Комунальний заклад «Кіровоградський обласний інститут
післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського»

Ізюмченко Л.В., Ботузова Ю.В.,Ткаченко Л.А.

Інтенсифікація підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики (стереометрія)

Друкується за рішенням вченої ради комунального закладу «Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського» (від 05 червня 2018 р., протокол №3)

Кропивницький
2018

УДК 514.113
І – 32

Ізюмченко Л.В., Ботузова Ю.В., Ткаченко Л.А. Інтенсифікація підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики (стереометрія): [навчальний посібник]. – Кропивницький: КЗ «КОІППО імені Василя Сухомлинського», 2018. – 92 с.

Посібник містить необхідний ілюстративний матеріал до теоретичної частини та практичну частину (приклади розв’язування задач, задачі для самостійного опрацювання), а також тестові завдання шкільного курсу геометрії з теми «Стереометрія», що допоможе більш раціонально розподілити час при підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання.

Завдання різнорівневі і включають всі основні типи тестів, які використовуються при проведенні зовнішнього незалежного оцінювання.

Видання стане реальним помічником учням закладів загальної середньої освіти та вчителям математики – для всіх, хто має бажання систематизувати і повторити шкільний курс геометрії з даної теми та досконало, поглиблено і всебічно підготуватись до участі в зовнішньому незалежному оцінюванні.

Рецензенти:

Макарчук О.П. – старший викладач кафедри прикладної математики, статистики та економіки Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка, кандидат фізико-математичних наук;

Дробін А.А. – методист науково-методичної лабораторії природничо-математичних дисциплін комунального закладу «Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського», кандидат педагогічних наук.

Відповідальна за випуск – Корецька Л. В.

Зміст

Передмова

Математика – універсальна мова, що широко використовується в усіх сферах людської діяльності, її роль у розвитку суспільства суттєво зростає. Математика як шкільний предмет має достатній потенціал для розвитку особистості та становлення світогляду, мислення, необхідних людині, щоб бути успішною на ринку праці. Із розвитком технологій та сучасних аспектів менеджменту збільшується кількість професій, які потребують високого рівня майстерності у застосуванні математики.

У запропонованому посібнику висвітлюються деякі аспекти підготовки учнів до зовнішнього незалежного оцінювання з математики, зокрема, узагальнено й систематизовано матеріал шкільного курсу геометрії з розділу «Стереометрія».

Матеріал і структура посібника повністю відповідають чинній навчальній програмі з предмету за новим державним стандартом та програмі зовнішнього незалежного оцінювання:

– аксіоми стереометрії та наслідки з них (розглядаємо всі можливі випадки взаємного розміщення прямих і площин у просторі; пригадуємо ознаки паралельності прямих і площин, а також найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників);

– кути між прямими у просторі, кути між прямою і площиною та між двома площинами; ознаки перпендикулярності прямої та площини, двох площин; перпендикуляр та похилу, проекцію похилої на площину, ортогональні проекції; пряму та обернену теореми про три перпендикуляри; відстані: від точки до площини, від точки до прямої, від прямої до паралельної їй площини, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими; акцентуємо увагу на застосуванні означень, ознак, властивостей перпендикулярних прямих і площин до розв'язування стереометричних задач та задач практичного змісту;

– многогранники: різні види призм, їх розгортки та властивості, піраміду і зрізану піраміду, їхні топологічні властивості (кількість ребер, вершин, граней, суму плоских кутів), розгортки, основні формули для обчислення площ поверхонь, об'ємів фігур; перерізи многогранників площиною; пропонуються задачі практичного змісту;

– тіла обертання: циліндр, конус, зрізаний конус, кулю, сферу, їхні елементи, перерізи тіл обертання площиною, комбінації геометричних тіл, розгортки поверхонь; формули для обчислення площ поверхонь та об'ємів тіл обертання; розглядаються задачі на метричні співвідношення у тілах обертання і задачі з перерізами тіл обертання та комбінацією геометричних тіл, акцентується увага на застосування означень, ознак, властивостей тіл і поверхонь обертання до розв'язування стереометричних задач та задач практичного змісту.

Для того, щоб розв'язувати стереометричні задачі з повним обґрунтуванням, учням потрібно добре знати відповідний теоретичний матеріал. Кожен із розділів даного посібника містить необхідний ілюстрований матеріал до теоретичної частини та практичну частину (приклади розв'язування задач, задачі для самостійного опрацювання), що допоможе більш раціонально розподілити час при підготовці до зовнішнього незалежного оцінювання. Опрацювання пропонованого матеріалу дасть змогу з’ясувати міцність і глибину засвоєння шкільного курсу стереометрії.

Вибрана форма оформлення змісту посібника дозволяє вчителеві використовувати подані матеріали для підготовки школярів до тестування з предмета, допоможе організувати планомірне вивчення і системне повторення основних понять геометрії та теоретичних відомостей із запропонованих розділів предмету та опанувати основні прийоми і методи розв’язування завдань.

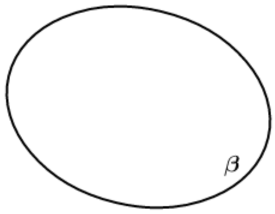
Посібник призначений для використання у процесі самостійної підготовки учнів закладів загальної середньої освіти до зовнішнього незалежного оцінювання. Видання стане у нагоді вчителям математики, учням основної та старшої школи та усім, хто займається підготовкою до зовнішнього незалежного оцінювання.

Бажаємо успіхів!

Розділ І
Аксіоми стереометрії. Паралельність у просторі

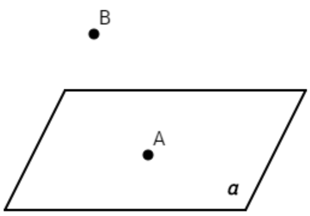
Основне призначення даної теми – виокремлення знань для конструювання геометричних тіл, дослідження їх властивостей та вимірювання геометричних величин, пов'язаних з ними. Для цього вводяться основні поняття стереометрії, аксіоми стереометрії та наслідки з них. Розглядаються всі можливі випадки взаємного розміщення прямих і площин у просторі, ознаки паралельності прямих і площин, а також найпростіші задачі на побудову перерізів многогранників.

1.1. Теоретичні відомості



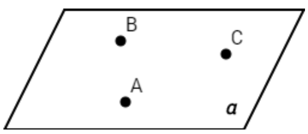
Площина – неозначуване поняття. Уявлення про площину дають нам, наприклад, поверхня столу, віконного скла, спокійного озера. Площина, як і пряма, нескінченна. На малюнках площину зображають у вигляді паралелограма або у вигляді довільної області. Позначають маленькими грецькими літерами: α, β, γ тощо[15].

АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

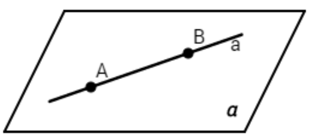


Аксіома 1. Яка б не була площина, існують точки, що їй належать, і точки, які не належать їй.

$A \in \alpha$, $B \notin \alpha$.

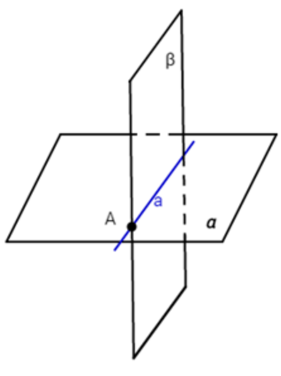


Аксіома 2. Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.



Аксіома 3. Якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма належить цій площині.

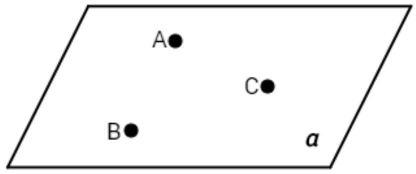
$A \in \alpha$, $B \in \alpha \Rightarrow a \subset \alpha$



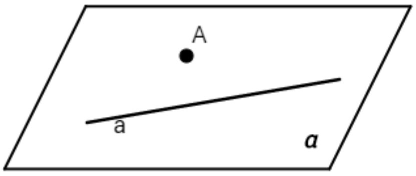
Аксіома 4. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, яка проходить через цю точку.

$A \in \alpha$, $A \in \beta \Rightarrow \alpha \cap \beta = a$, $A \in a$.

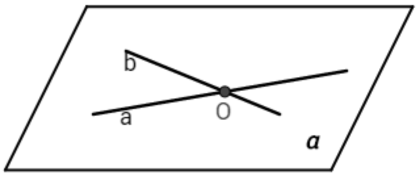
СПОСОБИ ЗАДАННЯ ПЛОЩИНИ



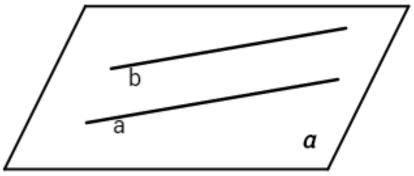
Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину і до того ж тільки одну.



Через будь-яку пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести площину і до того ж тільки одну (наслідок з аксіоми 2).



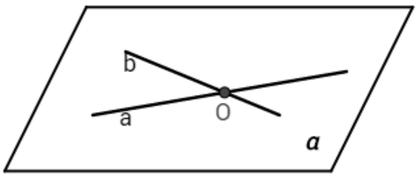
Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину і до того ж тільки одну (наслідок з аксіоми 2).



Через дві паралельні прямі можна провести площину і до того ж тільки одну.

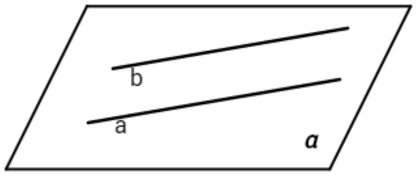
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

Прямі перетинаються



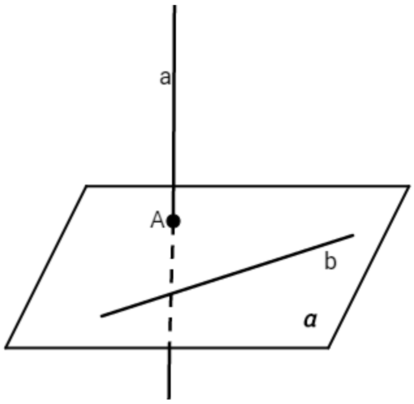
$a \cap b = O$

Прямі паралельні



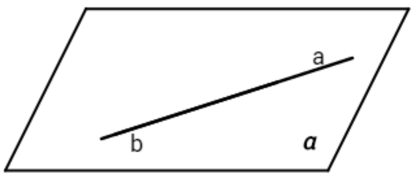
$a \parallel b$

Прямі мимобіжні



$a \cdot b$

Прямі співпадають

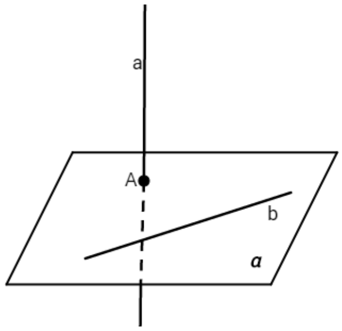


$a = b$

ОЗНАКА МИМОБІЖНОСТІ ПРЯМИХ

Означення: дві прямі, які не лежать в одній площині, називаються мимобіжними.

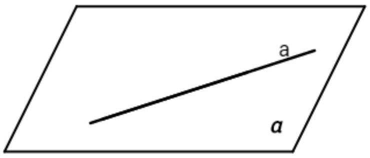
Теорема (ознака мимобіжності). Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину, але не перетинає першу пряму, то дані прямі мимобіжні [3].



$a \cdot b$

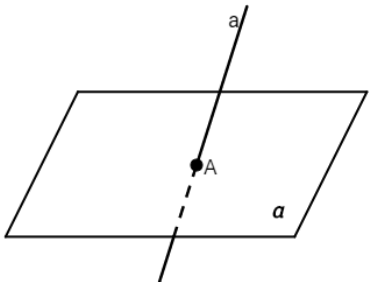
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Пряма належить площині



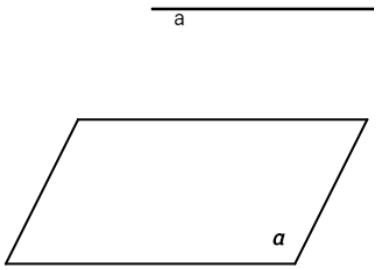
$a \subset \alpha$

Пряма перетинає площину



$a \cap \alpha = A$

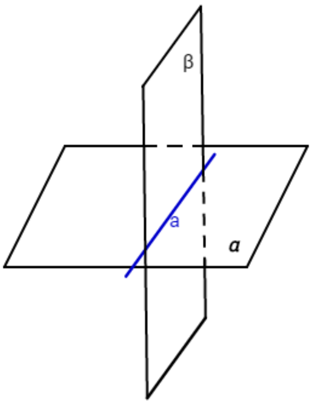
Пряма паралельна площині



$a \parallel \alpha$

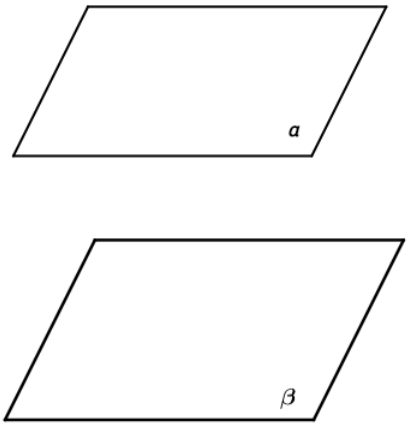
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН

Площини перетинаються



$\alpha \cap \beta = a$

Площини паралельні



$\alpha \parallel \beta$

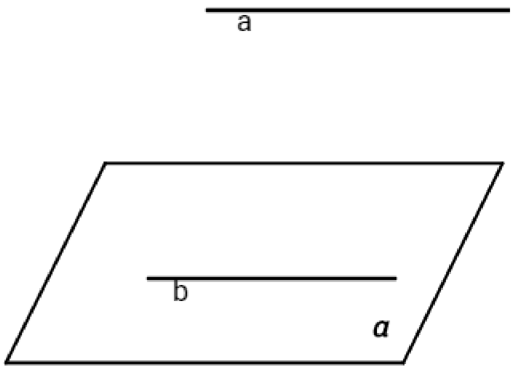
Площини співпадають

$\alpha |= \beta$

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН

Ознака паралельності прямої та площини

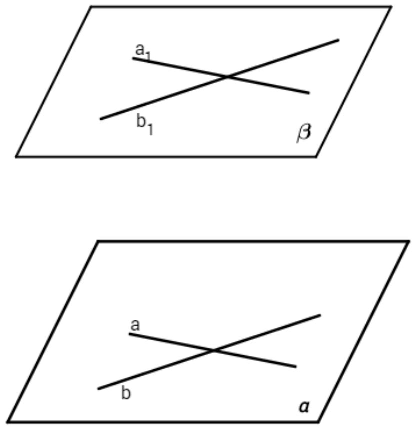
Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій площини, то вона паралельна і самій площині:



$a \not\subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \parallel b \Rightarrow a \parallel \alpha$.

Ознака паралельності площин

Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини, відповідно паралельні двом прямим, що перетинаються іншої площини, то такі площини паралельні:

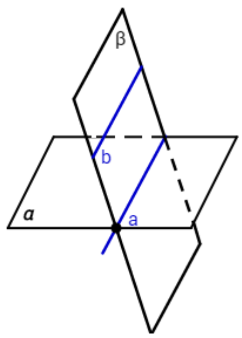


$a, b \subset \alpha$, $a \cap b$, $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$, $a_1 \cap b_1$, $a_1, b_1 \subset \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$.

ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ

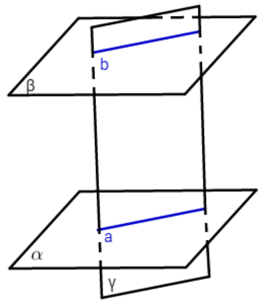
Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинає цю площину, то пряма їхнього перетину паралельна даній прямій:

$b \parallel \alpha$, $b \subset \beta$, $\beta \cap \alpha = a \Rightarrow a \parallel b$.



Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих:

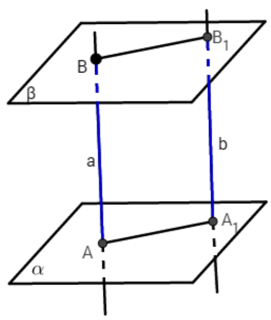
$\alpha \parallel \beta$, $\gamma \cap \alpha = a$, $\gamma \cap \beta = b \Rightarrow a \parallel b$.



Відрізки паралельних прямих, що відтинаються паралельними площинами, рівні:

$a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$, $a \cap \alpha = A$, $a \cap \beta = B$,

$b \cap \alpha = A_1$, $b \cap \beta = B_1 \Rightarrow AB = A_1B_1$.



1.2. Приклади розв'язання задач

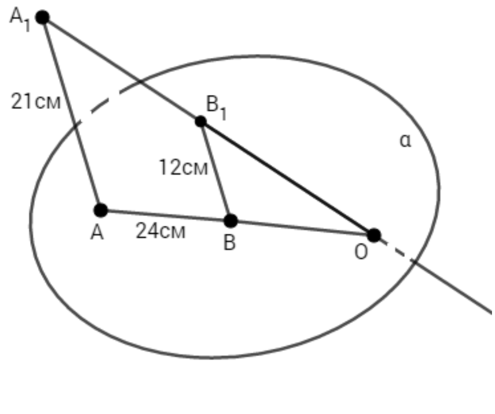
Проілюструємо на прикладах основні теоретичні факти цього пункту.

Приклад 1. Відрізок AB належить площині. Через його кінці поза даною площиною проведено паралельні відрізки AA_1 та BB_1. Пряма A_1B_1 перетинає площину в точці O. Визначте довжину відрізка AO, якщо AB=24 см, AA_1=21 см, BB_1=12 см.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{96}{7}$ см або 7 см	56 см або $15\frac{3}{11}$ см	56 см	$\frac{168}{11}$ см	32 см

Розв'язання. Спочатку виконаємо рисунок до задачі. Побудуємо деяку площину α та відрізок AB, що їй належить. Далі проведемо паралельні відрізки AA_1 та BB_1. Але тут можливі випадки: обидва відрізки лежать по один бік від площини α, або відрізки знаходяться по різні боки відносно неї. Отже, задача може мати декілька розв'язків.

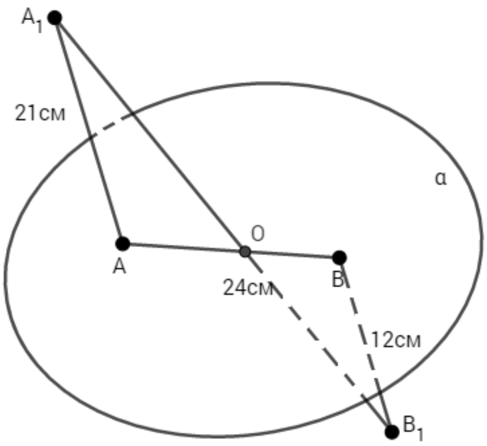
І випадок. Нехай відрізки AA_1 та BB_1 лежать по один бік від площиниα. Тоді пряма A_1B_1 перетинає площину в точці O, яка лежить поза відрізком AB. Але точки A, B та O лежать на одній прямій, яка є лінією перетину площинα та AA_1B_1.



Розглянемо утворені трикутники AOA_1 та BOB_1, які подібні за двома кутами: кут O – спільний, кути A і B (або A_1 і B_1) рівні як відповідні кути при паралельних AA_1, BB_1 та січній AO (A_1O).

Складемо відношення сторін подібних трикутників, попередньо позначивши $BO=x$ см, $AO=AB+BO=24+x$ см. Маємо: $\frac{AA_1}{BB_1}=\frac{AO}{BO} \Rightarrow \frac{21}{12}=\frac{24+x}{x}$, звідки $\frac{7}{4}=\frac{24+x}{x}$. Розв'яжемо отримане рівняння, скориставшись властивостями пропорції: $7x=4\cdot(24+x)$. $7x-4x=4\cdot 24$; $3x=4\cdot 24$; $x=\frac{4\cdot 24}{3}=4\cdot 8=32$ (см). Тоді $AO=24+32=56$ (см).

