Міністерство освіти і науки України
Київський міський педагогічний університет імені Б.Д. Грінченка
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

III етап Всеукраїнської олімпіади з математики

LXXV Київська міська олімпіада юних математиків

Умови та вказівки до розв'язань задач

2 тур

26 січня 2020 року

"Ума палата, але майже порожня."
Леонід Лібкінд

7 клас

1. Квадрат $ABCD$ завбільшки 2019×2019 розбитий двома прямими на чотири прямокутника з довжинами сторін, що задаються цілими числами, при цьому деякі з прямокутників можуть бути квадратами. Виявилося, що площа прямокутника, що містить вершину A, дорівнює периметру прямокутника, що містить вершину B. Чому дорівнює площа найменшого з прямокутників (або квадратів) розбиття?

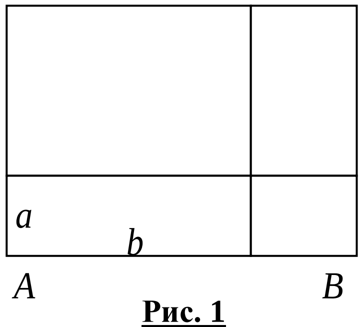


Рис. 1

Відповідь: 16.
Розв'язання. Позначимо сторони прямокутника, що містить вершину A, через a та b (рис. 1). Тоді сторони прямокутника, що містить вершину B, дорівнюють a та $2019-b$. З рівності площі першого прямокутника та периметра другого, маємо рівність:

$$ab = 2\cdot(a+2019-b) \Rightarrow ab-2a+2b=4038 \Rightarrow$$
$$(a+2)(b-2)=4034=2017\cdot2.$$

Оскільки у лівій частині один з множників більше 2, а число 2017 – просте, то єдиним розв'язком буде такий: $a+2=2017$ та $b-2=2$. Звідси $a=2015$ та $b=4$. Тоді очевидно, що найменшим з прямокутників розбиття є квадрат: $4\cdot4=16$.

2. Нехай a, b, c – сторони деякого трикутника. Яка найбільша кількість з трьох чисел $\dfrac{a+b}{a+b-c}$, $\dfrac{b+c}{b+c-a}$ та $\dfrac{c+a}{c+a-b}$ може бути більше 2?

Відповідь: максимум 2 з цих чисел.
Розв'язання. Спочатку наведемо приклад, що два з цих чисел дійсно можуть бути більше 2:
$a=b=5,\ c=1$, тоді $\dfrac{a+b}{a+b-c}=\dfrac{10}{9}<2$, а $\dfrac{b+c}{b+c-a}=\dfrac{c+a}{c+a-b}=\dfrac{6}{1}>2$.

Припустимо, що усі три ці дроби будуть більшими за 2. Зрозуміло тоді, що цей трикутник не рівносторонній. Нехай a, b – дві більші сторони цього трикутника, тоді $a+b>2c$. За припущенням:

$$\frac{a+b}{a+b-c}>2 \Rightarrow \frac{a+b+2c-2a-2b}{a+b-c}>0 \Rightarrow \frac{2c-a-b}{a+b-c}>0,$$

оскільки $a+b>2c$, тому наведений дріб – від'ємний, суперечність.

3. Наведіть приклад шестикутника (не обов'язково опуклого), який можна розрізати одним прямолінійним розрізом на трикутник та чотирикутник (не обов'язково опуклий), але при цьому не можна розрізати ні на два трикутники, ні на два чотирикутники.

(Рубльов Богдан)

Відповідь: приклад наведений на рис. 2.
Розв'язання. На рис. 2 показано пунктиром як розрізати шестикутник належним чином: потрібно провести один з відрізків - CF або BD.

Тепер розглянемо як може проходити лінія поділу цього шестикутника $ABCDEF$.

Якщо вона проходить через вершину шестикутника і відмінна від прямих AC та BE, наприклад AL, то на межі додається точка L, звідси багатокутники розбиття повинні мати 7 вершин, дві з яких рахуються двічі (у даному випадку A та L), тобто сумарно багатокутники повинні мати 9 вершин, що неможливо ні для двох трикутників, ні для двох чотирикутників. Аналогічно, якщо провести пряму не через вершини (наприклад, MN), тоді разом вершин стане 10, що так само суперечить розбиттю на два трикутники та два чотирикутники. Залишається випадок, коли відрізок з'єднує дві вершини шестикутника, наприклад, BE, тоді вершин сумарно стане 8, тобто теоретично – це можуть бути два чотирикутника. Але достатньо перебрати усі можливі такі відрізки, що з'єднують належним чином (тобто розбивають шестикутник на два багатокутника) і переконатись, що потрібного розбиття не існує. Їх усього два - BE та FD, кожний з яких розбиває шестикутник на трикутник та п'ятикутник.

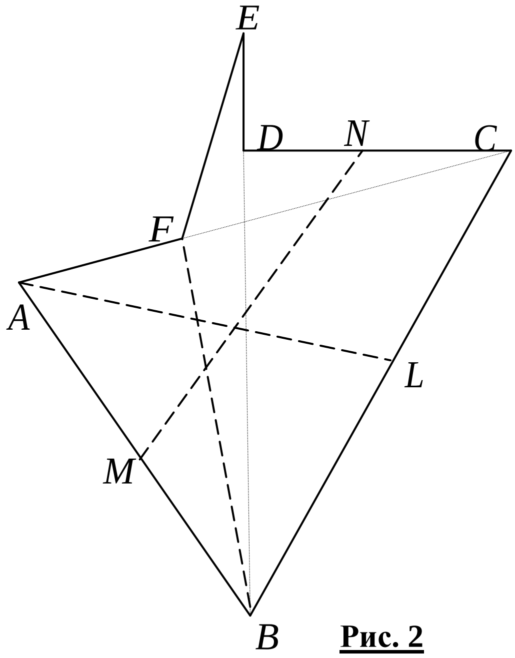


Рис. 2

4. Занумеруємо усі прості числа в порядку зростання: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ... Знайдіть усі натуральні n, для яких $p_1!+p_2!+\ldots+p_n!=a^b$, для деяких натуральних $a, b > 1$, де через $k!$ позначений добуток усіх натуральних чисел від 1 до k.

(Ніколаєв Арсеній)

Відповідь: $n = 2, 3$.

Розв'язання. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що $p_1! = 2$, $p_1!+p_2! = 2+6 = 8 = 2^3$, $p_1!+p_2!+p_3! = 2+6+120 = 128 = 2^7$.

Для $n \geq 4$ $p_1!+p_2!+\ldots+p_n! = 128+7!+11!+\ldots+p_n!$ – число, в якому усі доданки діляться на 2^5, окрім $p_4! = 7! = 2^4 \cdot 315$, що ділиться на 2^4, але не ділиться на 2^5. Таким чином це число не може бути степенем 2. Якщо воно буде степенем іншого числа, то оскільки воно ділиться на 2^4, то це може бути лише a^4, або x^2. Покажемо, що квадратом воно бути не може. Дійсно, $2!+3!+\ldots+p_n!$ при діленні на 3 дає остачу 2, що неможливо для квадратів.

3.1. По колу виписані 299 цифр 0 та одна цифра 1. Дозволено робити такі ходи з написаними по колу числами:

- від кожного числа відняти суму сусідніх з ним чисел;
- вибрати два числа, між якими знаходиться рівно два інших числа та збільшити обидва на 1 або зменшити обидва на 1.

Чи можна за скінченну кількість таких дій отримати таке розташування чисел, при якому матимемо два сусідні числа 1, а решта 0?

Відповідь: не можна.

Розв'язання. Проаналізуємо, як впливає записані ходи на загальну суму чисел, що записані по колу. Позначимо записані числа a_1, a_2, …, a_{300}. Після ходу першого типу будуть записані такі числа: $b_k = a_k - a_{k-1} - a_{k+1}$, $k = \overline{1, 300}$ $(a_{301} \equiv a_1)$. Нехай $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{300}$, тоді $b_1 + b_2 + \ldots + b_{300} = S - S - S = -S$. Після ходу другого типу сума стає $S+2$ або $S-2$. Оскільки парність суми після виконання кожного ходу не змінюється, то з початкової непарної суми отримати парну неможливо.

4.1. Знайдіть найбільше натуральне число n, яке має таку властивість: воно має рівно 4 натуральні дільники (включно з 1 і n), сума яких S задовольняє умову: $40 \le S \le 42$.

