УДК 517 (075.8) + 514.74

Л. І. Філозоф,
кандидат фізико-математичних наук, старший викладач ВНУ імені Лесі Українки;
К. С. Червінська,
студентка 3 курсу факультету інформаційних технологій і математики ВНУ імені Лесі Українки

Неперервні функції в геометричних задачах на існування

Розглянуто задачі на існування конфігурації і розбиття геометричних фігур, для яких виконуються певні вимоги. Показано ефективність використання методів математичного аналізу, зокрема, неперервних функцій, для розв'язання таких задач.

Ключові слова: *функція, неперервність, властивості неперервних функцій, геометрична фігура і тіло, конфігурація, розбиття.*

Filozof L. I., Chervinska K. S. Continuous Functions in Geometric Existence Problems.

Existence problems of configuration and partitioning of geometric figures for which certain requirements are met, are considered. The efficiency of using methods of mathematical analysis, in particular, continuous functions, to solve such problems is shown.

Key words: *function, continuity, properties of continuous functions, geometric figure and body, configuration, partition.*

Постановка проблеми. В геометрії існує широкий спектр задач, які можна умовно назвати задачами на існування. Це, наприклад, задачі, де треба дослідити, чи існує деяка геометрична фігура або тіло, для елементів якого виконуються певні умови. Такими є також задачі на вияснення можливості деякого розбиття цих об'єктів, яке б задовольняло вказані в умові вимоги. Вибір методів для розв'язання таких задач є актуальною проблемою. В багатьох випадках тут можна використати апарат математичного аналізу, зокрема, неперервні функції.

Мета дослідження: проілюструвати на конкретних прикладах використання властивостей неперервних функцій при розв'язанні геометричних задач на конфігурацію та розбиття геометричних фігур; ознайомитися з методом «рухомого ножа» для розв'язання задач на розбиття.

Виклад основного матеріалу. В загальноприйнятій типології геометричних задач виділяють основні їх типи: на обчислення, на доведення, на побудову. Віднесення задачі до певного типу, звичайно, є дещо умовним. Особливо це стосується нестандартних, наприклад, так званих задач на існування. Розглянемо два їх типи: на конфігурацію, на розбиття.

Задачі на конфігурацію. У задачах цього типу висловлюється твердження чи ставиться питання про існування такої конфігурації фігури, для якої певна величина досягає деякого, зафіксованого в умові, значення, або ж ця величина задовольняє певним, вказаним в умові, вимогам.

Задачі на розбиття ставлять питання про можливість чи неможливість виконати певне розбиття плоскої геометричної фігури за допомогою однієї чи кількох прямих, щоб при цьому виконувались певні умови (часто серед них є вимога одержати рівновеликі фігури або ж вимога, щоб одержані фігури мали рівні периметри і т. п.). У стереометричних задачах цього типу говориться про можливість розбиття геометричного тіла однією чи кількома площинами на складові рівновеликі тіла (тобто які мають однакові об'єми) або інші умови (що стосуються площ поверхонь і т. п.).

Наведемо приклади таких задач (у статті [1, с. 39] вони запропоновані автором для самостійного розв'язання).

Задача 1. Довести, що в крузі з центром O можна провести хорду AB так, що площа трикутника AOB буде дорівнювати площі сегмента, який відтинається цією хордою.

Задача 2. Периметр дельтоїда дорівнює 2022, одна з його діагоналей дорівнює 1010. Чи може його друга діагональ дорівнювати 6?

Задача 3. Чи можна в коло радіуса 1 вписати трикутник, який має периметр 5?

Задача 4. Довести, що будь-який опуклий многокутник можна розбити на два рівновеликі многокутники прямою, яка проходить через задану точку.

Задача 5. Довести, що будь-який трикутник можна розбити на два трикутники так, що кола, вписані в одержані трикутники, будуть рівними.

Задача 6. Довести, що будь-який опуклий многокутник можна розрізати двома взаємно перпендикулярними прямими на чотири фігури рівної площі.

Задача 7. Чи існує правильна трикутна піраміда, у якої висота дорівнює відстані між серединами двох мимобіжних ребер?