ІІ випадок. Нехай відрізки AA_1 та BB_1 лежать по різні боки від площини α. Тоді пряма A_1B_1 перетинає площину в точці O, яка лежить на відрізку AB. Розглянемо утворені трикутники AOA_1 та BOB_1, які подібні за двома кутами: кут O – спільний, кути A та B (або A_1 та B_1) рівні, як внутрішні різносторонні при паралельних AA_1, BB_1 та січних AB, A_1B_1. Складемо відношення сторін подібних



трикутників, попередньо позначивши $AO = x$ см, $BO=AB–AO=24–x$ см. Маємо: $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AO}{BO} \Rightarrow \frac{21}{12} = \frac{x}{24-x}$, $\frac{7}{4} = \frac{x}{24-x}$. Розв’яжемо отримане рівняння, отримаємо: $7(24-x) = 4x$, $7 \cdot 24 - 7x = 4x$; $11x = 7 \cdot 24$; звідки $x = \frac{7 \cdot 24}{11} = \frac{168}{11} = 15\frac{3}{11}$ (см). Отже, $AO= \frac{168}{11} = 15\frac{3}{11}$ (см).

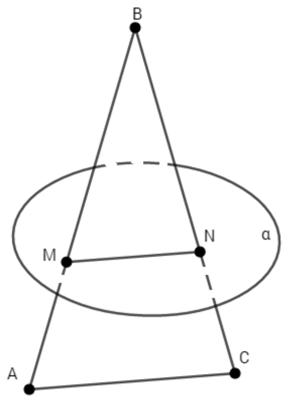
Задача має два різних розв’язки $AO=56$ (см) або $AO=\frac{168}{11} = 15\frac{3}{11}$ (см).

Відповідь: Б.

Приклад 2. Через точку M сторони AB трикутника ABC проведена площина α, яка паралельна стороні AC та перетинає сторону BC у точці N. Визначте відношення $S_{BMN} : S_{AMNC}$, якщо $AM : MB = 1:2$.

А	Б	В	Г	Д
4:9	4:1	1:2	2:3	4:5

Розв’язання. Побудуємо трикутник ABC та позначимо на його стороні AB точку M так, щоб $AM : MB = 1:2$.



A

Площина α перетинає сторону BC в точці N. Проведемо MN паралельно до сторони AC, бо за умовою площина α їй паралельна, а це означає, що в площині α існує пряма паралельна до AC.

Тепер розглянемо трикутники ABC та MBN. Вони подібні за двома кутами: кут B – спільний, кути та M рівні як відповідні при паралельних прямих AC та MN і січній AB (або кути C та N рівні як відповідні при паралельних прямих AC та MN і січній BC).

Знайдемо коефіцієнт подібності розглянутих трикутників: $k = \frac{AB}{BM} = \frac{3}{2}$. Тоді відношення площ подібних трикутників дорівнюватиме k^2, тобто $\frac{S_{ABC}}{S_{MBC}} = \frac{9}{4}$. Це означає, що площа великого трикутника ABC складає 9 частин, а площа меншого трикутника MBN – 4 частини. Тоді площа трапеції $AMNC$ складає 9–4=5 частин. Отже, $\frac{S_{BMN}}{S_{AMNC}} = \frac{4}{5}$.

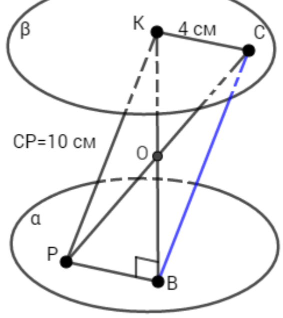
Відповідь: Д.

Приклад 3. Між паралельними площинами α та β містяться два паралельні відрізки PK та CB. Точки P та B належать площині α, а точки K та C – площині β. Знайдіть довжину відрізка CB, якщо відомо: $KC=4$ см, $CP=10$ см, $\angle PBK = 90°$.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{13}$ см	6 см	9 см	10 см	$2\sqrt{5}$ см

Розв'язання. При виконанні рисунка до задачі звертаємо увагу на розміщення точок. За умовою, точки P і B знаходяться в одній з паралельних площин α, а точки K, C в площині β.

За теоремою про відрізки паралельних прямих, що відтинаються паралельними площинами, маємо рівність заданих відрізків: $PK = CB$.



Тоді чотирикутник $PKCB$ за ознакою паралелограма (дві сторони паралельні та рівні) – паралелограм. За властивостями паралелограма: протилежні сторони рівні – $KC=PB=4$ см; діагоналі KB та PC перетинаються в точці O і діляться навпіл – $PO=OC=\frac{CP}{2}=5$ (см).

Розглянемо прямокутний трикутник PBO: $\angle PBO = 90°$, катет $PB=4$ см, гіпотенуза $PO=5$ см. А тому катет OB за теоремою Піфагора $BO=\sqrt{PO^2-PB^2}=\sqrt{5^2-4^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$ (см) (або використовуємо єгипетський трикутник).

Таким чином, відрізок $KB=2\cdot BO=6$ (см). З трикутника прямокутного трикутника KBP ($\angle PBK = 90°$, катет $PB=4$ см, катет $KB=6$ см) знаходимо за теоремою Піфагора KP: $KP=\sqrt{KB^2+PB^2}=\sqrt{6^2+4^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$ см. Враховуючи, що $KP=CB$, отримуємо відповідь: $CB=2\sqrt{13}$ см.

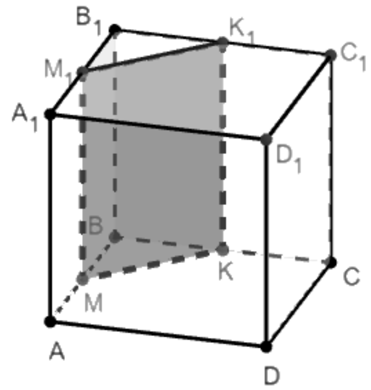
Відповідь: А.

Приклад 4. Площа перерізу куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середини ребер AB та BC паралельно ребру CC_1 становить $18\sqrt{2}$ см^2. Встановіть відповідність між заданими величинами (1–4) та їх числовими значеннями у см чи см^2 (А–Д).

1) ребро куба	**А**) $72\sqrt{2}$
2) площа діагонального перерізу	**Б**) $36\sqrt{2}$
3) діагональ куба	**В**) 6
4) периметр перерізу ACD_1	**Г**) $6\sqrt{3}$
	Д) $18\sqrt{2}$

Розв'язання. Побудуємо куб та позначимо середини ребер AB та BC відповідно точками M і K. Через ці точки проведемо прямі, паралельні ребру CC_1. У верхній грані куба з'являться точки M_1 і K_1. Тому заданий переріз – це прямокутник MKK_1M_1, дві сторони якого $MM_1=KK_1$ дорівнюють ребру куба, а дві інші – $MK=M_1K_1$ дорівнюють половині діагоналі грані куба.

Позначимо ребро куба a, тоді діагональ основи становитиме $a\sqrt{2}$. Половина діагоналі основи MK=M_1K_1=$\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Маємо: площа перерізу MKK_1M_1 відповідно до наших позначень становить $a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ (см^2). Враховуючи умову задачі, отримуємо рівність: $\frac{a^2\sqrt{2}}{2} = 18\sqrt{2}$; $a^2 = 36$; $\Rightarrow a = 6$ (см).



Отже, ребро куба дорівнює 6 см, відповідь на перше питання 1 В. Тоді діагональ основи куба – $6\sqrt{2}$ см, а площа діагонального перерізу: $6 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$ (см^2), відповідь 2 Б.

Діагональ куба знаходимо за формулою $a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ (см), відповідь 3 Г.

Переріз ACD_1 – рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює діагоналі грані куба, тобто $6\sqrt{2}$ см. Тому периметр цього трикутника становитиме: $P_{\Delta ACD_1} = 3 \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$ см, відповідь 4 Д.

Відповідь: 1 В; 2 Б; 3Г; 4Д.

1.3. Завдання для самостійної роботи у форматі ЗНО

1. Три точки, дві з яких є протилежними вершинами довільного паралелограма, а третя – серединою однієї з його діагоналей задають…

А	Б	В	Г	Д
одну єдину площину	безліч площин	жодної площини	три різних площини	немає правильної відповіді

2. Три точки, дві з яких є послідовними вершинами довільного паралелограма, а третя – серединою однієї з його діагоналей задають…

А	Б	В	Г	Д
одну єдину площину	безліч площин	жодної площини	три різних площини	немає правильної відповіді

3. Дві прямі в просторі мають дві спільні точки, тоді ці прямі…

А	Б	В	Г	Д
перетинаються	паралельні	мимобіжні	співпадають	перетинаються в двох точках

4. Дві прямі в просторі не мають спільних точок, тоді ці прямі…

А	Б	В	Г	Д
перетинаються	паралельні	мимобіжні	співпадають	паралельні або мимобіжні

5. Серед наведених тверджень виберіть **правильні**:

I) будь-які дві точки завжди лежать на одній прямій;

II) будь-які три точки завжди лежать на одній прямій;

III) будь-які три точки завжди лежать в одній площині;
IV) будь-які чотири точки завжди лежать в одній площині;
V) серед точок простору завжди можна вибрати три, які не лежать в одній площині.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише III	лише VI	III та V	I та III

6. Серед наведених тверджень виберіть **неправильні**:
I) сторони кожного кута визначають єдину площину;
II) кожні три точки визначають єдину площину;
III) якщо дві різні площини мають спільну пряму, то, окрім точок цієї прямої, у них немає спільних точок;
IV) сторони кожного кута лежать в одній площині;
V) через пряму і точку, що не лежить на ній, можна провести одну єдину площину.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише III	лише IV	I та II	II, III та IV

7. Точка *K* не лежить у площині *ABC*. Назвіть пряму перетину площин *KBC* та *KAB*.

А	Б	В	Г	Д
KB	Площини не перетинаються	*KC*	*AB*	*AC*

8. Задано чотирикутну піраміду *SABCD*, в основі якої лежить паралелограм *ABCD*. Визначте взаємне розміщення площин *ASD* та *BSC*.

А	Б	В	Г	Д
Площини не перетина-ються	Площини дотикаються в точці *S*	Площини перетинають-ся по прямій, яка про-ходить через точку *S*	Площини паралельні	Неможливо встановити

9. На яку **найбільшу** кількість частин можуть поділити простір три площини?

А	Б	В	Г	Д
4	6	7	8	Неможливо встановити

10. Чотири точки не лежать в одній площині. Скільки різних площин можна провести через трійки цих точок?

А	Б	В	Г	Д
3	4	1	жодної	безліч

11. **(ЗНО, 2013 р.)** Пряма *b* не має спільних точок з площиною α. Які з наведених тверджень є правильними?
I. Через пряму *b* можна провести лише одну площину, перпендикулярну до площини α.
II. Через пряму *b* можна провести лише одну площину, паралельну площині α.
III. У площині α можна провести лише одну пряму, паралельну прямій *b*.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I і II	лише II і III	I, II і III

12. (ЗНО, 2016 р.) Прямі a та b мимобіжні. Які з наведених тверджень є правильними?

I. Прямі a та b перетинаються.

II. Прямі a та b лежать в одній площині.

III. Існує пряма, паралельна прямій a,що перетинає пряму b.

А	Б	В	Г	Д
лише I	лише II	лише I і II	лише III	I, II і III

13. Якою фігурою **<u>не може</u>** бути переріз куба площиною?

А	Б	В	Г	Д
Рівнобедрений трикутник	Прямокутник	Рівнобічна трапеція	Восьмикутник	Шестикутник

14. На якому з рисунків зображено **<u>правильно</u>** побудований переріз куба?

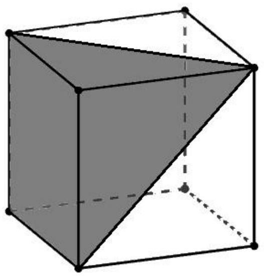


Рис.1

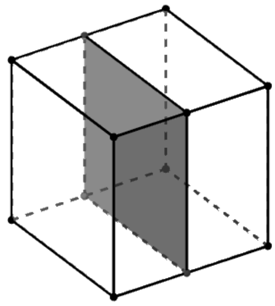


Рис.2

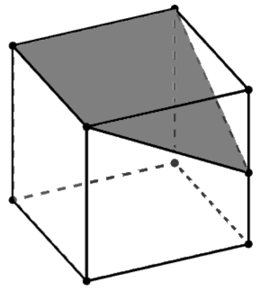


Рис.3

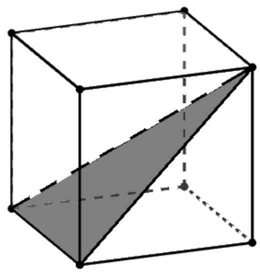
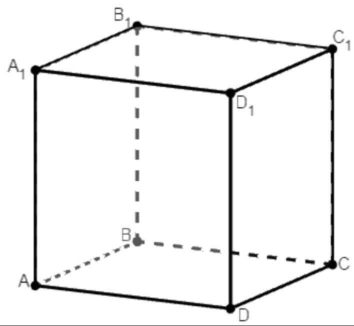


Рис.4

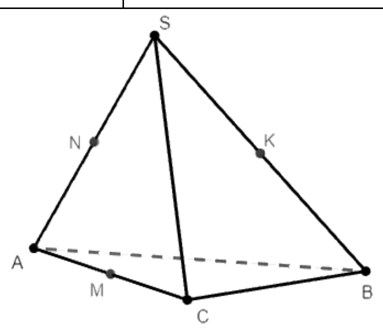
А	Б	В	Г	Д
На рис. 1	На рис. 2	На рис. 3	На рис. 4.	На жодному

15. (ЗНО, 2010 р.) На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Перерізом куба площиною, що проходить через точки A, C, C_1, є



А	Б	В	Г	Д
Прямокутний трикутник	Рівносторонній трикутник	Прямокутник	Ромб	Трапеція

16. На рисунку зображено трикутну піраміду $SABC$. Точки M, N, K є відповідно серединами ребер AC, SA та SB. Якою фігурою є переріз піраміди, що проходить через точки M, N, K?



А	Б	В	Г	Д
Прямокутник	Прямокутний трикутник	Трапеція	Довільний трикутник	Паралелограм

17. Три точки A, B, C визначають площину. Точка O не належить площині ABC. Площина α, яка паралельна до площини ABC, перетинає відрізки OA, OB та OC відповідно в точках A_1, B_1, C_1 та ділить кожен з них у відношенні 3:1, починаючи з точки O. Визначте площу трикутника $A_1B_1C_1$, якщо площа трикутника ABC становить 80 см^2.

А	Б	В	Г	Д
45 см^2	60 см^2	240 см^2	40 см^2	20 см^2

18. Чотирикутну піраміду $SABCD$ перетнули площиною α, яка паралельна до основи і ділить всі бічні ребра піраміди навпіл. У скільки разів площа утвореного перерізу менша за площу основи піраміди?

А	Б	В	Г	Д
у 2 рази	у 4 рази	у 8 разів	у 1,5 рази	неможливо встановити

19. Дано тетраедр $SABC$. Точки M,N,K,P є серединами ребер SA, SC, BC, AB відповідно. Визначте периметр чотирикутника $MNKP$, якщо SB=26 см, AC=14 см.

А	Б	В	Г	Д
20 см	40 см	80 см	91 см	неможливо встановити

20. Задано тетраедр $ABCD$. Через середину ребра DB паралельно ребрам AB та DC проведено переріз, периметр якого дорівнює 42 см. Визначте довжину ребра DC, якщо відомо, що AB:DC=3:4.

А	Б	В	Г	Д
18 см	21 см	42 см	24 см	неможливо встановити

21. Пряма a перетинає площину α в точці A. Точки B і C належать прямій a, причому AC:CB=3:2. З точок B та C проведені паралельні прямі, що перетинають площину α в точках B_1 та C_1 відповідно. Визначте довжину відрізка CC_1, якщо BB_1=10 см.

А	Б	В	Г	Д
6 см	5 см	30 см	5 см або 15 см	6 см або 30 см

22. На рівній галявині на відстані 4 м одне від одного ростуть два дерева. Висота одного з них 5,5 м, а другого 3,3 м. Через їхні верхівки натягнений канат. На якій відстані від вищого дерева необхідно встановити кілок, щоб канат не провисав?

А	Б	В	Г	Д
12 м	6 м	10 м	8 м	6,4 м

23. Площина α проходить через точки E та F, що є серединами відрізків AC та BC відповідно. Визначте відношення $S_{CEF} : S_{EABF}$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1:1	1:4	2:3	1:3	неможливо встановити

24. Через точку M, що є серединою катета BC прямокутного трикутника ABC проведено площину α, яка паралельна іншому катету та перетинає гіпотенузу AB в точці K. Визначте довжину відрізка CK, якщо площа трикутника KMB дорівнює 6 см^2, а довжини катетів відносяться як 3:4.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
5 см	10 см	24 см	12 см	неможливо встановити

25. Через точку O, що знаходиться між паралельними площинами α та β, проведено прямі a та b. Пряма a перетинає площини α та β в точках A та A_1 відповідно, а пряма b в точках B та B_1 відповідно. Визначте довжину відрізка AA_1, якщо відомо, що $OB_1 : BB_1 = 1:3$ і $OA = 10$ см.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$13\frac{1}{3}$ см	5 см	15 см	9 см	$3\frac{1}{3}$ см

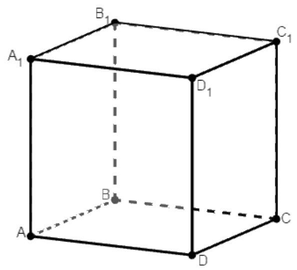
26. Через точку O, що лежить поза паралельними площинами α та β, проведено прямі a та b. Пряма a перетинає площини α та β в точках A та A_1 відповідно, а пряма b – в точках B та B_1 відповідно. Визначте довжину відрізка OB_1, якщо відомо, що $OB = AA_1$, $OA = 2$ см, $BB_1 = 4{,}5$ см.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
3 см	6 см	6,5 см	7,5 см	9 см

27. Через точку перетину медіан ΔABC паралельно прямій AB проведено площину, яка перетинає сторони AC і BC у точках D і F відповідно. Визначте довжину відрізка DF, якщо AB=24 см.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
8 см	9 см	12 см	15 см	16 см

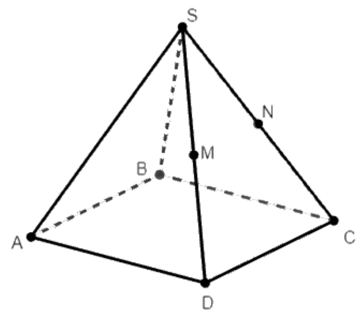
28. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між заданими прямими і площинами (1–4) та їх взаємним розміщенням (А–Д).



1. Площини $A_1C_1D_1$ та ABC
2. Площини A_1B_1B та ADD_1
3. Прямі C_1D та BB_1
4. Пряма AD_1 та площина BB_1C_1

А. перетинаються
Б.співпадають
В. площини паралельні
Г. мимобіжні
Д. паралельні

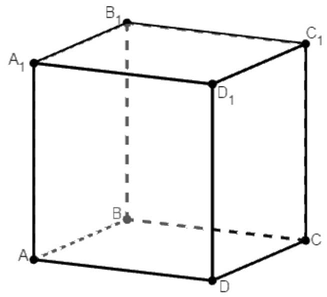
29. Дано правильну чотирикутну піраміду *SABCD*. Точки *M* та *N* є відповідно серединами ребер*SD* та *SC*. Точка *O* – центр основи піраміди. Установіть відповідність між заданими прямими і площинами (1–4) та їх взаємним розміщенням (А–Д).