Відповідь: 27.

Розв'язання. З умов задачі очевидно, що число n або має рівно два прості дільники, або є кубом натурального числа.

У випадку $n = pq$ маємо: $S = 1 + p + q + pq = (1+p)(1+q)$, надалі будемо вважати, що $p < q$.

Розглянемо можливі випадки.

Якщо $S = 40$, то маємо, що $(p+1)(q+1) = 40$. Оскільки $p+1 \ge 3$, то можливі такі варіанти:

$p+1=4,\ q+1=10 \Rightarrow p=3,\ q=9 \Rightarrow q$ – не просте.

$p+1=5,\ q+1=8 \Rightarrow p=4,\ q=7 \Rightarrow p$ – не просте.

Якщо $S = 41$, то $(p+1)(q+1) = 41$, оскільки 41 – просте число, то розв'язків немає.

Якщо $S = 42$, то $(p+1)(q+1) = 42$. Тоді можливі такі варіанти:

$p+1=3,\ q+1=14 \Rightarrow p=2,\ q=13 \Rightarrow n=26$.

$p+1=6,\ q+1=7 \Rightarrow p=5,\ q=6 \Rightarrow q$ – не просте.

Таким чином у цьому випадку маємо єдине число $n = 26$, що задовольняє умову задачі.

У випадку $n = p^3$ маємо, що $S = 1 + p + p^2 + p^3$. Зазначимо, що при $p = 2$ маємо, що $1 + p + p^2 + p^3 = 15$, при $p = 3$ відповідно $1 + p + p^2 + p^3 = 40$, та при $p \ge 4$ маємо $1 + p + p^2 + p^3 \ge 85$.

Таким чином у цьому випадку маємо також єдине число $n = 27$, що задовольняє умову задачі.

Звідси знаходимо шукану відповідь.

8 клас

1. Для довільних цілих чисел a, b, c визначимо функцію $f(x) = ax^2 + bx + c$. Доведіть, що вираз

$$f(2020) + f(2019) + \ldots + f(1011) - f(1010) - f(1009) - \ldots - f(1)$$

ділиться націло на 2020.

(Терьошин Олександр)

Розв'язання. Позначимо вирази таким чином:

$$S = f(2020) + f(2019) + \ldots + f(1011) - f(1010) - f(1009) - \ldots - f(1) =$$
$$= a(2020^2 + 2019^2 + \ldots + 1011^2 - 1010^2 - 1009^2 - \ldots - 1^2) +$$
$$+ b(2020 + 2019 + \ldots + 1011 - 1010 - 1009 - \ldots - 1) = S_1 + S_2.$$

Покажемо, що кожний доданок S_1та S_2ділиться на 2020.

$$S_1 = a(2020^2 - 1010^2 + (2019^2 - 1^2) + (2018^2 - 2^2) + \ldots + (1011^2 - 1009^2)) =$$
$$= a(2020^2 - 1010^2 + 2018 \cdot 2020 + 2016 \cdot 2020 + \ldots + 2 \cdot 2020)),$$

звідки випливає, що $S_1 \,\vdots\, 2020$.

$$S_2 = b(2020 + 2019 + \ldots + 1011 - 1010 - 1009 - \ldots - 1) =$$
$$= b((2020 - 1010) + (2019 - 1009) + \ldots + (1011 - 1)) = b \cdot 1010 \cdot 1010 \,\vdots\, 2020.$$

2. Дано опуклий чотирикутник $ABCD$, у якого $\angle CBD = 90°$, $\angle BCD = \angle CAD$ і $AD = 2BC$. Доведіть, що $CA = CD$.

(Тригуб Антон)

Розв'язання. Нехай точка C_1 симетрична точці C відносно точки B (рис. 3). Тоді $\angle BCD = \angle CAD = \angle DC_1C$, звідки чотирикутник $ADCC_1$ – вписаний. Оскільки $AD = 2BC = CC_1$, то $\angle CDC_1 = \angle DC_1A$, бо спираються на рівні дуги, що стягнені рівними хордами. Отже $C_1A \| CD$, а тому вписаний чотирикутник $ADCC_1$ – рівнобічна трапеція або прямокутник.

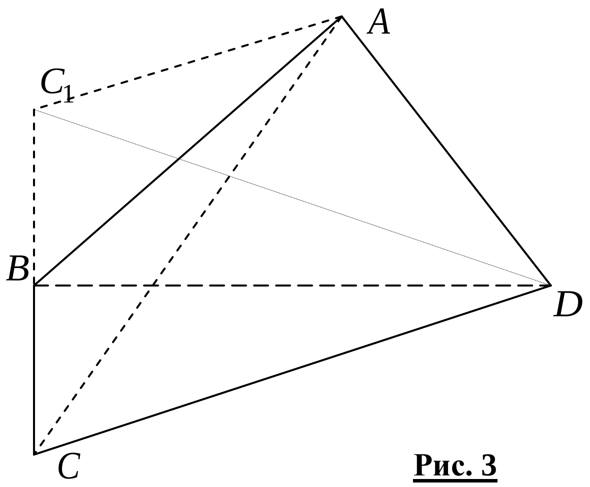


Рис. 3

Чотирикутник $ADCC_1$ не може бути прямокутником, оскільки тоді з точки D на пряму BC було б опущено два різні перпендикуляри – DB та DC. Отже $ADCC_1$ є рівнобічною трапецією, тому $AC = C_1D = DC$.

3. За круглим столом по колу на рівних відстанях сиділи та щось обговорювали 50 мешканців острова "Горласті Пельки". Кожний з них є або лицарем, який завжди каже правду, або брехуном, який кожного разу бреше, причому за столом точно є представники кожного типу. Під час обговорення кожний сказав, що островитянин, який сидить точно напроти нього та обидва сусіди того, хто сидить напроти, не усі одного типу, тобто не усі троє лицарі та не усі троє брехуни. Доведіть, що за столом брехунів не менше 10, але й не більше 25.

(Ніколаєв Арсеній)

Розв'язання. Спочатку доведемо таке твердження

<u>*Лема 1*</u>. Серед будь-яких двох діаметрально протилежних островитян є принаймні один лицар.

Доведення. Методом від супротивного, припустимо, що C та X – два діаметрально протилежно сидячих островитянина, і обидва брехуни (рис. 4). Тоді сусіди X мешканці острова Y та W мають бути брехунами, оскільки C мав збрехати, а це означало б, що "*островитянин, який сидить точно напроти нього та обидва його сусіди – усі одного типу*". Аналогічно – обидва сусіда C – островитяне B та D, мають бути брехунами. Але тепер ми маємо ще дві пари протилежних Брехунів – D, Y та B, W. Застосовуючи до них такі саме міркування отримаємо, що за столом сидять геть усі брехуни. Це суперечить умові, тому наше припущення хибне і *лема доведена*.

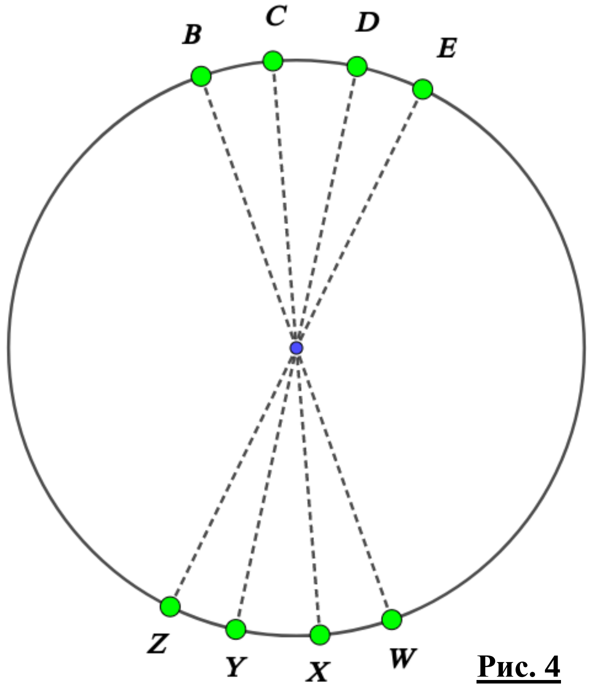


Рис. 4

Звідси одразу стає зрозумілою оцінка про максимальну кількість брехунів. Оскільки усього маємо 25 діаметрально протилежних пар, то кількість лицарів не менше 25, тому кількість брехунів не більша від 25.

