонегативи з новою кометою. У 1973 р. С.І. Герасименко на запрошення Інституту астрофізики Таджикистану переїхала до Душанбе і відтоді працює співробітницею цього Інституту, проводячи спостереження і вивчення комет.

Передмова автора і видавництва

Шановні друзі! Ви розгорнули підручник з геометрії, науки, яка споконвіку вражала людський розум своєю досконалістю. З давніх-давен геометрія вважалася неперевершеною школою мудрості, а її вивчення розвивало й шліфувало мислення. Переказують, що над входом до Академії, яку заснував видатний давньогрецький філософ Платон, був напис: «Не заходь, не обізнаний з геометрією!».

За що ж так цінували цю науку? — За те, що вона розвивала мистецтво аргументації, а аргументація була основою того нового демократичного суспільства, яким так пишалися греки і яке вони всіляко протиставляли східним деспотіям. Символічно, що серед сімох легендарних мудреців-законодавців, котрих греки вважали своїми духовними учителями, на першому місці вони завжди називали ім'я Фалеса, який, власне, законодавцем і не був. Фалес був ученим і, як стверджують легенди, логічно довів лише декілька простих геометричних істин. Однак цим він продемонстрував здатність людського розуму відшукувати об'єктивну істину, і цей постулат став основою західної цивілізації.

Отже, навчаючись геометрії, ви навчатиметеся мистецтву аргументації, яке є базовою цінністю сучасного демократичного суспільства.

Переміщаючись «машиною часу» далі, потрапляємо у XVII ст. Виникло нове природознавство: Галілей, Кеплер, Декарт, Паскаль, Ньютон... А давня геометрія не тільки не стала осторонь нових тенденцій, а й перетворилася на теоретичну основу експериментальної науки, залишаючись водночас основою раціоналістичної філософії. Своєрідне відображення цієї нової тенденції знаходимо у розповідях про мандри казкового Гуллівера, героя роману Джонатана Свіфта. Прибувши на літаючий острів Лапуту, Гуллівер найбільше здивувався тому, що все життя його мешканців оберталося довкола геометрії. Навіть їхня буденна мова рясніла геометричними термінами. Та якби Гуллівер був нашим сучасником, то такого подиву, мабуть, у нього і не було б. Тепер геометричними термінами пронизані не тільки природничі і технічні науки, а й гуманітарні, мистецтвознавство, мова

Іменем Світлани Герасименко названо астероїд № 3945, відкритий у 1982 р.

Наприкінці лютого 2004 р. Світлана Герасименко разом із Климом Чурюмовим були присутніми на космодромі Куру у Французькій Гвіані, з якого стартувала ракета-носій «Аріан-5», що вивела у космос європейський міжпланетний зонд Rosetta. Основною метою місії Rosetta була посадка спускового модуля на чотирьохкілометрове ядро комети Чурюмова-Герасименко. Ця історична м'яка посадка відбулася 12 листопада 2014 р., близько 18 години за київським часом. Відкривачі комети спостерігали за спуском модуля «Філи» в он-лайн режимі у Європейському центрі управління польотом «Розетти» у німецькому місті Дармштадті (Клим Чурюмов) та в Німецькому космічному агентстві у місті Кельні (Світлана Герасименко). — *Прим. видавництва.*

щоденного спілкування. Ось лише найпоширеніші слова, які побутують у нашому мовленні й запозичені з геометрії: аксіома, паралелі, площина, вектор, сфера, координати, фокус, полюс, сектор, вимір, багатовимірність, симетрія тощо. Певна річ, аби правильно розуміти і вживати ці слова, потрібно знати їхній первісний геометричний зміст. «Книга природи», — як влучно зауважив Ґалілей, «написана мовою геометрії».

Отже, *навчаючись геометрії, ви прилучатиметеся до надбань світової культури*, ставатимете обізнаними й компетентними у тих питаннях, в яких без цього відчували б себе немовби прибульцями із варварських епох.

І ось ми... у XXI ст. Комп'ютерна графіка і дизайн, захмарні архітектурні споруди, мобільний зв'язок, GPS-навігація, проникнення у глибини космосу і матерії... Геометричні ідеї і принципи лежать в основі і цих надбань. Вивчаючи геометрію, ви в цьому не раз переконаєтеся.

Отже, *і з практичної точки зору геометрія необхідна*.

Навчання мистецтву аргументації, прилучення до надбань світової культури і практичні застосування геометрії — це ті основні завдання, які ставляться у цьому підручнику. Вони невіддільні одне від одного, як невіддільні, рівнозначні і взаємодоповнюючі Віра, Надія і Любов у християнській моралі. Погортайте підручник, і ви навіть за ілюстративним матеріалом помітите, що кожному із зазначених завдань відведено належне місце.

По всьому тексту ви помітите низку розпізнавальних знаків, які мають своє символічне значення:

На уроки вас запрошуватиме наш шкільний дзвоник, перев'язаний жовто-блакитною стрічкою.

Рубрику вправ і задач усюди супроводжуватиме богиня мудрості Афіна. Вибрано рельєфне зображення Афіни з геометричними атрибутами — кутником, циркулем, лінійкою і сферою, створене Філіппом-Роланом Роландом для західного фасаду паризького Лувра.

Задачі і вправи розміщені в кінці кожного параграфів за порядком наростання їхньої складності. Найпростіші з них (у тому числі й усні вправи) позначені світлим кружечком, а складніші — темним. У кінці кожного розділу подані типові завдання для контрольних робіт (у двох варіантах). Учні, які ознайомляться з ними заздалегідь, будуть застраховані від неприємних «сюрпризів» на контрольній.

Чимало задач у підручнику подається з розв'язаннями. Відповідна рубрика «Розв'язуємо разом» позначена красномовною світлиною з учителем і ученицею, які разом розв'язують задачу. На поданих у тексті прикладах демонструються застосування встановлених теоретичних фактів, а в окремих випадках — і корисні додаткові відомості та загальні підходи до розв'язування геометричних задач.

У підручнику є матеріал «Для тих, хто хоче знати більше». Він розрахований на учнів, які вже зараз, не чекаючи старших класів, хочуть дізнаватися про математику більше. Ці тексти подаються на жовтому і блакитному тлі та супроводжуються портретами геніальних математиків Михайла Остроградського і Софії Ковалевської. Життєвий шлях цих учених переконливо свідчить, що математика однаково доступна як чоловікам, так і жінкам, і що успіхи в науці не залежать від місця народження дослідника: Остроградський народився на хуторі, а Ковалевська — у столиці.

Крім навчального матеріалу, підручник містить спеціальну рубрику «Сторінки історії». Її супроводжує муза історії Кліо зі знаменитої картини Генріха Семирадського «Парнас» (картина прикрашає завісу Львівського оперного театру). Муза тримає книгу й перо, а промовистим порухом лівої руки немовби запрошує озирнутися назад. Ознайомлення з поданими у цій рубриці відомостями розширить ваш кругозір, допоможе збагнути важливі внутрішні мотиви розвитку математики. А це, у свою чергу, сприятиме глибшому розумінню науки.

У кінці кожного розділу подається зведений перелік усього вивченого теоретичного матеріалу, а в рубриці «Перевір себе» — запитання для самоконтролю. Цю рубрику супроводжує зображення міфічної пташки-Сфінкса з погруддям жінки і тулубом лева, яка, за переказами, пропускала далі лише тих подорожніх, хто правильно відповів на її запитання.

Бажаємо вам натхнення й успіхів у вивченні геометрії — однієї з найдавніших, найзахопливіших і найкорисніших наук!

Зірка геометрії.
Фрагмент композиції Ігоря Макаревича та Олени Єлагіної
«Геометрія космосу» (2008 р.)

Зображені у цій композиції креслярські прилади — лінійка, транспортир і косинець — допомагатимуть нам фіксувати ті основні фігури на площині та їхні властивості, які слугують основою геометрії.

Розділ I Елементарні геометричні фігури та їхні властивості

Вступ

Урок 1

«Мислю — отже, існую» — так коротко характеризував сутність людського буття знаменитий французький філософ і математик XVII ст. Рене Декарт. Цим він стверджував, що справжнє життя людини невід'ємне від мислення і неможливе без нього.

Мислення багатогранне, як багатогранний світ довкола нас. А оскільки ми живемо у просторі, то повинні вміти мислити й просторовими образами. Особливо, якщо прагнемо не тільки пристосовуватися до умов, а й пізнавати, удосконалювати світ.

Просторові образи описують за допомогою **геометричних фігур**. Прикладами геометричних фігур є трикутники, прямокутники, кола, паралелепіпеди, кулі. Наука про геометричні фігури називається **геометрією**.

Рене Декарт. Молоді роки.
Портрет невідомого художника
(Музей августинців у Тулузі)

Зародки геометрії виникли дуже давно, ще коли головними просторовими образами, з якими людині доводилося мати справу, були ділянки землі. Звідси й назва «геометрія», що в перекладі з грецької якраз і означає «вимірювання землі». Проте з часом до цієї первісної геометрії долучалися нові фігури. З удосконаленням будівництва геометричні форми здіймалися

Ансамбль Свято-Успенської Почаївської Лаври

Фрагмент архітектури готичного собору

Ансамбль Маріїнського палацу в Києві

вгору, з успіхами астрономії — поширювалися на космічні простори, з розвитком фізики занурювалися углиб матерії.

Придивіться до будь-якої архітектурної споруди чи ансамблю і ви побачите, як гармонійно поєднуються у них численні лінії та інші деталі — відрізки, дуги, кути, трикутники, прямокутники, круги, паралелепіпеди, призми тощо. Отже, у вас уже є певний геометричний інструментарій для осмисленого сприйняття просторової конструкції. Але чи зможете ви пояснити, як підібрані та припасовані ці деталі, як розраховані їхні розміри? Те саме можна спитати стосовно плану вашого парку, проектування спортивного чи торговельного комплексу тощо.

А як знаходять відстані до недоступних об'єктів, як визначили розміри Землі та інших планет, як створюють географічні та астрономічні карти?

Нарешті, як функціонує комп'ютерна графіка — цей невичерпний сучасний ресурс для проектування й зображення геометричних фігур?

Розуміння цих речей потребує глибокого вивчення геометрії. Мало закріпити в пам'яті назви

Архітектурний проект, побудований засобами 3D-комп'ютерної графіки геометричних фігур та навчитися їх розпізнавати, навіть, зображати. Потрібно ще й уявляти, як встановлюються зв'язки між різними їхніми складовими і як на основі цих зв'язків фігури конструюються. Це так само, як для вправного володіння мовою недостатньо лише певного словникового запасу, а потрібне знання граматики та синтаксису, або як для музичної творчості недостатньо лише нотної грамоти й набору «акордів», а необхідне знання основ композиції.

Тому вивчення геометрії потрібно розпочинати з детального розгляду найпростіших геометричних фігур, аби потім можна було крок за кроком переходити до складніших фігур і з'ясовувати, як ці складніші конструюються з найпростіших.

До найпростіших геометричних фігур належать точки, прямі і площини, а також відрізки, промені і кути. Ці фігури й будуть предметом вивчення у першому розділі.

§1. Площина. Точки і прямі

Площину ми будемо уявляти у вигляді великого розгорнутого аркуша або класної дошки, вважаючи, що її можна скільки завгодно продовжити у будь-якому напрямку. Вважатимемо також, що всі геометричні фігури розміщені на площині. Площина — латинською «планум». Тому ту частину геометрії, в якій вивчаються фігури на площині, називають **планіметрією**. *Стереометрія*, тобто геометрія у просторі, вивчається у старшій школі.

Найелементарнішими фігурами на площині вважаються **точки** і **прямі лінії**, або просто **прямі**. За допомогою них конструюються усі інші плоскі фігури.

Уважається, що точка не має розмірів, хоч на рисунках точки зображуються невеликими кружечками. Знаменитий давньогрецький учений Евклід,

Вгорі. Дзвіниця Джотто у Флоренції.
Внизу. Барельєф Ніно Пізано (1315–1368) **«Евклід»** на нижньому ярусі дзвіниці Джотто.

який написав перший підручник з геометрії, називав точкою «те, що не має частин». Точки можна уявляти як сліди на аркуші від тонко загостреного олівця. *На площині існує безліч точок.*

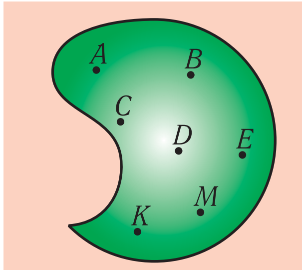


Рис. 1.1

Точки позначають великими літерами латинського алфавіту. На рис. 1.1 зображено деяку фігуру і позначено декілька її точок: A, B, C, D, E, K, M.

Уявлення про пряму дає лінія, проведена під лінійку (рис. 1.2). Однією з найголовніших властивостей прямої є те, що вона цілком визначається двома своїми точками:

через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж — тільки одну.

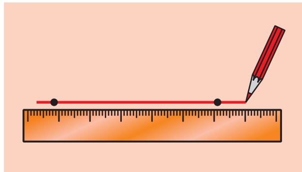


Рис. 1.2

Цю властивість називають *властивістю проведення прямої*.

На властивості проведення прямої засновується простий практичний спосіб для перевірки правильності лінійки або обробки рейки, бруса тощо. Якщо через дві точки провести під лінійку дві лінії, по-різному розміщуючи лінійку, як показано на рис. 1.3, і ці лінії не зіллються, то лінійка неправильна.

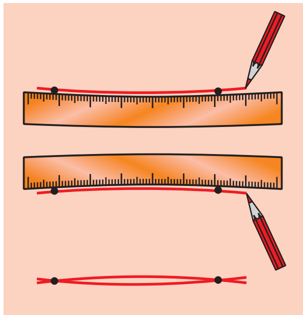


Рис. 1.3

Властивість проведення прямої передбачає, що пряма не має ніякої товщини, бо інакше кожна товщина визначала б свою лінію, яка проходить через ті самі точки.

Прямі позначають або двома великими літерами, якими позначені які-небудь дві точки прямої, або однією малою латинською літерою. На рис. 1.4 зображено дві прямі — пряму AB (її можна також позначити як BA) і пряму l.

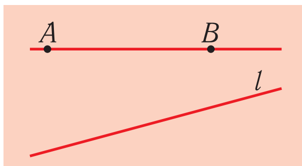


Рис. 1.4

Як і площина, пряма вважається необмеженою, хоча на рисунку, звісно, зображується лише певна обмежена частина прямої. Як і на площині, *на кожній прямій існує безліч точок*.

Якщо якась точка лежить на прямій, то кажуть також, що ця точка *належить* прямій, або що пряма *проходить через* цю точку. На рис. 1.5 зображено дві точки A і B, які належать прямій l, а також дві точки P і Q, які не належать їй.

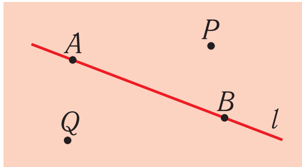


Рис. 1.5

Із властивості проведення прямої випливає, що дві різні прямі можуть мати щонайбільше одну спільну точку. Справді, якби вони мали дві спільні точки, то збігалися б, оскільки через дві точки можна провести лише одну пряму.

Про дві прямі, які мають одну спільну точку, кажуть, що вони *перетинаються* у цій точці. На рис. 1.6 зображено дві прямі m і n, які перетинаються у точці P.

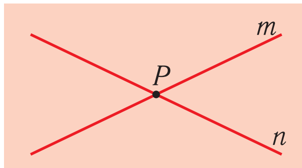


Рис. 1.6

Якщо прямі не мають жодної спільної точки, то вони називаються *паралельними* (в дослівному перекладі з грецької — «йдуть поруч»). На рис. 1.7 зображено паралельні прямі a і b. Скільки б не продовжувати зображення паралельних прямих, вони ніколи не перетнуться.

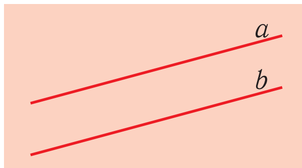


Рис. 1.7

Уявлення про площину дає не тільки аркуш паперу, стіл або класна дошка. Площину може представляти будь-яка інша рівна поверхня, наприклад, стелі, стіни, підлоги, спортивного майданчика, навіть просто рівної відкритої місцевості.

Так само й точки можуть представлятися не тільки слідами від олівця, а й іншими реальними об'єктами, розмірами яких можна знехтувати. Звісно, тоді проведення прямих виглядатиме по-іншому. На цьому ґрунтуються практичні застосування геометрії.

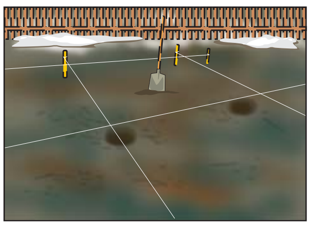
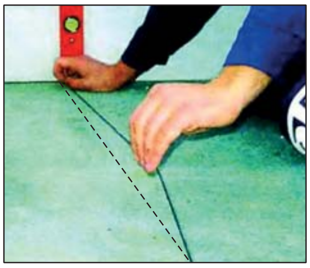
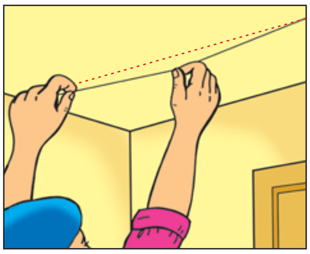


Рис. 1.8

Наприклад, під час розбивки газонів, доріжок, фундаменту під забудову тощо точки фіксують кілками, а прямі проводять за допомогою мотузок (шнура) (рис. 1.8). Аналогічно чинять малярі (рис. 1.9, а–б), напинаючи шнур, змащений крейдою, між точками, через які потрібно провести пряму, а потім відпускаючи його. У кожному із таких застосувань виходить така собі «мотузяна» геометрія.

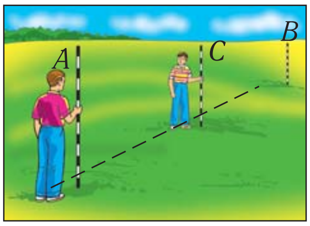


а)

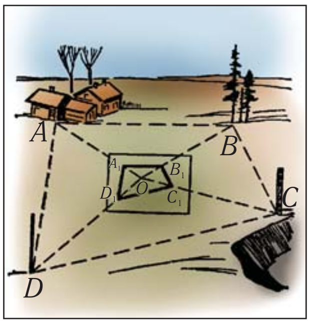


б)

Рис. 1.9



а)



б)

Рис. 1.10

Рис. 1.11. Маленький Принц на своїй планеті. Рисунок Сент-Екзюпері

Принципово інакше діють геодезисти. Вони фіксують точки довгими палицями — віхами, а прямі «провішують» за допомогою візування. А саме: визначивши пряму двома віхами A і B, інші віхи C, D, ... ставлять між ними так, щоби при спостереженні із-за віхи A вони закривали віху B (рис. 1.10, а). За допомогою візування проводять і топографічні зйомки для складання планів місцевості або «прив'язки» до місцевості нового об'єкта для будівництва (рис. 1.10, б). Таку геометрію умовно можна назвати «променевою», оскільки роль прямих у ній відіграють зорові промені.

Те, що «мотузяна» геометрія збігається із «променевою» — радше щаслива випадковість, ніж необхідність. Неважко уявити собі такі фізичні умови, за яких цього не було б. Наприклад, такого не було б на планеті Маленького Принца з відомої повісті Антуана де Сент-Екзюпері (рис. 1.11). Ця планета була дуже маленькою, а тому шнур, напнутий між

Рис. 1.12

двома її точками, відхилявся б від зорового променя між ними. Те само стосується й нашої планети Земля, якщо брати її у великих масштабах.

Для великих земних масштабів існує інша геометрія — *сферична*, яка суттєво відрізняється від геометрії на площині, тобто від планіметрії. Відмінність проявляється уже у властивості проведення прямої: на сфері можливе таке розміщення двох точок, при якому через них можна провести безліч сферичних прямих. Ви легко збагнете це, подивившись на глобус і на його меридіани, які перетинаються на Північному і на Південному полюсах (рис. 1.12).

Вивчаючи геометрію на площині, ми й далі не раз проводитимемо порівняння її з геометрією на сфері. Сферичну геометрію започаткували античні астрономи. Для них зручно було вважати, що небесні світила розміщуються на небесній сфері. В астрономії ця модель зоряного неба застосовується й досі. В епоху Великих географічних відкриттів та Відродження сферична геометрія давніх астрономів «спустилася» з небесної сфери на земний глобус і в такий спосіб стала поруч із прадавньою площинною геометрією. Яскравим відображенням цього об'єднання стали геометричні та астрономічні атрибути у живописних та графічних творах тієї епохи.

Мартен де Вос (1532–1603).
Геометрія.
Гравюра. Бл. 1600 р.

Жан Леблон (бл. 1594–1666).
Геометрія.
Гравюра (1636 р.)

Вправи і задачі

1°. Проведіть з допомогою лінійки пряму і позначте на ній три точки A, B, C. Випишіть усі можливі позначення для цієї прямої.

2°. На рис. 1.13 зображено дві прямі a і b та сім точок.
1) Як ще можна позначити ці прямі?
2) Назвіть точки, які належать прямій a, але не належать прямій b.
3) Назвіть точки, які належать прямій b, але не належать прямій a.

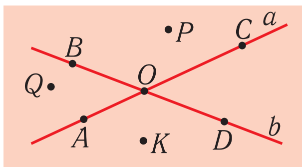


Рис. 1.13

4) Назвіть точки, які належать кожній із прямих.
5) Назвіть точки, які не належать жодній із прямих.

3°. Позначте в зошиті дві точки A і B та проведіть через них пряму. Позначте потім дві точки K, L, які належать цій прямій, і дві точки M, N, які не належать їй. Що можна стверджувати про взаємне розміщення таких прямих:
а) AB і KL; б) AB і KM; в) KN і BA?

4°. Проведіть дві прямі, що перетинаються. Позначте ці прямі і точку їхнього перетину. Скільки спільних точок можуть мати дві прямі?

5°. На рис. 1.14 зображено три прямі. Назвіть ці прямі. Які з них перетинаються?

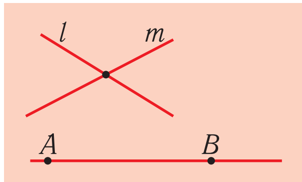


Рис. 1.14

6°. Зобразіть таке розміщення чотирьох точок A, B, C, D, щоб точки A, B, C належали одній прямій і точки B, C, D належали одній прямій.

7. Чи можуть три прямі перетинатися в одній точці? Як узагалі можуть розміщуватися три прямі, аби кожні дві з них перетиналися? Зробіть відповідні рисунки.

8. Проведіть пряму, а потім ще три прямі, які її перетинають. Які можливі характерні випадки взаємного розміщення усіх цих прямих?

9. На рис. 1.15 відображено спосіб перевірки якості обробки бруска за допомогою візування. Як би ви його пояснили?

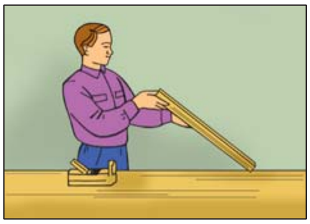


Рис. 1.15

10. Прямі l і m перетинаються в точці O, M — якась точка прямої m. Чи може точка M належати прямій l?

11. Скількам прямим може належати одна взята точка; дві взяті точки; три взяті точки; п'ять узятих точок?

12. На рис. 1.16 відображено один із так званих обманів зору (зорову ілюзію): лінії AB і CD видаються вигнутими, хоча насправді вони прямі. Виконайте цей рисунок у зошиті і перевірте, чи викликатиме він у вас такий самий обман зору.

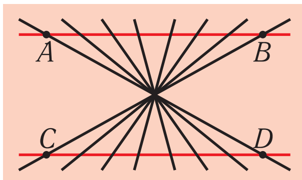


Рис. 1.16

13•. Позначте в зошиті дві точки A і B. Скільки прямих можна провести через точку A? Скільки — через точку B? Скільки — через обидві точки A і B? Чи можете ви обґрунтувати свої твердження?

14•. Позначте у зошиті чотири точки A, B, C, D так, як показано на рис. 1.17, а потім через кожні дві з них проведіть пряму. Скільки всього прямих буде проведено? Чи завжди чотири точки визначатимуть саме таку кількість прямих? Розгляньте можливі випадки.

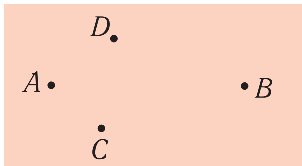


Рис. 1.17

15•. а) Проведіть такі чотири прямі a, b, c, d, щоби прямі a, b, c проходили через одну точку і прямі b, c, d теж проходили через одну точку.

б) Кожні дві із чотирьох накреслених прямих перетинаються. Скільки може бути точок перетину? Зобразіть усі можливі випадки.

§2. Відрізки, промені та півплощини

Уроки 2–3

Друга головна властивість прямої, поряд із властивістю проведення, стосується розміщення точок на ній.

Подивіться на рис. 1.18. На прямій l позначено три точки A, B, C, причому одна, і тільки одна з них, а саме, точка C, лежить між двома іншими — A і B. Таке справджується для будь-яких трьох точок прямої:

із трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

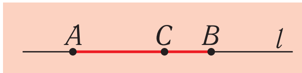


Рис. 1.18

Цю властивість називають *основною властивістю розміщення точок на прямій*.

Якщо точка C лежить на прямій l між точками A і B (див. рис. 1.18), то кажуть також, що точки A і B лежать *по різні боки* від точки C, або що точки C і B лежать *з одного боку* від точки A, а точки A і C — *з одного боку* від точки B.

Як і властивість проведення прямої, властивість розміщення точок на прямій теж не виконувалася б у геометрії на планеті Маленького Принца (див. рис. 1.11). Справді, про кожну із трьох точок A, B, C, розміщених на лінії, яка на поверхні кулі відіграє роль прямої, наприклад, на екваторі (рис. 1.19), можна сказати, що вона лежить між двома іншими.

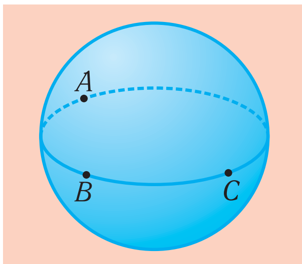


Рис. 1.19

Використовуючи властивість розміщення точок на прямій, можна означити перші фігури, які є похідними від основних фігур, тобто від точок і прямих. Це — відрізки і промені.

Означити або *дати означення* фігури — це описати такі властивості цієї фігури, які дають змогу (спосіб) вирізняти її з-поміж інших фігур або проводити побудову.

Візьмемо на прямій a дві точки A і B (рис. 1.20). Ними визначається сукупність точок M цієї прямої, які лежать *між* точками A і B. Усі ці точки утворюють *відрізок*.

Рис. 1.20

Означення.

***Відрізком* називається частина прямої, що складається з усіх точок, які лежать між двома її точками, разом із цими точками. Самі ці точки називаються *кінцями* відрізка, а всі решта точок відрізка називаються його *внутрішніми точками*.**

Один зі способів утворення матеріальних «відрізків», який наочно ілюструє походження цього терміна

Позначення відрізків утворюються з позначень їхніх кінців. Інколи відрізки позначають і однією малою літерою.

На рис. 1.20 зображено відрізок AB прямої a, A і B — його кінці, M — внутрішня точка.

Візьмемо тепер на прямій три точки A, O, B; нехай точка O лежить між точками A і B (рис. 1.21). Цими точками визначаться дві фігури. Першій належать точки X прямої, які відносно точки O лежать з того самого боку, що й точка A, другій — точки Y прямої, які відносно точки O лежать з того самого боку, що й точка B. Такі фігури називаються *променями* або *півпрямими*.

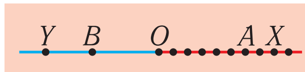


Рис. 1.21

Означення.

***Променем* (або *півпрямою*) називається частина прямої, що складається з усіх точок, які лежать з одного боку від деякої її точки, разом із цією точкою. Ця точка називається *початком* променя, а всі решта точок називаються *внутрішніми точками* променя.**

Якби ця колода була нескінченною в обидва боки, то після розпилу дістали б матеріальні моделі двох півпрямих

Позначають промені двома великими літерами, з яких перша вказує на початок променя, а друга — на яку-небудь внутрішню його точку. Часто промені позначають і однією малою літерою — так само, як прямі.

На рис. 1.21 точка O служить початком для двох променів: OA (його можна позначити і як OX) та OB (його можна позначити і як OY).

У назві «промінь» зафіксована певна схожість між геометричними і світловими променями: і ті, й інші мають початок, але не мають кінця, і є прямолінійними.

Світлові промені від маяка Pigeon Point у Каліфорнії (США). Фотограф Darvin Akteson (2010 р.)

На прямій існує два різні промені, що мають спільний початок, і цим початком пряма мовби розбивається на дві половини. Звідси й інша назва «*півпряма*» для кожної з них.

Означення.

Два різні промені однієї прямої зі спільним початком називаються *доповняльними* (або *взаємно доповняльними*) *променями*.

Отже, будь-яка точка прямої розбиває її на два взаємно доповняльні промені.

Щось схоже відбувається і з площиною, коли на ній провести пряму: пряма розбиває площину на дві *півплощини*.

Подивіться на рис. 1.22. На ньому точки A і B лежать з одного боку від прямої l, а точка C — з іншого боку. Відповідно, відрізок AB, що сполучає точки A і B, не перетинає прямої l, а відрізки CA і CB, що сполучають точку C з точками A і B, перетинають її.

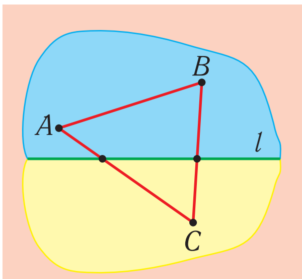


Рис. 1.22

Інакше це формулюють так: точки A і B лежать в одній півплощині з *граничною прямою* l, а точки A і C та B і C — у різних півплощинах.

Отже, маємо таку *основну властивість розміщення точок відносно прямої на площині*:

кожна пряма розбиває площину на дві півплощини.

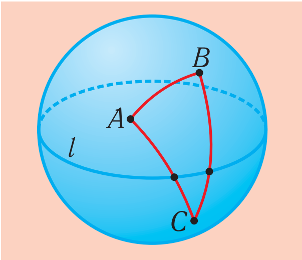


Рис. 1.23

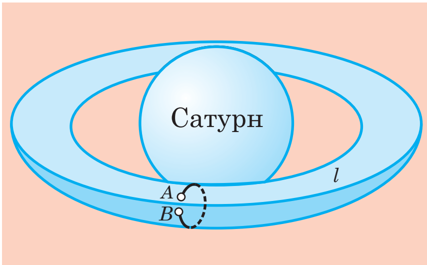
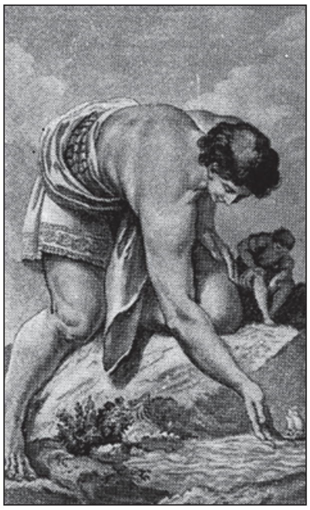


Рис. 1.24

Сатурн і його кільця. Підфарбована світлина з американського космічного зонда «Вояджер–1» (1980 р.)

Знову ж таки, незважаючи на «очевидність», ця властивість теж украй важлива для планіметрії. Щоправда, на підтвердження цього ми вже не можемо навести приклад геометрії на планеті Маленького Принца: як показує рис. 1.23 (порівняй його з рис. 1.22), на поверхні кулі ця властивість теж виконується. А от на кільцеподібній планеті, яку гіпотетично можна уявити утвореною, наприклад, унаслідок згущення кілець Сатурна (рис. 1.24), вона уже не виконувалася б. Справді, «пряма» l, яка проходить по зовнішньому обводу кільця, не розбиває його поверхню на дві частини, оскільки з точки A у точку B можна перейти через внутрішній бік.

Про такий факт, безсумнівно, мусив знати секретар сатурнійської академії, який у фантастичній повісті Вольтера «Мікромегас» супроводжував гіганта із Сиріуса у його космічних мандрах. Ми ж, якщо хочемо відмежуватися від геометрій таких світів і розбудовувати геометрію свого світу, неодмінно маємо зважати й на нашу «земну» основну властивість розміщення точок на площині.



Гігант із Сиріуса і «маленький» сатурнієць на планеті Земля. Гравюра Шарля Моне до повісті Вольтера «Мікромегас» (XVIII ст.)

Розв’язуємо разом

Задача.

Нехай A, B, C — довільні три точки на площині, що не лежать на одній прямій (рис. 1.25). Нехай пряма l перетинає відрізки AB і AC у внутрішніх точках. Обґрунтувати, що тоді пряма l не може перетинати відрізка BC.

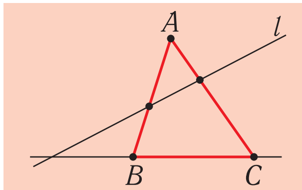


Рис. 1.25

Розв’язання. Звернімо увагу на півплощини, на які пряма l розбиває площину. Оскільки відрізок AB перетинає пряму l, то точки A і B лежать у різних півплощинах. Так само у різних півплощинах лежать точки A і C. Тоді виходить, що точки B і C лежать в одній півплощині — у тій, яка не містить точки A. Якщо ж кінці відрізка BC лежать в одній півплощині, то сам цей відрізок не перетинає граничної прямої l. Обґрунтування завершене.

Вправи і задачі

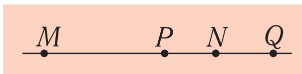


Рис. 1.26

16°. На прямій позначено точки M, P, N, Q (рис. 1.26). Які із цих точок лежать між точками:
а) M і Q; б) M і N; в) P і Q; г) N і Q?
Чи є серед цих чотирьох точок такі три, які лежать з одного боку від четвертої? Назвіть такі пари точок, які лежать по різні боки від точки P.

17°. Проведіть пряму і позначте на ній дві точки A і B. Потім позначте кілька точок, які:
1) належать відрізку AB;
2) належать променю AB, але не належать відрізку AB;
3) належать променю BA, але не належать променю BA;
4) не належать ні променю AB, ні променю BA.

18°. На прямій l точки L і M лежать по різні боки від точки K. Чи може точка M лежати між точками K і L? Як розміщені точки K і M відносно точки L?

19°. Точки E і F лежать на прямій по один бік від точки D. Яка із цих точок, і чому, не може лежати між двома іншими?

20°. На прямій точка C лежить між точками A і B. Чи є взаємно доповняльними такі промені: а) AB і BA; б) AB і CB; в) BA і BC; г) CA і CB; ґ) BA і CB?

21. Які із зображених на рис. 1.27 променів a, b, c, d, e перетинають відрізок AB?

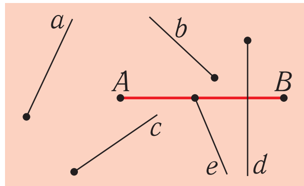


Рис. 1.27

22. На прямій позначено три точки X, Y і Z, причому точки X і Z лежать по один бік від точки Y, а точки Y і Z — по один бік від точки X. Котра із цих трьох точок лежить між двома іншими?

23. Точка M лежить на промені LN, а точка L — на промені NM. Котра із трьох точок L, M, N лежить між двома іншими?

24. Чи можуть два промені однієї прямої не бути взаємно доповняльними?

25. Чи можуть два промені мати єдину спільну точку і при цьому не бути взаємно доповняльними?

26. Обґрунтуйте, що коли точка X належить відрізку AB, то вона належить і променю AB. Чи істинне обернене твердження: якщо точка X належить променю AB, то вона обов'язково належить і відрізку AB?

27. Дано пряму і три точки L, M, N, що не лежать на цій прямій. Відомо, що відрізок LM перетинає пряму, а відрізок LN не перетинає її. Чи перетинає пряму відрізок MN? Обґрунтуйте свою відповідь.

28. Проведіть пряму і позначте дві точки в одній півплощині відносно цієї прямої і три точки в іншій. Проведіть ті відрізки з кінцями у позначених точках, які перетинають проведену пряму. Скільки вийшло відрізків? Чи залежить ця відповідь від конкретного розміщення позначених точок?

29. Проведено пряму і позначено чотири точки A, B, C, D, що не лежать на ній. Чи перетинатиме відрізок AD пряму, якщо:
а) AB, BC і CD перетинають пряму;
б) відрізки AC і BC перетинають пряму, а відрізок BD не перетинає;
в) відрізки AB і CD перетинають пряму, а відрізок BC не перетинає;
г) відрізки AB і CD не перетинають пряму, а відрізок BC перетинає;
ґ) відрізки AB, BC і CD не перетинають пряму;
д) відрізки AC, BC і BD перетинають пряму?
Кожний випадок проілюструйте рисунком.

30•. Перелічіть і зобразіть на рисунках усі можливі випадки взаємного розміщення двох променів на одній прямій.

31•. Скільки всього відрізків визначається чотирма точками, позначеними на одній прямій?

32•. На прямій позначено три точки A, B, C. Скільки різних позначень для променів можна утворити за допомогою літер A, B, C? Скільки серед відповідних променів буде різних? Як зміниться відповідь на друге запитання, якщо точки A, B, C не лежатимуть на одній прямій?

33•. Точки A, B, C, D не лежать на одній прямій. Відомо, що пряма AB перетинає відрізок CD, а пряма CD перетинає відрізок AB. Обґрунтуйте, що відрізки AB і CD перетинаються.

34•. Відомо, що відрізки AB і CD перетинаються. Обґрунтуйте, що тоді відрізки AC і BD за жодних умов не можуть перетинатися.

§3. Вимірювання і відкладання відрізків

Уроки 4–5

Видатний учений-хімік і метролог Д.І. Менделєєв (1834–1907) любив повторювати, що справжня наука починається тоді, коли починають вимірювати.

Вимірювання у геометрії розпочинається з вимірювання відрізків.

Якщо розглядати цю проблему з вузькопрактичної точки зору, то її вирішення спряжене з двома неабиякими труднощами. Перша трудність полягає у запровадженні єдиної одиниці вимірювання (еталона довжини), а друга — у забезпеченні належної точності самого вимірювання. Дещо про це можна довідатися з історичного нарису, вміщеного у кінці цього параграфа. Однак у геометрії від цих суто практичних аспектів абстрагуються, вважаючи, що єдина одиниця вимірювання (наприклад, метр, дециметр, сантиметр тощо) уже запроваджена і що можливе абсолютно точне вимірювання, навіть якщо для цього потрібні не тільки десяті, а й соті, тисячні і так далі частини основного еталона.

Д.І. Менделєєв у мантії професора Единбурзького університету. Портрет Іллі Рєпіна (1885 р.)

Одним із найпоширеніших інструментів для вимірювання довжин є лінійка з нанесеною на її край сантиметровою і міліметровою шкалою. Незважаючи на простоту, лінійка дає змогу наочно проілюструвати ті властивості вимірювання та відкладання відрізків, які для геометрії є основними.

На рис. 1.28, а) зображено вимірювання відрізків AB і AC, довжини яких менші від довжини лінійки: $AB = 5$ см; $AC = 7$ см 2 мм = = 7,2 см.

На рис. 1.28, б) зображено вимірювання відрізка AB, довжина якого більша за довжину лінійки. Цей відрізок розбивається на два відрізки AM і MB, потім довжина кожної частини вимірюється окремо, а результати підсумовуються: $AB = AM + MB = 10$ см + 2 см = 12 см.

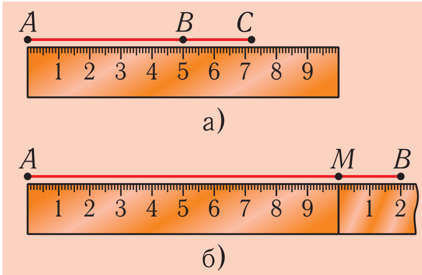


Рис. 1.28

Отже, маємо таку *основну властивість вимірювання відрізків*:

кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю внутрішньою точкою.

Довжину відрізка називають також *відстанню* між його кінцями. На рис. 1.28, а) відстань між точками A і C дорівнює 7,2 см, а на рис. 1.28, б) відстань між точками A і B дорівнює 12 см.

Означення.

Відрізки, які мають однакову довжину, називаються *рівними*.

На рис. 1.29 зображено два рівних відрізки AB і CD. За допомогою лінійки легко переконатися, що кожен із них має довжину 3 см.

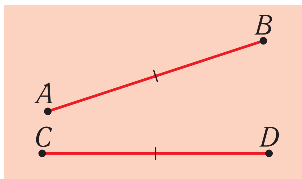


Рис. 1.29

Рівність відрізків записується за допомогою звичайного знака рівності, наприклад: $AB = CD$.

На рисунках рівні відрізки часто позначають однаковою кількістю рисочок.

Означення.

Точка, яка ділить відрізок на дві рівні частини, називається *серединою* відрізка.

На рис. 1.30 відрізки AM і MB рівні між собою, отже, точка M — середина відрізка AB.

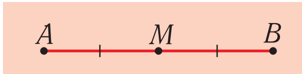


Рис. 1.30

У геометрії, а також і в практиці, часто доводиться відкладати відрізки, які мають певну довжину.

На рис. 1.31 показано, як на промені l від його початку O за допомогою лінійки відкласти відрізок OA завдовжки 4,5 см.

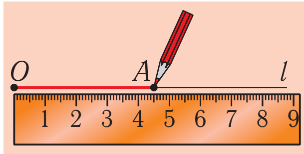


Рис. 1.31

Відрізки можна відкладати й за допомогою інших засобів. Наприклад, якщо використовувати лінійку і циркуль, то спочатку з використанням лінійки фіксується відповідний розхил циркуля (рис. 1.32, а), а вже потім цей розхил «переноситься» на промінь (рис. 1.32, б). Звісно, від вибраного способу відкладання результат не залежить.

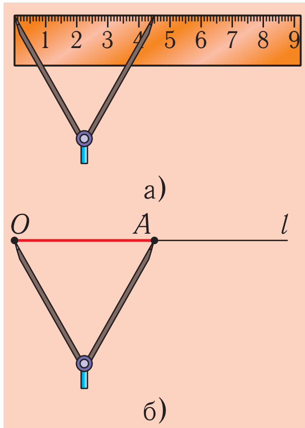


Рис. 1.32

Отже, справджується така *основна властивість відкладання відрізків*:

на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок будь-якої заданої довжини, і притому — тільки один.

Відзначимо два важливих наслідки з основних властивостей вимірювання і відкладання відрізків.

1. Нехай маємо два рівних відрізки AB і CD (рис. 1.33). Рівність цих відрізків означає, що встановлено їхні довжини і вони виявилися рівними. Візьмемо тоді промінь l з початком C, який містить відрізок CD. Відрізок CD буде відкладеним на цьому промені. Якщо ж ми відкладемо від точки C ще й відрізок AB, то дістанемо той самий відрізок CD, оскільки відрізок з такою довжиною можна відкласти лише один. У результаті відрізок AB немовби суміститься з відрізком CD.

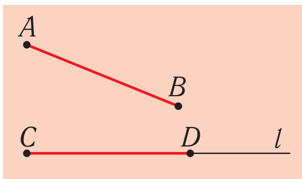


Рис. 1.33

Отже, ***якщо відрізки рівні, то їх можна сумістити***.

2. Нехай тепер маємо два нерівних відрізки AB і CD, і нехай довжина відрізка CD більша за довжину

відрізка AB (рис. 1.34). Якщо ми так само, як у попередньому випадку, відкладемо на промені CD відрізок CB', рівний за довжиною відрізку AB, то точка B' неодмінно буде внутрішньою точкою відрізка CD. Справді, збігатися з точкою D вона не може, бо для цього відрізки AB і CD мають бути рівними. Якби ж точка B' розмістилася ззовні відрізка CD, то тоді відрізок CB' дорівнював би сумі відрізків CD і DB' і тому мав би довжину, більшу за довжину відрізка CD, а отже, й за довжину відрізка AB, що неможливо.

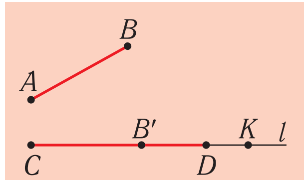


Рис. 1.34

Отже, ***якщо нерівні відрізки відкласти на одному й тому самому промені від його початку, то відрізок з меншою довжиною буде частиною відрізка з більшою довжиною***.

Відповідно до цього, якщо довжина відрізка CD більша за довжину відрізка AB, то кажуть, що й сам відрізок CD більший за відрізок AB, і записують: $CD > AB$. Тоді ж відрізок AB уважається меншим від відрізка CD, і це записується так: $AB < CD$.

Розв'язуємо разом

Задача.

Чи можуть точки A, B, C лежати на одній прямій, якщо $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см?

Розв'язання. Якщо три точки X, Y, Z лежать на одній прямій, то одна, і тільки одна, з них лежить між двома іншими. Нехай точка Y лежить між точками X і Z (рис. 1.35). Це означає, що точка Y належить відрізку XZ. Тоді, за властивістю вимірювання відрізків,

$$XZ = XY + YZ.$$

Рис. 1.35

Отже, XZ — найдовший із трьох відрізків XY, YZ і XZ, які попарно сполучають три точки X, Y, Z, і він дорівнює сумі двох інших відрізків.

У нашому випадку найдовшим є відрізок AC = 10 см, однак він не дорівнює сумі двох інших відрізків, оскільки $AB + BC = 5 + 7 = 12$ (см). Отже, точки A, B, C не можуть лежати на одній прямій.

Вправи і задачі

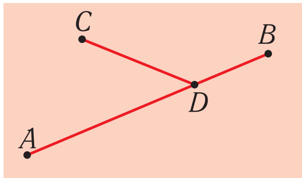


Рис. 1.36

35°. Виміряйте і запишіть результати вимірювання для усіх відрізків, зображених на рис. 1.36.

36°. Проведіть у зошиті промінь з початком у точці O, а потім відкладіть на ньому відрізки OA = 6 см і OB = 2,8 см. Чому дорівнює довжина відрізка BA? Визначте її двома способами.

37°. Проведіть промінь AX, відкладіть на ньому відрізок AB завдовжки 4 см і за допомогою лінійки визначте його середину C. Потім побудуйте такий відрізок AD, щоб точка B була його серединою. Чому дорівнюють довжини відрізків AC і AD?

38°. На прямій точка N лежить між точками L і M. Який із відрізків з кінцями у цих точках має найбільшу довжину?

39°. Порівняйте на око довжини відрізків AB і CD на рис. 1.37 та AB і BC на рис. 1.38, а потім перевірте вимірюванням.

Рис. 1.37

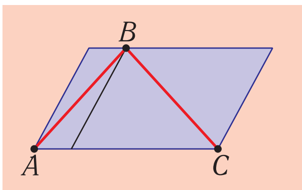


Рис. 1.38

Рис. 1.39

40°. Точка C належить відрізку AB (рис. 1.39). Визначте довжину відрізка:
а) AB, якщо AC = 4,5 см, CB = 2,7 см;
б) AC, якщо CB = 3,6 см, AB = 9,3 см;
в) CB, якщо AC = 5,1 см, AB = 8 см.

41°. На прямій по різні боки від точки O відкладені відрізки OA = 3 см і OB = 5 см. Чому дорівнює відстань між точками A і B?

42°. Точка O розміщена між точками A і B і віддалена від них на відстань 2,4 см і 3,6 см. Чому дорівнює відстань між точками A і B?

43. Рівні відрізки AB і BC розміщені на одній прямій. Котра із точок A, B, C лежить між двома іншими?

44. Точки A, B, C лежать на одній прямій і відрізок BC більший за відрізок BA. Котра із цих трьох точок може лежати між двома іншими?

45. Чи можуть точки L, M, N лежати на одній прямій, якщо:
а) LM = 3 см, LN = 7 см, MN = 9 см;
б) LM = 3 см, LN = 6 см, MN = 9 см?
Якщо можуть, то зобразіть це на рисунку.

46. Точка C ділить відрізок AB завдовжки 28 см на частини, різниця яких дорівнює 6 см. Визначте довжини відрізків AC і CB.

47. Довжина відрізка дорівнює 28 см. На яких відстанях від кінців відрізка розміщені точки, що ділять його у відношенні 3 : 4?

48. Точка C — середина відрізка AB, а точка D — середина відрізка AC. Визначте довжину відрізка AB, якщо BD = 8 см.

49. Точки B і C належать відрізку AD завдовжки 12 см. Відомо, що AB = 6 см, CD = 8 см. Визначте довжину відрізка BC.

50•. Точки A, B, C лежать на одній прямій. Визначте довжину відрізка BC, якщо AB = 3,3 см, AC = 4,7 см. Скільки розв'язків має ця задача?

51•. Точка B належить променю OA, причому OB = 10 см, AB = 4 см. Визначте довжину відрізка OA. Розгляньте два випадки.

52•. На промені з початком O позначені точки A, B, C так, що OA = 5 см, AB = 6 см, BC = 3 см. Визначте можливу відстань між точками O і C.

53•. Точки A, B, C, D лежать на одній прямій, і при цьому AB = 13 см, BC = 8 см, CD = 6 см. Визначте найбільшу і найменшу з можливих відстаней між точками A і D.

54•. Точка ділить відрізок на дві частини, відстань між серединами яких дорівнює 5 см. Чому дорівнює довжина відрізка?

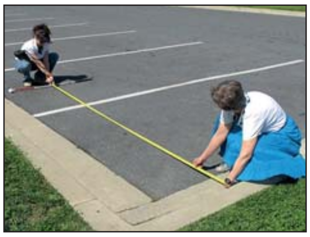
55•. Точка C належить відрізку AB. Обґрунтуйте, що відстань між серединами відрізків AC і CB не залежить від розміщення точки C. Чому вона дорівнює, якщо довжина відрізка AB дорівнює 16 см?

56•. Відрізки AB і CD лежать на одній прямій і мають спільну середину. Обґрунтуйте, що тоді відрізки AC і BD — рівні. Чи можна стверджувати, навпаки, що коли відрізки AB і CD лежать на одній прямій, а відрізки AC і BD рівні, то відрізки AB і CD мають спільну середину?

С Т О Р І Н К И І С Т О Р І Ї

Як вимірювали довжини у різні часи

Сучасна людина зазвичай не задумується над тим, що ті численні блага цивілізації, якими вона користується, забезпечені невтомною працею всього людства упродовж віків. Характерним прикладом є вимірювання довжин і відстаней. Хто тепер не знає, що довжини, які сумірні з ростом людини, вимірюють у сантиметрах, більші — у дециметрах і метрах, великі відстані — у кілометрах, а маленькі проміжки — у міліметрах? Хто не знає, що між цими одиницями існують дуже прості співвідношення, які виражаються множенням чи діленням на степінь числа 10? Нарешті, хто не знає, що для проведення самих вимірювань використовуються прості прилади — лінійки, стрічки, складні метри, рулетки тощо? І кожна людина, в якій би частині світу не проживала, узявши один із таких приладів, може легко перевірити вказані будь-де розміри або закласти потрібні розміри у виріб, який збирається виготовляти. Але так було не завжди. Більшу частину своєї історії людство не мало загальноприйнятих мір.



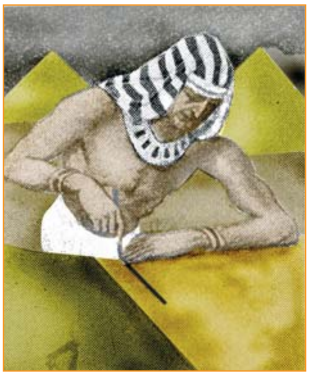
Вимірювання сучасною рулеткою

1. Перші еталони — в людині

Першими мірами довжини, природно, служили частини людського тіла — найчастіше рук і ніг.

Ще давні єгиптяни, вавилоняни та інші народи застосовували таку міру, як *лікоть*, що дорівнювала відстані від ліктя до кінця розпрямленого середнього пальця руки. Ліктями, зокрема, дуже зручно вимірювати мотузки та відрізи тканини. Повний оберт тканини довкола ліктя називався *подвійним ліктем*. Ця міра теж застосовувалася у багатьох народів.

Лікоть не мав сталої величини. У різних державах і в різні часи застосовувалися різні лікті. Навіть в одній державі в один час могли існувати різні лікті.



Міра лікоть

Найдовшим зазвичай був царський лікоть, який застосовувався при зборі податі.

У руській державі міра, аналогічна ліктю, називалася *аршином*. Відомий російський історик і письменник М.М. Карамзін (1766–1826) уважав, що ця назва була запозичена внаслідок торгівлі зі східними народами. Зокрема, у персів лікоть називався «арші». Недобросовісні купці часто по-своєму тлумачили цю міру. Звідси бере свій початок відомий вислів «міряти на свій аршин», що означає «по-своєму підходити до справи, пильнувати свої інтереси».

Дрібнішими від ліктя та аршина мірами довжини були: *долоня* (наприклад, в юдеїв, британців), *кулак* (в арабів) і *п'ядь* (у давніх русичів).

Долоня — це ширина кисті руки. У класичній англійській літературі часто зустрічаються оповіді про вимірювання висоти коней саме долонями.

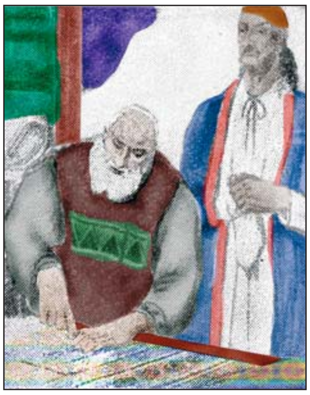
Мала п'ядь — це відстань від кінця великого пальця до кінця вказівного, а велика п'ядь — відстань від кінця великого пальця до кінця мізинця при найбільшому можливому їхньому розведенні. П'яді зустрічаються уже в актах XIV ст. Вважалося, що в аршині містяться 4 п'яді. Тому п'ядь часто називалася також чверткою. З п'яддю пов'язаний крилатий вислів: «Берегти кожну п'ядь рідної землі».

Ще дрібнішою мірою довжини був *палець* (наприклад, у вавилонян) і *дюйм* (в англо-саксонських народів). Цілком природно, що долоня дорівнювала 4 пальцям.

Дюйм початково вважався рівним довжині суглоба великого пальця. Про це говорить і сама назва: слово duim голландською мовою якраз і означає «великий палець».

На початку XVII ст. указом російського царя Петра І була встановлена відповідність між традиційними російськими і новими англійськими мірами — «заради кращої узгодженості з європейськими народами у трактатах і контрактах». Відповідно до цього указу, 1 аршин прирівнювався до 28 англійських дюймів.

Іще з часів Київської Русі на українських землях застосовувалася така міра довжини, як *сажень*. Про



Міра долоня

Міра палець

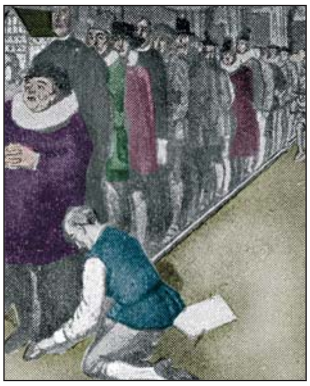
це, зокрема, свідчить і Нестор-літописець. Слово «сажень» мало первісну форму «сяжень». Тому ймовірно, що воно походило від дієслова «сягати».

Розрізняли *маховий сажень*, що дорівнював розмаху рук, і *косий сажень*, рівний відстані від п'яти правої ноги до кінців пальців витягнутої вгору лівої руки. Звичайно, косий сажень був більшим від махового. Тому про кремезних чоловіків (зокрема, про казкових героїв) казали, що вони мають «косий сажень у плечах». Інколи таке порівняння можна почути й нині.

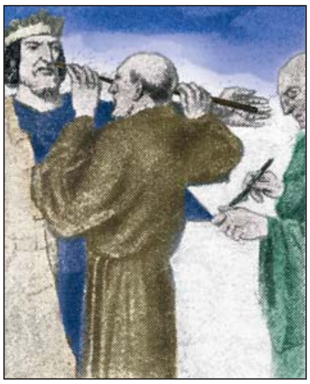
У XVII ст. було узаконено, що міра 1 сажень становить 3 аршини, що на нинішній вимір дорівнює 2,13 м. Зокрема, в «Соборному укладі» 1649 року сказано: «А сажень, щоб міряти землю чи щось інше, — робити на три аршини, а більше або менше трьох аршинів сажнів не робити». На відміну від косого та махового сажнів, цей новий сажень називався *царським* або *казенним*.

Найпоширенішою з мір, пов'язаних з ногою людини, є *фут*. Він дорівнює середній довжині ступні дорослої людини (англійське foot якраз і означає «нога», «ступня»). Ця міра теж застосовувалася у різних народів. В Англії фут був узаконений разом із дюймом у XIV ст. королем Едвардом II: 1 фут вважався рівним 12 дюймам, що на нинішній вимір становить 30,48 см. Французький королівський фут (який теж поділявся на 12 дюймів і був у Франції основною мірою довжини аж до введення метра), мав довжину 32,5 см.

Не менш цікаве походження основної міри довжини в англо-саксонських народів — *ярда*. Ця міра була узаконена англійським королем Генріхом I ще у 1101 році. Згідно з легендою, 1 ярд — це відстань від кінчика носа цього короля до кінця середнього пальця його витягнутої руки. Щоправда, за іншою версією прообразом ярда став меч Генріха I. 1 ярд уважається рівним 3 футам. На даний час — це приблизно 91 см.



Міра фут

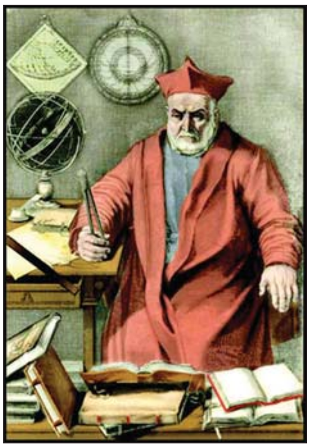


Міра ярд

2. Еталон — ячмінна зернина

У 1324 р. англійський король Едвард II уточнив величину дюйма. Згідно з королівським указом, 1 дюйм дорівнював «довжині трьох ячмінних зернин, узятих із середньої частини колоска і прикладених одне до одного своїми кінцями». А в англійському побуті ще й досі залишилася мірка «ячмінне зерня», що дорівнює третині дюйма. Цікаво згадати, що улюблена дітьми Дюймовочка — малесенька дівчинка з однойменної казки Андерсена, яка могла жити у квітці і мала зріст 1 дюйм, народилася саме з ячмінної зернини.

У XVI ст. відомий тогочасний учений Христоф Клавій (1537–1612) запропонував уточнити розміри фута за допомогою тих самих ячмінних зернин. Половину фута, за Клавієм, мали визначати 64 зернини, прикладені одна до одної упоперек. Це давало змогу дуже просто відтворювати довжину еталона у будь-якому місці, оскільки товщина ячмінних зернин дуже стабільна (значно стабільніша від їхньої довжини, яку застосовували для визначення дюйма), а велика кількість узятих зернин практично повністю згладжувала індивідуальні відхилення від середньої величини. До того ж, число 64 є степенем двійки. А це давало змогу простим діленням навпіл діставати менші долі фута.



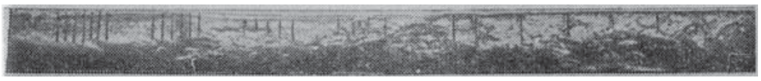
Христоф Клавій (Клавій Шлюссель) (1537–1612) — італійський математик німецького походження. Найбільше відомий як керівник проекту з уведення григоріанського календаря, яким увесь світ користується й понині.

3. Час як відстань

Принципово інші способи застосовувалися для встановлення одиниць вимірювання великих відстаней. Вони пов'язувалися з урахуванням часу на їхнє подолання. Наприклад, такою була міра довжини *стадій*. Уважається, що ця міра виникла у Давньому Вавилоні. Достеменно відомо, що стадіями вимірювали відстані давні греки. Зокрема, від цього слова утворилося сучасне слово «стадіон».

За переказами, стадій дорівнював відстані, яку доросла людина проходить розміреним кроком за проміжок часу від появи першого сонячного променя при сході сонця до того моменту, коли весь сонячний диск повністю зійде над горизонтом. Оскільки добре

Античний стадіон у Дельфах (Греція). Довжина його бігової доріжки, відзначеної з обох боків кам'яними лініями, дорівнює 177,5 м. Вочевидь, таким і був «стадій» у цьому місті в колишні часи.



Давньовавилонська лінійка (бл. 2000 р. до н. е.). Оскільки ця лінійка є фрагментом напівзруйнованої статуї царя Гудея, то можна вважати, що нею визначалася половина давньовавилонського царського ліктя. Лінійка поділена на 16 рівних частин, із яких друга у свою чергу поділена на 6, четверта — на 5 рівних частин, шоста — на 4, восьма — на 3, а дев'ята — на 2 рівні частини.

відомо, що схід сонця триває 2 хв, то, враховуючи середню швидкість пішохода, легко дійти висновку, що величина стадія перебувала в межах від 160 до 195 метрів.

Відомо, що вавилоняни ділили свій стадій на 360 ліктів. А оскільки лікоть у них приблизно дорівнював 54 см, то звідси неважко вивести, що довжина вавилонського стадія становила приблизно 194 м.

На основі аналогічних міркувань з'ясовано, що римський стадій мав довжину 185 м, а грецький олімпійський — 192 м.