1. Пряма *OM* і площина *SAB*
2. Прямі *OM* і *SC*
3. Площини *SMN* та *ABO*
4. Площини *AON* та *SOC*

А. перетинаються
Б.мають єдину спільну точку
В. співпадають
Г. мимобіжні
Д. паралельні

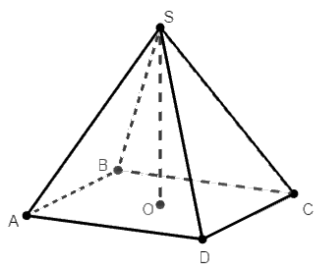
30. На рисунку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ з ребром, що дорівнює $2\sqrt{2}$ см. Установіть відповідність між заданими величинами (1–4) та їх числовими значеннями (А–Д).



1. Площа перерізу A_1BD (у см^2)
2. Периметр перерізу площиною, паралельною основі *ABCD* (у см)
3. Периметр перерізу A_1DC_1 (у см)
4. Половина площі діагонального перерізу (у см^2)

А. 12
Б. $4\sqrt{3}$
В. $4\sqrt{2}$
Г. $8\sqrt{2}$
Д. 8

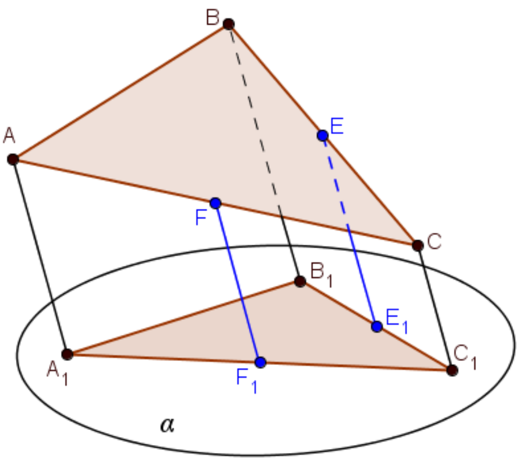
31. Дано правильну чотирикутну піраміду *SABCD*. Точка *O* – центр основи піраміди. *SO* – висота піраміди. $SO = 3$ см, $BD = 8$ см. Установіть відповідність між заданими величинами (1–4) та їх числовими значеннями (А–Д).



1. Площа перерізу *SBD* (у см^2)
2. Периметр перерізу *SAC* (у см)
3. Площа основи піраміди (у см^2)
4. Периметр основи піраміди (у см)

А. 18
Б. 32
В. 24
Г. $16\sqrt{2}$
Д. 12

32. Трикутник ABC не перетинає площину α. Через його вершини A, B, C і середини E та F сторін BC і AC проведено паралельні прямі, які перетинають площину α у точках A_1, B_1, C_1, E_1 і F_1, відповідно (див. рис.). Визначте довжини відрізків CC_1 і EE_1 (у см), якщо AA_1=11 см, BB_1=13 см, FF_1=7 см. У відповідь запишіть (у см) $|CC_1 - EE_1|$.



1.4. Відповіді до завдань для самостійної роботи (Розділ І)

1. Б	**2**. А	**3**. Г	**4**. Д	**5**. Д	**6**. Г	**7**. А
8. В	**9**. Г	**10**. Б	**11**. В	**12**. Г	**13**. Г	**14**. Б
15. В	**16**. Д	**17**. А	**18**. Б	**19**. Б	**20**. Г	**21**. Д
22. В	**23**. Г	**24**. А	**25**. В	**26**. Г	**27**.Д	**28.1.**В
28.2.А	**28.3.**Г	**28.4.**Д	**29.1.**Д	**29.2.**Г	**29.3.**А	**29.4.**В
30.1.Б	**30.2.**Г	**30.3.**А	**30.4.**В	**31.1.**Д	**31.2.**А	**31.3.**Б
31.4.Г	**32.** 5					

Розділ II

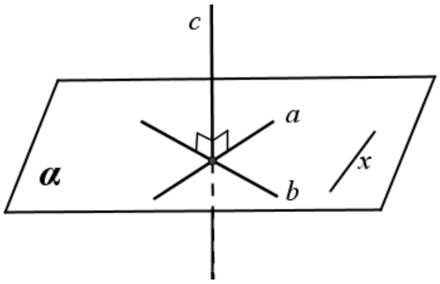
Перпендикулярність прямих і площин у просторі

Даний розділ є підґрунтям для подальшого вивчення стереометрії, тому акцентуємо увагу учнів на поняттях:кути між прямими у просторі, кути між прямою і площиною та між двома площинами; ознаки перпендикулярності прямої та площини, двох площин; перпендикуляр та похилу, проекцію похилої на площину, ортогональні проекції; пряму та обернену теореми про три перпендикуляри; відстані: від точки до площини, від точки до прямої, від прямої до паралельної їй площини, між паралельними площинами, між мимобіжними прямими; акцентуємо увагу на застосуванні означень, ознак, властивостей перпендикулярних прямих і площин до розв'язування стереометричних задач та задач практичного змісту.

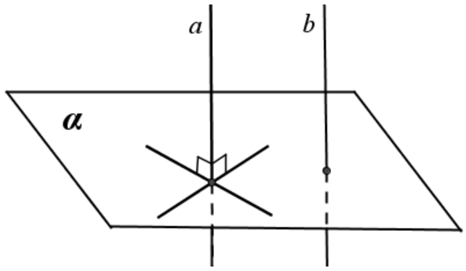
2.1. Теоретичні відомості

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

Пряма, яка перетинає площину, називається *перпендикулярною* до цієї площини, якщо вона перпендикулярна до будь-якої прямої, яка лежить у цій площині: $c \perp \alpha := c \perp x$, $x \subset \alpha$, де x – довільна пряма площини.

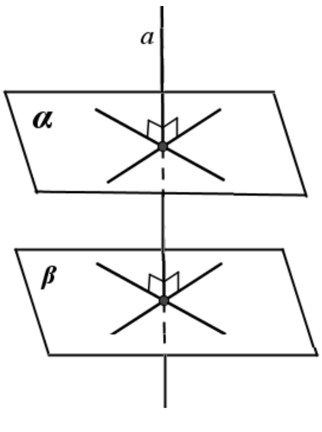


Теорема (ознака перпендикулярності прямої і площини): Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, площини, то вона перпендикулярна і до площини, що визначається цими прямими [16].



Якщо одна з двох паралельних прямих перпендикулярна до площини, то і друга пряма також перпендикулярна до цієї площини.

Якщо дві прямі перпендикулярні до однієї площини, то вони паралельні.



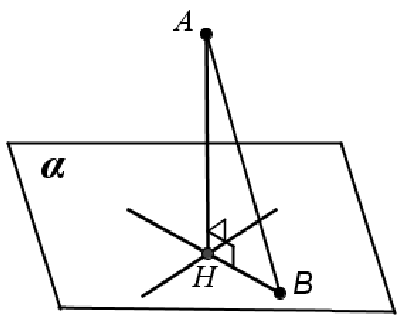
Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних площин, то вона перпендикулярна і до другої площини:

$a \perp \alpha, \alpha \parallel \beta \Rightarrow a \perp \beta$.

Якщо пряма перпендикулярна до двох площин, то площини паралельні:

$a \perp \alpha,\ a \perp \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$.

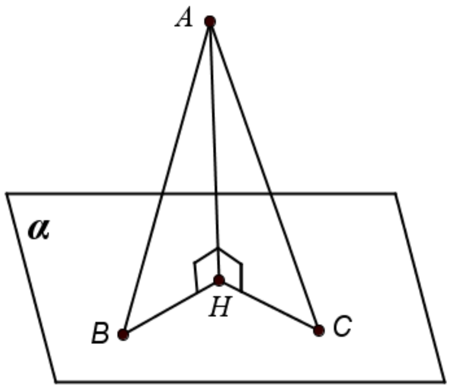
ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА



Перпендикуляром, опущеним з даної точки на дану площину, називають відрізок прямої, перпендикулярної до площини, що міститься між даною точкою і площиною. Відрізок *AH* – перпендикуляр, опущений з т. *A* на площину α, *AB* – похила ($B \neq H$, $B \in \alpha$), *HB* – проекція похилої *AB* на площину α [2].

Довжина відрізка *AH* – відстань від точки *A* до площини α.

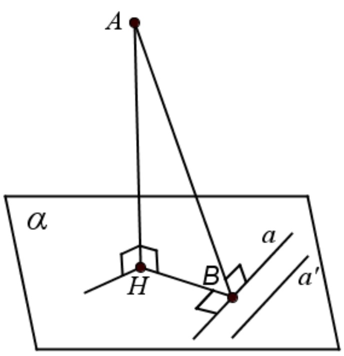
Якщо з однієї точки, взятої поза площиною, проведені до цієї площини перпендикуляр і похила, то перпендикуляр коротший за похилу.



Якщо з однієї точки, взятої поза площиною, проведені до площини перпендикуляр і похилі, причому проекції похилих рівні, то довжини похилих теж рівні і навпаки: якщо довжини похилих рівні, то довжини проекцій похилих теж рівні:

$$AB=AC \Leftrightarrow HB=HC;$$

більшій похилій відповідає більша проекція; з двох похилих та більша, проекція якої більша: $AB > AC \Leftrightarrow HB > HC$.



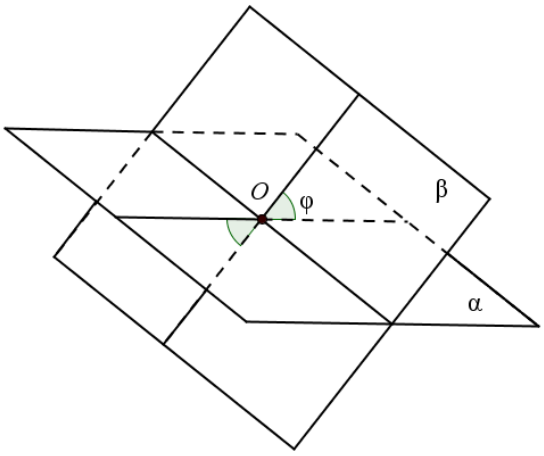
Теорема (про три перпендикуляри). Пряма, проведена на площині перпендикулярно до проекції похилої, перпендикулярна до цієї похилої. І навпаки: якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої:

a (*a′*) – пряма на площині α;
AH – перпендикуляр до площини α;
AB – похила до площини α;
HB – проекція *AB* на площину α;

$$HB \perp a \ \ (HB \perp a') \ \Leftrightarrow \ AB \perp a \ \ (AB \perp a')$$

Довжина відрізка *AB* – відстань від точки *A* до прямої *a*.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН. КУТИ У ПРОСТОРІ

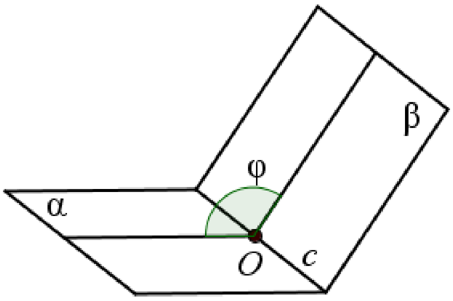


Кутом між площинами, що перетинаються, називається кут між прямими, проведеними у цих площинах перпендикулярно до лінії їхнього перетину: $\angle(\alpha,\beta)=\varphi$.

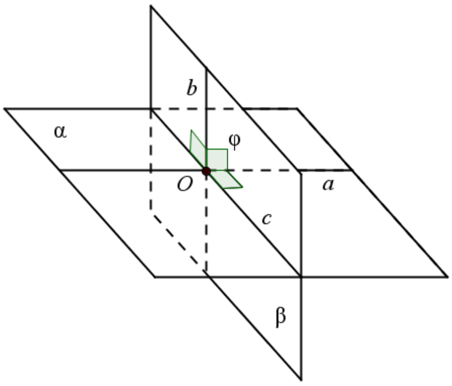
Якщо площини паралельні, то кут між ними дорівнює 0°.

Кут між площинами лежить у межах: $\angle(\alpha,\beta) \in [0^{\circ}, 90^{\circ}]$.

Акцентуємо увагу учнів на відмінності понять кута між площинами і двогранного кута; двогранний кут може змінюватися у межах $[0^{\circ}, 360^{\circ}]$.

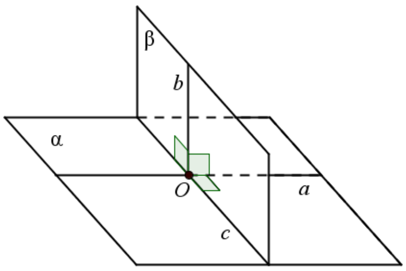


Двогранний кут – це фігура, утворена двома півплощинами, які мають спільну пряму, що їх обмежує. Півплощини називаються *гранями кута*, а спільна пряма – *ребром кута*. *Мірою* двогранного кута є міра відповідного йому лінійного кута.



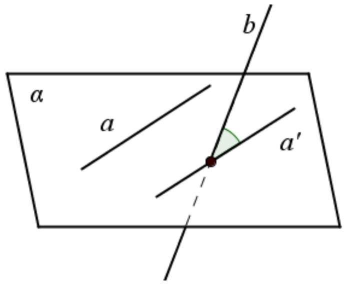
Якщо кут $\angle(\alpha,\beta)$ між площинами дорівнює 90°, то площини називаються *перпендикулярними*.

Теорема (ознака перпендикулярності площин). Якщо одна з двох площин проходить через пряму, яка перпендикулярна до іншої площини, то ці дві площини перпендикулярні [15].



Якщо дві площини перпендикулярні, то пряма, проведена в одній з них перпендикулярно до лінії їхнього перетину, перпендикулярна до іншої площини:

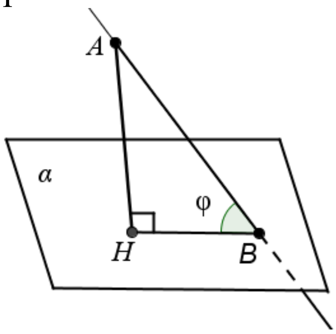
$$\left.\begin{array}{l} \angle(\alpha,\beta)=90^{\circ}, \\ b\subset\beta, \\ \alpha\cap\beta=c, \\ b\perp c \end{array}\right\} \Rightarrow b\perp\alpha$$



Під *кутом* між мимобіжними прямими a і b розуміють кут між прямими, що перетинаються, і паралельні відповідно даним прямим (не більший з кутів): $\angle(a, b) = \angle(a', b)$, де $a \parallel a'$. Кут між паралельними прямими вважають рівним 0°. Кут між прямими лежить у межах: $\angle(a, b) \in [0^{\circ}, 90^{\circ}]$.

Зауваження. З того, що прямі перпендикулярні, **випливає**, що кут між ними дорівнює 90°, і **не випливає**, що прямі перетинаються, тобто взаємне розташування таких прямих – прямі або перетинаються, або мимобіжні.

Якщо пряма паралельна або належить площині, то *кут* між ними вважають рівним 0°. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то *кут* між ними дорівнює 90°.



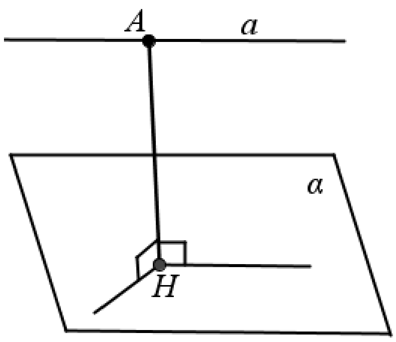
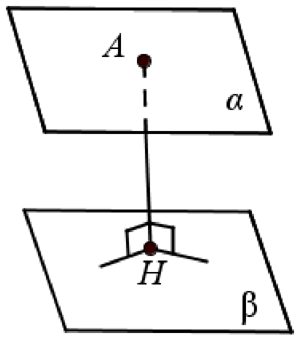
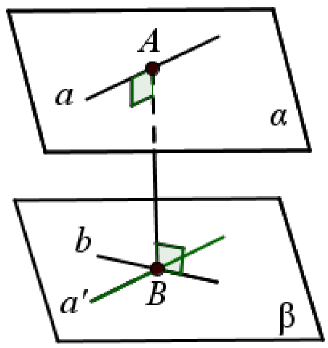
У решті випадків під *кутом* φ між прямою AB і площиною α розуміють кут між прямою AB і її ортогональною проекцією HB на площину:

$\angle(AB, \alpha) = \angle(AB, HB) = \angle ABH.$

Кут між прямою і площиною лежить у межах: $\angle(a, \alpha) \in [0^{\circ}, 90^{\circ}]$.

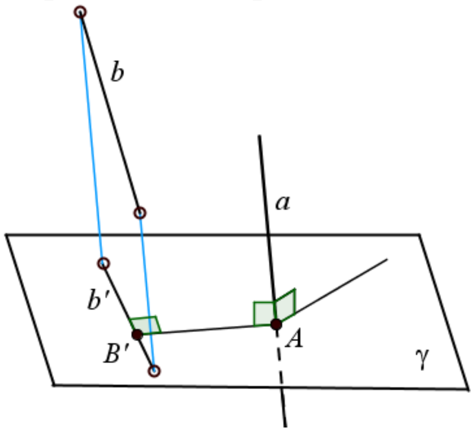
ВІДСТАНІ У ПРОСТОРІ

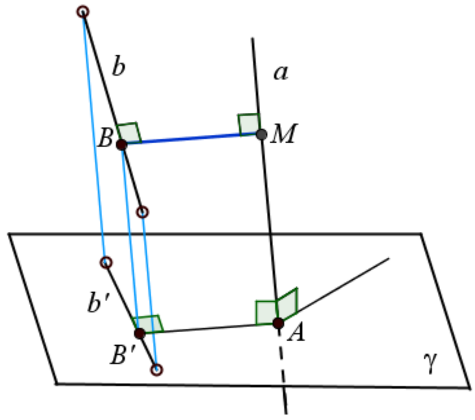
Щоб знайти відстань від прямої до паралельної їй площини, достатньо знайти відстань від будь-якої точки A прямої a до цієї площини: якщо H – це основа перпендикуляра, проведеного із точки A до площини α, то AH і є шуканою відстанню[14].

Відстань від прямої до паралельної їй площини	Відстань між паралельними площинами	Відстань між мимобіжними прямими
		
Якщо $a \parallel \alpha$, то $d(a; \alpha) = d(A; \alpha) = AH$	Якщо $\alpha \parallel \beta$, $A \in \alpha$, то $d(\alpha; \beta) = d(A; \beta) = AH$	$AB \perp a$, $AB \perp b$, $a \dot{-} b$, $d(a; b) = AB$

Щоб знайти відстань між паралельними площинами, достатньо знайти відстань від будь-якої точки однієї площини до іншої площини.

Відстанню між мимобіжними прямими називається довжина їхнього спільного перпендикуляра. Для того, щоб обчислити відстань між мимобіжними прямими, достатньо через одну з прямих (наприклад, через *b*) провести площину, паралельну до іншої прямої (тобто прямої *a*) і знайти відстань від прямої *a* до площини. На рисунку вище: площина β паралельна до прямої *a* (бо проходить через $a' \| a$), тоді відстань між мимобіжними прямими $a \dot{-} b$ є відстань від прямої *a* до площини β. Можна через кожну із прямих провести площину, паралельну до іншої прямої, і знайти відстань між отриманими паралельними площинами [21].

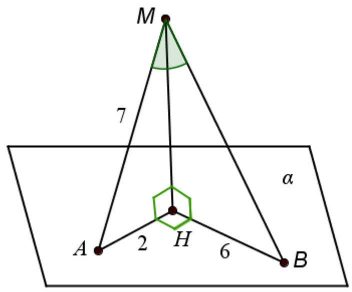




Ще один спосіб отримання відстані між двома мимобіжними прямими *a* і *b* указаний на рисунку зліва: виберемо на прямій *a* довільну точку *A* і проведемо через неї площину γ, яка перпендикулярна до прямої *a*. Спроектуємо пряму *b* на площину γ, отримаємо ортогональну проекцію *b′* прямої *b*. Тоді відстань *AB′* від точки *A* до прямої *b′* і є шукана відстань між мимобіжними прямими *a* і *b*. На рисунку справа показано алгоритм побудови спільного перпендикуляра *BM* двох мимобіжних прямих: *AB′*=*BM*.