<u>*Лема 2*</u>. Серед будь-яких п'яти островитян, що сидять поспіль, є принаймні один брехун.

Доведення. Методом від супротивного, припустимо, що десь сидить поспіль п'ять лицарів: $L_1, \ldots, L_5$. Але тоді діаметрально протилежні до L_2, L_3 та L_4 брехуни, оскільки вони збрехали про трьох поруч сидячих, що були одного типу. Але тоді збрехав і L_3, бо усі троє напроти нього одного типу. Одержана суперечність завершує *доведення леми*.

Тепер розбиваємо усіх 50 островитян, що сидять за столом, на 10 груп по 5, в кожній з них має бути принаймні 1 брехун, а тому їх усього не менше 10.

4. У натуральному числі n не більше 2020 цифр. Доведіть, що можна знайти таких m паліндромів, сума яких дорівнюватиме n, при цьому $m \le 13$.
Паліндромом називається число, що однаково читається в обох напрямках (зліва направо та справа наліво), тобто 1001, 9 та 767 – паліндроми, а 1212 та 110 – ні.

(Ніколаєв Арсеній)

Розв'язання. Спочатку доведемо таку лему.

Лема 1. Нехай в нас є k-цифрове натуральне число X, $k > 2$. Тоді від нього можна відняти такий паліндром, щоб у числі, що лишилося було не більше ніж $[\frac{1}{2}k+1]$ цифр.

Доведення. Нехай перші $[\frac{k+1}{2}]$ цифри числа X утворюють число $A \ne 100\ldots0$. Тоді B – число, що утворене з числа $(A-1)$ перестановкою цифр у зворотному порядку (тобто число B може розпочинатися з певної кількості нулів). Тоді для парного k віднімаємо число $\overline{(A-1)B}$, а для непарного k віднімаємо число $\overline{(A-1)B'}$, де B' – число B без першої цифри. Тоді після такого віднімання першою цифрою зліва, що може бути не нулем, є $[\frac{1}{2}k+1]$-ша цифра. Для випадку, коли $A = 100\ldots0$ достатньо відняти від X число $99\ldots9$, що має на одну цифру менше.
Лема доведена.

Лема 2. Число, що має не більше трьох цифр, можна подати у вигляді суми не більше ніж трьох паліндромів.

Доведення. Для двоцифрових та одноцифрових чисел це очевидно. Для трицифрового числа $\overline{abc}$ розглянемо такі випадки.
Для $a \le c$ маємо, що $\overline{abc} = \overline{aba} + (c-a)$.
Для $a = c+1$ маємо, що $\overline{abc} = \overline{cbc} + 99 + 1$.
Для $a > c+1$ маємо, що $\overline{abc} = \overline{cbc} + \overline{(a-c)00} = \overline{cbc} + \overline{(a-c-1)9(a-c-1)} + (11-a+c)$.
Лема доведена.

Тепер порахуємо, як змінюватиметься кількість цифр числа, якщо на початку взяти 2020-ти цифрове число, а далі застосовувати до нього 10 разів лему 1 і врешті лему 2:

$$2020 \to 1011 \to 506 \to 254 \to 128 \to 65 \to 33 \to 17 \to 9 \to 5 \to 3.$$

Таким чином усього матимемо не більше 13 паліндромів. Якщо початкове число менше то і кількість паліндромів може лише зменшитись.

3.1. Петрик та Василь грають в гру з записаними числами на дошці. За один хід, розпочинає Петрик, гравець вибирає два взаємно прості числа, що записані на дошці, витирає їх, та записує замість них їхню суму. Той, хто не може зробити ходу – програє. Хто переможе при правильній грі, якщо з самого початку на дошці записані ***а)*** 2019 цифр 1; ***б)*** 2020 цифр 1?

***Відповідь:* а), б)** перемагає Василь.
***Розв'язання.* а)** Покажемо, що Василь може досягти того, що після кожного його ходу на дошці лишається лише деяке непарне число n, а також $2019-n$ чисел 1. Таким чином після 1009 пар ходів на дошці лишиться записаним лише число 2019 і Петрик зробити ходу не зможе і програє.
Першим ходом Петрик витирає два числа 1 і записує число 2. Василь робить число 3. Якщо в певний момент на дошці записані деяке непарне число n, а також $2019-n$ чисел 1, то Петрик може або записати замість двох чисел 1 число 2, на що Василь замінює числа n та 2 на число $n+2$, або замість числа n та однієї 1 записати $n+1$, на що Василь своїм ходом запише знову замість $n+1$ та однієї 1 число $n+2$, і переможе.

б) Тут Василь притримується стратегії аналогічної до пункту ***а)***, окрім останнього ходу. Перед останнім ходом Петрика на дошці записані чотири числа 2017, 1, 1 та 1. Якщо Петрик робить набір таких трьох чисел 2018, 1 та 1, тоді Василь робить набір 2018 та 2 і Петрик не може зробити ходу. Якщо Петрик робить набір таких трьох чисел 2017, 2 та 1, тоді Василь робить знову набір 2018 та 2 і Петрик не може зробити ходу.

4.1. Знайдіть усі пари цілих чисел (x, y), що задовольняють рівність: $x-y=\frac{x}{y}$.

Відповідь: $(4, 2)$.

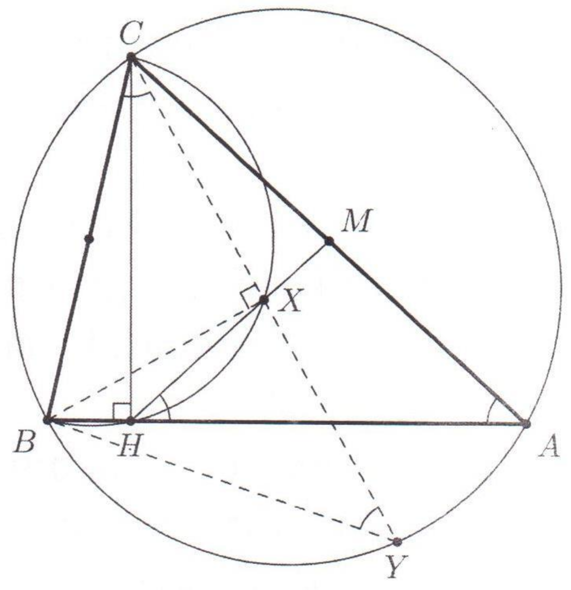
Розв'язання. Перепишемо рівність таким чином: $xy-y^2=x$ або $x(y-1)=y^2$. Оскільки числа y^2 та $y-1$ взаємно прості, тобто не мають спільних дільників за модулем більшим від 1, то з останньої рівності $x \mid y^2$ та $y^2 \mid x \implies x=\pm y^2$. Врахуємо, що $y \neq 0$.
Якщо $x=y^2$, то маємо рівність $y^3-y^2=y^2 \implies y=2$ та $x=4$.
Якщо $x=-y^2$, то маємо рівність $-y^3-y^2=-y^2 \implies y=0$ та цей випадок не дає нових розв'язків.

9 клас

1. *Яке найменше можливе значення може приймати вираз $ab+a+b$, якщо дійсні числа a, b задовольняють умову $a^2+b^2=25$.*

Відповідь: -13.
Розв'язання. З нерівності $(a+b+1)^2 \geq 0$ випливає, що
$$a^2+b^2+1+2ab+2a+2b \geq 0 \implies$$
$$ab+a+b \geq -\tfrac{1}{2}(a^2+b^2+1)=-13.$$
Виберемо $a=-4$ та $b=3$ і матимемо, що $ab+a+b=-12-4+3=-13$, тобто найменше можливе значення досягається.

2. В гострокутному трикутнику ABC проведено висоту CH. Промінь, з початком у точці C, що лежить всередині $\angle BCA$ і вдруге перетинає описані кола ΔBCH та ΔABC в точках X та Y відповідно. Виявилося, що $2CX=CY$. Доведіть, що пряма HX ділить навпіл відрізок AC.
(Хілько Данило)



Розв’язання. Розглянемо ΔBCY. З умови випливає, що $CX = XY$. Також з вписаності чотирикутника $CXHB$ отримуємо $\angle CXB = \angle CHB = 90°$. Тому ΔCBY рівнобедрений. Звідси (рис. 5)

$$\angle MHA = \angle BCY = \angle BYC = \angle BAC.$$

Рис. 5

Тоді ΔHMA рівнобедрений, а також

$$\angle MHC = 90° - \angle MHA = 90° - \angle HAM = \angle HCA.$$

Тобто ΔHMC також рівнобедрений. Звідси $MA = MH = MC$, що й треба було довести.