Задача 8. Довести, що на висоті правильного тетраедра існує точка, з якої кожне ребро основи видно під кутом 90 градусів.

Задача 9. Чи правильно, що будь-яку опуклу плоску фігуру можна розбити прямою так, що периметри і площі одержаних фігур були рівними?

Задача 10. Чи правильно, що будь-яке опукле тіло можна розбити площиною так, щоб об'єми і площі поверхонь одержаних тіл були рівними?

При розв'язанні таких задач часто використовують апарат математичного аналізу, передусім неперервні функції.

Означення неперервності функції в точці базується на понятті границі [2, с. 110]: функція, що визначена на деякому проміжку, називається неперервною у внутрішній точці з цього проміжку, якщо існує границя функції в цій точці і ця границя дорівнює значенню функції в цій точці.

Проте в геометричних міркуваннях його доцільно замінити рівносильним означенням, пов'язаним із поняттям приросту функції. Воно, по суті, означає, що функція буде неперервною в точці, якщо будь-яким малим приростам аргументу відповідають малі прирости функції [2, с. 112]. Розглянувши таку функцію, задану аналітично або описово, далі зазвичай використовують відомі властивості функцій, неперервних на відрізку. Наведемо ті з них, на які найчастіше посилаються при розв'язанні геометричних задач.

Властивість 1 (теорема Больцано–Коші). Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і $f(a) = A, f(b) = B$, то для будь-якого числа C, що лежить між A і B, знайдеться принаймні одне таке число c на відрізку $[a, b]$, що $f(c) = C$.

Властивість 2 (теорема Вейєрштрасса). Функція, неперервна на відрізку, досягає на ньому свого найбільшого і найменшого значень.

Властивість 3 (теорема Больцано–Коші). Якщо функція є неперервною на відрізку і на кінцях відрізка значення цієї функції протилежні за знаком, то принаймні в одній точці цього відрізка функція має значення нуль.

Властивість 4. Нехай для двох неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій $f(x)$ та $g(x)$ виконуються нерівності: $f(a) > g(a), f(b) < g(b)$. Тоді на інтервалі (a, b) існує таке значення c, для якого $f(c) = g(c)$.

Властивість 1 ще називають теоремою про проміжне значення, властивість 3 є її наслідком. Властивість 4 є узагальненням властивості 1.

Розв'яжемо деякі з поданих вище задач.

Задача 1. *Розв'язання.*

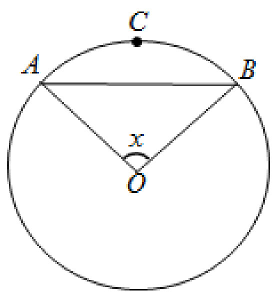


Рисунок 1

Площа трикутника AOB, як і площа відповідного сектора, залежить від величини центрального кута AOB (рис. 1). Позначимо цей кут через x, при цьому будемо використовувати радіанну міру.

Вибір радіанної міри більш доцільний, оскільки тоді формула площі сектора та сегмента матиме дещо простіший вигляд. Нехай R – радіус кола. Будемо мати: $S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin x$. Площа сегмента дорівнює різниці площі сектора і площі цього трикутника, тому будемо мати:

$$S_{\text{сегм}} = \frac{1}{2}R^2 x - \frac{1}{2}R^2 \sin x = \frac{1}{2}R^2(x - \sin x).$$

Отже, площі трикутника та сегмента будуть рівними за умови, що при деякому значенні аргументу рівними будуть значення таких функцій: $f(x) = \sin x$, $g(x) = x - \sin x$. Областю визначення можна взяти відрізок $[0, \pi]$ (або навіть дещо вужчий $[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$ суто з очевидних міркувань, бо при цих значеннях x площа трикутника менша за площу сегмента, і при цьому ні трикутник, ні сегмент не вироджуватимуться в точку та відрізок). Очевидно, що обидві функції неперервні, бо якщо кут x матиме малий приріст, то й площі трикутника та сегмента зміняться мало, тобто й ці функції теж одержать малий приріст.