2.2. Приклади розв’язання задач

Проілюструємо на прикладах основні теоретичні факти цього пункту.



Приклад 1. З точки *M* до площини проведено дві похилі, проекції яких мають довжини 2 і 6 см, і перпендикуляр. Менша похила має довжину 7 см.

Укажіть проміжок, якому належить кут між похилими, якщо проекції похилих взаємно перпендикулярні.

А	Б	В	Г	Д
$(0^o, 30^o)$	$(30^o, 45^o)$	$(45^o, 60^o)$	$(60^o, 90^o)$	$(90^o, 120^o)$

Розв’язання.

Виконаємо рисунок: нехай *MH* – перпендикуляр, *MA* і *MB* – похилі, *HA* і *HB* – проекції похилих, *MA* < *MB*, тоді *HA* < *HB*, *MA*= 7 см, *HA*= 2 см, *HB*= 6 см.

Задача зводиться до відшукання $\angle AMB$. Універсальним способом відшукання кута на площині (і в просторі) є застосування теореми косинусів до трикутника, в який входить даний кут. Проте, перш, ніж записувати теорему косинусів для ΔAMB, необхідно знайти усі сторони цього трикутника із інших умов (трикутників), сторона AM вже відома.

З прямокутного ΔAHM за теоремою Піфагора знаходимо катет $MH = \sqrt{7^2 - 2^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Аналогічно застосуємо теорему Піфагора до прямокутних трикутників: ΔBHM, гіпотенуза $MB = \sqrt{\left(3\sqrt{5}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{45 + 36} = 9$; ΔAHB, гіпотенуза $AB = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Усі сторони ΔAMB знайдено, запишемо теорему косинусів для ΔAMB: $AB^2 = AM^2 + BM^2 - 2AM \cdot MB \cdot \cos\angle AMB$, звідки $\cos\angle AMB = \dfrac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot MB}$,

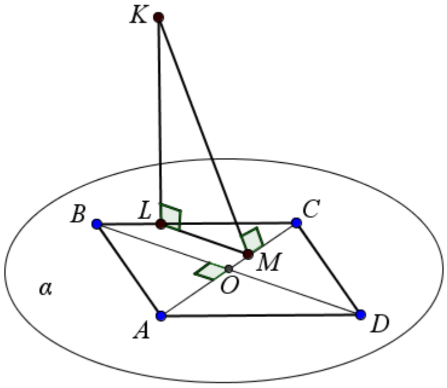
$$\cos\angle AMB = \frac{7^2 + 9^2 - \left(2\sqrt{10}\right)^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{49 + 81 - 40}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{90}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{5}{7}.$$

Під час підготовки до ЗНО треба приділяти увагу, крім геометричної складової, ще і організації арифметичних обчислень: знаменник є **добутком** (можливе скорочення дробу, не поспішаємо його рахувати), чисельник є **сумою**, скорочення не виконуємо до завершення обчислень або до винесення у чисельнику **множника** за дужки.

Оцінюємо ще раз умову задачі: які пропонуються відповіді (ми маємо $\cos\angle AMB = \dfrac{5}{7}$), крім того, відомі табличні значення: $\cos 0^0 = 1$, $\cos 30^0 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$. Очевидно, що $\dfrac{1}{2} < \dfrac{5}{7} < 1$, а тому кут лежить у межах від 0^o до 60^o. Ця оцінка є дуже грубою, а тому спробуємо висловити якусь гіпотезу (вужчу) і обґрунтувати її або відкинути, для чого порахуємо наближено $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}9$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$. Гіпотеза: $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{5}{7} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Усі члени подвійної нерівності невід'ємні, а тому маємо право піднести до квадрату, отримаємо: $\dfrac{1}{2} < \dfrac{25}{49} < \dfrac{3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{2 \cdot 49}{4 \cdot 49} < \dfrac{4 \cdot 25}{4 \cdot 49} < \dfrac{3 \cdot 49}{4 \cdot 49} \Leftrightarrow \dfrac{98}{4 \cdot 49} < \dfrac{100}{4 \cdot 49} < \dfrac{147}{4 \cdot 49}$. Оскільки остання нерівність правильна, то гіпотеза справедлива, отже, з нерівності $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \dfrac{5}{7} < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ маємо $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2} > \arccos\dfrac{5}{7} > \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, тобто $45^0 > \arccos\dfrac{5}{7} > 30^0$ (функція косинус на проміжку $[0^o;\ 180^o]$ є спадною, обернена функція також спадна: більшому іксу відповідає менший ігрек, а тому знаки нерівності змінили на протилежні), отримали $\arccos\dfrac{5}{7} \in \left(30^0;\ 45^0\right)$.

Відповідь: Б.

Приклад 2. Дано ромб *ABCD*, довжина сторони якого 25 см, а довжина діагоналі $AC = 14$ см. У точці *L*, що лежить на стороні *BC* і поділяє відрізок *BC* у відношенні $BL : LC = 1{:}5$, проведено перпендикуляр *LK* до площини ромба. Відстань від кінця *K* перпендикуляра до діагоналі *AC* дорівнює 29 см. Знайдіть довжину перпендикуляра *LK*.



Розв'язання. Виконаємо рисунок до задачі. Ромб зображаємо у вигляді паралелограма, точка *L* лежить на стороні *BC* (ближче до точки *B*), *KL* – перпендикуляр до площини ромба, *KM* – похила, *LM* – проекція похилої. Оскільки за умовою задачі похила *KM* перпендикулярна до діагоналі *AC*, то за теоремою про три перпендикуляри і проекція похилої *LM* перпендикулярна до діагоналі *AC*. На рисунку уже є зображення одного перпендикуляра до *AC*: $BO \perp AC$, два перпендикуляри до однієї прямої (на площині) паралельні, а тому проводимо $LM \parallel BO$.

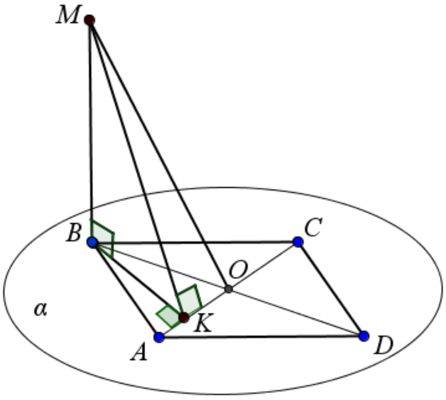
З трикутника *BOC*: $\angle O = 90^0$, $OC = ½\cdot AC = 7$ см, $BC = 25$ см, знаходимо за теоремою Піфагора катет: $BO = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{(25-7)\cdot(25+7)} = 24$ см.

З паралельності відрізків $LM \parallel BO$ випливає подібність $\Delta LMC \sim \Delta BOC$ за двома кутами. Відповідні сторони подібних трикутників пропорційні: $\frac{LM}{BO} = \frac{LC}{BC}$, звідки, врахувавши, що $BC = BL + LC$ та умову $BL : LC = 1{:}5$, маємо: $LC = 5k$, $BC = k + 5k = 6k$, а тоді з пропорції $\frac{LM}{24} = \frac{5}{6}$ отримаємо $LM = 20$ см.

Довжину перпендикуляра *LK* знайдемо із прямокутного трикутника *KLM* за теоремою Піфагора: $LK = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{(29-20)\cdot(29+20)} = 21$ см.

Відповідь: 21 см.

Приклад 3. До площини прямокутника *ABCD*, сторони якого $3\sqrt{10}$ см і $9\sqrt{10}$ см, у вершині *B* провели перпендикуляр *BM*, довжина якого $5\sqrt{7}$ см. На скільки сантиметрів менша відстань від точки *M* до діагоналі *AC*, ніж відстань від точки *M* до точки перетину діагоналей прямокутника?



Розв'язання. Виконаємо рисунок до задачі: *ABCD* – прямокутник, *O* – точка перетину діагоналей, $BK \perp AC$, а тому за ТТП $MK \perp AC$ (*MK* – відстань від точки *M* до діагоналі *AC*), *MO* – відстань від точки *M* до точки перетину діагоналей прямокутника.

У задачі вимагається порівняти *MK* і *MO*.

З трикутника ABC, $\angle B = 90°$, знаходимо за теоремою Піфагора гіпотенузу: $AC = \sqrt{\left(3\sqrt{10}\right)^2 + \left(9\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{90+810} = \sqrt{900} = 30$ см. Тоді BO=15 см, як половина діагоналі прямокутника (або як медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи). Можемо обчислити MO з прямокутного ΔMBO: $MO = \sqrt{\left(5\sqrt{7}\right)^2 + 15^2} = \sqrt{5^2 \cdot \left(7+3^2\right)} = \sqrt{5^2 \cdot 16} = 20$ см.

З трикутника ABC, $\angle B = 90°$, знаходимо висоту BK, проведену до гіпотенузи AC: $h = \dfrac{a \cdot b}{c}$; $h = \dfrac{3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10}}{30} = 9$ см. Можемо обчислити MK з прямокутного ΔMBK: $MK = \sqrt{\left(5\sqrt{7}\right)^2 + 9^2} = \sqrt{175+81} = \sqrt{256} = 16$ см.

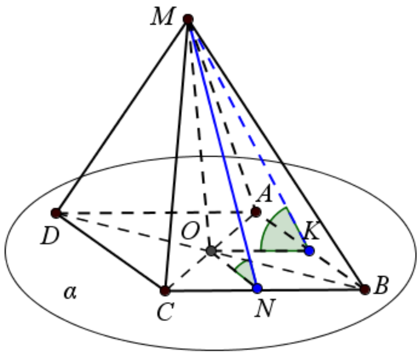
Зауважимо, що MK можна було знайти і з прямокутного трикутника MKO (MK – катет), але тоді потрібно було знайти KO з прямокутного трикутника BKO: $KO = \sqrt{BO^2 - BK^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{6 \cdot 24} = 12$ см;

$MK = \sqrt{MO^2 - KO^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{8 \cdot 32} = 16$ см.

Тепер можемо дати відповідь на питання, сформульоване в задачі, тобто знайти різницю $MO - MK = 20 - 16 = 4$ см.

Відповідь: 4 см.

Приклад 4. Відстань від точки M до усіх вершин прямокутника $ABCD$ дорівнює $\sqrt{13}$ см, довжина діагоналі $AC = 2\sqrt{10}$ см, а різниця довжин сторін прямокутника дорівнює 4 см. Визначте кути, які утворюють площини MAB і MBC з площиною ABC.



Розв'язання. Виконаємо рисунок до задачі: $ABCD$ – прямокутник, O – точка перетину діагоналей. За умовою усі похилі MA, MB, MC, MD рівні, а тому і проекції рівні, отже основою перпендикуляра, проведеного із точки M на площину ABC буде точка O, центр описаного кола (OA=OB=OC=OD).

Проведемо $OK \perp AB$ ($OK \parallel AD$), за ТТП $MK \perp AB$ і $\angle MKO$ – кут між площинами MAB і ABC за означенням кута між площинами. Аналогічно, $ON \perp BC$ ($ON \parallel AB$), за ТТП $MN \perp BC$, $\angle MNO$ – кут між площинами MBC і ABC.

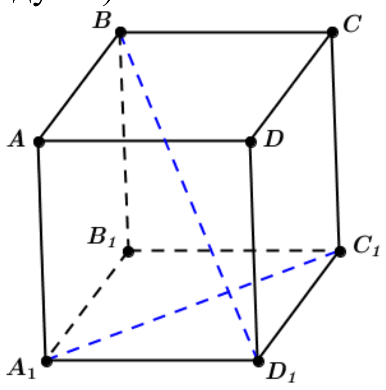
Враховуючи умову, з ΔABC, $\angle B = 90°$, $AB = x$, $CB = x+4$, за теоремою Піфагора $x^2 + (x+4)^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2$, після перетворень отримаємо $x^2 + 4x - 12 = 0$, $(x-2)(x+6) = 0$, $x = 2$, а тому AB = 2см, CB = 6см, звідки ON = 1см, OK = 3см.

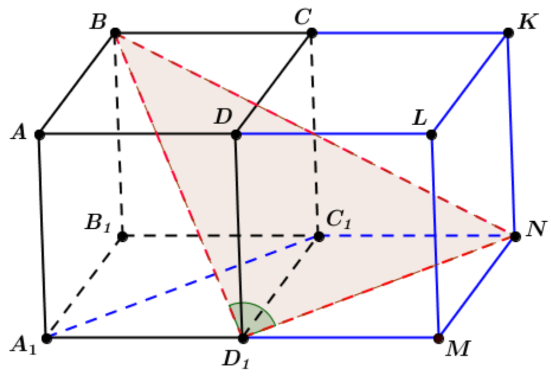
З ΔMOB, $\angle O = 90°$, $OB = \sqrt{10}$ см (половина діагоналі), $MB = \sqrt{13}$ см, за теоремою Піфагора $MO = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{3}$ см.

З прямокутних трикутників MOK і MON, у яких нам відомі катети, можемо знайти тангенси шуканих в умові кутів: $tg\, MKO = \dfrac{MO}{OK} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, це є табличним значенням, отже $\angle MKO = 30^0$; $tg\, MNO = \frac{MO}{ON} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$, це теж табличне значення, $\angle MNO = 60°$.

Відповідь: 30°і 60°.

Приклад 5. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ довжини сторін $AB = 1$ см, $AD = \sqrt{15}$ см, $AA_1 = \sqrt{33}$ см. Визначте кут між прямими BD_1і A_1C_1 (у градусах).





Розв’язання. Виконаємо рисунок. Кут між шуканими прямими, які є мимобіжними, незручно зображати у самому паралелепіпеді, тому добудуємо поруч ще один паралелепіпед, рівний даному (див. рис.). Тоді кут між прямими BD_1і A_1C_1 дорівнює куту $\angle BD_1N$ або суміжному з ним куту.

З прямокутних трикутників знайдемо сторони трикутника BD_1N:

1) ΔD_1MN, $\angle D_1MN=90°$: $D_1N = \sqrt{\left(\sqrt{15}\right)^2 + 1^2} = 4$ см; а тому і $B_1D_1=4$ см;

2) ΔBB_1N, $\angle BB_1N=90°$: $BN = \sqrt{\left(\sqrt{33}\right)^2 + \left(2\cdot\sqrt{15}\right)^2} = \sqrt{93}$ см;

3) ΔBB_1D_1, $\angle BB_1D_1=90°$: $D_1B = \sqrt{\left(\sqrt{33}\right)^2 + 4^2} = 7$ см.

З ΔBD_1N за теоремою косинусів визначимо косинус шуканого кута:

$BN^2 = BD_1^{\,2} + D_1N^2 - 2BD_1\cdot D_1N\cdot\cos\angle BD_1N$, або $\cos\angle BD_1N = \dfrac{D_1N^2 + BD_1^{\,2} - BN^2}{2BD_1\cdot D_1N}$,

$$\cos\angle BD_1N = \frac{4^2 + 7^2 - \left(\sqrt{93}\right)^2}{2\cdot4\cdot7} = \frac{16+49-93}{2\cdot4\cdot7} = \frac{-28}{2\cdot28} = -\frac{1}{2}.$$

Маємо, що кут $\angle BD_1N = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, тобто дорівнює 120°, тоді кут між прямими BD_1і A_1C_1 дорівнює суміжному куту до $\angle BD_1N$, тобто 60°.

Відповідь: 60°.

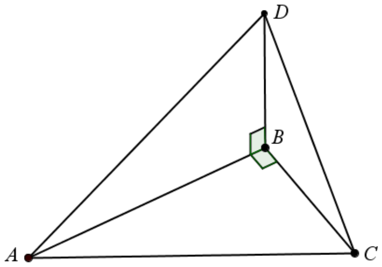
2.3. Завдання для самостійної роботи у форматі ЗНО

1. Відомо, що пряма a перпендикулярна прямій b, а пряма b паралельна прямій c. Яким є можливе взаємне розміщення прямих a і c? Виберіть усі варіанти:

I. a і c – паралельні;
II. a і c – співпадають;
III. a і c – перетинаються;
IV. a і c – мимобіжні.

А	Б	В	Г	Д
Лише I	Лише I або II	Лише III	Лише IV	Лише III або IV

2. Точка D лежить поза площиною трикутника ABC (див. рис.) так, що



$\angle DBA = \angle ABC = 90°$.
Виберіть усі правильні твердження:

I. $DB \perp ABC$;
II. $AB \perp BDC$;
III. $DC \perp AB$;
IV. $BC \perp ABD$.

А	Б	В	Г	Д
Лише I	Лише II	Лише IV	Лише II і III	Лише I і IV

3. Пряма AM перпендикулярна до двох сторін AB і AC трикутника ABC. Яким може бути трикутник MAK, де K – довільна точка променя BC? Виберіть усі варіанти:

I. ΔMAK – гострокутний;
II. ΔMAK – прямокутний;
III. ΔMAK – тупокутний.

А	Б	В	Г	Д
Лише I	Лише II	Лише III	Лише I або II	Лише II або III

4. З точки A до площини α проведено похилу AB під кутом 30° до площини. Визначте відстань від точки A до площини, якщо проекція похилої AB на цю площину дорівнює $2\sqrt{3}$ см.

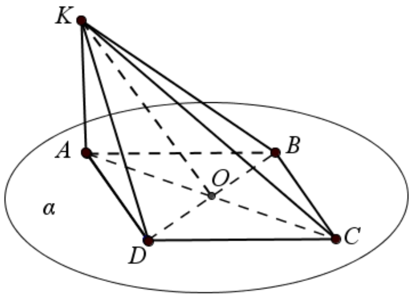
А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$ см	2 см	$2\sqrt{3}$ см	4 см	6 см

5. Через вершину A рівностороннього трикутника ABC зі стороною 6 см проведено перпендикуляр AH до площини трикутника, довжина якого 13 см. Обчисліть відстань від точки H до сторони BC трикутника.

А	Б	В	Г	Д
7 см	$\sqrt{142}$ см	14 см	$\sqrt{205}$ см	19 см

6. Через вершину A рівностороннього трикутника ABC зі стороною 4 см проведено перпендикуляр AD до площини трикутника, довжина AD дорівнює 6 см. Визначте кут між площинами ABC і DBC.

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	arctg1,5	60°	90°



7. Пряма AK перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$, що не є квадратом (див. рис.). Серед наведених трикутників виберіть усі прямокутні трикутники:

I. ΔKOB;
II. ΔAKC;
III. ΔCKD.

А	Б	В	Г	Д
Лише I	Лише II	Лише I і II	Лише II і III	I, II і III

8. Точка S знаходиться на відстані 13 дм від кожної вершини прямокутного трикутника з катетами 6 і 8 дм. Знайдіть відстань від точки S до площини трикутника.

А	Б	В	Г	Д
1 дм	3 дм	5 дм	10 дм	12 дм

9. Через вершину K трикутника KLM зі сторонами KL=15 см, KM=20 см, LM=7 см проведено перпендикуляр KN до площини трикутника, довжина якого 5 см. Обчисліть відстань від точки N до сторони LM трикутника.

А	Б	В	Г	Д
12 см	13 см	14 см	15 см	17 см

10. З точки до площини проведено перпендикуляр завдовжки 3 м та дві похилі, які утворюють з площиною кути 30°і 45°. Визначте відстань між основами похилих на площині, якщо проекції похилих утворюють кут 30°.

А	Б	В	Г	Д
3 м	4 м	$3\sqrt{2}$ м	$3\sqrt{3}$ м	6 м

11. Через вершину D трикутника DEF проведено пряму d, перпендикулярну до його площини. Визначте відстань між прямими d і EF, якщо DE=17 см, DF=9 см, EF=10 см.