Ідея з використанням часових проміжків для встановлення міри довжини дістала несподіваний розвиток у XVII ст. У результаті фізичних експериментів з маятником (важливим елементом маятникового годинника, який якраз тоді був винайдений) з'ясувалося, що період коливання маятника залежить від його довжини. На основі цього самим винахідником маятникового годинника голландським математиком і механіком Християном Гюйґенсом (1629–1695) у 1664 році було запропоновано за одиницю вимірювання відстаней довжину такого маятника, період коливання якого становить 1 секунду. А італійський природодослідник, винахідник і мандрівник Тіто Бураттіні (1617–1681) у 1675 році запропонував і назву для цієї нової одиниці — метр, утворивши її від грецького слова «метрео», тобто «вимірюю».

Проте невдовзі несподівано з'ясувалося, що період коливання маятника залежить не тільки від його довжини, а й від географічної широти місця, де проводиться вимірювання. Зокрема, поблизу екватора і в середніх широтах ці величини суттєво відрізняються

Християн Гюйґенс

Фронтиспіс до трактату Тіто Бураттіні «Універсальна міра» (Misura Universale) (1675 р.)

одна від одної. Виявивши цей недолік, помітили й інший, а саме, що при реалізації цієї ідеї одиниця вимірювання довжини «прив'язувалася» до одиниці вимірювання часу. А це в теоретичному аспекті значно гірше, ніж аби ці величини визначалися незалежно одна від одної. Тому, незважаючи на оригінальність ідеї, від неї відмовилися, залишивши лише на майбутнє назву «метр» для одиниці вимірювання довжин.

4. Універсальним мірилом оголошено Землю

У 1670 році французький дослідник Мутон висунув ще більш захоплюючу ідею — пов'язати одиницю вимірювання довжин з розмірами всієї матінки-Землі, точніше, з довжиною її меридіана. Але для реалізації цієї сміливої, а по суті глибоко філософської та гуманістичної ідеї, потрібні були особливі суспільно-політичні умови. Вони з'явилися лише через сотню літ у зв'язку з революційними подіями у Франції наприкінці XVIII ст. Лише революційний рух, який охопив тоді цю країну, дав змогу організувати відповідні великомасштабні вимірювання, а найголовніше — стимулював перехід на нову систему мір. В усіх інших консервативніших країнах цей перехід затягнувся більше, як на століття, а в деяких не реалізований повною мірою й досі.

Характерним у цьому зв'язку є звернення французького уряду до населення 1790 р. В ньому, зокрема, мовилося:

«Як можуть друзі рівності миритися з розмаїттям і незручністю мір, які зберігають ще пам'ять про ганебне феодальне рабство..., у той час, як вони клялися знищити саму назву тиранії, якою б вона не була?.. Для створення істинно філософської системи мір, яка була б достойною віку просвітництва, не можна взяти нічого, що не ґрунтувалося б на твердих підвалинах, що не пов'язано найтіснішим чином з предметами незмінними, нічого, що в подальшому могло б залежати від людей і від подій. Потрібно звернутися до самої природи і взяти основу системи мір із її надр ...».

Пам'ятник **«Глобус»** (він же й знак нульового кілометра) у Києві (2001 р.)

5. Як же зміряли Землю?

У березні 1791 року Національні збори Франції затвердили пропозицію Академії наук, що виходила від найвидатніших тогочасних учених Лапласа, Лагранжа, Монжа, Лавуазьє та ін., — про спорядження спеціальної експедиції для вимірювання земного меридіана. Було вирішено виміряти довжину паризького меридіана між двома містами, розміщеними на ньому, — Дюнкерком (приморським містом на півночі Франції) і Барселоною (іспанським містом на березі Середземного моря). Знаючи географічні широти цих міст, потім було легко обчислити й довжину всього меридіана. Винятково сприятливою обставиною було те, що обидва вибрані міста знаходилися на рівні моря, оскільки це суттєво спрощувало вимірювання й підвищувало їхню точність. Керівниками експедиції було призначено академіків Жана Батіста Деламбра (1749 – 1822) і П'єра Мешена (1744 – 1804).

Вимірювальні роботи експедиції та відповідні розрахунки тривали декілька років. На відстані близько 1 000 км між Дюнкерком і Барселоною за допомогою провішування було побудовано й виміряно 115 трикутників, розміщених уздовж меридіана. Шукана величина була знайдена обчисленням і підсумовуванням довжин відрізків меридіана, розміщених усередині кожного трикутника. Для цього застосовувалися співвідношення, які існують між кутами і сторонами трикутника (ви вивчатимете їх у 9 класі). З особливою точністю вимірювалася лише одна сторона крайнього трикутника — так звана база. А в усіх решті трикутниках за допомогою кутомірних приладів вимірювалися лише кути — що значно простіше, ніж вимірювання відстаней. За допомогою формул, які пов'язують сторони й кути трикутника, крок за кроком, починаючи від першого трикутника, обчислювалися сторони всіх інших трикутників, а потім і відрізки меридіана, розміщені всередині них.

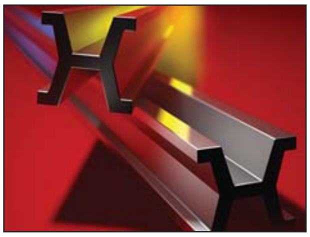
Встановивши довжину паризького меридіана у старих французьких мірах (туазах і футах; 1 туаз дорівнював 6 футам), було вирішено за основу нової

Зала Кассіні у Паризькій обсерваторії з лінією нульового меридіана (названа на честь астронома Джованні Кассіні (1625—1712), який понад 40 років був директором цієї обсерваторії). Уздовж лінії меридіана — карта вимірювальних робіт експедиції Деламбра і Мешена.

Загальна схема вимірювання довжини паризького меридіана міри — метра — взяти $\frac{1}{40\ 000\ 000}$ від знайденої величини. У старих французьких мірах це становило 3 фути і 11,44 лінії (1 лінія = $\frac{1}{12}$ фута).

6. Еталон створено

Перший еталон метра було виготовлено у 1799 році. Але навіть у Франції повний перехід на нову систему вимірювання відбувся лише у 1840 р. А міжнародною мірою метр став у 1872 р. після відповідного рішення спеціально скликаної у Парижі меридіанної конференції. Тоді ж було затверджено міжнародний еталон метра, який було виготовлено зі сплаву платини (90%) та іридію (10%). Еталон має форму стержня завдовжки 102 см із двома мітками на відстанях 1 см від кінців. Відстань між цими мітками якраз і уособлює довжину 1 м. Поперечний переріз еталона нагадує літеру X. Саме така форма забезпечує йому найбільшу міцність при найменшій вазі (останнє дуже важливо, оскільки платина, яка домінує у сплаві, дорожча навіть за золото).



Міжнародний еталон метра

§4. Кути та їхнє вимірювання

Уроки 6–7

Коли у побуті говорять про кут, наприклад, у кімнаті, на майданчику, на ділянці, між вулицями тощо, то мають на увазі фігуру, утворену двома відрізками-сторонами. На рис. 1.40 дужкою позначений один із кутів у парку. У геометрії теж використовується схоже поняття про кут, коли, наприклад, говорять про кути трикутника. Однак у застосуваннях геометрії, наприклад, при складанні планів місцевості з допомогою візування, доводиться розглядати і кути з як завгодно продовженими сторонами, тобто утвореними променями. Промені містять у собі й відрізки, однак жоден відрізок не вмістить променя. Тому аби можна було користуватися як одним, так і іншим уявленням про кут, приймається таке його означення.

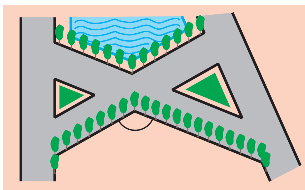


Рис. 1.40

Означення.

***Кутом* називається фігура, що складається із двох променів, які мають спільний початок. При цьому кожен із променів називається *стороною* кута, а їхній спільний початок — *вершиною* кута.**

Кут позначають або його вершиною, або сторонами, або вершиною і ще двома точками, взятими на кожній зі сторін. Саме слово «кут» часто замінюють значком $\angle$.

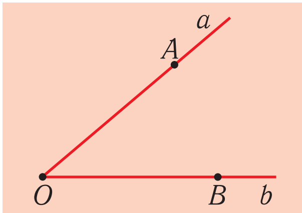


Рис. 1.41

На рис. 1.41 зображений кут з вершиною O і сторонами OA, OB, які також позначені як a і b. Позначити цей кут можна одним із таких способів: $\angle O$, $\angle AOB$, $\angle ab$ або $\angle(ab)$. При цьому позначення у формі $\angle O$ застосовується лише у тому разі, коли при вершині O не розглядається інших кутів. Звернімо також увагу, що у позначенні $\angle AOB$ *вершина кута розміщується між точками, взятими на сторонах*.

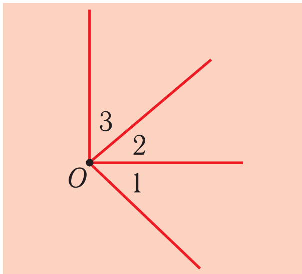


Рис. 1.42

Інколи для спрощення рисунків кути позначають цифрами. Наприклад, на рис. 1.42 при вершині O зображено три кути: $\angle 1$, $\angle 2$ і $\angle 3$.

Означення.

Якщо сторони кута є взаємно доповняльними променями, тобто утворюють пряму, то такий кут називається *розгорнутим*.

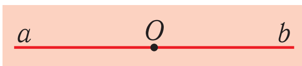


Рис. 1.43

На рис. 1.43 зображено розгорнутий кут O зі сторонами a і b. Фактично — це пряма, з виокремленою на ній точкою, яка вважається вершиною розгорнутого кута.

Означення.

Кажуть, що **промінь з початком у вершині нерозгорнутого кута проходить *між* його *сторонами*, якщо він перетинає який-небудь відрізок з кінцями на сторонах кута.**

На рис. 1.44 зображено промінь c, який проходить між сторонами a і b нерозгорнутого кута O: він перетинає відрізок AB з кінцями на сторонах кута у точці C.

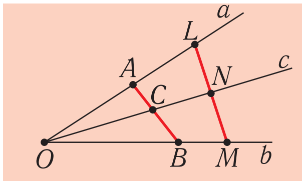


Рис. 1.44

У задачі, розв'язаній далі на с. 42–43, доводиться, що коли промінь c перетинає який-небудь відрізок AB з кінцями на сторонах кута O, то він перетинає й будь-який інший такий відрізок LM. А це означає, що прийняте означення не залежить від вибору відрізка AB.

Для розгорнутого кута вважається, що будь-який промінь c, який виходить з вершини кута O, лежить *між* його сторонами a і b (рис. 1.45).

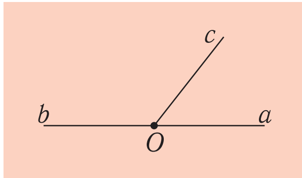


Рис. 1.45

Кажуть, що *промінь, який проходить між сторонами кута, розбиває його на два кути*. На рис. 1.44 і 1.45 промінь c розбиває кут $\angle ab$ на два кути: $\angle ac$ і $\angle cb$.

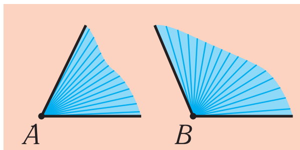


Рис. 1.46

Точки усіх променів, які проходять між сторонами нерозгорнутого кута, називаються *внутрішніми* точками цього кута. Усі інші точки площини називаються *зовнішніми*. На рис. 1.46 синім кольором позначені внутрішні точки нерозгорнутих кутів A і B; решта точок — зовнішні.

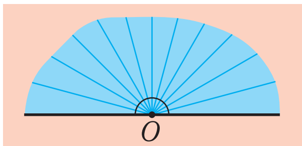


Рис. 1.47

Для розгорнутого кута O внутрішніми вважаються всі точки однієї з півплощин, граничну пряму якої утворюють сторони кута, а зовнішніми — точки іншої півплощини (рис. 1.47).

Отже, будь-який кут розбиває площину на дві частини. Та частина, яка містить сторони кута і всі його внутрішні точки, називається *опуклим плоским кутом*, а та, що містить сторони кута і всі зовнішні точки, — *увігнутим плоским кутом*.

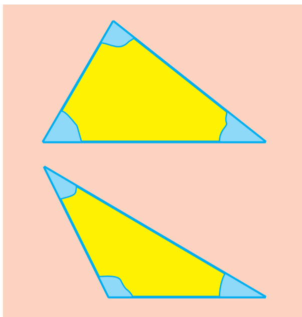


Рис. 1.48

У трикутниках, які вивчатимуться далі, усі плоскі кути опуклі (рис. 1.48), однак уже в чотирикутниках, які вивчатимуться у 8 класі, можуть бути й увігнуті кути (рис. 1.49).

Кути вимірюють у *градусах* (gradus — латинською мовою «крок»). Градуси позначають кружечком °, який записують зверху біля відповідного числа. Якщо, наприклад, кут A має градусну міру 60°, то це записується так: $\angle A = 60°$.

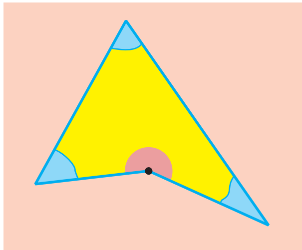


Рис. 1.49

Кутом з градусною мірою 1° уважається $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута. Якщо між сторонами розгорнутого кута провести півколо з центром у вершині кута і поділити його на 180 рівних частинок, то промені, які виходять із центра півкола і проходять через сусідні точки поділу, утворюють кути по 1° (рис. 1.50). Звісно, що в такому разі сам розгорнутий кут дорівнює 180°.

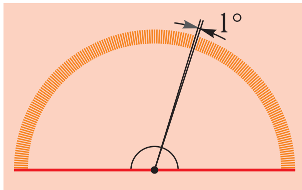


Рис. 1.50

На цьому влаштований найпростіший прилад для вимірювання кутів — транспортир, застосування якого зрозуміле з рис. 1.51, а). Тут $\angle ac = 70°$, $\angle cb = 45°$, $\angle ab = 115°$. Зауважте, що промінь c проходить між сторонами кута $\angle ab$ і при цьому $\angle ab$ дорівнює сумі кутів $\angle ac$ і $\angle cb$.

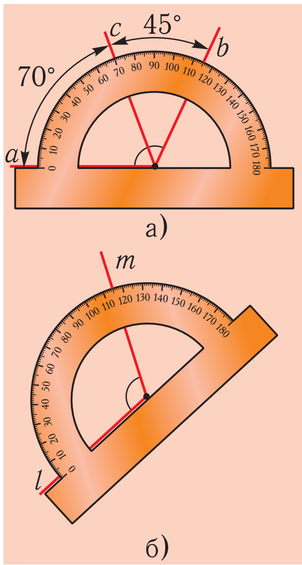


Рис. 1.51

Усе це ілюструє таку *основну властивість вимірювання кутів*.

Кожний кут має певну градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює* 180°. *Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Зазначимо, що у практичних застосуваннях геометрії, наприклад, в астрономії та геодезії, використовуються й дрібніші від градуса одиниці вимірювання кутів. Це — *мінута* (minuta — дослівно «менша») і *секунда* (secunda — дослівно «друга», тобто друга менша одиниця). Одна мінута (позначається $1'$) дорівнює $\frac{1}{60}$ частині градуса, а одна секунда (позначається 1″) дорівнює $\frac{1}{60}$ частині мінути, тобто $\frac{1}{3600}$ частині градуса. У надточних астрономічних вимірюваннях застосовуються навіть *терції* (tertia — означає «третя»). Одна терція (позначається 1‴) дорівнює $\frac{1}{60}$ частині секунди. Вимірювання з такою величезною точністю здійснюється шляхом візування з використанням телескопів і дуже точних механізмів для їхнього наведення.

Назва приладу «транспортир» походить від латинського слова transportare, що означає «переносити». Це вказує на те, що цей прилад застосовується не тільки для вимірювання, а й для перенесення (відкладання) кутів.

На рис. 1.51, б) від променя l в одну з півплощин за допомогою транспортира відкладено кут $\angle lm$, що дорівнює куту $\angle ab$. Це ілюструє таку основну властивість відкладання кутів.

Від будь-якого променя у задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою від 180°, і притому — тільки один.

Незважаючи на очевидну схожість між вимірюванням і відкладанням кутів та вимірюванням і відкладання відрізків, між ними існують суттєві відмінності. По-перше, для кутів існує абсолютний і незмінний еталон — розгорнутий кут, тимчасом як для відрізків еталон можна вибирати довільно: це може бути метр, фут, сажень, лікоть тощо. (Згадайте відомий анімаційний фільм «38 папуг», герої якого вимірювали довжину удава і папугами, і мавпами, і навіть слониками.) По-друге, для кутів існує найбільша можлива величина — 180°, а для відрізків найбільшої величини не існує.

Вимірювання кутів у градусах застосовували ще античні астрономи, тимчасом, як метричні одиниці

Старовинні латунні транспортири.
Вгорі. Транспортир, виготовлений у Німеччині близько 1700 р. (на лінійковій основі — орнамент у стилі бароко). Вражає його схожість із сучасним «шкільним» транспортиром.
Внизу. Транспортир знаменитої англійської фірми точних інструментів Negretti & Zambra з поворотним кронштейном (XIX ст.)

для вимірювання відрізків набули повсюдного поширення лише з 2-ї половини XIX ст.

Означення.

Кути, які мають однакові градусні міри, називаються *рівними*.

Рівність кутів записується за допомогою звичайного знака рівності. На рисунках рівні відрізки часто позначають однаковою кількістю дужок біля вершин. Наприклад, на рис. 1.52 за допомогою двох дужок позначено, що $\angle O = \angle Q$.

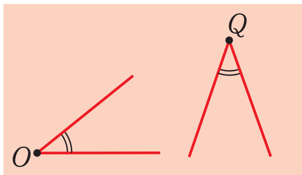


Рис. 1.52

Як і для відрізків, можливість відкладання кутів із заданою градусною мірою забезпечує можливість суміщення рівних кутів і порівняння кутів, які не є рівними. А саме, аналогічно як для відрізків, можна довести такі твердження:

1. ***Якщо кути рівні, то їх можна сумістити.***

2. ***Якщо нерівні кути відкласти від одного й того самого променя в одну й ту саму півплощину,*** *то* ***кут з меншою градусною мірою буде частиною кута з більшою градусною мірою, а тому меншим від нього.***

Нерівності між кутами позначають за допомогою тих самих знаків > та <, що й нерівності між відповідними їм градусними мірами, наприклад, $\angle A > \angle B$.

Означення.

Півпряма, яка виходить з вершини кута, проходить між його сторонами і ділить кут на дві рівні частини, називається *бісектрисою* кута.

Слово «бісектриса» походить від латинського bissectrix, що означає «розтинаюча навпіл».

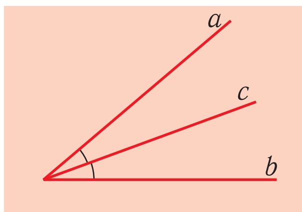


Рис. 1.53

На рис. 1.53 півпряма c — бісектриса кута $\angle ab$. Вона ділить цей кут на два рівних кути $\angle ac$ і $\angle cb$, що мають спільну сторону c.

На рис. 1.54 півпряма c — бісектриса розгорнутого кута $\angle ab$. Оскільки розгорнутий кут має градусну міру 180°, то кути $\angle ac$ і $\angle cb$ дорівнюють по 90°.

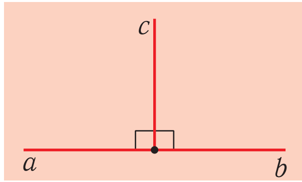


Рис. 1.54

Означення.

Кут, який дорівнює 90°, називається *прямим*.

Прямі кути на рисунках часто відзначають значком ⌝.

Для креслення прямих кутів, окрім транспортира, застосовується *косинець* (рис. 1.55). Професійні креслярі використовують *рейсшину* — інструмент, що складається із двох лінійок різної довжини, скріплених у формі літери Т (рис. 1.56).

Рис. 1.55

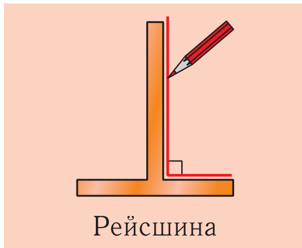


Рис. 1.56

За своєю величиною прямі кути займають проміжне становище між *гострими* й *тупими* кутами.

Означення.

Кут, величина якого менша від 90°, називається *гострим*, а кут, величина якого більша за 90°, але менша від 180°, називається *тупим*.

На рис. 1.57 зображено усі три види нерозгорнутих кутів, залежно від їхньої величини — гострий, прямий і тупий.

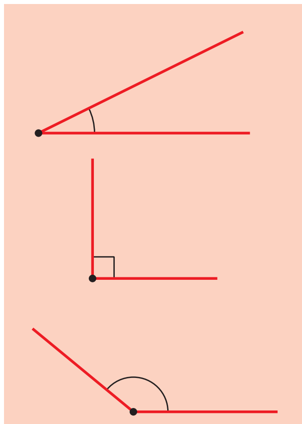


Рис. 1.57

Розв'язуємо разом

Задача.

Обґрунтувати, що прийняте на с. 37 означення променя, який проходить *між* сторонами кута, не залежить від вибору відрізка з кінцями на сторонах кута. Тобто, якщо промінь c, що виходить з вершини кута O, перетинає якийсь відрізок AB з кінцями на сторонах a, b кута, то він перетинає і будь-який інший такий відрізок LM (рис. 1.58).

Розв'язання. Проведемо відрізок BL і обґрунтуємо, що промінь c його перетинає. Точки A і L лежать з одного боку від прямої c, оскільки відрізок AL її не перетинає. Точки A і B лежать по різні боки від прямої c, оскільки відрізок AB її перетинає. Точка L лежить з того самого боку, що й точка A, отже, по різні боки з точкою B, а тому відрізок BL перетинає пряму c у деякій точці D.

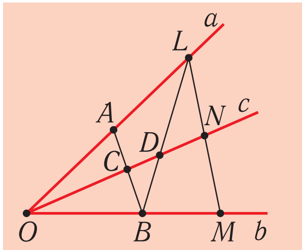


Рис. 1.58

Чи може точка D належати не променю c, а доповняльному до нього променю? Не може, оскільки доповняльний промінь міститься по інший бік від прямої b, ніж відрізок BL. Отже, відрізок BL перетинає саме промінь c.

Так само, як щойно розглянуто відрізки AB і BL, розглянемо відрізки BL і LM. Оскільки уже відомо, що промінь c перетинає відрізок BL, то так само виведемо, що він перетинає і відрізок LM. Обґрунтування завершено.

Вправи і задачі

57°. Позначте три точки, що не лежать на одній прямій, і накресліть усі кути з вершинами у кожній з цих точок, сторони яких проходять через дві інші точки. Скільки всього кутів буде побудовано? Як зміниться відповідь, якщо точки лежатимуть на одній прямій?

58°. Виміряйте за допомогою транспортира кути A, B, C, D, зображені на рис. 1.59, і на цій підставі вкажіть, котрі з цих кутів гості, котрі — тупі, а котрі, можливо, — прямі.

59°. Проведіть промінь OA і за допомогою транспортира відкладіть від нього у різні півплощини кути $\angle AOB = 55°$ і $\angle AOC = 75°$. Визначте градусну міру кута BOC. Як зміниться результат, якщо кути AOB і AOC відкласти в одну півплощину? Обґрунтуйте свої відповіді.

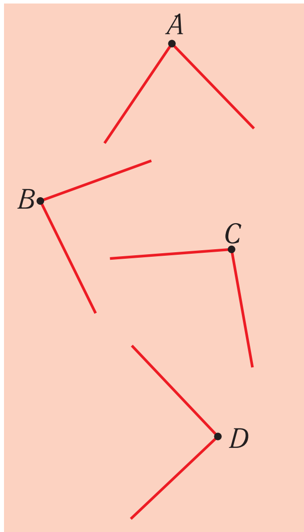


Рис. 1.59

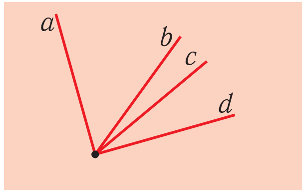


Рис. 1.60

60°. За допомогою транспортира накресліть кути з градусними мірами 30°, 60° і 120°, а потім проведіть їхні бісектриси. Утвориться ціла низка нових кутів. Чи будуть серед «старих» і нових кутів рівні?

61°. Скільки різних кутів утворюють чотири промені a, b, c, d, що виходять зі спільного початку (рис. 1.60). Запишіть позначення цих кутів.

62°. Чи є промінь a бісектрисою кута AOB у випадках, зображених на рис. 1.61, а)–в)?

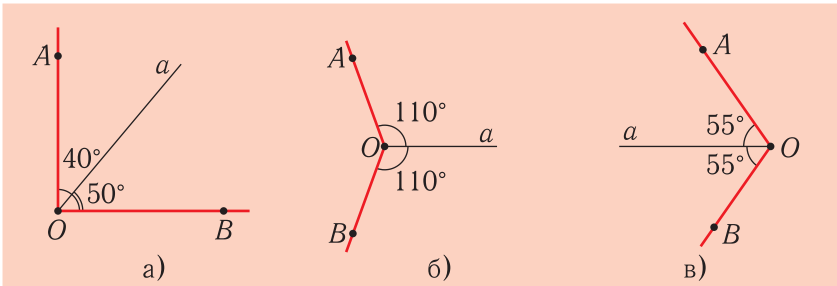


Рис. 1.61

63°. Визначте кути, які утворюють хвилинна і годинна стрілки годинника у кожний момент часу, коли годинник показує цілу кількість годин. Чи є серед цих кутів рівні?

64°. Чи може сума градусних мір двох гострих кутів бути: а) більшою; б) меншою; в) рівною градусній мірі прямого кута?

65°. Чи може кут між бісектрисою і стороною кута бути: а) тупим; б) прямим?

66. Чи істинні такі твердження:

а) кут, який менший від прямого, — гострий, а кут, який більший за прямий, — тупий;

б) будь-який кут, який менший від тупого, — гострий;

в) будь-який кут, який менший від розгорнутого, — тупий;

г) різниця двох тупих кутів менша від прямого кута?

67. Промінь c проходить між сторонами кута $\angle ab$. Визначте:

а) $\angle ab$, якщо $\angle ac = 32°$, $\angle bc = 74°$;

б) $\angle ac$, якщо $\angle ab = 138°$, $\angle bc = 61°$;

в) $\angle bc$, якщо $\angle ab = 90°$, $\angle ac = 39°$.

68. Чи може промінь c проходити між сторонами кута $\angle ab$, якщо:

а) $\angle ac = 30°$, $\angle bc = 70°$, $\angle ab = 40°$;

б) $\angle ac = 105°$, $\angle cb = 80°$, $\angle ab = 40°$; $\angle ac > \angle ab$?

69. Між сторонами кута $\angle ab$, градусна міра якого дорівнює 60°, проведено промінь c. Визначте кути $\angle ac$ і $\angle bc$, якщо:
а) кут $\angle ac$ на 20° більший за кут $\angle bc$;
б) кут $\angle ac$ утричі менший від кута $\angle bc$;
в) градусні міри кутів $\angle ac$ і $\angle bc$ відносяться, як 3 : 7.

70. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB і при цьому $\angle AOC$ = 45°, $\angle COB$ = 60°. Проведено промінь OD, для якого $\angle BOD$ = 15°. Визначте градусну міру кута AOD. Скільки розв'язків має ця задача?

71. На рис. 1.62 промені a і b — доповняльні, c — довільний інший промінь з тим самим початком, що й у променів a і b. Накресліть такий рисунок у зошиті і проведіть за допомогою транспортира бісектриси кутів $\angle ac$ і $\angle cb$. Потім виміряйте кут між цими бісектрисами. Можливо, результат, який ви дістанете, наштовхне вас на певний загальний висновок?

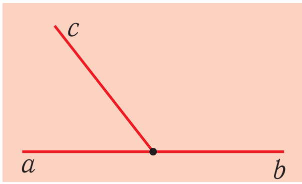


Рис. 1.62

72. У прямому куті між його сторонами проведено довільний промінь, а потім — бісектриси обох кутів, на які цей промінь ділить прямий кут. Чому дорівнює кут між бісектрисами? Як зміниться відповідь, якщо кут буде не прямим, а дорівнюватиме, наприклад, 70° чи 120°? Чи не наштовхують вас ці запитання на певний загальний висновок?

73•. Розгляньте обернену ситуацію до тієї, що описана у попередній задачі. Тобто нехай у якомусь куті O з невідомою градусною мірою проведено промінь між його сторонами, а потім — бісектриси кутів, на які цей промінь розбиває кут O. Нехай кут між бісектрисами має градусну міру n°. Чи можна знайти градусну міру кута O?

74•. З деякої точки проведено три промені так, що всі кути, які утворюють будь-які два з них, рівні між собою. Визначте ці кути.

75•. Чи можна з деякої точки провести чотири або п'ять променів так, щоб кути, які утворюють будь-які два із цих променів, були рівними між собою? Якщо можна, то якими будуть ці кути?

76•. У вас є шаблон кута з градусною мірою 75°. Якої величини кути можна накреслити, використовуючи лише цей шаблон?

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Як вимірювали кути у різні часи

Прилади для вимірювання кутів

Транспортир і астролябія. Найдавнішим прообразом транспортира був кутомірний прилад, який використовували астрономи, — астролябія. Транспортир — це половина астролябії.

Вважається, що астролябію винайшов у II ст. до н. е. знаменитий грецький астроном Гіппарх (180–125 до н.е.), а вдосконалив середньовічний німецький астроном та математик Регіомонтан (Йоганн Мюллер) (1436–1476). Цей прилад слугував для визначення положення небесних світил на небесній сфері. Для прикладу, на гравюрі XVI ст., відтвореній на рис. 1.63, відображений один зі способів для визначення горизонтального напрямку на світило, який застосовувався мореплавцями.

Початково астролябію використовували здебільшого для визначення висоти світил над горизонтом. Із цією

Знамениті астрономи **Гіппарх** (з небесним глобусом) і **Птолемей** (із земним глобусом). Деталь фрески Рафаеля «Афінська школа» (1509–1511 рр.)

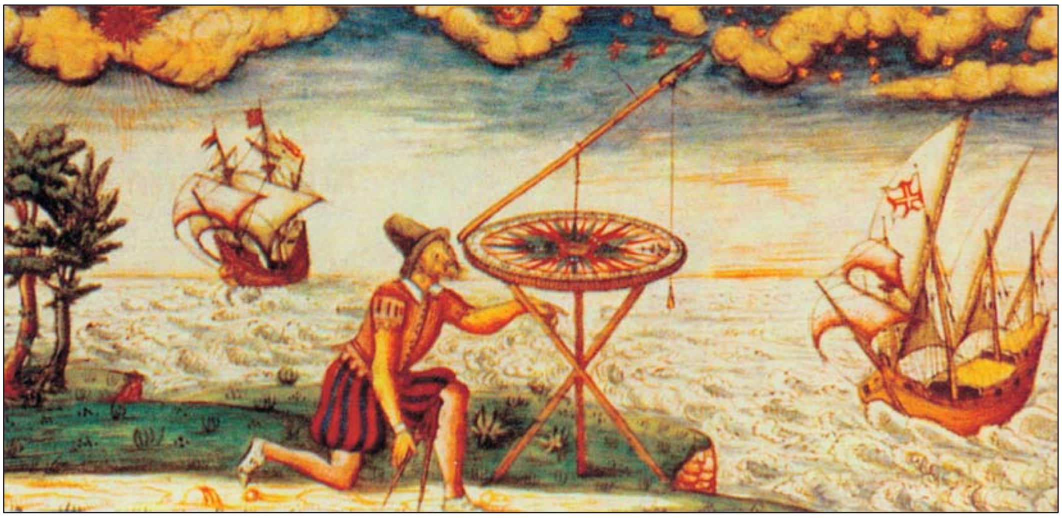


Рис. 1.63

метою її виготовляли у вигляді важкого мідного диска — лімба, який підвішували за кільце у вертикальному положенні (рис. 1.64). По краю лімба наносилася шкала від 0° до 360°. Пряма $ГГ_1$, що сполучала поділки 0° і 180°, займала горизонтальне положення. У центрі лімба кріпилася рухома стрілка AA_1 — алідада. На її кінцях розміщувалися перпендикулярні до лімба пластинки з отворами — діоптри.

Для визначення висоти світила над горизонтом спостерігач прикладав око до нижнього діоптра A і повертав алідаду доти, поки світило не було видно одразу через обидва діоптри. Поділка на шкалі, на якій зупинявся край алідади (A чи A_1), вказувала на висоту світила над горизонтом у градусах.

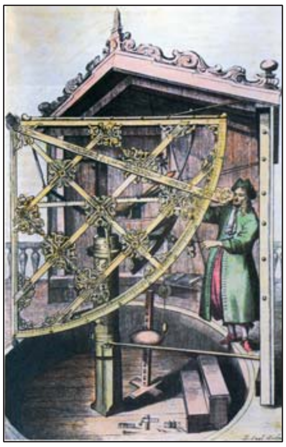
Квадранти, секстанти та октанти. Бурхливий розвиток астрономії, який розпочався в Європі з початком епохи Відродження, вимагав значно більшої точності від астрономічних вимірювань, ніж її могли забезпечити давні астролябії. Цього можна було досягти лише за рахунок збільшення лімба. Адже чим більша кругова шкала на його краю, тим більшою буде відстань між сусідніми поділками, а це давало змогу визначати не тільки кількість цілих градусів у куті, а й кількість їхніх частин — мінут і навіть секунд.

Водночас було помічено, що в більшості астрономічних вимірювань фактично використовується не вся кругова шкала астролябії, а лише певна її частина. Тому замість усієї астролябії у збільшеному вигляді виготовляли лише квадранти, секстанти і октанти, тобто відповідно $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ і $\frac{1}{8}$ частини астролябії. Спосіб використання квадранта відображено на старовинній гравюрі, відтвореній на рис. 1.65. А на рис. 1.66 зображено поєднання в одному приладі квадранта й астролябії, запропоноване видатним данським астрономом Тихо Браге (1546–1601).

Окрім численних гравюр із зображенням кутомірних інструментів, створених художниками, астрономи ще й у свій спосіб засвідчили свою любов і повагу до цих приладів, назвавши Секстантом одне із сузір'їв у

Регіомонтан (Йоганн Мюллер) (1436–1476)

Астролябія Регіомонтана
Рис. 1.64



Ян Гевелій веде спостереження за допомогою квадранта
Рис. 1.65

південній частині неба. Відповідну пропозицію подав видатний польський астроном Ян Гевелій (1611–1687), автор всесвітньовідомого атласу зоряного неба. Історія символічна й повчальна. Для проведення досліджень Гевелій збудував обсерваторію й величезний секстант у своєму місті Ґданську. Але затуркані й настрашені городяни спалили прилад. Тоді Гевелій вирішив «перенести його на небо» й увічнити в назві сузір'я, аби вже ніколи нічия зла рука не могла до нього дотягнутися. Однак на той час якраз не було ще не названого сузір'я, яке б своєю формою нагадувало секстант (принцип, що його дотримувалися при утворенні назв більшості сузір'їв). Тому Гевелій вибрав сузір'я, яке хоч і не нагадувало за своїми контурами секстант, проте знаходилося між сузір'ям Лева (якраз під його лапами) та Гідри і тому мало їхній символічний захист (рис. 1.67).

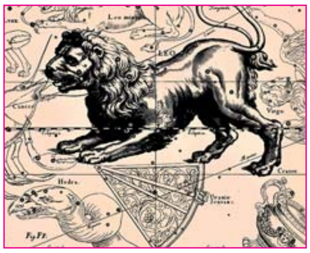
Телескоп і теодоліт. Наступне суттєве удосконалення в конструкцію астролябії вніс французький астроном Жан Пікар (1620–1682) в середині XVII ст. Він замінив діоптри підзорною трубою, винайденою незадовго до цього Ґалілеєм, а для плавного переміщення алідади використав мікрометричний гвинт. Усе це значно підвищувало точність вимірювань і не потребувало використання великих шкал.

Подальші удосконалення астролябії продовжилися у напрямку використання замість підзорної труби найрізноманітніших телескопів. А для проведення наземних (геодезичних) вимірювань було сконструйовано теодоліт (рис. 1.68) (назва утворена від грецьких слів «теомай» — дивитися і «доліхос» — довгий).

Теодоліт має два лімби, розміщені у вертикальній і горизонтальній площинах. Це дає змогу застосовувати цей прилад як для складання планів, так і для проведення нівелювання, тобто визначення відносних висот.

Бусоль. Кути, які застосовуються у морській та повітряній навігації, вимірюють у горизонтальній площині від напрямку на північ проти руху годинникової стрілки від 0° до 360°. Кожен такий кут називається курсом. Прилад, що дає змогу вимірювати курс,

Рис. 1.66



Сузір'я Секстант. Рисунок з атласу Гевелія

Рис. 1.67

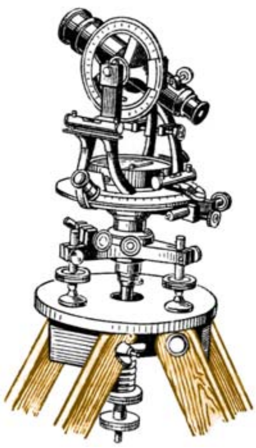


Рис. 1.68

поєднує в собі античну астролябію і компас. Він називається бусоллю (рис. 1.69) («бусоль» — дослівно з французької «компас»). На принципі бусолі конструюється сучасне навігаційне обладнання для морських та повітряних суден.

Як бачимо, звичний нам транспортир має дуже давню історію й водночас утілюється в найсучасніших приладах.

Рис. 1.69

Одиниці для вимірювання кутів

Градуси. Найпоширенішими одиницями для вимірювання кутів є *градуси*. Уже зазначалося, що латинське слово gradus, від якого утворено цю назву, означає «крок», «ступінь», і що величина кута 1 градус (1°) дорівнює $\frac{1}{180}$ частині розгорнутого кута (див. с. 39).

Чим пояснити таку назву і таку величину?

Ще давньовавилонські жерці помітили, що під час рівнодення (тобто коли день і ніч мають однакову тривалість) сонячний диск упродовж свого руху небосхилом (рис. 1.70) укладається в пройденому шляху рівно 2 × 180 разів. А оскільки цей шлях — півколо, то цілком природно було розбивати його на 180 таких подвійних кроків Сонця. Саме ці кроки пізніше й були названі градусами.

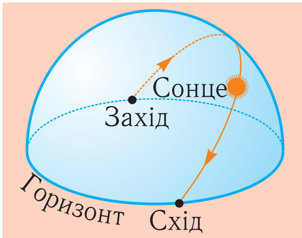


Рис. 1.70

Спостереження за рухом Сонця упродовж дня підтверджувалися й відповідними спостереженнями за його рухом упродовж року. У ті часи вважалося, що рік триває 360 діб. Тому весь річний шлях Сонця небосхилом — так зване зодіакальне коло — теж ділився на 360 подвійних кроків, тобто градусів, а його половина, відповідно, — на 180 градусів.

Нарешті, свій вплив на вибір основи для визначення градуса могло мати й те, що у Давньому Вавилоні застосовувалася шістдесяткова система числення, а число 180 ділиться без остачі на основу 60 цієї системи. Із цим самим пов’язано й ділення градуса на 60 мінут, а мінути — на 60 секунд.

В античну епоху старовинну вавилонську систему перейняли грецькі астрономи, зокрема, найвидатніший з них Клавдій Птолемей (I–II ст. н. е.). Авторитет Птолемея сприяв тому, що ця система набула повсюдного поширення в епоху Відродження, а потім і в пізніші часи. У результаті ми й тепер, як і давні вавилоняни, греки та середньовічні європейці вимірюємо кути у градусах, вважаючи, що розгорнутий кут має саме 180°.

Цікаве походження самого позначення для градусів. Кути з величиною 1° Птоломей називав мойрами, що в перекладі з грецької мови означає «частини». Слово μοιρα він скорочував двома першими літерами, причому другу літеру писав меншою від першої і вгорі — μ°. Пізніше залишилася лише маленька літера °. Це скорочення застосовується й досі.

Клавдій Птолемей.
Старовинна гравюра

Зведений перелік основних теоретичних відомостей, вивчених у розділі I

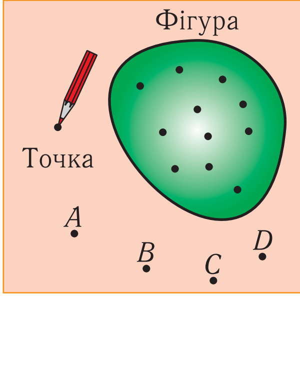
Що вивчається у геометрії

Геометрія — наука про геометричні фігури.

Планіметрія — частина геометрії, в якій вивчаються геометричні фігури, розміщені на площині.

Найелементарнішими фігурами на площині вважаються **точки** і **прямі**. За допомогою них конструюються усі інші плоскі фігури.

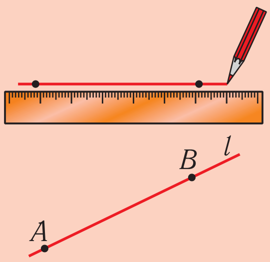
Точки і прямі. Проведення прямої



Уявлення про **точку** дає слід на аркуші від тонко загостреного олівця. Вважається, що точка не має розмірів і що на площині існує безліч точок.

У застосуваннях геометрії точками можуть уважатися будь-які реальні об'єкти, розмірами яких за даних умов можна знехтувати.

Точки позначаються великими літерами латинського алфавіту. Наприклад: A, B, C, D.



Уявлення про **пряму** дає лінія, проведена під лінійку.

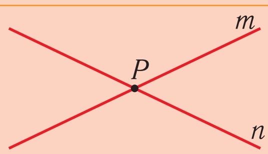
Інші реальні прообрази прямої — натягнуті мотузки, світлові і зорові промені.

На кожній прямій існує безліч точок, однак для проведення прямої достатньо лише двох точок.

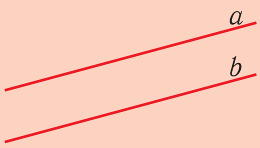
Основна властивість проведення прямої:

через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж — тільки одну.

Прямі позначають або двома великими літерами, якими позначені які-небудь дві точки прямої, або однією малою латинською літерою. Наприклад: AB, l.



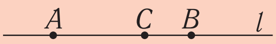
Про дві прямі m і n, які мають одну спільну точку P, кажуть, що вони ***перетинаються*** у цій точці.



Якщо прямі a і b не мають жодної спільної точки, то вони називаються ***паралельними*** (в дослівному перекладі з грецької — «йдуть поруч»).

Скільки б не продовжувати зображення паралельних прямих, вони ніколи не перетнуться.

Розміщення точок на прямій. Відрізки і промені



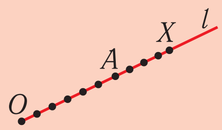
Основна властивість розміщення точок на прямій:

із трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.

Якщо точка C лежить на прямій l між точками A і B, то кажуть також, що точки A і B лежать *по різні боки* від точки C, або що точки C і B лежать *з одного боку* від точки A, а точки A і C — *з одного боку* від точки B.

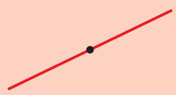
Відрізок — це частина прямої, що складається з усіх точок прямої, які лежать між двома її точками, разом із цими точками. Ці точки називаються ***кінцями*** відрізка, а всі решта точок називаються ***внутрішніми точками*** відрізка.

Позначають відрізки зазвичай їхніми кінцями. Наприклад: AB.



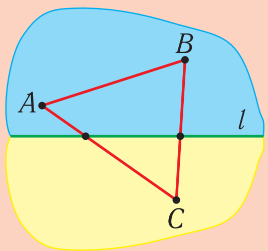
Промінь (або **півпряма**) — це частина прямої, що складається з усіх точок цієї прямої, які лежать з одного боку від деякої її точки, разом із цією точкою. Ця точка називаються ***початком*** променя, а всі решта точок називаються *внутрішніми точками* променя.

Позначають промені або двома великими літерами, з яких перша вказує на початок променя, а друга — на яку-небудь внутрішню точку, або однією малою літерою. Наприклад: OA, OX, l.



Два промені однієї прямої зі спільним початком називаються ***доповняльними*** (або ***взаємно доповняльними***).

Розміщення точок на площині відносно прямої. Півплощини

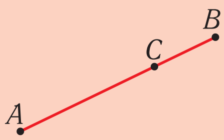


Основна властивість розміщення точок на площині відносно прямої:

кожна пряма розбиває площину на дві півплощини.

Це розбиття має таку властивість: кожен відрізок AB, що сполучає точки однієї півплощини, не перетинає *граничної прямої* l, а кожен відрізок AC, що сполучає точки різних півплощин, перетинає її.

Вимірювання і відкладання відрізків. Рівність відрізків

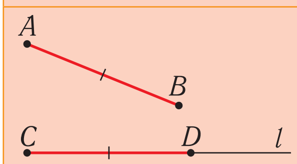


$AB=AC+CB$

Основна властивість вимірювання відрізків:

кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю внутрішньою точкою.

Відрізки AB і CD, які мають однакову довжину, називаються ***рівними***.



$CD=AB$

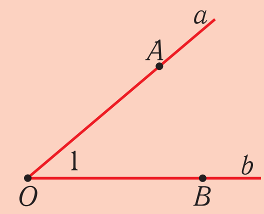
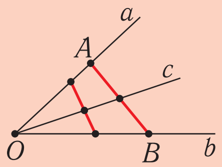
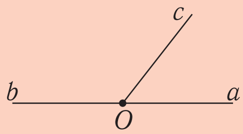
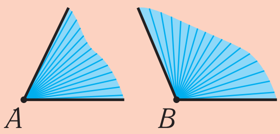
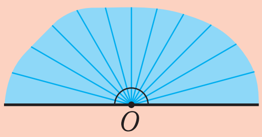
Основна властивість відкладання відрізків:

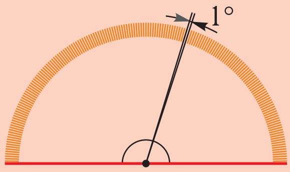
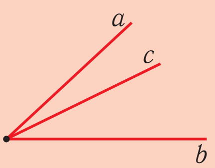
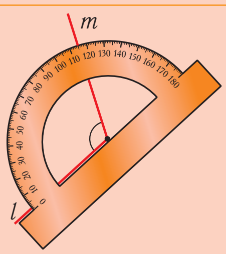
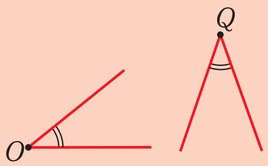
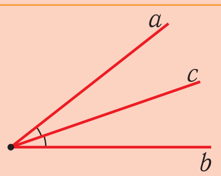
на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок будь-якої заданої довжини, і притому — тільки один

З основних властивостей вимірювання і відкладання відрізків випливає, що ***рівні відрізки можна сумістити***.

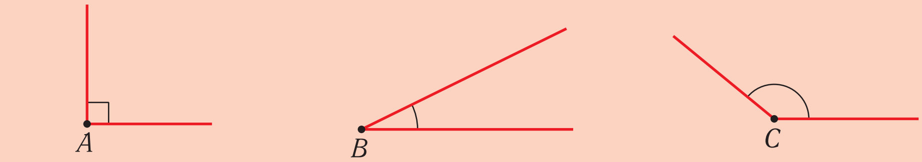
$AM=MB$

Точка M, яка ділить відрізок AB на дві рівні частини, називається ***серединою*** відрізка AB.

Кути	
	**Кут** — це фігура, що складається з двох променів, які мають спільний початок. При цьому кожен із променів називається ***стороною*** кута, а їхній спільний початок — ***вершиною*** кута. Якщо O — вершина кута, OA і OB — його сторони, то позначити цей кут можна так: $\angle O$ або $\angle AOB$. Якщо сторони кута позначені через a і b, то кут позначають у формі $\angle ab$ або $\angle(ab)$. Інколи кути позначають цифрами. Наприклад, $\angle 1$.
	Якщо сторони a, b кута O є взаємно доповняльними променями, то такий кут називається ***розгорнутим***.
	Промінь c з початком у вершині O нерозгорнутого кута проходить ***між його сторонами*** a, b, якщо він перетинає який-небудь відрізок AB з кінцями на сторонах кута. Можна обґрунтувати, що промінь, який лежить між сторонами нерозгорнутого кута, перетинає усі відрізки з кінцями на його сторонах.
	Для розгорнутого кута $\angle ab$ уважається, що будь-який промінь c, який виходить з вершини кута O, лежить між його сторонами a і b.
 	Точки усіх променів, які проходять між сторонами нерозгорнутого кута, називаються *внутрішніми* точками цього кута. Решта точок площини називаються *зовнішніми* точками кута. Для розгорнутого кута *внутрішніми* уважаються всі точки однієї з півплощин, граничну пряму якої утворюють сторони кута. Кожен кут розбиває площину на дві частини. Та частина, яка містить сторони кута і всі внутрішні точки кута, називається ***опуклим плоским*** кутом, а та, що містить сторони кута і всі зовнішні точки, — ***увігнутим плоским кутом***.

Вимірювання і відкладання кутів. Рівність кутів	
	Кути вимірюють у градусах, зокрема — за допомогою транспортира. Кутом з градусною мірою 1° уважається $\frac{1}{180}$ частина розгорнутого кута. Дрібнішими одиницями для вимірювання кутів є мінута і секунда Одна ***мінута*** (1′) дорівнює $\frac{1}{60}$ частині градуса, одна ***секунда*** (1″) дорівнює $\frac{1}{60}$ частині мінути.
 $\angle ab = 180°$  $\angle ab = \angle ac + \angle cb$	*Основна властивість вимірювання кутів*: ***кожний кут має певну градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.***
	*Основна властивість відкладання кутів*: ***від будь-якого променя у задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою від 180°, і притому — тільки один.*** На рисунку від променя l відкладено кут $\angle lm$, що дорівнює 115°.
 $\angle O = \angle Q$	Кути, які мають однакові градусні міри, називаються ***рівними***. З основних властивостей вимірювання і відкладання кутів випливає, що ***рівні кути можна сумістити***.
 $\angle ac = \angle cb$	Промінь c, який виходить з вершини кута $\angle ab$, проходить між його сторонами і ділить кут на два рівних кути, називається ***бісектрисою*** кута $\angle ab$.

Види кутів



$\angle A = 90°$ — прямий $\angle B < 90°$ — гострий $\angle C > 90°$ — тупий

Кут, градусна міра якого дорівнює 90°, називається ***прямим***.

Кут, градусна міра якого менша від 90°, називається ***гострим***, а кут, градусна міра якого більша за 90°, але менша від 180°, називається ***тупим***.

Перевір себе

1. Що вивчає геометрія? Що таке геометрична фігура? Назвіть відомі вам приклади геометричних фігур.
2. Які геометричні фігури вважаються основними на площині? Як вони зображуються і позначаються?
3. Сформулюйте основну властивість проведення прямої.
4. Яким може бути взаємне розміщення двох прямих на площині?
5. Сформулюйте основну властивість розміщення точок на прямій.
6. Дайте означення відрізка. Як позначаються відрізки?
7. Що таке промінь (півпряма)? Як позначаються промені?
8. Які промені називаються доповняльними?
9. Сформулюйте основну властивість розміщення точок на площині.
10. Що означає вислів: «Пряма розбиває площину на дві півплощини»?
11. Сформулюйте основну властивість вимірювання відрізків. Які відрізки називаються рівними? Як записується рівність відрізків?
12. Що таке відстань між двома точками?
13. Що таке середина відрізка?
14. Сформулюйте основну властивість відкладання відрізків.
15. Обґрунтуйте, що коли відрізки рівні, то їх можна сумістити.
16. Дайте означення кута. Як позначаються кути?
17. Який кут називається розгорнутим?
18. Поясніть, що означає вислів: «Промінь проходить між сторонами кута».
19. Що таке плоский кут? Які плоскі кути називаються опуклими, які — увігнутими?
20. В яких одиницях вимірюються кути?
21. Сформулюйте основні властивості вимірювання та відкладання кутів.
22. Які кути називаються рівними?
23. Як можна обґрунтувати, що коли кути рівні, то їх можна сумістити?
24. Що таке бісектриса кута?
25. Які кути називаються прямими, які — гострими, які — тупими?

Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу I

1°. а) На рис. 1.71 знайдіть усі прямі, які проходять через точку D, але не проходять через точку B. Випишіть усі можливі позначення для них.
б) На рис. 1.71 знайдіть усі прямі, які проходять через точку O, але не проходять через точку C. Випишіть усі можливі позначення для них.

2°. а) За рис. 1.72 випишіть усі промені, які перетинають відрізок AB, але не перетинають відрізок CD.
б) За рис. 1.72 випишіть усі промені, які перетинають відрізок CD, але не перетинають відрізок AB.

3°. а) За рис. 1.73 випишіть позначення трьома буквами усіх кутів із вершиною Q.
б) За рис. 1.73 випишіть позначення трьома буквами усіх кутів із вершиною P.

4°. а) Які із тверджень стосовно співвідношення між довжинами відрізків на рис. 1.74, а) є істинними:
1) $MN = PQ$; 2) $MN > PQ$; 3) $NP > NQ$;

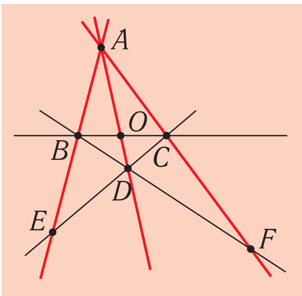


Рис. 1.71

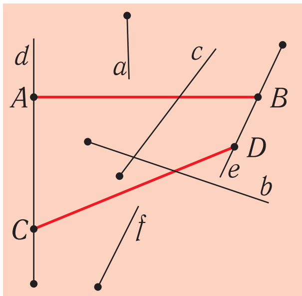


Рис. 1.72

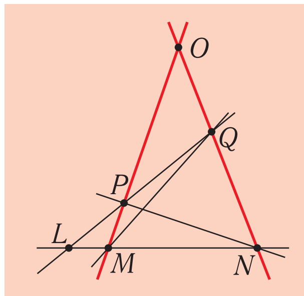


Рис. 1.73

4) $NQ = NP + PQ$; 5) $MN + PN + PQ = MQ$?
б) Які із тверджень стосовно співвідношення між величинами кутів на рис. 1.74, б) є істинними:
1) $\angle bd > \angle ad$; 2) $\angle bd > \angle ac$; 3) $\angle ab < \angle ac + \angle bd$;
4) $\angle ab = \angle ad + \angle db$; 5) $\angle ab = 180°$?

5. а) На промені OA позначено точку C. Відомо, що $OA = 8$ см, а відрізок AC більший за відрізок OA на 3 см. З'ясуйте, котра з точок O, A, C лежить між двома іншими та знайдіть довжину відрізка OC.

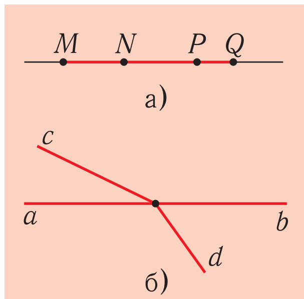


Рис. 1.74

б) На промені OK позначено точку P. Відомо, що OP = 3 см, а відрізок PK удвічі більший за OP. З'ясуйте, котра з точок O, K, P лежить між двома іншими та знайдіть довжину відрізка OK.

6. а) Точка A належить відрізку PQ. Відрізок PA утричі довший за відрізок AQ. Визначте довжини відрізків PA і PQ, якщо PQ = 12 см.
б) Точка P лежить на прямій AB і при цьому точка B розміщена між точками A і P. Відомо, що відрізок AB удвічі менший від відрізка BP. Визначте довжину відрізка BP, якщо AP = 15 см.

7. а) З вершини розгорнутого кута POQ проведені у різні боки від прямої PQ промені OA і OB так, що $\angle POA = 75°$, $\angle QOB = 125°$. Визначте кут AOB.
б) З вершини розгорнутого кута AOB проведені у різні боки від прямої AB промені OK і OM так, що $\angle KOB = 100°$, $\angle MOA = 125°$. Визначте кут KOM.

8. а) Промінь OA проходить між сторонами кута MON, що дорівнює 95°. Кут MOA на 25° більший за кут AON. Визначте кути MOA і AON.
б) Промінь OP проходить між сторонами кута AOB, що дорівнює 72°. Кут AOP утричі більший за кут BOP. Визначте кути AOP і BOP.

9. а) На відрізку AB завдовжки 12 см позначені точки P і Q так, що AP = 7 см, PQ = 3 см. Визначте довжину відрізка QB.
б) Всередині кута $\angle ab$, що дорівнює 130°, проведено промені c і d так, що $\angle ac = 60°$, $\angle cd = 20°$. Визначте величину кута $\angle bd$.

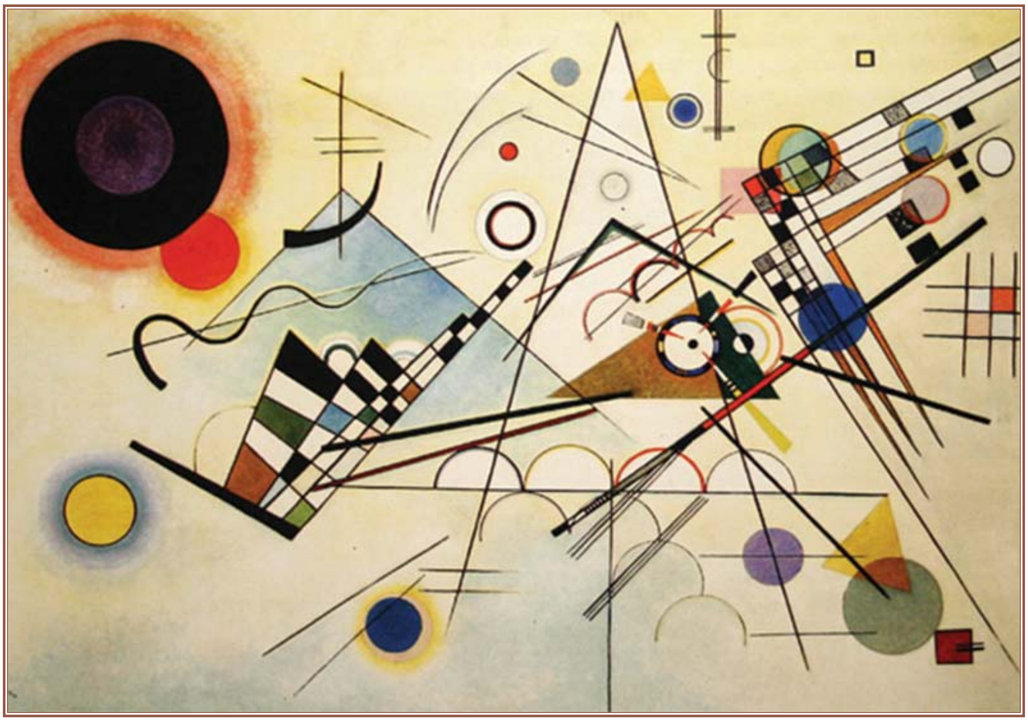
10. а) Промені OB і OC проходять усередині кута AOD і $\angle AOC = \angle DOB$. Обґрунтуйте, що тоді $\angle AOB = \angle DOC$.
б) Промені OB і OC не проходять усередині кута AOD і $\angle AOC = \angle DOB$. Обґрунтуйте, що тоді $\angle AOB = \angle DOC$.

11•. а) На прямій послідовно позначені точки O, P, A, B так, що OP = 2 см, PA = = 6 см, OB = 14 см. Визначте відстань між серединами відрізків OA і PB.
б) На прямій послідовно відкладені відрізки AB, BC і CD так, що $AB : BC = 2 : 3$, AD = 15 см, CD = 5 см. Визначте відстань між серединами відрізків AB і CD.

12•. а) Точки A, B, C лежать на одній прямій, і при цьому AB = 10 см, BC = 12 см. Яка із цих точок не може лежати між двома іншими?
б) Точки A, B, C лежать на одній прямій, і при цьому AB = 8 см, BC = 3 см. Яка із цих точок не може лежати між двома іншими?

13•. а) OB — бісектриса кута AOC, промінь OD проходить між його сторонами. Відомо, що $\angle AOD$= 80°, $\angle COD$ = 20°. Визначте кут BOD.
б) OB — бісектриса кута АОС, промінь OD не проходить між його сторонами. Відомо, що $\angle AOD$= 140°, $\angle COD$ = 60°. Визначте кут BOD.

14•. а) Промінь, проведений з вершини прямого кута, ділить цей кут на два менші кути. Обґрунтуйте, що кут між бісектрисами цих кутів дорівнює 45°.
б) Промінь, проведений з вершини кута O, ділить цей кут на два кути. Кут між бісектрисами утворених менших кутів дорівнює 45°. Обґрунтуйте, що кут O — прямий.



Василь Кандинський (1866–1944).
Композиція номер VIII (1923 р.).

У цій усесвітньо відомій картині один із засновників живописного абстракціонізму відобразив своє сприйняття геометричних кодів Всесвіту. Приводом стало спостереження сонячного затемнення. Найважливішими формоутворюючими елементами у кодах Всесвіту, як уважав В. Кандинський, є прямі лінії і кола. Прямі ми детально вивчатимемо у цьому розділі, кола — в останньому розділі.

Розділ II Взаємне розміщення прямих на площині

Вступ

«Той, хто добре вивчив пряму, не матиме труднощів з геометрією», — часто повторював своїм учням у знаменитій Політехнічній школі в Парижі відомий французький математик і громадський діяч Гаспар Монж (1746–1818).

На попередніх уроках ви розпочали ґрунтовне вивчення прямої. Перші факти, з якими ви ознайомилися, стосувалися саме цієї фігури. То були основні властивості про проведення прямої, про розміщення точок на прямій і про розміщення точок на площині відносно прямої. Отже, йшлося про властивості окремо взятої прямої. Наступним кроком має бути дослідження взаємного розміщення двох прямих. Цьому й присвячуватиметься цей розділ.