Обчислимо значення цих функцій у точках $\frac{\pi}{2}$ та $\frac{2\pi}{3}$, які належать області визначення:

$f(\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 1 < 1$; $f(\frac{\pi}{2}) > g(\frac{\pi}{2})$.

Порівняємо значення цих функцій у точці $\frac{2\pi}{3}$:

$f(\frac{2\pi}{3}) = \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$, $g(\frac{2\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} > 1$, тобто $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < g(\frac{2\pi}{3})$. Отже, маємо: $f(\frac{\pi}{2}) > g(\frac{\pi}{2})$, $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) < g\left(\frac{2\pi}{3}\right)$. Тепер використаємо властивість 4 і одержимо, що на інтервалі $(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$ знайдеться таке значення аргументу, при якому будуть рівними значення функцій $f(x) = \sin x$ та $g(x) = x - \sin x$. Отже, при цьому значенні кута x будуть рівними площі трикутника і сегмента, що й треба було довести.

Задача 2. *Розв'язання.*

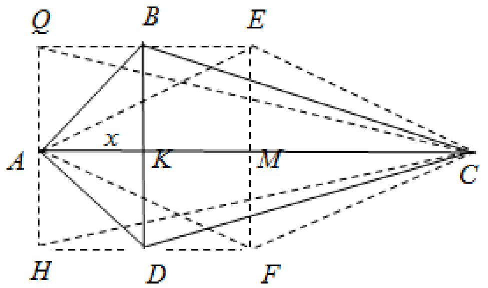


Рисунок 2

У цій задачі зафіксовано числові значення периметра і діагоналей. Тому можна дещо змінити постановку питання. Отже, будемо досліджувати, чи може периметр дельтоїда дорівнювати 2022, якщо його діагоналі 1010 і 6.

Нехай $AC = 1010$, точка M – середина AC, $MA = 505$, $BD = 6$, точка K – середина BD, причому K належить AC і діагоналі взаємно перпендикулярні (рис. 2). Якщо точка K рухатиметься по AC, то конфігурація дельтоїда, а отже і його периметр змінюватимуться залежно від відстані між K та А. Позначимо відстань $AK = x$, бачимо, що периметр є функцією від x: $P_{ABCD} = p\ (x)$. Зауважимо, що аналітичне вираження функції $p\ (x)$ наводити тут не обов'язково. При невеликій зміні аргумента x периметр теж зміниться мало, а це означає, що функція $p\ (x)$ є неперервною. Областю визначення можна взяти відрізок [0, 505]. При $x = 505$ дельтоїд стане ромбом $AECF$, а при $x = 0$ вироджується в рівнобедрений трикутник HQC.

Обчислимо значення функції $p\ (x)$ на кінцях відрізка [0, 505]:

$p\ (505) = 4AE = 4\sqrt{3^2 + 505^2} = 4\cdot 505{,}0089\ldots = 2020{,}03\ldots < 2022;$

$p\ (0) = HQ + 2QC = 6 + 2\sqrt{3^2 + 1010^2} > 6 + 2\cdot 1010 = 2026 > 2022.$

Отже, маємо: $p\ (505) < 2022 < p\ (0)$. Тепер за теоремою про проміжне значення функції, неперервної на відрізку (властивість 1), випливає, що на інтервалі (0; 505) існує таке значення c аргументу x, що $p\ (c) = 2022$.

Отже, відповідь на питання задачі ствердна.

Задача 3. *Розв'язання.*

Проведемо в колі вертикальний діаметр BP. Спробуємо дослідити ту конфігурацію шуканого трикутника, коли його вершина буде в точці B, а протилежна їй сторона MT перпендикулярна діаметру BP. Тобто шуканий трикутник BMT буде рівнобедреним (рис. 3).

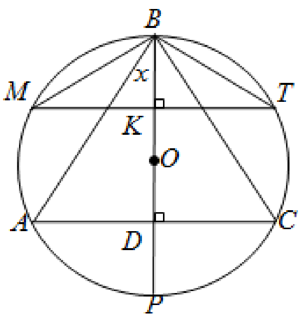


Рисунок 3

Зауважимо, що частинним випадком буде рівносторонній трикутник ABC, у нього сторона дорівнює $\sqrt{3}$, оскільки радіус кола дорівнює 1. Очевидно, що висота $BD = 1{,}5$. Периметр трикутника ABC дорівнює $3\sqrt{3} = \sqrt{27} > 5$.