А	Б	В	Г	Д
2 см	$4\frac{4}{17}$ см	$5\frac{5}{17}$ см	7,2 см	8 см

12. Через точки D і C проведено прямі, перпендикулярні до площини α, які перетинають її в точках K і B, відповідно. Визначте відстань між точками C і B, якщо DC=25 см, DK=15 см, KB=24 см.

А	Б	В	Г	Д
7 см	8 см	16 см	22 см	8 см або 22 см

13. Через точку S, що не лежить у площині α, до площини α проведено рівні похилі SA, SB, SC, SD завдовжки 3 см, основи яких утворюють квадрат $ABCD$ зі стороною $2\sqrt{3}$ см. Визначте кут між площинами SAB і ABC.

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	$arctg\ \sqrt{2}$	60°	90°

14. Кінці відрізка *AB* належать двом перпендикулярним площинам α і β, а відстані від точок *A* і *B* до площин β і α дорівнюють 4 і8 см, відповідно. Відстань між основами перпендикулярів, опущених з кінців відрізка *AB* на лінію перетину площин, дорівнює 19 см. Визначте довжину відрізка *AB*.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{377}$ см	$5\sqrt{17}$ см	21 см	23 см	31 см

15. Кут між прямими, перпендикулярними до граней двогранного кута, дорівнює 80°. Визначте міру двогранного кута.

А	Б	В	Г	Д
10°	40°	80°	100°	160°

16. Двогранний кут дорівнює 30°. На одній із граней вибрано точку *B*, яка знаходиться на відстані 5 см від другої грані. Визначте відстань від точки *B* до ребра двогранного кута.

А	Б	В	Г	Д
2,5 см	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$ см	6 см	$5\sqrt{3}$ см	10 см

17. Два плоских кути тригранного кута мають міри 75° і 125°. Визначте, у яких межах може змінюватися міра третього плоского кута.

А	Б	В	Г	Д
$(0^{\circ}; 50^{\circ})$	$(50^{\circ}; 160^{\circ})$	$(50^{\circ}; 180^{\circ})$	$(50^{\circ}; 200^{\circ})$	$(0^{\circ}; 180^{\circ})$

18. У тригранному куті два плоских кути по 45º, двогранний кут між ними прямий. Визначте, якщо це можливо, третій плоский кут.

А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	90°	Визначити не можна, не вистачає даних

19. Довжина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює $\sqrt{2}$ см. Визначте відстань між прямими BD_1 і DC.

А	Б	В	Г	Д
1 см	$\sqrt{2}$ см	1,5 см	2 см	$2\sqrt{2}$ см

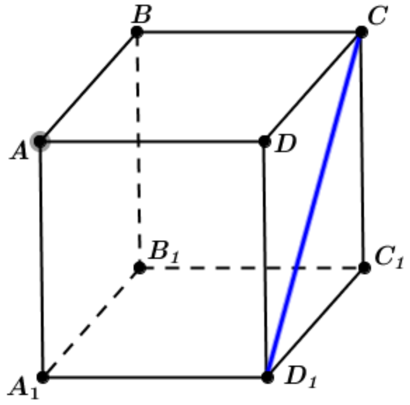
20. Площини квадратів *ABCD* і *ABNM* перпендикулярні. Визначте відстань від прямої *AB* до площини *CDM*, якщо довжина *AC* дорівнює 10 см.

А	Б	В	Г	Д
5 см	7 см	$5\sqrt{2}$ см	10 см	$10\sqrt{2}$ см

21. Ортогональною проекцією прямокутника зі сторонами 16 і $9\sqrt{2}$ см на площину β є квадрат зі стороною 12 см. Визначте кут між площинами квадрата і прямокутника.

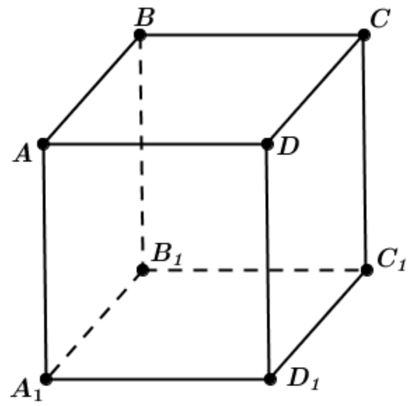
А	Б	В	Г	Д
30°	45°	60°	90°	Визначити не можна, не вистачає даних

22. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (див. рис.). Установіть відповідність між лівим (1–5) та правим стовпчиками (А–Е) так, щоб утворилася правильна рівність:



1. $\angle(D_1C, A_1AD)$=	**А.** 0°
2. $\angle(D_1C, AB_1)$=	**Б.** 30°
3. $\angle(D_1C, A_1C_1)$=	**В.** $arcctg\sqrt{2}$
4. $\angle(D_1C, A_1AB)$=	**Г.** 45°
5. $\angle(D_1C, BD_1)$=	**Д.** 60°
	Е. 90°

23. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ зі стороною 1 (див. рис.). Установіть відповідність між відстанями у лівому стовпчику (1–5) та значеннями у правому стовпчику (А–Е):



1. Відстань $d\,(BC\,;AA_1)$=	**А.** 0
2. Відстань $d\,(BC\,;A_1D_1)$=	**Б.** $\sqrt{2}/2$
3. Відстань $d\,(BC\,;ADC_1)$=	**В.** 1
4. Відстань $d\,(A_1;\,C)$=	**Г.** $\sqrt{2}$
5. Відстань $d\,(A_1;\,ACC_1)$=	**Д.** $\sqrt{3}$
	Е. 2

24. Через точку A, яка знаходиться на відстані $2\sqrt{5}$ см від площини α, проведені дві похилі AB і AC, проекції яких на площину α мають довжини $\sqrt{5}$ і $2\sqrt{11}$ см, відповідно (точки B і C – основи похилих на площині α). Кут між проекціями похилих дорівнює 90°.

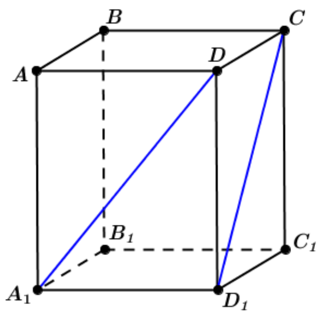
1. Визначте периметр трикутника ABC (у см).
2. Який кут (у градусах) утворюють похилі?

25. У прямокутнику $ABCD$ точки K і M – основи перпендикулярів, опущених на діагональ AC із вершин B і D, відповідно. Площину прямокутника $ABCD$ перегнули по діагоналі AC так, що площини ACB і ACD стали перпендикулярними, а відстань між точками B і D стала рівною 9 см. Визначте довжину відрізка MK (у см), якщо довжина BK дорівнює 4 см.

26. Площини прямокутників $ABCD$ і $CDEF$ взаємно перпендикулярні. Визначте відстань (у см) між прямими AF і DC, якщо довжини відрізків BC і CF дорівнюють 7 см і 24 см, відповідно.

27. Основою прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник $ABCD$, довжини сторін AB і BC якого дорівнюють 4 м і 3 м, відповідно. Визначте косинус кута φ між прямими AB_1 і A_1C_1, якщо довжина бічного ребра AA_1 дорівнює 8 м. У відповідь запишіть $\sqrt{5}\cos\varphi$.

28. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторони $AB = 1$ см, $AD = \sqrt{6}$ см, $AA_1 = \sqrt{3}$ см (див. рис.). Визначте кут між прямими A_1D і D_1C (у градусах).



29. Через точку проведено A пряму a, перпендикулярну до площини ABC. Визначте відстань між прямими a і BC, якщо точки в прямокутній системі координат мають координати $A(-2; 5)$,$B(3; 4)$,$C(-1; 1)$.

2.4. Відповіді до завдань для самостійної роботи (Розділ ІІ)

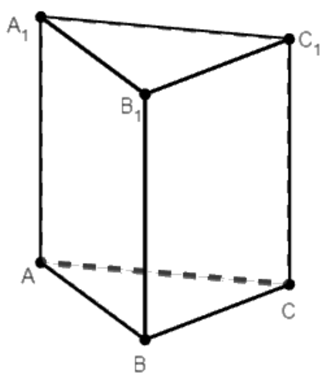
1. Д	**2.** Г	**3.** Б	**4.** Б	**5.** В	**6.** Г	**7.** Г
8. Д	**9.** Б	**10.** А	**11.** Г	**12.** Д	**13.** Б	**14.** В
15. Г	**16.** Д	**17.** Б	**18.** В	**19.** А	**20.** А	**21.** Б
22.1. Г	**22.2.** Е	**22.3.** Д	**22.4.** А	**22.5.** В		
23.1. В	**23.2.** Г	**23.3.** Б	**23.4.** Д	**23.5.** А		
24.1. 20	**24.2.** 60°	**25.** 7	**26.** 6,72	**27.** 0,8	**28.** 60°	**29.**3,8

Розділ III
Призма

Систематизуючи знання і вміння учнів щодо геометричного тіла призма, повторюємо з учнями різні види призм, їх розгортки та властивості. Пригадуємо та застосовуємо формули на обчислення площ поверхонь та об'єму призми.

3.1. Теоретичні відомості

ОЗНАЧЕННЯ ПРИЗМИ ТА ЇЇ ЕЛЕМЕНТИ



Призма – це многогранник, дві грані якого є рівними многокутниками з відповідно паралельними сторонами, а всі інші грані є паралелограмами.

Многокутники називаються *основами* призми (ABC, $A_1B_1C_1$), а паралелограми – *бічними гранями* (ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1).

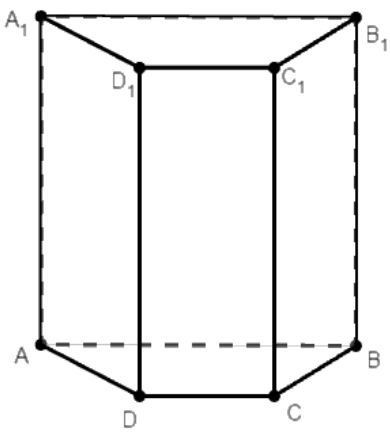
Сторони бічних граней та основ називаються *ребрами* призми.

Кінці ребер називаються *вершинами* призми. *Бічними ребрами* називаються ребра, які не належать основам (AA_1, BB_1,CC_1).

Діагональ призми – відрізок, який сполучає дві вершини призми, які не лежать в одній грані. Трикутна призма не має діагоналей [5].

ПРЯМІ ТА ПОХИЛІ ПРИЗМИ

Пряма призма

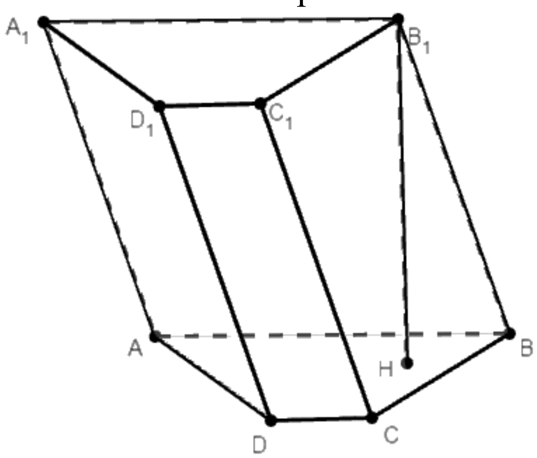


Бічні ребра перпендикулярні до площини основи.

Бічне ребро дорівнює висоті призми.

Бічні грані є прямокутниками.

Похила призма



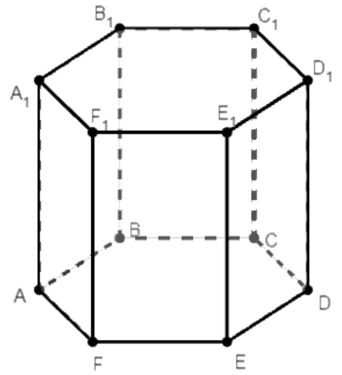
Бічні ребра не перпендикулярні до площини основи.

Висота призми B_1H– відстань між площинами основи.

Бічні грані є паралелограмами.

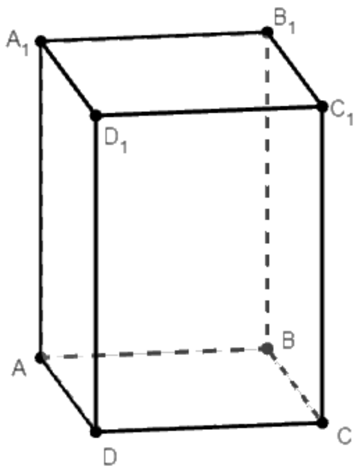
ОКРЕМІ ВИДИ ПРИЗМ

Правильна шестикутна призма



Правильна призма – це пряма призма, основи якої – правильні многокутники.

Прямокутний паралелепіпед



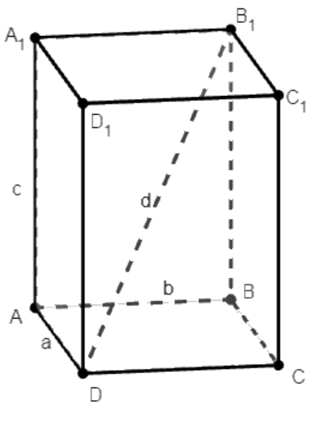
Паралелепіпед – це чотирикутна призма, в основі якої лежить паралелограм [11].

Усі грані паралелепіпеда – паралелограми.

Якщо всі грані паралелепіпеда – прямокутники, то його називають *прямокутним паралелепіпедом*.

Якщо всі грані паралелепіпеда рівні квадрати, то його називають *кубом*.

ДІАГОНАЛЬ ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА



Наслідок з просторової теореми Піфагора.

Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів:

$DB_1^2 = AD^2 + AB^2 + AA_1^2$,

$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Таким чином, діагональ куба зі стороною a становить: $a\sqrt{3}$.

ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ ТА ОБ'ЄМІВ

Пряма призма

Площа бічної поверхні: $S_б = P_о \cdot H$, де $P_о$ – периметр основи, H – висота призми.

Площа повної поверхні: $S_п = S_б + 2S_о$, де $S_о$ – площа основи.

Об'єм призми: $V = S_о \cdot H$.

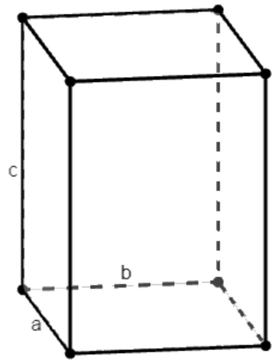
Похила призма

Площа бічної поверхні: $S_б = P_п \cdot AA_1$, де $P_п$ – периметр перерізу, перпендикулярного до бічного ребра AA_1.

Площа повної поверхні: $S_п = S_б + 2S_о$, де $S_о$ – площа основи.

Об'єм призми: $V = S_о \cdot H$, де H – висота призми.

Прямокутний паралелепіпед з вимірами a, b, c.



Площа бічної поверхні:

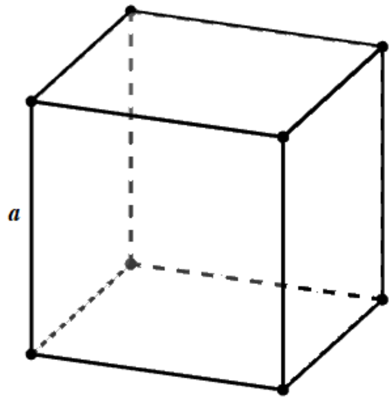
$S_б = P_о \cdot H = 2(a+b) \cdot c$.

Площа повної поверхні:

$S_п = S_б + 2S_о = 2(ab+bc+ac)$.

Об'єм: $V = S_о \cdot H = abc$.

Куб з ребром a



Площа бічної поверхні:

$S_б = P_о \cdot H = 4a^2$.

Площа повної поверхні:

$S_п = S_б + 2S_о = 6a^2$.

Об'єм : $V = S_о \cdot H = a^3$.

3.2. Приклади розв'язання задач

Проілюструємо на прикладах основні теоретичні факти цього пункту.

Приклад 1. (ЗНО, 2010 р.) Дерев'яний брусок має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 10 см, 20 см, 80 см. Скільки лаку потрібно для того, щоб один раз покрити ним усю поверхню цього бруска, якщо на 1 м^2 витрачається 100 *г* лаку?

А	Б	В	Г	Д
0,52 *г*	26 *г*	52 *г*	160 *г*	520 *г*

Розв'язання. За умовою задачі лаком покривається уся поверхня бруска, тому за формулою площі повної поверхні прямокутного паралелепіпеда з вимірами a=10 см, b=20 см, c=80 см знаходимо:

$S_п = 2(ab+bc+ac) = 2(10\cdot 20 + 20\cdot 80 + 10\cdot 80) = 2(200+1600+800) = 5200$ см^2.

Витрати лаку на 1 м^2 становлять 100 *г,* враховуючи, що 1 м^2=10000 см^2, маємо співвідношення: $\begin{matrix} 10000\ см^2 \to 100\ г \\ 5200\ см^2 \to x\ г \end{matrix}$. Таким чином, за пропорцією отримуємо: $x = \frac{5200 \cdot 100}{10000} = 52$ (*г*).

Відповідь: В.

Приклад 2. Визначте об'єм правильної чотирикутної призми, діагональ якої нахилена до площини основи під кутом 30^o та дорівнює 12 см.

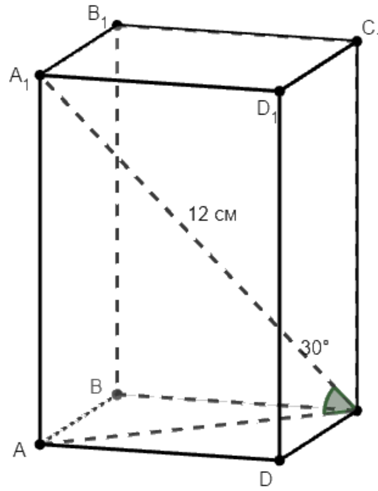
А	Б	В	Г	Д
324 см^3	$72\sqrt{6}$ см^3	180 см^3	$324\sqrt{6}$ см^3	$108\sqrt{3}$ см^3

Розв’язання.

Нехай задано правильну чотирикутну призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, тобто пряму призму, основою якої є квадрат $ABCD$. Діагональ A_1C=12 см.

Бічне ребро призми AA_1 перпендикулярне до площини основи, бо призма пряма, тоді AC – проекція A_1C на площину основи. За означенням кут між прямою та площиною – це кут між прямою та її проекцією на площину, отже, кут між діагоналлю A_1C та площиною основи – це $\angle A_1CA$. Тоді $\angle A_1CA = 30°$.

Необхідно знайти об’єм правильної чотирикутної призми за формулою: $V = S_o \cdot H$. Для цього знайдемо висоту призми та площу основи.



Розглянемо прямокутний трикутник A_1AC: $\angle A = 90°$, $\angle C = 30°$, гіпотенуза A_1C=12 см. За теоремою, катет, що лежить проти кута 30^o дорівнює половині гіпотенузи, тому $AA_1 = \frac{12}{2} = 6$ (см) – висота призми. Далі, за теоремою Піфагора або за тригонометричними співвідношеннями знаходимо катет AC.

<u>1 спосіб.</u> За теоремою Піфагора: $AC^2 = A_1C^2 - AA_1^2$, $\Rightarrow AC = \sqrt{A_1C^2 - AA_1^2} =$ $= \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{(12-6)(12+6)} = \sqrt{6 \cdot 18} = 6\sqrt{3}$ (см).

<u>2 спосіб.</u> Враховуючи, що $\frac{AC}{A_1C} = \cos 30°$, знаходимо $AC = A_1C \cdot \cos 30° =$ $= 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ (см)(також можна скористатись співвідношенням $\frac{AC}{AA_1} = ctg\,30°$).

Знайдений відрізок AC – діагональ квадрата $ABCD$, що лежить в основі призми. Визначити площу основи призми також можна кількома способами:

<u>1 спосіб.</u> Площу квадрата можна знайти за формулою $S = \frac{1}{2}d^2 = \frac{1}{2}AC^2$.