Однак перш, ніж безпосередньо перейти до розгляду цих питань, нам потрібно зробити декілька вкрай важливих для подальшого зауважень. При цьому ми будемо посилатися і на той невеликий досвід вивчення геометрії, який ви вже маєте.

Уроки 8–10

Пам'ятник Гаспару Монжу у містечку Боні (Бургундія), в якому він народився. Відомий скульптор Франсуа Рюд увічнив великого ученого в образі професора Політехнічної школи під час лекції з геометрії.

Про аксіоми, теореми і доведення у геометрії

На попередніх уроках ви не могли не помітити, що при виборі основних положень для фундаменту геометрії ми постійно вдавалися до певних логічних обґрунтувань. Наприклад, важливість основних властивостей прямої пояснювали тим, що ці властивості могли б і не виконуватися, якби геометрія будувалася не для земного, а для якогось іншого світу, наприклад, для невеличкої кулястої планети Маленького Принца або для планети у формі бублика. Що ж до деяких наслідків, то ми виводили їх з основних положень винятково логічними міркуваннями, навіть якщо й без того вони начебто не викликали сумнівів. Наприклад, у §1 обґрунтовувалося, що дві прямі не можуть мати більше однієї спільної точки, а в §4 — що рівні відрізки можна сумістити.

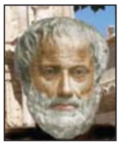
У цьому — вся суть геометрії: геометрія — теоретична наука, в якій усі факти виводяться логічним шляхом (за допомогою міркувань) з певного переліку основних положень. Ці основні положення називаються ще **аксіомами** геометрії. У дослівному перекладі з грецької слово «аксіома» означає «повага» «авторитет», а в математиці вживається у значенні незаперечної істини, підстави для логічних виведень.

Усі зазначені в попередньому розділі основні властивості найпростіших геометричних фігур є *аксіомами геометрії*. Аби чіткіше уявляти собі цей фундамент геометрії, перелічимо їх тут ще раз.

I. Аксіома проведення прямої. ***Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж — тільки одну.***

II. Аксіома розміщення точок на прямій. ***Із трьох точок прямої одна, і тільки одна, лежить між двома іншими.***

Усі доказові науки застосовують аксіоми. Аксіоми мають найвищий ступінь загальності, а тому є початком усього.



Аристотель (кінець 4-го — початок 3-го ст. до н. е) — один із найвидатніших учених-природодослідників і філософів усіх часів. Портрет-реконструкція з античного бюсту.

III. Аксіома розміщення точок на площині відносно прямої. ***Кожна пряма розбиває площину на дві півплощини, що мають спільну граничну пряму.***

IV. Аксіома вимірювання відрізків. ***При вибраній одиниці вимірювання кожний відрізок має певну довжину, що виражається додатним числом. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою своєю внутрішньою точкою.***

V. Аксіома відкладання відрізків. ***При вибраній одиниці вимірювання на будь-якому промені від його початку можна відкласти відрізок будь-якої заданої довжини, і притому — тільки один.***

VI. Аксіома вимірювання кутів. ***Кожний кут має певну градусну міру, що виражається додатним числом. Розгорнутий кут дорівнює 180°. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.***

VII. Аксіома відкладання кутів. ***Від будь-якого променя у задану півплощину можна відкласти кут із заданою градусною мірою, меншою від 180°, і притому — тільки один.***

Це ще не повний перелік аксіом геометрії. Згодом буде уведено ще дві важливі аксіоми — аксіому *про паралельні прямі* (§9) і аксіому *про рухомість трикутника* (§14). Сукупність усіх аксіом геометрії називається її *аксіоматикою*.

Як засвідчила історія, виокремлення вичерпного і при тому не переобтяженого надмірною кількістю переліку аксіом — не така легка річ, як може здатися на перший погляд. Перший перелік аксіом геометрії запропонував давньогрецький учений Евклід ще у III ст. до н.е. Хоча цей перелік і був неповним, однак він прослужив науці аж до кінця XIX ст. У 1899 р. видатний німецький математик Давид Гільберт (1862–1943) опублікував книгу «Основи геометрії», в якій

Евклід

Д. Гільберт

запропонував повний перелік із 20 аксіом геометрії. Аксіоматика Гільберта задовольняла найприскіпливіші вимоги учених, однак була занадто абстрактною і тому складною для початкового вивчення геометрії. Тому в шкільному навчанні ще тривалий час послуговувалися неповним переліком Евкліда.

Оригінальну аксіоматику геометрії на основі поняття руху запропонував на початку XX ст. професор Одеського університету Веніамін Федорович Каган (1869–1953), однак і цей варіант виявився складним для шкільних підручників.

В.Ф. Каган

Спеціально орієнтовану на школярів, модернізовану аксіоматику геометрії запропонував на початку 1930-х років американський математик Джордж Біркгоф (1884–1944). В її основу він поклав аксіоми вимірювання й відкладання відрізків та кутів, які ще називають *аксіомами лінійки і транспортира*. А унікальний синтез ідей Евкліда, Гільберта, Кагана і Біркгофа здійснив видатний геометр XX ст. Олексій Васильович Погорєлов (1919–2002), який майже все життя працював у Харківському університеті та Харківському науково-дослідному інституті низьких температур. Аксіоматика Погорєлова була реалізована в його підручнику з геометрії, який з'явився на початку 1970-х років, а потім понад чверть століття служив нашій школі. Нині більшість вітчизняних спеціалістів вважає цю аксіоматику найбільш придатною для шкільного навчання, і тому саме вона подається у цьому підручнику.

Дж. Біркгоф

Після уведення аксіоматики подальший виклад геометрії відбувається шляхом послідовного виведення (частіше кажуть — *доведення*) логічних наслідків. Ці логічні наслідки називаються **теоремами**.

Слово «теорема» — грецьке. Воно походить від слова «теорео», що означає «уважно розглядаю», «придивляюся», і має той самий корінь, що й значно поширеніше тепер слово «теорія».

О.В. Погорєлов

А ще слово «теорема» має значення «вистава», яке близьке до сучасного «шоу». В античні часи у Греції були поширені інтелектуальні розваги у формі публічних диспутів, під час яких їхні учасники обстоювати (доводили) свої твердження або навіть цілі теорії. Ці міні-вистави, які зараз назвали б інтелектуальними «шоу», теж називалися «теоремами».

Отже, стежачи за доведенням теореми на класній дошці або знайомлячись з ним за підручником, ви можете уявляти себе присутніми на інтелектуальному шоу і навіть брати у ньому участь. Сподіваємося, що такий погляд на теореми і їхнє доведення позбавить вас деякого остраху, який на початках можуть викликати ці слова.

Вас не повинно непокоїти й те, що в окремих теоремах, особливо на початках, будуть доводитися немовби «очевидні» речі, які нібито й без доведення видно з рисунка. Не піддавайтесь на цю оману! Скільки б ви не нарисували рисунків, ви все одно ніколи не вичерпаєте усіх можливих варіантів для розмірів та розміщення деталей (наприклад, ви не нарисуєте трикутник з кілометровими сторонами, а ми вже бачили на прикладі сфери, що відхилення від «очевидного» на ній проявляються якраз у великих масштабах). А тому ви ніколи не зможете лише з рисунка з певністю зробити загального висновку. Тільки правильне логічне міркування (доведення) з посиланням на аксіоми або на вже доведені раніше теореми може дати для цього підставу. Рисунок може лише допомогти у доведенні, наприклад, наштовхнути на правильні міркування, однак замінити його він не може.

Математичне доведення — це логіка, яка сприяє правильному формуванню розуму, розвиває його здібності, посилює їх настільки, що розум привчається мислити точно і завжди відрізняти істину від хибності, навіть у речах нематематичних. Саме тому єгиптяни, перси і лакедемоняни, як свідчать джерела, рідко вибирали собі правителя, який не був трохи обізнаним з математикою, вважаючи, що необізнаний з математикою зовсім не вміє мислити, а тому неспроможний правити й керувати.

Бенджамін Франклін (1706–1780) — видатний американський учений-фізик, просвітитель і державний діяч, один із засновників США.
Портрет Франкліна перед бюстом Ньютона створив з натури англійський художник Девід Мартін у 1767 р. Експонується в Білому Домі у Вашингтоні.

§5. Суміжні кути

При перетині двох прямих утворюється чотири нерозгорнутих кути (рис. 2.1). Взаємне розміщення прямих характеризують за допомогою цих кутів. Яких саме? — Це ми зрозуміємо після того, як уважніше придивимося до них. Для цього розглядатимемо їх парами. Одні пари кутів називаються *суміжними*, інші — *вертикальними*. Суміжні кути ми вивчатимемо у цьому параграфі, вертикальні — в наступному.

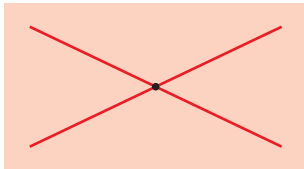


Рис. 2.1

Означення.

Два кути називаються *суміжними*, якщо вони мають одну спільну сторону, а дві інші їхні сторони є доповняльними променями.

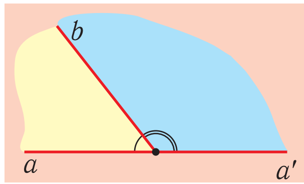


Рис. 2.2

Побудувати суміжні кути можна так. Візьмемо який-небудь кут $\angle ab$ (рис. 2.2) і проведемо промінь a', що є доповняльним до променя a. Кути $\angle ab$ і $\angle ba'$ — суміжні: у них сторона b спільна, а сторони a і a' є доповняльними променями.

Кут, суміжний з кутом $\angle ab$, дістанемо й тоді, якщо проведемо промінь b', доповняльний до променя b (рис. 2.3).

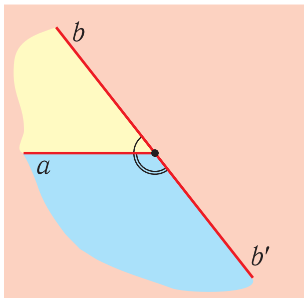


Рис. 2.3

Отже, для кожного кута $\angle ab$ можна побудувати два суміжних з ним кути $\angle ba'$ і $\angle ab'$.

Теорема

(про суму суміжних кутів).

***Сума суміжних кутів дорівнює* 180°.**

Доведення. Нехай кути $\angle ab$ і $\angle ba'$ — суміжні, і в них сторона b — спільна, а сторони a і a' є доповняльними променями (див. рис. 2.2). Тоді промінь b проходить між сторонами розгорнутого кута зі сторонами a і a'. Відповідно до аксіоми про вимірювання кутів, сума кутів $\angle ab$ і $\angle ba'$ дорівнює розгорнутому куту $\angle aa'$, тобто має градусну міру 180°. Теорему доведено.

Твердження, яке безпосередньо випливає з теореми, називається *наслідком*.

З теореми про суму суміжних кутів маємо такі наслідки.

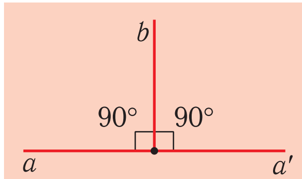


Рис. 2.4

Наслідок 1.

Кут, суміжний з прямим кутом, є прямим.

Наслідок 2.

Кут, суміжний з гострим кутом, — тупий, а кут, суміжний з тупим кутом, — гострий.

Справді, якщо кут $\angle ab$ — прямий (рис. 2.4), то він дорівнює 90°. Тому суміжний з ним кут $\angle ba'$, за теоремою про суму суміжних кутів, дорівнює $180° - 90°$, тобто теж 90°. Отже, він є прямим.

Нехай тепер $\angle ab$ — гострий (див. рис. 2.2). Це означає, що його градусна міра менша від 90°. У сумі зі своїм суміжним кутом $\angle ab'$ він дає 180°. Отже, цей суміжний кут має градусну міру, яка більша за 90°, тобто є тупим.

Випадок, коли $\angle ab$ — тупий, розглядається аналогічно.

Для мене знайти доведення математичної теореми — дорожче, ніж завоювати усе перське царство.

Демокрит — видатний давньогрецький мислитель, засновник атомізму. Жив на межі 5-го і 4-го століть до н. е.

Портрет «Демокрит, що сміється» створив з уяви нідерландський художник Хендрик Тербрюгген у 1628 р.

Розв'язуємо разом

Задача.

Один із суміжних кутів на 60° менший від іншого. Визначити градусні міри цих кутів і накреслити їх.

Розв'язання. Позначимо через x градусну міру більшого із кутів. Тоді градусна міра меншого кута дорівнюватиме $x - 60°$. Оскільки сума суміжних кутів дорівнює 180°, то звідси маємо рівняння:

$$x + x - 60° = 180°.$$

Звідси $2x = 240°$, а $x = 120°$. Отже, більший із кутів дорівнює $120°$, а менший — $120° - 60°$, тобто $60°$. На рис. 2.5 відображено побудову цих кутів за допомогою транспортира.

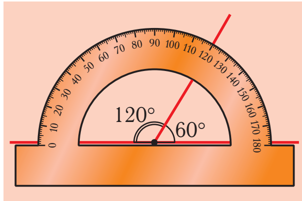


Рис. 2.5

Вправи і задачі

77°. На кожному з рис. 2.6, а)–в) укажіть пари суміжних кутів.

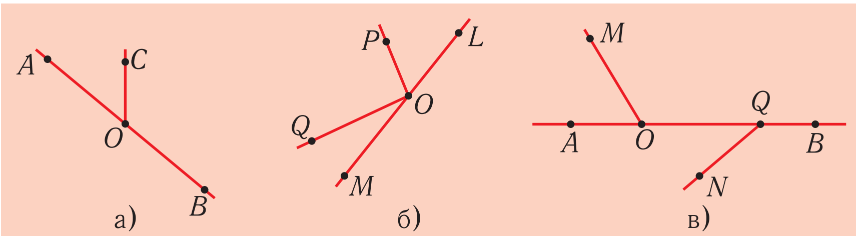


Рис. 2.6

78°. Чи є кути 1, 2, зображені на рис. 2. 7, а)–г), суміжними?

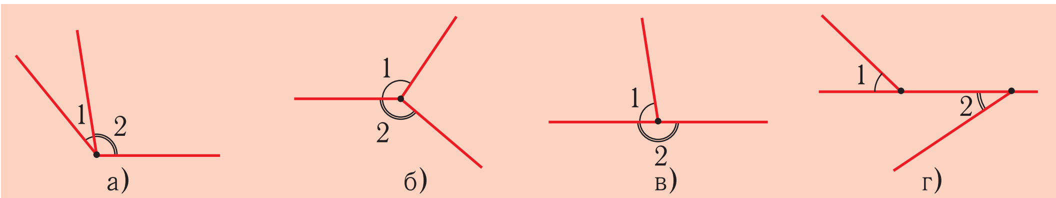


Рис. 2.7

79°. Назвіть усі пари суміжних кутів, що утворюються прямими AB і CD, які перетинаються в точці O (рис. 2.8).

80°. Накресліть два нерівних суміжних кути так, щоб їхня спільна сторона проходила вздовж ліній у вашому зошиті. Укажіть два принципово різні варіанти.

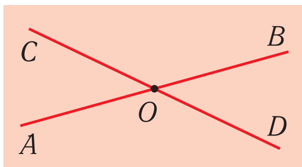


Рис. 2.8

81°. Знайдіть невідомий кут, якщо суміжний з ним дорівнює:
а) 67°; б) 138°; в) 90°; г) 45° 25′.

82°. Чи можуть у парі суміжних кутів бути:
а) обидва кути гострими;
б) обидва кути тупими;
в) обидва кути прямими;
г) один кут гострий, а інший — прямий;
ґ) один кут тупий, а інший — прямий;
д) один кут тупий, а інший — гострий?

83°. Чому при складанні аркуша паперу вдвоє, коли суміщаються краї, одержуються прямі кути?

84. При перетині двох прямих утворилися чотири кути (рис. 2.9). Визначте кути 2, 3 і 4, якщо кут $\angle 3 = 36°$.

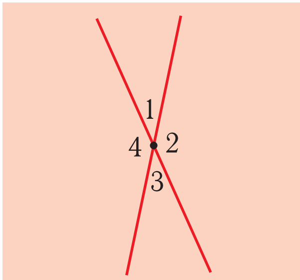


Рис. 2.9

85. Чому дорівнює кут, якщо два суміжні з ним кути дають у сумі 100°?

86. Визначте величини суміжних кутів, якщо один із них на 80° більший за інший.

87. Визначте величини суміжних кутів, якщо один із них на 40° менший від іншого.

88. Визначте величини суміжних кутів, якщо один із них у 5 разів менший від іншого.

89. Визначте величини суміжних кутів, якщо вони відносяться, як 2 : 3.

90. Доведіть, що коли суміжні кути рівні, то вони — прямі.

91. Доведіть, що коли два прямі кути мають спільну сторону, то вони або суміщаються, або є суміжними.

92. Доведіть, що коли кути рівні, то й суміжні з ними кути рівні.

93. Нехай $\angle A$ і $\angle B$ — одна пара суміжних кутів, а $\angle C$ і $\angle D$ — інша. Що можна стверджувати про величини кутів B і D, якщо $\angle A < \angle C$? Як це обґрунтувати?

94. Які з наведених нижче тверджень є істинними, а які — хибними:
1) для кожного кута можна побудувати не більше одного суміжного з ним кута;
2) якщо два кути суміжні, то один із них гострий, а інший — тупий;
3) якщо два кути суміжні, то один із них менший від іншого;
4) якщо сума двох кутів дорівнює 180°, то вони — суміжні;
5) якщо сума двох кутів дорівнює 180° і вони мають спільну сторону, то кути — суміжні;
6) якщо сума двох кутів не дорівнює 180°, то вони — не суміжні;
7) якщо два кути мають спільну сторону, то вони — суміжні;
8) якщо сторона одного з кутів є доповняльним променем до сторони іншого, то кути — суміжні?
Проілюструйте ваші відповіді рисунками.

95•. Один із суміжних кутів утричі більший за їхню різницю. Визначте ці кути.

96•. Один із суміжних кутів удвічі менший від їхньої різниці. Визначте ці кути.

97•. Бісектриса кута A утворює з його стороною кут, який удвічі більший за кут, суміжний з кутом A. Визначте кут A.

98•. Величини двох кутів відносяться, як 1 : 3, а величини суміжних з ними кутів — як 4 : 3. Визначте ці кути.

99•. Визначте величину кута, який утворюють бісектриси двох суміжних кутів.

100•. Доведіть, що коли бісектриси двох кутів AOB і BOC утворюють прямий кут, то точки A, O, C лежать на одній прямій.

§6. Вертикальні кути

Уроки 11–12

Означення.

Два кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного з них є доповняльними променями до сторін іншого.

При перетині двох прямих утворюється дві пари вертикальних кутів.

Справді, кожна із прямих точкою перетину ділиться на два доповняльних промені. Нехай ці промені позначені a, a' та b, b' (рис. 2.10). Тоді кути $\angle ab$ і $\angle a'b'$, а також $\angle ab'$ і $\angle a'b$ — вертикальні.

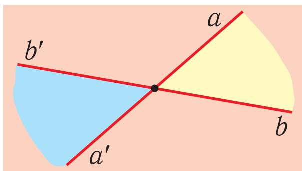


Рис. 2.10

Назва «вертикальні кути» утворена від латинського слова «vertex», одним зі значень якого є «вершина». Отже, у цій назві відображається те, що вертикальні кути мають спільну вершину, а не те, що вони займають вертикальне, тобто прямовисне, положення. Раніше застосовувалася більш влучна назва — протилежні кути.

Теорема
(про вертикальні кути).

Вертикальні кути рівні між собою.

Доведення. Нехай маємо два вертикальних кути $\angle ab$ і $\angle a'b'$ (див. рис. 2.10). Кожен із них є суміжним з кутом $\angle ab'$, а тому в сумі з цим кутом дає 180°:

$\angle ab + \angle ab' = 180°$; $\angle a'b' + \angle ab' = 180°$.

Звідси

$\angle ab = 180° - \angle ab'$; $\angle a'b' = 180° - \angle ab'$.

Виходить, що градусні міри кутів $\angle ab$ і $\angle a'b'$ рівні, а тому рівні й самі ці кути. Теорему доведено.

Фалес. Фрагмент фрески на фасаді національного університету в Афінах

Перше доведення теореми про вертикальні кути давні історики приписують легендарному фундатору античної науки Фалесу Мілетському. Фалес жив у кінці VI – на початку V ст. до н. е. У ті часи вимірювання кутів у градусах ще не було. Тому найімовірніше, що Фалес доводив теорему про вертикальні кути тим, що обґрунтовував можливість суміщення одного з них із іншим шляхом повороту.

Справді, якщо уявити, що півплощину з граничною прямою b, яка містить сторону a першого з вертикальних кутів $\angle ab$ і $\angle a'b'$ (див. рис. 2.10), повернули відносно спільної вершини кутів так, щоб ця півплощина сумістилася з іншою півплощиною, то при цьому промінь b суміститься з променем b', а промінь a — з променем a'. Отже, кут $\angle ab$ суміститься з вертикальним кутом $\angle a'b'$. А тому, мабуть, робив звідси висновок Фалес, вертикальні кути рівні між собою.

Цією давньою ідеєю з поворотом фігури для доведення теорем ми ще скористаємося.

Вправи і задачі

101°. Назвіть пари вертикальних кутів, утворених при перетині прямих AB і CD на рис. 2.11.

102°. Назвіть усі пари вертикальних кутів, які утворюються при перетині трьох прямих в одній точці на рис. 2.12.

103°. Чи є вертикальними кути, зображені на рис. 2.13?

104°. Накресліть за допомогою транспортира кут, що дорівнює 70°, а потім за допомогою лінійки проведіть прямі, які містять сторони цього кута. Скільки кутів

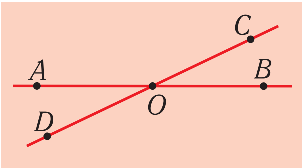


Рис. 2.11

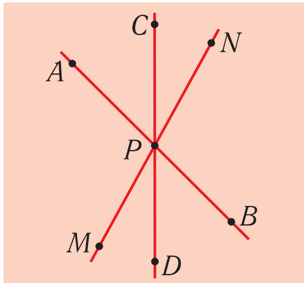


Рис. 2.12

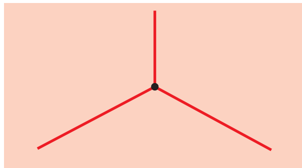


Рис. 2.13

утворилося при перетині цих прямих? Визначте їхні величини вимірюванням і за допомогою обчислення. Чи збігаються результати?

105°. Чи можуть вертикальні кути бути: а) прямими; б) тупими; в) один гострим, а інший — тупим?

106°. Чи істинне таке твердження: «Якщо два кути рівні, то вони — вертикальні»? Проілюструйте відповідь рисунком.

107°. Сума величин двох вертикальних кутів дорівнює 120°. Визначте величину кожного з них.

108°. Якими (гострими, прямими чи тупими) є вертикальні кути, якщо їхня сума: а) менша від 180°; б) більша за 180°; в) дорівнює 180°?

109°. Один із кутів, які утворюються при перетині двох прямих, дорівнює 30°. Чому дорівнюють інші кути?

110. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих ліній, є прямим. Якими можуть бути інші кути? Відповідь обґрунтуйте.

111. Сума двох кутів, які утворилися при перетині двох прямих, дорівнює 130°. Доведіть, що ці кути — вертикальні.

112. Один із кутів, які утворюються при перетині двох прямих, на 50° менший від іншого. Визначте ці кути.

113. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, учетверо більший за інший. Визначте ці кути.

114. Визначте величини кутів, утворених при перетині двох прямих, якщо: а) один із них на 20° більший за інший; б) один із кутів дорівнює половині іншого; в) сума величин двох кутів дорівнює 100°.

115. Відомі два із кутів, утворених при перетині трьох прямих в одній точці (рис. 2.14). Визначте кути 1, 2, 3, 4.

116. Три прямі перетинаються в одній точці (рис. 2.15), Доведіть, що ∠1 + ∠2 + ∠3 = 180°.

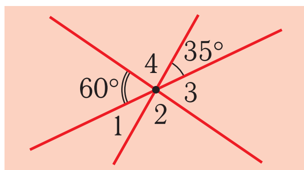


Рис. 2.14

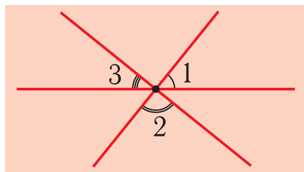


Рис. 2.15

117•. Сума двох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, на 60° менша від суми двох інших. Визначте ці кути.

118•. Сума вертикальних кутів удвічі більша за кут, суміжний з ними обома. Визначте ці кути.

119•. Визначте кути, які утворюються при перетині двох прямих, якщо сума трьох із них дорівнює 270°.

120•. Один із кутів, що утворилися при перетині двох прямих, удвічі менший від суми решти трьох кутів. Визначте усі ці кути.

121•. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів лежать на одній прямій.

122•. Два рівні кути мають спільну вершину, а їхні бісектриси лежать на одній прямій. Доведіть, що ці кути — вертикальні.

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Геометрія і... математика

Навчальна дисципліна, на уроках з якої ви у попередніх класах ознайомлювалися з окремими геометричними фактами, називалася *математикою*. Окрім геометричних відомостей, на уроках з математики вивчалися ще різні числа та операції з ними, способи складання та розв'язування рівнянь, а також численні приклади застосування цих знань для розв'язування задач із практичним змістом.

Починаючи із 7 класу, математика розділяється на дві окремі математичні дисципліни — геометрію й алгебру (а в старшій школі з алгебри виокремляться ще початки математичного аналізу). Проте зв'язок між окремими математичними дисциплінами ніколи не буде перериватися. Для характеристики геометричних величин будуть застосовуватися алгебраїчні формули й рівняння, а для алгебраїчних формул і рівнянь будуватимуться геометричні моделі у вигляді графіків, схем, діаграм, і це суттєво допомагатиме при аналізі цих формул і при розв'язуванні рівнянь.

Слово «математика» виникло у Давній Греції приблизно у V ст. до н. е. в середовищі піфагорійців — послідовників легендарного Піфагора. Походить воно від слова «матема», що означає «вчення» або

Піфагор. Символічний портрет. Гравюра невідомого художника XVI ст.

«знання». Давні греки визнавали чотири матема: про числа (арифметику), про фігури (геометрію), про пропорції у природі та мистецтві (гармонію) та про форми світу (астрономію). Неодмінною умовою приналежності певного знання до математики було виведення його шляхом логічного міркування, тобто за допомогою мислення. Характерно, що інші науки, наприклад, фізику, географію, історію у Давній Греції не тільки не відносили до «матема», а й узагалі не вважали вартими уваги справжніх учених (філософів). Уважалося, що тільки математика має тверді основи, оскільки вони здобуті розумом, тобто найвищою субстанцією, а не органами відчуття, які часто спонукають людину помилятися.

Перші піфагорійці тримали математичні знання у суворій таємниці від непосвячених і передавали їх «на віру», без належного обґрунтування. Через те їх називали *акусматиками* (від слова «акусма» — «звук», «священний вислів»). Для збереження таємниці передача знання від учителя до учнів відбувалась лише в усній формі. Проте згодом гору взяли *математики*, які вважали, що справжні знання можуть і повинні бути доступні всім і їх потрібно обґрунтовувати.

В епоху середньовіччя давньогрецьке слово *математика* вживалося рідко, а наука, яку ми зараз називаємо математикою, ділилася на арифметику (науку про числа) та геометрію (науку про фігури). Навчальні дисципліни з такими назвами вивчалися лише на дру-

Франческо ді Стефано (бл. 1422–1457). Сім вільних мистецтв.
Зверху — фрагменти картини із зображеннями музи Геометрії та Евкліда

Мартен де Вос (1532–1603). Алегорія семи вільних мистецтв, 1590 р.
Муза Геометрії — на передньому плані ліворуч. В руках у неї циркуль, за допомогою якого вона проводить вимірювання на земному глобусі; біля ніг лежать лінійка й косинець. Поруч з Геометрією — Арифметика, зайнята обчисленнями на дощечці; біля неї книга з написом «ПІФАГОР».
У центрі біля небесного глобуса — муза Астрономії; біля її ніг — сонячний годинник.

гому ступені освіти —так званому *квадрівіумі*. На квадрівіум можна було перейти лише після успішного проходження початкового рівня, який називався *трівіумом* і включав три навчальні предмети: граматику, логіку і риторику (красномовство). Квадрівіум, як про це свідчить його назва, включав чотири предмети: окрім арифметики й геометрії — ще астрономію та музику (гармонію).

Усі сім предметів трівіума і квадрівіума шанобливо називали *вільними мистецтвами* — у тому сенсі, що вони звільняють людину від виснажливої фізичної праці. В епоху Відродження художники й графіки присвятили їм чимало творів, зображаючи їх прекрасними музами на зразок дев'ятьох античних муз, які вважалися покровительками образотворчих мистецтв.

Етьєн Делон
(1518–бл. 1583)
Геометрія (Гравюра)

Корнеліс Корт (1533–1578).
Геометрія (гравюра). Із серії «Вільні мистецтва»

П'єр Леґросс Молодший (1666–1719).
Геометрія (Париж, Лувр).

Ангели, що вивчають математику. Деталь розпису стелі у залі Живопису в колишньому королівському морському коледжі у Гринвічі (Англія, кінець XVII ст.). У книзі видно слово Newton.

У XVI–XVII ст., коли Європа ознайомилася із здобутками середньовічної арабської науки, з'явилася *алгебра*. Арабською була не лише назва цієї науки, а й зміст — розв'язування рівнянь. Цим античні математики майже не займалися. Певний час з арабським терміном «алгебра» конкурував латинський термін «аналіз», що мав той самий зміст. Однак пізніше аналізом назвали відгалуження алгебри, яке виникло у зв'язку з поняттям функції.

Термін «математика» для сукупної назви арифметики, геометрії, алгебри та аналізу почали систематично застосовувати у XVIII ст. Проте ще у першій половині XIX ст. кожного визначного математика шанобливо називали геометром, навіть якщо він проводив дослідження в іншій галузі математики.

Незважаючи на очевидні відмінності, різні математичні дисципліни мають одну суттєву спільну рису, яка споріднює їх між собою й вирізняє з-поміж інших наук. Усі поняття, які вивчаються у математичних науках, — числа, фігури, формули, функції тощо, є мисленнєвими образами і тому можуть розглядатися й аналізуватися окремо від будь-яких матеріальних носіїв. Після того, як установлені основні властивості цих мисленнєвих образів (у геометрії ці властивості називаються аксіомами, в алгебрі — правилами, законами, формулами), усі інші властивості виводяться із них уже суто логічним шляхом.

§7. Кут між прямими. Перпендикулярні прямі

Уроки 13–15

Підведемо підсумок проведеного у попередніх двох параграфах вивчення властивостей кутів, що утворюються при перетині двох прямих. Усього при цьому утворюється чотири кути зі спільною вершиною, сторони яких належать різним прямим (рис. 2.16) (ми не беремо до уваги ще два розгорнуті кути, сторони яких належать одній прямій). Ці чотири кути розпадаються на дві пари вертикальних кутів, які рівні між собою. Будь-які два кути з різних пар є суміжними, а тому їхня сума дорівнює 180°. Отже, якщо один із суміжних кутів гострий, то інший — тупий, а якщо один із них прямий, то інший теж прямий (і тоді всі чотири кути є прямими).

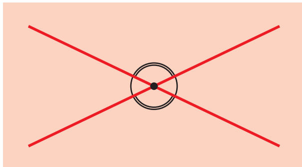


Рис. 2.16

На підставі цього приймається таке означення.

Означення.

***Кутом між двома прямими*, що перетинаються, називається величина гострого або прямого кута, утвореного при перетині цих прямих.**

Звернімо увагу, що, на відміну від кута, утвореного променями, який є фігурою і має градусну міру в межах від 0° до 180°, кут між прямими — це лише величина і вона не перевищує 90°.

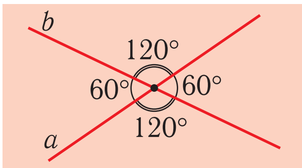


Рис. 2.17

Кут між прямими a і b позначається так: $\angle ab$. Наприклад, у випадку, зображеному на рис. 2.17, $\angle ab = 60°$, а у випадку, зображеному на рис. 2.18, $\angle ab = 90°$.

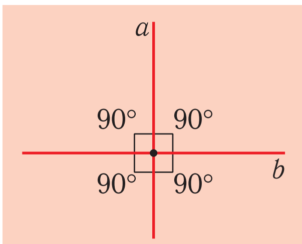


Рис. 2.18

Означення.

Якщо кут між прямими дорівнює 90°, то такі прямі називаються *перпендикулярними* (або *взаємно перпендикулярними*).

Кажуть також, що перпендикулярні прямі перетинаються *під прямим кутом*.

На рис. 2.18 зображені перпендикулярні прямі a і b.

Перпендикулярність прямих позначають за допомогою знака $\perp$. Наприклад: $a \perp b$, $AB \perp CD$ тощо.

На рис. 2.19 і 2.20 відображені способи креслення перпендикулярних прямих за допомогою косинця. На першому з них пряма b, що перпендикулярна до заданої прямої a, проведена через точку A цієї прямої. На другому — пряма b, що перпендикулярна до заданої прямої a, проведена через точку A, яка лежить поза прямою a.

Чи може інша побудова, наприклад, за допомогою транспортира, дати інші перпендикулярні прямі? — Ні, не може, і це можна довести.

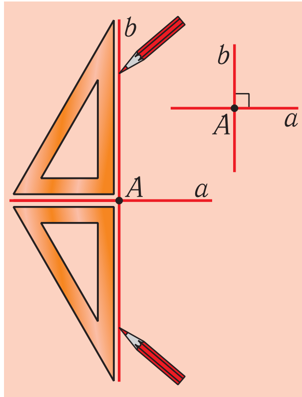


Рис. 2.19

Теорема

(про єдиність перпендикулярної прямої).

Через будь-яку точку можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної прямої.

Доведення. Припустимо, що через точку A, розміщену *на прямій* a, можна провести дві прямі b і c, перпендикулярні до прямої a (рис. 2.21). Нехай буквами b і c позначені і промені цих прямих, що лежать в одній із півплощин з граничною прямою a. Тоді у цій півплощині матимемо два рівних (прямих) кути $\angle ab$ і $\angle ac$, відкладених від однієї півпрямої AX (X — якась точка прямої a, що не збігається з точкою A). Оскільки, за аксіомою про відкладення кутів, таке неможливо, то зроблене припущення хибне. Тому через точку A можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до прямої a.

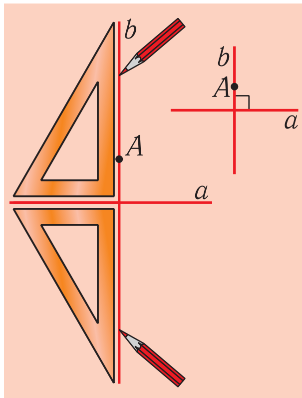


Рис. 2.20

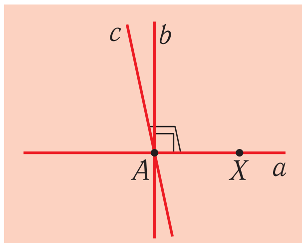


Рис. 2.21

Припустимо тепер, що через точку A, розміщену *поза прямою* a, можна провести дві прямі b і c, перпендикулярні до прямої a (рис. 2.22). Нехай B і C — точки перетину цих прямих із прямою a.

Уявімо собі, що ту півплощину з граничною прямою, в якій розміщена точка A, повернуто відносно середини O відрізка BC до суміщення з іншою півплощиною. При цьому точка B переміститься у точку C, точка C — у точку B, прямий кут ABC — на рівний йому прямий кут $A'CB$, а прямий кут ACB — на рівний йому прямий кут $A'BC$.

Із того, що кути ABC і $A'BC$ — прямі, випливає, що кут ABA' — розгорнутий, тобто, що точки A, B, A' лежать на одній прямій. Те ж саме стосується й точок A, C, A'. Виходить, що через точки A і A' проходять дві прямі. Ці прямі не можуть збігатися, оскільки пряма a перетинає їх у різних точках B і C. Дістали суперечність з аксіомою про проведення прямої, за якою через дві точки A і A' можна провести лише одну пряму. Із цього можна зробити лише один висновок: а саме, той, що зроблене припущення про існування двох перпендикулярних прямих b і c до прямої a — хибне. Теорему доведено.

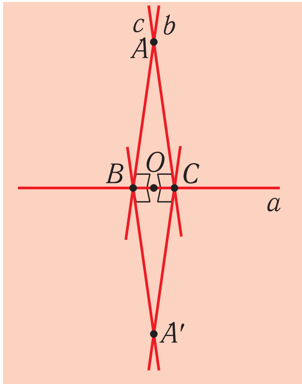


Рис. 2.22

Цікаво зауважити, що, на відміну від перпендикулярної прямої, через будь-яку точку A можна провести *дві* прямі b і c, які перетинають задану пряму a під заданим кутом, який не є прямим (рис. 2.23, а–б) (порівняй з рис. 2.19 і 2.20).

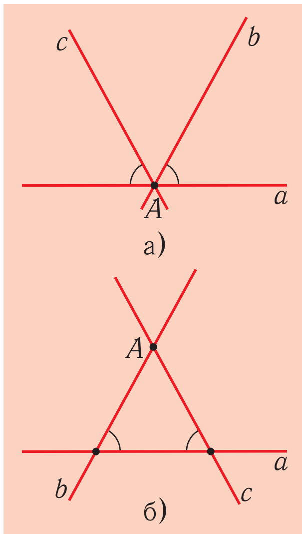


Рис. 2.23

Інколи доводиться вести мову про перпендикулярність не тільки прямих, а й частин прямих — відрізків і променів.

Означення.

Відрізки або промені називаються *перпендикулярними* (кажуть також *взаємно перпендикулярними*), якщо вони лежать на перпендикулярних прямих. Відрізки або промені називаються *перпендикулярними до прямої*, якщо вони лежать на прямих, які перпендикулярні до цієї прямої.

Для короткого запису перпендикулярності відрізків і променів застосовується той самий знак ⊥, що й для прямих.

На рис. 2.24 зображені характерні випадки взаємного розміщення перпендикулярних відрізків, а на рис. 2.25 — характерні випадки взаємного розміщення відрізків, перпендикулярних до прямої.

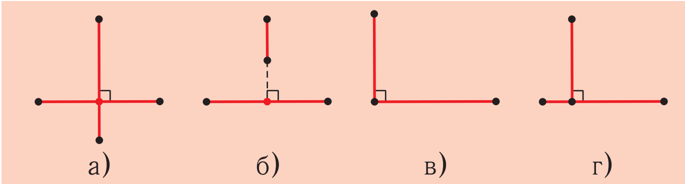


Рис. 2.24

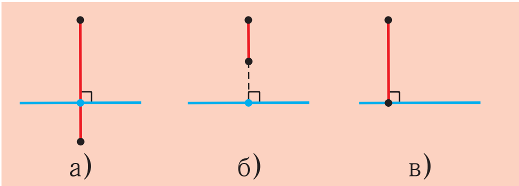


Рис. 2.25

Означення.

Відрізок, який перпендикулярний до прямої і при цьому один з його кінців належить прямій, називається *перпендикуляром* до цієї прямої. Спільна точка прямої і перпендикуляра до неї називається *основою* перпендикуляра.

Аналогічно означається поняття перпендикуляра до променя і до іншого відрізка.

На рис. 2.25, в) зображений перпендикуляр до прямої, а на рис. 2.24, в–г) — перпендикуляри до відрізків.

Терміни «перпендикулярний», «перпендикуляр» утворені від латинського слова perpendicularis, що означає «прямовисний». Прямовисна лінія утворює прямі кути з будь-якою горизонтальною прямою (рис. 2.26). Це й стало підставою для того, аби будь-які прямі чи відрізки, які утворюють прямий кут, називати перпендикулярними. У зв'язку із цим часто замість виразу «*провести* перпендикуляр із точки до прямої» кажуть: «*опустити* перпендикуляр із точки на пряму» або «*поставити* перпендикуляр до прямої у певній точці» на ній, — навіть тоді, коли пряма не займає горизонтального положення (рис. 2.27).

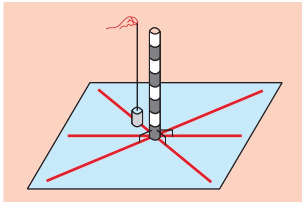


Рис. 2.26

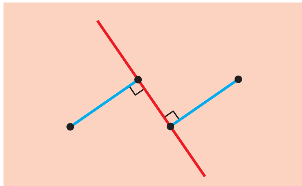


Рис. 2.27

З використанням поняття перпендикуляра уводиться поняття *відстані від точки до прямої*.

Означення.

Відстанню від точки до прямої **називається довжина перпендикуляра, опущеного із цієї точки на пряму.**

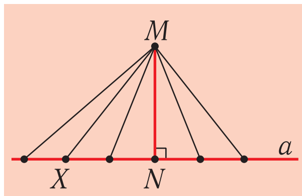


Рис. 2.28

Підставою саме для такого означення є те, що перпендикуляр MN до прямої a є найкоротшим з усіх відрізків MX, які сполучають точку A з точками X прямої a (рис. 2.28). Поки що у нас немає достатнього теоретичного фундаменту, аби довести це твердження. Ми доведемо його у наступному розділі.

Розв'язуємо разом

Задача.

Визначити кут між двома прямими, якщо сума трьох кутів, утворених при їхньому перетині, дорівнює 300°.

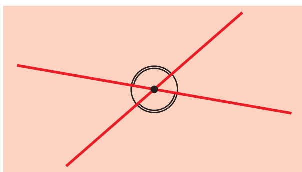


Рис. 2.29

Розв'язання. Як би ми не вибирали три із чотирьох кутів, утворених двома прямими, що перетинаються (рис. 2.29), два із них завжди будуть суміжними, а отже, в сумі дадуть 180°. Тоді на третій кут, за умовою цієї задачі, припадатиме

$$300° - 180° = 120°.$$

Це — тупий кут, а кут між двома прямими дорівнює величині гострого або прямого кута. Тому в цьому разі шуканий кут між прямими дорівнює $180° - 120° = 60°$.

Відповідь. 60°.

Вправи і задачі

123°. Позначте точку і за допомогою лінійки проведіть через неї дві довільні прямі. Потім за допомогою транспортира визначте кут між цими прямими.

124°. Накресліть за допомогою лінійки і транспортира дві прямі, кут між якими дорівнює: а) 30°; б) 60°; в) 90°.

125°. Один із кутів, що утворюється при перетині двох прямих, дорівнює 140°. Чому дорівнює кут між цими прямими?

126°. Жоден із кутів, утворених при перетині двох прямих, не є гострим. Чому дорівнює кут між цими прямими?

127°. Перерисуйте в зошит зображення точки P і прямої m, подані на рис. 2.30. Проведіть у кожному випадку за допомогою косинця перпендикуляр із точки P на пряму m. За допомогою лінійки у кожному випадку визначте відстань від точки P до прямої m.

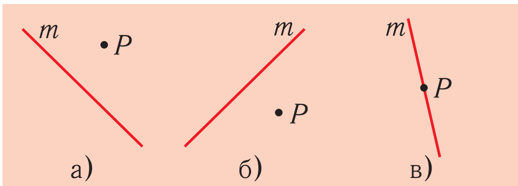


Рис. 2.30

128°. Проведіть пряму і за допомогою лінійки та косинця позначте дві які-небудь точки A і B, що знаходяться від прямої на відстанях відповідно 3 см і 2 см.

129°. Зобразіть за допомогою лінійки і косинця усі характерні випадки взаємного розміщення відрізка і променя, що є взаємно перпендикулярними.

130°. Зобразіть за допомогою лінійки і косинця усі характерні випадки взаємного розміщення двох променів, а також променя і прямої, які є взаємно перпендикулярними.

131. Визначте кут між двома прямими, якщо:

1) сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 100°;

2) сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 200°;

3) сума трьох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 250°;
4) сума трьох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 350°.

132. Визначте кут між двома прямими, якщо один із кутів, що утворилися при їхньому перетині, удвічі менший від іншого.

133. Визначте кут між двома прямими, якщо різниця двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, дорівнює 70°.

134. Визначте кут між двома прямими, якщо сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, учетверо менша від суми двох інших.

135. Визначте кут між двома прямими, якщо сума двох кутів, що утворилися при їхньому перетині, більша за суму двох інших на 140°.

136. На рис. 2.31 відображений спосіб перевірки за допомогою лінійки, чи є прямим найбільший кут у косинця (пунктиром зображене попереднє положення косинця). На якій геометричній властивості ґрунтується цей спосіб?

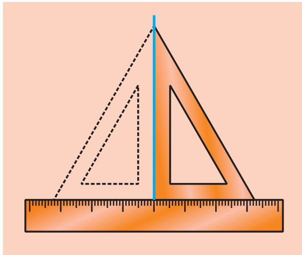


Рис. 2.31

137. На рис. 2.32 відображений спосіб перевірки за допомогою столярного кутника правильності обробки бруса. Як би ви пояснили цей спосіб? На якій геометричній властивості він ґрунтується?

Рис. 2.32

138. На рис. 2.33 відображений спосіб провішування перпендикулярних прямих на місцевості за допомогою екера (у перекладі з французької мови це слово (equerre) означає «кутник»). У найпростішому варіанті екер складається із хрестовини, що кріпиться на ніжці; на кінцях хрестовини вбиті штирки для візування. Як би ви пояснили спосіб використання екера?

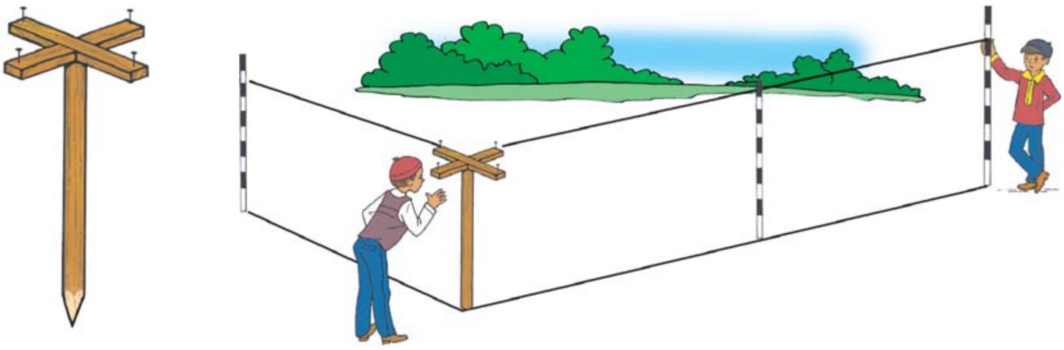


Рис. 2.33

139. Три прямі AB, CD і KM перетинаються в точці O і при цьому $AB \perp CD$, $\angle KOB = 30°$ (рис. 2.34). Визначте кути DOM і KOD.

140. На рис. 2.35 $CO \perp AB$, $DO \perp OF$. Доведіть, що тоді $\angle DOC = \angle FOB$.

141•. Визначте кут між прямими, якщо один із кутів, що утворився при їхньому перетині, у вісім разів менший від суми трьох решти кутів.

142•. На рис. 2.35 $\angle AOB = 180°$, $\angle DOC = \angle FOB$, $\angle AOD = \angle COF$. Доведіть, що тоді $CO \perp AB$, $DO \perp OF$.

143•. Три прямі AB, CD, KM перетинаються в точці O (див. рис. 2.34) і при цьому $\angle KOA = 125°$, $\angle COM = 145°$. Доведіть, що тоді $AB \perp CD$.

144•. Якого найбільшого і найменшого значення може набувати сума трьох із чотирьох кутів, утворених при перетині двох прямих?

145•. Через одну точку проведено чотири прямі. Скільки серед них може бути взаємно перпендикулярних?

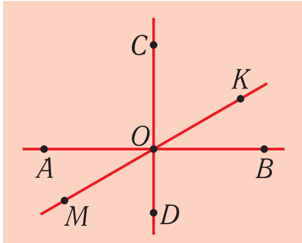


Рис. 2.34

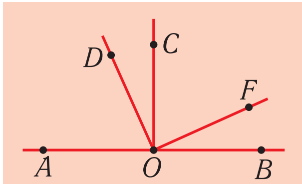


Рис. 2.35

§8. Паралельні прямі. Ознаки паралельності прямих

Уроки 16–19

Ви вже знаєте, що прямі на площині можуть перетинатися, а можуть і не перетинатися (цим площина суттєво відрізняється від сфери, де будь-які прямі завжди перетинаються). Прямі, які не перетинаються, називаються *паралельними*.

Для запису паралельності прямих застосовується знак ||. Вперше його увів англійський математик Вільям Отред (1575–1660). Наприклад, запис $a \parallel b$ читається так: «пряма a паралельна прямій b».

Дуже легко накреслити прямі, що перетинаються: одну пряму (позначимо її через a) проводимо довільно, потім беремо на ній якусь точку A, а поза нею якусь-небудь точку B і через точки A і B проводимо шукану пряму b (рис. 2.36). Прямі a і b перетинатимуться в точці A. Використовуючи транспортир, пряму b можна провести навіть під заданим кутом до прямої a

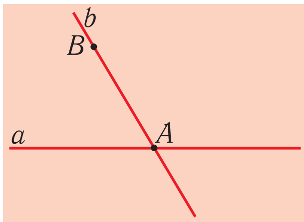


Рис. 2.36

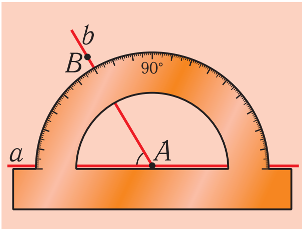


Рис. 2.37

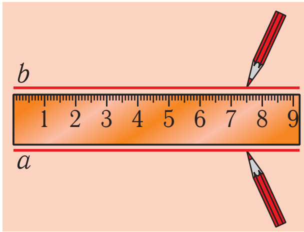


Рис. 2.38

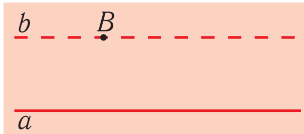


Рис. 2.39

(рис. 2.37): тоді точку B потрібно брати на промені AB, що утворює заданий кут з одним із променів прямої a.

Накреслити паралельні прямі можна за допомогою лінійки, використовуючи обидва її краї. Саме так на рис. 2.38 проведено паралельні прямі a і b. Однак якщо конкретизувати вимогу тим, що пряма b має проходити через задану точку B (рис. 2.39), то завдання суттєво ускладнюється. Креслярі вирішують його за допомогою лінійки і косинця або навіть двох однакових косинців, як показано на рис. 2.40 і 2.41.

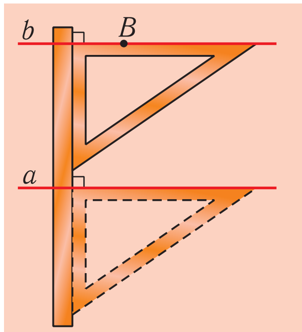


Рис. 2.40

Неважко помітити, що у першому із цих способів побудовані паралельні прямі фактично проведені перпендикулярно до деякої прямої (до лінійки), а в другому — утворюють рівні кути з деякою прямою (перемичкою косинця). Якщо зважити, що прямі кути теж рівні, то обидва способи зводяться до одного: паралельні прямі проводяться так, щоб утворювалися рівні кути з деякою січною прямою.

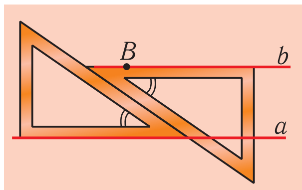


Рис. 2.41

Однак прямі a і b, які утворюють рівні кути із січною прямою c, можуть бути й не паралельними (рис. 2.42). Тому для паралельності прямих лише рівності таких кутів недостатньо. Потрібні уточнення щодо їхнього розміщення.

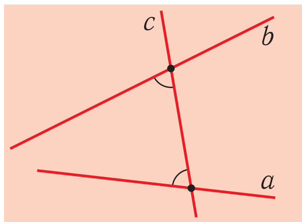


Рис. 2.42

Подивіться на рис. 2.43. На ньому дві прямі a і b перетнуті третьою прямою c. Для спрощення мови пряму c, яка перетинає прямі a і b у різних точках, називають *січною* цих прямих, або просто *січною*.

При цьому утворюються вісім нерозгорнутих кутів з вершинами у точках перетину A і B.

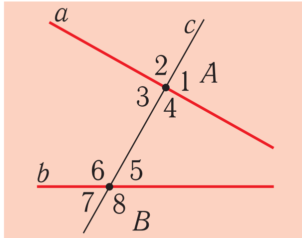


Рис. 2.43

Для окремих пар цих кутів, які якраз і дають змогу провести потрібне нам уточнення уведені спеціальні назви. А саме:

$\angle 3$ і $\angle 5$, а також $\angle 4$ і $\angle 6$ називаються *внутрішніми різносторонніми* кутами;

$\angle 3$ і $\angle 6$, а також $\angle 4$ і $\angle 5$ називаються *внутрішніми односторонніми* кутами;

$\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 4$ і $\angle 8$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$ називаються *відповідними* кутами.

Інколи виокремлюють ще *зовнішні різносторонні* (1 і 7 та 2 і 8) та *зовнішні односторонні* кути (1 і 8 та 2 і 7).

Зауваження стосовно назв. З рисунка 2.43 видно, що внутрішні різносторонні кути розміщені так, що одна пара їхніх сторін має спільну «внутрішню» частину січної (відрізок) AB, а інші сторони лежать *з різних боків* від січної c. Внутрішні односторонні кути розміщені так, що одна пара їхніх сторін теж має спільну «внутрішню» частину AB січної, однак інші сторони лежать уже *з одного боку* від січної c. Відповідні кути лежать з одного боку від січної c, а також і з одного боку від однієї з прямих a чи b.

Англійський математик **Вільям Отред** (1575–1660). Увів знак $\parallel$ для позначення паралельності прямих і знак $\angle$ для позначення кутів

Якщо ви тепер повернетеся до рис. 2.41, то легко збагнете, що паралельність побудованих на ньому прямих a і b забезпечується рівністю саме *внутрішніх різносторонніх* кутів, які утворюються при перетині цих прямих із перемичками косинців.

Це спостереження приводить нас до ознаки паралельності прямих. Залишається лише сформулювати її та довести.

Ознаками у геометрії називають теореми про такі умови щодо фігур, виконання яких є достатнім для певних фундаментальних геометричних властивостей, наприклад, паралельності, перпендикулярності, рівності тощо.

Паралельні та січні на мосту

Теорема
(ознака паралельності прямих).

Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.

Доведення. Цю теорему можна довести способом, який у своїх головних рисах споріднений з тим, яким у попередньому параграфі доведено теорему про єдиність перпендикулярної прямої. Спорідненість полягає у тому, що, по-перше, застосується міркування «від супротивного», а по-друге — проводиться уявне суміщення двох півплощин шляхом повороту.

Нехай при перетині двох прямих a і b січною c утворюються рівні внутрішні різносторонні кути з вершинами A і B, які для спрощення позначимо цифрами 1 і 2 (рис. 2.44). Зрозуміло, що тоді суміжні з ними внутрішні різносторонні кути 3, 4 теж рівні. Потрібно довести, що за цієї умови прямі a і b — паралельні.

Припустимо супротивне, тобто, що прямі a і b перетинаються у деякій точці C (рис. 2.45).

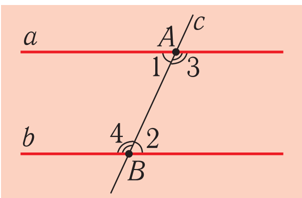


Рис. 2.44

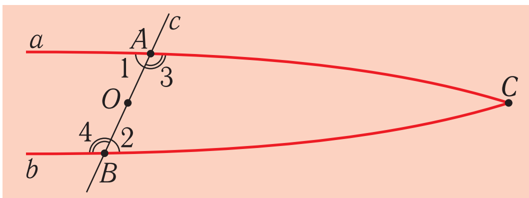


Рис. 2.45

Зауваження. Незважаючи на те, що таке припущення з першого погляду може здатися абсолютно абсурдним, насправді воно має цілком реальні підстави. Прямі лінії безмежні, і те, що видається неможливим на малих відстанях, цілком може здійснюватися у великих масштабах. Якби на земній поверхні прокласти широку алею між двома меридіанами від екватора до полюса (рис. 2.46), то, рухаючись нею на автомобілі, ви почали б помічати звуження лише через декілька діб. З літака його можна помітити через кілька годин, тимчасом як з орбіти навколоземної космічної станції це було б видно одразу.

Отже, реальні підстави для зробленого припущення існують. Проте логічний аналіз такої можливості приведе нас до суперечності з прийнятими аксіомами. Це свідчитиме про те, що в геометрії на площині, яку ми розвиваємо, таке неможливо.

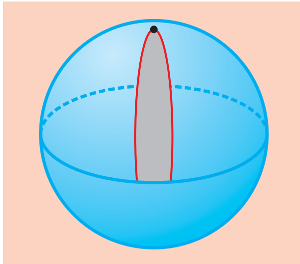


Рис. 2.46

Уявімо собі, що ту півплощину з граничною прямою c, у якій міститься точка C, повернуто відносно середини O відрізка AB до суміщення з іншою півплощиною (рис. 2.47). При цьому точка A переміститься у точку B, точка B — у точку A, кут 2 накладеться на рівний йому кут 1, а кут 3 — на рівний йому кут 4. Позначимо через C' точку, в яку переміститься точка C.

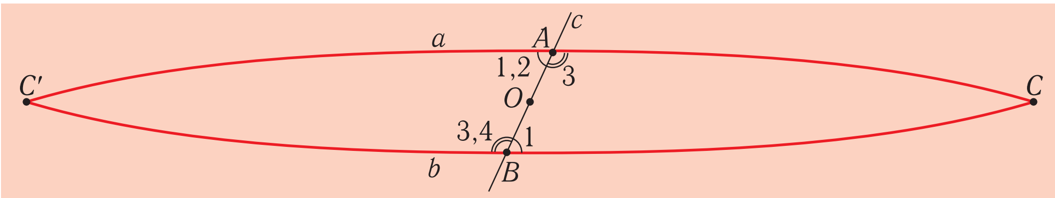


Рис. 2.47

Із того, що кути 1 і 3 — суміжні, випливає, що кут $C'AC$ — розгорнутий, тобто що точки C', A, C лежать на одній прямій. Те ж саме стосується й точок C', B, C. Виходить, що через точки C і C' проходить дві прямі. Ці прямі не можуть збігатися, оскільки пряма c перетинає їх у різних точках A і B. Дістали суперечність з аксіомою про проведення прямої, за якою через дві точки C і C' можна провести лише одну пряму. Це свідчить про те, що зроблене припущення про перетин прямих a і b — хибне, а тому ці прямі — паралельні. Теорему доведено.

З доведеної теореми можна вивести декілька очевидних наслідків, кожен з яких теж є окремою ознакою паралельності прямих.

Наслідок 1.

Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.

Доведення. Якщо прямі a і b перпендикулярні до січної c (рис. 2.48), то внутрішні різносторонні кути 1 і 2 — прямі, а тому рівні. Отже, відповідно до доведеної теореми, прямі a і b — паралельні.

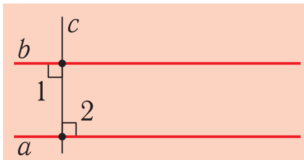


Рис. 2.48

Варто зазначити, що саме внаслідок того, що довгі краї лінійки перпендикулярні до бічних країв, проведені уздовж них прямі — паралельні (див. рис. 2.38).

Наслідок 2.

Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі паралельні.

Доведення. Нехай при перетині прямих a і b січною c відповідні кути рівні, наприклад, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 2.49). Кут 1 рівний куту 3, оскільки ці кути вертикальні. Отже, $\angle 3 = \angle 2$. Але ці кути є внутрішніми різносторонніми, а тому, за доведеною теоремою, прямі a і b — паралельні.

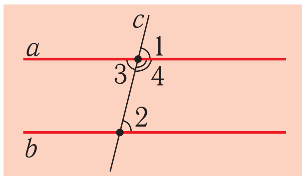


Рис. 2.49

Наслідок 3.

Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі — паралельні.

Доведення. Нехай при перетині прямих a і b січною c сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, наприклад, $\angle 4 + \angle 2 = 180°$ (див.

рис. 2.49). Оскільки сума суміжних кутів 4 і 3 теж дорівнює 180°, то $\angle 2 = \angle 3$. Знову прийшли до рівності внутрішніх різносторонніх кутів. Отже, прямі a і b — паралельні.

Поняття паралельності прямих природним чином поширюється на відрізки та промені. Наприклад, два відрізки називаються *паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Для позначення паралельності відрізків і променів застосовується той самий знак $\parallel$, що й для прямих. Наприклад: $AB \parallel CD$, $m \parallel n$, $MN \parallel a$ (рис. 2.50, а–в).

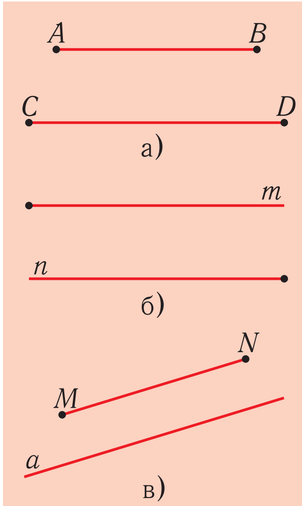


Рис. 2.50

Про доведення методом «від супротивного»

При доведенні ознаки паралельності прямих був застосований особливий спосіб міркувань, який називається доведенням «від супротивного» (у попередньому параграфі так само було доведено теорему про єдиність перпендикулярної прямої). Цей спосіб доведення надзвичайно поширений у математиці. Тому розглянемо його докладніше.