3. Знайдіть усі трійки натуральних чисел (a, b, c), що задовольняють рівність:

$$a + b + c^2 = abc.$$

(Рожкова Марія)

Відповідь: $(5, 1, 2)$, $(5, 1, 3)$, $(1, 5, 2)$, $(1, 5, 3)$, $(2, 2, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 2, 5)$, $(2, 3, 1)$ та $(2, 3, 5)$.

Розв’язання. Розглянемо рівняння як квадратне відносно c. Тоді

$$c^2 - abc + (a+b) = 0 \Rightarrow D = (ab)^2 - 4(a+b) = m^2.$$

Внаслідок симетрії умови на a, b вважатимемо, що $a \ge b$, а одержані відповіді просто запишемо належним чином.

При $b = 1$ $D_1 = a^2 - 4a - 4 = (a-2)^2 - 8 = x^2 - 8$, де $x = a - 2$.

При $x = 3$ $D_1 = 1$ – точний квадрат, тому $a = 5$, $c^2 - 5c + 6 = 0$ звідки маємо такі розв'язки: $(5, 1, 2)$ і $(5, 1, 3)$ та симетричні варіанти: $(1, 5, 2)$ і $(1, 5, 3)$.

При $x = 4$ $D_1 = 8$ – не точний квадрат.

При $x \ge 5$ $x^2 > D_1 > (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$, тому D_1 – не точний квадрат.

Нехай тепер $b \ge 2$. Тоді $2ab \ge a + b + 4 \Leftrightarrow a(b-1) + b(a-1) \ge 4$. Тому

$$(ab)^2 > D = (ab)^2 - 4(a+b) \ge (ab-4)^2 = (ab)^2 - 8ab + 16.$$

Таким чином залишається перебрати 4 випадки.

$D = (ab-4)^2$, тоді з попередніх оцінок таке можливо лише за умов $a = b = 2$, звідки $c = 2$ і маємо такий розв'язок: $(2, 2, 2)$.

$D = (ab-3)^2$ та $D = (ab-1)^2$ неможливі, оскільки тоді

$D = (ab-n)^2 = (ab)^2 - 4(a+b) \Leftrightarrow 2abn = n^2 + 4(a+b)$ – суперечність при непарному n.

$D = (ab-2)^2$, тоді $4ab = 4 + 4(a+b) \Rightarrow ab - a - b - 1 = 0 \Rightarrow a(b-1) - (b-1) = 2 \Rightarrow (a-1)(b-1) = 2 \Rightarrow a - 1 = 2$ та $b - 1 = 1$. Таким чином $a = 3$ та $b = 2$ і для знаходження c маємо таке рівняння: $c^2 - 6c + 5 = 0$, звідки маємо такі розв'язки: $(3, 2, 1)$ і $(3, 2, 5)$ та симетричні варіанти: $(2, 3, 1)$ і $(2, 3, 5)$.

4. Для якого найбільшого значення n, існують цілі числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$, що задовольняють такі умови:

- усі числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$ попарно різні та належать проміжку $[0; 99]$;
- $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_n \le 100$;
- для кожного i: $1 \le i \le n$ справджується одна з рівностей $b_i = a_i - i$ або $b_i = a_i - i + n$?

(Сердюк Назар)

Відповідь: $n=67$.

Розв'язання. Позначимо $c_i=a_i-i$, тоді маємо: $0\le c_1\le c_2\le\ldots\le c_n\le 100-n$, $b_i=c_i$ або $b_i=c_i+n$ для кожного $i=\overline{1,n}$. За таких умов $c_i+n\le c_n+n=a_n\le 100$. Зазначимо, що серед трьох послідовних c_i, c_{i+1} та c_{i+2} принаймні два різних, бо інакше, хоча б два з трьох чисел b_i, b_{i+1} та b_{i+2} рівні, що суперечить умові. Таким чином виконується умова $c_{i+2}\ge c_i+1$.

Звідси маємо, що $c_n\ge c_{n-2}+1\ge\ldots\ge\frac{1}{2}(n-1)$. З іншого боку, $c_n\le 100-n$. Таким чином, $\frac{1}{2}(n-1)\le c_n\le 100-n \Rightarrow n\le 67$. Тепер наведемо приклад для $n=67$:

$$c_1=c_2=0,\ c_3=c_4=1,\ \ldots,\ c_{65}=c_{66}=32 \text{ та } c_{67}=33,$$

$$b_1=0,\ b_2=67,\ b_3=1,\ b_4=68,\ \ldots,\ b_{65}=32,\ b_{66}=99 \text{ та } b_{67}=33,$$

відповідно $a_i=c_i+i$.

3.1. Відомо, що існує просте число p, яке задовольняє умову $10^{17}\le p\le 10^{17}+10$. Знайдіть його.

Відповідь: $10^{17}+3$.

Розв'язання. Треба знайти останню цифру числа. Вона не може бути парною або 5.

Число $10^{17}+1$ ділиться на 11.

Число $10^{17}+9$ розглянемо за модулем 7. Тоді $10\equiv 3\ (\mathrm{mod}\ 7) \Rightarrow 10^2\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 7) \Rightarrow 10^3\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 7) \Rightarrow 10^{15}\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 7) \Rightarrow 10^{15}\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ 7) \Rightarrow 10^{17}\equiv -2\ (\mathrm{mod}\ 7) \Rightarrow 10^{17}+9\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 7)$.

Число $10^{17}+7$ розглянемо за модулем 17. Тоді $10\equiv 10\ (\mathrm{mod}\,17) \Rightarrow 10^2\equiv -2\ (\mathrm{mod}\,17) \Rightarrow 10^8\equiv 16\equiv -1\ (\mathrm{mod}\,17) \Rightarrow 10^{16}\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,17) \Rightarrow 10^{17}\equiv 10\ (\mathrm{mod}\,17) \Rightarrow 10^{17}+7\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,17)$.

Таким чином – єдиним кандидатом у прості числа лишається $10^{17}+3$, оскільки за умовою відомо, що таке число існує, то це і є воно.

4.1. Скількома способами на шахівницю $n\times n$, $n\ge 3$, з якої вирізані дві протилежні по діагоналі кутових клітинки 1×1, можна виставити n тур, жодні дві з яких не атакують одна одну? *Тура* – шахова фігура, яка атакує усі поля як по горизонталі так і по вертикалі, відносно поля в якому вона розташована.

Відповідь: $(n-2)!\cdot(n^2-3n+3)$.

Розв'язання. Без обмеження загальності вважаємо, що вирізана ліва нижня клітинка A та права верхня – Z. Спочатку з'ясуємо скількома способами тури таким чином можна розставити на шахівниці $n\times n$. Таких варіантів $n!$, оскільки для тури у першій вертикалі є n варіантів, для тури у другому стовпчику вже лишається $n-1$ варіант і так далі. Розглянемо розстановки тур, при яких одна з тур займає поле A. Таких розстановок $(n-1)!$, аналогічно $(n-1)!$ варіантів розстановок, при яких одна з тур стоїть в позиції Z. У виразі $n!-2(n-1)!$ двічі відкинуті ті позиції, в яких дві тури займають одночасно позиції A та Z. Таких позицій усього $(n-2)!$. Таким чином шукана кількість варіантів дорівнює

$$n!-2(n-1)!+(n-2)!=(n-2)!\cdot(n(n-1)-2(n-1)+1)=(n-2)!\cdot(n^2-3n+3).$$

10 клас

1. З трьох виписаних виразів $\frac{x}{y}$, $\frac{x^2+x}{y^2+y}$ та $\frac{x^2+2}{y^2+2}$ для деяких цілих чисел x, y усі три вирази визначені, два приймають рівні цілі значення, а третє – відмінне від них ціле значення. Для яких пар цілих чисел x, y таке можливо?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $(2, 1)$ та $(-4, 1)$.

Розв'язання. Одразу зрозуміло, що $|x|>|y|$, при $x\neq 0$, бо інакше перший дріб не будуть цілим числом.