Отже, $S_o = \frac{1}{2} \cdot (6\sqrt{3})^2 = 54$ (см^2).

<u>2 спосіб.</u> Знаючи, що $AC = d = a\sqrt{2}$, знайдемо сторону квадрата: $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, а потім площу квадрата – $S_o = a^2 = \left(\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{36 \cdot 3}{2} = 18 \cdot 3 = 54$ (см^2).

<u>3 спосіб.</u> Розглянути прямокутний трикутник ABC ($AB=BC=a, \angle \hat{A} = 90°$). За теоремою Піфагора: $AB^2 + BC^2 = AC^2 \Rightarrow a^2 + a^2 = (6\sqrt{3})^2$; $2a^2 = 108$;
$a^2 = \frac{108}{2} = 54 \Rightarrow S_o = a^2 = 54$ (см^2).

І остаточно знаходимо об’єм призми: $V = S_o \cdot H = 54 \cdot 6 = 324$ (см^3).

Відповідь: А.

Приклад 3. В основі прямої призми – прямокутний трикутник із катетом a та протилежним кутом α. Діагональ більшої бічної грані, нахилена до площини основи під кутом β. Встановіть відповідності між величинами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1. Площа основи призми
2. Бічна поверхня призми
3. Повна поверхня призми
4. Площа більшої бічної грані

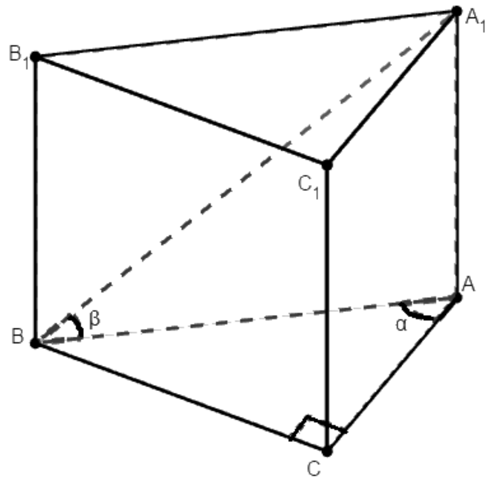
А. $\dfrac{a^2 tg\beta}{\sin\alpha}\left(1+\dfrac{3}{2}ctg\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$

Б. $\dfrac{a^2}{2tg\alpha}$

В. $\dfrac{a^2 tg\beta}{\sin\alpha}\left(1+ctg\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)$

Г. $\dfrac{a^2 tg\beta}{\sin^2\alpha}$

Д. $\dfrac{a^2 tg\beta}{\sin\alpha}\left(1+\dfrac{1}{tg\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)+\dfrac{a^2}{tg\alpha}$



Розв'язання. Зобразимо задану призму $ABCA_1B_1C_1$. Нехай $BC=a$, тоді $\angle BAC=\alpha$. Більша бічна грань призми та, до якої входить гіпотенуза трикутника ABC, тобто AB. Отже більша бічна грань – AA_1B_1B. Тоді діагональ цієї грані A_1B утворює з площиною основи кут $\angle A_1BA=\beta$ (AA_1 – перпендикуляр до площини основи, бо призма пряма; AB – проекція A_1B на площину основи; за означенням: кут між прямою і площиною – це кут між прямою і її проекцією на площину).

Для знаходження площі основи необхідно знати, принаймні, два катети, так як площу прямокутного трикутника можна обчислити за формулою $S=\frac{1}{2}ab$, де a, b – катети.

За тригонометричним співвідношенням в прямокутному трикутнику $\dfrac{AC}{BC}=ctg\alpha$ знаходимо, що $AC=BCctg\alpha=actg\alpha$. А тому площа основи: $S_o=\dfrac{1}{2}a\cdot actg\alpha=\dfrac{a^2ctg\alpha}{2}$ (кв. од). Переглядаємо наведені в умові відповіді (А–Д) і не знаходимо такої, тому пробуємо перетворити отриманий вираз. Врахуємо, що $ctg\alpha=\dfrac{1}{tg\alpha}$, тоді $S_o=\dfrac{a^2ctg\alpha}{2}=\dfrac{a^2}{2tg\alpha}$ – відповідь Б (1 Б).

Для знаходження площі бічної поверхні скористаємось формулою: $S_б=P_o\cdot H$. Щоб знайти периметр основи, треба знати всі сторони основи, тому знаходимо гіпотенузу AB: $\dfrac{BC}{AB}=\sin\alpha \Rightarrow AB=\dfrac{BC}{\sin\alpha}=\dfrac{a}{\sin\alpha}$. Зауважимо, що шукати гіпотенузу за теоремою Піфагора недоречно. Якщо шукати гіпотенузу через співвідношення косинус, то прийдемо до тієї ж самої відповіді: $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha \Rightarrow$

$AB = \frac{AC}{\cos\alpha} = \frac{actg\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a\cos\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{a}{\sin\alpha}$. Отже, $P_o = a + a \cdot ctg\alpha + \frac{a}{\sin\alpha}$.

Для знаходження висоти H,враховуючи, що призма пряма, скористаємось трикутником A_1BA – прямокутний ($\angle A = 90°$, $\angle B = \beta$, $AB = \frac{a}{\sin\alpha}$). Маємо $\frac{AA_1}{AB} = tg\beta \Rightarrow AA_1 = AB \cdot tg\beta = \frac{a \cdot tg\beta}{\sin\alpha}$.

Знаходимо $S_б = P_о \cdot H = \left(a + actg\alpha + \frac{a}{\sin\alpha}\right) \cdot \frac{atg\beta}{\sin\alpha} = \frac{a^2tg\beta}{\sin\alpha}\left(1 + ctg\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\right)$ – 2 В.

За формулою $S_n = S_б + 2S_o$ знайдемо площу повної поверхні призми: $S_п = \frac{a^2tg\beta}{\sin\alpha}\left(1 + ctg\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\right) + 2 \cdot \frac{a^2}{2tg\alpha} = \frac{a^2tg\beta}{\sin\alpha}\left(1 + ctg\alpha + \frac{1}{\sin\alpha}\right) + \frac{a^2}{tg\alpha}$ або, врахувавши, що $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$: $S_п = \frac{a^2tg\beta}{\sin\alpha}\left(1 + \frac{1}{tg\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha}\right) + \frac{a^2}{tg\alpha}$ – 3 Д.

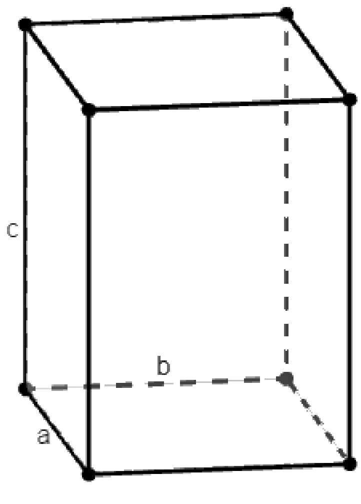
Залишилось знайти площу більшої бічної грані, тобто грані AA_1B_1B: $S_{AA_1B_1B} = AB \cdot AA_1 = \frac{a}{\sin\alpha} \cdot \frac{atg\beta}{\sin\alpha} = \frac{a^2tg\beta}{\sin^2\alpha}$ – 4 Г.

Відповідь: 1 Б, 2 В, 3 Д, 4 Г.

Приклад 4. Площі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 80 см^2, 96 см^2 і 120 см^2. Знайдіть об'єм паралелепіпеда у літрах (1л=1дм^3).

Розв'язання.

Нехай задано прямокутний паралелепіпед із вимірами *a, b, c,* як показано на рисунку. Тоді припустимо, що: площа основи дорівнює 80 см^2, тобто $a \cdot b = 80$; площа однієї з бічних граней 96 см^2 – $a \cdot c = 96$; площа сусідньої з нею грані 120 см^2 – $b \cdot c = 120$.



Таким чином отримали систему трьох рівнянь з трьома невідомими: $\begin{cases} ab = 80, \\ ac = 96, \\ bc = 120. \end{cases}$

За потреби, цю систему можна розв'язати повністю та знайти величину кожного виміру заданого паралелепіпеда. Але за умовою задачі нам необхідно знайти об'єм паралелепіпеда: $V = abc$. Тому варто помітити, що коли перемножити всі рівняння отриманої системи, то матимемо рівність: $a^2b^2c^2 = 80 \cdot 96 \cdot 120$. Звідки $V = \sqrt{a^2b^2c^2} = \sqrt{80 \cdot 96 \cdot 120} = \sqrt{96 \cdot 9600} = 96 \cdot 10 = 960$ см^3.

Ми встановили, що об’єм заданого паралелепіпеда становить 960 см^3, але за умовою задачі необхідно знайти об’єм у літрах. Враховуємо співвідношення одиниць об’ємів: 1л=1дм^3=1000 см^3, переведемо см^3 у дм^3. Отримаємо, що 960 см^3= $\frac{960}{1000}$ дм^3 = 0,96 дм^3 =0,96 л.

Відповідь: 0,96.

3.3. Завдання для самостійної роботи у форматі ЗНО

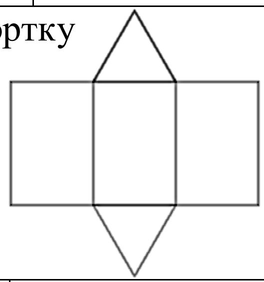
1. Яке з наведених чисел **може** відповідати кількості ребер призми?

А	Б	В	Г	Д
24	20	11	8	6

2. Яким числом **не може** бути кількість вершин призми?

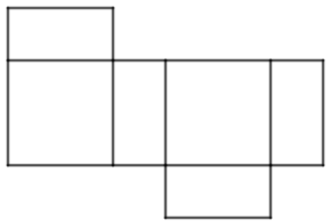
А	Б	В	Г	Д
6	8	9	12	20

3. (ЗНО, 2010 р.) На рисунку зображено розгортку многогранника. Визначте кількість його вершин.



А	Б	В	Г	Д
10	9	8	6	5

4. На рисунку зображено розгортку многогранника. Визначте кількість його ребер.



А	Б	В	Г	Д
6	12	8	18	19

5. Діагональ грані куба дорівнює 6 см, тоді площа повної поверхні куба…

А	Б	В	Г	Д
216 см^2	$54\sqrt{2}$ см^2	108 см^2	72 см^2	144 см^2

6. Визначте об’єм куба, якщо відомо, що діагональ куба дорівнює $\sqrt{27}$ см.

А	Б	В	Г	Д
$27\sqrt{3}$ см^3	54 см^3	18 см^3	$81\sqrt{3}$ см^3	27 см^3

7. Визначте діагональ прямокутного паралелепіпеда з вимірами 1м, 2 м та 3 м.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{14}$ м	$\sqrt{15}$ м	4 м	$\sqrt{11}$ м	$2\sqrt{3}$ м

8. Висоту призми збільшили в $\sqrt{3}$ разів. Як зміниться її об’єм?

А	Б	В	Г	Д
Збільшиться в 3 рази	Зменшиться в $3\sqrt{3}$ разів	Не зміниться	Збільшиться в $\sqrt{3}$ разів	Збільшиться в $3\sqrt{3}$ разів

9. Ребро першого куба дорівнює a см. Побудували другий куб із ребром, що дорівнює діагоналі грані першого куба. Встановіть, у скільки разів об’єм першого куба менший за об’єм другого куба.

А	Б	В	Г	Д
8	$2\sqrt{2}$	4	$\sqrt{2}$	2

10. В основі прямої призми лежить прямокутник зі сторонами $2\sqrt{2}$ см та 4 см, а висота призми дорівнює 5 см. Вкажіть синус кута нахилу діагоналі призми до площини основи.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{\sqrt{37}}$	$\frac{2\sqrt{6}}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{7}{5}$

11. (ЗНО, 2016 р.) Визначте об’єм правильної трикутної призми, бічні грані якої є квадратами, а периметр основи дорівнює 12.

А	Б	В	Г	Д
$16\sqrt{3}$	64	48	$64\sqrt{3}$	576

12. Чому дорівнює площа бічної поверхні прямої трикутної призми (**удм^2**), в основі якої лежить прямокутний трикутник з катетами 8 см і 15 см, а діагональ більшої бічної грані $17\sqrt{2}$ см.

А	Б	В	Г	Д
1020	680	10,2	6,8	0,68

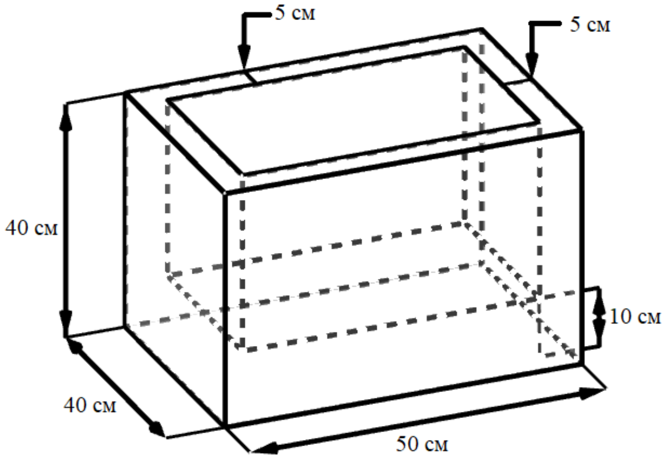
13. Кімната має розміри 6 м, 3 м, 2,5 м. Обчисліть площу стін, які треба обклеїти шпалерами, якщо площа вікна та дверей становить 20% площі стін.

А	Б	В	Г	Д
40,8 м^2	52,8 м^2	45 м^2	9 м^2	36 м^2

14. Яку **найменшу** кількість фарби (у кг) необхідно купити для пофарбування стін класу, розміри якого 6 м, 4 м, 3 м, а вікна та двері складають 30 % площі стін, якщо розхід фарби складає 1 кг на 5–5,2 м^2?

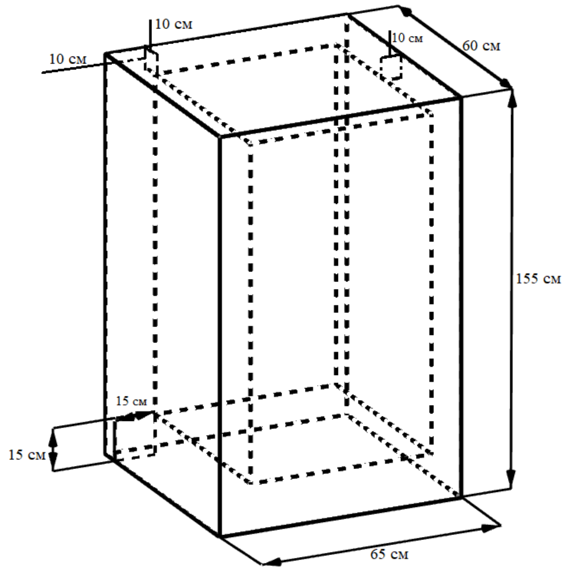
А	Б	В	Г	Д
7 кг	8 кг	9 кг	10 кг	Неможливо встановити

15. (ЗНО, 2014 р.) На площі міста встановили однакові бетонні ємності для квітів, виготовлені у формі прямокутних паралелепіпедів, виміри яких дорівнюють 40 см, 40 см і 50 см (див. рисунок). Товщина кожної з чотирьох бічних стінок становить 5 см, а товщина днища – 10 см. Який об'єм бетону (у м^3) було використано для виготовлення 10 таких ємностей? Утратами бетону під час виготовлення знехтуйте.



А	Б	В	Г	Д
0,32 м^3	0,33 м^3	0,36 м^3	0,44 м^3	0,8 м^3

16. Габарити вертикальної морозильної камери (ВхШхГ) 155х60х65 см (див. рис). Який її загальний об'єм у літрах, якщо товщина її дна і дверей 15 см, а товщина усіх інших стінок – 10 см.



А	Б	В	Г	Д
252 л	189 л	208 л	604,5 л	201,5 л

17. (ЗНО, 2010 р.) Цеглина має форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 25см, 12 см, 6,5 см. Знайти масу m цеглини. (для знаходження маси цеглини скористайтеся формулою $m = \rho V$, де V – об'єм, ρ =1,8 *г*/см^3 – густина цегли).

А	Б	В	Г	Д
5,31 *кг*	3,51 *кг*	3,5 *кг*	3,41 *кг*	3 *кг*

18. Периметр бічної грані правильної трикутної призми дорівнює 32 см. Визначте об'єм призми, якщо її висота – 10 см.

А	Б	В	Г	Д
$360\sqrt{3}$ см^3	180см^3	360см^3	$180\sqrt{3}$ см^3	$90\sqrt{3}$ см^3

19. (ЗНО, 2013 р.) Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а периметр її бічної грані – 22 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми.

А	Б	В	Г	Д
66 см^2	72 см^2	96 см^2	114 см^2	264 см^2

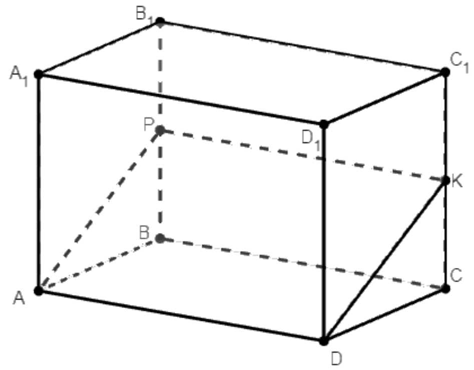
20. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція. Основи трапеції дорівнюють 4 см та 10 см, а бічна сторона – 5 см. Знайдіть повну поверхню призми, якщо її бічне ребро становить 12 см.

А	Б	В	Г	Д
288 см^2	316 см^2	336 см^2	344 см^2	360 см^2

21. В основі прямої призми з висотою $6\sqrt{3}$ см лежить паралелограм, площа якого становить $9\sqrt{3}$ см^2. Знайдіть площу повної поверхні призми, якщо гострий кут паралелограма – 60^o, а сторони відносяться як 1:2.

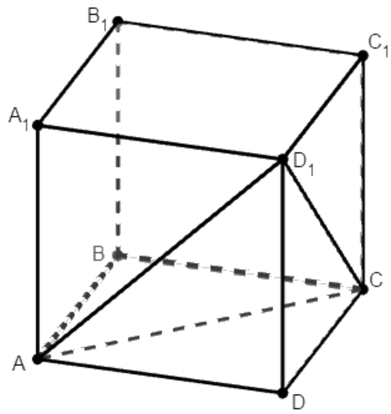
А	Б	В	Г	Д
$126\sqrt{3}$ см^2	$108\sqrt{3}$ см^2	$117\sqrt{3}$ см^2	126 см^2	108 см^2

22 . В прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели переріз так, що $PB=PB_1$ (див. рисунок). Знайдіть об’єм призми $APB_1A_1DKC_1D_1$, якщо об’єм паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 72 см^3.



А	Б	В	Г	Д
24 см^3	60 см^3	36 см^3	54 см^3	18 см^3

23. (ЗНО, 2009 р.) Об’єм куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 216 см^3 (див. рисунок). Обчисліть об’єм піраміди D_1ACD.



А	Б	В	Г	Д
108 см^3	72 см^3	36 см^3	54 см^3	27 см^3

24. Всі ребра правильної трикутної призми $ABCA_1B_1C_1$ дорівнюють 20 см. Визначте площу перерізу цієї призми, який проходить через точки C, M, N. Точки M та N –це точки на ребрах AA_1 та BB_1 відповідно, причому $A_1M:MA=B_1N:NB=1:3$.

А	Б	В	Г	Д
$100\sqrt{3}$ см^2	$50\sqrt{21}$ см^2	$50\sqrt{11}$ см^2	70 см^2	$100\sqrt{21}$ см^2

25. В основі прямої призми лежить рівнобедрений трикутник ABC, периметр якого становить 34 см, а основа $AB=16$ см. Переріз призми площиною проходить через ребро AB та точку K на ребрі CC_1, причому $C_1K:KC=1:2$. Визначте площу цього перерізу, якщо відомо, що бічне ребро призми дорівнює $6\sqrt{13}$ см.