Доведення «від супротивного» полягає у тому, що спочатку робиться припущення, супротивне тому, яке потрібно довести, а потім на цій підставі шляхом міркувань виводиться наслідок, який суперечить або самому зробленому припущенню, або певній аксіомі, або вже доведеній раніше теоремі. Через цю суперечність зроблене припущення відкидається як хибне і цим установлюється істинність твердження, яке потрібно було довести.

Погляньмо ще раз, як усе це було втілено при доведенні ознаки паралельності прямих. Потрібно було довести, що дві прямі a і b, які утворюють із січною c рівні внутрішні різносторонні кути, паралельні. Спочатку ми припустили, що прямі a і b не паралельні, тобто перетинаються. Потім звідси вивели, що тоді вони мусять мати ще одну точку перетину. А оскільки такий висновок уже суперечить аксіомі про проведення прямої, то звідси було зроблено єдиний логічно можливий висновок про те, що зроблене припущення неправомірне.

Отже, прямі a і b насправді не можуть перетинатися, тобто є паралельними, що й треба було довести.

Що є логічною підставою для такого способу міркувань? — Те, що із двох взаємно супротивних тверджень істинним є тільки одне. Тому якщо одне з них веде до якоїсь суперечності, то істинним є інше, оскільки істинне твердження до суперечності вести не може.

Інколи учні, коли ще тільки-но починають застосовувати спосіб доведення «від супротивного», на початку доведення неправильно роблять припущення про істинність того твердження, яке доводять (а не супротивного, як потрібно). Потім на підставі цього приходять до висновку про істинність якогось іншого, уже доведеного твердження (чи аксіоми) і вважають, що доведення завершене. Однак у такий спосіб потрібного твердження так і не буде доведено. Буде доведено тільки те, що його істинність *не суперечить* раніше доведеному твердженню. А не суперечити — не означає бути *необхідним*. Наприклад, мати високий зріст — не суперечить тому, щоб добре грати у баскетбол. Однак це не є необхідним: окремі баскетболісти навіть світового рівня мали невисокий зріст.

Так само хибним є спосіб міркувань, коли робиться припущення про істинність твердження, яке потрібно довести, а через кілька логічних кроків одержується висновок про... істинність того самого твердження, і на підставі цього теорема вважається доведеною. Насправді тут уже не буде доведено навіть того, що істинність потрібного твердження не суперечить істинності якогось іншого твердження: вона не суперечить істинності... того самого твердження. Такий помилковий спосіб міркувань називається *хибним логічним колом*.

Розв'язуємо разом

Задача.

Довести методом «від супротивного», що дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, — паралельні.

Розв'язання. Один із можливих способів для доведення цього твердження абсолютно аналогічний тому, яким вище доведена ознака паралельності.

Дуже радимо читачеві провести це доведення самостійно.

Інший спосіб ґрунтується на теоремі про єдиність перпендикулярної прямої. Припустимо, що дві прямі a і b, які перпендикулярні до якоїсь прямої c (рис. 2.51), перетинаються у деякій точці C. Тоді через точку C проходитиме дві прямі a і b, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої c. Це суперечить теоремі про єдиність перпендикулярної прямої. Отже, зроблене припущення хибне, а тому прямі a і b — паралельні, що й треба було довести.

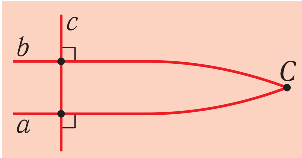


Рис. 2.51

Вправи і задачі

146°. На рис. 2.52 зображено декілька пар паралельних прямих. Назвіть і запишіть їх.

147°. На рис. 2.53 зображено декілька пар паралельних фігур. Назвіть і запишіть їх.

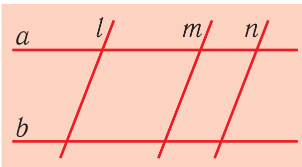


Рис. 2.52

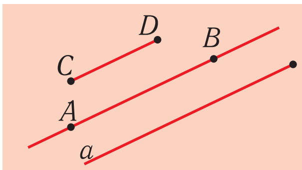


Рис. 2.53

148°. На рис. 2.54, а)–в) прямі a і b перетинає січна c. У кожному випадку назвіть кути 1 і 2.

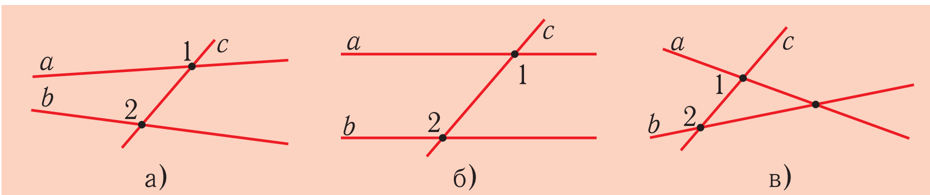


Рис. 2.54

149°. На рис. 2.55, а)–в) прямі a і b перетинає січна c. У кожному випадку визначте величини відповідних кутів. У якому випадку про прямі a і b можна стверджувати, що вони паралельні?

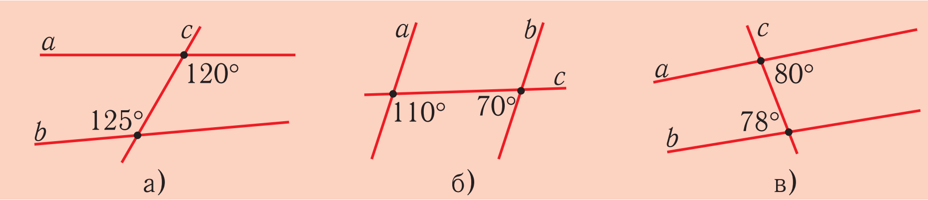


Рис. 2.55

150°. На рис. 2.56, а)–в) позначені величини двох кутів, що утворилися при перетині прямих a і b січною c. Чи можемо ми на підставі цих даних стверджувати, що прямі a і b паралельні?

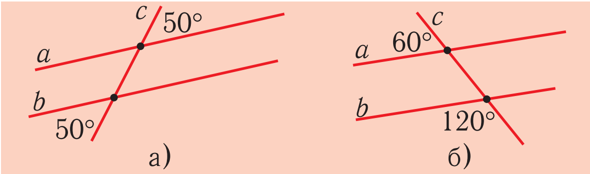


Рис. 2.56

151°. На рис. 2.57, а)–б) прямі a і b перетинає січна c. Перерисуйте ці рисунки у зошит і на кожному позначте на прямій b такі точки M, N, L, щоб кути PAB і MBA були внутрішніми різносторонніми, кути PAB і NBA — внутрішніми односторонніми, а кути PAB і LBQ — відповідними. По який бік від січної c у кожному випадку розміщуватимуться точки M, N і L — по той самий, що й точка P, чи по інший?

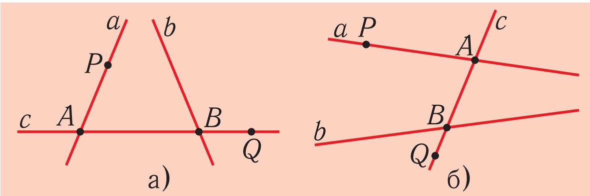


Рис. 2.57

152. На рис. 2.58 відображений спосіб проведення за допомогою транспортира прямої b, що проходить через задану точку B і паралельна заданій прямій a. Як би ви пояснили цей спосіб?

153. На рис. 2.59 відображені два способи проведення за допомогою лінійки і косинця прямої b, що проходить через задану точку B і паралельна заданій прямій a. Як би ви пояснили ці способи?

154. На рис. 2.60 відображені два способи проведення за допомогою двох однакових косинців прямої b, що проходить через задану точку B і паралельна заданій прямій a. Як би ви пояснили ці способи? Чи обов'язково косинці мають бути однаковими?

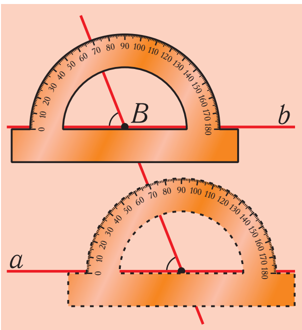


Рис. 2.58

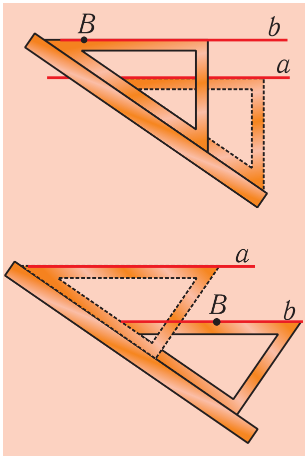


Рис. 2.59

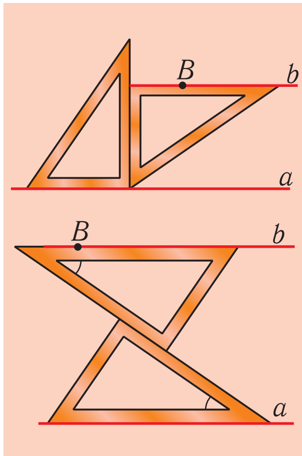


Рис. 2.60

155. На рис. 2.61 відображений спосіб побудови паралельних прямих на креслярській дошці. Довга креслярська лінійка кріпиться одним кінцем на шарнірі до короткої рейки, яка може ковзати вздовж одного з країв креслярської дошки. Кут взаємного нахилу довгої лінійки і короткої рейки можна фіксувати за допомогою гвинта. Тоді при різних положеннях рейки на краю креслярської дошки довга лінійка визначатиме паралельні прямі. Як ви це можете пояснити?

156. На рис. 2.62 відображений спосіб побудови паралельних прямих за допомогою малки, якою користуються у столярній справі. Як ви можете пояснити цей спосіб? *Малка* складається із двох планок, кінці яких скріплені на шарнірі за допомогою гвинта; планки можна фіксувати під будь-яким кутом одна до одної.

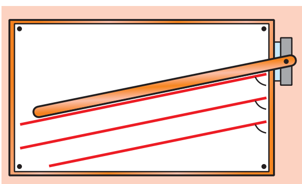


Рис. 2.61

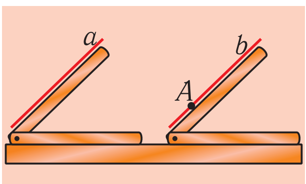


Рис. 2.62

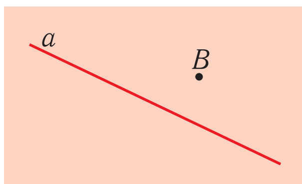


Рис. 2.63

157. Нарисуйте в зошиті таке розміщення точки B і прямої a, яке показано на рис. 2.63, а потім за допомогою наявних у вас інструментів проведіть через точку B пряму b, паралельну прямій a. Скільки різних способів побудови ви можете запропонувати? Поясніть їх.

158. Доведіть, що коли при перетині двох прямих січною утворені внутрішні різносторонні кути рівні, то рівні й відповідні кути, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

159. На рис. 2.64 $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що прямі a і b паралельні.

160. На рис. 2.64 $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Доведіть, що прямі a і b паралельні.

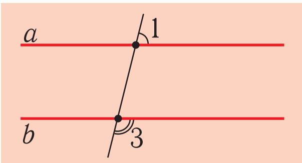


Рис. 2.64

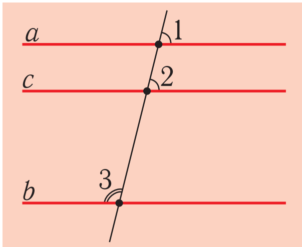


Рис. 2.65

161•. На рис. 2.65 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$. Доведіть, що прямі a і b паралельні.

162•. Кут між прямими a і b дорівнює куту між прямими b і c. Чи можна стверджувати, що прямі a і c паралельні?

163•. Чотири кути, утворені при перетині двох прямих a і b січною, дорівнюють по 50°, решта чотири — по 130°. Чи можна стверджувати, що прямі a і b паралельні?

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

«Начала» Евкліда — перший підручник з геометрії

Історія знає чимало прикладів, коли видатні твори цілковито затьмарювали славу своїх творців. Одним із найвидатніших таких творів став підручник з геометрії під назвою «Начала» (грецькою «Стохея», латинською «Елементос») давньогрецького математика Евкліда (бл. 365 – бл. 300 рр. до н.е.). Ця дивовижна книга нарівні зі священними письменами пройшла крізь випробування багатьох століть. Водночас про самого Евкліда достеменно відомо лише декілька фактів.

Відомо, зокрема, що Евклід був родом з Афін і що там він ще юнаком навчався у самого Платона — одного з найславетніших античних філософів. Можливо, що саме Платон заронив у нього ідею про систематизацію всього запасу геометричних знань та послідовного виведення їх із небагатьох основних положень. Пізніше ці положення учень Платона Аристотель назвав *аксіомами*.

Антоніо Чіфронді (1655–1730). **Евклід**

Останню третину свого життя Евклід прожив у єгипетській Александрії. Тому його називали ще Евклідом Александрійським. Це місто було столицею династії Птолемеїв. Родоначальник цієї династії Птолемей І Сотер був одним із сподвижників Александра Македонського, а коли той помер, то на його честь заснував місто, в якому створив науковий центр — Мусейон (Будинок Муз). Сюди скликали найславетніших учених з усіх світів і за рахунок царської казни надавали їм повне утримання та створювали умови для наукової роботи. Серед запрошених був і Евклід. Тут він започаткував математичну школу, гучна слава якої згодом поширилася на весь елліністичний світ. Можливо, що саме для слухачів цієї школи в першу чергу й призначалися Евклідові «Начала».

Евклід презентує Птолемею І Сотеру свої «Начала» геометрії

Як засвідчує александрійський математик Папп, який жив через шість століть після Евкліда, сам Евклід був людиною добросердечною й скромною, але водночас принциповою і дуже незалежною. Побутувала легенда, яка яскраво засвідчує це. Нібито якось сам цар Птолемей, тільки-но ознайомившись з «Началами», прикликав до себе Евкліда й запитав: «Чи немає більш коротшого шляху до опанування геометрії, ніж той, що передбачають твої «Начала»? — На це Евклід без жодного страху відповів: «У геометрії немає царських доріг».

Аби до кінця зрозуміти цю мудру відповідь, потрібно знати, що у давнину в Єгипті, а також і в деяких інших країнах, справді існували окремі дороги, їздити якими мав право лише цар і його кур'єри. Отже, Евклід недвозначно натякав володарю на те, що у науку шлях лише один: як для царів, так і для простолюду.

В іншій легенді розкривається ставлення Евкліда до мирських розкошів. Якось один з юнаків, опанувавши декілька теорем з «Начал», запитав у Евкліда: «А що я зароблю, якщо усе вивчу?». На що Евклід покликав раба й зневажливо сказав: «Дай йому три оболи (тобто три найдрібніші тогочасні грецькі монети), бідолаха хоче заробити на навчанні».

Ось це й усе, що відомо про Евкліда. Один із найобізнаніших коментаторів його «Начал» Прокл Діодох, який жив у V ст. н.е., тобто через вісім століть після Евкліда, і тривалий час провів в Александрії, вже навіть не знав, де й коли народився славетний учений.

Неможливо переоцінити талант і звитягу автора «Начал». У нас час існують сотні й тисячі підручників, десятки тисяч журнальних публікацій, а учені-теоретики до дрібниць проаналізували обґрунтованість кожної умови й висновку. І все ж, незважаючи на це, по-справжньому хороші навчальні книги з'являються нечасто. А що вже казати про епоху Евкліда, коли користуватися можна було лише декількома рукописами! Майже весь зміст потрібно було продумувати самому — аксіоми, послідовність викладу, логічну канву кожної теми, доведення кожної теореми й обґрунтування кожної побудови. З усім цим Евклід упорався настільки успішно, що його праця служила основним підручником з геометрії понад 2000 років. Вона й досі залишається в арсеналі освітніх книг і є класичним взірцем для викладу наукової теорії на аксіоматичній основі. Більшість теорем, що розглядаються у цьому підручнику, теж свого часу були продумані й записані Евклідом у його «Началах».

«Начала» Евкліда видавалися дуже багато разів, у різні часи, у різних країнах, різними мовами й різними способами (від прадавнього ручного переписування на папірусі та пергаменті до сучасного офсетного й лазерного друку). Проте лише окремі видання були повними. Найчастіше ж вони пристосовувалися до викладання на елементарному рівні, а тому суттєво

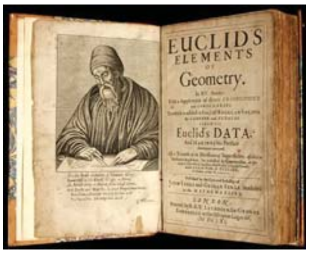
Фронтиспис рукописного латинського перекладу «Начал» Евкліда, виконаного орієнтовно з 1309 по 1316 рр. з арабського рукопису. Тут ми бачимо прообраз численних пізніших зображень музи Геометрії. Примітно, що вона навчає геометрії ченців. Для свого часу це був доволі сміливий відхід від канонів і забобонів.

Перша сторінка 1-го друкованого латинського перекладу (з грецької) «Начал» Евкліда (Венеція, 1482 р.). На цій сторінці даються означення основних геометричних фігур, зображених на рисунках праворуч.

Вгорі: репродукції двох з найвідоміших живописних творів на тему «Сім вільних мистецтв» — **Джованні дель Понте** (1435 р.) і **Ло Шеггія (Джованні ді Сер Джованні)** (1460 р.). Як правило, у центрі таких композицій завжди була Астрономія, а поруч із нею — Геометрія зі своїми неодмінними атрибутами — циркулем і кутником.

Внизу: фрагменти цих картин за участю Геометрії. І в першому, і в другому випадках біля Геометрії герой цього історичного нарису — Піфагор.

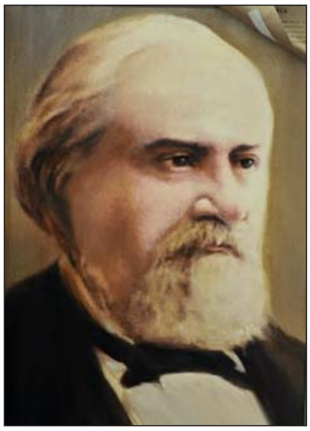
Видання «Начал» Евкліда італійською (1545 р.) і французькою (1573 р.) мовами.



Видання «Начал» Евкліда англійською мовою 1661 і 1726 рр.

скорочувалися, інколи доповнювалися коментарями та додатками, не включеними Евклідом або розробленими уже після нього. Однією з найкращих таких переробок Евклідових «Начал» були свого часу «Начала усіх математичних наук» німецького математика та філософа Кристіана Вольфа (1679 –1754). Ця книга вийшла у 1710 р. Для нас вона цікава тим, що послужила за основу для курсу математики Феофана Прокоповича (1681–1736), який той читав у Києво-Могилянській академії.

У 2-й половині XIX ст. в Україні було здійснено ґрунтовне видання «Начал» Евкліда з численними додатками й коментарями Михайла Єгоровича Ващенка-Захарченка (1825 –1912), професора Київського університету св. Володимира. Книга була видрукувана видавництвом університету у 1880 р. і мала значний вплив на вітчизняну науку й освіту. Вона й досі залишається одним із кращих досліджень та коментарів Евклідових «Начал», спрямованим на потреби практичного викладання геометрії у школі.



М.Є. Ващенко-Захарченко

НАЧАЛА ЕВКЛИДА

СЪ ПОЯСНИТЕЛЬНЫМЪ ВВЕДЕНІЕМЪ

И

ТОЛКОВАНІЯМИ.

М. Е. Ващенко-Захарченко.

КІЕВЪ.

1880.

Титульна сторінка з перекладу Евклідових «Начал» М.Є. Ващенка-Захарченка. За епіграф, написаний тут старогрецькою мовою, взяті слова Платона: «Ніхто, не обізнаний з геометрією, не заходь під дах мій».

§9. Аксіома про паралельні прямі. Властивості паралельних прямих

Уроки 20–23

Як з'ясувалося у попередньому параграфі, існують різні способи для побудови паралельних прямих. У зв'язку з цим виникає природне запитання: а чи не залежить результат побудови від вибраного способу?

Припустимо, що через задану точку B ви проводите пряму b, паралельну прямій a. Нехай перший раз ви провели пряму b' так, щоб вона утворювала рівні гострі внутрішні різносторонні кути з деякою січною c (рис. 2.66, а), а другий раз — пряму b'', яка утворює прямі кути з прямою c, перпендикулярною до прямої a (рис. 2.66, б). Чи збігатимуться проведені паралельні прямі b' і b''?

Можливо, ви скажете, що тут і доводити нічого, мовляв, і так очевидно, що збігатимуться. — Тоді зауважте, що і єдиність перпендикулярної прямої b, проведеної через точку B до прямої a (рис. 2.67, а), може здаватися «очевидною», допоки не зауважити, що на сфері може існувати не одна така пряма (рис. 2.67, б). Тому потрібне було доведення, яке незаперечно виключає таку можливість для площини.

Скористатися сферою для аналогічного прикладу з паралельними прямими ми не можемо, оскільки на сфері взагалі відсутні паралельні прямі. Однак існує поверхня, яка дає змогу це зробити. Вона називається *псевдосферою* (тобто, несправжньою сферою), а за формою нагадує розтруб духових інструментів (рис. 2.68). Її відкрив у 2-й половині XIX ст. італійський математик Евженіо Бельтрамі (1835–1900). На псевдосфері через задану точку B можна провести скільки завгодно ліній, що відіграють роль прямих, які не перетинають даної лінії a (рис. 2.69). Цим була поставлена крапка у давній історії з доведенням теореми про єдиність паралельної прямої.

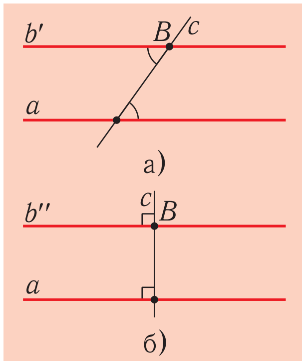


Рис. 2.66

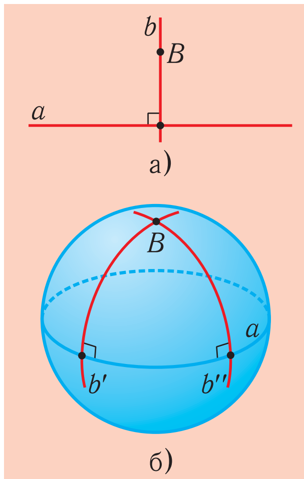


Рис. 2.67

Рис. 2.68

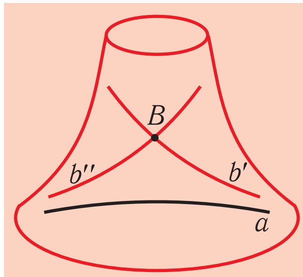
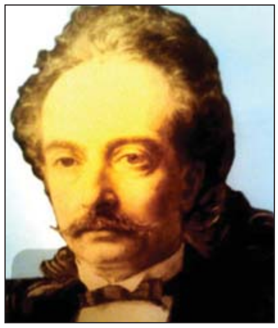


Рис. 2.69



Е. Бельтрамі

Ще античні математики, за аналогією з теоремою про єдиність перпендикулярної прямої, намагалися довести й теорему про єдиність паралельної прямої. Однак попри усі зусилля їм цього зробити не вдавалося. І тому у III ст. до н. е. Евклід у своєму підручнику з геометрії включив її до переліку аксіом.

Проте сумніви залишалися, і ще понад дві тисячі років ця проблема продовжувала непокоїти вчених. У першій половині XIX ст. троє видатних учених — німецький математик Карл Фрідріх Ґаусс (1777–1855), угорський математик Янош Больяї (1802–1860) і російський математик Микола Іванович Лобачевський (1792–1856) незалежно один від одного і різними

К.Ф. Ґаусс

Я. Больяї

М.І. Лобачевський

способами фактично довели, що припущення «від супротивного» тут не веде до логічної суперечності, а тому можлива така геометрія, в якій аксіома про єдиність паралельної не виконується. Однак лише Бельтрамі знайшов поверхню, на якій здійснюється така геометрія. Це вже незаперечно довело, що довести єдиність паралельної прямої як теорему неможливо: Евклід був правий, зарахувавши її до аксіом.

Отже, у геометрії на площині приймається така аксіома.

Аксіома про паралельні прямі.

Через точку поза прямою можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

На рис. 2.70 пряма b — єдина, що проходить через точку B і паралельна прямій a.

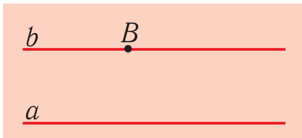


Рис. 2.70

Розглянемо два важливі безпосередні наслідки з аксіоми про паралельні прямі.

Перший з них часто використовують як ще одну ознаку паралельності. Його називають також *теоремою про перехід* (або *транзитивність*) *паралельності* (латинське transitus — дослівно «перехід»). У цій теоремі йдеться про своєрідний «перехід» властивості паралельності з двох пар прямих на третю пару.

Теорема
(про перехід паралельності).

Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою.

Доведення. Нехай у площині маємо три прямі a, b, c і при цьому $a \parallel c$ і $b \parallel c$ (рис. 2.71). Потрібно довести, що тоді $a \parallel b$.

Рис. 2.71

Припустимо, що прямі a і b не паралельні, тобто перетинаються в деякій точці C. Тоді через точку C проходитиме дві прямі a і b, кожна з яких паралельна прямій c. А це суперечить аксіомі про паралельні прямі. Тому зроблене припущення неправомірне. Отже, $a \parallel b$, що й треба було довести.

Другий наслідок з аксіоми про паралельні прямі пов'язаний з кутами, які утворюються при перетині паралельних прямих січною.

Ви вже знаєте, що, за ознакою паралельності, коли дві прямі a і b утворюють рівні внутрішні різносторонні кути з деякою січною c, то вони паралельні (рис. 2.72). У зв'язку з цим виникає запитання: а якщо для цих паралельних прямих a і b провести іншу січну m, то чи будуть утворені при цьому внутрішні різносторонні кути теж рівними між собою?

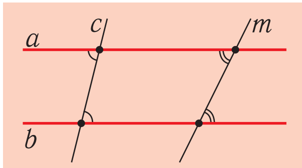


Рис. 2.72

Аналогічні запитання можна поставити й стосовно відповідних та внутрішніх односторонніх кутів.

На всі ці запитання відповідь ствердна, однак, на відміну від ознак паралельності, доведення цих властивостей неможливо провести без посилання на аксіому про паралельні прямі.

Теорема

(про кути, утворені паралельними прямими із січною).

Внутрішні різносторонні та відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює **180°.**

Доведення. Нехай прямі a і b — паралельні, m — довільна січна, M — точка перетину січної m з прямою a (рис. 2.73). Доведемо спочатку, що рівними є внутрішні різносторонні кути 1 і 2.

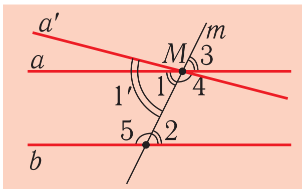


Рис. 2.73

Припустимо, що ці кути не рівні. Проведемо тоді через точку M пряму a' так, щоб кут 1′, який разом з кутом 2 утворюватиме пару внутрішніх різносторонніх кутів, дорівнював куту 2. Тоді, за ознакою паралельності, прямі a, a' будуть паралельними. Виходить, що через точку M проходитиме дві прямі

a і a', паралельні прямій b. Прийшли до суперечності з аксіомою про паралельні прямі. Отже, зроблене припущення неправомірне. Тому внутрішні різносторонні кути 1 і 2 рівні між собою. Перше твердження теореми доведено.

Доведемо, далі, що рівними є, наприклад, відповідні кути 2 і 3. Оскільки $\angle 3 = \angle 1$ (ці кути вертикальні), а за щойно доведеним, $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 3 = \angle 2$, що й треба було довести.

Розглянемо, нарешті, внутрішні односторонні кути, наприклад, 4 і 2. Оскільки кути 1 і 4 — суміжні, то їхня сума $\angle 1 + \angle 4 = 180°$. Як уже доведено, $\angle 1 = \angle 2$. Отже, сума $\angle 4 + \angle 2$ теж дорівнює $180°$. Теорему доведено повністю.

Дві паралельні та дві січні — і ви вже маєте оригінальний декор для інтер'єру

Наслідок 1.

Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до січної, то й інша пряма теж перпендикулярна до цієї січної.

Доведення. Нехай прямі a і b паралельні, а січна c перпендикулярна до прямої a (рис. 2.74). Тоді $\angle 1 = 90°$. При перетині паралельних прямих січною утворені внутрішні різносторонні кути рівні. Тому $\angle 2 = \angle 1 = 90°$. Отже, $c \perp b$, що й треба було довести.

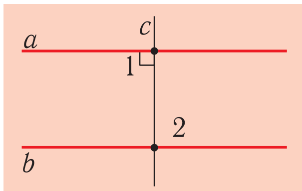


Рис. 2.74

Наслідок 2.

Якщо одна з двох прямих перпендикулярна до січної, а інша — не перпендикулярна до неї (похила), то ці прямі перетинаються.

Справді, нехай пряма a перпендикулярна до січної c, а пряма b не перпендикулярна до неї (рис. 2.75).

Якби прямі a і b не перетиналися, тобто були паралельними, то, за наслідком 1, пряма b теж була б перпендикулярною до m. Оскільки це не так, то прямі a і b перетинаються, що й треба було довести.

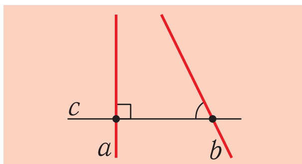


Рис. 2.75

Прямі та обернені теореми

Теорема про кути, утворені паралельними прямими із січною, дає нам привід поговорити про прямі й обернені теореми.

У формулюванні кожної теореми чітко виокремлюються дві частини. У першій частині йдеться про те, що дано, тобто які фігури і відношення між ними розглядаються. У другій частині вказується на те, що потрібно довести, тобто які властивості виводяться з того, що дано. Першу частину теореми називають її *умовою*, другу — *висновком*.

Відповідно до цього кожну теорему можна символічно записати у формі: «якщо A, то B» або «з A випливає B», де A коротко позначає умову теореми, а B — висновок.

У математиці кожен факт досліджується максимально всебічно. Тому після доведення кожної теореми, яка має форму «з A випливає B», як правило ставиться питання про те, чи справджується висновок B лише за умови A, а чи він може справджуватися й за інших умов. Якщо висновок B справджується лише за умови A, то це означає, що з B випливає A. Аби це показати, потрібно довести *обернену* теорему, в якій умовою є висновок B, а висновком — умова A початкової (*прямої*) теореми.

Відповідно до цього, якщо пряма теорема має форму «якщо A, то B» або «з A випливає B», то обернена теорема має форму: «якщо B, то A» або «з B випливає A».

Наприклад, оберненою до ознаки паралельності прямих: «Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні» є властивість паралельних: «Якщо прямі паралельні, то при перетині їх січною внутрішні різносторонні кути рівні».

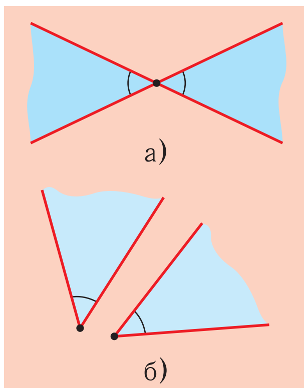


Рис. 2.76

Найчастіше у шкільному курсі геометрії істинними є одночасно і пряма, і обернена теореми. Однак є й винятки. Візьмемо, наприклад, теорему про вертикальні кути: «Якщо кути вертикальні, то вони рівні» (рис. 2.76, а). Оберненою до неї була б теорема: «Якщо кути рівні, то вони вертикальні». Звісно, це твердження хибне, оскільки рівні кути навіть не обов'язково мають спільну вершину (рис. 2.76, б).

Цей приклад показує, що з істинності прямої теореми ще не можна автоматично вивести істинність оберненої.

Доведення прямої й оберненої теорем можуть навіть ґрунтуватися на різному арсеналі залучених фактів. Наприклад, доведені у попередньому параграфі ознаки паралельності прямих не потребували посилання на аксіому про паралельні прямі, тимчасом, як доведення обернених до них властивостей паралельних прямих уже неможливе без цієї аксіоми.

Отже, обернена теорема потребує окремого доведення!

Розв’язуємо разом

Задача.

Довести, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й іншу.

Розв’язання. Нехай прямі a і b — паралельні, а пряма m перетинає пряму a у деякій точці M (рис. 2.77). Якби пряма m не перетинала прямої b, тобто була паралельною їй, то через точку M проходило б дві прямі a і m, які паралельні прямій b, що суперечить аксіомі про паралельні прямі. Отже, пряма m перетинає пряму b, що й треба було довести.

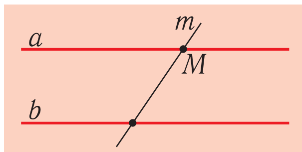


Рис. 2.77

Вправи і задачі

164°. Використовуючи обидві сторони лінійки, проведіть дві паралельні прямі, а потім — деяку січну. За допомогою вимірювання транспортиром переконайтесь, що утворені при цьому відповідні та внутрішні різносторонні кути рівні.

165°. Використовуючи обидві сторони лінійки, проведіть дві паралельні прямі, а потім за допомогою косинця — січну, перпендикулярну до однієї з них. За допомогою транспортира переконайтесь, що проведена січна перпендикулярна й до іншої з паралельних прямих.

166°. На рис. 2.78 прямі a і b паралельні, c — січна. Чи рівні кути:
а) $\angle 1$ і $\angle 5$; б) $\angle 4$ і $\angle 6$; в) $\angle 1$ і $\angle 7$; г) $\angle 2$ і $\angle 8$?

167°. На рис. 2.79 прямі a і b паралельні, c — січна, $\angle 1 = 50°$. Визначте величини кутів 2 – 8.

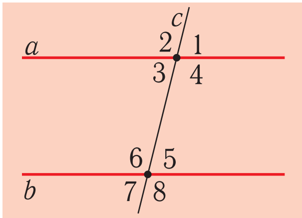


Рис. 2.78

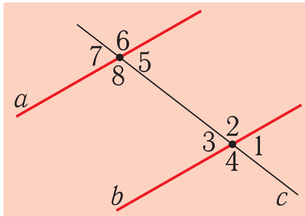


Рис. 2.79

168°. Сума двох внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 130°. Визначте ці кути.

169°. Сума двох відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 130°. Визначте ці кути.

170°. Січна перетинає дві паралельні прямі. Чи можуть обидва утворені внутрішні односторонні кути бути гострими? А — тупими? А — негострими й нетупими?

171°. За даними рис. 2.80, а) – б) визначте величини кутів x і y.

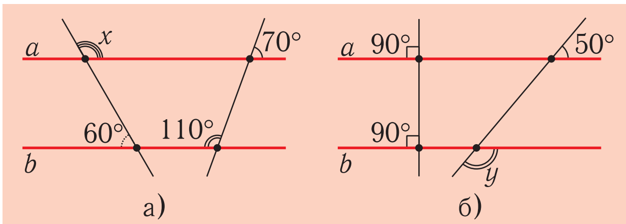


Рис. 2.80

172. На рис. 2.81 $a \perp c$, $b \perp c$. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

173. На рис. 2.82 $a \perp c$, $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $b \perp c$.

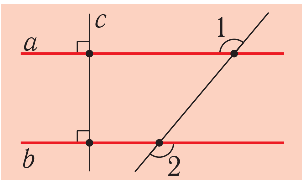


Рис. 2.81

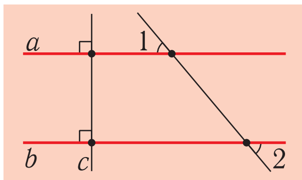


Рис. 2.82

174. На рис. 2.83, а) – б) $\angle 1 = \angle 2$. Доведіть, що $\angle 3 + \angle 4 = 180°$. Сформулюйте обернені твердження. Чи істинні вони?

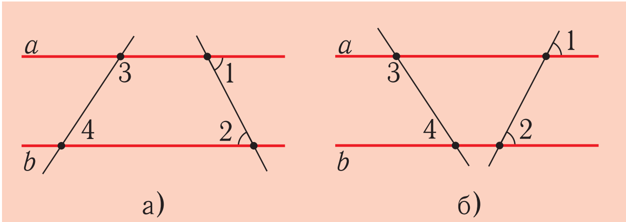


Рис. 2.83

175. За рис. 2.84, а) – б) визначте кути x, y.

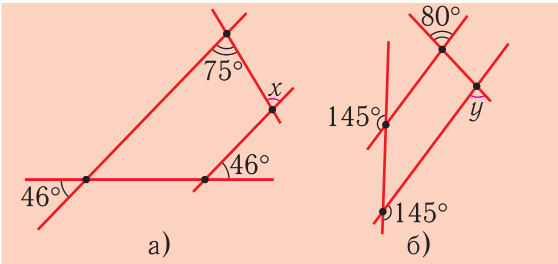


Рис. 2.84

176. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, на 36° більший за інший. Визначте ці кути.

177. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, у п'ять разів менший від іншого. Визначте ці кути.

178. Внутрішні односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, відносяться, як 5 : 7. Визначте ці кути.

179. Прямі a і b перпендикулярні до прямої c, а пряма l перетинає пряму a. Чи перетинає пряма l прямі b і c?

180. Прямі a і b перетинаються, а прямі a і c — паралельні. Чи можуть бути паралельними прямі b і c?

181. Дано чотири прямі a, b, c, m. Відомо, що $a \parallel b$, $b \parallel c$, а пряма m перетинає пряму a. Доведіть, що пряма m перетинає пряму c.

182. Прямі a і b не паралельні прямій c. Чи можна стверджувати, що прямі a і b не паралельні між собою?

183. Прямі a і b перетинає січна. Чи можна стверджувати, що коли утворені при цьому відповідні кути не рівні, то прямі a і b не паралельні?

184•. На рис. 2.85, а) – б) $AB \parallel DE$. Визначте кут BCD.

185•. Сума трьох нерозгорнутих кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 240°. Визначте ці кути. Розгляньте можливі випадки.

186•. Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

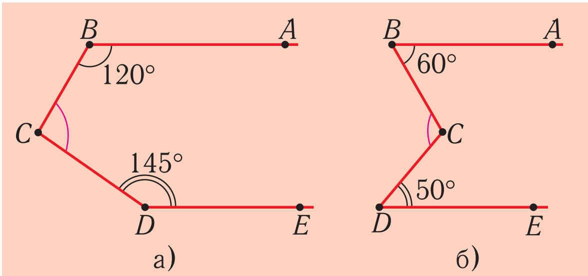


Рис. 2.85

187°. Доведіть, що бісектриси двох відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні.

188°. Доведіть, що коли бісектриси двох відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, паралельні, то й прямі — паралельні.

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

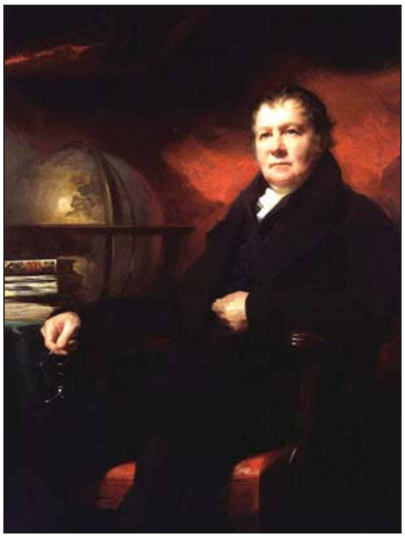
§10. Інші форми аксіоми про паралельні прямі

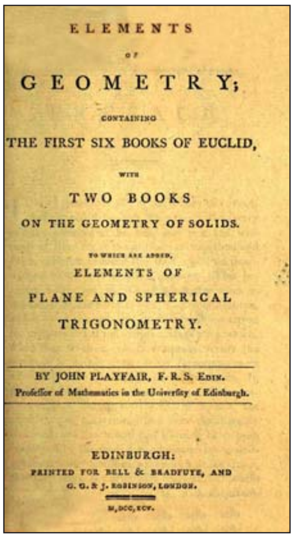
1. V постулат Евкліда

Може здатися неймовірним, що в підручниках з геометрії аксіома про паралельні прямі з'явилася відносно недавно. Вважається, що вперше — у 1795 р., у виданні «Начал» Евкліда для школи, підготовленому шотландським математиком Джоном Плейфером (1748–1819). Правда, у Плейфера вона формулювалася трошки інакше, а саме: «Дві прямі, які перетинають одна одну, не можуть бути паралельними одній і тій самій прямій». Та все одно її часто називають навіть *аксіомою Плейфера*. А до того упродовж 2000 років замість аксіоми Плейфера подавалася аксіома Евкліда, яка в його «Началах» була одним із *постулатів* геометрії.

Джон Плейфер.
Гравюра (1875 р.)

Твердження, які приймаються без доведення, Евклід поділяв на два види. Одні з них він називав аксіомами, інші — постулатами. Аксіоми стосувалися кількісних відношень між довільними величинами. Наприклад, до аксіом Евклід відносив такі твердження: «Рівні

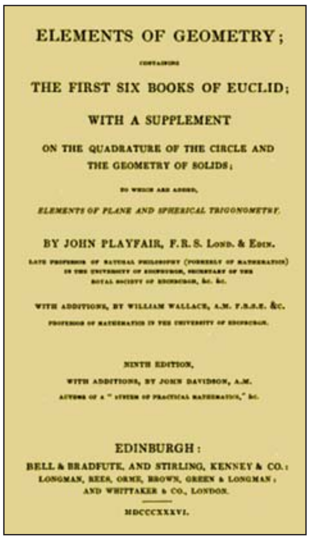




ELEMENTS
OF
GEOMETRY;
CONTAINING
THE FIRST SIX BOOKS OF EUCLID,
WITH
TWO BOOKS
ON THE GEOMETRY OF SOLIDS.
TO WHICH ARE ADDED,
ELEMENTS OF
PLANE AND SPHERICAL
TRIGONOMETRY.

BY JOHN PLAYFAIR, F.R.S. EDIN.
Professor of Mathematics in the University of Edinburgh.

EDINBURGH:
PRINTED FOR BELL & BRADFUTE, AND
G. G. & J. ROBINSON, LONDON.
M,DCC,XCV.



ELEMENTS OF GEOMETRY;
CONTAINING
THE FIRST SIX BOOKS OF EUCLID;
WITH A SUPPLEMENT
ON THE QUADRATURE OF THE CIRCLE AND
THE GEOMETRY OF SOLIDS;
TO WHICH ARE ADDED,
ELEMENTS OF PLANE AND SPHERICAL TRIGONOMETRY.
BY JOHN PLAYFAIR, F.R.S. LOND. & EDIN.

WITH ADDITIONS, BY WILLIAM WALLACE, A.M. F.R.S.E. &C.

NINTH EDITION,
WITH ADDITIONS, BY JOHN DAVIDSON, A.M.

EDINBURGH:
BELL & BRADFUTE, AND STIRLING, KENNEY & CO.:
LONGMAN, REES, ORME, BROWN, GREEN & LONGMAN;
AND WHITTAKER & CO., LONDON.
MDCCCXXXVI.

Джон Плейфер (1814 р.). Портрет Генрі Реборна (1756–1823).
Поруч: титульні сторінки 1-го і 9-го адаптованих Плейфером для школи видань «Начал» Евкліда (1795 і 1836 рр.)

одному й тому ж, рівні між собою»; «Якщо до рівних додати рівні, то дістанемо рівні», «Ціле більше за свою частину» тощо. На противагу цьому, до постулатів відносилися твердження стосовно геометричних фігур. У дослівному перекладі з грецької мови слово «постулат» означає «вимога»; латинською — «петиція». Отже, постулати вимагалося прийняти без доведення.

Евклід сформулював п’ять постулатів-вимог. Першими чотирма були такі:

I. Будь-які дві точки можна сполучити відрізком;

II. Будь-який відрізок можна як завгодно продовжити за кожен із його кінців;

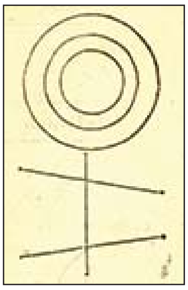
III. Навколо будь-якого центра і будь-яким радіусом можна описати коло;

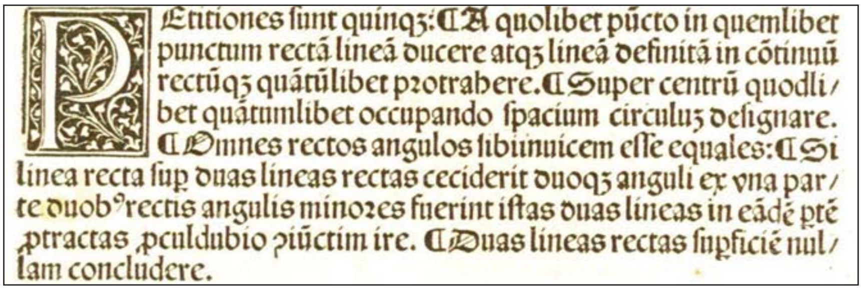
IV. Будь-які прямі кути можна сумістити.

Виняткову роль в історії геометрії відіграв п’ятий постулат:

V. Якщо при перетині двох прямих січною утворені внутрішні односторонні кути в сумі не дорівнюють двом прямим кутам, то прямі перетинаються.

Джузеппе де Рібера (1591–1652). **Евклід** (бл. 1635 р.)





Petitiones sunt quinqz: ¶ A quolibet pũcto in quemlibet punctum rectã lineã ducere atqz lineã definitã in cõtinuũ rectũqz quãtũlibet protrahere. ¶ Super centrũ quodlibet quãtumlibet occupando spacium circulũ designare. ¶ Omnes rectos angulos sibiinuicem esse equales: ¶ Si linea recta sup duas lineas rectas ceciderit duoqz anguli ex vna parte duob⁹ rectis angulis minores fuerint istas duas lineas in eãdẽ ptẽ ptractas pculdubio ɔiũctim ire. ¶ Duas lineas rectas supficiẽ nullam concludere.

Фрагмент 2-ї сторінки 1-го друкованого видання «Начал» Евкліда (Венеція, 1482 р.) з формулюванням усіх постулатів і рисунками до III і V з них.

Неважко довести, що коли прийняти V постулат Евкліда, то з нього можна вивести аксіому Плейфера про паралельні прямі (при цьому буде правомірним посилатися на ознаку паралельності, оскільки та була доведена без аксіоми про паралельні прямі).

Справді, нехай маємо довільну пряму a і точку A поза нею (рис. 2.86). Проведемо через точку A довільну січну c, а потім — пряму b так, щоб сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2 дорівнювала 180°. Тоді, за ознакою паралельності, $b \parallel a$. Якщо ж через точку A провести довільну іншу пряму b', то сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і $2'$ уже не буде дорівнювати 180°, а тому, за V постулатом Евкліда, пряма b' перетне пряму a. Отже, пряма b буде єдиною, яка проходить через точку A і паралельна прямій a, тобто справджуватиметься аксіома Плейфера про паралельні прямі.

Навпаки, з аксіоми Плейфера про паралельні прямі можна вивести твердження V постулату Евкліда.

Справді, нехай маємо довільну пряму a і точку A поза нею, а пряма b' проходить через точку A і при цьому сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і $2'$ не дорівнює 180° (див. рис. 2.86). Проведемо через точку A таку пряму b, для якої сума внутрішніх односторонніх кутів 1 і 2 дорівнює 180°. Тоді, відповідно до ознаки паралельності, прямі a і b — паралельні. Але, за аксіомою Плейфера, пряма b — єдина, яка проходить через точку A і не перетинає прямої a. Тому пряма b' неодмінно перетне пряму a. Отже, й виходить, що

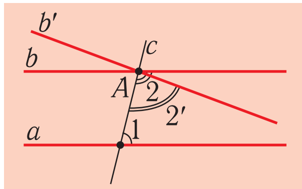


Рис. 2.86

Евклід з учнями.
Деталь із фрески Рафаеля «Афінська школа» (1509–1511 рр.)

коли сума внутрішніх односторонніх кутів (1 і $2'$) не дорівнює двом прямим кутам, то прямі (a і b') перетинаються, тобто справджується V постулат Евкліда.

Якщо два твердження мають таку властивість, що з першого випливає друге, а з другого — перше, то такі твердження називаються *рівносильними* або *еквівалентними*.

Оскільки із V постулату Евкліда випливає аксіома Плейфера, а з аксіоми Плейфера — V постулат Евкліда, то ці твердження — рівносильні.

2. Аксіома Остроградського

Серед діячів, чиї імена назавжди закарбовані в історії математичної освіти, на чільному місці стоїть ім'я славетного українського математика Михайла Васильовича Остроградського (1801–1862).

Михайло Остроградський народився на Полтавщині у давній козацькій родині. За легендою, рід Остроградських був одним з відгалужень родоводу знаменитих волинських державників і просвітителів князів Острозьких, звідки й прізвище — Остроградські.

У 1821 р. Михайло Остроградський закінчив Харківський університет, а після цього впродовж 5 років навчався у Парижі, де слухав лекції видатних тогочасних французьких учених — Лапласа, Пуассона, Коші, Ампера, Фур'є. Повернувшись із-за кордону, Остроградський упродовж усього життя активно пропагував і втілював традиції французьких учених поєднувати наукову роботу з викладацькою. Він викладав математику в елітних тогочасних військових навчальних закладах і саме для їхніх слухачів написав унікальний «Підручник з елементарної геометрії». Цей підручник був виданий трьома окремими випусками у 1855–1860 рр. і на десятиліття установив такий високий рівень викладання математики, який ще й досі вирізняє вітчизняну математичну освіту.

Михайло Остроградський. Маловідомий портрет невідомого художника. Ймовірно написаний у той період, коли учений починав працювати над своїм «Підручником з елементарної геометрії».

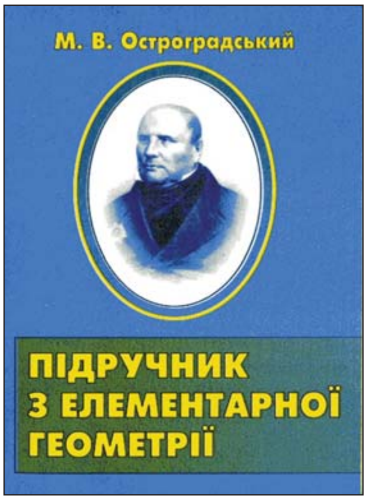
У своєму підручнику Остроградський замість аксіоми Плейфера про паралельні прямі уводить положення, яке, як він уважав, досконаліше характеризує геомет-

УЧЕБНЫЯ РУКОВОДСТВА
для
ВОЕННО-УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ.

РУКОВОДСТВО
НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ.
КУРСЪ III-го ОБЩАГО КЛАССА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
1857.

Титульна сторінка оригінального видання 2-ї частини «Підручника з елементарної геометрії» М.В. Остроградського (1857 р.)



Обкладинка українського перекладу підручника М.В. Остроградського, виданого тернопільським видавництвом «Підручники і посібники» до 200-ліття з дня народження ученого (2001 р.)

ричні особливості реального простору. Однією із ключових просторових характеристик, які активно використовуються у найрізноманітніших практичних застосуваннях, є напрямок. При цьому напрямок визначається прямою, а будь-яка інша паралельна їй пряма визначає той самий напрямок. Цей факт Остроградський і фіксує у своїй аксіомі про паралельні.

Аксіома Остроградського про паралельні прямі. ***Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.***

У попередньому параграфі ця властивість виведена з аксіоми Плейфера про паралельні прямі. Неважко показати, що й, навпаки, з аксіоми Остроградського випливає аксіома Плейфера. Отже, ці аксіоми *еквівалентні*.

Справді, нехай маємо точку A, розміщену поза прямою b (рис. 2.87). На підставі ознаки паралельності прямих, через точку A легко провести пряму a, паралельну прямій b. Тому доведення потребує

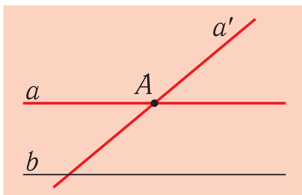


Рис. 2.87

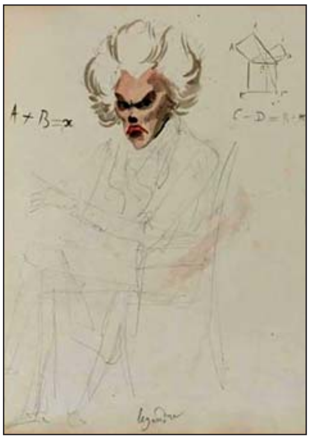
лише *єдиність* цієї прямої a. Припустимо, що існує ще інша пряма a', яка теж проходить через точку A і паралельна прямій b. Тоді, оскільки обидві прямі a і a' паралельні прямій b, то, за аксіомою Остроградського, вони паралельні між собою. Але ж ці прямі мають спільну точку A. Дійшли суперечності. Тому зроблене припущення неправомірне. Отже, пряма a — єдина, яка проходить через точку A і паралельна прямій b, що й треба було довести.

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Як з'явилася неевклідова геометрія

Одразу після появи «Начала» геометрії Евкліда набули загального визнання серед учених. Єдиним слабким місцем у них уважався V постулат. Саме́ його формулювання, яке було значно довшим, ніж в інших постулатів, вселяло думку, що насправді це — теорема, яку можна довести на підставі решти аксіом і постулатів. Якщо ж знайти це доведення, то можна буде обійтися й без такого дивного постулата. Так розпочалася найтриваліша в історії науки «кампанія», що розтяглася майже на 2,5 тис. років. Її метою було доведення V постулату Евкліда.

Як ми вже мали змогу переконатися, V постулат Евкліда рівносильний аксіомі про паралельні прямі, а також і аксіомі Остроградського. Отже, якщо прийняти будь-яку із цих аксіом, наприклад, вважати її за самоочевидний факт, то V постулат Евкліда можна буде легко довести. Абсолютна більшість дослідників, які повідомляли про знайдене ними доведення, так і чинили, тільки щоразу непомітно для себе використовували якісь «самоочевидні» факти. Лише при ретельнішому аналізі з'ясовувалося, що кожен із таких фактів еквівалентний V постулату. Тому насправді ніякого доведення й не було, а створювалося хибне логічне коло: доведення проводилося на підставі того, що насправді потрібно було довести.



Лежандр.
Рисунок Жульєна-Леопольда Буалі (1796–1874) з альбому шаржів на членів Французької Академії (1820 р.). Це — єдине зображення ученого, яке збереглося

Наприклад, німецький математик Христоф Клавій (1537–1612), про якого уже згадувалося на сторінках історії в першому розділі, у своєму доведенні V постулату Евкліда використав як «очевидність» те, що три точки A, B, C, які лежать з одного боку від прямої l і рівновіддалені від неї, належать іншій прямій (рис. 2.88).

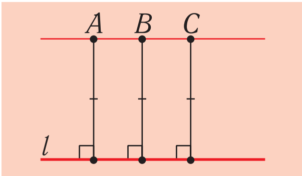


Рис. 2.88

Ще замаскованішою була логічна помилка видатного французького математика Адрієна Марі Лежандра (1752–1833), котрий в одному зі своїх доведень використовував як «очевидність» те, що через будь-яку точку P, узяту всередині гострого кута A (рис. 2.89), завжди можна провести пряму, яка перетне обидві його сторони.

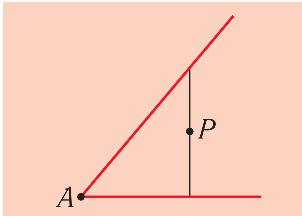


Рис. 2.89

Як перше, так і друге із цих «очевидних» тверджень виявилися еквівалентними V постулату. Тому ні Клавій, ні Лежандр насправді доведення V постулату Евкліда не одержали.

Узявши до уваги численні невдалі спроби, а також і свої власні невдачі на цьому шляху, російський геометр Микола Лобачевський (1792–1856) в середині 20 рр. XIX ст. дійшов висновку, що Евклід таки був правий, включивши V постулат до фундаменту геометрії, тобто, що насправді це твердження довести неможливо.

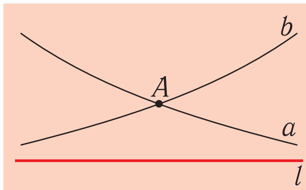


Рис. 2.90

Але як підтвердити цю здогадку? — Спосіб був тільки один: узяти замість V постулату або якого-небудь рівносильного йому твердження, наприклад, замість аксіоми про паралельні прямі Плейфера, супротивне твердження й спробувати збудувати на цій підставі нову логічно несуперечливу геометрію. Це й було зроблено. Однією з аксіом нової геометрії стала така аксіома.

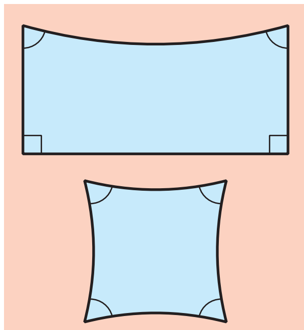


Рис. 2.91

Аксіома Лобачевського.

Через точку A поза прямою l у площині можна провести принаймні дві прямі a і b, які не перетинають прямої l (рис. 2.90).

Прийняття такого «дивного» положення на той час було справжнім науковим і громадянським подвигом, бо навіть визначні математики не сприйняли його.

Абсолютна більшість фактів з нової геометрії разюче контраствувала з фактами звичайної геометрії. Зокрема, у новій геометрії не існує ні прямокутників, ні квадратів, а можливі тільки гострокутні аналоги (рис. 2.91)

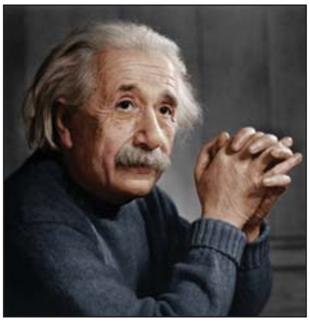
Сам Лобачевський відкриту ним нову геометрію називав уявною, хоча й твердо вірив, що рано чи пізно вона таки матиме практичні застосування. Так воно й сталося. У §9 вже згадувалося, що у 2-й половині XIX ст. італійський математик Евженіо Бельтрамі (1835 –1900) відкрив поверхню — псевдосферу (див. рис. 2.68), на якій виконується геометрія Лобачевського — так само, як звичайна геометрія виконується на площині. А на початку XX ст. німецький фізик і математик Герман Мінковський (1864 –1909) обґрунтував, що геометрією Лобачевського описуються рухи у так званій спеціальній теорії відносності Ейнштейна.

Англійський математик Джеймс Сильвестр (1814–1897) назвав Лобачевського «Коперником геометрії», наголошуючи цим на тому, що відкриття Лобачевського мало такий самий революційний вплив на науку, як у свій час відкриття Коперника про рух Землі і планет навколо Сонця. Саме завдяки цьому в науці утвердилася ідея про те, що на ґрунтовне вивчення заслуговує кожна теорія, яка засновується на логічно несуперечливій системі аксіом. Практичні ж науки можуть вибирати для своїх цілей ті теорії, які найбільш повно описують відповідні явища і процеси.

Геометрія Лобачевського стала першою геометрією, відмінною від класичної евклідової геометрії. Тому цю нову геометрію назвали *неевклідовою* геометрією. Тепер неевклідових геометрій існує багато. Кожна з них базується на своїй системі аксіом і має свою окрему назву.

М.І. Лобачевський

Г. Мінковський



А. Ейнштейн

Зведений перелік основних теоретичних відомостей, вивчених у розділі II

Аксіоми, теореми, ознаки

Аксіома (дослівно з грецької «повага», «авторитет», «незаперечна істина») — математичне твердження, істинність якого приймається без доведення.

Аксіома про паралельні прямі. ***Через точку поза прямою можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.***

Теорема (від грецького слова «теорео» — «уважно розглядаю», «придивляюся», а також «демонстрація», «вистава») — математичне твердження, істинність якого встановлюється шляхом логічного міркування (доведення).

Будь-яку теорему символічно можна записати у формі: «*Якщо виконується A, то виконується B*», або, що те саме: «*З A випливає B*». Тут A — ***умова*** теореми (те, що дано), B — ***висновок*** теореми (те, що потрібно довести).

Якщо поміняти місцями умову й висновок теореми, то дістанемо ***обернену*** теорему. Тоді початкова теорема називається ***прямою***. Отже, якщо пряма теорема: «*З A випливає B*», то обернена — «*З B випливає A*».

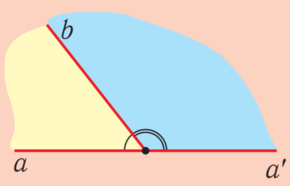
Істинність оберненої теореми автоматично не випливає з істинності прямої, а потребує окремого доведення. Обернена теорема може бути й хибною.

Ознака — теорема, умова якої є достатньою для висновку про певні фундаментальні геометричні властивості, наприклад, паралельність, перпендикулярність, рівність фігур тощо.

Доведення методом «від супротивного» полягає у припущенні істинності за даної умови іншого висновку — супротивного тому, який потрібно довести, і логічного виведення звідси протиріччя з умовою або з певною аксіомою чи раніше доведеною теоремою.

Суміжні і вертикальні кути

Два кути називаються ***суміжними***, якщо вони мають одну спільну сторону, а дві інші їхні сторони є доповняльними променями.

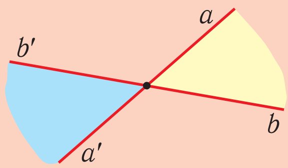


Теорема (*про суму суміжних кутів*). ***Сума суміжних кутів дорівнює 180°.***

Доведення. Різні сторони a і a' суміжних кутів утворюють розгорнутий кут $\angle aa'$, а спільна сторона b проходить між сторонами цього кута. Тому, за аксіомою при вимірювання кутів, $\angle ab + \angle ba' = \angle aa' = 180°$.