Якщо рівні перші два вирази, то маємо таку рівність:

$$\frac{x}{y}=\frac{x^2+x}{y^2+y} \Rightarrow xy^2+xy=yx^2+xy \Rightarrow xy(y-x)=0.$$

За умови $x\neq y$ та ОДЗ, задану рівність задовольняють довільні пари $(x, y)=(0, t)$, $t\neq 0; -1$. Третій вираз очевидно буде приймати ненульове, але не ціле значення, бо $0<\frac{2}{t^2+2}<1$ при $t\neq 0$.

Якщо рівні перший та третій вирази, то маємо таку рівність:

$$\frac{x}{y}=\frac{x^2+2}{y^2+2} \Rightarrow xy^2+2x=yx^2+2y \Rightarrow xy(y-x)=2(y-x) \Rightarrow xy=2,$$

Тут можливі такі пари (x, y): $(2, 1)$ та $(-2, -1)$. При цьому другий вираз у першому випадку прийматиме значення 3, тобто відмінний від інших двох. У другому випадку він не визначений, а тому не можливий.

Якщо рівні другий та третій вирази, то маємо таку рівність:

$$\frac{x^2+x}{y^2+y}=\frac{x^2+2}{y^2+2} \Rightarrow x^2y^2+xy^2+2x^2+2x=x^2y^2+yx^2+2y^2+2y \Rightarrow$$

$$xy(y-x)=2(y-x)(y+x)+2(y-x) \Rightarrow xy-2y-2x=2 \Rightarrow (x-2)(y-2)=6.$$

Оскільки $6=1\cdot 6=2\cdot 3$, то розглянемо можливі випадки, з урахуванням $|x|>|y|$.

$x-2=6,\ y-2=1 \Rightarrow x=8,\ y=3 \Rightarrow \dfrac{x^2+2}{y^2+2}=\dfrac{66}{11}=6$ та $\dfrac{x}{y}=\dfrac{8}{3}$ – умову не задовольняє.

$x-2=3,\ y-2=2 \Rightarrow x=5,\ y=4 \Rightarrow \dfrac{x^2+2}{y^2+2}=\dfrac{27}{18}$ – не ціле, тому умову не задовольняє.

$x-2=-2,\ y-2=-3 \Rightarrow x=0,\ y=-1$ не задовольняє ОДЗ.

$x-2=-6,\ y-2=-1 \Rightarrow x=-4,\ y=1 \Rightarrow \dfrac{x^2+2}{y^2+2}=\dfrac{18}{3}=6$ та $\dfrac{x}{y}=-4$ – умову задовольняє.

2. Нехай M – середина сторони AC трикутника ABC. Всередині ΔBMC знайшлась така точка P, що $\angle BMP=90°$, $\angle ABC+\angle APC=180°$. Доведіть, що $\angle PBM+\angle CBM=\angle PCA$.

(Тригуб Антон)

Розв'язання. Побудуємо точку B' таку, що $ABCB'$ – паралелограм. Тоді (рис. 6)

$$\angle ABC + \angle APC = 180^\circ = \angle AB'C + \angle APC = 180^\circ,$$

тому чотирикутник $APCB'$ – вписаний. Зрозуміло, що $\Delta BPB'$ – рівнобедрений, тоді

$$\angle PCA = \angle PB'A = \angle PB'M + \angle MB'A = = \angle PBM + \angle MBC,$$

що й треба було довести.

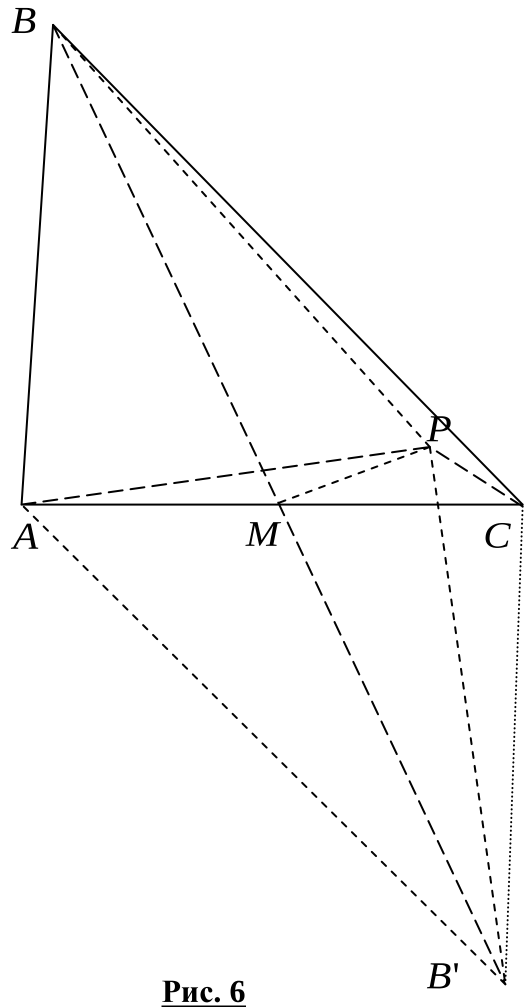


Рис. 6

3. Задача 4 за 9 клас.

4. ***а)*** Для яких натуральних l існує пара натуральних чисел (m, n), які мають не більше ніж l цифр та різні останні цифри і для яких виконуються умова – останні l цифр числа m^2 утворює число n, і аналогічно, останні l цифр числа n^2 утворює число m (з відкиданням нулів, якщо вони йдуть першими серед останніх l цифр).
б) Для яких натуральних l існує пара натуральних чисел (m, n), які мають не більше ніж l цифр та різні останні цифри і для яких виконуються умова – останні l цифр числа m^3 утворює число n, і аналогічно, останні l цифр числа n^3 утворює число m (з відкиданням нулів, якщо вони йдуть першими серед останніх l цифр).

(Рубльов Богдан)

Відповідь: ***а)*** ні для яких, ***б)*** для усіх l.
Розв'язання. ***а)*** Розглянемо останні цифри чисел, які задовольняють умову задачі. Прослідкуємо за останньою цифрою їх квадратів, для чого кожному числу поставимо у відповідність останню цифру:

$$1^2 \to 1,\ 2^2 \to 4,\ 3^2 \to 9,\ 4^2 \to 6,\ 5^2 \to 5,\ 6^2 \to 6,\ 7^2 \to 9,\ 8^2 \to 4,\ 9^2 \to 1$$

– жодна пара чисел умову не задовольняє.

б) Аналогічно пункту ***а)*** знайдемо ті одноцифрові числа, які задовольняють умову задачі, для чого кожному числу поставимо у відповідність останню цифру:

$$1^3 \to 1,\ 2^3 \to 8,\ 3^3 \to 7,\ 4^3 \to 4,\ 5^3 \to 5,\ 6^3 \to 6,\ 7^3 \to 3,\ 8^3 \to 2,\ 9^3 \to 9$$

– умову задовольняють пари чисел $(3;\,7)$ та $(2;\,8)$.

Наприклад, ми вже знайшли пару l-цифрових чисел (m, n), які задовольняють умову: m має останню цифру 2 і його куб закінчується числом n, і аналогічно – число n має останню цифру 8 і його куб закінчується числом m. Спробуємо знайти $l+1$-ші цифри цих чисел. В усіх рівностях відкидаються усі цифри лівіші від $l+1$-ших. Позначимо шукані числа через $\overline{xm}$ та $\overline{yn}$. Тоді нехай $m^3 = 10^l A + n$, $n^3 = 10^l B + m$ і далі маємо:

$$\overline{xm}^3 = (10^l x + m)^3 \to 3\cdot 10^l x \cdot m^2 + m^3 = 3\cdot 10^l x \cdot 4 + 10^l A + n \to$$
$$\to 10^l (2x + A) + n = \overline{yn} = 10^l y + n,$$

$$\overline{yn}^3 = (10^l y + n)^3 \to 3\cdot 10^l y \cdot n^2 + n^3 = 3\cdot 10^l y \cdot 4 + 10^l B + m \to$$
$$\to 10^l (2y + B) + m = \overline{xm} = 10^l x + m .$$

Після спрощень та скорочень маємо таку систему: $\begin{cases} 2x + A = y, \\ 2y + B = x. \end{cases}$

Звідси знаходимо, що $x = 2y + B = 2(2x + A) + B = 4x + (2A + B)$, звідки $\begin{cases} 3x = -(2A + B), \\ 3y = -(2B + A). \end{cases}$

Оскільки при довільних A, B існують відповідні цифри x, y (нагадаю, що тут рівність стосується лише останніх цифр), а $3x$ та $3y$ пробігають усі можливі значення.
Таким чином відповідні пари чисел існують для любого значення l.