А	Б	В	Г	Д
136 см^2	$8\sqrt{6}$ см^2	$8\sqrt{69}$ см^2	240 см^2	120см^2

26. Площа більшого діагонального перерізу прямого паралелепіпеда, в основі якого ромб, становить 60 см^2. Визначте висоту паралелепіпеда, якщо периметр ромба дорівнює $8\sqrt{3}$ см, а гострий кут 60°.

А	Б	В	Г	Д
10 см	$10\sqrt{3}$ см	6 см	12 см	$4\sqrt{3}$ см

27. Знайдіть площу діагонального перерізу прямокутного паралелепіпеда, якщо одна із сторін основи в 2,4 рази більша за другу, а її площа становить 60 см^2. Діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом 30°.

А	Б	В	Г	Д
$169\sqrt{3}$ см^2	$42\frac{1}{4}$ см^2	84,5 см^2	169 см^2	$\frac{169}{\sqrt{3}}$ см^2

28. Площа основи правильної трикутної призми дорівнює $9\sqrt{3}$ см^2. Встановіть відповідність між величинами (1–4) та їх числовими значеннями (А–Д), якщо відомо, що висота призми втричі більша за сторону основи.

1. Сторона основи призми (у см)
2. Бічне ребро призми (у см)
3. Площа бічної поверхні призми (у см^2)
4. Об’єм призми (у см^3)

А. 18
Б. $162\sqrt{3}$
В. 2
Г. 6
Д. 324

29. Басейн має форму прямокутного паралелепіпеда, розміри дна якого 45х20 м, а глибина – 2,5 м. Встановіть відповідність між задачами (1–4) та їх розв’язками (А–Д).

1. Який об’єм води (у м^3) вміщає наповнений доверху басейн?
2. За яку кількість часу (у год) басейн наповниться водою на висоту 2,4 м, якщо швидкість подачі води 9 м^3/хв?
3. Яку кількість облицювальної плитки витратили на облицювання стінок та днища басейну (у м^2)?
4. Яку площу має тент для накриття басейну, якщо його борти з усіх боків мають ширину 50 см, а басейн накривається разом із бортами (у м^2)?

А. 3,5
Б. 1225
В. 966
Г. 2250
Д. 4

30. Діагоналі граней прямокутного паралелепіпеда мають довжини 10 см, $4\sqrt{5}$ см та $6\sqrt{3}$ см. Визначте діагональ паралелепіпеда (у см).

31. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 28 см^2, 48 см^2, 84 см^2. Визначте довжину найдовшого ребра паралелепіпеда (**у м**).

32. В основі прямої призми – ромб. Площі діагональних перерізів дорівнюють 18 см^2 і 24 см^2. Чому рівна площа бічної поверхні призми (у см^2)?

33. Основа прямого паралелепіпеда – ромб із діагоналями 18 см та 24 см. Обчисліть площу повної поверхні паралелепіпеда **у дм^2**, якщо його більша діагональ дорівнює 26 см.

34. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ висота основи дорівнює бічному ребру. Знайдіть котангенс кута нахилу площини AKC до площини основи ABC, де точка K – середина ребра BB_1.

35. В основі прямої призми $ABCA_1B_1C_1$ лежить рівнобедрений трикутник ABC з бічною стороною 15 см. Бічна грань призми, що містить основу AB трикутника ABC, є квадратом з площею 324 см^2. Визначте тангенс кута нахилу площини ABC_1 до площини основи ABC.

36. **(ЗНО, 2012 р.)** Основою прямої призми $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є рівнобічна трапеція $ABCD$. Основа AD трапеції дорівнює висоті трапеції і в шість разів більша за основу BC. Через бічне ребро CC_1 призми проведено площину паралельно ребру AB. Визначте площу утвореного перерізу (у см^2), якщо об’єм призми дорівнює 672 см^3, а її висота – 8см.

37. **(ЗНО, 2007 р.)**Для опалювальної системи будинку необхідні радіатори із розрахунку: три одиниці на 50 м^3. Яку кількість одиниць радіаторів треба замовити, якщо новий будинок має форму прямокутного паралелепіпеда розміру 15 м х 18 м х 25 м?

3.4. Відповіді до завдань для самостійної роботи (Розділ III)

1. А	**2**. В	**3**. Г	**4**. Б	**5**. В	**6**. Д	**7**. А
8. Г	**9**. Б	**10**. Г	**11**. А	**12**. Г	**13**. Д	**14**. В
15. Г	**16**. В	**17**. Б	**18**. Д	**19**. В	**20**. Г	**21**. А
22. Г	**23**. В	**24**. Б	**25**. Д	**26**. А	**27**. Д	**28.1.**Г
28.2.А	**28.3.**Д	**28.4.**Б	**29.1.**Г	**29.2.**Д	**29.3.**Б	**29.4.**В
30. 12	**31.** 0,12	**32.** 60	**33.** 10,32	**34.** 2	**35.** 1,5	**36**. 104.
37.405						

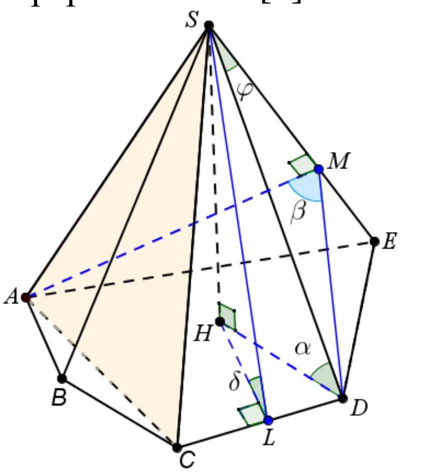
Розділ IV
Піраміда

Для актуалізації знань і вмінь,необхідних для оволодіння матеріалом про многогранники у даному розділі розглядаємо многогранники – піраміду і зрізану піраміду, їхні топологічні властивості (кількість ребер, вершин, граней, суму плоских кутів), розгортки, основні формули для обчислення площ поверхонь, об'ємів фігур; перерізи многогранників площиною.

4.1. Теоретичні відомості

ПІРАМІДА ТА ЇЇ ЕЛЕМЕНТИ

Пірамідою (n-кутною пірамідою) називають многогранник, одна грань якого – довільний n-кутник, а інші n граней – трикутники, що мають спільну вершину. Спільну вершину цих трикутників називають *вершиною* піраміди, протилежну їй грань – *основою*,а всі інші грані – *бічними гранями* піраміди. Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називають *бічними ребрами.* Перпендикуляр, опущений із вершини піраміди на площину її основи (або довжина цього перпендикуляра), називається *висотою* піраміди. Переріз піраміди площиною, яка проходить через бічне ребро і діагональ основи, називається *діагональним* перерізом. Трикутна піраміда діагональних перерізів не має [6].

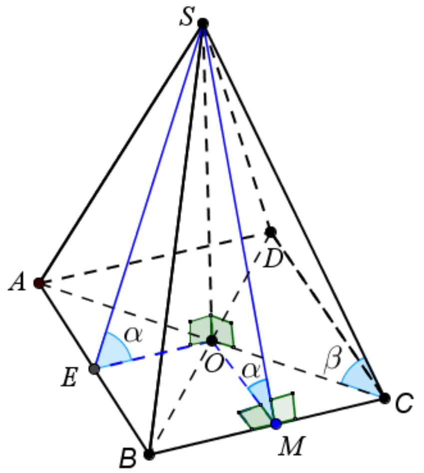


На рисунку зображено п'ятикутну піраміду: S – вершина піраміди, $ABCDE$ – основа піраміди; SAB, SBC, SCD, SDE,SEA– бічні грані; SA, SB, SC, SD, SE – бічні ребра, AB, BC, CD, DE, EA – ребра основи; SH – висота, SAC – діагональний переріз.

Кути: α – кут нахилу бічного ребра до площини основи, β – двогранний кут при бічному ребрі, δ – двогранний кут при ребрі основи, φ – плоский кут при вершині.

Сума усіх плоских кутів при вершині піраміди менша за 360°.

Піраміда називається *правильною*, якщо її основою є правильний многокутник, а основа висоти збігається з центром цього многокутника. Усі бічні ребра правильної піраміди рівні, усі бічні грані – рівні рівнобедрені трикутники. Висота бічної грані правильної піраміди, проведена з її вершини, називається *апофемою*[16].



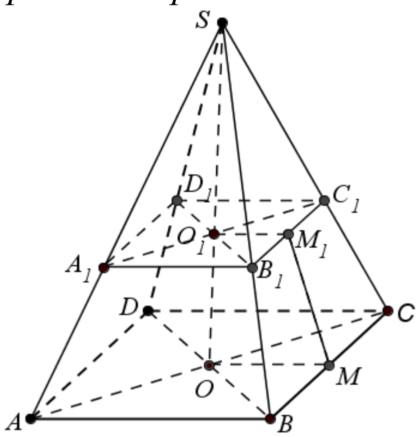
На рисунку зображено правильну чотирикутну піраміду $SABCD$: $ABCD$ – квадрат, O – центр квадрата, SO – висота піраміди, $OM \perp BC$, SM – апофема піраміди.

Усі бічні грані правильної піраміди нахилені до площини основи під однаковим кутом, рівним куту $\angle SMO=\alpha$; усі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під однаковим кутом, рівним куту $\angle SCO=\beta$.

$\beta < \alpha < 90^{\circ}$.

Довільну трикутну піраміду називають *тетраедром. Правильним тетраедром* називають правильну трикутну піраміду, у якої усі ребра однакові. Усі грані правильного тетраедра є рівними рівносторонніми трикутниками, кути при усіх ребрах однакові.

Якщо довільну піраміду перетнути площиною, яка паралельна до основи, то ця площина відітне від піраміди многогранник, у якого дві грані – подібні многокутники, а решта граней є трапеціями. Таку частину піраміди називають *зрізаною пірамідою*.



Паралельні грані зрізаної піраміди називаються її *основами*, а усі інші грані – *бічними* гранями. *Висота* зрізаної піраміди – це відстань між площинами її основ. Зрізану піраміду називають *правильною*, якщо вона отримана з правильної піраміди описаним вище шляхом. На рисунку $ABCDA_1B_1C_1D_1$– зрізана правильна чотирикутна піраміда, MM_1 – її апофема, OO_1 – висота.

ТОПОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ПІРАМІДИ

1) Для піраміди і зрізаної піраміди, як і для інших опуклих многогранників, виконується теорема Ейлера: сума кількості його вершин і кількості граней без урахування кількості його ребер дорівнює числу два: В+Г–Р=2.

2) Кількість вершин n-кутної піраміди дорівнює n+1, кількість ребер – $2\cdot n$ (бічних ребер – n, ребер основи – n), граней – n+1. Кількість вершин n-кутної зрізаної піраміди дорівнює $2\cdot n$, кількість ребер – $3\cdot n$ (бічних ребер – n, ребер основи – $2\cdot n$), граней – n+2 [21].

ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ ТА ОБ'ЄМІВ

Суму площ усіх бічних граней піраміди називають площею *бічної* поверхні піраміди. Щоб знайти площу всієї *поверхні* піраміди, треба до площі $S_{б.}$ її бічної поверхні додати площу $S_{ос.}$ основи: $S_{повн.} = S_{б.} + S_{ос.}$.

Площа *бічної поверхні правильної піраміди* дорівнює половині добутку периметра основи $P_{ос.}$ на апофему: $S_{б.} = \frac{1}{2} \cdot P_{ос.} \cdot l$, де l– апофема.

Якщо усі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом α, а площа основи дорівнює $S_{ос.}$, то площа *бічної поверхні піраміди* $S_{б.} = \frac{S_{ос.}}{\cos\alpha}$.

Об’єм піраміди дорівнює третині добутку площі основи $S_{ос.}$ на висоту h: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ос.} \cdot h$.

Площа *бічної поверхні зрізаної піраміди* дорівнює сумі площ її бічних граней, а площа *повної поверхні зрізаної піраміди* – сумі площ усіх її граней (тобто основ і бічних граней): $S_{повн.} = S_{б.} + S_{1ос.} + S_{2ос.}$.

Площа бічної поверхні *правильної* зрізаної піраміди дорівнює добутку півсуми периметрів основ на апофему: $S_{á.} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$, де P_1, P_2 – периметри основ, l – апофема.

Об’єм V *зрізаної піраміди*, висота якої h, а площі основ дорівнюють S_1 і S_2, обчислюється за формулою: $V_{zriz.} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2\right)$.

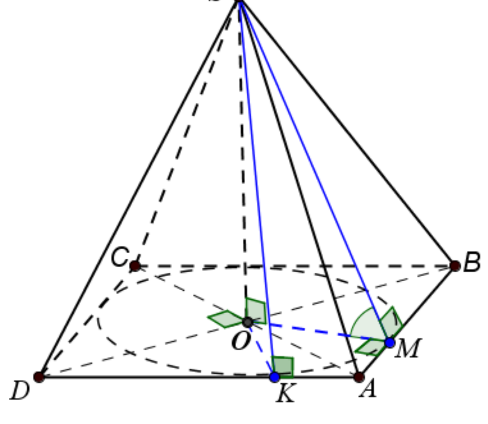
Зауважимо, що якщо усі бічні ребра піраміди рівні (або усі бічні ребра утворюють однакові кути з площиною основи або усі бічні ребра утворюють однакові кути з висотою піраміди), то вершина піраміди проектується у центр *вписаного* в основу кола; якщо ж усі двогранні кути при ребрах основи рівні або висота піраміди утворює однакові кути з бічними гранями, то вершина піраміди проектується у центр *описаного* навколо основи кола.

4.2. Приклади розв’язання задач

Проілюструємо основні теоретичні факти на прикладах.

Приклад 1. **(ЗНО, 2010 р., І сесія)**. Основою піраміди є ромб, гострий кут якого дорівнює 30^o. Усі бічні грані піраміди нахилені до площини її основи під кутом 60^o. Знайдіть площу бічної поверхні піраміди (у $см^2$), якщо радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює 3 см.

Розв’язання.



Оскільки усі бічні грані піраміди утворюють однакові кути з площиною основи, то вершина піраміди проектується в центр вписаного в основу кола. Нехай $SABCD$ – дана піраміда, її основа – ромб $ABCD$, $\angle ABC = 30^o$, точка O – перетин діагоналей, центр вписаного в ромб кола, проекція вершини піраміди S.

Опустимо з точки O перпендикуляри на AB, AD, отримаємо точки M і K (вони не є серединами AB і AD, бо маємо справу з ромбом, а не прямокутником чи квадратом !); $OM \perp AB$.

Маємо: SO – перпендикуляр до площини $ABCD$, проведений із точки S, AB – пряма площини, SM – похила до площини, OM – проекція похилої SM, яка перпендикулярна до прямої площини ($OM \perp AB$), а тому за ТТП похила SM також перпендикулярна до прямої площини, $SM \perp AB$. Маємо два перпендикуляри, поставлені до прямої AB у точці M, а тому за означенням кута між площинами маємо $\angle SMO = \angle(SAB; ABC) = 60^{o}$. Аналогічно, $\angle SKO = \angle(SAD; ABC) = 60^{o}$.

Похилі $SB=SD$, бо мають рівні проекції $OB=OD$, аналогічно, $SA=SC$, бо проекції $OA=OC$, і оскільки діагоналі ромба різні, $BD>AC$ ($\angle ABC=30^{o}$), то і $BO>AO$ (проекції похилих різні за довжиною), а тому і похилі $SB>SA$. Ще раз акцентуємо увагу школярів: трикутник SAB не є рівнобедреним, а тому його висота, проведена із вершини S не є медіаною, M не є серединою AB.

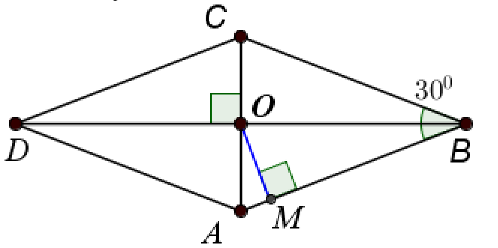
Трикутники SAB, SAD, SCB, SCD є рівними за трьома сторонами, а тому для відшукання площі бічної поверхні, достатньо знайти площу одного трикутника і помножити на чотири.

Розглянемо ΔSOM, $\angle SOM = 90^{o}$, $SM = OM/\cos 60^{o} = 6$ см, або: OM – катет навпроти кута 30^{o} ($\angle OSM = 30^{o}$), SM – гіпотенуза, вдвічі більша за катет; отже, маємо висоту ΔSAB, $SM = 6$ см.

У ромбі $ABCD$ відрізок OM є радіусом вписаного кола, а радіус вписаного кола дорівнює половині висоти ромба, звідки висота ромба дорівнює $h = 2r = 2 \cdot 3 = 6$ см. А тоді із співвідношення $h = a \cdot \sin ABC$, знаходимо сторону $a = h/\sin ABC = 6/\sin 30^{o} = 12$ см.

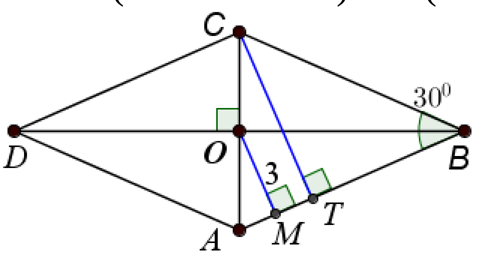
Площа однієї грані $S_{SAB} = ½ \cdot AB \cdot SM$, тобто $S_{SAB} = ½ \cdot 12 \cdot 6 = 36$ см^2, а тоді площа бічної поверхні $S = 4 \cdot S_{SAB} = 4 \cdot 36 = 144$см^2, маємо кінцевий результат.

Зауважимо, що найбільше проблем під час розв'язування цієї задачі



виникло у учнів при відшуканні сторони ромба, особливі проблеми виникли після поділу кута 30^{o} навпіл і отримання нетабличних значень кута:

1) ΔOBM, $\angle OMB = 90^{o}$, $\angle OBM = 15^{o}$, OM=3 см: $OB = OM/\sin OBM = 3/\sin 15^{o}$;
2) ΔAOB, $\angle AOB = 90^{o}$, $\angle OBA = 15^{o}$, OB відомо: $AB = OB/\cos OBA$;
$AB = 3/(\sin 15^{o} \cdot \cos 15^{o}) = 6/(2 \cdot \sin 15^{o} \cdot \cos 15^{o}) = 6/\sin 30^{o} = 12$ см.



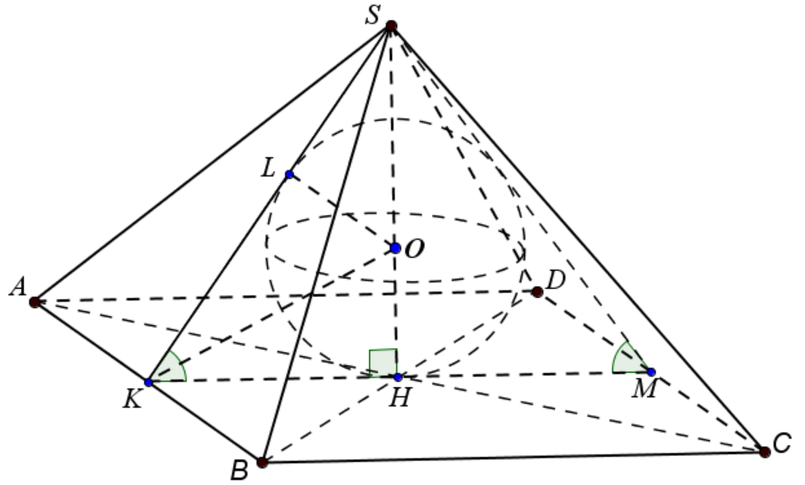
Розбираючи цю задачу з учнями, доцільно ще раз акцентувати їхню увагу на зв'язку радіуса вписаного кола, відрізка OM, і висоти ромба, відрізка CT: у трикутнику ACT

відрізок OM є середньою лінією, а тому CT=6 см. У трикутнику CTB відрізок CT є катетом, що лежить навпроти кута 30^o, а тому CB=12 см.