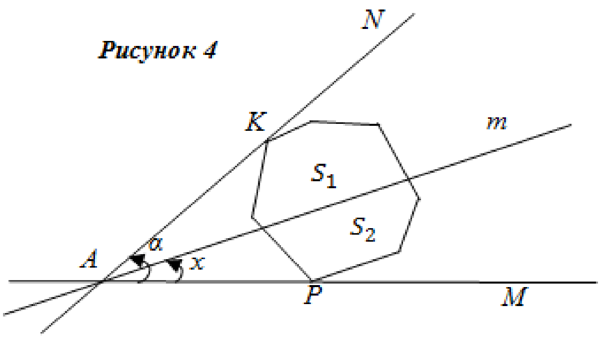
Периметр шуканого трикутника BMT залежить від висоти BK. Позначимо $BK = x$. Отже, периметр є функцією від x, причому вона неперервна (адже при невеликій зміні x периметр теж зміниться мало). Областю визначення функції $p(x)$ є відрізок [0; 2]. Як і в попередній задачі, аналітичний вираз функції не наводимо. Вище ми обчислили значення $p(1{,}5)$, це випадок трикутника ABC: $p(1{,}5) = \sqrt{27} > 5$. Розглянемо тепер граничний випадок, коли $x = 0$. Тоді трикутник BMT вироджується в точку B, отже, $p(0) = 0$. Ми одержали, що неперервна функція $p(x)$ на кінцях відрізка [0; 1,5] приймає значення менше за 5 та більше за 5 відповідно. Тому можна використати теорему про проміжне значення і твердити, що на інтервалі (0; 1,5) існує точка, в якій $p(x) = 5$. Трикутник периметра 5 у дане коло вписати можна.

Відповідь. Так.

Розв'язані задачі відносяться до задач на конфігурацію. Розглянемо тепер задачі на розбиття.

Задача 4. *Розв'язання.* Розглянемо *перший випадок*, коли дана точка A не належить внутрішній області й контуру многокутника (рис. 4).

Рисунок 4



Проведемо через точку A та дві відповідні вершини многокутника прямі AM та AN так, щоб многокутник знаходився у внутрішній області кута NAM. Шукану пряму m, яка розбиває даний многокутник на дві рівновеликі фігури, проведемо під кутом x до прямої AM. $\alpha = \angle NAM$. Очевидно, що $0 \le x \le \alpha$. Якщо при такій побудові прямої m виявиться, що одержані фігури рівновеликі, то задача розв'язана. Нехай $S_1 \neq S_2$.Площі цих частин залежать від кута x, тобто є функціями від x, причому неперервними на відрізку $[0, \alpha]$. Достатньо розглянути одну з них, наприклад,

$s(x) = S_2$, тоді $S_1 = S - s(x)$, де $S -$ площа даного многокутника. Для функції $s(x)$ будемо мати: $s(0) = 0$, $s(\alpha) = S$. Ця функція неперервна на проміжку $[0, \alpha]$ і $0 \leq \frac{1}{2}S \leq S$. Тому за теоремою про проміжне значення випливає, що на цьому проміжку знайдеться таке значення x_0 аргументу, для якого $s(x_0) = \frac{1}{2}S$, що і треба було довести.

В математиці задачу про можливість розбиття навпіл досліджували багато визначних учених. В n-вимірному просторі одержане твердження відоме як «теорема про бутерброд». Для випадку тривимірного простору твердження висловив у 1938 році польський математик Гуго Штейнгаус (1887–1972), а довів Стефан Банах (1892–1945). Математичний об'єкт для розбиття в n-вимірному просторі складається з n елементів, інструментом для виконання розбиття є гіперплощина. У тривимірному просторі цей об'єкт є своєрідним аналогом бутерброда, що складається, наприклад, із двох кусочків хліба, між якими покладено кусочок сиру чи щось інше. Розбиття цього об'єкта, тобто розрізання навпіл, виконують звичайною площиною, яка є своєрідним «ножем». У двовимірному просторі умовний «бутерброд» стає нескінченно тонким «млинцем», який розрізають навпіл відповідним «ножем» – прямою. Термін «бутерброд» прижився і в n-вимірному просторі. Для n-вимірного простору теорему про бутерброд довели Артур Г. Стоун та Джон Тьюкі, тож її ще називають теоремою Стоуна–Тьюкі.