Покажемо на прикладах: перехід від одноцифрового числа до двоцифрового:

$$m_1 = 2,\ m_1^3 = 8 \to 10\cdot 0 + 8 \ \Rightarrow\ A = 0,\ n_1 = 8,\ n_1^3 = 512 \to 10\cdot 1 + 2 \ \Rightarrow\ B = 1.$$
$$3x \to -(2A + B) = -1 \to 9 \ \Rightarrow\ x = 3,\ 3x \to -(2B + A) = -2 \to 8 \ \Rightarrow\ y = 6.$$

Отримаємо такі числа:

$$m_2 = \overline{xm_1} = 32,\ m_2^3 = 32^3 = 32768,\ n_2 = \overline{yn_1} = 68,\ n_2^3 = 68^3 = 314432,$$

які задовольняють умову.
Перехід від двоцифрового числа до трицифрового:

$$m_2 = 32,\ m_2^3 = 32768 \to 100\cdot 7 + 68 \Rightarrow\ A = 7.\ n_2 = 68,\ n_2^3 = 314432 \to 100\cdot 4 + 32 \Rightarrow\ B = 4.$$
$$3x \to -(2A + B) = -18 \to 2 \ \Rightarrow\ x = 4.\ 3x \to -(2B + A) = -15 \to 5 \ \Rightarrow\ y = 5.$$

Отримаємо такі числа:

$$m_3 = \overline{xm_2} = 432,\ m_3^3 = 432^3 = 80621568,\ n_3 = \overline{yn_2} = 568,\ n_3^3 = 568^3 = 183250432,$$

Які також задовольняють умову.

<u>Альтернативне розв'язання</u>*. *б) Доведемо, що така пара існує для довільного l. Покажемо, що існує таке натуральне x, що $2^l \mid x^2 - 1$ та $5^l \mid x^2 + 1$.

Для першої подільності покладемо $x \equiv 1 \pmod{2^l}$. Покажемо ММІ по l, що для довільного l існує x, що $5^l \mid x^2 + 1$. Якщо $l = 1$, то покладемо $x = 2$.
Нехай для деякого l твердження справджується. Розглянемо $l + 1$: якщо x підходить для l, тобто $x^2 + 1 = t\cdot 5^l$, тоді покладемо $x_1 = x + k\cdot 5^l$; тоді

$$x_1^2 + 1 = x^2 + k^2\cdot 5^{2l} + 2xk\cdot 5^l + 1 = t\cdot 5^l + k^2\cdot 5^{2l} + 2xk\cdot 5^l = 5^l (t + k^2\cdot 5^l + 2xk.$$

Зрозуміло, що існує таке k, що друга дужка кратна 5, виберемо таке x_1 для цього k і твердження доведене.
Далі виберемо за Китайською теоремою про остачі x, що задовольнятиме обом умовам. Тоді покажемо, що останні l цифр чисел пари x та x^3 задовольняє умову. Спершу за побудовою обидва числа мають не більше за l цифр. По друге, в них різні останні цифри: якби співпадали, то $x^3 - x$ ділилось би на 5, але $x^3 - x = x(x^2 - 1) \equiv -2x \pmod 5 \ \Rightarrow$ тому x мало б ділитись на 5, що очевидно неможливо за умови $x^2 + 1 = t\cdot 5^l$.
Залишилося показати, що $x - x^3 \equiv 0 \pmod{10^l}$, що очевидно за побудовою, а також

$$(x^3)^3 - x = x^9 - x = x(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1) \equiv 0 \pmod{10^l},$$

що також очевидно.

3.1. По колу виписані 299 цифр 0 та одна цифра 1. Дозволено робити такі ходи з написаними по колу числами:

- від кожного числа відняти суму сусідніх з ним чисел;
- вибрати два числа, між якими знаходиться рівно два інших числа та збільшити обидва на 1 або зменшити обидва на 1.

Чи можна за скінченну кількість таких дій отримати таке розташування чисел, при якому матимемо три сусідні числа 1 і решта 0?

Відповідь: не можна.
Розв'язання. Проаналізуємо, як впливає записані ходи на загальну суму чисел, що записані по колу. Позначимо записані числа a_1, a_2, …, a_{300}. Після ходу першого типу будуть записані такі числа: $b_k = a_k - a_{k-1} - a_{k+1}$, $k = \overline{1, 300}$ ($a_{301} \equiv a_1$). Розглянемо вираз $C = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ... - a_{300}$. Після ходу першого типу матимемо:

$$b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + ... - b_{300} =$$
$$= a_1 - a_{300} - a_2 - a_2 + a_1 + a_3 + a_3 - a_2 - a_1 - ... - a_{3001} + a_{299} + a_1 = 3C.$$

Після ходу другого типу C не змінюється. В початковій позиції будемо вважати, що $a_1 = 1$, $a_k = 0$, $k = \overline{2, 300}$, тоді $C = 1$. В заключний позиції $C = \pm 1$ в залежності від розташування трьох сусідніх чисел 1. Зрозуміло, що робити хід першого типу не можна, бо інакше вираз C стане за модулем кратним 3 і вже ніколи не зменшиться до 1. Тобто треба спробувати отримати потрібний результат лише ходами другого типу.
Розглянемо $T = a_3 + a_6 + ... + a_{300}$, з самого початку $T = 0$, наприкінці вона дорівнює 1. Але зрозуміло, що при застосуванні ходу другого типу усі доданки, що входять в T або не змінюються, або змінюються одночасно, тобто T може змінитися лише на ± 2. Таким чином парність виразу T не змінюється, що доводить неможливість належного перетворення.

4.1. Знайдіть усі чотирицифрові натуральні числа $\overline{abcd}$, які задовольняють такі умови:
1) $a \le b \le c \le d$;
2) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ділиться націло на 4;
3) остача при діленні числа $\overline{abcd}$ на число c дорівнює 7.

Відповідь: 7999.
Розв'язання. З другої умови стає зрозумілим, що усі цифри числа або парні, або непарні, оскільки квадрат цілого числа дає при діленні на 4 остачу 0 або 1. З третьої умови цифра c дорівнює 8 або 9.
Якщо $c = 8$, то число $\overline{abcd}$ – парне, але тоді воно не може давати непарну остачу при діленні на 8, бо тоді справджувалася б рівність: $\overline{abcd} = 8r + 7$.
Тому $c = 9$. Тобто усі цифри непарні і остача при діленні числа на 9 співпадає з остачею, яку має сума цифр. Таким чином $a + b + d = 9r + 7$. Тоді з першої умови $d = 9$. Розглянемо такі випадки.
$r = 0$, тоді $a + b + d = 7$ і одразу маємо суперечність.
$r = 1$, тоді $a + b + d = 16$, і $a + b = 7$ – неможливо, бо a і b – непарні.
$r = 2$, тоді $a + b + d = 25$, і $a + b = 16$. Тоді шуканим числом є 7999.
Зрозуміло, що інші випадки неможливі.

<u>11 клас</u>

1. З трьох виписаних виразів $\frac{x}{y}$, $\frac{x^2+4}{y^2+4}$ та $\frac{x^3+8}{y^3+8}$ для деяких натуральних чисел x, y два приймають рівні значення, а третє – відмінне від них. Для яких пар (x, y) таке можливо?

(Рубльов Богдан)

Відповідь: $(1, 4)$ та $(4, 1)$.