Наслідок 1. Кут, суміжний з прямим кутом, є прямим.

Наслідок 2. Кут, суміжний з гострим кутом, — тупий, а кут, суміжний з тупим кутом, — гострий.



Два кути називаються ***вертикальними***, якщо сторони одного з них є доповняльними променями до сторін іншого.

Теорема (*про вертикальні кути*). ***Вертикальні кути рівні між собою.***

Доведення. Кожен з вертикальних кутів $\angle ab$ і $\angle a'b'$ є суміжним з кутом $\angle ab'$. Тому

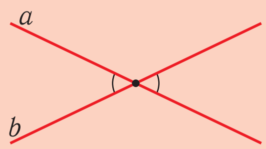
$$\angle ab + \angle ab' = 180°; \quad \angle a'b' + \angle ab' = 180°.$$

Звідси

$$\angle ab = 180° - \angle ab'; \quad \angle a'b' = 180° - \angle ab'.$$

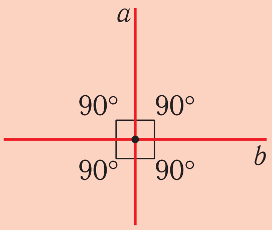
Отже, $\angle ab = \angle a'b'$.

Кут між прямими. Перпендикулярні прямі



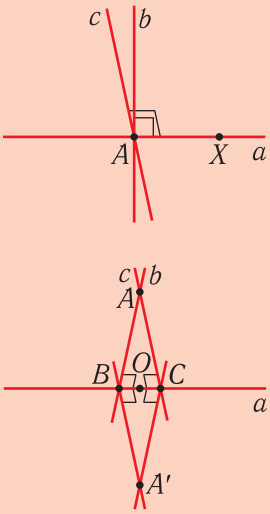
Кутом між прямими, що перетинаються, називається величина гострого або прямого кута, утвореного при перетині цих прямих.

Кут між прямими a і b позначається так: $\angle ab$. Величина кута між прямими може змінюватися в межах від 0° до 90°.



Якщо кут між прямими дорівнює 90°, то такі прямі називаються ***перпендикулярними*** (або ***взаємно перпендикулярними***).

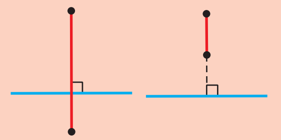
Перпендикулярність прямих позначають за допомогою знака $\perp$. Наприклад: $a \perp b$.



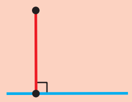
Теорема (*про єдиність перпендикулярної прямої*). ***Через будь-яку точку можна провести лише одну пряму, перпендикулярну до даної прямої.***

Доведення. Якби через точку A прямої a проходило дві прямі $b \perp a$ і $c \perp a$, то два рівних прямих кути $\angle ab$ і $\angle ac$ були б відкладені в одну півплощину від однієї півпрямої AX, що суперечить аксіомі про відкладання кутів.

Якби через точку A поза прямою a проходило дві прямі $b \perp a$ і $c \perp a$, то, повернувши півплощину з граничною прямою a, яка містить точку A, відносно середини O відрізка BC до суміщення з іншою півплощиною, ми дістали б, що ті самі прямі b і c мають іншу точку перетину A', а це суперечить аксіомі про проведення прямої.



Відрізки, перпендикулярні до прямої

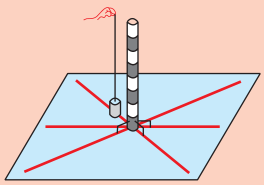


Перпендикуляр до прямої

Відрізки або промені називаються ***перпендикулярними*** до прямої, якщо прямі, на яких вони лежать, перпендикулярні до цієї прямої.

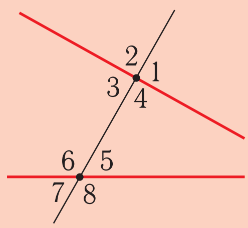
Відрізок, який перпендикулярний до прямої і при цьому один з його кінців належить прямій, називається ***перпендикуляром*** до цієї прямої. Спільна точка прямої і перпендикуляра до неї називається ***основою*** перпендикуляра.

Відстанню від точки до прямої називається довжина перпендикуляра, опущеного із цієї точки на пряму.



Терміни «перпендикулярний», «перпендикуляр» утворені від латинського слова perpendicularis, що означає «прямовисний». Прямовисна лінія утворює прямі кути з будь-якою горизонтальною прямою.

Ознаки паралельних прямих



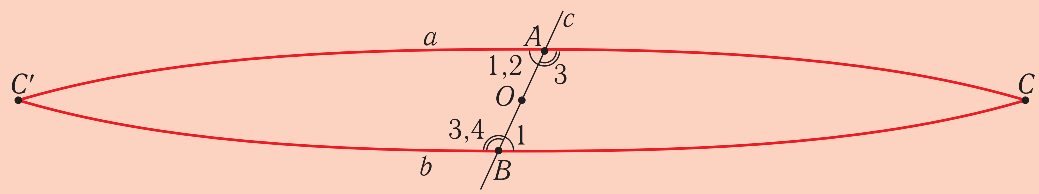
Назви кутів, утворених при перетині двох прямих третьою прямою (***січною***):

$\angle 3$ і $\angle 5$, а також $\angle 4$ і $\angle 6$ називаються ***внутрішніми різносторонніми***;

$\angle 3$ і $\angle 6$, а також $\angle 4$ і $\angle 5$ називаються ***внутрішніми односторонніми***;

$\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 4$ і $\angle 8$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$ називаються ***відповідними***.

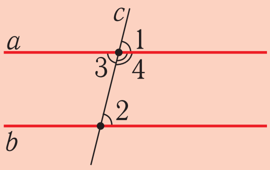
Теорема (*ознака паралельності прямих*). ***Якщо при перетині двох прямих січною внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі — паралельні.***



Доведення. Якщо припустити, що за умови $\angle 1 = \angle 2$ прямі a і b перетинаються у деякій точці C, а потім повернути ту півплощину з граничною прямою c, яка містить цю точку, відносно середини O відрізка AB до суміщення з іншою півплощиною, то дістанемо, що прямі a, b мають ще одну спільну точку C'. Це протиріччя й доводить теорему.

Наслідок 1. ***Дві прямі, які перпендикулярні до третьої прямої, паралельні.***

Доведення. Якщо $a \perp c$ і $b \perp c$, то внутрішні різносторонні кути 1 і 2 — прямі. Отже, вони рівні, а тому $a \parallel b$.



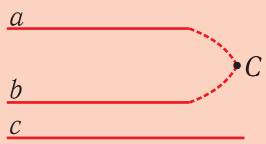
Наслідок 2. ***Якщо при перетині двох прямих січною відповідні кути рівні, то прямі — паралельні.***

Доведення. Нехай $\angle 1 = \angle 2$. $\angle 1 = \angle 3$, оскільки ці кути вертикальні. Отже, $\angle 3 = \angle 2$, а тому прямі a і b — паралельні.

Наслідок 3. ***Якщо при перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі — паралельні.***

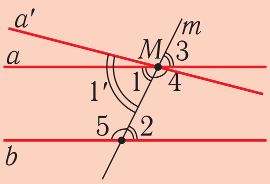
Доведення. Нехай $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Сума суміжних кутів $\angle 3 + \angle 4$ теж дорівнює 180°. Звідси $\angle 2 = \angle 3$, тому прямі a і b — паралельні.

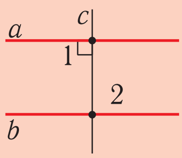
Властивості паралельних прямих



Теорема (*про перехід паралельності*). ***Дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою***.

Доведення. Якби прямі a і b, що паралельні прямій c, перетиналися, то через точку перетину C проходило б дві прямі, паралельні прямій c. Ця суперечність з аксіомою про паралельні прямі доводить теорему.





Теорема (*про кути, утворені паралельними прямими із січною*). ***Внутрішні різносторонні та відповідні кути, утворені при перетині паралельних прямих січною, рівні між собою, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°***.

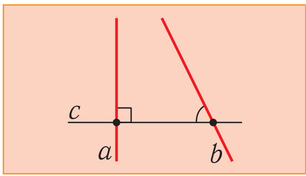
Доведення. Якби внутрішні різносторонні кути 1 і 2 були не рівними, то, провівши пряму a' так, щоб рівність виконувалася, ми мали б дві прямі a і a', що проходять через точку M і паралельні прямій b. Це суперечить аксіомі про паралельні прямі. Отже, $\angle 1 = \angle 2$.

Оскільки $\angle 1 = \angle 3$ (ці кути вертикальні), то, з попереднього, $\angle 3 = \angle 3$.

Оскільки $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ (ці кути суміжні), то, з попереднього, $\angle 2 + \angle 4 = 180°$. Доведення завершено.

Наслідок 1. ***Якщо одна з двох паралельних прямих a і b перпендикулярна до січної c, то й інша пряма теж перпендикулярна до цієї січної.***

Доведення. Нехай $\angle 1 = 90°$. Унаслідок паралельності прямих a і b $\angle 2 = \angle 1$. Отже, $\angle 2 = 90°$, тобто $c \perp b$.



Наслідок 2. *Якщо одна з прямих a і b перпендикулярна до січної c, а інша — не перпендикулярна до неї (похила), то ці прямі перетинаються.*

Доведення. Якби прямі a і b були паралельними, то, за наслідком 1, пряма b теж була б перпендикулярною до c.

Перевір себе

1. Що таке аксіома і що таке теорема? Яке походження цих термінів?
2. Перелічіть усі відомі вам геометричні аксіоми.
3. Які кути називаються суміжними? Доведіть, що сума суміжних кутів дорівнює 180°.
4. Доведіть, що коли суміжні кути рівні, то вони прямі.
5. Які кути називаються вертикальними? Яке походження цього терміна? Доведіть, що вертикальні кути рівні.
6. Що таке кут між двома прямими? Яких значень може набувати цей кут?
7. Які прямі називаються перпендикулярними? Яке походження цього терміна?
8. Сформулюйте і доведіть теорему про єдиність перпендикулярної прямої.
9. Що таке перпендикуляр до прямої і що таке відстань від точки до прямої?
10. Назвіть усі пари кутів, що утворюються при перетині двох прямих січною. Чи є серед них пари рівних кутів?
11. Що таке паралельні прямі? Сформулюйте ознаки паралельності прямих. Як вони доводяться?
12. У чому полягає метод доведення «від супротивного»? Наведіть відомі вам приклади застосування цього методу.
13. Опишіть усі відомі вам способи побудови паралельних прямих за допомогою креслярських інструментів. На яких геометричних властивостях вони ґрунтуються?
14. Як формулюється аксіома про паралельні прямі?
15. Сформулюйте і доведіть теорему про перехід (транзитивність) паралельності.
16. Які залежності існують між відповідними, внутрішніми різносторонніми та внутрішніми односторонніми кутами, що утворюються при перетині паралельних прямих січною?
17. Дві прямі паралельні, а третя (січна) перпендикулярна до однієї з них. Чи можна стверджувати, що січна перпендикулярна й до іншої прямої?
18. Дві прямі a і b перетинають третю. Одна — під прямим кутом, інша — під гострим. Як довести, що прямі a і b перетинаються?
19. Що таке обернена теорема? Наведіть відомі вам приклади взаємно обернених теорем, які одночасно є істинними.

Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу II

1°. а) На якому з рис. 2.92, а) – г) зображено суміжні кути?

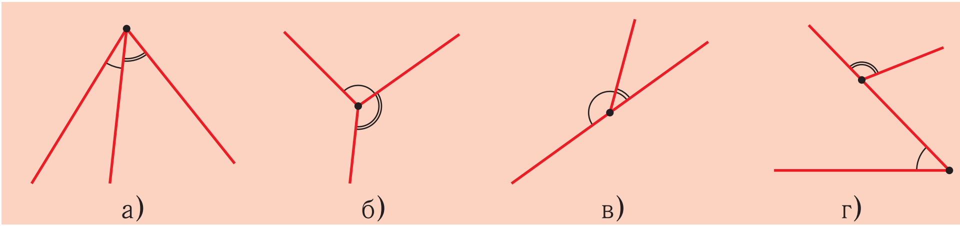


Рис. 2.92

б) На якому з рис. 2.93, а) – г) зображено суміжні кути?

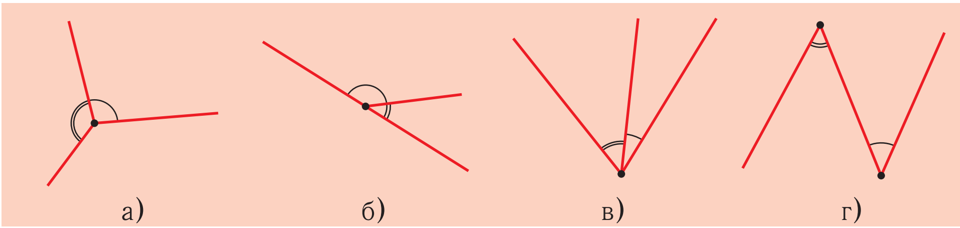


Рис. 2.93

2°. а) Накресліть два суміжні кути, один з яких має градусну міру 125°. Визначте за допомогою вимірювання та обчислення величину іншого кута.
б) Накресліть два суміжні кути, один з яких має градусну міру 95°. Визначте за допомогою вимірювання та обчислення величину іншого кута.

3°. а) Накресліть два вертикальні кути, сума градусних мір яких дорівнює 80°.
б) Накресліть два вертикальні кути, рівні зі своїми суміжними.

4°. а) Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 135°. Визначте решту кутів і кут між прямими.
б) Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 150°. Визначте решту кутів і кут між прямими.

5. а) Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, на 30° менший від іншого. Визначте усі кути і кут між прямими.

б) Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, на 70° більший за інший. Визначте усі кути і кут між прямими.

6. а) Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, учетверо менший від іншого. Визначте ці кути і кут між прямими.
б) Величини двох кутів, утворених при перетині двох прямих, відносяться, як 2 : 7. Визначте ці кути і кут між прямими.

7•. а) Визначте кути, утворені при перетині двох прямих, якщо один із них на 30° більший за різницю двох інших. Чому дорівнює кут між прямими?
б) Визначте кути, утворені при перетині двох прямих, якщо один із них утричі більший за різницю двох інших. Чому дорівнює кут між прямими?

8°. а) Сума двох внутрішніх різносторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 148°. Визначте ці кути.
б) Сума двох відповідних кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, дорівнює 72°. Визначте ці кути.

9. а) Якими мають бути кути x, y на рис. 2.94, а) – б), аби прямі m, n були паралельними?
б) Якими мають бути кути x, y на рис. 2.95, а) – б), аби прямі m, n були паралельними?

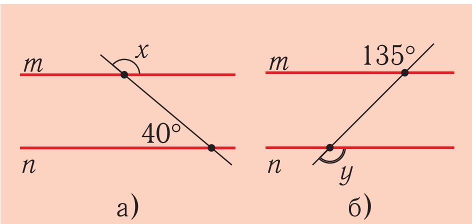


Рис. 2.94

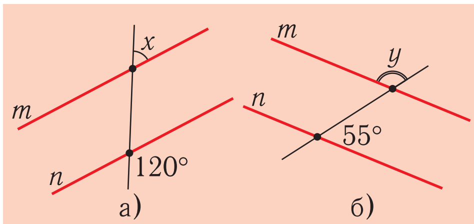


Рис. 2.95

10. а) Прямі a і b — паралельні, $\angle 2$ у п'ять разів більший за $\angle 1$ (рис. 2.96). Визначте $\angle 3$ і $\angle 4$.
б) Прямі a і b — паралельні, $\angle 1$ на 70° менший від $\angle 2$ (рис. 2.97). Визначте $\angle 1$, $\angle 2$ і $\angle 3$.

11. а) Внутрішні односторонні кути, утворені при перетині двох паралельних прямих січною, відносяться, як 2 : 3. Визначте ці кути.

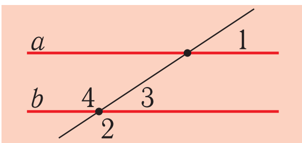


Рис. 2.96

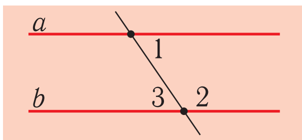


Рис. 2.97

б) Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині двох паралельних прямих січною, на 72° більший за інший. Визначте ці кути.

12•. а) За рис. 2.98 визначте кут x.

б) За рис. 2.99 визначте кут y.

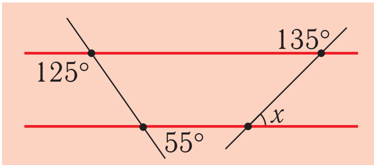


Рис. 2.98

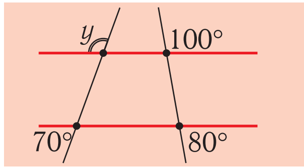


Рис. 2.99

13•. а) На рис. 2.100 $PQ \parallel EF$. Визначте кут QME.

б) На рис. 2.101 $PQ \parallel EF$. Визначте кут MEF.

14•. а) Нехай прямі a і b перетинаються. Доведіть, що яка б не була пряма c, вона буде не паралельною принаймні одній з прямих a і b.

б) Прямі a і b паралельні, а прямі a і m перетинаються. Пряма c паралельна прямій a. Доведіть, що пряма c перетинає пряму m і паралельна прямій b.

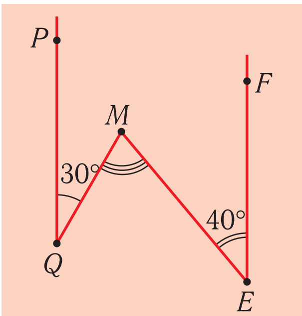


Рис. 2.100

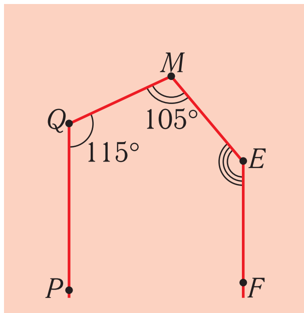


Рис. 2.101

Василь Кандинський. Піки на вигині (Spitzen im Bogen) (1927 р.).
Вірогідно, що у такий спосіб художник втілив близьку йому ідею
космічності людського шляху, який проходить довкола Землі
під вітрилами-піками, що наповнюються Сонцем.

Трикутник був одним з основних виражальних засобів у творах В. Кандинського.
Цим художник немовби переносив виняткову роль цієї фігури з геометрії
на абстрактний живопис

Розділ III Трикутники. Ознаки рівності трикутників

Вступ

Урок 24

У 1806 р. в Парижі вийшов з друку перший том тритомного звіту французьких астрономів та геодезистів П'єра Франсуа Андре Мешена (1744–1804) і Жана Батіста Жозефа Деламбра (1749–1822) про підсумки діяльності очолюваної ними багаторічної експедиції з визначення довжини земного меридіана. На основі проведених вимірювань була встановлена довжина еталона метра — як однієї сорокамільйонної частини меридіана (детальніше про це вже йшлося на сторінках історії у першому розділі). У передмові до свого звіту автори писали: «З усіх чудових надбань, які залишаться від французької революції, це — те, за що ми заплатили найменшу ціну».

П'єр Мешен

Як свідчить заголовок згаданого звіту, експедиція провела точні вимірювання довжини земного меридіана від містечка Дюнкерк, що на півночі Франції, до іспанської Барселони, загалом — близько 1300 км.

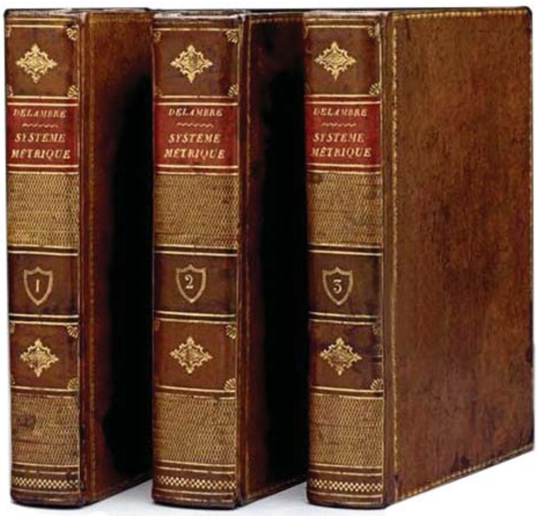
Як же це можна було здійснити, коли меридіан — то не битий шлях і він не оминає ні високих гір, ані непролазних лісових хащ, ані повноводних рік, ані хаотичних людських поселень?

Жан Деламбр

Для цього був застосований так званий метод *тріангуляції* (покриття трикутниками), винайдений ще за сто років до того голландським математиком, фізиком та астрономом Віллебрордом Снелліусом (1580–1626). Уздовж усієї вимірюваної ділянки меридіана було назначено понад сотню гігантських трикутників з вершинами на високих скелях, дзвіницях, баштах замків, а то й на спеціально зведених для цього вежах (з кожної такої вершини мало бути видно крізь підзорну трубу хоча б дві інші). Потім з допомогою геодезичних вимірювань та обчислень визначені їхні кути і сторони. Маючи усі ці дані, вже неважко було знайти й шукану довжину меридіана.

Віллеброрд Снелліус

Аби ясніше зрозуміти цю ідею, нам не потрібно сотні трикутників, достатньо декількох з них.



BASE
DU SYSTÈME MÈTRIQUE DÉCIMAL,
OU
MESURE DE L'ARC DU MÉRIDIEN
COMPRIS ENTRE LÈS PARALLÈLES
DE DUNKERQUE ET BARCELONE,
EXÉCUTÉE EN 1792 ET ANNÉES SUIVANTES,
PAR MM. MÉCHAIN ET DELAMBRE.

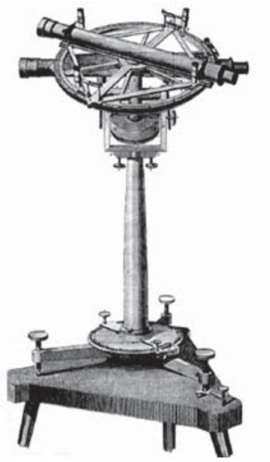
Rédigée par M. Delambre, secrétaire perpétuel de l'Institut pour les sciences mathématiques, membre du bureau des longitudes, des sociétés royales de Londres, d'Upsal et de Copenhague, des académies de Berlin et de Suède, de la société Italienne et de celle de Gottingue, et membre de la Légion d'honneur.

SUITE DES MÉMOIRES DE L'INSTITUT.

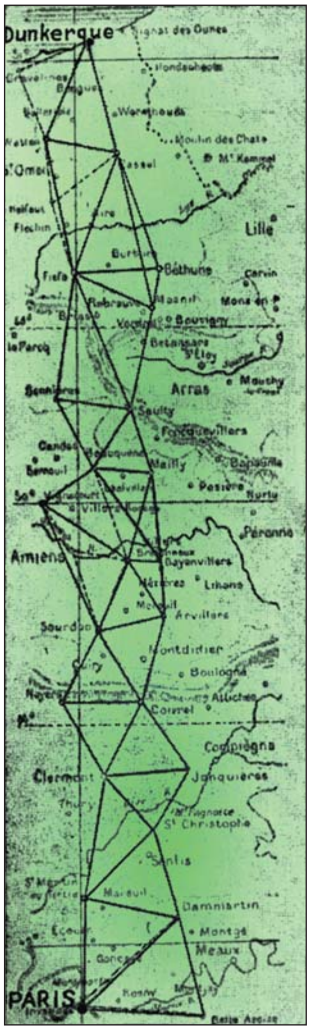
TOME PREMIER.

PARIS.
BAUDOUIN, IMPRIMEUR DE L'INSTITUT NATIONAL.
JANVIER 1806.

Загальний вигляд трьох томів і титульна сторінка 1-го тому тритомного звіту «Основи метричної десяткової системи, або Вимірювання дуги меридіана між паралелями Дюнкерка і Барселони, виконані у 1792 році і в наступні роки месьє Мешеном і Деламбром» (Париж, 1806, 1807 і 1810 рр.)



Геодезичний кутомірний прилад (так званий повторювальний круг Борда) та робота з ним під час експедиції Мешена і Деламбра. Ілюстрації з книги абата Ж. Лорідана «Експедиції французьких астрономів для визначення фігури Землі та її розмірів», виданій у Парижі в 1890 р.



Підфарбована схема тріангуляції для визначення довжини меридіана між Дюнкерком і Парижем зі звіту Мешена і Деламбра

Нехай уздовж прямої AB, відстань між точками A і B якої потрібно визначити, побудовано трикутники ACD, CDE, ..., BGH (рис. 3.1). Припустимо, що за допомогою оптичних кутомірних приладів визначені усі кути цих трикутників, а за допомогою безпосереднього вимірювання — сторона EF якого-небудь одного з них. Ця сторона називається *базою* тріангуляції. Для можливості точного вимірювання база має розмішуватися на ідеально рівній відкритій місцевості без жодних перепон.

За допомогою формул, які пов'язують сторони й кути трикутника (ви теж будете вивчати такі формули, але пізніше), з трикутника DEF за відомою стороною EF і відомими прилеглими до неї кутами 1 і 2 можна обчислити сторону ED. Так само з трикутника EFG за відомою стороною EF і відомими прилеглими до неї кутами EFG і FEG можна обчислити сторони EG і FG.

На наступному етапі за відомими вже сторонами ED і FG і відповідними кутами можна обчислити сторони CE і GH. Продовжуючи ці обчислення далі, ми врешті-решт визначимо всі ланки ламаної $ACEGB$, що сполучає точки A і B. Після цього залишиться обчислити проекції AC_1, C_1E_1, E_1G_1, G_1B цих ланок на пряму AB (що теж здійснюється за відомими формулами) та додати їх.

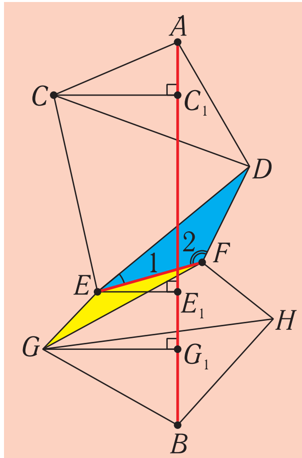
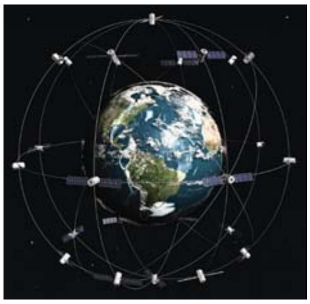


Рис. 3.1

За допомогою тріангуляції визначаються не тільки окремі відстані, а й складаються цілі карти місцевості.

Застосовується тріангуляція і в просторі. Особливо красномовний приклад — так звана GPS-навігація (GPS — абревіатура від Global Positioning System, що означає «Глобальна позиційна система»).

GPS-навігація здійснюється за допомогою штучних супутників, виведених на навколоземні орбіти з таким розрахунком, щоб у кожний пункт земної поверхні долинав сигнал принаймні від чотирьох із них. Приймальний засіб користувача, кожна пара супутників і наземна станція утворюють низку трикутників. Довжини сторін цих трикутників визначаються за часом проходження сигналів між їхніми вершинами. За цими даними за допомогою автоматизованих обрахунків точно визначається місцезнаходження користувача.



Супутники
для GPS-навігації

Окрім практичних застосувань, тріангуляція є одним з основних засобів і в самій геометрії. Вивчаючи геометрію далі, ви не раз помічатимете, що при дослідженні складніших фігур їх або розбивають на трикутники, або ж до них добудовують трикутники.

Нарешті, трикутник сам по собі є надзвичайно цікавою фігурою: він має цілу низку прихованих унікальних властивостей. З деякими з них ви вже невдовзі ознайомитеся, інші чекатимуть на вас у наступних класах.

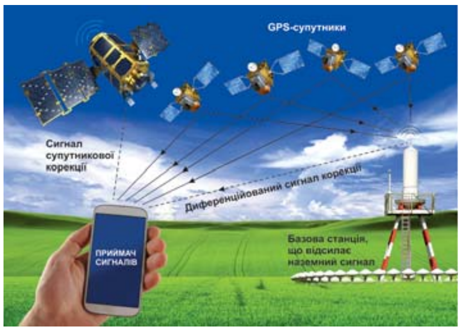


Схема тріангуляції
у GPS-навігації

§11. Трикутник і його елементи

Означення.

Трикутником **називається фігура, що складається із трьох точок, які не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Точки називаються *вершинами* трикутника, а відрізки — його *сторонами*.**

Часто трикутником називають і частину площини, обмежену його сторонами. У цьому разі інколи додають уточнення: *плоский трикутник*; тоді для трикутника без обмеженої ним внутрішньої частини застосовується назва *каркасний трикутник*.

При зображенні каркасних трикутників, як правило, чітко виокремлюються кружечками їхні вершини (рис. 3.2, а). При зображенні плоских трикутників таке виокремлення зазвичай не проводиться, зате часто внутрішня частина заштриховується або зафарбовується (рис. 3.2, б).

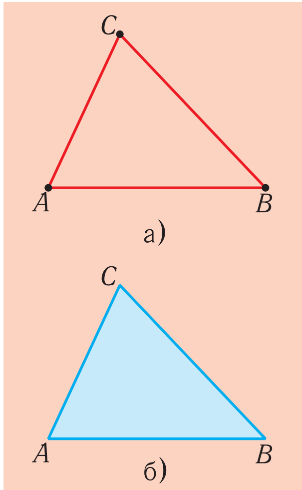


Рис. 3.2

У записах трикутник позначається його вершинами. При цьому слово «трикутник» часто замінюється значком Δ (читається «трикутник»), біля якого записуються вершини. Це позначення застосовував ще Папп Александрійський — грецький математик, що жив у III ст. н. е.


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATAE
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.
VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

Титульна сторінка латинського перекладу праці Паппа Александрійського «Математична колекція», яку вважають підсумком усієї античної математики (видано у Венеції в 1589 р.). У цій книзі вперше вживалося позначення Δ для трикутника.

На рис. 3.2, а) зображено каркасний, а на рис. 3.2, б) — плоский трикутник ABC з вершинами A, B, C і сторонами AB, BC та AC. Їх можна позначити так: ΔABC, ΔACB, ΔCAB тощо.

Означення.

Кутом **трикутника** ABC **при вершині** A **називається кут** BAC**, утворений променями** AB **і** AC**, що виходять із цієї вершини і містять сторони** AB **і** AC **трикутника** (рис. 3.3)**.**

Аналогічно означаються кути трикутника ABC при інших вершинах.

Часто кути трикутника позначають однією літерою, якою позначена відповідна вершина, записуючи, наприклад: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. На рис. 3.3 дужкою відзначений $\angle A$ трикутника ABC.

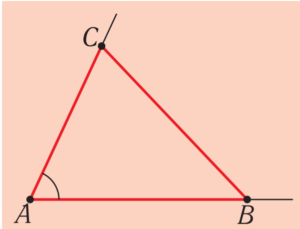


Рис. 3.3

Якщо кути трикутника розглядати разом з обмеженими ними частинами площини, тобто як *плоскі* кути, то плоский трикутник ABC можна охарактеризувати як перетин (спільну частину) трьох плоских кутів $\angle A$, $\angle B$ і $\angle C$ (рис. 3.4).

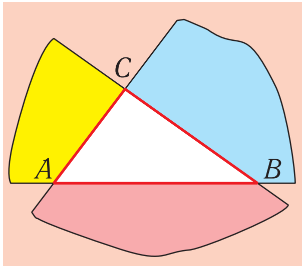


Рис. 3.4

Про кути A і B трикутника ABC, сторони яких містять сторону AB, часто кажуть, що вони *прилягають* до цієї сторони (або є *прилеглими* до неї). Так само і сторону AB вважають *прилеглою* до кутів A і B. Натомість сторона AB вважається *протилежною* до кута C (а кут C — *протилежним* до сторони AB). Зауважте, що вершина кута C, який є протилежним до сторони AB, не належить прямій AB.

Як і для кутів, для сторін трикутника теж застосовують скорочені позначення. Сторони позначають малими латинськими літерами. При цьому дотримуються такого правила: літери беруть однойменні з тими, якими позначені протилежні вершини. Наприклад, сторони BC, AC і AB трикутника ABC, які є протилежними відповідно до кутів A, B і C, позначають через a, b і c (рис. 3.5).

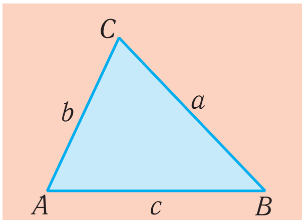


Рис. 3.5

Відповідно до прийнятих означень, кожний трикутник має три вершини, три сторони і три кути. Вершини, сторони й кути трикутника називаються його *елементами* (в перекладі з латини це означає — «найпростішими складниками»).

Залежно від величини кутів, розрізняють три види трикутників — *гострокутні*, *прямокутні* і *тупокутні*.

Означення.

Якщо всі кути трикутника гострі, то трикутник називається *гострокутним*. Якщо у трикутнику є прямий кут, то трикутник називається *прямокутним*, а якщо є тупий кут — то *тупокутним*.

На рис. 3.6 зображені різні види плоских трикутників, залежно від величин їхніх кутів.

Рис. 3.6

Означення.

Сума довжин усіх сторін трикутника називається його *периметром*.

Слово «периметр» утворено від грецьких слів «пері» — «навколо» і «метрео» — «вимірюю», отже, буквально означає «міра обводу».

Периметр позначають літерою P, записуючи, наприклад, для периметра трикутника ABC: $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC$.

Вправи і задачі

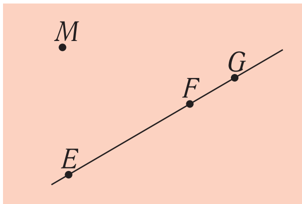


Рис. 3.7

189°. На прямій позначено три точки E, F, G (рис. 3.7). Чи можуть вони бути вершинами трикутника? Точка M розміщена поза прямою. Скільки трикутників з вершинами у трьох із чотирьох точок M, E, F, G можна накреслити? Виконайте ці рисунки.

190°. Дано трикутник PQS (рис. 3.8). Запишіть його вершини, сторони і кути. Які кути є прилеглими до сторони PQ і який кут є протилежним до неї? Яка сторона є протилежною до кута P і які сторони є прилеглими до неї? Чому дорівнює периметр трикутника PQS?

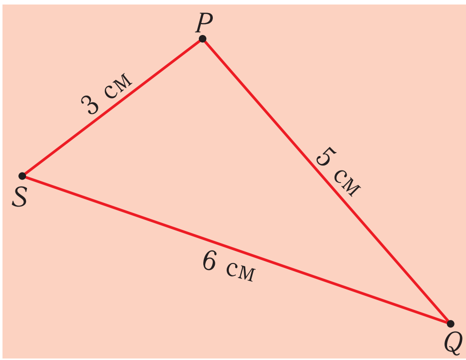


Рис. 3.8

191°. Накресліть який-небудь трикутник і позначте його вершини буквами L, M, N. Запишіть та виміряйте з допомогою лінійки і транспортира сторони та кути цього трикутника. Чому дорівнює його периметр? Чому дорівнює сума кутів?

192°. За допомогою косинця накресліть прямокутний трикутник, сторони якого, що прилягають до прямого кута, дорівнюють 3 см і 4 см. За допомогою лінійки і транспортира визначте третю сторону і гострі кути цього трикутника.

193°. За допомогою лінійки і транспортира накресліть трикутник із кутом 120°, сторони якого, що прилягають до цього кута, дорівнюють 4 см і 6 см. За допомогою вимірювання визначте третю сторону і гострі кути цього трикутника.

194°. За допомогою лінійки і косинця з гострими кутами по 45° накресліть трикутник зі стороною 5 см і прилеглими до неї кутами по 45°. Визначте за допомогою вимірювання інші дві сторони і третій кут трикутника.

195. За допомогою лінійки і транспортира побудуйте три трикутники зі стороною 5,5 см і рівними прилеглими кутами, які дорівнюють: у першому трикутнику — по 30°, у другому — по 60°, у третьому — по 70°. Виміряйте у кожному трикутнику сторони, протилежні до побудованих кутів, потім кути, що лежать проти заданої сторони 5,5 см, а також визначте суму усіх кутів. Можливо, одержані результати наштовхнуть вас на певні загальні висновки?

196. Визначте сторони трикутника, якщо вони пропорційні числам 1, 3 і 6, а периметр трикутника дорівнює 40 см.

197. Сторони трикутника відносяться, як 2 : 3 : 5. Визначте:
а) периметр трикутника, якщо його найменша сторона дорівнює 3 см;
б) найменшу сторону, якщо периметр дорівнює 50 см:
в) найбільшу сторону і периметр, якщо сума двох інших сторін дорівнює 20 см.

198. Перша сторона трикутника у чотири рази менша від другої і на 10 см менша від третьої. Периметр трикутника дорівнює 34 см. Визначте сторони трикутника.

199. У трикутнику ABC сторона AB = 8 см, сторона BC утричі більша за AC, а периметр трикутника дорівнює 32 см. Який із кутів трикутника лежить проти найменшої сторони?

200•. Визначте периметр трикутника, якщо він більший за першу сторону на 8 см, за другу — на 9 см, а за третю — на 11 см.

§12. Сума кутів трикутника

Уроки 25–26

Виконуючи вправи 192–196 з попереднього параграфа, в яких потрібно було виміряти кути різних трикутників, ви, можливо, зауважили, що у кожному з побудованих трикутників сума усіх кутів дорівнює 180°. Чи випадковість це? — Виявляється, ні, а є наслідком однієї з фундаментальних властивостей трикутника. Ця властивість зовсім неочевидна, але ми вже можемо абсолютно строго довести її логічними міркуваннями, тобто як теорему.

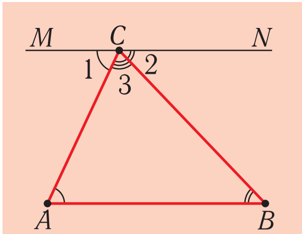


Рис. 3.9

Теорема
(про суму кутів трикутника).

Сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°.

Доведення. Нехай маємо довільний трикутник ABC (рис. 3.9). Проведемо через вершину C пряму MN, паралельну прямій AB. Утворені при цьому кути MCA і NCB позначимо цифрами 1 і 2, а кут C трикутника — цифрою 3.

$\angle A = \angle 1$ — як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих MN і січній CA. З аналогічних причин $\angle B = \angle 2$. Отже, $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$. Кути 1, 3 і 2 разом утворюють розгорнутий кут, який дорівнює 180°. Тому $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, що й треба було довести.

Мартен де Вос.
(1532–1603)
Астрономія. Гравюра
(бл. 1630 р.).
На небесному глобусі тут видно сферичний трикутник.

Наслідки
(про величини кутів трикутника).

Трикутник не може мати двох негострих кутів — прямих або тупих, тобто у кожному трикутнику принаймні два кути — гострі. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Доведення. Якби трикутник мав два негострі кути (прямі або тупі), то їхня сума дорівнювала б 180° або була би більшою за 180°. Тоді яким би не був третій кут, сума всіх кутів трикутника була би більшою за 180°, що суперечить доведеній теоремі.

Оскільки у прямокутному трикутнику один із кутів прямий, то сума двох інших кутів, які є гострими, дорівнює 180° – 90°, тобто 90°. Наслідки доведені.

При доведенні теореми про суму кутів трикутника ми спиралися на властивості паралельних прямих, а саме — на рівність внутрішніх різносторонніх кутів, що утворюються при перетині двох паралельних прямих січною. У свою чергу, ця властивість була доведена на підставі аксіоми про паралельні прямі. Отже, виходить, що теорема про суму кутів трикутника є наслідком аксіоми про паралельні прямі. У геометріях на поверхнях, де не виконується така аксіома, неістинна й доведена на підставі неї теорема. Наприклад, на сфері сума кутів будь-якого трикутника більша за 180° (див. приклад на рис. 3.10), а на псевдосфері, про яку згадувалося у §9, вона менша від 180° (рис. 3.11). На сфері навіть можна накреслити трикутники з двома й трьома прямими чи тупими кутами.

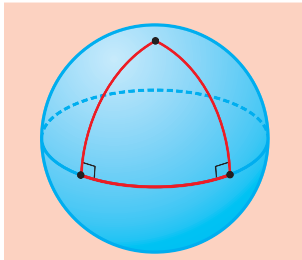


Рис. 3.10

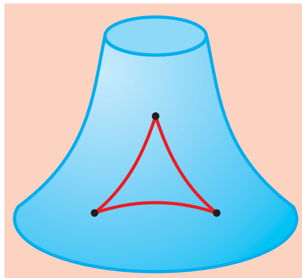


Рис. 3.11

Розв'язуємо разом

Задача 1.

Довести, що бісектриси двох внутрішніх односторонніх кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною, перпендикулярні.

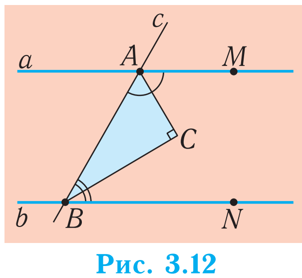


Рис. 3.12

Розв'язання. Нехай прямі a і b — паралельні, AC і BC — бісектриси внутрішніх односторонніх кутів MAB і NBA, утворених з прямими a і b січною c (рис. 3.12). За властивістю паралельних прямих:

$$\angle MAB + \angle NBA = 180°.$$

З іншого боку, з означення бісектриси кута випливає, що

$$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle MAB, \text{ а } \angle ABC = \frac{1}{2}\angle NBA.$$

Нарешті, оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то $\angle C = 180° - (\angle BAC + \angle ABC) = 180° - \frac{1}{2}(\angle MAB + \angle NBA) = 180° - \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$. Отже, $AC \perp BC$. Твердження задачі доведено.

Задача 2.

У трикутнику ABC проведено відрізок KM так, що $\angle 2 = \angle 1$ (рис. 3.13). Довести, що тоді $\angle 4 = \angle 3$.

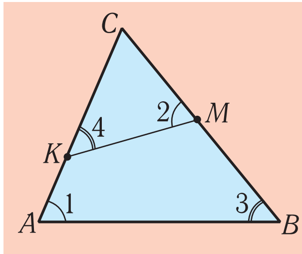


Рис. 3.13

Розв'язання. З ΔCKM: $\angle 4 = 180° - \angle 2 - \angle C$. З ΔABC: $\angle 3 = 180° - \angle 1 - \angle C$.

Оскільки $\angle 1 = \angle 2$, то $\angle 4 = 180° - \angle 1 - \angle C$. Отже, $\angle 4 = \angle 3$. Твердження задачі доведено.

Зауваження. Твердження цієї задачі часто застосовується для прямокутного трикутника, коли відрізок KM проведений з вершини прямого кута під прямим кутом до протилежної сторони (рис. 3.14). Відповідно до доведеного, кут 4 між цим відрізком і однією зі сторін трикутника, яка прилягає до прямого кута, дорівнює гострому куту 3 трикутника, який прилягає до іншої сторони.

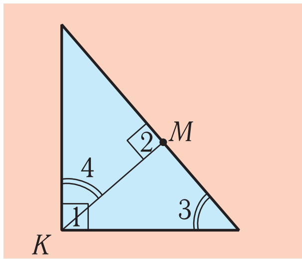


Рис. 3.14

Вправи і задачі

201°. Накресліть який-небудь трикутник, виміряйте за допомогою транспортира його кути і знайдіть їхню суму. Чи підтверджують ваші вимірювання теорему про суму кутів трикутника?

202°. Накресліть за допомогою лінійки і транспортира трикутник із кутами 30° і 110°. Визначте вимірюванням, а потім за допомогою обчислення, третій кут. Чи збігаються результати?

203°. Чи існує трикутник із кутами: а) 20°, 70° і 80°; б) 90°, 45° і 90°; в) 10°, 100° і 110°; г) 65°, 55° і 75°?

204°. Чи існує трикутник із кутами 30°, 50° і 100°? Чи можете ви довести правильність своєї відповіді?

205°. Чи може трикутник не мати жодного: а) гострого кута; б) прямого кута; в) тупого кута? Як ви обґрунтовуєте свої відповіді?

206°. Визначте третій кут трикутника, якщо два його кути мають величини: а) 60° і 90°; б) 30° і 100°; в) 45° і 80°.

207°. Визначте третій кут трикутника, якщо сума двох інших його кутів дорівнює: а) 65°; б) 130°; в) 90°.

208°. Чи може прямокутний трикутник бути і тупокутнім, тобто мати ще й тупий кут?

209°. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 30°. Чому дорівнюють інші його кути?

210. Визначте невідомі кути трикутників, зображених на рис. 3.15, а)–в).

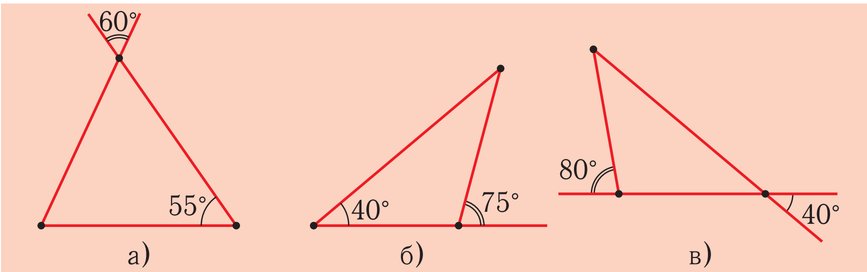


Рис. 3.15

211. Чи можуть усі кути трикутника бути більшими за 60°? А — меншими від 60°? Відповіді обґрунтуйте.

212. Чи може найбільший кут трикутника дорівнювати 55°? А — найменший дорівнювати 65°?

213. Чи може сума будь-яких двох кутів трикутника бути меншою від 120°?

214. Доведіть, що коли два кути одного трикутника дорівнюють відповідно двом кутам іншого трикутника, то й треті їхні кути рівні.

215. Визначте кути трикутника, якщо вони пропорційні числам: а) 1, 2 і 3; б) 2, 3 і 4; в) 3, 5 і 7; г) 2, 3 і 10.

216. Гострі кути прямокутного трикутника відносяться, як 4 : 5. Визначте ці кути.

217. Один із гострих кутів прямокутного трикутника на 42° більший за інший. Визначте ці кути.

218. У трикутнику один із кутів удвічі більший за інший, а третій кут дорівнює 60°. Визначте невідомі кути.

219. У трикутнику один із кутів дорівнює 50°, а два інших відносяться, як 5 : 8. Визначте невідомі кути.

220. Визначте кути трикутника ABC, якщо $\angle A + \angle B = 110°$, а $\angle B + \angle C = 130°$.

221. Доведіть, що коли один із кутів трикутника дорівнює сумі двох інших, то трикутник — прямокутний.

222. Доведіть, що коли сума двох кутів трикутника менша від 90°, то трикутник — тупокутний.

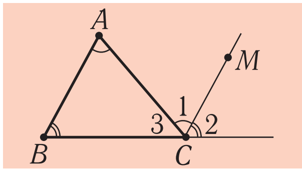


Рис. 3.16

223•. Доведіть, що коли сума будь-яких двох кутів трикутника більша за 90°, то трикутник — гострокутний.

224•. На рис. 3.16 відображені побудови Евкліда для доведення теореми про суму кутів трикутника. Чи можете ви за цими побудовами відтворити доведення Евкліда?

225•. Чому дорівнюють кути, які утворюються при перетині бісектрис двох кутів трикутника, якщо третій кут цього трикутника дорівнює: а) 50°; б) 120°?

226•. У трикутнику ABC проведені бісектриси кутів B і C, які перетинаються в точці D. Доведіть, що $\angle BDC$ дорівнює половині кута A.

§13. Зовнішній кут трикутника

Уроки 27–28

Якщо розглядати трикутник і його кути як частини площини, що обмежуються сторонами цих фігур, то певна частина кожного кута трикутника розміщується всередині трикутника (рис. 3.17). У зв'язку із цим кути трикутника називаються ще *внутрішніми* кутами.

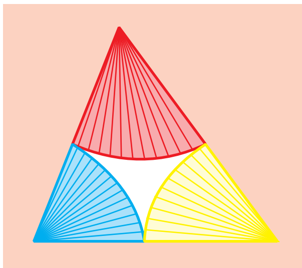


Рис. 3.17

Розрізняють також *зовнішні* кути трикутника.

Означення.

***Зовнішнім кутом* трикутника називаються кут, суміжний із внутрішнім кутом цього трикутника.**

На рис. 3.18 дужками відзначено зовнішній кут ACN трикутника ABC при вершині C.

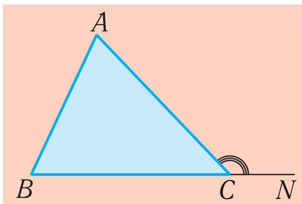


Рис. 3.18

Очевидно, що при кожній вершині трикутника можна розглядати два зовнішні кути, які один до одного є вертикальними (рис. 3.19).

Дуже важливе значення у геометрії, як ми в цьому ще не раз переконаємося, має така властивість зовнішнього кута трикутника.

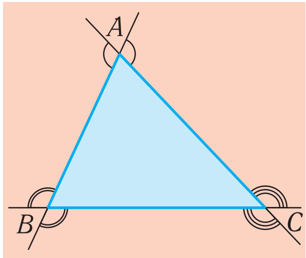


Рис. 3.19

Теорема

(про зовнішній кут трикутника).

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних із ним.

Доведення. Нехай ABM — зовнішній кут трикутник ABC при вершині B (рис. 3.20). Оскільки він є суміжним із внутрішнім кутом B трикутника, то, за властивістю суміжних кутів,

$$\angle ABM = 180° - \angle B.$$

З іншого боку, з теореми про суму кутів трикутника випливає, що

$$\angle A + \angle C = 180° - \angle B.$$

Тому $\angle ABM = \angle A + \angle C$, що й треба було довести.

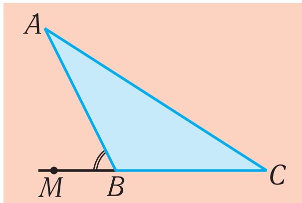


Рис. 3.20

Наслідок.

Зовнішній кут трикутника більший за будь-який внутрішній кут, не суміжний із ним.

Справді, оскільки зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх, не суміжних з ним, то зрозуміло, що ця сума більша за кожний із доданків.

Наприклад, зовнішній кут ABM трикутника ABC при вершині B на рис. 3.20 більший за кожний із внутрішніх кутів A і B, які не суміжні з ним.

Розв'язуємо разом

Задача.

Відома градусна міра кута A трикутника ABC. Проведено бісектриси BB_1 та CC_1 внутрішніх кутів B і C трикутника (рис. 3.21). Визначити кути, які утворюють ці бісектриси при перетині.

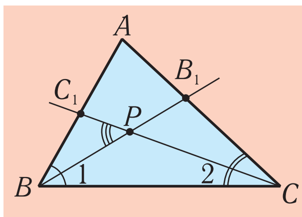


Рис. 3.21

Розв'язання. Нехай P — точка перетину проведених бісектрис. Шуканий кут BPC_1 є зовнішнім для ΔPBC. Тому, за наслідком із теореми про зовнішній кут, $\angle BPC_1 = \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C =$

$= \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$. З іншого боку, з теореми про суму кутів трикутника, $\angle B + \angle C = 180° - \angle A$.

Отже, $\angle BPC_1 = \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° - \frac{\angle A}{2}$.

Інший шуканий кут BPC є суміжним із кутом BPC_1.
Тому $\angle BPC = 180° - \angle BPC_1 = 180° - \left(90° - \frac{\angle A}{2}\right) =$

$= 90° + \frac{\angle A}{2}$.

Відповідь. $90° - \frac{\angle A}{2}$; $90° + \frac{\angle A}{2}$.

Вправи і задачі

227°. Які з дев'яти кутів, позначених на рис. 3.22 цифрами, є зовнішніми для зображеного там трикутника?

228°. Сума кутів A і C трикутника ABC, зображеного на рис. 3.23, дорівнює 130°. Чому дорівнює зовнішній кут при вершині B?

229°. Зовнішній кут трикутника дорівнює 115°. Чому дорівнює сума внутрішніх кутів, не суміжних із ним?

230°. Визначте величини зовнішніх кутів трикутника ABC, зображеного на рис. 3.24.

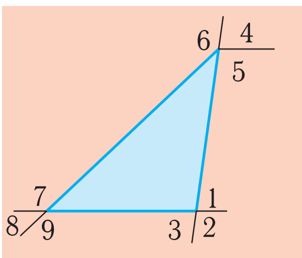


Рис. 3.22

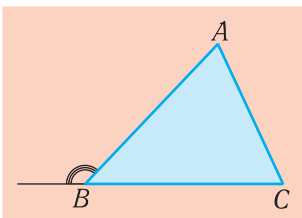


Рис. 3.23

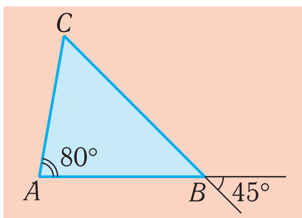


Рис. 3.24

231°. Чому дорівнює сума внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника, взятих при одній вершині?

232°. Чи може зовнішній кут трикутника бути меншим від внутрішнього кута цього трикутника?

233°. Чи може у трикутнику бути: два гострих зовнішніх кути; два прямих зовнішніх кути; два тупих зовнішніх кути?

234°. Скільки всього гострих, прямих і тупих зовнішніх кутів може мати трикутник, якщо при кожній вершині лічити лише один зовнішній кут?

235°. До якого виду належить трикутник, якщо: а) всі його зовнішні кути тупі; б) один із його зовнішніх кутів прямий; в) один із його зовнішніх кутів гострий?

236. Визначте кути трикутника, в якому зовнішні кути при двох вершинах дорівнюють 120° і 150°.

237. Два зовнішніх кути трикутника дорівнюють 100° і 150°. Визначте третій зовнішній кут.

238. У трикутнику один із внутрішніх кутів дорівнює 30°, а один із зовнішніх кутів — 40°. Визначте решту внутрішніх і зовнішніх кутів трикутника.

239. Зовнішній кут трикутника дорівнює 160°. Визначте внутрішні кути трикутника, не суміжні з ним, якщо: а) вони відносяться, як 3 : 5; б) один із них становить 3/5 іншого; в) один із них більший за іншого на 20°; г) їхня різниця дорівнює 40°.

240. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 128°. Визначте внутрішні кути, не суміжні з ним, якщо один із них: а) дорівнює 50°; б) на 38° менший від іншого; в) у 7 разів більший за іншого; г) їхні величини відносяться, як 3 : 5.

241. Один із зовнішніх кутів трикутника дорівнює 130°, а один із внутрішніх — 55°. Визначте інші внутрішні й зовнішні кути трикутника.

242. Визначте кут A трикутника ABC, якщо сума зовнішніх кутів, суміжних із кутами B і C, утричі більша за кут A.

243. Визначте внутрішні кути трикутника, якщо сума двох із них дорівнює 140°, а один із зовнішніх кутів дорівнює 85°.

244. Доведіть, що коли у трикутнику зовнішні кути при двох вершинах рівні, то вони — тупі.

245•. Визначте суму зовнішніх кутів трикутника, взятих по одному при кожній із вершин.

246•. Внутрішні кути трикутника відносяться, як 5 : 6 : 9. Не знаходячи величин цих кутів, визначте відношення зовнішніх кутів цього трикутника.

247•. Визначте внутрішні кути трикутника, якщо його зовнішні кути відносяться, як 2 : 3 : 4.

248•. Доведіть, що бісектриси внутрішнього і зовнішнього кутів трикутника при одній вершині перпендикулярні.

249•. Внутрішній кут трикутника дорівнює різниці зовнішніх кутів, не суміжних із ним. Доведіть, що цей трикутник — прямокутний.

§14. Рівність трикутників. Перша ознака рівності трикутників

Уроки 29–31

Як і будь-які інші фігури, трикутники називаються *рівними*, якщо їх можна сумістити шляхом переміщення.

При цьому під переміщенням розуміють не так реальну, як мисленнєву дію. Наприклад, неможливо реально сумістити два однакові трикутники на вежах-близнюках у канадському місті Реджайна (рис. 3.25), однак архітектори, можливо, сотні разів подумки суміщали їх під час проектування.

Рис. 3.25

20-поверхові (80 м заввишки) хмарочоси-близнюки у столиці канадської провінції Саскачеван — місті Реджайна (зведені у 1992 р.). Унікальною особливістю цих споруд є похилі стіни у вигляді двох рівних трикутників, кут відхилення яких від вертикального розміщення становить 11°.

Зрозуміло, що в рівних трикутників попарно рівні всі сторони і всі кути, причому проти рівних кутів лежать рівні сторони, а проти рівних сторін — рівні кути. На рис. 3.26 зображені рівні трикутники ABC і LMN, у яких рівні сторони позначені однаковою кількістю рисок, а рівні кути — однаковою кількістю дужок.

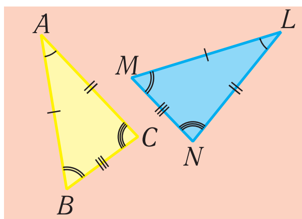


Рис. 3.26

Для позначення рівності трикутників застосовується звичайний значок рівності = . Наприклад, запис $\Delta ABC = \Delta LMN$ значає, що трикутник ABC рівний трикутнику LMN. При цьому вершини рівних кутів записуються на однакових місцях. Зокрема, запис $\Delta ABC = \Delta LMN$ (див. рис. 3.26) означає, що $\angle A = \angle L$, $\angle B = \angle M$, а $\angle C = N$. Якщо ж буде написано, що $\Delta ABC = \Delta NML$, то це означатиме вже зовсім інше, а саме, що $\angle A = \angle N$, $\angle B = \angle M$, а $\angle C = \angle L$.

Чи можна стверджувати, навпаки, що коли в трикутниках попарно рівні всі сторони і всі кути, то такі трикутники рівні, тобто їх можна сумістити?

Простий експеримент продемонструє нам, що відповідь на це питання не така очевидна, як може здатися на перший погляд.

Виріжте із цупкого паперу шаблон трикутника ABC з різними довжинами сторін. Потім на чистому аркуші за допомогою цього шаблона обведіть рівний йому трикутник LMN і переверніть шаблон іншим боком (рис. 3.27). Тепер спробуйте сумістити шаблон ABC з трикутником LMN, не відриваючи його від площини рисунка. Незважаючи на попарну рівність усіх сторін і всіх кутів обох трикутників, вам це не вдасться. Однак якщо ви знову перевернете шаблон, то суміщення легко здійснюється.

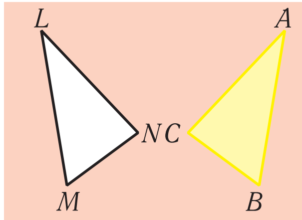
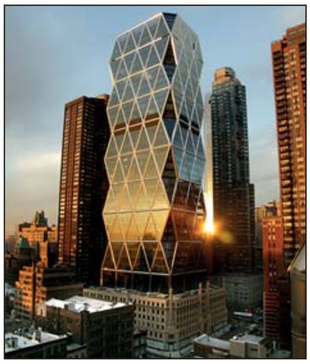


Рис. 3.27

Два різні способи фізичної реалізації переміщення — з виходом за межі площини (і з перевертанням) та без виходу (без перевертання), дають різні відповіді на питання про можливість суміщення трикутників з попарно рівними елементами.

У геометрії вважається, що можливі обидва ці переміщення. Це закріплюється у такій аксіомі.


Вежа **Херст-Тауер** у Нью-Йорку, зведена у 2006 р. за проектом британського архітектора Нормана Фостера (нар. 1935 р.). Висота 182 м (46 поверхів)

Аксіома рухомості трикутника.

Який би не був трикутник, його можна перемістити у задане положення відносно заданої півпрямої.

На рис. 3.28 зображено трикутник ABC і два рівних йому трикутники $A'B'C'$ та $A''B''C''$, сторони $B'C'$, $B''C''$ яких відкладені на півпрямих m, n від їхніх початків, а протилежні вершини A', A'' розміщені у заданій півплощині відносно цих півпрямих. При цьому ми можемо говорити, що трикутник $A'B'C'$ одержується з трикутника ABC «без перевертання», а трикутник $A''B''C''$ — «з перевертанням».

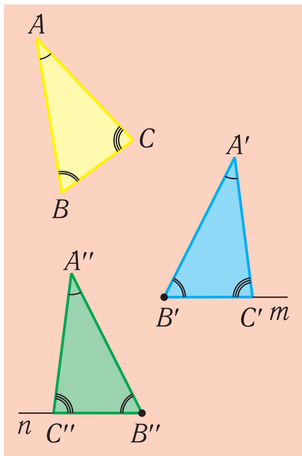


Рис. 3.28

На підставі аксіоми рухомості трикутника вже можна довести, що будь-які два трикутники з попарно рівними елементами є рівними, тобто, що їх можна сумістити. При цьому навіть не обов'язково вимагати рівності усіх шести пар відповідних елементів — трьох пар сторін і трьох пар кутів. Достатньо лише рівності трьох пар. По-різному комбінуючи пари рівних сторін і пари рівних кутів, можна сформувати і довести три *ознаки* рівності трикутників. У цьому параграфі ми доведемо першу ознаку.

Теорема

(перша ознака рівності трикутників — за двома сторонами і кутом між ними).

Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

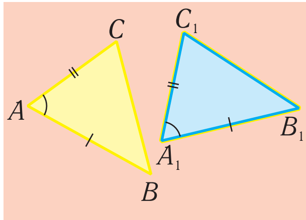


Рис. 3.29

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (рис. 3.29). Потрібно довести, що тоді $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Перемістимо трикутник ABC так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, сторона AB розмістилася на півпрямій A_1B_1, а вершина C — з того боку від прямої A_1B_1, з якого розміщена точка C_1. Згідно з аксіомою рухомості трикутника, цього можна досягти.