Для доведення цих теорем розроблено метод «рухомого ножа» (паралельно переноситься, обертається). Коротко висвітлимо його сутність для двовимірного та тривимірного простору [3]. (В подальшому терміни «бутерброд», «млинець», «рухомий ніж» чи просто «ніж» трактуємо як математичні поняття і записуватимемо без лапок.)

Виконаємо певним чином розріз (довільно, загалом кажучи) і вважатимемо це положення ножа початковим. Коли рухомий ніж якимось чином розріже бутерброд, то одну зі сторін ножа вважають додатною, якщо відповідна цій стороні частина бутерброда є більша за половину. Нехай це буде частина номер 2, а інша, менша, – частина номер 1. Позначимо міру частини бутерброда (млинця), про яку йдеться в задачі, при положенні ножа під кутом α до фіксованого початкового положення через $p(\alpha)$. Вибір міри задає умова задачі: це може бути площа, периметр, об'єм і т. п. Значення $p(\alpha)$ змінюється від 0 до 1. Тоді для додатної сторони ножа $p(\alpha) \geq \frac{1}{2}$. Якщо виявиться, що $p(\alpha) = \frac{1}{2}$, то задача розв'язана. Якщо при початковому положенні ножа, коли $\alpha = 0$, матимемо, що $p(0) > \frac{1}{2}$, то повернемо наш ніж на 180°. Тоді він, по суті будучи прямою чи площиною, залишиться на тому самому місці, але його додатна сторона перейде на першу частину бутерброда (млинця). А це означає, що $p(180°) \leq \frac{1}{2}$. Але функція $p(\alpha)$ неперервна. Тому за теоремою про проміжне значення випливає, що існує таке значення кута, при якому $p(\alpha) = \frac{1}{2}$. Цим доведено можливість розрізу бутерброда (млинця) навпіл.

Для гіперпростору доведення досить складне.

Проілюструємо цей метод на розв'язанні задачі 4 (*другий випадок*).

Нехай точка A, через яку будемо проводити розбиття многокутника, лежить у його внутрішній області чи на контурі (є внутрішньою точкою його сторони чи збігається з його вершиною). Проведемо через задану точку A деяку пряму m (рис. 5).

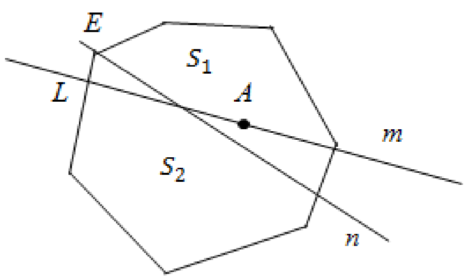


Рисунок 5

Назвемо це положення прямої початковим. Якщо виявиться, що многокутник вже поділився на рівновеликі частини, то задача розв'язана. В супротивному випадку повторимо хід міркувань щойно описаного методу рухомого ножа, ним є пряма. Міра тут – площа одержаних фігур. Отже, згідно з описаним методом, знайдеться кут, для якого пряма займе таке положення, при якому многокутник поділиться на рівновеликі частини. Задача розв'язана.

Складніші задачі 6, 9, 10, де ставиться декілька вимог на елементи розбиття, у цій роботі не будемо розглядати. Задачі 5, 7, 8 пропонуємо для самостійного розв'язання зацікавленим читачам.