Розв'язання. Одразу зрозуміло, що $x \neq y$, бо інакше усі три вирази приймають однакові значення, що суперечить умові задачі.
Якщо рівні перші два вирази, то маємо таку рівність:

$$\frac{x}{y} = \frac{x^2+4}{y^2+4} \Rightarrow xy^2 + 4x = yx^2 + 4y \Rightarrow xy(y-x) = 4(y-x).$$

За умови $x \neq y$, можемо скоротити на $y - x \Rightarrow xy = 4$. Пар натуральних різних чисел, що задовольняють останню рівність дві: $(1, 4)$ та $(4, 1)$. Підставимо їх в третю рівність і матимемо, що $\frac{x^3+8}{y^3+8} = \frac{9}{72} = \frac{1}{8} \neq \frac{x}{y}$ та аналогічно $\frac{x^3+8}{y^3+8} = 8 \neq \frac{x}{y}$, тобто наведені пари чисел умову задовольняють.
Якщо рівні перший та третій вирази, то маємо таку рівність:

$$\frac{x}{y} = \frac{x^3+8}{y^3+8} \Rightarrow xy^3 + 8x = yx^3 + 8y \Rightarrow xy(y-x)(y+x) = 8(y-x) \Rightarrow xy(y+x) = 8,$$

розв'язків немає, в чому переконуємося простим перебором.
Якщо рівні другий та третій вирази, то маємо таку рівність:

$$\frac{x^2+4}{y^2+4} = \frac{x^3+8}{y^3+8} \Rightarrow x^2y^3 + 8x^2 + 4y^3 = x^3y^2 + 8y^2 + 4x^3 \Rightarrow$$

$$x^2y^2(y-x) + 4(y-x)(y^2+xy+x^2) = 8(y-x)(y+x) \Rightarrow x^2y^2 + 4(y^2+xy+x^2) = 8(y+x)$$

$$\Rightarrow 4xy + x^2y^2 = 4(2y - y^2) + 4(2x - x^2).$$

При $x, y \geq 2$ ліва частина набуває додатного значення, а права – недодатного. Отже, виконується $x = 1$ або $y = 1$. Якщо $x = 1$, тоді $4y + y^2 = 4(2y - y^2) + 4$ або $5y^2 - 3y + 4 = 0$ – рівність очевидно не можлива, бо $5y^2 > 3y$ для натуральних y. Аналогічно, якщо $y = 1$.

2. На меншій дузі BC описаного кола гострокутного трикутника ABC вибрали точку P. Точки R і S на сторонах AB і AC відповідно вибрані так, що $CPRS$ – паралелограм. Точка T на дузі AC описаного кола ΔABC така, що $BT \parallel CP$. Доведіть, що $\angle TSC = \angle BAC$.

(Тригуб Антон)

Розв'язання. Нехай пряма PR перетинає описане коло ΔABC вдруге в точці K (рис. 7). Тоді $AKPC$ та $BPCT$ – рівнобічні трапеції, звідси $\angle RSA = \angle PCA = 180° - \angle RKA$, звідки $AKRS$ – вписаний, а тому є рівнобедреною трапецією. Тоді $\angle RKS = \angle RAS = \angle BAC = \angle PKT = \angle RKT$.

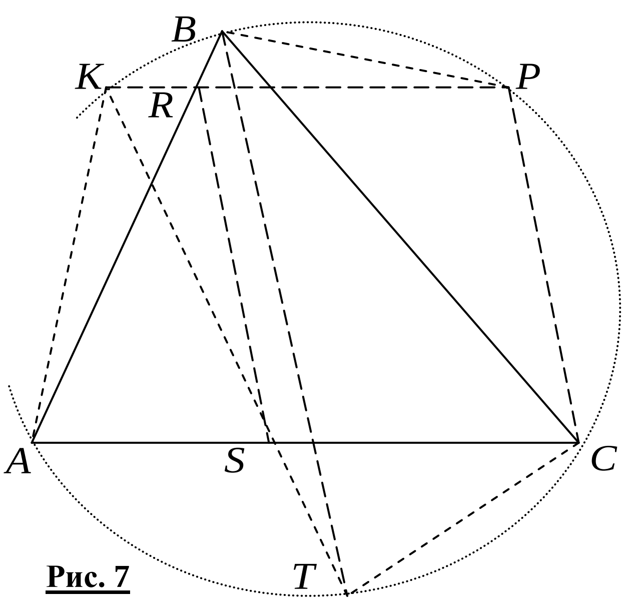


Рис. 7

Отже, точки K, S, T лежать на одній прямій. Тоді $\angle TSC = \angle TKP = \angle BAC$.

3. Задача 4 за 10 клас.

4. За круглим столом на рівних відстанях сиділи та щось обговорювали декілька мешканців острова “Горласті Пельки”. Кожний з них є або лицарем, який завжди каже правду, або брехуном, який кожного разу бреше, причому за столом точно є представники кожного типу. Під час обговорення кожний сказав, що островитянин, який сидить точно напроти нього та обидва сусіди того, хто сидить напроти, не усі одного типу, тобто не усі троє лицарі та не усі троє брехуни. Яка найменша та найбільша кількість брехунів може сидіти за таких умов за столом, за яким сидить:

а) 2020 мешканців острова;

б) 600 мешканців острова?

(Ніколаєв А., Рубльов Б.)

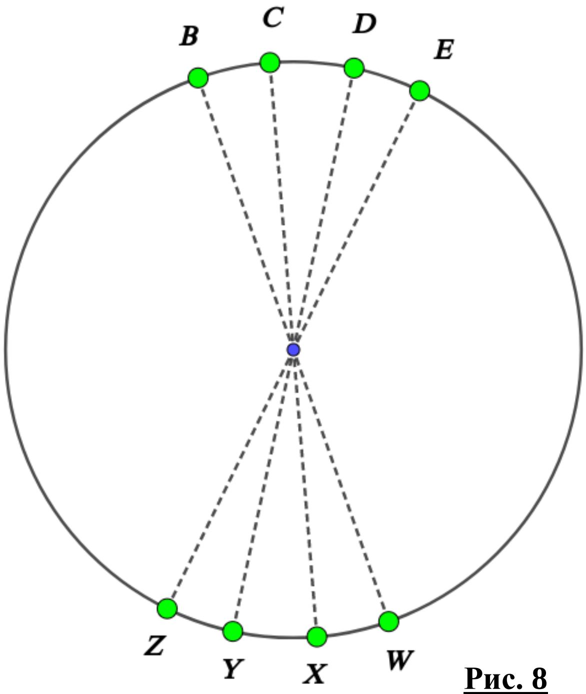


Рис. 8

<u>Відповідь</u>: ***а)*** найменша 505, найбільше 673; ***б)*** найменша 151, найбільше 199.

<u>Розв’язання</u>. Якщо проголошену фразу "островитянин, який сидить точно напроти нього та обидва його сусіди не усі одного типу" каже лицар, то це означає, що серед трьох цих мешканців 1 лицар та 2 брехуни, або 2 лицарі та 1 брехун. Якщо цю фразу каже брехун, то вони хибна і серед цих трьох мешканців усі лицарі або усі брехуни.

<u>Лема 1</u>. Серед будь-яких двох діаметрально протилежних островитян є принаймні один лицар.

Доведення. Методом від супротивного, припустимо, що C та X – два діаметрально протилежно сидячих островитянина, і обидва брехуни (рис. 8). Тоді сусіди X мешканці острова Y та W мають бути брехунами, оскільки C мав збрехати. Аналогічно – обидва сусіда C – островитяни B та D, мають бути брехунами. Але тепер ми маємо ще дві пари протилежних брехунів – D, Y та B, W. Застосовуючи до них такі самі міркування отримаємо, що за столом сидять геть усі брехуни. Це суперечить умові, тому наше припущення хибне і *лема доведена*.

<u>Лема 2</u>. Серед будь-яких п'яти островитян, що сидять поспіль, є принаймні один брехун.

Доведення. Методом від супротивного, припустимо, що десь сидить поспіль п'ять лицарів: $L_1, \ldots, L_5$. Але тоді діаметрально протилежні до L_2, L_3 та L_4 брехуни, оскільки вони збрехали про трьох поруч сидячих, що були одного типу. Але тоді збрехав і L_3, бо усі троє напроти нього одного типу. Одержана суперечність завершує *доведення леми*.

Покажемо такі властивості розсадки мешканців острова за наведених умов. Переглянемо усіх мешканців острова та розіб'ємо їх на групи одного типу. Тобто, наприклад, 2 брехуни утворюють групу, якщо з обох боків біля них сидять лицарі, так само і для лицарів, 3 лицарі утворюють групу, якщо вони оточені з кожного боку брехунами. З леми 2 випливає, що не може бути групи, яка складається більше ніж з 4 лицарів.

Якщо напроти мешканця A сидить островитянин Y, якого оточують X та Z, то будемо казати, що напроти A сидить трійка X, Y, Z. Так само для сусідніх мешканців A, B будемо казати, що напроти сидить четвірка X, Y, Z, T, що є об'єднанням трійок, які сидять напроти A та B.