Оскільки $AB = A_1B_1$, то, за аксіомою про відкладання відрізків, точка B суміститься з точкою B_1.

Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то, за аксіомою про відкладання кутів, кут A суміститься з кутом A_1, а півпряма AC — з півпрямою A_1C_1. Тоді, за аксіомою про відкладання відрізків, точка C суміститься з точкою C_1 (адже $AC = A_1C_1$).

Оскільки сумістилися кінці відрізків BC і B_1C_1, то сумістилися й самі ці відрізки.

Виходить, що сумістилися всі три пари сторін трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Отже, сумістилися й самі трикутники. Тому вони рівні. Теорему доведено.

Зауваження для скептиків. Декому з учнів, які тільки-но приступають до вивчення геометрії і вперше стикаються зі строгими математичними обґрунтуваннями, доведення деяких теорем видаються абсолютно зайвими. «Хіба й без доведення не очевидно, — інколи запитують вони, — що будь-які два трикутники, які мають дві пари рівних сторін і рівні кути між ними, є рівними?».

Вежа **Сент-Мері Екс 30**, більше відома під неофіційною назвою «Огірочок» (The Gherkin). Це — найвища споруда Лондонського Сіті (висота 180 м; 40 поверхів). Зведена у 2004 р. за проектом **Нормана Фостера**. Каркас споруди, як і вежі Херст-Тауер, складається із величезної кількості рівних трикутників.

Вище ми попереджали такі сумніви тим, що демонстрували поверхні, на яких відповідні «очевидні» властивості все-таки не виконуються. А це вже красномовно свідчило про те, що для цілковитої надійності в застосуванні для площини вони потребують доведення.

Втім, «очевидні» властивості можуть не завжди виконуватися й на площині. Розглянемо приклад.

Дуже схожим на першу ознаку рівності трикутників є таке твердження: якщо дві сторони й кут, *що прилягає до однієї з них,* одного трикутника, відповідно рівні двом сторонам і куту, *що прилягає до однієї з них,* іншого трикутника, то такі трикутники рівні. (Відмінності цього твердження від першої ознаки виділені курсивом).

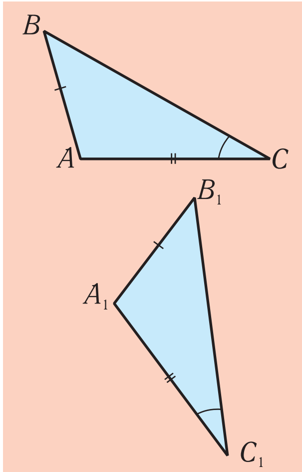


Рис. 3.30

На рис. 3.30 зображені два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, які повністю задовольняють умови цього твердження: у них $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$. І тут справді доволі очевидно, що зображені трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівні між собою. Однак чи можемо ми лише на підставі цього рисунка зробити висновок про те, що сформульоване твердження є ще однією ознакою рівності трикутників?

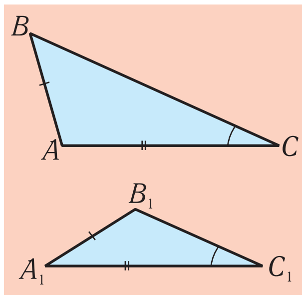


Рис. 3.31

Погляньте на трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, що зображені на рис. 3.31. Вони теж задовольняють зазначені умови: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, однак тепер уже абсолютно очевидно, що ці трикутники не рівні. Тому сформульоване твердження неправильне. Виявляється, що рис. 3.30, з якого можна було зробити загальний висновок, не відображає усіх можливих ситуацій.

Отже, лише на підставі «очевидності», яка випливає з рисунка, без логічного обґрунтування, жодне математичне твердження не може вважатися істинним. Скільки б не нарисувати рисунків, їх усе одно буде скінченна кількість. Тому завжди залишатиметься небезпека, що якоїсь важливої деталі не було враховано.

Розв'язуємо разом

Ознаки рівності трикутників застосовуються у геометрії дуже часто. Одне з найпоширеніших застосувань — для відшукання відстаней і кутів. Для цього невідомі відрізки або кути включають у певні трикутники і визначають з того, що ці трикутники рівні іншим трикутникам, у яких відповідні елементи є відомими.

Розглянемо один приклад втілення цієї ідеї.

Припустимо, що для реалізації певного проекту необхідно визначити протяжність озера у напрямку AB (рис. 3.32). Візьмемо на березі точку C так, щоб відстань CB можна було визначити безпосереднім вимірюванням, і побудуємо кут ACE, рівний куту ACB. Потім уздовж променя CE відкладемо відрізок CD, який рівний відстані CB. Тоді відстань AD дорівнюватиме шуканій ширині озера AB.

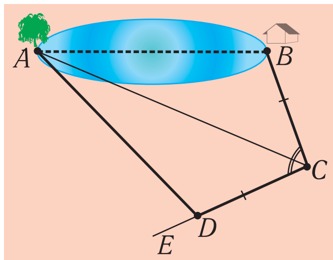


Рис. 3.32

Справді, у трикутниках ACB і ACD сторона AC — спільна. Сторони CB і CD та кути ACB і ACD рівні за побудовою. Тому, за першою ознакою, ці трикутники рівні. А з рівності трикутників випливає рівність сторін, що лежать проти рівних кутів. Сторони AB та AD якраз і лежать проти рівних кутів, тому вони й рівні між собою. Отже, якщо безпосередньо виміряємо одну з них, сторону AD, в одному трикутнику, то знатимемо й довжину іншої, сторони AB, в іншому.

Вправи і задачі

250°. Накресліть у різних положеннях два трикутники зі сторонами 3 см і 6 см та кутом між ними 70°. Виміряйте за допомогою лінійки треті сторони накреслених трикутників, а за допомогою транспортира — інші їхні кути. Чи рівні ці елементи в обох трикутниках?

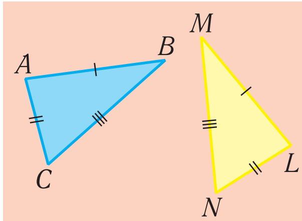


Рис. 3.33

251°. На рис. 3.33 зображені два рівні трикутники ABC і LMN. Доповніть записи: ΔCAB = …; BC = …; NL = …; $\angle C$ = …; $\angle L$ = …; $\angle BCA$ = …; $\angle MLN$ = … .

252°. Дано два рівних трикутники ABC і DEM. Які кути трикутника ABC дорівнюють кутам D, E, M? Які сторони трикутника DEM дорівнюють сторонам AC і BC?

253°. Дано два рівних трикутники ABC і LMN.
1) $AB = 5$ см, $\angle A = 90°$. Чому дорівнюють сторона ML і кут MLN?
2) $\angle L = 75°$, $LM = 10$ см, $NL = 5$ см. Чому дорівнюють кут BAC і сторони AB та AC?

254°. Відомо, що $\Delta ABC = \Delta EFG = \Delta LMN$ і при цьому $\angle F = 30°$, $\angle N = 80°$. Визначте невідомі кути усіх трьох трикутників.

255°. Відомо, що $\Delta ABC = \Delta EFG = \Delta LMN$ і при цьому $EG = 6$ см, $LM = 8$ см, $P_{\Delta ABC} =$ $= 25$ см. Визначте невідомі сторони усіх трьох трикутників.

256°. У трикутнику ABC усі сторони мають різні довжини. Чи рівні трикутники ABC і BAC?

257°. Чи можна стверджувати, що коли трикутник ABC рівний трикутнику $A_1B_1C_1$, а трикутник $A_1B_1C_1$ — рівний трикутнику $A_2B_2C_2$, то трикутники ABC і $A_2B_2C_2$ рівні між собою? Обґрунтуйте свою відповідь.

258°. Відомо, що трикутники ABC і CAB рівні. Обґрунтуйте, що в трикутнику ABC всі сторони рівні.

259. Периметр одного трикутника більший за периметр іншого. Чи можуть бути рівними ці трикутники? Відповідь обґрунтуйте.

260. Виконайте за допомогою креслярських інструментів такі побудови. Спочатку накресліть дві прямі, що перетинаються в точці O. Потім на одній з них відкладіть рівні відрізки OA і OB, а на іншій — рівні відрізки OC і OD. Сполучіть, нарешті, відрізками послідовно точки A, C, B і D. Чи утворилися в результаті цих побудов рівні трикутники? Відповідь обґрунтуйте.

261. Дано: $AD = BC$, $\angle ADB = \angle DBC$ (рис. 3.34, а). Доведіть, що $AB = DC$, $\angle A = \angle C$.

262. Дано: $AB = AC$, $\angle BAO = \angle CAO$ (рис. 3.34, б). Доведіть, що $BO = CO$.

263. Дано: $\angle MAD = \angle NBE$, $AD = BE$, $AC = CB$ (рис. 3.34, в). Доведіть, що $CD = CE$, $\angle ACD = \angle BCE$.

264. Дано: $AC = BD$, $\angle CAB = \angle DBA$ (рис. 3.34, г). Доведіть, що $\angle DAB = \angle CBA$, $AD = CB$.

265. Дано: $AC = BC$; $CD = CE$ (рис. 3.34, ґ). Доведіть, що $\Delta ACE = \Delta BCD$.

266. Дано: $MA = MB$, $AC = BD$, $\angle MAC = \angle MBD$ (рис. 3.34, д). Доведіть, що $\angle MCD = \angle MDC$.

267. У рівних трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ точки M і M_1 — відповідно середини сторін BC і B_1C_1. Доведіть, що відрізок AM рівний відрізку A_1M_1.

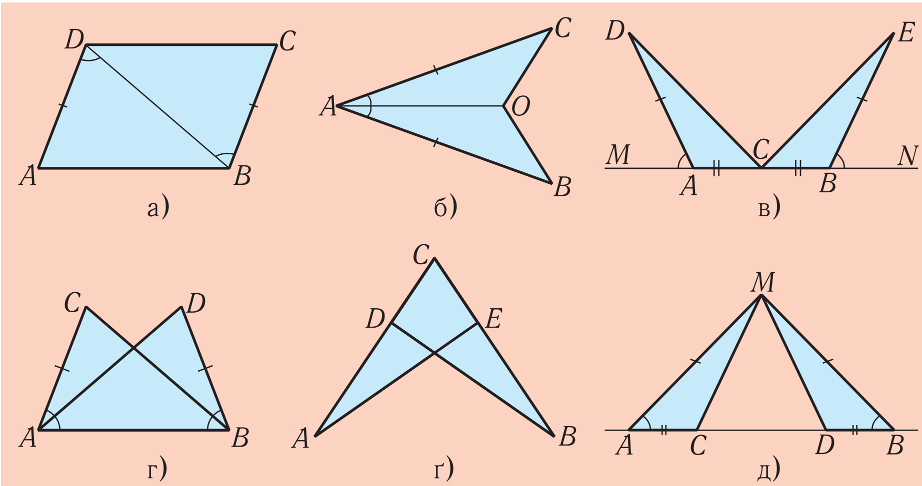


Рис. 3.34

268. На сторонах кута A відкладено рівні відрізки AC і AD, а потім на цих відрізках узято такі точки E і F, що $AE = AF$. Доведіть, що $\angle CED = \angle DFC$.

269. На рис. 3.35 $BO = OC$, $AO \perp BC$. Доведіть, що $AB = AC$, $DB = DC$.

270. На рис. 3.36 зображено спосіб визначення відстані між точками A і B, розділених водоймою. Опишіть деталі цих побудов та обґрунтуйте їх.

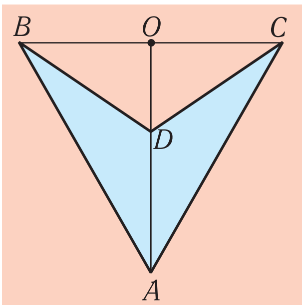


Рис. 3.35

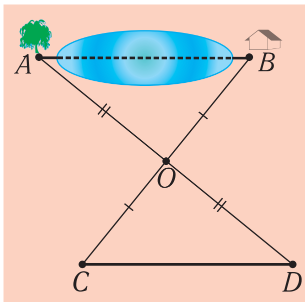


Рис. 3.36

271•. На рис. 3.37 зображено спосіб визначення протяжності озера у напрямку AB з використанням екера для побудови прямих кутів ACB та ACD. Опишіть деталі цих побудов та обґрунтуйте їх.

272•. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. Доведіть, що $AD \parallel BC$, $AC \parallel BD$.

273•. На рис. 3.38 $\Delta ABM = \Delta ACN$. Доведіть, що $\Delta ABN = \Delta ACM$.

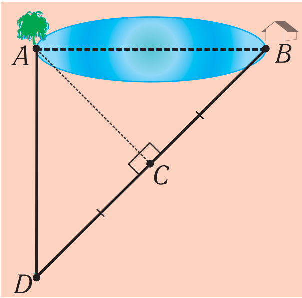


Рис. 3.37

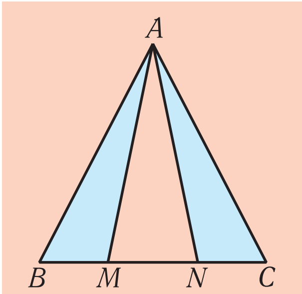


Рис. 3.38

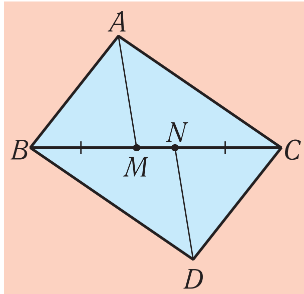


Рис. 3.39

274•. На рис. 3.39 $\Delta ABC = \Delta DCB$, $BM = CN$. Доведіть, що $AM \parallel DN$.

275•. У трикутнику ABC $AB = AC$. Бісектриса кута BAC перетинає сторону BC у точці D. Доведіть, що $AD \perp BC$.

§15. Друга ознака рівності трикутників

Уроки 32–33

Аналогічно до першої ознаки рівності трикутників доводиться друга ознака.

Теорема

(друга ознака рівності трикутників — за стороною і двома прилеглими кутами).

Якщо сторона і два прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 3.40). Потрібно довести, що тоді $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

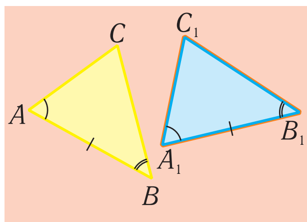


Рис. 3.40

Перемістимо трикутник ABC так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, сторона AB розмістилася на півпрямій A_1B_1, а вершина C — з того боку від прямої A_1B_1, з якого розміщена точка C_1. Згідно з аксіомою рухомості трикутника, цього можна досягти.

Оскільки $AB = A_1B_1$, то, за аксіомою про відкладання відрізків, точка B суміститься з точкою B_1.

Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то, за аксіомою про відкладання кутів, кут A суміститься з кутом A_1, а півпряма AC, отже, — з півпрямою A_1C_1.

Міркуючи так само стосовно кутів B і B_1, дійдемо висновку, що півпряма BC суміститься з півпрямою B_1C_1. При цьому спільна точка C півпрямих AC і BC суміститься зі спільною точкою C_1 півпрямих A_1C_1 і B_1C_1, оскільки дві півпрямі можуть мати не більше однієї спільної точки.

Виходить, що сумістилися всі три пари вершин трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. Отже, сумістилися і їхні сторони, а тому й самі трикутники. Отже, ці трикутники рівні. Теорему доведено.

Рівні трикутники на даху

Розв'язуємо разом

Задача.

На сторонах кута A відкладені рівні відрізки AB і AC, а потім інші рівні відрізки BK і CM, як показано на рис. 3.41. Нехай O — точка перетину відрізків BM і CK. Довести, що промінь AO ділить кут A навпіл, тобто є бісектрисою цього кута.

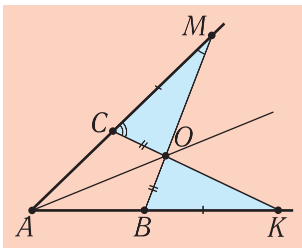


Рис. 3.41

Р о з в' я з а н н я. Оскільки відрізки AK і AM дорівнюють сумам $AB + BK$ та $AC + CM$ відповідно рівних відрізків, то вони рівні між собою.

Розглянемо трикутники AKC та AMB. Вони мають спільний кут MAK і рівні відповідні сторони, що утворюють цей кут: $AK = AM$, $AC = AB$. Тому, за першою ознакою, ці трикутники рівні. Звідси $\angle K = \angle M$.

Розглянемо тоді трикутники BOK і COM. У них рівні сторони BK і CM, рівні прилеглі до них кути K і M, а також рівні кути BOK та COM (як вертикальні). Тому рівними є й прилеглі кути OBK та OCM, оскільки сума всіх кутів трикутника дорівнює 180°.

Тому, за другою ознакою, ці трикутники рівні. Звідси $BO = CO$.

Розглянемо, нарешті, трикутники AOB та AOC. У них рівні відповідні сторони AB і AC (за побудовою) та BO і CO (як щойно з'ясовано), а також кути ABO та ACO між ними (вони є суміжними з рівними кутами OBK і OCM). Тому, за першою ознакою, ці трикутники рівні. Звідси $\angle OAB = \angle OAC$, що й треба було довести.

З а у в а ж е н н я. Результатом розв'язаної задачі можна скористатися для ділення кута навпіл, тобто для побудови його бісектриси. Відкладемо на сторонах кута A рівні відрізки AB і AC, а потім інші рівні відрізки BK і CM. Найпростіше це зробити за допомогою циркуля, як показано на рис. 3.42 (ніжка циркуля ставиться у точку A). Далі визначимо точку O перетину відрізків BM та CK. Тоді AO — шукана бісектриса.

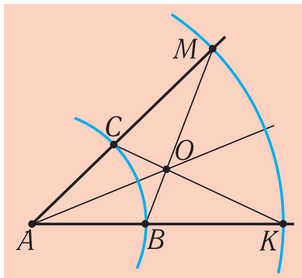


Рис. 3.42

Вправи і задачі

276°. Накресліть у різних положеннях два трикутники зі стороною 6 см і прилеглими до неї кутами 45° і 70°. Виміряйте за допомогою лінійки інші сторони накреслених трикутників, а за допомогою транспортира — їхні кути. Чи рівні ці елементи в обох трикутниках?

277°. На рис. 3.43 пряма AC містить бісектриси кутів A і C. Доведіть, що $\angle B = \angle D$.

278°. Накресліть який-небудь нерозгорнутий кут A і проведіть його бісектрису. На бісектрисі візьміть довільну точку M і за допомогою косинця проведіть через неї пряму, перпендикулярну до бісектриси. Позначте літерами B і C точки перетину цієї прямої зі сторонами кута. Переконайтесь за допомогою вимірювання, а потім обґрунтуйте логічно, що відрізки AB і AC рівні.

279°. На рис. 3.44 $BC = CF$, $AC = CD$, $AD \perp BF$. Доведіть рівність трикутників ABC і DFC, а також рівність відрізків AB і DF.

280°. На рис. 3.45 $AO = CO$, $\angle A = \angle C$. Доведіть рівність трикутників AOB і COD, а також рівність відрізків AB і CD.

281. На рис. 3.46 $\angle DBC = \angle ACB$, $\angle ABC = \angle DCB$. Доведіть рівність відрізків AB і DC.

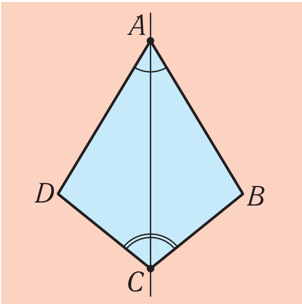


Рис. 3.43

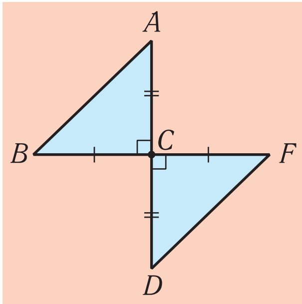


Рис. 3.44

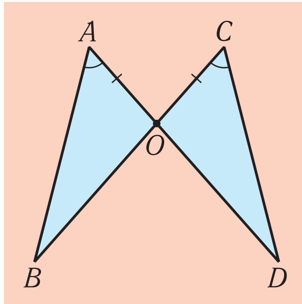


Рис. 3.45

282. На рис. 3.47 $\angle B = \angle F$, $\angle ACF = \angle BED$, $BE = CF$. Доведіть рівність трикутників ABC і DFE.

283. На рис. 3.48 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$. Доведіть рівність трикутників ABD і CDB.

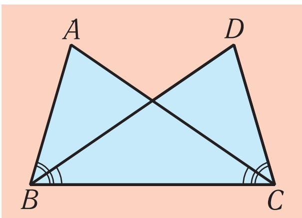


Рис. 3.46

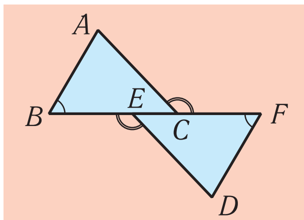


Рис. 3.47

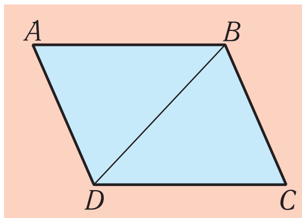


Рис. 3.48

284. У трикутнику ABC $AB = AC$. На сторонах AB і AC позначені відповідно точки M і N так, що $\angle ACM = \angle ABN$. Доведіть, що відрізки BN і CN рівні.

285. Накресліть відрізок AB завдовжки 6 см і проведіть через його середину O яку-небудь пряму m, яка не є перпендикулярною до відрізка AB. Далі з допомогою косинця проведіть з точок A і B перпендикуляри AD та BF до прямої m. Переконайтесь за допомогою вимірювання, а потім обґрунтуйте логічно, що ці перпендикуляри рівні.

286. На рис. 3.49 $\Delta ABC = \Delta DBC$, а точки B, C, E розміщені на одній прямій. Доведіть, що тоді $\Delta ACE = \Delta DCE$.

287. На рис. 3.50 прямі AC і DB паралельні, а точка O є серединою відрізка AB. Доведіть, що ця точка є також серединою відрізка CD.

288. Точки M і N розміщені по різні боки від прямої AB, і при цьому $MA = NB$, $\angle MAB = \angle NBA$ (рис. 3.51). Доведіть, що відрізки MN і AB діляться точкою O перетину навпіл.

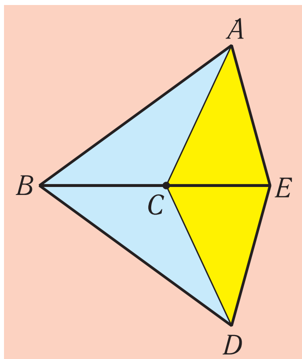


Рис. 3.49

289. На рис. 3.52 $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$. Доведіть, що $AB = DC$, $AD = BC$.

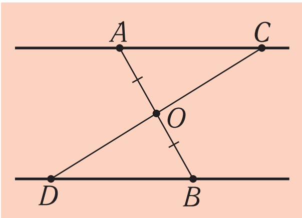


Рис. 3.50

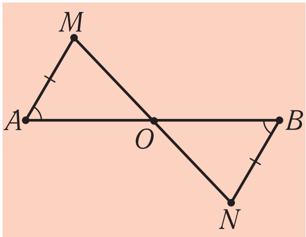


Рис. 3.51

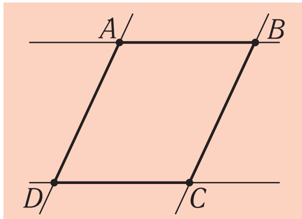


Рис. 3.52

290. На рис. 3.53 $\Delta AOM = \Delta COL$. Доведіть, що тоді $\Delta ABL = \Delta CMB$.

291•. На рис. 3.54 $\Delta ABC = \Delta DCB$. Доведіть, що тоді $\Delta AOB = \Delta DOC$.

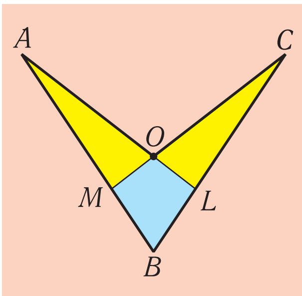


Рис. 3.53

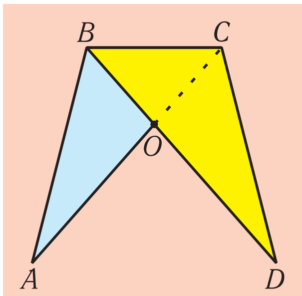


Рис. 3.54

292•. Доведіть, навівши відповідний приклад, що коли сторона і два кути одного трикутника дорівнюють стороні і двом кутам іншого трикутника, то трикутники можуть бути й не рівними.

293•. Сторона і три кути одного трикутника дорівнюють стороні і трьом кутам іншого трикутника. Чи обов'язково рівні ці трикутники?

294•. Доведіть, що існують нерівні трикутники з відповідно рівними кутами.

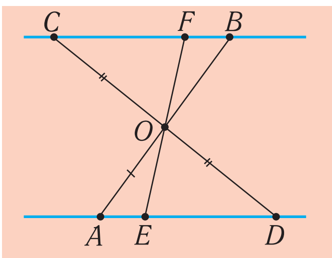


Рис. 3.55

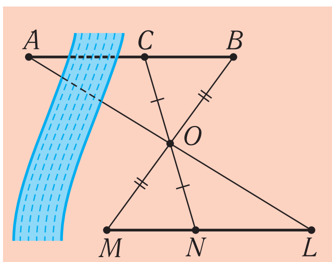


Рис. 3.56

295•. На бісектрисі кута A взято деяку точку K, а на сторонах кута — такі точки M і N, щоб кут AKM дорівнював куту AKN. Доведіть, що тоді пряма MN буде перпендикулярною до AK.

296•. Дано: $OA = OB$, $OC = OD$ (рис. 3.55). Доведіть, що тоді $OE = OF$.

297•. На рис. 3.56 відображений спосіб побудов на місцевості для визначення відстані між точками A і B, розділених перешкодою для безпосереднього вимірювання. Спочатку на прямій BA на доступній її частині ставиться віха C. Потім ставиться віха у деякій точці O, і з допомогою візування та вимірювання знаходяться такі положення віх M, N на прямих OB та OC, для яких $OM = OB$, $ON = OC$. Нарешті, йдучи по прямій MN, за допомогою візування знаходять на ній таку точка L, яка розміщена і на прямій AO. Тоді відстань ML, яку вже можна знайти безпосереднім вимірюванням, дорівнюватиме шуканій відстані BA. Обґрунтуйте правильність такого способу.

§16. Рівнобедрений трикутник і його властивості

Уроки 34–36

Трикутних є однією з найпоширеніших архітектурних форм, що застосовується як у проектуванні каркасів споруд, так і в декоруванні. При цьому як правило застосовуються трикутники, що мають рівні сторони. Такі трикутники називаються *рівнобедреними* і *рівносторонніми*.

Означення.

Трикутник називається *рівнобедреним*, якщо він має дві рівні сторони. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називаються *бічними сторонами*, а третя сторона — *основою*. Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається *рівностороннім* або *правильним*.

Зазначимо також, що трикутник, у якого всі сторони різні, інколи називають *різностороннім*.

На рис. 3.57, а) зображено рівнобедрений трикутник ABC з бічними сторонами AB і AC та основою BC, а на рис. 3.57, б) — рівносторонній трикутник LMN.

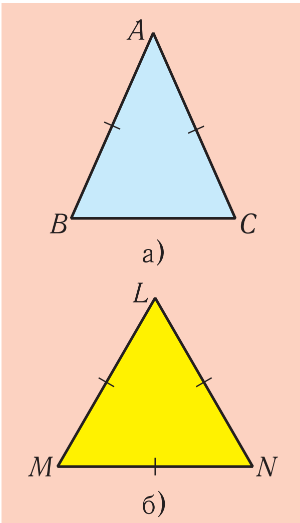


Рис. 3.57

Коли говорять про *вершину* рівнобедреного трикутника, то зазвичай мають на увазі ту із трьох його

Рис. 3.58

вершин, яка є протилежною до основи. Інші дві вершини називають *вершинами при основі*. На рис. 3.57, а) A — вершина рівнобедреного трикутника ABC, B і C — вершини при його основі.

На рис. 3.58 вміщена добірка ілюстрацій архітектурних споруд різних часів, стилів і призначення, які мають деталі у формі рівнобедрених трикутників. Та найвидатнішим пам'ятником рівнобедреному трикутнику, мабуть, стане паризька «Трикутна вежа»

Рис. 3.59

(La tour Triangle), якщо цей грандіозний «кришталевий» проект буде реалізований (на рис. 3.59 зображений його макет). Планується, що вежа матиме 42 поверхи і 180 м у висоту. Це буде третя за висотою споруда Парижа після знаменитої Ейфелевої вежі (1887 р., 324 м) та вежі Монпарнас (1972 р., 210 м). Будівництво вежі планувалося на 2015–17 рр., однак після спеціального голосування депутатів паризької міської ради, що відбулося у листопаді 2014 р., було відкладене на невизначений термін: серед громадськості побутує думка про надмірну дорожнечу проекту і шкідливість для природного та історико-культурного довкілля.

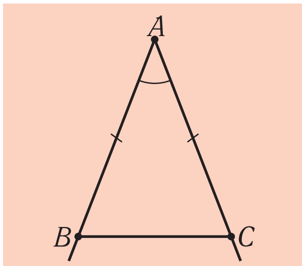


Рис. 3.60

Найпростіше побудувати рівнобедрений трикутник за кутом при вершині і бічною стороною. Спочатку будують кут A, що має потрібну величину, а потім на його сторонах від вершини відкладають рівні відрізки AB і AC потрібної довжини (рис. 3.60). Сполучивши точки B і C відрізком, дістають рівнобедрений трикутник ABC із заданим кутом при вершині і заданою бічною стороною.

Побудови ускладнюються, якщо трикутник повинен мати задані бічну сторону та основу. Для реалізації таких побудов потрібен циркуль. Зафіксуємо розхил циркуля на величину бічної сторони. Поставимо його ніжку в кінець B відрізка BC, що рівний основі трикутника, і проведемо дугу (рис. 3.61). Всі точки цієї дуги віддалені від точки B на одну й ту саму відстань, що дорівнює величині розхилу циркуля. Якщо потім поставимо ніжку циркуля у точку C і тим самим розхилом проведемо ще одну дугу, то перетин обох дуг дасть точку A, яка віддалена від обох точок B і C на величину розхилу циркуля, тобто на довжину заданої бічної сторони трикутника. Залишається тільки з допомогою лінійки провести відрізки AB і AC. Трикутник ABC — шуканий, BC — його основа, AB і BC — рівні бічні сторони.

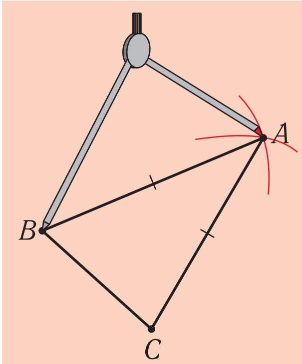


Рис. 3.61

Якщо виміряти за допомогою транспортира кути при основі побудованих рівнобедрених трикутників, то вони виявляться рівними. *Це — властивість будь-якого рівнобедреного трикутника*.

Провести доведення цієї властивості, а також сформулювати й довести інші властивості рівнобедрених трикутників зручно з використанням відрізків, які називаються *бісектрисою*, *медіаною* і *висотою* трикутника.

Означення.

Бісектрисою **трикутника називається відрізок бісектриси його внутрішнього кута, який сполучає вершину трикутника із точкою на його протилежній стороні.**

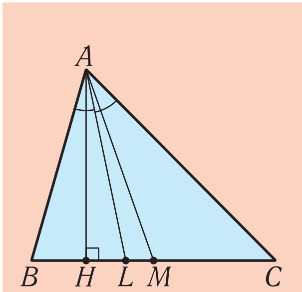


Рис. 3.62

На рис. 3.62 AL — бісектриса трикутника ABC, проведена з вершини A до протилежної сторони BC.

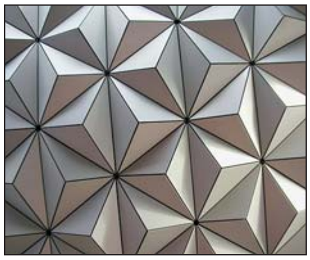
Термін «бісектриса» запозичений з французької мови. У свою чергу, французьке слово bissectrice утворилося від латинських слів bis — «двічі» та secare — «розтинати» і дослівно означає «розтинати навпіл».

Означення.

Медіаною **трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.**

На рис. 3.62 AM — медіана трикутника ABC, проведена з вершини A до середини M протилежної сторони BC.

Термін «медіана» утворений від латинського слова medius — «середній».



Рівнобедрені трикутники на павільйоні «Космічний корабель "Земля"» у Діснейленді (США)

Означення.

Висотою **трикутника називається перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.**

На рис. 3.62 AH — висота трикутника ABC, проведена з вершини A до прямої, що містить протилежну сторону BC.

Теорема

(про властивості рівнобедреного трикутника).

Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, ділить трикутник на два рівних трикутники, а також є медіаною й висотою трикутника. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.

Доведення. Нехай AL — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC, проведена з вершини A до основи BC (рис. 3.63). Оскільки, за означенням рівнобедреного трикутника, $AB = AC$, а за означенням бісектриси, $\angle BAL = \angle CAL$, то, за першою ознакою рівності трикутників, $\Delta ALB = \Delta ALC$. Отже, справді, бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, ділить трикутник на два рівних трикутники.

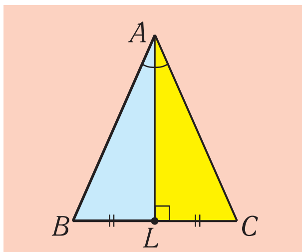


Рис. 3.63

З рівності трикутників ALB і ALC випливає, що $BL = CL$. Отже, AL — медіана трикутника ABC. Крім цього, $\angle ALB = \angle ALC$, а оскільки ці кути утворюють розгорнутий кут, то вони — прямі. Отже, AL — висота трикутника ABC. Нарешті, $\angle B = \angle C$, а тому кути при основі рівнобедреного трикутника рівні. Теорему доведено.

Оскільки доведеною теоремою встановлено, що бісектриса, медіана й висота рівнобедреного трикутника, проведені до основи, збігаються, то істинними є й такі твердження:

1) ***медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є водночас бісектрисою і висотою*;**

2) ***висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є водночас бісектрисою і медіаною*.**

Безпосереднім наслідком з доведеної теореми є наступна теорема.

Теорема

(про властивість кутів рівностороннього трикутника).

Всі кути рівностороннього трикутника рівні і дорівнюють по 60°.

Доведення. Нехай маємо рівносторонній трикутник ABC (рис. 3.64). З рівності його сторін AB і AC, за доведеною теоремою, випливає рівність кутів 1 і 2, а з рівності сторін BA і BC — рівність кутів 2 і 3. Отже, всі три кути рівностороннього трикутника рівні. А оскільки сума кутів трикутника дорівнює 180°, то кожен із кутів 1, 2, 3 дорівнює третині від цієї суми, тобто 60°. Теорему доведено.

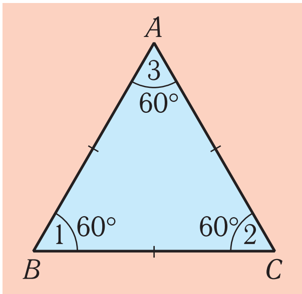


Рис. 3.64

Застосування у конструкції старовинних ватерпасів

Ватерпас — прилад для перевірки горизонтального розміщення прямолінійних предметів, наприклад, рейок і брусів. Найпростіший ватерпас, що застосовувався колись у будівництві, складався із дерев'яного рівнобедреного трикутника ABC, до основи AB якого прилягала вивірена рівна дошка FG, а до вершини C на нитці підвішувався тягарець E (рис. 3.65). Якщо тягарець розміщувався строго над зубцем D, який уособлював середину основи AB, то це означало, що нитка CE спрямована по медіані CD рівнобедреного трикутника ABC, а отже, й по його висоті. Тоді дошка FG була перпендикулярною до лінії CE дії сили тяжіння, тобто займала горизонтальне положення. У противному разі її положення не було горизонтальним.

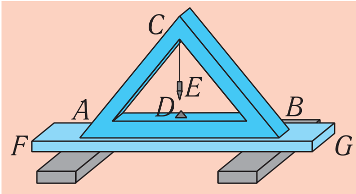


Рис. 3.65

Лише знаючи ці обставини, можна розгадати значення ватерпаса, з яким французькі художники XIX ст. зображали Маріанну — символічний образ французької республіки. На рис. 3.66 відтворений один із найвідоміших таких творів — картина Жуля Клода Зіглера «Республіка» (1848 р.). У правій руці Маріанна тримає ватерпас, яким урівноважує три найголовніші чесноти республіки, записані за нею золотистими літерами (теж у вершинах рівнобедреного трикутника): Свобода, Рівність Братерство (Liberté, Égalité, Fraternité).

Рис. 3.66

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

Яким може бути розміщення висот у трикутнику

З означення бісектриси і медіани трикутника очевидно, що ці відрізки проходять усередині трикутника (див. рис. 3.62, на якому AL — бісектриса, AM — медіана трикутника ABC). Щодо висоти AH, то ситуація не така очевидна. На рис. 3.67, а) відображений випадок, коли обидва кути B і C — гострі. Доведемо, що в усіх таких випадках висота AH проходить усередині трикутника.

Припустимо супротивне. Можливі дві ситуації: або точка H лежить ближче до точки B, ніж до точки C (рис. 3.67, б), або точка H лежить ближче до точки

C, ніж до точки B (рис. 3.67, в). При першій ситуації зовнішній кут ABC прямокутного трикутника ADB, який є гострим кутом трикутника ABC, був би більшим за прямий внутрішній кут H, що неможливо. При другій ситуації з аналогічних причин гострий кут C трикутника ABC був би більшим за прямий кут H трикутника AHC. Оскільки жодна із цих ситуацій неможлива, то зроблене припущення неправильне. Отже, висота AH трикутника у цьому разі справді проходить усередині трикутника.

Якщо у трикутнику всі кути гострі, тобто трикутник є гострокутним, то з доведеного випливає, що тоді всі три його висоти проходять усередині трикутника (рис. 3.68). На уроках геометрії у 8 класі буде доведено, що всі вони перетинаються в одній точці.

Якщо ж у трикутнику ABC один із кутів ($\angle B$ або $\angle C$) є прямим, то очевидно, що тоді висота AH збігається з однією зі сторін, яка прилягає до прямого кута (рис. 3.69). Інша сторона прямого кута міститиме другу висоту трикутника, а третя висота, як доведено вище (оскільки кути A і C — гострі), проходитиме всередині трикутника. Тоді й без доведення очевидно, що всі три висоти перетинаються в одній точці — у вершині прямого кута.

Нехай тепер один із кутів ($\angle B$ або $\angle C$) трикутника ABC, наприклад, B — тупий. Тоді висота AH проходитиме ззовні трикутника (рис. 3.70, а). Справді, якщо припустимо супротивне (рис. 3.70, б), то матимемо, що зовнішній кут AHC прямокутного трикутника

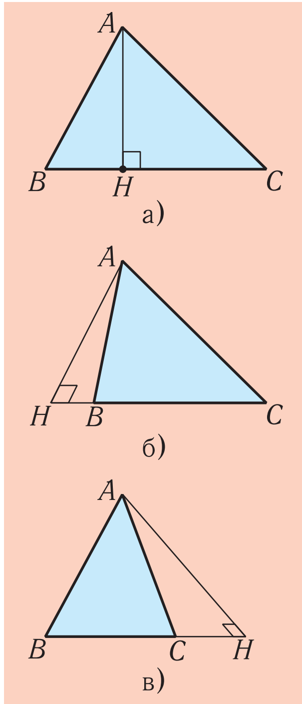


Рис. 3.67

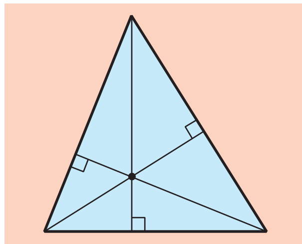


Рис. 3.68

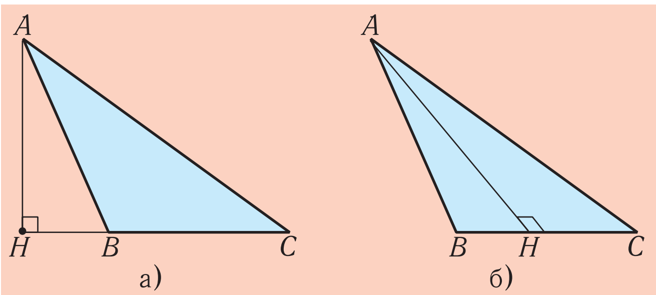


Рис. 3.70

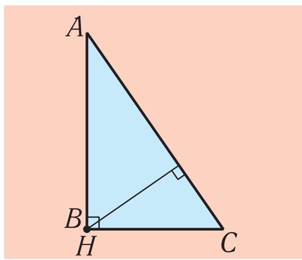


Рис. 3.69

AHB, який є прямим, більший за тупий внутрішній кут B. Оскільки таке неможливе, то припущення неправомірне. Отже, висота AH трикутника у цьому разі справді проходить ззовні трикутника.

У трикутнику може бути лише один тупий кут, і тоді два інші його кути обов'язково гострі. Тому одна з висот тупокутного трикутника проходить усередині трикутника, а дві інші — ззовні нього (рис. 3.71). У 8 класі буде доведено, що всі три прямі, які містять ці висоти, перетинаються в одній точці.

Принагідно зазначимо, що всі три медіани і всі три бісектриси трикутника також перетинаються в одній точці. Для медіан цю властивість (рис. 3.72) теж буде доведено у 8 класі, а для бісектрис — уже невдовзі, в останньому розділі цього підручника.

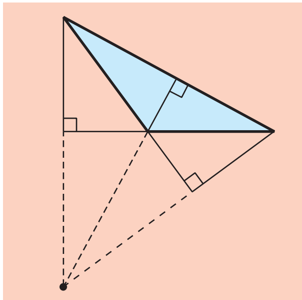


Рис. 3.71

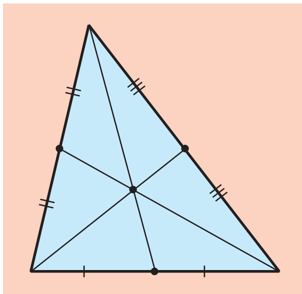


Рис. 3.72

Вправи і задачі

298°. Накресліть кут A, що дорівнює 70°, і проведіть його бісектрису. Потім через точку L бісектриси, яка знаходиться на відстані 5 см від точки A, проведіть пряму, перпендикулярну до бісектриси, і позначте буквами B і C точки перетину цієї прямої зі сторонами кута A. Виміряйте сторони і кути трикутника ABC. Які висновки про вид цього трикутника ви зробите?

299°. Накресліть відрізок BC завдовжки 5 см, а потім за допомогою циркуля з розхилом 5 см проведіть два кола із центрами B, C. Нехай A і D — точки перетину цих кіл. Сполучіть відрізками кожну з точок A і D з точками B і C. До якого виду належать одержані трикутники ABC і DBC? Чому дорівнюють їхні кути?

300°. На рис. 3.73 зображена арка головного порталу готичного кафедрального собору в Севільї (Іспанія) (собор зведений у 1506 р.). Арка вписується у трикутний фронтон. Визначте з допомогою вимірювання кути цього трикутника. До якого виду (за сторонами і за кутами) він належить?

Рис. 3.73

Рис. 3.74

301°. На рис. 3.74 відтворена одна із композицій художника-абстракціоніста В. Кандинського, на якій, як уважається, за допомогою послідовності рівнобедрених трикутників відображено перехід земної і людської енергії (тепліші кольори) у космічну (холодні кольори). Чи є тут геометрично рівні фігури?

302°. У трикутнику LMN $MN = LN$. Чи є в цьому трикутнику рівні кути? Чому вони дорівнюють, якщо кут N дорівнює 100°?

303°. У трикутнику ABC сторони, які прилягають до кута C, рівні. Рівні також кути, що прилягають до сторони AC. Яким є цей трикутник?

304°. Периметр рівностороннього трикутника дорівнює 18 см. Визначте довжину його сторони.

305°. Визначте периметр рівнобедреного трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 7 см, а основа на 3 см менша від бічної сторони.

306°. Доведіть, що зовнішні кути при вершинах основи рівнобедреного трикутника рівні.

307°. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 120°. Визначте кути при основі трикутника.

308°. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 45°. Визначте кут між його бічними сторонами.

309°. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 50°. Визначте зовнішні кути при вершинах основи.

310°. Зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 130°. Визначте зовнішній кут при вершині.

311°. Доведіть, що коли основа й кут при основі одного рівнобедреного трикутника відповідно дорівнюють основі й куту при основі іншого рівнобедреного трикутника, то такі трикутники рівні.

312°. Доведіть, що рівнобедрені трикутники рівні, якщо бічна сторона й кут при вершині одного трикутника дорівнюють відповідно бічній стороні й куту при вершині іншого трикутника.

313. На рис. 3.75 подано дві світлини, на яких у різних ракурсах зображено споруду Музею сучасного мистецтва у Клівленді (США, штат Огайо), зведену за проектом британської архітекторки іранського походження Фаршид Муссаві (нар. 1965 р.) (музей відкритий для відвідувачів у серпні 2012 р.). Як ви гадаєте, які трикутники взяті за основу цього проекту, і скільки їх? Точніше

Рис. 3.75

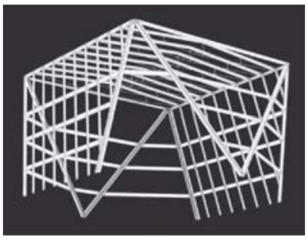


Рис. 3.76

відповісти на ці запитання вам допоможе каркасна модель споруди, зображена на рис. 3.76.

314. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 15 см, а його бічна сторона вдвічі більша за основу. Визначте довжини сторін цього трикутника.

315. Основа й бічна сторона рівнобедреного трикутника відносяться, як 2 : 3. Визначте сторону цього трикутника, якщо його периметр дорівнює 16 см.

316. Визначте основу рівнобедреного трикутника, якщо вона на 5 дм менша від його бічної сторони, а периметр трикутника дорівнює 46 дм.

317. У рівнобедреному трикутнику основа більша за бічну сторону на 2 см, але менша від суми бічних сторін на 3 см. Визначте сторони трикутника.

318. Одна зі сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см, а його периметр — 19 см. Визначте сторони цього трикутника.

319. Медіана рівнобедреного трикутника ділить його периметр на частини, що дорівнюють 9 см і 12 см. Визначте сторони трикутника.

320. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 дм, а одна з його сторін удвічі більша за іншу. Визначте сторони трикутника. Розгляньте два випадки.

321. Дано: $CA = CB$, $AM = BN$, $\angle A = \angle B$ (рис. 3.77). Доведіть, що трикутник CMN — рівнобедрений.

322. Дано: $DA = DB$, $\angle CDA = \angle CDB$ (рис. 3.78). Доведіть, що трикутник CAB — рівнобедрений.

323. Дано: $AB = AC$, $\angle BAD = \angle CAD$ (рис. 3.79). Доведіть, що трикутник DBC — рівнобедрений.

324. Доведіть, що у рівносторонньому трикутнику: а) усі медіани рівні; б) усі висоти рівні; в) усі бісектриси рівні.

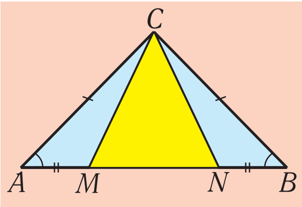


Рис. 3.77

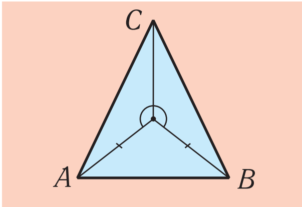


Рис. 3.78

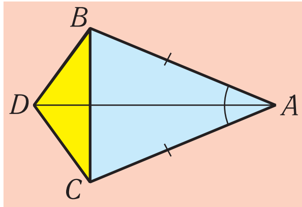


Рис. 3.79

325. Доведіть, що у рівних трикутниках медіани, проведені до рівних сторін, рівні між собою.

326. Доведіть, що коли у трикутнику ABC сторони AB і AC не рівні, то медіана AM цього трикутника не є його висотою.

327. На бічних сторонах CA і CB рівнобедреного трикутника ABC від його вершини C відкладено рівні відрізки CM і CN (рис. 3.80). Доведіть, що відрізки AN і BM рівні.

328. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено медіану BM. На сторонах AB і CB позначено відповідно точки E та F так, що $AE = CF$. Доведіть, що $\triangle BME = \triangle BMF$, а $\triangle AME = \triangle CMF$.

329. На рис. 3.81 периметр рівнобедреного трикутника ABC з основою AC дорівнює 40 см, а периметр рівностороннього трикутника ABD дорівнює 45 см. Визначте сторони трикутника ABC.

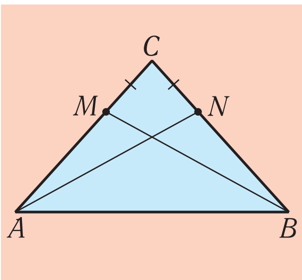


Рис. 3.80

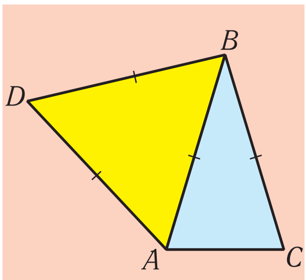


Рис. 3.81

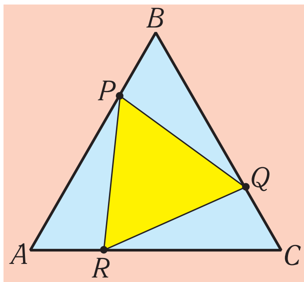


Рис. 3.82

330•. Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами іншого рівнобедреного трикутника.

331•. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, рівні. Чи істинні аналогічні твердження стосовно бісектрис і висот?

332•. Доведіть, що коли у трикутнику дві висоти є бісектрисами, то цей трикутник — рівносторонній.

333•. На сторонах рівностороннього трикутника ABC відкладено рівні відрізки AP, BQ і CR (рис. 3.82). Доведіть, що трикутник PQR — рівносторонній.

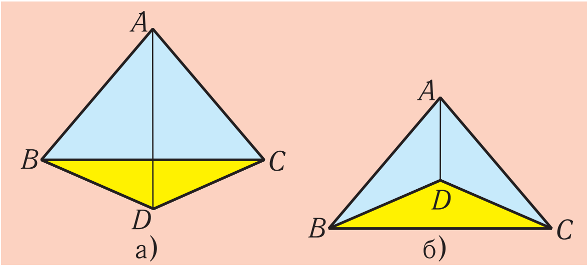


Рис. 3.83

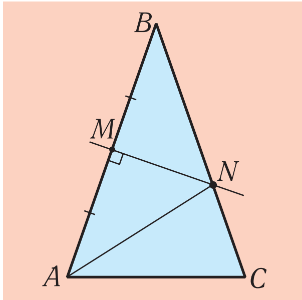


Рис. 3.84

334•. Рівнобедрені трикутники ABC і DBC мають спільну основу BC (рис. 3.83, а, б). Доведіть, що в кожному можливому випадку взаємного розміщення цих трикутників $\triangle BAD = \triangle CAD$. Доведіть також, що пряма AD проходить через середину відрізка BC.

335•. У рівнобедреному трикутнику ABC бічні сторони BA і BC дорівнюють по 18 см. Через середину M сторони AB проведено пряму, перпендикулярну до цієї сторони (рис. 3.84). Проведена пряма перетинає сторону BC у точці N. Визначте основу AC, якщо периметр трикутника ANC дорівнює 27 см.

§17. Ознаки рівнобедреного трикутника

Уроки 37–39

У попередньому параграфі було розглянуто два способи побудови рівнобедрених трикутників — за кутом при вершині і бічною стороною та за основою і бічною стороною. Існує ще один доволі простий спосіб побудови — за основою і кутом при основі.

Нехай BC — задана основа (рис. 3.85). Відкладемо від променів BC і CB в одну й ту саму півплощину кут заданої величини. Нехай A — точка перетину сторін цих кутів, які не належать прямій BC. Тоді ABC — шуканий рівнобедрений трикутник: BC — його основа, $\angle B$ і $\angle C$ — кути при основі заданої величини.

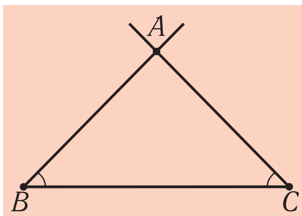


Рис. 3.85

Стверджувати це можна на підставі *ознаки* рівнобедреного трикутника, яку ми зараз же й доведемо.

Теорема

(ознака рівнобедреного трикутника за кутами).

Якщо у трикутнику два кути рівні, то він — рівнобедрений.

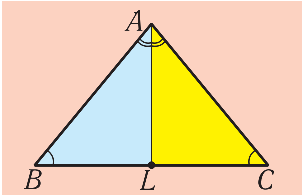


Рис. 3.86

Доведення. Нехай у трикутнику ABC $\angle B = \angle C$ (рис. 3.86). Проведемо бісектрису AL. Дістанемо два трикутники ALB та ALC зі спільною стороною AL. Оскільки в них рівні дві пари кутів: $\angle B = \angle C$ і $\angle BAL = \angle CAL$, то рівні й треті кути: $\angle ALB = \angle ALC$ (адже сума кутів трикутника дорівнює $180°$). Тому, за спільною стороною AL і прилеглими до неї кутами (тобто за другою ознакою), $\Delta ALB = \Delta ALC$. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений. Теорему доведено.

Довести останню теорему можна інакше, без додаткових побудов і без посилання на теорему про суму кутів трикутника. Застосуємо другу ознаку рівності трикутників до трикутника ABC і трикутника ACB — того самого трикутника ABC, але «перевернутого» (рис. 3.87). Оскільки сторона BC дорівнює стороні CB, $\angle C = \angle B$, а $\angle B = \angle C$, то $\Delta ABC = \Delta ACB$. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

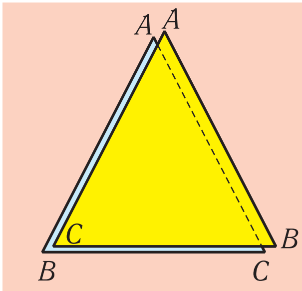


Рис. 3.87

Наслідок.

Трикутник, у якому всі кути рівні (по 60°), є рівностороннім.

Доведення цього наслідку проведіть самостійно.

Доведена ознака є оберненою теоремою до одного із тверджень теореми про властивості рівнобедреного трикутника, доведеної у попередньому параграфі. Іншим висновком тієї теореми було твердження про те, що у рівнобедреному трикутнику висота, медіана і бісектриса, проведені до основи, збігаються. Ця властивість теж характерна лише для рівнобедрених трикутників, тобто є їхньою *ознакою*. Точніше, цих ознак аж три: по тому, які два із згаданих відрізків збігаються.

Теорема
(ознаки рівнобедреного трикутника за відрізками).

Якщо у трикутнику збігаються які-небудь два із трьох відрізків, що є медіаною, висотою і бісектрисою, проведеними з однієї вершини, то трикутник — рівнобедрений.

Доведення. **1.** Нехай AL — одночасно медіана й висота трикутника ABC (див. рис. 3.86), тобто $LB = LC$ і $AL \perp BC$. Тоді прямокутні трикутники ALB і ALC рівні за першою ознакою. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

2. Нехай AL — висота і бісектриса трикутника ABC (див. рис. 3.86). Тоді прямокутні трикутники ALB і ALC рівні за другою ознакою, оскільки сторона AL у них спільна, а прилеглі до неї гострі кути BAL і CAL рівні. Звідси $AB = AC$, тобто трикутник ABC — рівнобедрений.

3. Нехай AL — медіана і бісектриса трикутника ABC (рис. 3.88). Продовжимо медіану AL на таку саму довжину $LA_1 = AL$ і сполучимо точку A_1 з точками B і C. $\Delta A_1LB = \Delta ALC$ (кути при вершині L рівні як вертикальні, а сторони, що утворюють ці кути, рівні за умовою й за побудовою). Звідси $\angle BA_1L = \angle CAL$. За умовою $\angle CAL = \angle BAL$. Отже, $\angle BA_1L = \angle BAL$. Тоді, за вже доведеною ознакою, трикутник BAA_1 — рівнобедрений і, отже, медіана BK у ньому є й висотою, тобто $BL \perp AL$. Виходить, що відрізок AL є висотою у трикутнику ABC. Отже, за доведеним у першому або другому пункті цієї теореми, трикутник ABC — рівнобедрений. Теорему доведено.

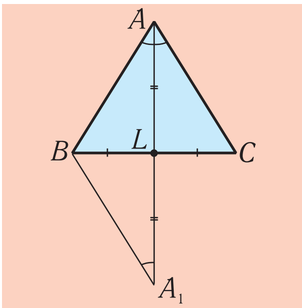


Рис. 3.88

Розв'язуємо разом

Задача.

У трикутнику ABC бісектриси кутів B і C перетинаються в точці Q (рис. 3.89). Через точку Q проведено відрізок MN, паралельний основі BC, кінці якого належать бічним сторонам трикутника. Довести, що відрізок MN дорівнює сумі відрізків BM і CN.

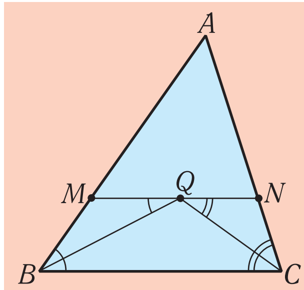


Рис. 3.89

Розв'язання. За означенням бісектриси, $\angle MBQ = \angle QBC$, а за властивістю паралельних прямих, $\angle QBC = \angle BQM$ ($MN \parallel BC$, BQ — січна). Отже, у трикутнику MBQ $\angle MBQ = \angle BQM$. Тому цей трикутник — рівнобедрений і, отже, в ньому $MQ = BM$.

Так само з'ясовуємо, що рівнобедреним є трикутник NCQ і в ньому $QN = CN$.

Додавши одержані рівності, матимемо: $MQ + QN = BM + CN$, а звідси $MN = BM + CN$. Твердження задачі доведено.

Вправи і задачі

336°. Накресліть за допомогою лінійки і транспортира рівнобедрений трикутник, основа якого дорівнює 6 см, а кут при основі — 35°. Визначте кут при вершині побудованого трикутника.

337°. У трикутнику є два рівні кути. Що можна стверджувати про його сторони? Чи можна стверджувати, що цей трикутник рівносторонній?

338°. Один учень якось сказав: «Рівносторонній трикутник є рівнокутним». Що він мав на увазі? Чи правильно він висловився?

339°. У трикутнику ABC кути, що прилягають до сторони BC, рівні. Рівні також сторони, що прилягають до кута B. Що це за трикутник?

340°. Чому дорівнюють зовнішні кути рівностороннього трикутника?

341°. Зовнішні кути при двох вершинах трикутника дорівнюють по 120°. Доведіть, що цей трикутник рівносторонній.

342°. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC зовнішній кут при вершині A дорівнює 150°. Визначте кути при основі трикутника.

343°. У трикутнику ABC $\angle B = \angle C$, BL — бісектриса кута A. Доведіть, що $BL = LB$.

344°. У трикутнику ABC $\angle B = \angle C$, $BM = MC$. Доведіть, що $AM \perp BC$.

345°. У рівнобедреному трикутнику один із кутів при основі дорівнює 45°. До якого виду (за кутами) належить цей трикутник?

346°. Дано: $AB = AC$ (рис. 3.90). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.

347°. Дано: $AB = BC$, $\angle B = 65°$ (рис. 3.91). Визначте $\angle ACD$.

348°. Основа й прилеглий до неї кут одного рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно основі й прилеглому до неї куту іншого рівнобедреного трикутника. Чи рівні ці трикутники?

349. На рис. 3.92 $BH = HC$, $AH \perp BC$. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений. Запропонуйте на цій підставі спосіб побудови рівнобедреного трикутника за основою і висотою, використовуючи лінійку і косинець.

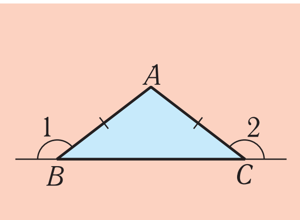


Рис. 3.90

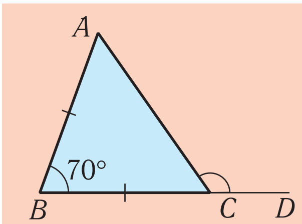


Рис. 3.91

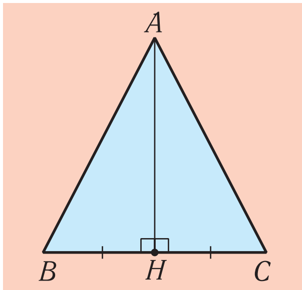


Рис. 3.92

350. Один із зовнішніх кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 140°. Чому дорівнюють внутрішні кути цього трикутника?

351. Визначте кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при його основі удвічі більший за кут при вершині, яка протилежна основі.

352. Визначте кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них дорівнює: а) 50°; б) 110°.

353. Чому дорівнюють кути, що утворюються при перетині двох бісектрис рівностороннього трикутника?

354. Визначте кути рівнобедреного трикутника, якщо один із них учетверо більший за інший. Розгляньте два випадки.

355. Один із кутів рівнобедреного трикутника на 48° більший за інший. Визначте кути цього трикутника. Розгляньте два випадки.

356. Доведіть, що кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює половині зовнішнього кута при його вершині.

357. Дано: ΔCAB — рівнобедрений, AB — його основа, $MN \parallel AB$ (рис. 3.93). Доведіть, що ΔCMN — теж рівнобедрений.

358. Доведіть, що пряма, яка перетинає бічну сторону рівнобедреного трикутника і паралельна іншій його бічній стороні, відтинає від цього трикутника рівнобедрений трикутник.

359. Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 3.94). Доведіть, що $AC = BC$.

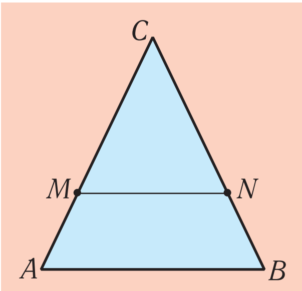


Рис. 3.93

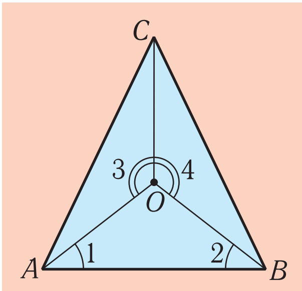


Рис. 3.94

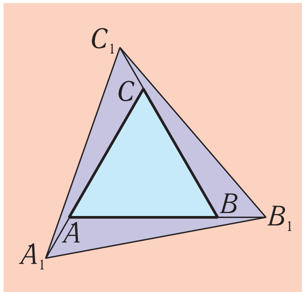


Рис. 3.95

360. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику бісектриси кутів при основі рівні.

361. Доведіть, що у рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до бічних сторін, рівні.

362. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC взято точки M і N так, що $AM = BN$. Із точок M, N до AB поставлено перпендикуляри MP і NQ, які перетинають бічні сторони трикутника відповідно у точках P і Q. Доведіть, що $PM = QN$.

363. Доведіть, що у рівних трикутниках рівними є бісектриси і висоти, проведені з вершин рівних кутів.

364. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за рівними висотою, проведеною до основи, і кутом при вершині, протилежній цій основі.

365. Дано: ΔABC — рівносторонній, точки B_1, C_1, A_1 розміщені на продовженнях його сторін $BB_1 = CC_1 = AA_1$ (рис. 3.95). Доведіть, що $\Delta A_1B_1C_1$ — теж рівносторонній.

366•. Один із кутів між бісектрисами кутів при основі рівнобедреного трикутника дорівнює 124°. Визначте кути трикутника.

367•. Два зовнішні кути рівнобедреного трикутника відносяться, як 2 : 5. Визначте внутрішні кути трикутника.

368•. Дано: ΔABC — рівносторонній, $\angle RAC = \angle PBA = \angle QCB$ (рис. 3.96). Доведіть, що ΔPQR — теж рівносторонній.

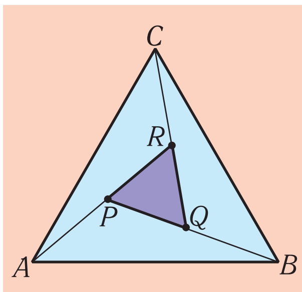


Рис. 3.96

369•. У трикутнику ABC $\angle A = 50°$, а $\angle B = 60°$. На продовженнях сторони AB відкладено відрізки $AD = AC$ і $BF = BC$ (рис. 3.97) . Визначте кути трикутника CDF.

370•. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC із вершин A та C проведені медіани, що перетинаються в точці G. Доведіть, що трикутник AGC — рівнобедрений.

371•. Дано: $\angle 1 = \angle 2$; $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 3.98). Доведіть, що $AB \perp CD$.

372•. Дано: $OA = OB$; $AM \perp OA$, $BN \perp OB$ (рис. 3.99). Доведіть, що $\angle AMN = \angle BNM$.

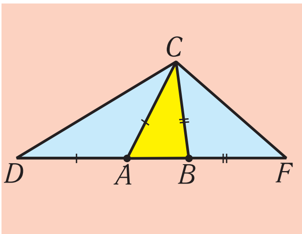


Рис. 3.97

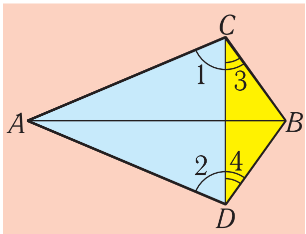


Рис. 3.98

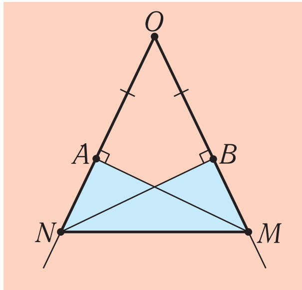


Рис. 3.99

СТОРІНКИ ІСТОРІЇ

Фалес і зародження великої грецької науки

На початку VI ст. до н. е. виник новий потужний центр культурного життя стародавнього світу — Греція. Завдячуючи новій демократичній формі правління, в грецьких містах-державах з небаченою до того інтенсивністю розвивалися мистецтва. З'явилися й філософські школи, в яких проводилися інтелектуальні пошуки єдиних принципів світобудови і справедливих законів облаштування суспільного життя. Легендарним уособленням цього руху до знань, «найпершим з грецьких мудреців», вважають Фалеса.

Фалес народився в азійській грецькій колонії Мілет. У молоді роки, ймовірно, був купцем і здійснив декілька подорожей до Єгипту і Вавилонії. Там він прилучився до скарбниці східної мудрості, а повернувшись на батьківщину, заснував першу наукову школу.


Фалес

Серед «наймудріших» Фалес був єдиним представником від природознавчої науки. Усі інші — правителі та законодавці. Їхні список непостійний. Крім Фалеса, майже завжди називаються тільки афінянин Солон та спартанець Хілон.

Зокрема, Фалес — перший з учених, з чиїм ім'ям пов'язують доведення конкретних геометричних істин. Учений V ст. н. е. Прокл Діодох у своїх коментарях до «Начал» Евкліда, посилаючись на втрачену «Історію геометрії» Євдема Родоського (IV ст. до н.е.), стверджує, що Фалес першим відкрив, що при перетині двох паралельних прямих січною утворюються рівні відповідні кути. Відкрив Фалес і теорему про рівність двох трикутників, у яких рівні сторони і два прилеглих до неї кути. Євдем приписує це відкриття саме Фалесу на тій підставі, що без нього неможливо вирішити задачу про знаходження відстані до корабля на морі, яку, за легендою, розв'язав Фалес. Досі достеменно

Фалес. Гравюра з ілюстрованої біблійної історії «Нюрнберзька хроніка» (1483 р.)

Фалес (третій зліва, що вказує на небесну сферу) серед легендарних сімох мудреців давнини. Помпейська мозаїка I ст. до н. е.

Статуя **Фалеса** у читальній залі бібліотеки Джона Райландса Манчестерського університету (Англія) невідомо, яким саме було це розв'язання. Найімовірніші два варіанти — «горизонтальний» і «вертикальний».

«Горизонтальний спосіб». Для визначення відстані від доступної точки A до недосяжної точки B (корабля на морі) на рівній місцевості беруть який-небудь відрізок AD (рис. 3.100) і фіксують його середину C. Потім через точку D проводять промінь DE під тим самим кутом до відрізка AD, під яким його перетинає промінь AB, але у протилежному до AB напрямку. Нарешті, на промені DE знаходять таку точку E, щоб точки E, C і B розміщувалися на одній прямій. Тоді довжина відрізка DE дорівнюватиме шуканій відстані AB.

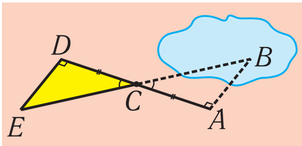


Рис. 3.100

Справді, оскільки у трикутниках CAB і CDE за побудовою $AC = CD$, $\angle A = \angle D$, а $\angle ACB = \angle DCE$ (як вертикальні), то, за другою ознакою, ці трикутники рівні. Тому рівними є і їхні сторони, які лежать проти рівних кутів, зокрема, $AB = DE$.

«Вертикальний» спосіб вимірювання міг полягати у визначенні кута зору ADB на недосяжний предмет B з позиції D, розташованої на скелі чи на вежі (рис. 3.101) з наступною пеленгацією під цим кутом певного об'єкта C на суші, відстань до якого відома. Тоді шукана відстань AB дорівнюватиме відомій відстані AC. Це випливає з рівності (за другою ознакою) прямокутних трикутників DAB і DAC.

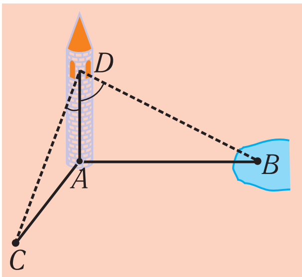


Рис. 3.101

Серед інших геометричних фактів, доведення яких Євдем приписує Фалесу, — теорема про рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника. Незважаючи на всю свою очевидність і, здавалося б, тривіальність, цей факт використовується у геометрії надзвичайно часто, зокрема, при доведенні інших дуже важливих теорем. І серед них — третя ознака рівності трикутників, яку ми вивчатимемо у наступному параграфі.

§18. Третя ознака рівності трикутників

Уроки 40–41

Практичний досвід переконує, що трикутні форми не піддаються деформації. У зв'язку із цим для посилення великих несучих конструкцій, наприклад, ферм підйомних кранів, перекидних мостів, великих перекриттів тощо їх часто укріплюють численними трикутними перемичками (рис. 3.102, 3.103). Юний експериментатор, якого ви бачите на рис. 3.104, в ефективності цього прийому переконався дослідним шляхом, а от сконструювати з трикутників бамбукові ноші, зображені на рис. 3.105, мабуть, допомогла інтуїція. Для створення ж конструкцій, схожих на головну спортивну арену для Всесвітньої літньої універсіади в Шеньчжені 2011 р. (рис. 3.106), потрібна була і інтуїція, і глибока науково-інженерна думка.

Рис. 3.102

Рис. 3.103

Рис. 3.104

Причиною жорсткості трикутних форм є те, що трикутник повністю визначається своїми сторонами. Це означає, що справджується така *третя ознака рівності трикутників*.

Рис. 3.105

Теорема

(третя ознака рівності трикутників — за трьома сторонами).

Якщо три сторони одного трикутника відповідно рівні трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.

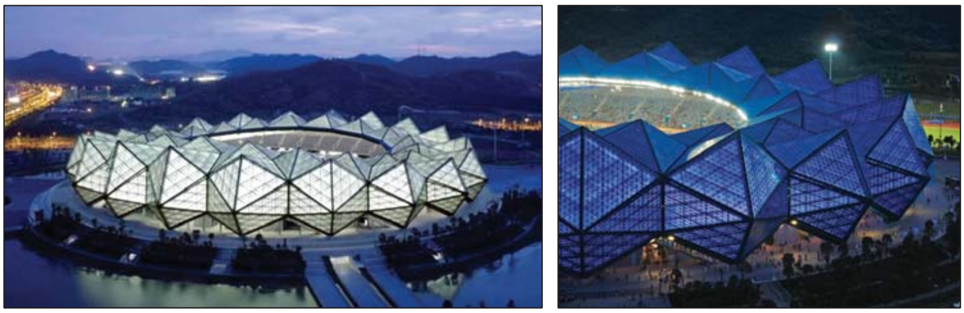


Рис. 3.106

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 3.107). Потрібно довести, що ці трикутники рівні.

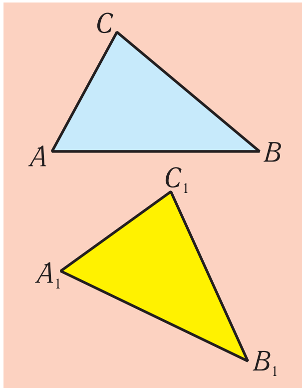


Рис. 3.107

Перемістимо трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб сторона A_1B_1 сумістилася зі стороною AB, а вершина C_1 розміститься з протилежного боку до точки C відносно прямої AB (рис. 3.108). За аксіомою рухомості трикутника, таке переміщення можливе. Проведемо, далі, відрізок CC_1. Оскільки $AC = AC_1$, $BC = BC_1$, то трикутники ACC_1 і BCC_1 рівнобедрені. Тому $\angle ACC_1 =$ $= \angle AC_1C$, $\angle BCC_1 = \angle BC_1C$.

Можливі три випадки взаємного розміщення відрізків AB і CC_1:

1) перетин у внутрішній точці відрізка AB (рис. 3.108, а);

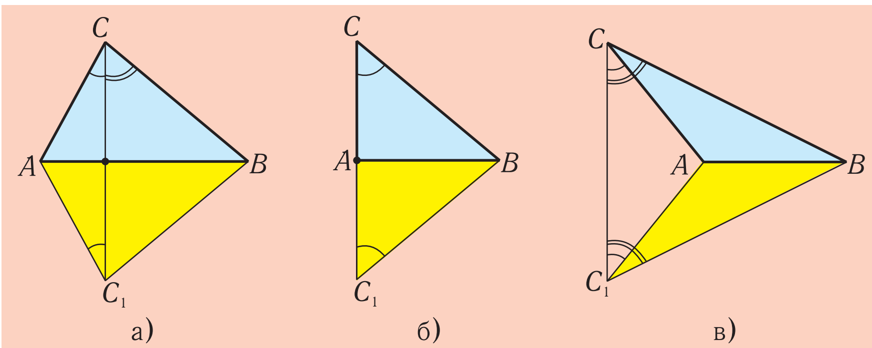


Рис. 3.108

2) перетин в одному з кінців відрізка AB (рис. 3.108, б);

3) відсутність точки перетину (рис. 3.108, в).

В усіх трьох випадках рівними є кути ACB та AC_1B. У першому випадку вони дорівнюють сумі рівних кутів, у третьому — різниці, а в другому — є кутами при основі рівнобедреного трикутника BCC_1. Отже, у кожному випадку трикутники ABC і ABC_1 рівні за двома сторонами та кутом між ними. Тому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Теорему доведено.

Цю ознаку можна довести інакше. Сумістимо, як і в першому способі, сторони AB і A_1B_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, а вершину C_1 розмістимо з того боку від прямої AB, де розміщена точка C (рис. 3.109). Тоді достатньо буде довести, що точки C і C_1 збігаються.

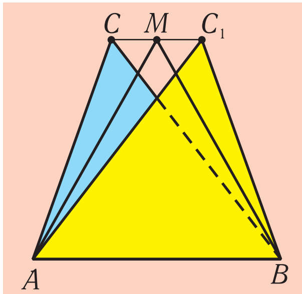


Рис. 3.109

Припустимо, що це не так і позначимо через M середину відрізка CC_1. Матимемо два рівнобедрених трикутники ACC_1 і BCC_1 зі спільною основою CC_1, а їхні медіани AM і BM будуть одночасно й висотами. Точки A, B і M не можуть лежати на одній прямій, оскільки відрізок CC_1, що містить точку M, весь лежить з одного боку від прямої AB. Виходить, що через точку M проходить дві прямі AM і BM, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої CC_1. Оскільки таке неможливе, то зроблене припущення неправомірне. Отже, точки C і C_1 збігаються. Тому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що коли відрізки AB і DC, AD і BC попарно рівні (рис. 3.110), то вони й попарно паралельні.

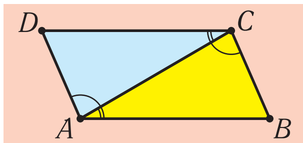


Рис. 3.110

Розв'язання. Проведемо відрізок AC і розглянемо трикутники ABC і CDA. Вони рівні, за третьою ознакою. З рівності цих трикутників випливає, що $\angle CAB =$

$= \angle ACD$, а $\angle BCA = \angle DAC$. Ці кути є внутрішніми різносторонніми для пар прямих AB і DC, AD і BC та січної AC. Тому, за ознакою паралельності, $AB \parallel CD$, $BC \parallel DA$. Твердження задачі доведено.

Вправи і задачі

373°. Чи рівні трикутники, зображені на рис. 3.111 (розміри сторін подані у сантиметрах)? Як їх можна сумістити?

374°. Чи рівні віконця, зображені на рис. 3.112? Чи можна їх поміняти місцями? Відповідь поясніть.

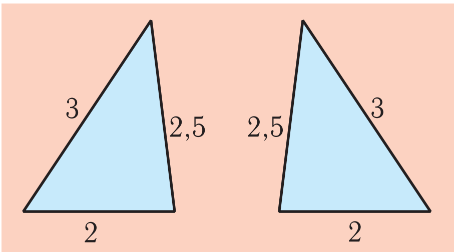


Рис. 3.111

Рис. 3.112

375°. Чи будуть рівними рівносторонні трикутники, якщо вони мають рівні периметри?

376°. Периметри двох трикутників рівні. Чи випливає звідси рівність трикутників?

377°. Доведіть рівність трикутників ABC і DCB, зображених на рис. 3.113.

378°. Доведіть рівність трикутників ABC і DBC, зображених на рис. 3.114.

379°. Дано: $AB = BC$, $AD = DC$ (рис. 3.115). Доведіть, що $\angle A = \angle C$.

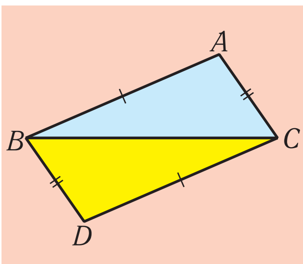


Рис. 3.113

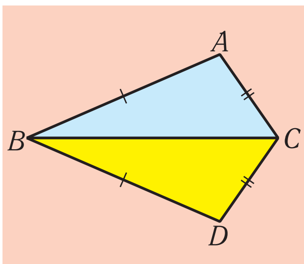


Рис. 3.114

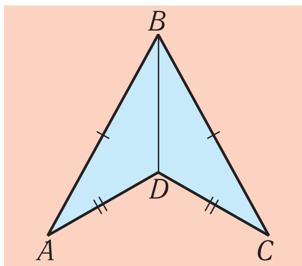


Рис. 3.115

380°. Доведіть, що коли основа й бічна сторона одного рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно основі й бічній стороні іншого рівнобедреного трикутника, то такі трикутники рівні.

381. На рис. 3.116 $AB = DC$, $AC = DB$. Доведіть рівність трикутників ABC і DCB.

382. На рис. 3.116 $AB = DC$, $AC = DB$. Доведіть рівність трикутників AOB і DOC.

383. На рис. 3.117 $\Delta ABD = \Delta CDB$. Доведіть, що $\Delta DAC = \Delta BCA$.

384. Дано: $AB = BC$, $AD = DC$ (див. рис. 3.115). Доведіть, що BD — бісектриса кута B.

385. На рис. 3.118 $AB = LM$, $AC = LN$, $BN = CM$. Доведіть, що трикутник ONC — рівнобедрений.

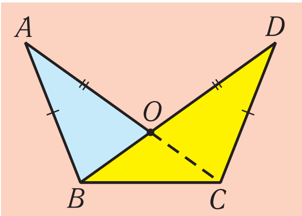


Рис. 3.116

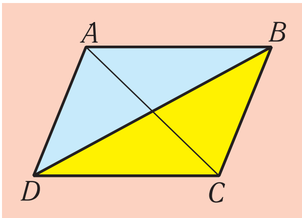


Рис. 3.117

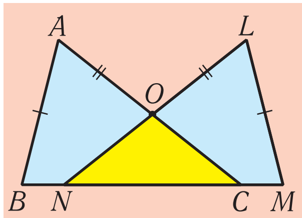


Рис. 3.118

386. Дано: $AC = BD$, $AD = BC$ (рис. 3.119). Доведіть, що $OC = OD$.

387. Дано: $AC = BD$, $AD = BC$ (рис. 3.119). Доведіть, що $OA = OB$.

388. Дано: $AB = AD$, $BC = CD$ (рис. 3.120). Доведіть, що $\angle BAO = \angle DAO$, $\angle BCO = \angle DCO$, $BO = OD$, $AC \perp BD$.

389. Відрізки AB і CD перетинаються, і точка їхнього перетину є серединою кожного з них. Доведіть, що $\Delta ACD = \Delta BDC$.

390. Всередині рівнобедреного трикутника ABC з основою BC взято точку M, рівновіддалену від вершин B і C. Доведіть, що промінь AM перпендикулярний до BC і є бісектрисою кута A.

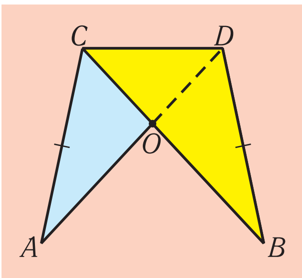


Рис. 3.119

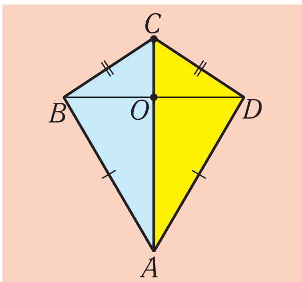


Рис. 3.120

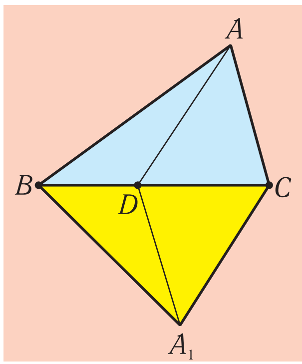


Рис. 3.121

391•. Точки B, D і C лежать на одній прямій, а $\Delta ABC = \Delta A_1BC$ (рис. 3. 121). Доведіть, що тоді $\Delta ADC = \Delta A_1DC$.

392•. Кожна з точок M і N рівновіддалена від кінців відрізка AB. Доведіть, що пряма MN перпендикулярна до відрізка AB і ділить його навпіл.

393•. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони.

394•. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за бічною стороною і медіаною, проведеною до неї.

§19. Прямокутні трикутники

Уроки 42–43

Нагадаємо, що трикутник називається *прямокутним*, якщо у ньому є прямий кут.

Означення.

Дві сторони прямокутного трикутника, які прилягають до прямого кута, називаються *катетами*, а третя сторона, яка лежить проти прямого кута, називається *гіпотенузою*.

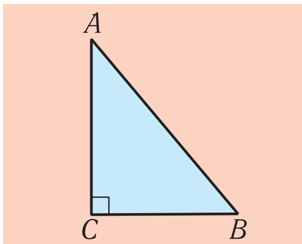


Рис. 3.122

На рис. 3.122 зображено прямокутний трикутник ABC. У ньому кут C — прямий, CA і CB — катети, AB — гіпотенуза.

Терміни «катет» і «гіпотенуза» грецького походження. Слово «катетос» у перекладі з грецької мови означає «прямовисний». Прямокутні трикутники часто зображають так, що одна зі сторін, яка утворює прямий кут, уявляється розміщеною вертикально, а інша — горизонтально. Вертикальну сторону колись називали катетом, а горизонтальну — основою. Пізніше за обома цими сторонами закріпилася спільна назва «катети».

Рис. 3.123

На рис. 3.123 і 3.124 зображені об’єкти, які мають форми прямокутних трикутників, розміщених так, що один із катетів займає вертикальне положення, тобто відповідає своїй первинній назві. Шпаківня — цілком реальна, а архітектурні споруди (житлова та офісна вежі, розділені штучною лагуною) — поки

Рис. 3.124

що лише змодельовані: відповідний проект для столиці Камбоджі Пномпеня у 2010 р. запропонували чилійські архітектори Хорхе Ґарсес і Лала Маркес. Чимось схожий на цей, але значно грандіозніший і вже реалізований архітектурний проект зображений далі на рис. 3.129.

Слово «гіпотенуза» в дослівному перекладі з грецької мови означає «та, що стягує» (мається на увазі «стягує прямий кут»). Евклід гіпотенузу так і називав: «сторона, що стягує прямий кут».

Замфір Думітреску. Прямокутний трикутник

Із того, що прямокутний трикутник має прямий кут, випливає, що два інші його кути — гострі і що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

Істинним є також обернене твердження, яке є *ознакою* прямокутних трикутників:

якщо сума двох кутів трикутника дорівнює 90°, то трикутник — прямокутний.

Справді, сума всіх трьох кутів трикутника дорівнює 180°, і якщо на два з них припадає 90°, то третій дорівнює 180° − 90° = 90°, тобто є прямим.

При з'ясуванні рівності прямокутних трикутників береться до уваги те, що в них завжди є рівні елементи — прямі кути, а також те, що одним із гострих кутів визначається й інший, оскільки він доповнює його до 90°.

Взявши до уваги перший фактор, з першої ознаки рівності довільних трикутників безпосередньо виводиться *ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами*:

якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 3.125).

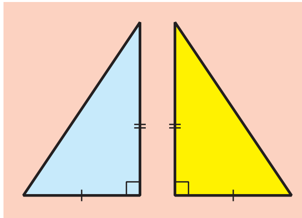


Рис. 3.125

Якщо ж узяти до уваги обидва згадані фактори, то з другої ознаки рівності довільних трикутників легко виводяться *ознаки рівності прямокутних трикутників за катетом і прилеглим або протилежним гострим кутом та за гіпотенузою і прилеглим гострим кутом*:

якщо катет і прилеглий (або протилежний) гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету та прилеглому (або протилежному) гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 3.126, а, б);

якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі та гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (рис. 3.127).

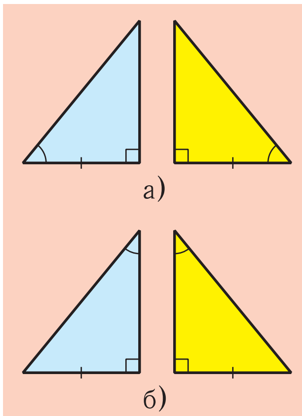


Рис. 3.126

Справді, нехай у двох прямокутних трикутників рівні катети і по одному з прилеглих до них гострих кутів (див. рис. 3.126, а). Оскільки рівними є ще й прямі кути, які теж прилягають до цих катетів, то, за другою ознакою, трикутники рівні.

Якщо ж у прямокутних трикутниках рівні гіпотенузи і по одному з гострих кутів (рис. 3.127), то рівними є й інші гострі кути, — оскільки в сумі гострі кути дають 90°. Отже, трикутники рівні за тою самою другою ознакою.

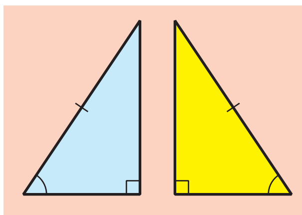


Рис. 3.127

Ще одна ознака рівності прямокутних трикутників потребує окремого доведення.

Теорема

(ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою).

Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету й гіпотенузі іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Доведення. Нехай маємо прямокутні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$, у яких $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ (рис. 3.128, а). Перемістимо трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб сумістилися катети AC і A_1C_1, а вершини B і B_1 розмістилися по різні боки від прямої AC (рис. 3. 128, б). Дістанемо рівнобедрений трикутник ABB_1, у якому AC — висота, проведена до основи BB_1. Оскільки ця висота є й медіаною, то $BC = B_1C_1$. Отже, трикутники ABC і $A_1C_1B_1$ рівні за трьома сторонами. Теорему доведено.

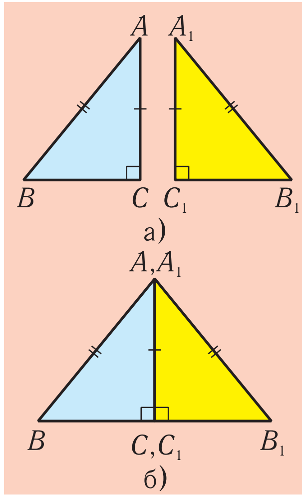


Рис. 3.128

Чудовою наочною ілюстрацією усіх ознак рівності прямокутних трикутників є вежі Всесвітнього торговельного центру в Бахрейні (рис. 3.129), зведені у 2008 р. (загальна висота кожної вежі 240 м).

Застосуємо одну з ознак для доведення цікавої властивості прямокутних трикутників, що мають кут 30°.


Рис. 3.129

Теорема

(про співвідношення між сторонами прямокутного трикутника з гострим кутом 30°).

Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи. Навпаки, якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то гострий кут, що лежить проти цього катета, дорівнює 30°.

Доведення. Нехай у трикутнику ACB $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 3.130). Тоді $\angle B = 90° - 30° = 60°$. Продовжимо катет BC за вершину C на таку саму довжину $CB_1 = BC$ і сполучимо відрізком точки A і B_1. Дістанемо прямокутний трикутник ACB_1, який, за першою ознакою, рівний трикутнику ACB. Тому $\angle B = \angle B_1 = 60°$. Звідси випливає, що ΔABB_1 — рівносторонній. Отже, $AB = BB_1$. Але $BB_1 = 2BC$. Отже, $AB = 2BC$. Тому катет BC дорівнює половині гіпотенузи AB.

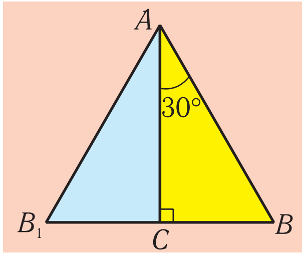


Рис. 3.130

Обернене твердження доведіть самостійно!

Вправи і задачі

395°. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC з основою BC і проведіть його висоту AH. Доведіть рівність прямокутних трикутників ABH і ACH на підставі різних ознак рівності прямокутних трикутників.

396°. Накресліть рівнобедрений прямокутний трикутник з катетами по 6 см і визначте його гострі кути — спочатку вимірюванням, а потім обчисленням. Чи збігаються результати?

397°. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює 45°. Доведіть, що цей трикутник — прямокутний.

398°. Накресліть рівносторонній трикутник ABC зі стороною 7 см, а потім проведіть його медіану AM. Визначте кути трикутника AMB — спочатку вимірюванням, а потім обчисленням. Чи збігаються результати?

399°. Визначте гострі кути прямокутного трикутника, якщо їхня різниця дорівнює 20°.

400°. Визначте гострі кути прямокутного трикутника, якщо один із них учетверо менший від іншого.

401°. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 45°$, $AC = 5$ см. Визначте BC.

402°. У прямокутному трикутнику ABC кут A дорівнює 30°, а катет BC — 40 см. Визначте гіпотенузу AB.

403°. У прямокутному трикутнику ABC кут B дорівнює 60°, а гіпотенуза AB — 10 см. Визначте катет BC.

404°. Визначте гострі кути прямокутного трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться, як 3 : 7.

405. Визначте гострі кути прямокутного трикутника, якщо один із його зовнішніх кутів дорівнює 135°.

406. На рис. 3.131 $\angle B = \angle C$, $\angle AMB = \angle AMC$, точки B, M, C лежать на одній прямій. Доведіть, що $AB = AC$.

407. На рис. 3.132 $\angle ACD = \angle CAB = 90°$, $AD \parallel BC$. Доведіть, що $AB = DC$.

408. На рис. 3.133 CH — висота прямокутного трикутника ACB, проведена до гіпотенузи. Визначте гострі кути трикутника ABC, якщо $\angle HCB = 40°$.

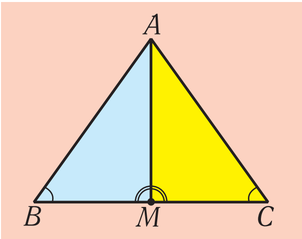


Рис. 3.131

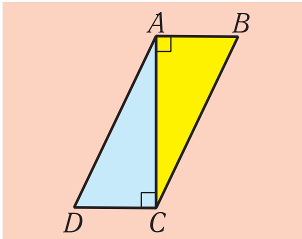


Рис. 3.132

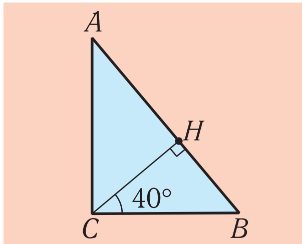


Рис. 3.133

409. На рис. 3.134 $AM \perp MN$, $BN \perp MN$, $AM = BN$. Доведіть, що точка O є серединою кожного з відрізків AB і MN.

410. На рис. 3.134 $AM \perp MN$, $BN \perp MN$, $MO = ON$. Доведіть, що точка O є серединою відрізка AB.

411. На рис. 3.134 $AM \perp MN$, $BN \perp MN$, $AO = OB$. Доведіть, що точки A і B рівновіддалені від прямої MN.

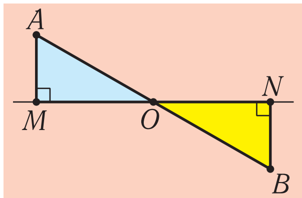


Рис. 3.134

412. На рис. 3.135 $\angle B = \angle D = 90°$, AC — бісектриса кута A. Доведіть, що $AB = AD$, $CB = CD$.

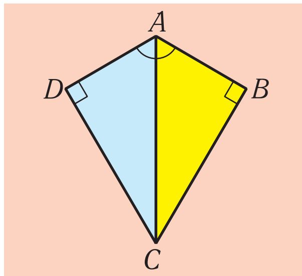


Рис. 3.135

413. Доведіть, що висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить прямий кут на кути, що дорівнюють гострим кутам трикутника.

414. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до нього.

415. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і медіаною, проведеною до іншого катета.

416. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.

417. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і бісектрисою, проведеною до гіпотенузи.

418. Доведіть, що в рівнобедреного трикутника дві висоти рівні.

419. Доведіть, що коли трикутник має дві рівні висоти, то він — рівнобедрений.

420. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, утворює з бічною стороною кут 60°. Визначте довжину цієї висоти, якщо бічна сторона трикутника дорівнює 12 см.

421. Прямі AB і CD паралельні. Визначте довжину їхнього спільного перпендикуляра, якщо AD = 8 см, а $\angle ADC$ = 30°.

422. Пряма перетинає дві паралельні прямі. Один із кутів, які вона утворює з однією із цих прямих, дорівнює 150°. Визначте довжину відрізка січної з кінцями на паралельних прямих, якщо довжина спільного перпендикуляра між цими прямими дорівнює 7 см.

423. У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, а сума прилеглого катета і гіпотенузи — 60 см. Визначте довжину гіпотенузи.

424•. Доведіть методом «від супротивного», що висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, лежить усередині трикутника.

425•. Визначте кут між прямими, які містять бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника.

426•. Доведіть, що медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

427•. Доведіть рівність гострокутних трикутників за стороною та проведеними до неї медіаною і висотою.

428•. Доведіть, що коли медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, утворює з гіпотенузою кут 30°, то гіпотенуза трикутника учетверо більша за висоту, проведену до неї.

429•. Доведіть, що коли гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 15°, то висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює чверті гіпотенузи. Чи істинне обернене твердження?

§20. Співвідношення між сторонами і кутами трикутника

Уроки 44–46

У §16 розглядався спосіб побудови рівнобедреного трикутника за допомогою циркуля і лінійки, коли задано основу BC і бічну сторону AB (див. рис. 3.61). Тоді нас цікавили властивості рівнобедреного трикутника і ми не зауважували, що описані побудови можуть не дати потрібного результату.

Справді, якщо задана бічна сторона AB буде меншою від половини основи BC, то дуги, які ми проводили із центрів B і C для визначення вершини A трикутника, не перетнуться (рис. 3.136). Тому рівнобедреного трикутника з такими довжинами сторін не існуватиме.

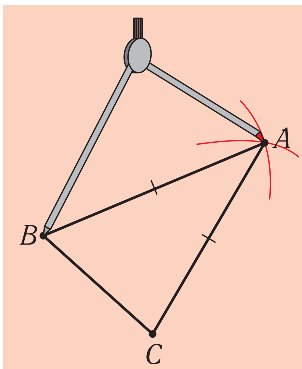


Рис. 3.61

Описана побудова має важливе узагальнення, яке ми детально розглянемо в наступному розділі. Воно полягає у тому, щоб побудувати різносторонній трикутник, коли задані усі його сторони. У зв'язку із цим виникає питання про те, які співвідношення між сторонами трикутника можливі.

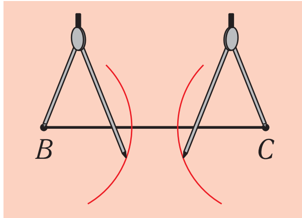


Рис. 3.136

Відповідь на це питання ми дістанемо у кінці цього параграфа. А для цього нам потрібно попередньо з'ясувати, які залежності існують у трикутнику між довжинами сторін і величинами протилежних їм кутів.

Із властивостей та ознак рівнобедреного трикутника випливає, що проти рівних сторін у такому трикутнику лежать і рівні кути, а проти рівних кутів — рівні сторони. А якщо сторони не рівні, то яке співвідношення існує між кутами, що лежать проти них? Або: якщо кути не рівні, то яке співвідношення існує між протилежними сторонами?

У тому разі, коли довжини сторін або величини кутів трикутника відчутно відрізняються, доволі очевидно із рисунків, що проти більшого кута лежить і більша сторона, а проти більшої сторони — більший кут (рис. 3.137). Виявляється, що ця закономірність справджується завжди, навіть тоді, коли з рисунка вона не очевидна.

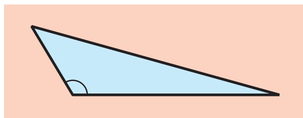


Рис. 3.137

Теорема

(про співвідношення між сторонами і кутами трикутника).

У будь-якому трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона.

Доведення. Нехай у трикутнику ABC сторона AB більша за сторону AC (рис. 3.138). Доведемо, що тоді кут C більший за кут B. Для цього відкладемо на стороні AB відрізок AC_1, рівний меншій стороні AC трикутника, і сполучимо точки C і C_1. Дістанемо

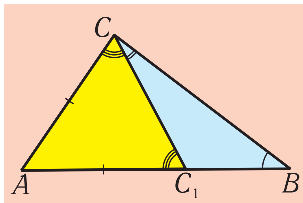


Рис. 3.138

рівнобедрений трикутник ACC_1 з основою CC_1. Отже, $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$. Але кут ACC_1 є частиною кута ACB, тому весь кут ACB більший за кут ACC_1. З іншого боку, кут AC_1C є зовнішнім для трикутника CC_1B, а тому він більший за несуміжний із ним кут B.

Виходить, що кут C трикутника більший, а кут B — менший від рівних кутів ACC_1 і AC_1C. Тому $\angle C > \angle B$, що й треба було довести.

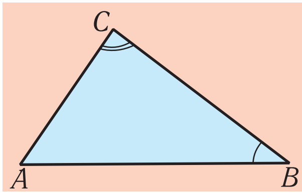


Рис. 3.139

Нехай тепер, навпаки, кут C більший за кут B (рис. 3.139). Доведемо, що тоді й сторона AB більша за сторону AC. Справді, ці сторони не можуть бути рівними, бо тоді проти рівних сторін лежали б рівні кути C і B, але, за умовою, вони не рівні. Крім цього, сторона AB не може бути й меншою від сторони AC, бо тоді, як щойно доведено, кут C був би меншим від кута B. Тому залишається єдина можливість: сторона AB більша за сторону AC. Теорему доведено.

Наслідок 1.

У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за будь-який з катетів.

Наслідок 2.

У тупокутному трикутнику сторона, що лежить проти тупого кута, є найбільшою.

Твердження обох наслідків випливають із того, що у трикутнику може бути лише один прямий і один тупий кут, і тоді він є найбільшим з-поміж усіх кутів. Тому проти нього лежить і найбільша сторона.


Середньовічний містичний рисунок, в основі якого шестикутна зірка із двох перехрещених рівносторонніх трикутників — так звана зірка Давида або печать Соломона. Це символізує єдність вогню і води, небесного і земного.

Тепер доведемо важливу теорему про співвідношення між сторонами будь-якого трикутника.

Теорема

(про нерівність трикутника).

У будь-якому трикутнику кожна сторона менша від суми двох інших сторін.

Доведення. Нехай маємо довільний трикутник ABC (рис. 3.140). Доведемо, для прикладу, що $AC < AB + BC$. Для цього продовжимо сторону AB за точку B і відкладемо на цьому продовженні відрізок $BB_1 = BC$. Сполучивши точки B_1 і C, дістанемо рівнобедрений трикутник BCB_1 з основою CB_1. У цьому трикутнику $\angle BCB_1 = \angle BB_1C$. З іншого боку, кут BCB_1 є тільки частиною кута ACB_1. Тому $\angle ACB_1$ більший за кут BCB_1 і, отже, більший за кут BB_1C. Тому в трикутнику ACB_1 проти меншого кута B_1 лежить менша сторона AC, ніж проти більшого кута ACB_1: $AC < AB_1$. А якщо візьмемо до уваги, що $AB_1 = AB + BC$, то звідси й дістанемо потрібну нерівність: $AC < AB + BC$.

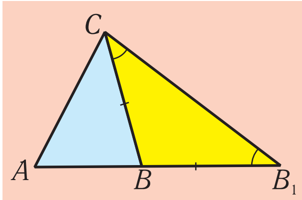


Рис. 3.140

Нерівність $AC < AB + BC$ для сторін трикутника ABC називаються *нерівністю трикутника*.

Наслідок 1.

У трикутнику кожна сторона більша за різницю двох інших сторін.

Доведення. Віднімаючи AB від обох частин доведеної нерівності $AC < AB + BC$, маємо: $BC > AC - AB$.

Аналогічно можна одержати, що $AB > AC - BC$. А якщо взяти до уваги іншу нерівність для суми сторін: $AB < AC + BC$, то так само дістанемо: $AC > AB - BC$. Наслідок доведено.

Наслідок 2.

Якщо справджується рівність $AC + CB = AB$, то точка C належить відрізку AB (рис. 3.141).

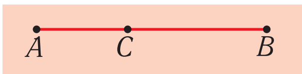


Рис. 3.141

Доведення. Припустимо, що точка C лежить поза прямою AB. Тоді, за нерівністю трикутника, $AC + CB > AB$. А це суперечить умові $AC + CB = AB$. Отже, це припущення неправомірне. Якби точка C лежала на прямій AB за межами відрізка AB, то або відрізок AC, або відрізок BC був би більшим за AB. Тому рівність $AC + CB = AB$ теж не могла б виконуватися. Отже, залишається єдина можливість: точка C належить відрізку AB. А для цього випадку рівність $AC + CB = AB$ випливає з аксіоми про вимірювання відрізків. Наслідок доведено.

Зауваження. Теоремою про нерівність трикутника визначаються необхідні умови для того, аби із трьох відрізків можна було утворити трикутник. Виявляється, що ці умови є й достатніми. Тобто, якщо для трьох відрізків завдовжки a, b, c виконуються нерівності:

$$a < b + c; \quad b < a + c; \quad c < a + b, \qquad (*)$$

то існує трикутник зі сторонами a, b, c. Побудову цього трикутника буде розглянуто далі у §29.

Умови (*) часто записують інакше. З другої і третьої з них маємо:

$$a > b - c, \quad a > c - b.$$

Враховуючи, що $a > 0$, обидві ці нерівності можна замінити на одну:

$$a > |b - c|.$$

І тоді умови (*) стають рівносильними таким:

$$|b - c| < a < b + c.$$

Отже, що для існування трикутника зі сторонами, що дорівнюють заданим відрізкам a, b, c, необхідно і достатньо, аби який-небудь із цих відрізків був меншим від суми і більшим за модуль різниці двох інших.

Фронтиспис так званої **Моралізаторської Біблії** (Bible moralisée) 1250 р. — французької рукописної Біблії у картинках з короткими моральними настановами. Зображено Бога-творця, який з допомогою циркуля окреслив межі Всесвіту і вже створив круглі Сонце (праворуч) і Місяць (ліворуч). Безформна маса, в яку встромлена ніжка циркуля, — це ще не сформована Земля.

Розв'язуємо разом

Задача.

Точки A і B лежать по один бік від прямої m (рис. 3.142). Знайти на прямій таку точку M, для якої сума відстаней AM і MB набуває найменшого значення.

Розв'язання. Проведемо через точку A пряму, перпендикулярну до прямої m, і відкладемо на ній від точки H перетину з прямою m відрізок $HA_1 = AH$. Нехай O — точка перетину прямих m і A_1B.

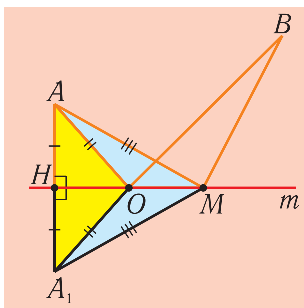


Рис. 3.142

Відрізок OH є медіаною і висотою у трикутнику OAA_1. За відповідною ознакою, цей трикутник — рівнобедрений. Тому $AO = A_1O$.

Аналогічно з'ясовуємо, що для будь-якої іншої точки M прямої m $AM = A_1M$. Звідси випливає, що сума $AM + MB = A_1M + MB$. За нерівністю трикутника, це більше за A_1B. Отже, яка б не була точка M на прямій m, завжди $A_1M + MB > A_1O + OB$. Тому точка O є шуканою.

Зауваження. Оскільки $\angle AOH = \angle A_1OH$ (у рівнобедреному трикутнику OAA_1 медіана OH є бісектрисою), а $\angle A_1OH = \angle BOM$ (як вертикальні), то $\angle AOH = \angle BOM$. Це означає, що прямі AO і OB утворюють з прямою m рівні кути. Зважаючи на відомий фізичний закон відбивання світла, звідси випливає такий цікавий факт: шлях світлового променя від точки A до точки B з відбиванням від прямої m є найкоротшим з усіх можливих.

Ньютон уважав, що Бог створив світ за законами геометрії. Як тут не повіриш у це!

Вільям Блейк (1757—1827). **Ньютон** (1795 р.)

Вправи і задачі

430°. Накресліть який-небудь різносторонній гострокутний трикутник. Виміряйте з допомогою лінійки усі його сторони, а з допомогою транспортира усі кути, та переконайтесь, що твердження теореми про співвідношення між сторонами і кутами трикутника виконується.

431°. У трикутнику ABC $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 10$ см. Який кут трикутника найбільший, а який — найменший?

432°. У трикутнику ABC $\angle A = 55°$, $\angle C = 30°$. Яка сторона трикутника найбільша, а яка — найменша?

433°. Порівняйте кути трикутника ABC, якщо $AB < BC < AC$. Які кути цього трикутника не можуть бути ні прямими, ні тупими?

434°. Порівняйте сторони трикутника LMN, якщо $\angle L > \angle M > \angle N$.

435°. Чи може існувати трикутник з такими довжинами сторін: а) 5 см, 6 см, 7 см; б) 5 см, 6 см, 12 см?

436°. Чи можуть довжини сторін трикутника відноситися, як: а) 1 : 2 : 3; б) 4 : 7 : 9; в) 5 : 7 : 12?

437°. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 3 см і 7 см. Визначте периметр трикутника.

438. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 6 см. Якою може бути його основа, якщо вона має виражатися цілим числом?

439. У рівнобедреному трикутнику одна сторона дорівнює 4 см, а інша — 9 см. Котра із них основа, а котра — бічна сторона?

440. Який кут у рівнобедреному трикутнику більший — при основі чи при вершині, якщо основа дорівнює 6 см, а сума бічних сторін — 13 см?

441. Що більше — основа чи бічна сторона рівнобедреного трикутника, якщо зовнішній кут при основі дорівнює 135°?

442. Чи може існувати трикутник, у якого периметр і одна зі сторін відповідно дорівнюють: а) 17 см і 9 см ; б) 17 см і 5 см?

443. У трикутнику ABC $AC < AB$, $\angle B > \angle A$. Котрий із кутів трикутника є найбільшим?

444. У рівнобедреному трикутнику ABC $\angle A > \angle B$, $BC > AB$. Яка сторона є основою трикутника?

445. Одна зі сторін рівнобедреного трикутника дорівнює 3 см, а периметр — 19 см. Визначте сторони трикутника.

446. Одна зі сторін рівнобедреного трикутника на 2 см менша від іншої, а периметр трикутника дорівнює 22 см. Визначте сторони трикутника.

447. Доведіть, що відрізок, який сполучає вершину рівнобедреного трикутника з будь-якою точкою на його основі, яка не є вершиною, менший від бічної сторони трикутника.

448. Доведіть, що кожна сторона трикутника менша від половини його периметра.

449•. Доведіть, що сума двох сторін трикутника більша за його півпериметр.

450•. Доведіть, що медіана CM трикутника ABC менша від півсуми сторін CA і CB.

451•. Доведіть, що сума медіан трикутника менша від його периметра.

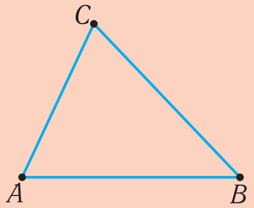
452•. Точка M лежить усередині трикутника ABC. Доведіть, що $AB + AC > MB + MC$.

453•. Точка лежить усередині трикутника. Доведіть, що сума відстаней від цієї точки до вершин трикутника більша за його півпериметр.

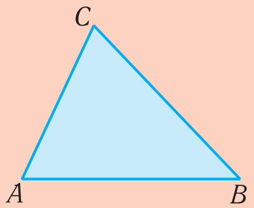
454•. Доведіть, що сума висот трикутника менша від його периметра.

Зведений перелік основних теоретичних відомостей, вивчених у розділі III

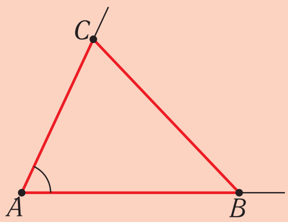
Трикутник і його елементи



Каркасний трикутник



Плоский трикутник



Трикутник — це фігура, що складається із трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які попарно сполучають ці точки. Точки називаються **вершинами** трикутника, а відрізки — **сторонами**.

Трикутником також часто називають і частину площини, обмежену його сторонами. У цьому разі додається уточнення *плоский трикутник*; тоді для трикутника без обмеженої ним внутрішньої частини застосовується назва *каркасний*, або *лінійний трикутник*.

При зображенні каркасних трикутників як правило виокремлюють кружечками їхні вершини, а при зображенні плоских трикутників часто заштриховують або зафарбовують їхню внутрішню частину.

У записах трикутник позначається його вершинами. При цьому саме слово «трикутник» часто замінюється знаком Δ. Наприклад: ΔABC, ΔACB, ΔCAB тощо.

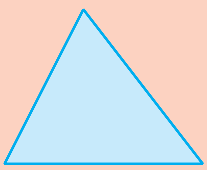
Кутом (внутрішнім кутом) трикутника ABC при вершині A називається кут BAC, утворений променями AB і AC. Позначення: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Кут A уважається *протилежним* до сторони BC, а сторони AB і AC — *прилеглими* до кута A.

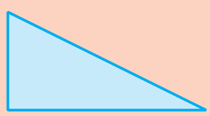
Елементи трикутника — це його вершини, сторони і кути.

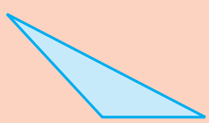
Периметр трикутника — сума довжин усіх його сторін. Периметр позначається літерою P. Отже, $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC$.

Слово «периметр» походить від грецьких слів «пері» — «навколо» і «метрео» — «вимірюю». Буквально означає «міра обводу».

Види трикутників за величинами кутів

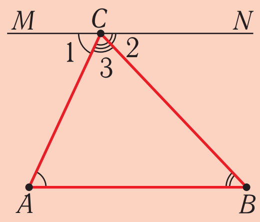

Гострокутний трикутник


Прямокутний трикутник


Тупокутний трикутник

Якщо всі кути трикутника гострі, то трикутник називається ***гострокутним***. Якщо у трикутнику є прямий кут, то трикутник називається ***прямокутним***, а якщо є тупий кут — то ***тупокутним.***

Сума кутів трикутника

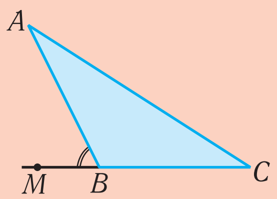


Теорема (*про суму кутів трикутника*). ***Сума кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°.***

Доведення. Проведемо $MN \parallel AB$. $\angle A = \angle 1$ — як внутрішні різносторонні при паралельних прямих MN і AB та січній CA. Так само $\angle B = \angle 2$. Отже, $\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$.

Наслідки (*про величини кутів трикутника*). ***Трикутник не може мати двох негострих кутів — прямих або тупих. У кожному трикутнику принаймні два кути — гострі. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.***

Зовнішній кут трикутника



Зовнішній кут трикутника — це кут, суміжний із внутрішнім кутом.

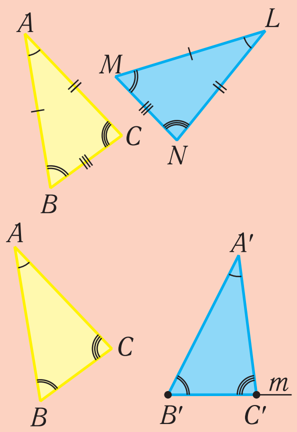
На рисунку $\angle ABM$ — зовнішній для ΔABC.

Теорема (*про зовнішній кут трикутника*). ***Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних з ним.***

Доведення. $ABM = 180° - \angle B$. $\angle A + \angle C = 180° - \angle B$. Тому $\angle ABM = \angle A + \angle C$,

Наслідок. ***Зовнішній кут трикутника більший за будь-який внутрішній кут, не суміжний з ним.***

Рівність трикутників



Трикутники називаються ***рівними***, якщо їх можна сумістити шляхом переміщення.

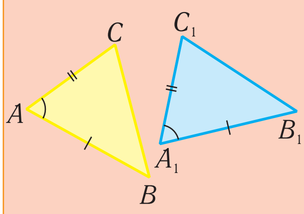
У рівних трикутниках рівні всі відповідні елементи — сторони і кути.

Рівність трикутників ABC і LMN записується так: $\Delta ABC = \Delta LMN$. Цей запис означає, що $\angle A = \angle L$, $\angle B = \angle M$, $\angle C = \angle N$, $AB = LM$, $BC = MN$, $AC = LN$.

Аксіома рухомості трикутника. ***Який би не був трикутник, його можна перемістити у задане положення відносно заданої півпрямої.***

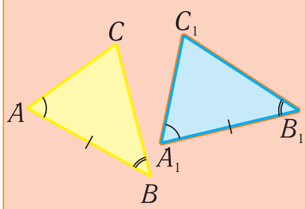
На рисунку трикутник $A'B'C'$ — переміщене положення трикутника ABC в одну з півплощин, визначених півпрямою m з початком B'.

Ознаки рівності трикутників



Перша ознака рівності трикутників — *за двома сторонами і кутом між ними*. ***Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутники рівні.***

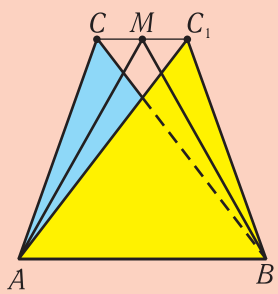
Доведення. Перемістимо ΔABC так, щоб вершина A сумістилася з A_1, сторона AB розмістилася на півпрямій A_1B_1, а вершина C — з того боку від прямої A_1B_1, з якого розміщена точка C_1. Оскільки $AB = A_1B_1$, то точка B суміститься з точкою B_1. Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то кут A суміститься з кутом A_1, а півпряма AC — з півпрямою A_1C_1. Оскільки $AC = A_1C_1$, то точка C суміститься з точкою C_1. Отже, ΔABC суміститься з $\Delta A_1B_1C_1$. Тому вони рівні.



Друга ознака рівності трикутників — *за стороною і двома прилеглими кутами*). ***Якщо сторона і два прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні і двом прилеглим до неї кутам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Перемістимо ΔABC так, щоб вершина A сумістилася з вершиною A_1, сторона AB розмістилася на півпрямій A_1B_1, а вершина C — з того боку від прямої A_1B_1, з якого розміщена точка C_1. Оскільки $AB = A_1B_1$, то точка B суміститься з точкою B_1. Оскільки $\angle A = \angle A_1$, то кут A суміститься з кутом A_1, а півпряма AC — з півпрямою A_1C_1.

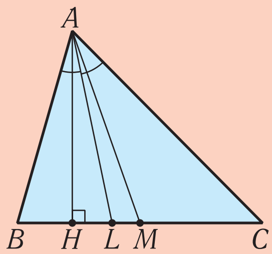
Так само півпряма BC суміститься з півпрямою B_1C_1. Тоді точка C суміститься з точкою C_1, оскільки дві півпрямі можуть мати не більше однієї спільної точки. Отже, ΔABC суміститься з $\Delta A_1B_1C_1$. Тому ці трикутники рівні.



Третя ознака рівності трикутників — *за трьома сторонами*. ***Якщо три сторони одного трикутника відповідно рівні трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Сумістимо сторони AB і A_1B_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, а вершину C_1 розмістимо з того самого боку від прямої AB, де розміщена точка C. Припустимо, що при цьому точки C і C_1 не сумістилися. Нехай тоді M — середина відрізка CC_1. У рівнобедрених трикутниках ACC_1 і BCC_1 медіани AM і BM є висотами. Отже, через точку M проходять дві прямі AM і BM, перпендикулярні до однієї й тієї самої прямої CC_1. Оскільки таке неможливе, то точки C і C_1 збігаються. Тому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Бісектриса, медіана і висота трикутника



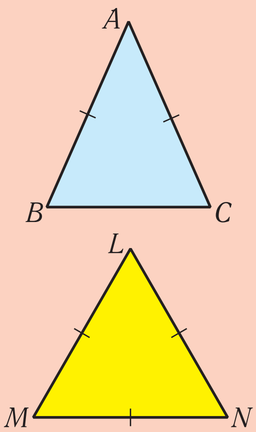
Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси його внутрішнього кута, який сполучає вершину трикутника з точкою на його протилежній стороні.

Медіаною трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

Висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

На рисунку AL — бісектриса, AM — медіана, AH — висота трикутника ABC, проведені з вершини A до протилежної сторони BC.

Рівнобедрений і рівносторонній трикутники



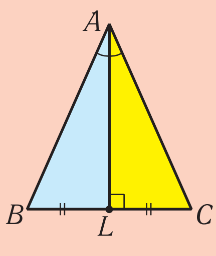
Трикутник називається **рівнобедреним**, якщо він має дві рівні сторони. Рівні сторони рівнобедреного трикутника називаються **бічними сторонами**, а третя сторона — **основою**.

Коли говорять про **вершину** рівнобедреного трикутника, то зазвичай мають на увазі ту, яка протилежна основі. Інші дві вершини називають *вершинами при основі*.

На рисунку ΔABC — рівнобедрений, AB і AC — його бічні сторони, BC — основа, A — вершина, B і C — вершини при основі.

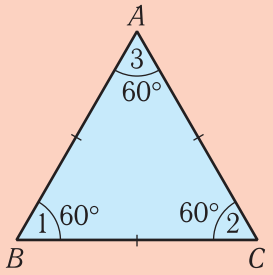
Трикутник, у якого всі сторони рівні, називається **рівностороннім** або **правильним**.

На рисунку ΔLMN — рівносторонній.



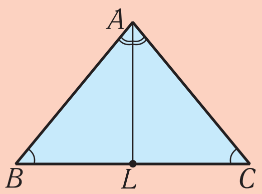
Теорема (*про властивості рівнобедреного трикутника*). ***Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до основи, ділить трикутник на два рівних трикутники і є медіаною та висотою. Кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.***

Доведення. Нехай AL — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC. Оскільки $AB = AC$, $\angle BAL = \angle CAL$, то, за першою ознакою рівності трикутників, $\Delta ALB = \Delta ALC$. Звідси $BL = CL$. Отже, AL — медіана трикутника ΔABC. $\angle ALB = \angle ALC$. Ці кути суміжні, а тому вони — прямі. Отже, AL — висота трикутника ΔABC. $\angle B = \angle C$, а тому кути при основі рівнобедреного трикутника рівні.



Наслідок. ***Всі кути рівностороннього трикутника рівні і дорівнюють по 60°.***

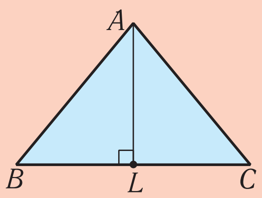
Доведення. Оскільки $AB = AC$, то $\angle 1 = \angle 2$, а оскільки $BA = BC$, то $\angle 2 = \angle 3$. Отже, всі три кути рівностороннього трикутника рівні. Тому кожен з них дорівнює третині від 180°, тобто 60°.



Теорема (*ознака рівнобедреного трикутника за кутами*)**.** ***Якщо у трикутнику два кути рівні, то він — рівнобедрений.***

Доведення. Нехай $\angle B = \angle C$. Проведемо бісектрису AL. $\angle B = \angle C$, $\angle BAL = \angle CAL$, тому $\angle ALB = \angle ALC$ (сума кутів трикутника дорівнює 180°). Тому, за другою ознакою, $\Delta ALB = \Delta ALC$. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

Наслідок. ***Трикутник, у якому всі кути рівні (по 60°), є рівностороннім.***

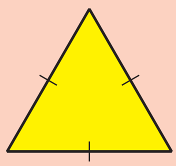


Теорема (*ознаки рівнобедреного трикутника за відрізками*)**.** ***Якщо у трикутнику висота збігається з медіаною або з бісектрисою, то трикутник — рівнобедрений.***

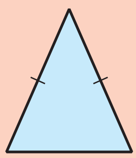
Доведення. **1.** Нехай AL — медіана й висота трикутника ABC. Тоді прямокутні трикутники ALB і ALC рівні за першою ознакою. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

2. Нехай AL — висота і бісектриса трикутника ABC. Тоді прямокутні трикутники ALB і ALC рівні за другою ознакою, оскільки сторона AL у них спільна, а прилеглі гострі кути рівні. Звідси $AB = AC$. Отже, трикутник ABC — рівнобедрений.

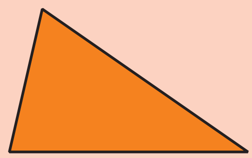
Види трикутників за співвідношеннями між сторонами



Рівносторонній трикутник (усі сторони рівні)

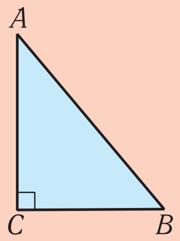


Рівнобедрений трикутник (дві сторони рівні)



Різносторонній трикутник (усі сторони різні)

Прямокутні трикутники



Трикутник називається **прямокутним**, якщо він має прямий кут. Сторони прямокутного трикутника, які прилягають до прямого кута, називаються **катетами**, а сторона, яка лежить проти прямого кута, називається **гіпотенузою**.

На рисунку AC і BC — катети, AB — гіпотенуза.