На завершення звернемо увагу на методичний аспект нашого дослідження. Це зауваження адресуємо вчителям, які працюють у 10–11 класах. Як можна побачити на прикладах розв'язаних тут задач такого типу, їх цілком можна пропонувати для учнів цих класів, причому не обов'язково профільних чи з поглибленим вивченням математики. Це можна робити як на уроках алгебри і початків аналізу, так і в позакласній роботі з обдарованими учнями. Адже задачі такої тематики часто пропонують на математичних турнірах, олімпіадах. На підсумкових уроках з геометрії в 10 класі теж можна дібрати стереометричні задачі, які були б доступні для сприйняття всіма учнями. Або ж зробити це на комбінованих уроках алгебри і геометрії, ще раз продемонструвавши внутрішньопредметні зв'язки в математиці. Зауважимо, що формулювання задач розглянутого типу учнями сприймається як нестандартне. Тим більше з такими нестандартними задачами доцільно ознайомити старшокласників. А розглянутий метод їх розв'язання значно розширить базу для формування у них головних математичних компетентностей.

Висновки. У нашому дослідженні ми показали, що апарат математичного аналізу можна ефективно використати в геометрії при розв'язанні задач на існування (конфігурацію та розбиття). Наголошено також на можливості й доцільності використання таких нестандартних задач у роботі з учнями 10–11 класів.

Література

1. Блинков А. Непрерывность в геометрии. *Квант.* 2012. № 4. С. 36–39.
2. Шкіль М. І. Математичний аналіз: підручник: у 2 ч. Київ: Вища шк., 2005. Ч. 1. 447 с.
3. Андреев Н. Н. Задача о бутерброде. *Математические этюды.* 2012. URL: www.etudes.ru

УДК 378.046

Н. В. Ясінська,
кандидат педагогічних наук, доцент кафедри педагогіки та психології ВІППО

Сучасна наука про проєктування індивідуальної освітньої траєкторії педагога в системі неперервної освіти

Аналізуються підходи до визначення змісту поняття «індивідуальна освітня траєкторія педагога» та її складників, розглядається місце і реалізація індивідуальної траєкторії освіти педагогічних працівників у системі безперервної освіти, розкривається її моделювання з урахуванням внутрішніх потреб і мотивів особистості, вимог зовнішнього середовища.

Ключові слова: *індивідуальна освітня траєкторія, проєктування, неперервна освіта, самоосвіта.*

Yasinska N. V. Modern Science on the Design of Individual Educational Trajectory of Teachers in the System of Continuous Education.

Approaches to determining the content of the concept of „individual educational trajectory of teachers" and its components, the place and implementation of individual trajectory of education of teachers in the system of continuing education, its modeling taking into account internal needs and motives, environmental requirements were analyzed.

Key words: *individual educational trajectory, design, continuing education, self-education.*

Постановка проблеми. Освіта протягом життя, її особистісно зорієнтований, компетентнісний та діяльнісний підходи, гуманістичний характер є трендами сучасного світу.

Реформа української школи актуалізувала проблему проєктування та реалізації індивідуальних освітніх траєкторій усіх учасників освітнього процесу. Одними із ключових принципів Концепції «Нова українська школа» є розвиток навичок, необхідних для життя, педагогіка партнерства та формування індивідуальних освітніх траєкторій. Варто говорити про нову роль учителя – не як єдиного наставника та джерело знань, а як коуча, фасилітатора, тьютора, модератора в індивідуальній освітній траєкторії дитини. «Реформування передбачає перехід до педагогіки партнерства між учнем, вчителем і батьками, що потребує ґрунтовної підготовки вчителів за новими методиками і технологіями навчання» [14].

Проблема індивідуальної освітньої траєкторії є міждисциплінарною, досліджується психологами, педагогами, соціологами, представниками інших наукових галузей, фокус уваги яких спрямовано на вивчення життєдіяльності сучасної особистості/соціальних груп [17].

Мета статті – розкрити сутність поняття «індивідуальна освітня траєкторія», а також охарактеризувати основні напрями дослідження означеної проблеми представниками гуманітарних наук.

Аналіз досліджень і публікацій. У наукових розвідках проблема реалізації індивідуальних освітніх траєкторій з акцентом на педагогічній складовій у закладах загальної середньої освіти досліджується К. Александровою, П. Антошкіною, С. Вдовіною,