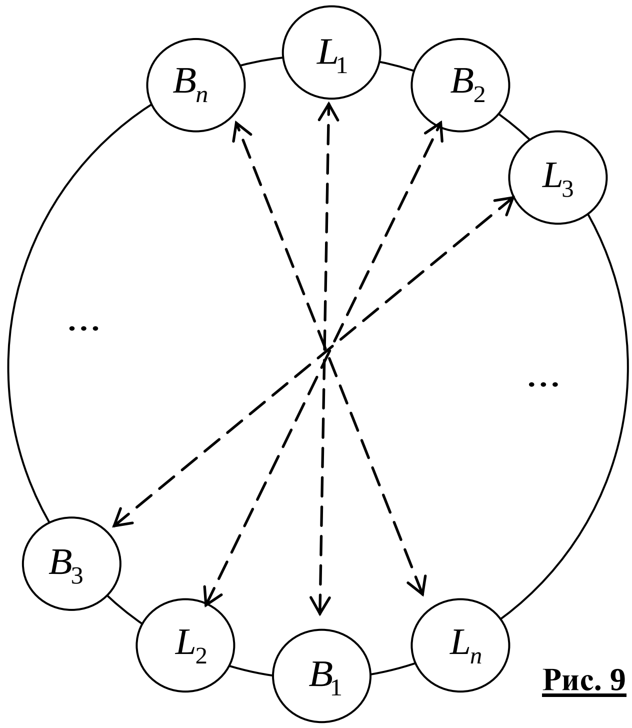
<u>*Лема 3*</u>. Не може бути групи, що складається менше, ніж з трьох лицарів.

Доведення. Розглянемо деякого лицаря L, тоді напроти нього сидить трійка X, Y, Z, серед них є принаймні один брехун. Він сидить напроти L або одного з його сусідів A та B. Якщо він сидить напроти L, тоді усі троє A, L, B – лицарі і тоді їх поруч принаймні троє. Якщо брехун сидить, наприклад, напроти A, то лицарем є A та два сусіди, тобто L серед них. Таким чином L у групі з принаймні трьох лицарів.
Лема доведена.

<u>*Лема 4*</u>. Не може бути групи, що складається більше ніж з двох брехунів.

Доведення. Методом від супротивного, якщо поруч сидить принаймні 3 брехуни B_1, B_2 та B_3, то трійки напроти B_1 та B_3 утворюють групу з 5 лицарів, що неможливо. Одержана суперечність завершує *доведення леми*.

Тепер розглянемо групу з 4 лицарів, тоді напроти неї має бути розташованою група з 2 брехунів, напроти групи з 3 лицарів сидить група з 1 брехуна, та навпаки. Покажемо, що кожна така розсадка островитян задовольняє умову задачі. Позначимо першу групу лицарів L_1, групу напроти неї позначимо B_1, далі за рухом годинникової стрілки, сусідня з L_1 – група брехунів B_2, напроти якої – L_2, і так далі, до групи L_n та напроти неї група B_n (рис. 9). Далі неважко переконатися, що усі умови задачі справджуються для кожного з мешканців.



<u>Рис. 9</u>

Тепер залишається порахувати кількість брехунів при таких розсадках, максимальну та мінімальну. Нехай усього за столом сидить $2N$ островитян.

Якщо груп $2+4$ буде m, а груп $1+3$ – k, то маємо, що усього мешканців за столом $6m+4k=2N$, серед них брехунів рівно $2m+k$. Таким чином усього брехунів за столом може бути $B=2m+\frac{1}{2}(N-3m)=\frac{1}{2}(m+N)$.
Це значення найбільше при найбільшому m і найменше – при найменшому m.

а) У цьому пункті при $2N=2020$ матимемо, що $6m \le 2020 \Rightarrow m \le 336$. Таким чином при $m=336$ та $k=1$ найбільше можливе значення для $B=2m+k=673$.
Крім того $m \ge 0$, тому найменше можливе значення $m=0$, при цьому $k=505$, і, відповідно, найменше можлива кількість брехунів $B=2m+k=505$.

Зауважимо, що треба показати, що наведені оцінки досягаються, тобто насправді існує розташування мешканців острову, для якого все справджується. Дійсно, якщо маємо випадок $m=0$, тобто усі групи по 4 островитянина, то розглянемо одного брехуна та трійку лицарів, що розташовані проти нього. Тоді по обидва боки від прямої, що з'єднує брехуна та відповідного йому лицаря, мають усі групи бути розташовані симетрично. Таким чином усіх груп має бути непарна кількість. В нашому випадку $k=505$ і умова справджується. Так само, якщо $k=1$, то симетрія відносно цієї групи з брехуна та трьох лицарів напроти показує, що груп $4+2$ має бути парна кількість. В нашому випадку $m=336$, а тому наведені ситуації можливі.

б) У цьому пункті при $2N=600$ матимемо, що $6m\le 600 \Rightarrow m\le 100$. Таким чином при $m=100$ та $k=0$ найбільше можливе значення для $B=2m+k=200$. Але при парній кількості таких груп напроти групи з 4-х лицарів сидітиме так само група з лицарів, що призводить до суперечності. Таким чином найбільше можливе значення $m=99$, але тоді $3m+2k=N=300 \Rightarrow$ рівність не можлива. Якщо $m=98$, то $k=\frac{1}{2}(300-3\cdot 98)=3$. Для такого випадку приклад очевидно існує, достатньо симетрично розмістити ці групи навколо одного з брехунів та протилежної йому трійки. При цьому кількість брехунів $B=\frac{1}{2}(m+N)=199$.

Крім того $m\ge 0$, тому найменше можливе значення $m=0$, при цьому $6m+4k=600 \Rightarrow k=150$. Але це означає, що цих груп парна кількість, а тому проти групи з трьох лицарів буде розташована так само група з трьох лицарів, що суперечить одержаним властивостям. При $m=1$ матимемо, що з рівності $6m+4k=600$ випливає, що k – не ціле. Нехай $m=2$, тоді $k=\frac{1}{2}(300-3\cdot 2)=147$. Для непарного k приклад будується симетричним розташування двох груп з чотирьох лицарів. При цьому кількість брехунів $B=\frac{1}{2}(m+N)=151$.

3.1. Задача 4.1 за 10 клас.

4.1. На вечірку прийшли 100 людей, деякі з яких були раніше знайомі (якщо А знайомий з Б, то й навпаки). Протягом вечірки нових знайомств не відбулося. Гонг на вечірці пролунав 100 разів. Після першого сигналу гонгу усі ті, хто не мав жодного знайомого серед присутніх покинули вечірку. Після другого сигналу – вечірку покинули усі ті, хто мав рівно 1 знайомого серед тих присутніх, хто лишився після першого виходу людей. І так далі, після k сигналу гонгу, вечірку покинули ті, хто серед присутніх на цей момент мав рівно $k-1$ знайомого. На завершення вечірки залишилося рівно n з присутніх. Знайдіть усі можливі значення n.

<u>Відповідь</u>: $n\in\{0, 1, 2, \ldots, 98\}$.

<u>Розв'язання</u>. Покажемо чинність наведеної відповіді. Для $n>0$ поділимо усіх людей з вечірки на дві групи. В групі A будуть рівно n людей, кожний з яких знайомий з кожним іншим учасником вечірки. У групі B будуть $100-n$ людей, що не знайомі поміж собою всередині цієї групи. За побудовою, вони усі знайомі з кожним членом групи A. Тоді усі члени групи B залишать вечірку після $n+1$ звуку гонга. Але тоді лишиться усі члени групи A, в кожного з яких рівно по $n-1$ знайомому серед присутніх. Тому вони добудуть до кінця вечірки.

Для $n=0$ – нехай кожний на вечірці знає рівно 1 іншого, тобто маємо 50 пар знайомих. Вони облишать вечірку після 2-го звуку гонга.

Для $n=100$ – не можливо, бо завжди буди принаймні 1 людина з найменшою кількістю знайомих. Оскільки їх точно менше 100, то в якійсь момент вона облишить вечірку першою.

Для $n=99$ покажемо методом від супротивного, що й цей випадок неможливий. Нехай людина X – єдина, хто залишила вечірку раніше кінця. В неї найменша кількість знайомих. Після того, як він пішов, якщо людина Y з ним не була знайома, то вона має або облишити вечірку до завершення. Або її має залишити хтось, знайомий з Y. Таким чином вечірку залишать принаймні 2 людини. Інакше – усі мали бути знайомими з X, але в нього найменша кількість знайомих, тому в усіх інших так само по 99 знайомих, тому вони облишать вечірку усі одночасно після 100 сигналу гонга. Одержана суперечність завершує доведення.