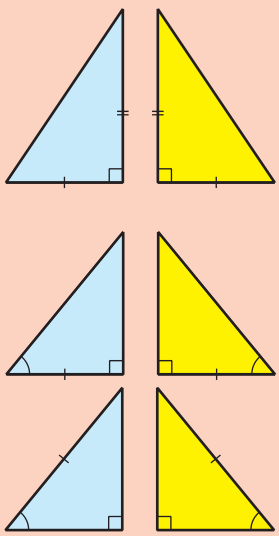
Терміни «катет» походить від грецького «катетос», що означає «прямовисний». Слово «гіпотенуза» в дослівному перекладі з грецької мови означає «та, що стягує» (мається на увазі — «стягує прямий кут»).

Властивість прямокутного трикутника. ***У прямокутному трикутнику два кути гострі. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.***

Ознака прямокутного трикутника. ***Якщо сума двох кутів трикутника дорівнює 90°, то трикутник — прямокутний.***

Доведення. Сума усіх кутів трикутника дорівнює 180°, тому якщо два з них у сумі дають 90°, то третій дорівнює 180° − 90° = 90°, тобто є прямим.

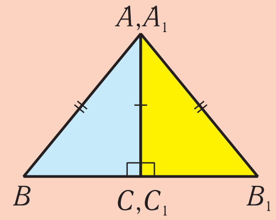
Ознаки рівності прямокутних трикутників



1. За двома катетами. ***Якщо катети одного прямокутного трикутника відповідно дорівнюють катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.***

2. За катетом і прилеглим або протилежним гострим кутом. ***Якщо катет і прилеглий (або протилежний) гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і прилеглому (або протилежному) гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.***

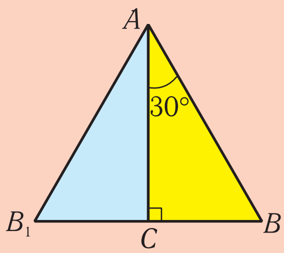
3. За гіпотенузою і гострим кутом. ***Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.***



4. За катетом і гіпотенузою. ***Якщо катет і гіпотенуза одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету й гіпотенузі іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.***

Доведення. Нехай у трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $BC = B_1C_1$, $AB = A_1B_1$. Перемістимо трикутник $A_1B_1C_1$ так, щоб сумістилися катети AC і A_1C_1, а вершини B і B_1 розмістилися по різні боки від прямої AC. Дістанемо рівнобедрений трикутник ABB_1, у якому AC — висота, проведена до основи BB_1. Оскільки вона є й бісектрисою, то $\angle BAC = \angle B_1AC$. Отже, трикутники ABC і $A_1C_1B_1$ рівні за першою ознакою.

Властивість і ознака прямокутного трикутника з кутом 30°



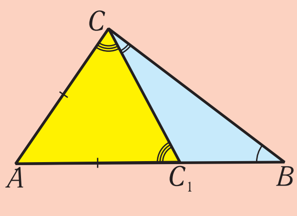
Теорема. ***Катет прямокутного трикутника, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.***

Навпаки, якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то протилежний гострий кут дорівнює 30°.

Доведення. Нехай у ΔACB $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ (рис. 3.130). Тоді $\angle B = 60°$. Відкладемо на промені BC відрізок $CB_1 = BC$. $\Delta ACB_1 = \Delta ACB$. Тому $\angle B = \angle B = = 60°$. Отже, ΔABB_1 — рівносторонній і $AB = BB_1$. Але $BB_1 = 2BC$. Тому $AB = = 2BC$.

Навпаки, якщо $AB = 2BC$, то AC є медіаною і висотою у ΔABB_1. Отже, цей трикутник рівнобедрений, а тому й рівносторонній. Тому $\angle B = 60°$, а $\angle A = 90° - 60° = 30°$.

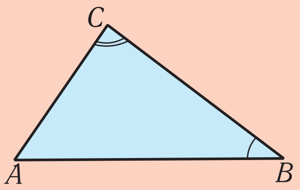
Співвідношення між сторонами і кутами в довільному трикутнику



Теорема (*про співвідношення між сторонами і кутами трикутника*). ***У будь-якому трикутнику проти більшої сторони лежить більший кут, а проти більшого кута — більша сторона***

Доведення. Нехай $AB > AC$. Відкладемо $AC_1 = AC$. ΔACC_1 рівнобедрений, тому $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$. $\angle ACC_1$ є частиною кута ACB, тому $\angle ACB > ACC_1$. З іншого боку, $\angle AC_1C$ є зовнішнім для ΔCC_1B. Тому $\angle AC_1C > \angle B$.

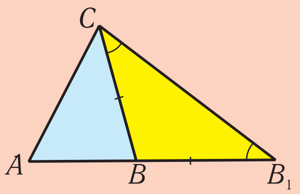
Отже, $\angle C$ більший, а $\angle B$ — менший від рівних кутів ACC_1 і AC_1C. Тому $\angle C > \angle B$, що й треба було довести.



Нехай, навпаки, $\angle C > \angle B$. Сторони AB і AC не можуть бути рівними, бо тоді й кути C і B були б рівними. Сторона AB не може бути меншою від AC, бо тоді, як щойно доведено, $\angle C$ був би меншим від $\angle B$. Тому залишається єдина можливість: $AB > AC$. Теорему доведено.

Наслідки.

1. ***У прямокутному трикутнику гіпотенуза більша за будь-який з катетів.***
2. ***У тупокутному трикутнику сторона, що лежить проти тупого кута, є найбільшою.***



Теорема (*про нерівність трикутника*). ***У будь-якому трикутнику ABC справджується нерівність трикутника: $AC < AB + BC$.***

Доведення. Продовжимо AB за точку B і відкладемо $BB_1 = CB$. У рівнобедреному трикутнику BCB_1 $\angle BCB_1 = \angle BB_1C$. Кут BCB_1 є частиною кута ACB_1. Тому $\angle ACB_1 > \angle BCB_1$ і, отже, $\angle ACB_1 > \angle BB_1C$. Тому в ΔACB_1 $AC < AB_1$. А оскільки $AB_1 = AB + BC$, то $AC < AB + BC$.

Перевір себе

1. Що таке трикутник? Назвіть елементи трикутника і дайте їхні означення. Як позначаються і зображаються трикутники?
2. Дайте означення кута трикутника. Як класифікуються трикутники за величинами їхніх кутів?
3. Що таке периметр трикутника?
4. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів трикутника. Які наслідки вона має?
5. Що таке зовнішній кут трикутника? Сформулюйте і доведіть теорему про зовнішній кут трикутника. Які наслідки вона має?
6. Які трикутники називаються рівними? Як записується рівність трикутників?
7. Сформулюйте аксіому рухомості трикутника.
8. Сформулюйте і доведіть першу ознаку рівності трикутників.
9. Сформулюйте і доведіть другу ознаку рівності трикутників.
10. Дайте означення рівнобедреного трикутника і його елементів.
11. Що таке рівносторонній трикутник?
12. Дайте означення бісектриси, медіани і висоти трикутника.

13. Сформулюйте і доведіть теорему про властивості рівнобедреного трикутника. Які наслідки вона має для рівностороннього трикутника?

14. Сформулюйте і доведіть ознаку рівнобедреного трикутника за кутами.

15. Сформулюйте і доведіть ознаку рівнобедреного трикутника за відрізками.

16. Сформулюйте і доведіть третю ознаку рівності трикутників.

17. Дайте означення прямокутного трикутника і його елементів.

18. Сформулюйте і доведіть ознаку прямокутного трикутника за кутами.

19. Сформулюйте і доведіть ознаки рівності прямокутних трикутників.

20. Сформулюйте і доведіть властивість прямокутного трикутника, що має гострий кут 30°.

21. Сформулюйте і доведіть теорему про співвідношення між сторонами і кутами у довільних трикутниках. Які наслідки вона має для прямокутних і тупокутних трикутників?

22. Сформулюйте і доведіть теорему про співвідношення між сторонами трикутника. Що таке нерівність трикутника?

Завдання для повторення та проведення контрольних робіт до розділу III

1°. а) За рис. 3.143, а) визначте довжину відрізка BC і градусну міру кута ADC.
б) За рис. 3.143, б) визначте довжину відрізка DC і градусну міру кута D.

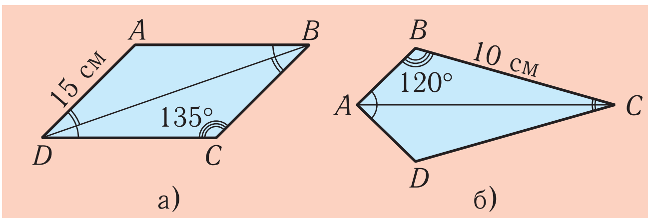


Рис. 3.143

2°. а) На рис. 3.144, а) точка O — середина відрізка MN. Визначте кут B.
б) На рис. 3.144, б) трикутник ABC — рівнобедрений з основою BC. Визначте кут CAN.

3°. а) Чи є трикутник ABC на рис. 3.145, а) рівнобедреним? Обґрунтуйте.
б) Чи є трикутник ABC на рис. 3.145, б) рівнобедреним? Обґрунтуйте.

4°. а) За рис. 3.146, а) визначте кут B. Обґрунтуйте свої дії.
б) За рис. 3.146, б) визначте кут M. Обґрунтуйте свої дії.

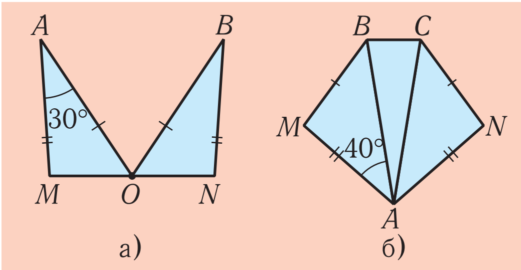


Рис. 3.144

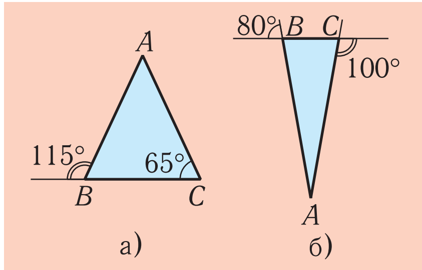


Рис. 3.145

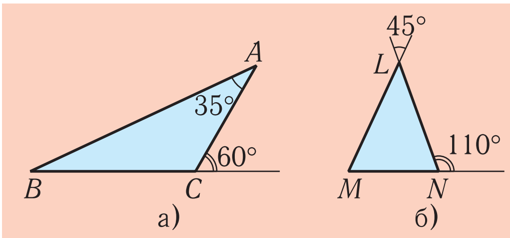


Рис. 3.146

5. а) Один із кутів трикутника дорівнює 25°, а різниця двох інших кутів дорівнює 75°. Визначте невідомі кути.
б) Різниця двох кутів трикутника дорівнює 10°, а кут, суміжний із третім кутом, дорівнює 140°. Визначте кути трикутника.

6. а) Дано: $AO = OB$, $CO = OD$ (рис. 3.147, а). Доведіть, що $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$.
б) Дано: $AO = CO$, $OB = OD$ (рис. 3.147, б). Доведіть, що $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

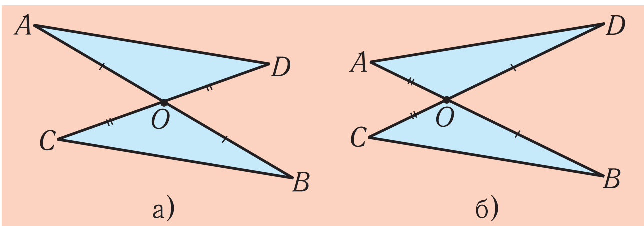


Рис. 3.147

7. а) Дано: $AB = AC$, $\angle B = \angle C$ (рис. 3.148, а). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$.
б) Дано: $OA = OB$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3.148, б). Доведіть, що $OC = OD$.

8. а) Дано: $AD = BC$; $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3.149, а). Доведіть, що $OC = OD$.
б) Дано: $AC = BC$; $AM = BN$ (рис. 3.149, б). Доведіть, що $AN = BM$.

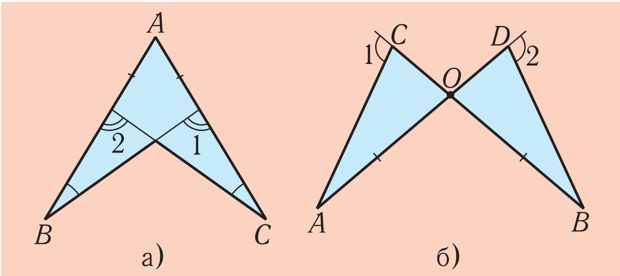


Рис. 3.148

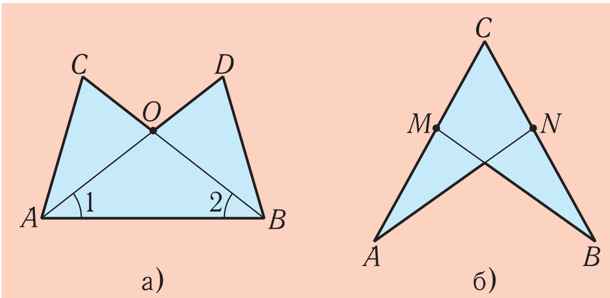


Рис. 3.149

9. а) Доведіть, що коли всі кути трикутника дорівнюють по 60°, то цей трикутник — рівносторонній.
б) Доведіть, що коли у рівнобедреному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, то цей трикутник — рівносторонній.

10. а) Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і висотою, проведеною до гіпотенузи.
б) Доведіть рівність гострокутних трикутників за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони.

11. а) У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює 30°, а бічна сторона — 8 см. Визначте довжину медіани трикутника, проведеної до основи.
б) У рівнобедреному трикутнику кут між бічними сторонами дорівнює 120°, а бічна сторона — 8 см. Визначте довжину бісектриси трикутника, проведеної до основи.

12. а) У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює 60°, а різниця гіпотенузи й меншого катета дорівнює 5 см. Визначте довжину гіпотенузи.
б) У прямокутному трикутнику різниця гострих кутів дорівнює 30°, а сума гіпотенузи й меншого катета дорівнює 9 см. Визначте довжину гіпотенузи.

13•. а) Дано: $OC = OD$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 3.150). Доведіть, що $\angle 3 = \angle 4$, а OQ — бісектриса кута AOB.

б) Дано: $OA = OB$, $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 3.150). Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$, а OQ — бісектриса кута AOB.

14•. а) Дано: $AB = BC$, $AM = MC$ (рис. 3.151). Доведіть, що $AD = DC$.
б) Дано: $AB = BC$, $AD = DC$ (рис. 3.151). Доведіть, що $AM = MC$.

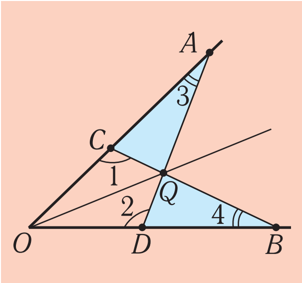


Рис. 3.150

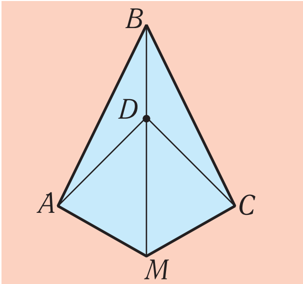


Рис. 3.151

15•. а) У трикутнику ABC $AB = AC$, K — точка перетину бісектрис кутів B і C. Доведіть, що $AK \perp BC$.
б) У трикутнику ABC $AB = AC$, H — точка перетину висот, проведених з вершин B і C. Доведіть, що $AH \perp BC$.

16•. а) Точка, що лежить на висоті трикутника, рівновіддалена від кінців сторони, до якої проведена ця висота. Доведіть, що трикутник — рівнобедрений.
б) Точка лежить усередині рівнобедреного трикутника і рівновіддалена від вершин основи. Доведіть, що ця точка лежить на висоті трикутника, проведеній до основи.

У центрі — композиція **Марії Примаченко** (1909–1997) **«Соняшник життя»** (1963 р.)

Розділ IV Коло і круг

Вступ

Уроки 47–48

Уже не раз у цьому підручнику зазначалося, що давньогрецького мудреця Фалеса вважають першим, хто запровадив у геометрію доведення. Зокрема, Фалес, як уважається, першим довів такі геометричні істини: 1) рівність вертикальних кутів; 2) другу ознаку рівності трикутників; 3) рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника. А ще Фалесу приписують доведення двох властивостей кола і круга: 1) діаметр ділить круг на дві рівні частини (рис. 4.1); 2) з будь-якої точки C кола його діаметр AB видно під прямим кутом, тобто $\angle ACB = 90°$ (рис. 4.2). Якою б очевидною не видавалася перша із цих властивостей, але щоб стати незаперечним геометричним фактом її потрібно довести за всіма правилами геометрії, тобто вивести з уже встановлених істин. Ми зможемо довести її через один урок — як наслідок з теореми про властивість діаметра кола, перпендикулярного до хорди. Натомість друга з доведених Фалесом властивостей кола аж ніяк не очевидна. Легенда стверджує, що за її доведення Фалес приніс у жертву бика. Однак після того, як вона була відкрита, довести її навіть легше, ніж першу, і ми це зробимо вже на цьому уроці.

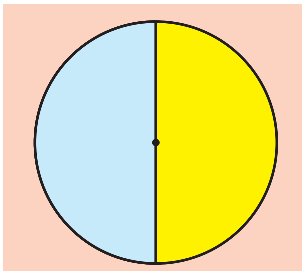


Рис. 4.1

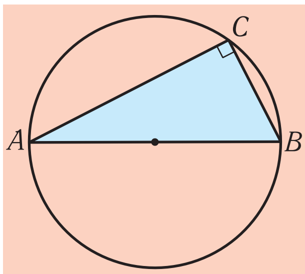


Рис. 4.2

На наступних кількох уроках розглядатимуться різні випадки взаємного розміщення кола і прямої, а також двох кіл. Особливо виокремлюють граничні випадки, коли ці фігури дотикаються одна до одної (рис. 4.3 і рис. 4.4). Аналогічні граничні випадки для взаємного розміщення кола і трикутника характеризуються поняттями вписаного та описаного кіл. Зокрема, ви довідаєтеся, що навколо будь-якого трикутника можна описати коло (рис. 4.5) і в будь-який трикутник можна вписати коло (рис. 4.6), причому для кожного трикутника кожне із цих кіл буде лише одне.

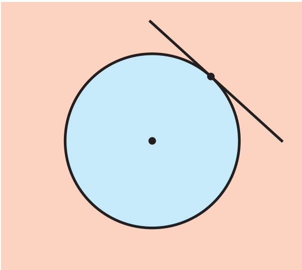


Рис. 4.3

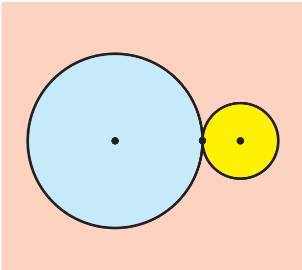
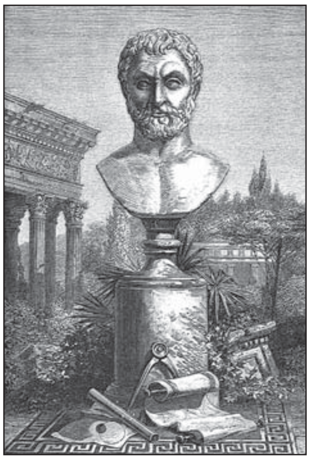


Рис. 4.4


Фалес. Гравюра на основі античного бюсту з музею скульптури Ватикану

У другій частині розділу розглядатимуться теоретичні основи геометричних побудов за допомогою циркуля і лінійки. Ці побудови мають давню історію, і вони значною мірою стимулювали розвиток геометрії. Зокрема, ви довідаєтеся про застосування в геометричних побудовах ліній з певними властивостями — так званих геометричних місць точок. Одним із найважливіших геометричних місць точок є коло. Буде розглянуто й декілька інших важливих геометричних місць точок.

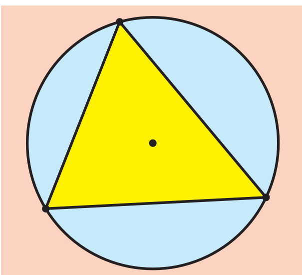


Рис. 4.5

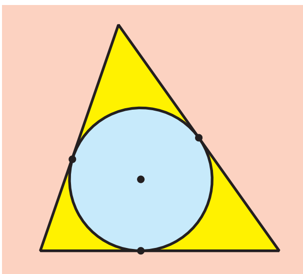


Рис. 4.6

§21. Коло і круг

Усім добре відома геометрична фігура, яку креслять за допомогою циркуля (рис. 4.7). Це — *коло*. Відомий також спосіб побудови кола за допомогою мотузки і двох кілків, який інколи застосовують для розбиття клумб (рис. 4.8). У кожному разі всі точки побудованого кола знаходяться на однаковій відстані від однієї точки, в якій застромлена ніжка циркуля або нерухомий кілок.

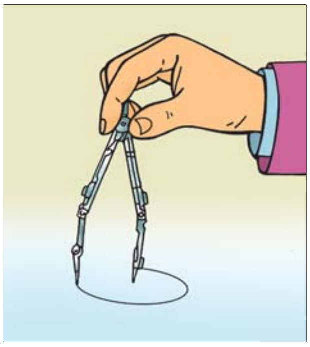


Рис. 4.7

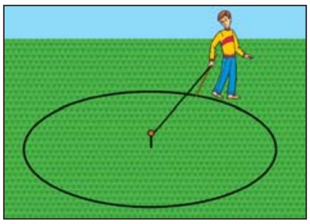


Рис. 4.8

Означення.

Колом **називається геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, які рівновіддалені від деякої точки. Цю точку називають** ***центром*** **кола, а відстань від центра кола до будь-якої його точки —** ***радіусом*** **кола.** ***Радіусом*** **кола називається і будь-який з відрізків, що сполучають центр кола з його точками.**

На рис. 4.9 зображено коло з центром O і два його радіуси OM і ON.

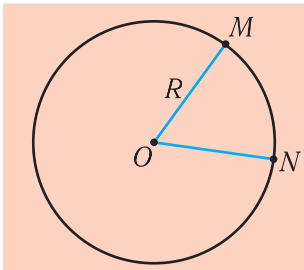


Рис. 4.9

Слово «центр» походить від латинського слова «центрум», а те, у свою чергу, від грецького «кентрон», що означає «вістря», «гострий кінець палиці».

Слово «радіус» в перекладі з латини означає «промінь». Радіуси кола справді виходять із його центра, неначе промені. Із цим порівнянням пов'язані й фізичні терміни «радіоактивний» та «радіаційний». Радіус кола найчастіше позначають першою літерою його латинської назви — R або r.

Відрізок з кінцями на колі називається *хордою* кола. На рис. 4.10 AB — одна із хорд зображеного кола з центром O.

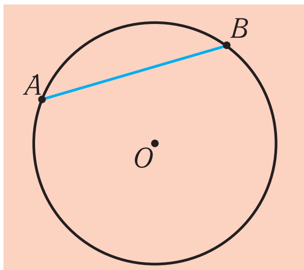


Рис. 4.10

Слово «хорда» бере свій початок від грецького слова «куерда», що означає «тятива лука», а також «струна». Якщо дугу лука уявляти у формі дуги кола, то тятива, яка стягує кінці цієї дуги, справді буде хордою (рис. 4.11). У зв'язку із цим і про хорду кола кажуть, що вона *стягує* його дугу.

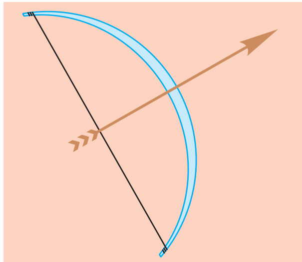


Рис. 4.11

Якщо хорда AB проходить через центр кола (рис. 4.12), то вона називається *діаметром* кола («діаметрос» в перекладі з грецької означає «поперечник»). Очевидно, що ***діаметр кола дорівнює двом його радіусам***.

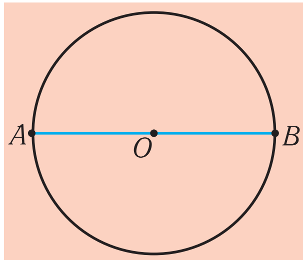


Рис. 4.12

Кінці діаметра інколи називають *діаметрально протилежними* точками кола. Такими на рис. 4.12 є точки A і B. Вони розміщуються на однакових відстанях по різні боки від центра. Часто цей термін використовується і в розмовній мові — коли говорять про цілком протилежні точки зору (погляди) на певну подію чи явище.

Легко довести, що ***будь-яка хорда кола, яка не є його діаметром, менша від діаметра***.

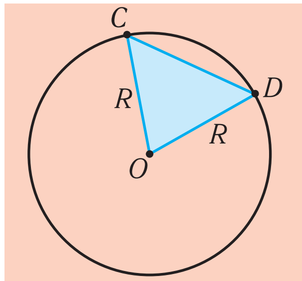


Рис. 4.13

Справді, нехай хорда CD не проходить через центр O кола (рис. 4.13). Тоді точки O, C, D не лежать на одній прямій, тобто є вершинами деякого трикутника. Відповідно до нерівності трикутника, $CD < OC + OD$, а звідси $CD < 2R$, що й треба було довести.

Якщо відстань OP від центра кола O до якоїсь точки P площини менша від радіуса кола, то про таку точку P кажуть, що вона лежить *усередині* кола (рис. 4.14). Якщо ж відстань OP від центра кола до точки P більша за радіус, то про таку точку P кажуть, що вона лежить *зовні* кола (рис. 4.15).

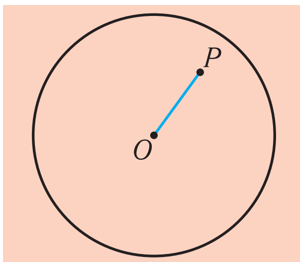


Рис. 4.14

Означення.

Сукупність усіх точок площини, які лежать на колі й усередині нього, називається *кругом* (рис. 4.16). Центр і радіус кола називаються також *центром* і *радіусом* круга.

Коротко кажуть, що *круг — це сукупність усіх точок площини, обмежених колом*. Очевидно, також що круг — це сукупність усіх точок площини, які знаходяться від центра на відстанях, що не перевищують його радіуса.

Хорди і діаметри кола називаються відповідно *хордами* і *діаметрами* обмеженого ним круга.

Зауважте, що центр, будь-який радіус, діаметр і будь-яка хорда круга належать кругу, однак не належать колу, яке його обмежує.

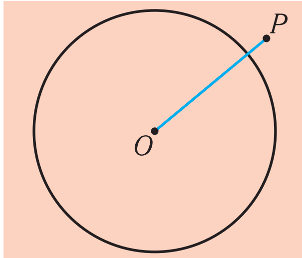


Рис. 4.15

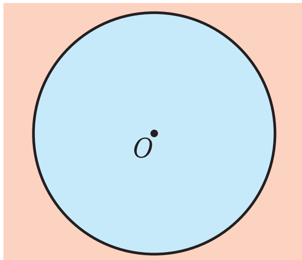


Рис. 4.16

Форму кола або круга має один із найдавніших і найвидатніших винаходів людства — колесо. Зображення коліс зі шпицями (фізичних прообразів радіусів) знаходимо навіть у найдавніших пам'ятках єгипетської культури (рис. 4.17).

З прадавніх часів помічено, що круговим є добовий рух сонця, місяця та зірок на небосхилі. У зв'язку із цим тривалий час (аж до XVII ст.) коло було основним геометричним елементом у побудові моделей всесвіту (рис. 4.18).

Коло і круг мають ще й довершені (симетричні) форми, тому вони здавна використовуються для проектування архітектурних споруд та орнаментів (рис. 4.19).

Усе це спонукало вже найдавніших учених до ґрунтовного дослідження геометричних властивостей кола і круга.

Рис. 4.17

Рис. 4.18. Символічні зображення кругових систем світу Птолемея (планети рухаються по колах навколо Землі) і Коперника (планети рухаються по колах навколо Сонця)

Теорема Фалеса

(про кут, під яким діаметр кола видно з точки на колі).

З будь-якої точки кола його діаметр видно під прямим кутом.

Доведення. Нехай AB — діаметр кола, O — його центр, C — довільна точка на колі (рис. 4.20). Потрібно довести, що $\angle ACB = 90°$.

Трикутник OAC — рівнобедрений, оскільки $OA = OC$ (як радіуси кола). Тому $\angle OAC = \angle OCA$. Аналогічно доводимо, що $\angle OBC = \angle OCB$.

Якщо додамо праві й ліві частини останніх двох рівностей, то дістанемо: $\angle A + \angle B = \angle C$. Підставимо цей результат замість перших двох доданків у рівність для суми кутів трикутника ABC: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Матимемо: $2\angle C = 180°$. Звідси $\angle C = 90°$, що й треба було довести.

Зауваження. Аби бути зовсім точним, то у формулюванні теореми Фалеса потрібно вказувати, що не беруться до уваги ті дві точки кола, які є кінцями взятого діаметра. Справді, якщо точка C збігається з кінцем A чи B діаметра AB (див. рис. 4.20), то кут ACB стає невизначеним.

Рис. 4.19. Вітраж собору Паризької Богоматері

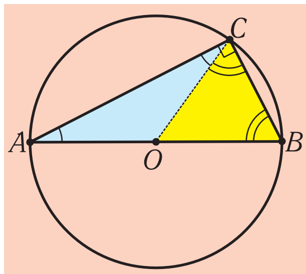


Рис. 4.20

Вправи і задачі

455°. Накресліть коло з радіусом 3 см, позначте його центр літерою O. Проведіть який-небудь радіус цього кола, потім діаметр, а після цього яку-небудь хорду, яка не є діаметром. Чи може хорда мати довжину 3 см? Якщо так, то як побудувати хорду саме такої довжини? Чи може хорда мати довжину 7 см?

456°. Накресліть коло з діаметром 7 см. Позначте всередині кола яку-небудь точку M, що не збігається з центром, а на колі — яку-небудь точку P. Проведіть через ці точки радіуси, діаметри і по одній хорді. Яку найбільшу довжину можуть мати хорди? Чи можна було б виконати ці побудови для точки M, якби вона лежала поза колом?

457°. Ви виміряли діаметр скла круглого наручного годинника. Чи можна за цими даними визначити довжину хвилинної стрілки?

458°. На колі взято довільну точку. Скільки діаметрів і скільки хорд можна провести через цю точку? Чи всі вони будуть різними за довжиною?

459°. Усередині кола взято точку. Скільки діаметрів і скільки хорд можна через неї провести? Чи всі вони будуть різними за довжиною?

460°. Дано коло. Яку лінію утворюють всі точки площини, відстані від яких до центра кола: а) удвічі менші від його радіуса; б) удвічі менші від діаметра; в) удвічі більші за діаметр?

461°. Чи може хорда кола дорівнювати: а) радіусу; б) двом радіусам; в) трьом радіусам; г) половині радіуса?

462°. На рис. 4.21 зображені різні прямолінійні відрізки у крузі (O — центр круга). Які з них є: діаметрами; хордами; радіусами? Чи істинне таке твердження: «Діаметри й радіуси круга є його хордами»?

463°. Діаметр кола на 4 см довший за радіус. Яким є радіус і яким — діаметр?

464°. Накресліть коло з діаметром AB завдовжки 6 см і позначте на ньому точки M і P, для яких хорди AM і BP відповідно дорівнюють 2,5 см і 1,5 см. Потім проведіть хорди AM, BM, AP, BP і виміряйте за допомогою транспортира кути AMB і APB. Чи впевнені ви у тих результатах, які одержали?

465°. На рис. 4.22 AB і CD — діаметри круга з центром O. Доведіть, що: 1) $AC = DB$; 2) $AC \parallel DB$. Обґрунтуйте, як на підставі цих властивостей, лише за допомогою однієї лінійки, можна провести у крузі дві рівні або дві паралельні хорди.

466°. На рис. 4.23 AB — діаметр кола з центром O, $AC = CB$. Визначте кути A, B і ACB. Чому дорівнює кут AOC?

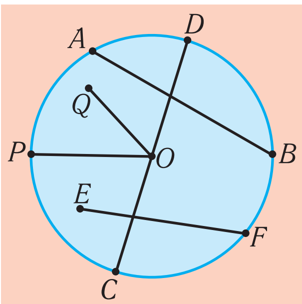


Рис. 4.21

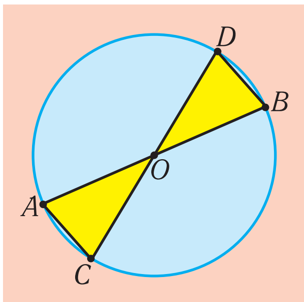


Рис. 4.22

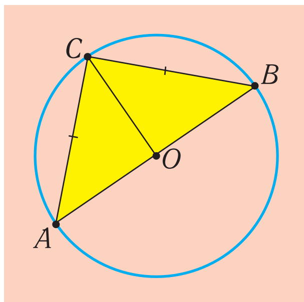


Рис. 4.23

467°. На рис. 4.24 AB і BC — рівні хорди кола з центром O. Доведіть, що кути 1 і 2 теж рівні. Чи обов'язково будуть рівними хорди AB і BC, якщо рівні кути 1 і 2?

468. На рис. 4.25 AB — діаметр кола, CB і DB — рівні хорди. Доведіть, що $\angle 1 = \angle 2$. Чи обов'язково будуть рівними хорди CB і DB, якщо $\angle 1 = \angle 2$?

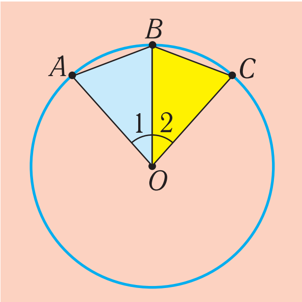


Рис. 4.24

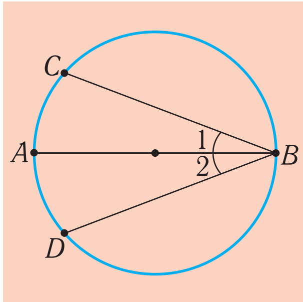


Рис. 4.25

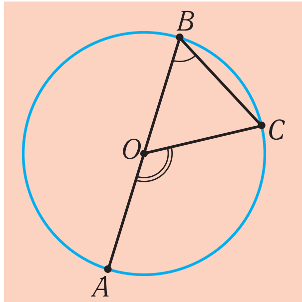


Рис. 4.26

469. На рис. 4.26 AB — діаметр кола, O — його центр. Доведіть, що $\angle AOC = 2\angle OBC$.

470. На рис. 4.27 AB — діаметр кола, O — його центр, $BC = BO$. Визначте $\angle ABC$.

471. На рис. 4.28 AB — діаметр кола, $AE \parallel BF$. Доведіть, що $AE = BF$.

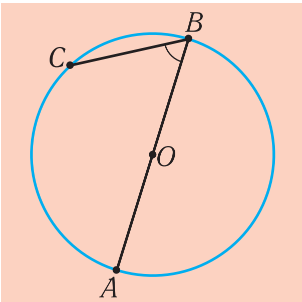


Рис. 4.27

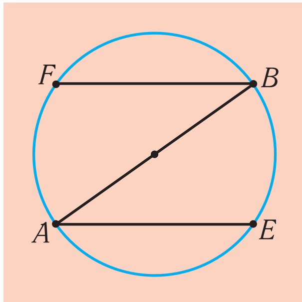


Рис. 4.28

§22. Коло і круг як геометричні місця точок

Уроки 49–50

Ви знаєте, що всі геометричні фігури конструюються за допомогою найпростіших із них — точок і прямих. Якщо ж про точки геометричної фігури відомо, що вони характеризуються певною властивістю, і немає жодних інших точок на площині, які мають цю властивість, то таку геометричну фігуру називають *геометричним місцем точок*.

Означення.

Геометричним місцем точок **з певною властивістю називають геметричну фігуру, яка**

складається з усіх тих, і лише тих точок площини, які мають цю властивість.

Зверніть увагу на слова, виділені у цьому означенні жирним шрифтом. Вони дуже важливі.

Наприклад, відповідно до означення, ***коло є геометричним місцем точок площини, рівновіддалених від деякої точки (центра кола)***.

Справді, по-перше, *усі точки кола* рівновіддалені від його центра. А по-друге, *лише точки кола* віддалені від центра на ту саму відстань, тобто на площині немає інших точок, які мають цю властивість.

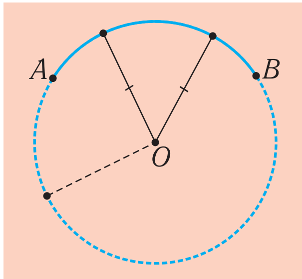


Рис. 4.29

На противагу цьому, наприклад, дуга кола, тобто частина кола, обмежена якими-небудь двома його точками A і B (рис. 4.29), або весь круг (рис. 4.30) уже не є геометричними місцями точок, рівновіддалених від центра O. У першому випадку зазначена фігура (дуга кола) не вміщує *всіх* точок площини, рівновіддалених від точки O, а в другому випадку вказаній фігурі (кругу) належать *не лише* ті точки M, які рівновіддалені від центра на певну відстань, а й точки Q, які знаходяться від центра ближче за цю відстань. (Однак можна сказати, що *круг є геометричним місцем точок площини, відстані від яких до центра круга не перевищують певної величини*.)

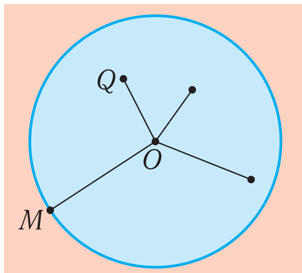


Рис. 4.30

Отже, для того, аби можна було стверджувати, що певна фігура є геометричним місцем точок із певною властивістю, потрібно довести два взаємно обернені твердження:

1) кожна точка цієї фігури має зазначену властивість;

2) якщо точка має зазначену властивість, то вона належить цій фігурі.

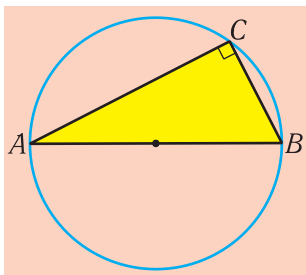


Рис. 4.31

У попередньому параграфі було доведено теорему Фалеса, за якою з будь-якої точки C кола його діаметр AB видно під прямим кутом (рис. 4.31). Чи можна на підставі цього стверджувати, що коло з діаметром AB є геометричним місцем точок K, L, M, *P*, і так далі, з яких цей діаметр видно під прямим кутом (рис. 4.32)?

Ні, не можна, адже, як уже зауважувалося у попередньому параграфі, точки *A* і *B* кола не мають цієї властивості.

То, може, коло без цих двох виняткових точок *A* і *B* таки є вказаним геометричним місцем точок?

Аби це довести, потрібно показати, що жодна точка *N*, яка лежить усередині кола або ззовні нього, не має зазначеної властивості.

Якщо точка *N* належатиме прямій *AB*, то у разі розміщення її всередині кола (рис. 4.33, а) кут *ANB* дорівнюватиме 180°, а в разі розміщення ззовні кола (рис. 4.33 б) — 0°, тобто в жодному із цих випадків кут *ANB* не буде прямим.

Нехай тепер точка *N* лежить усередині кола і не належить прямій *AB* (рис. 4.34). Позначимо через *K* точку перетину прямої *BN* з колом. За теоремою Фалеса, кут *AKN* — прямий. Кут *ANB* є зовнішнім для трикутника *AKN*, а тому він більший за внутрішній кут *AKN*. Отже, з усіх внутрішніх точок *N* кола діаметр *AB* видно під тупим кутом.

Нехай, нарешті, точка *N* лежить ззовні кола і не належить прямій *AB*. Можливі декілька характерних випадків розміщення точки *N* відносно прямих *a* і *b*, проведених через точки *A* і *B* перпендикулярно до *AB*. Якщо точка *N* належатиме прямій *a* чи *b* (рис. 4.35, а), то у прямокутному трикутнику *NAB* кут *N* буде гострим. В усіх інших випадках (див. рис. 4.35, б–г) принаймні одна із прямих *AN* чи *BN* перетинатиме коло у деякій точці *K*, а тому, за теоремою Фалеса, кут *AKB* буде прямим. Цей кут є зовнішнім для трикутника *KBN*, а тому внутрішній кут *N* буде гострим. Виходить, що з усіх точок *N*, які розміщені поза колом, діаметр *AB* видно під гострим кутом.

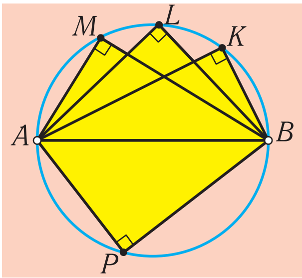


Рис. 4.32

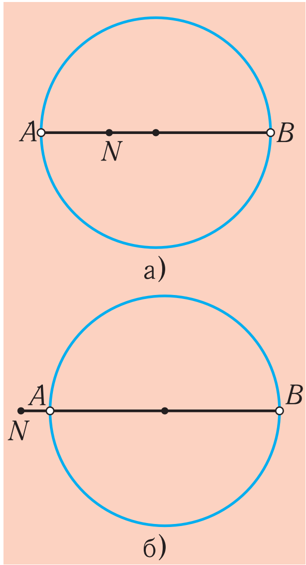


Рис. 4.33

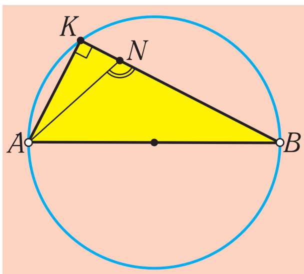


Рис. 4.34

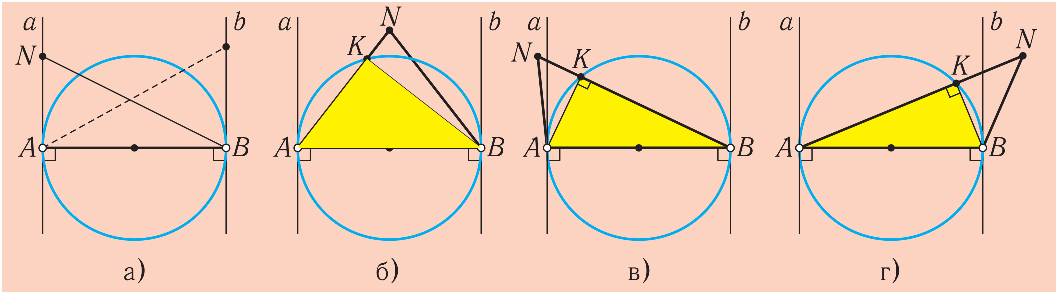


Рис. 4.35

Цим завершено обґрунтування такого твердження.

Геометричним місцем точок площини, з яких заданий відрізок видно під прямим кутом, є коло, побудоване на цьому відрізку як на діаметрі, з якого вилучені дві точки — кінці діаметра.

Це геометричне місце точок інколи називають *геометричним місцем точок Фалеса*.

Вправи і задачі

472°. Хорда круга дорівнює 4 см. Чи може діаметр цього круга дорівнювати: а) 4 см; б) 3 см; в) 10 см?

473°. AB — хорда круга з центром O (рис. 4.36). Визначте:
а) кути A і B, якщо кут O дорівнює 70°;
б) кут O, якщо кут A дорівнює 40°.

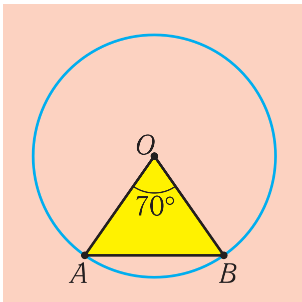


Рис. 4.36

474°. AB — діаметр кола з центром O, C — точка на колі (рис. 4.37). Визначте:
а) кут BOC, якщо кут C дорівнює 36°;
б) кут A, якщо кут BOC дорівнює 52°.

475. Які найбільше і найменше значення можуть мати кути A і BOC на рис. 4.37?

476. Яка фігура є геометричним місцем точок, відстані від яких до певної точки більші або дорівнюють якійсь заданій величині?

477. Користуючись рис. 4.38, запропонуйте спосіб побудови точок кола за допомогою косинця, коли задано діаметр кола AB.

478. У крузі з центром O і діаметром $AB = 7$ см проведено хорду AM (рис. 4.39). Виявилося, що кут AOM дорівнює 60°. Чи можна за цими даними без додаткових вимірювань визначити довжину хорди AM? А якби було відомо довжину хорди AM і те, що кут AOM дорівнює 60°, — то чи можна було б обчислити довжину діаметра?

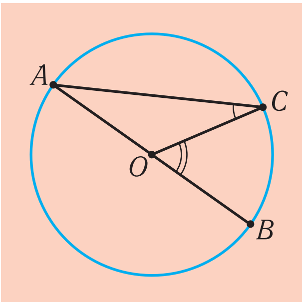


Рис. 4.37

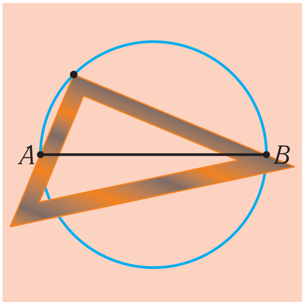


Рис. 4.38

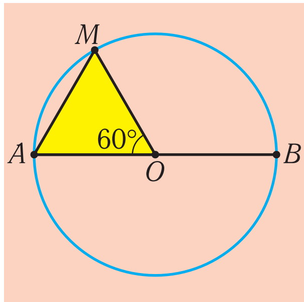


Рис. 4.39

479. З однієї точки кола проведено дві хорди, які дорівнюють радіусу кола. Визначте кут між цими хордами.

480. У крузі проведено два радіуси під кутом 120° один до одного. Визначте відстань від центра круга до хорди, що сполучає кінці радіусів, якщо діаметр круга дорівнює 8 см.

481. Відстань від центра O круга до хорди AB удвічі менша від радіуса круга. Визначте кут AOB.

482. Відстань від центра круга до хорди удвічі менша від самої хорди. Визначте, під яким кутом цю хорду видно із центра круга.

483•. Доведіть, що із точки, взятої всередині круга, діаметр круга видно під тупим кутом (рис. 4.40, а), а із точки, взятої ззовні круга, — під гострим (рис. 4.40, б).

484. Що є геометричним місцем точок, з яких заданий відрізок видно:
а) під кутом 0°; б) під кутом 180°;
в) під гострими кутами; г) під тупими кутами?

485•. Хорда кола перетинає діаметр під кутом 30° і ділиться діаметром на частини завдовжки 6 см і 14 см. Визначте відстані від кінців хорди до цього діаметра.

486•. Дано коло з радіусом R. Яку довжину повинні мати дві рівні хорди, аби при будь-якому розміщенні їхніх кінців на колі вони перетиналися?

487•. AB — хорда кола з центром O, точка C лежить на колі з того самого боку від прямої AB, що й точка O. Доведіть, що, незалежно від розміщення точок A, B відносно прямої CO — по різні боки (рис. 4.41, а) чи з одного боку (рис. 4.41, б), кут AOB завжди удвічі більший за кут ACB.

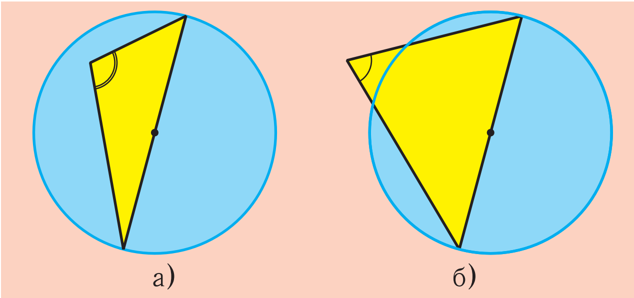


Рис. 4.40

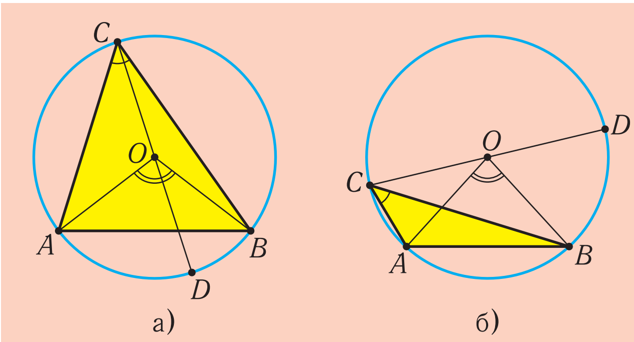


Рис. 4.41

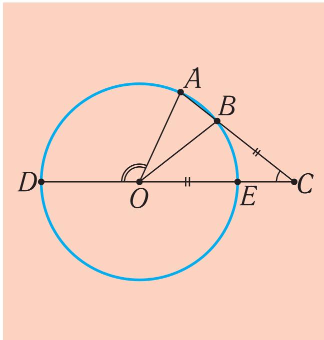


Рис. 4.42

488•. На продовженні хорди AB кола з центром O відкладено відрізок BC, який дорівнює радіусу кола (рис. 4.42). Пряма OC перетинає коло у точках D, E. Доведіть, що $\angle DOA = 3\angle ACD$.

§23. Властивість діаметра, перпендикулярного до хорди

Урок 51

Теорема
(про властивість діаметра, перпендикулярного до хорди).

Діаметр кола (круга), який перпендикулярний до хорди, ділить цю хорду навпіл.

Доведення. Нехай O — центр кола, AB — довільна хорда кола, діаметр CD перпендикулярний до AB, M — точка їхнього перетину (рис. 4.43). Потрібно довести, що $AM = MB$.

Твердження очевидне, якщо хорда AB теж є діаметром (рис. 4.43, а), — адже будь-які два діаметри перетинаються в центрі кола, а центр кола ділить кожен з них на два радіуси, тобто навпіл.

Якщо ж хорда AB не є діаметром (рис. 4.43, б), то маємо два прямокутні трикутники OMA та OMB. Ці трикутники рівні, оскільки у них рівні гіпотенузи OA і OB — як радіуси кола, і спільний катет OM. Тому рівними є й катети AM та MB. Теорему доведено.

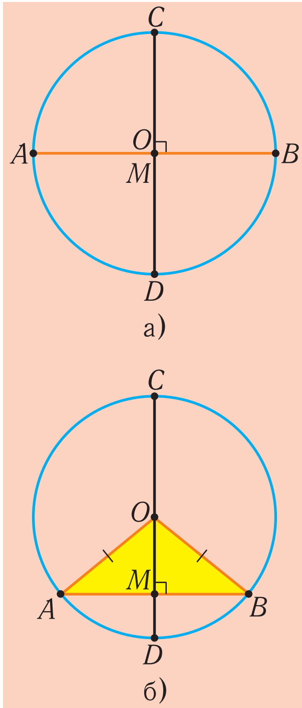


Рис. 4.43

Теорема обернена

(про властивість діаметра, який ділить хорду навпіл).

Якщо діаметр кола ділить хорду, яка не є діаметром, навпіл, то він перпендикулярний до цієї хорди.

Доведення. Нехай діаметр CD проходить через середину M хорди AB і при цьому хорда AB не є діаметром, тобто точка M не збігається з центром O кола (рис. 4.44). Потрібно довести, що діаметр CD перпендикулярний до хорди AB.

Оскільки $OA = OB$ — як радіуси кола, а за умовою $AM = MB$, то трикутники OMA і OMB рівні за трьома сторонами. Тому рівними є їхні кути OMA та OMB, що лежать проти рівних сторін OA і OB. А оскільки ці кути суміжні, то вони — прямі. Отже, $CD \perp AB$. Теорему доведено.

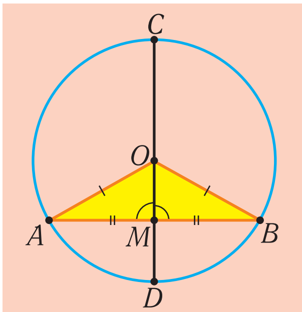


Рис. 4.44

Наслідком з теореми про властивість діаметра, перпендикулярного до хорди, є ще одна теорема Фалеса, про яку згадувалося на початку цього розділу.

Теорема Фалеса

(про поділ круга діаметром на дві рівні частини).

Кожен діаметр розбиває круг (і обмежуюче його коло) на дві рівні фігури — півкруги (і півкола).

Доведення. Нехай AB — діаметр круга з центром O (рис. 45). Уявімо собі, що проведено всі хорди цього круга, які перпендикулярні до діаметра AB. Через кожну точку круга проходитиме своя хорда, тому усі ці хорди повністю заповнять круг. Відповідно до теореми про властивість діаметра, перпедикулярного до хорди, кожна з хорд точкою перетину з діаметром AB ділиться навпіл, наприклад, хорда CD — точкою M. А це означає, що якби перегнути круг уздовж діаметра AB, то кожен відрізок CM сумістився б з відповідним йому відрізком DM. А оскільки всі відрізки CM заповнюють один із півкругів, а всі відрізки DM — інший, то один із півкругів при цьому сумістився б з іншим (а півколо — з іншим півколом). А це й означає, що обидва півкруги (і обидва півкола) рівні між собою. Теорему доведено.

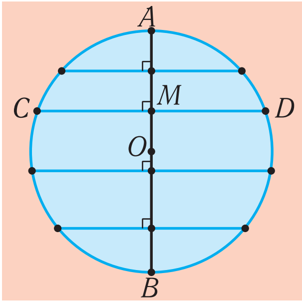


Рис. 4.45

Якщо у цьому доведенні брати до уваги лише такі хорди CD, кінці яких належать якійсь дузі PAQ з кінцями на хорді PQ, що перпендикулярна до діаметра AB (рис. 46, а), то з рівності частин CM і MD цих хорд випливатиме можливість суміщення дуг PA та QA. Отже, ці дуги рівні між собою. Так само доведемо, що рівні й дуги PB та QB.

Отже, ***діаметр кола, який перпендикулярний до хорди, ділить навпіл кожну з обох дуг, які стягує ця хорда***.

Якщо ж узяти до уваги лише такі відрізки CD, які лежать між паралельними хордами PQ і KN (рис. 46, б), то дійдемо висновку про рівність дуг PK і QN між цими хордами.

Отже, ***дуги кола, розміщені між паралельними хордами, рівні між собою***.

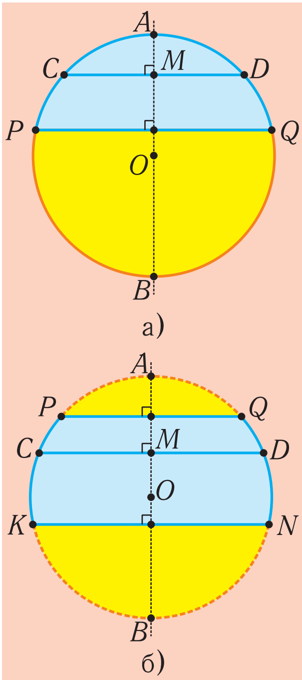


Рис. 4.46

Розв'язуємо разом

Задача.

Довести, що рівні хорди круга рівновіддалені від його центра. Навпаки, хорди, які рівновіддалені від центра круга, — рівні між собою.

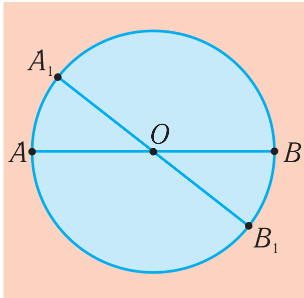


Рис. 4.47

Розв'язання. Істинність цих тверджень очевидна, якщо рівні хорди AB і A_1B_1 є діаметрами (рис. 4.47). Тоді вони проходять через центр O круга, а тому відстані до них від центра круга дорівнюють нулю, тобто є рівними. Навпаки, якщо рівні відстані від хорд до центра круга дорівнюють нулю, то ці хорди проходять через центр круга, тобто є діаметрами, а діаметри круга рівні між собою.

Нехай тепер рівні хорди AB і A_1B_1 не є діаметрами, а відрізками $OM \perp AB$ та $OM_1 \perp A_1B_1$ вимірюються відстані до них від центра O круга (рис. 4.48). За теоремою про властивість діаметра, перпендикулярного до хорди, точки M і M_1 є серединами хорд. А оскільки хорди рівні, то $AM = A_1M_1$.

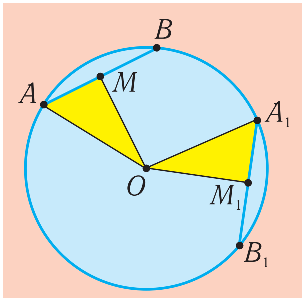


Рис. 4.48

Розглянемо прямокутні трикутники OMA та OM_1A_1. Вони рівні за катетом ($AM = A_1M_1$) і гіпотенузою ($OA = OA_1$ — як радіуси круга). Звідси $OM = OM_1$, що й треба було довести.

Навпаки, якщо будуть рівними перпендикуляри OM і OM_1, то з рівності прямокутних трикутників OMA і OM_1A_1 (за двома катетами) випливатиме рівність відрізків AM і A_1M_1, а звідси — рівність хорд AB і A_1B_1, які удвічі довші за ці відрізки. Твердження задачі доведено.

Вправи і задачі

489°. Накресліть коло, позначте його центр літерою O і проведіть яку-небудь хорду AB. Користуючись лише косинцем і не задіюючи його сантиметрової шкали, поділіть хорду AB навпіл.

490°. Накресліть коло, позначте його центр літерою O і проведіть яку-небудь хорду CD. Користуючись лише лінійкою зі шкалою, проведіть діаметр, перпендикулярний до хорди CD.

491°. За допомогою шаблона накреслено коло. Як за допомогою косинця і лінійки зі шкалою знайти його центр?

492°. Діаметр кола ділить хорду навпіл, однак не перпендикулярний до неї. Доведіть, що ця хорда — теж діаметр.

493. На рис. 4.49 відображено спосіб застосування одного із центрошукачів — креслярського приладу для відшукання центра круга (наприклад, у слюсарній справі). Як, на ваш погляд, застосовується цей прилад?

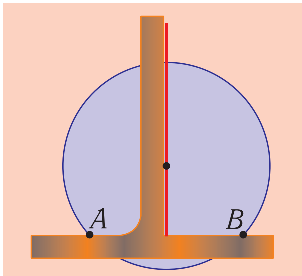


Рис. 4.49

494. Частину кола, нарисованого на дошці, і його центр витерли. Чи можна за допомогою креслярських інструментів відновити це коло?

495. Із паперу за допомогою шаблона вирізали круг. Чи можна знайти його центр, не використовуючи креслярських інструментів?

496. Як за допомогою креслярських інструментів поділити дугу заданого кола навпіл?

497. На рис. 4.50 радіус OD кола перпендикулярний до хорди AB. Доведіть, що $AD = DB$.

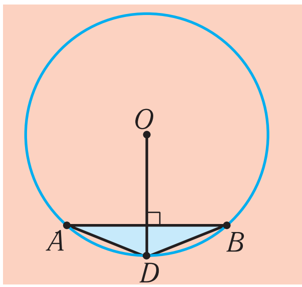


Рис. 4.50

498. На рис. 4.50 хорди AD і DB рівні, OD — радіус кола. Доведіть, що $OD \perp AB$.

499. Доведіть, що всі хорди, які діляться навпіл одним із діаметрів кола, паралельні.

500. Через точку всередині круга проведіть хорду, яка цією точкою ділиться навпіл.

501. Дано коло. Через середину його радіуса проведено перпендикулярну до нього хорду. Доведіть, що цю хорду видно із центра кола під кутом 120°.

502•. Дано квадрат. За допомогою циркуля проведіть таке коло, для якого сторони даного квадрата були б його хордами.

503•. Із точки A кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, віддалені від центра кола на відстань 4 см. Визначте довжину кожної хорди.

504•. Хорда завдовжки 16 см відтинає від кола його чверть. Визначте відстань від центра кола до цієї хорди.

505•. У колі проведено дві паралельні хорди, кожна з яких відтинає від кола його чверть. Визначте відстань між хордами, якщо довжина однієї з хорд дорівнює 10 см.

506•. У крузі проведено дві взаємно перпендикулярні хорди. Доведіть, що відстань від центра круга до точки їхнього перетину дорівнює відстані між серединами хорд.

§24. Взаємне розміщення прямої і кола. Дотична до кола

Уроки 52–53

Для активних користувачів геометрії, наприклад, для дизайнерів та архітекторів, потрібно вміти комбінувати коло з найрізноманітнішими іншими фігурами. Звісно, у першу чергу слід знати, як може розміщуватися коло відносно прямої.

Накресліть у зошиті коло з радіусом 3,5 см. Потім покладіть на нього лінійку і почніть поступово відсувати її від центра кола. Ви помітите, що край лінійки якийсь час перетинатиме коло у двох доволі віддалених одна від одної точках (рис. 4.51, а). Потім ці точки почнуть поступово зближатися, аж поки

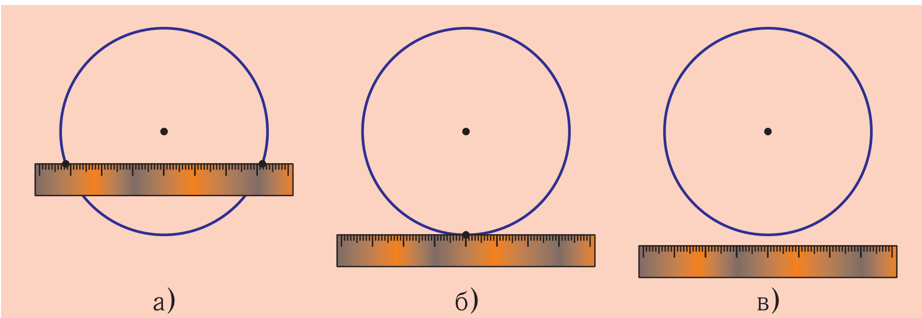


Рис. 4.51