Відповідь: 144см^2.

Приклад 2. (ЗНО, 2015 р., додаткова сесія). Бічна грань правильної чотирикутної піраміди нахилена до площини основи під кутом 60^o. Визначте об’єм (у см^3) цієї піраміди, якщо радіус вписаної в неї кулі дорівнює 3 см.

Розв’язання.



Нехай $SABCD$ – дана правильна чотирикутна піраміда, її основа – квадрат $ABCD$, вершина S проектується в точку H перетину діагоналей квадрата, K, M – середини AB і CD, відповідно; $KH \perp AB$.

Маємо: SH – перпендикуляр до площини $ABCD$, проведений із точки S, AB – пряма площини, SK – похила до площини, KH – проекція похилої SK, яка перпендикулярна до прямої площини ($KH \perp AB$), а тому за ТТП похила SK також перпендикулярна до прямої площини, $SK \perp AB$. Маємо два перпендикуляри, поставлені до прямої AB у точці K, а тому за означенням кута між площинами маємо $\angle SKH = \angle(SAB; ABC)$.

Об’єм піраміди $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SH$. Куля дотикається до граней SAD і SBC (рівновіддалена від них), а тому центр кулі O лежить на бісекторі двогранного кута, утвореного цими площинами, тобто на KSM (можна міркувати інакше, наприклад, використовуючи симетрію правильної чотирикутної піраміди і кулі, KSM – площина симетрії для обох тіл). Аналогічно, розглянувши бісектор граней SAB і SCD, отримаємо, що O лежить на бісекторі двогранного кута, утвореного цими площинами. А тому центр кулі лежить на прямій перетину SH двох бісекторів. Можна розглядати бісектори інших двогранних кутів: SAB і SBC, SAB і SAD, SBC і SCD, SCD і SDA, усі вони перетинаються по SH.

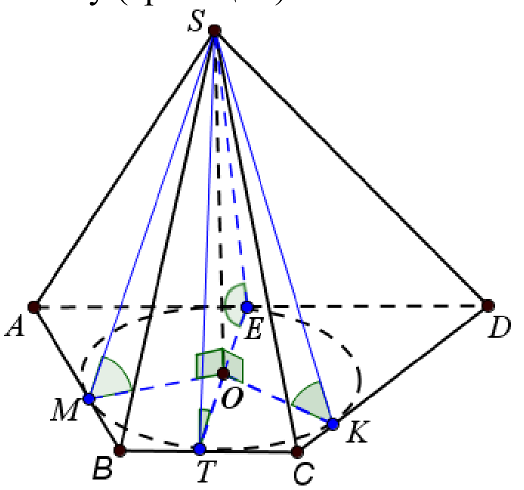
За умовою $\angle SKH = \angle SMH = 60^o$. Тоді $\angle SKM$ – рівносторонній, OH=3 см є радіусом вписаного кола в рівносторонній трикутник зі стороною KM; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, звідки $a = 2\sqrt{3} \cdot r$, або $a = 2\sqrt{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$ см. SH є висотою рівностороннього трикутника, а тому $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (або $h = 3r$), звідки отримаємо, що SH=9 см. Площа основи $S_{oc.} = a^2$, а тому $S_{oc.} = \left(6\sqrt{3}\right)^2 = 108$ см^2; об’єм $V = \frac{1}{3} \cdot 108 \cdot 9 = 324$ см^3.

Зауважимо, що можна було розглянути прямокутний ΔKHO: оскільки KO – бісектриса $\angle SKH$, то $\angle OKH=30^{\circ}$, $KH=OH\cdot\text{ctg }30^{\circ}=3\sqrt{3}$ см, а тоді сторона квадрата вдвічі більша, тобто $6\sqrt{3}$ см. З прямокутного трикутника SKH, $\angle SKH = 60^{\circ}$, $SH=KH\cdot\text{tg }60^{\circ}=3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=9$ см, отримаємо той самий результат, що і вище.

Відповідь: 324 см^3.

Приклад 3. Основа піраміди – трапеція, одна із бічних сторін якої дорівнює 17 см, а паралельні сторони дорівнюють 3 см і 24 см. Висота піраміди дорівнює 3 см, двогранні кути при ребрах основи рівні між собою. Визначте площу повної поверхні піраміди.

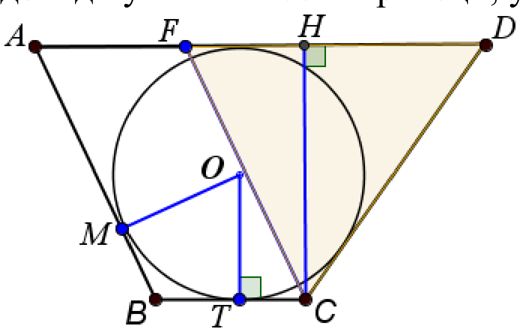
Розв’язання. Оскільки двогранні кути при ребрах основи рівні між собою, то вершина піраміди проектується в центр вписаного в основу кола, отже, в основу (трапецію) можна вписати коло.



Нехай $SABCD$ – дана чотирикутна піраміда, її основа – трапеція $ABCD$, $AD\|BC$, $AD=24$ см, $BC=3$ см, AB, CD – бічні сторони трапеції, $CD=17$ см; вершина S проектується в точку O, центр вписаного в трапецію кола, SO – висота піраміди, $SO=3$ см. Нехай OK, OT, OM, OE – перпендикуляри до сторін трапеції CD, BC, AB, AD, відповідно.

Тоді за ТТП SK, ST, SM, SE – перпендикуляри до сторін трапеції CD, BC, AB, AD, відповідно, тобто є висотами граней піраміди.

З умови $\angle SKO=\angle STO=\angle SMO=\angle SEO$; трикутники SKO, STO, SMO, SEO рівні як прямокутні трикутники з спільним катетом SO і рівним гострим кутом, а тому рівні гіпотенузи $SK=ST=SM=SE$. Висоти граней ми зможемо знайти, якщо попередньо знайдемо радіус вписаного в трапецію кола, а тому розглянемо трапецію $ABCD$, в неї можна вписати коло, а тому суми протилежних сторін рівні: $AD+BC=AB+CD$, звідки $AB=(24+3)-17=10$ см. Радіус вписаного в трапецію кола дорівнює половині висоти, а тому задача зводиться до відшукання висоти трапеції, у якої відомі усі сторони.



Використаємо паралельне перенесення сторони AB на вектор BC, отримаємо відрізок $FC\|AB$, $AFCB$ – паралелограм, а тому $FC=AB=10$ см, $AF=BC=3$ см, відрізок $FD=AD-AF=24-3=21$ см.

Висота трапеції дорівнює висоті ΔFCD, проведеній до сторони FD. Для відшукання висоти трикутника використаємо метод площ: півпериметр $p=\dfrac{10+17+21}{2}=24$ см, площа за формулою Герона

$$S=\sqrt{24\cdot(24-10)(24-17)(24-21)}=\sqrt{24\cdot14\cdot7\cdot3}=\sqrt{(\underline{\underline{4}}\cdot\underline{\underline{2}}\cdot3)(\underline{\underline{2}}\cdot\underline{7})\cdot\underline{7}\cdot3}=7\cdot4\cdot3=84\text{ см}^2,$$

висота трикутника $h=CH=\dfrac{2S}{FD}=\dfrac{2\cdot84}{21}=2\cdot4=8$ см. Висота трапеції $h=8$ см, можемо знаходити площу основи: $S=\dfrac{a+b}{2}\cdot h,\ S_{oc.}=\dfrac{3+24}{2}\cdot8=27\cdot4=108$ см^2.

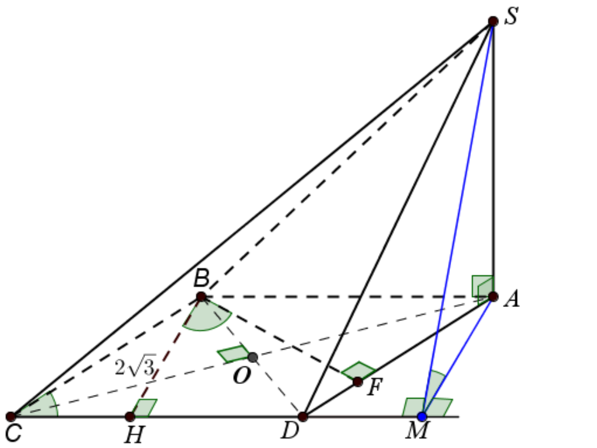
Висота трапеції h = 8 см, радіус вписаного кола OT = 4 см. З прямокутного трикутника STO за катетами SO=3 см, OT =4 см, знаходимо гіпотенузу ST=5 см. Маємо висоти граней, можемо шукати площі бічних граней: $S_{SAB}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot SM$, $S_{SBC}=\dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot ST$, $S_{SCD}=\dfrac{1}{2}\cdot CD\cdot SK$, $S_{SAD}=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot SE$. Сума площ дасть площу бічної поверхні: $S_{b.}=\dfrac{1}{2}\cdot(AB+BC+CD+DA)\cdot SM$, $S_{b.}=\dfrac{1}{2}\cdot P_{oc.}\cdot SM$, $S_{b.}=\dfrac{1}{2}\cdot54\cdot5=135$ см^2. А тому площа повної поверхні є сумою $S_{n.}=108+135=243$ см^2.

Зауважимо, що косинус кута при **<u>усіх</u>** ребрах основи дорівнює $\cos SMO=\dfrac{OM}{SM}=\dfrac{4}{5}$, а тому відношення площі основи до площі бічної поверхні $\dfrac{S_{oc.}}{S_{b.}}=\dfrac{4}{5}$, тобто $S_{b.}=\dfrac{5}{4}\cdot S_{oc.}=\dfrac{5}{4}\cdot108=135$ см^2 (маємо той же результат).

Відповідь: 243 см^2.

Приклад 4. Основа чотирикутної піраміди – ромб, висота якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а кут між висотами, проведеними із вершини тупого кута, – 60°. Дві суміжні бічні грані піраміди перпендикулярні до площини основи і утворюють між собою гострий кут, а дві інші бічні грані нахилені до основи під кутом 30°. Визначте площу бічної поверхні піраміди (у см^2).

Розв’язання.



Нехай $SABCD$ – дана чотирикутна піраміда, її основа – ромб $ABCD$, $\angle A$ – гострий, BF і BH – висоти, проведені з вершини тупого кута ромба, $\angle HBF$=60°, BF=$2\sqrt{3}$ см. Грані SAB, SAD перпендикулярні до основи, а грані SCB, SCD нахилені до основи під кутом 30°. Оскільки дві бічні грані перпендикулярні до основи, то і лінія їхнього перетину також перпендикулярна до основи, тобто SA – висота піраміди. Тоді кут між перпендикулярними бічними гранями SAB і SAD є $\angle BAD$, а він є гострим кутом ромба (умова задачі виконується). Укажемо кути нахилу (вони однакові) двох граней SCB і SCD до площини основи. Опустимо із точки A перпендикуляр AM до прямої CD, $AM \parallel BH$, маємо: SA – перпендикуляр до площини $ABCD$, проведений із точки S, CD – пряма площини, SM – похила до площини, AM – проекція похилої SM, яка перпендикулярна до прямої площини ($AM\perp CD$), а тому за ТТП похила SM також перпендикулярна до прямої площини, $SM\perp CD$. Маємо два перпендикуляри, поставлені до прямої CD у точці M, а тому за означенням кута між площинами маємо $\angle SMA=\angle(SCD; ABC)=30^o$.

Як відомо, кут між висотами паралелограма, дорівнює одному із кутів паралелограма (кут між висотами, проведеними із вершини тупого кута, дорівнює гострому куту паралелограма; кут між висотами, проведеними із вершини гострого кута, дорівнює тупому куту паралелограма), для обґрунтування достатньо розглянути, наприклад, чотирикутник $HBFD$ і обчислити суму його кутів, а тому $\angle A=\angle C=60^o$.

Прямокутні трикутники SAB, SAD рівні за двома катетами, а тому $SB=SD$. Трикутники SBC, SDC рівні за трьома сторонами, а тому для відшукання площі бічної поверхні достатньо знайти площі двох граней SAD і SCD і помножити на два. З прямокутних трикутників знайдемо необхідні елементи:

1) ΔCBH, $\angle H=90°$, $\angle C=60°$, $BH=2\sqrt{3}$ см: $CB=\dfrac{BH}{\sin 60^o}=2\sqrt{3}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4$ см;

2) ΔSAM, $\angle A=90°$, $\angle M=30°$, $AM=2\sqrt{3}$ см: $SA=AM\cdot tg30^o=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=2$ см; $SM=\dfrac{AM}{\cos 30^o}=2\sqrt{3}:\dfrac{\sqrt{3}}{2}=4$ см (або використовуємо факт, що SA – катет, що лежить навпроти кута 30°, а SM – гіпотенуза);

3) ΔSAD, $\angle A=90°$, $AD=4$ см, $AS=2$ см, $S_1=S_{SAD}=\dfrac{1}{2}\cdot AD\cdot AS=4$ см;

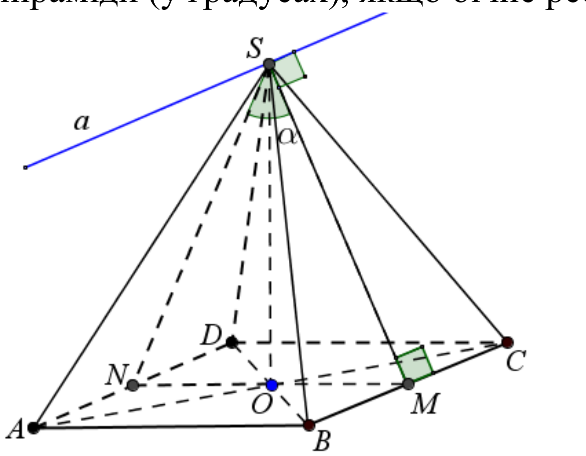
4) ΔSCD, $CD=4$ см, SM – висота, $SM=4$ см, $S_2=S_{SCD}=\dfrac{1}{2}\cdot CD\cdot SM=8$ см;

5) Тоді бічна поверхня $S_{b.}=2\cdot(S_1+S_2)=2\cdot(4+8)=24$ см^2.

Відповідь: 24 см^2.

Приклад 5. а) Визначте двогранний кут α між несуміжними бічними гранями правильної чотирикутної піраміди (у градусах), якщо сторона основи дорівнює $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ см, а апофема – 1 см;

б) Визначте двогранний кут α при бічному ребрі правильної шестикутної піраміди (у градусах), якщо бічне ребро дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а апофема – 3 см.



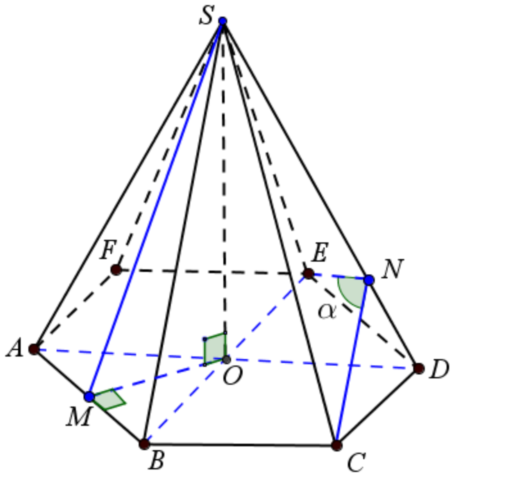
Розв'язання.

а) Визначимо кут між несуміжними бічними гранями ASD і BSC; ці грані мають спільну точку S, а тому перетинаються по прямій a, яка проходить через цю точку. Оскільки ці грані містять паралельні прямі $AD\|BC$, $AD\subset ASD$ і $BC\subset BSC$, то пряма $a\|AD\|BC$.

Опустимо у кожній із граней перпендикуляр на пряму a, для цього досить опустити перпендикуляри на прямі AD і BC: $SM\perp BC \to SM\perp a$; аналогічно $SN\perp AD \to SM\perp a$; $\angle NSM=\alpha$ – шуканий. Трикутник NSM – рівнобедрений, а тому, знаючи апофему і сторону основи, можна знайти синус $\angle OSM$, а потім – кут α дорівнює $2\angle OSM$, проте обчислення будуть досить громіздкими, зважаючи на умову. Тому застосуємо універсальний прийом – теорему косинусів для трикутника NSM: $\cos\alpha=\dfrac{SN^2+SM^2-NM^2}{2\cdot SN\cdot SM}$, звідки

$$\cos\alpha=\frac{1^2+1^2-\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2}{2\cdot 1\cdot 1}=\frac{2-\left(2-\sqrt{3}\right)}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\alpha=30^o.$$

б) Виконаємо рисунок до задачі.



Зобразимо правильну шестикутну піраміду $SABCDEF$, SM – апофема, нехай $CN\perp SD$, $\angle CNE=\alpha$ – шуканий кут при бічному ребрі SD.

Для відшукання висоти CN трикутника SCD, використаємо універсальний метод – метод площ.

У нас є бічне ребро і апофема, знайдемо сторону основи.

З прямокутного трикутника SMB: $MB=\sqrt{SB^2-SM^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-3^2}=\sqrt{3}$ см; тоді $AB=2\cdot MB=2\sqrt{3}$ см, тобто сторона основи дорівнює бічному ребру. Трикутник SAB – рівносторонній, плоский кут при вершині 60^o, а тоді сума усіх плоских кутів дорівнює $6\cdot 60^o=360^o$, неможливо, правильна шестикутна піраміда з такими даними для бічного ребра і апофеми не існує. Зауважимо, що ми могли не звернути увагу на суму плоских кутів при вершині, проте обчисливши CN і EN(висоти рівних рівносторонніх трикутників: $CN=EN=\dfrac{AB\cdot\sqrt{3}}{2}=a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$) та EC – менша діагональ шестикутника (вона дорівнює $EC=a\cdot\sqrt{3}$), отримали б$EC=CN+NE$, трикутник CNE не існує, кут $CNE=180^o$, а це можливо лише тоді, коли точка N лежить на прямій EC, тобто точки N, а тому і S, лежать в площині основи, а тому піраміда не існує.

Відповідь: а) 60^o; б) піраміда не існує, кут обчислити не можна.

Акцентуємо увагу учнів на необхідності уважно вивчати умову задачі, особливо, якщо серед відповідей є такі, як отримали ми в задачі, або, наприклад, такі: трикутник не існує, площу обчислити не можна.

4.3. Завдання для самостійної роботи у форматі ЗНО.

1. Яке з наведених чисел **<u>може</u>** відповідати кількості ребер піраміди?

А	Б	В	Г	Д
8	9	11	15	23

2. Скільки ребер має піраміда, у якої 15 вершин?

А	Б	В	Г	Д
14	15	16	17	28

3. Скільки вершин має піраміда, у якої кількість ребер на 8 більша від кількості граней?

А	Б	В	Г	Д
8	9	10	15	18

4. Яке з наведених чисел **<u>може</u>** відповідати кількості ребер зрізаної піраміди?

А	Б	В	Г	Д
6	8	11	16	21

5. Скільки вершин має зрізана піраміда, у якої 6 граней?

А	Б	В	Г	Д
6	7	8	10	12

6. Скільки граней має зрізана піраміда, у якої кількість ребер на 8 більша від кількості вершин?

А	Б	В	Г	Д
7	8	9	10	11

7. Чому дорівнює сума <u>усіх</u> плоских кутів п’ятикутної піраміди?

А	Б	В	Г	Д
540^o	720^o	900^o	1080^o	1440^o

8. Чому дорівнює сума <u>усіх</u> плоских кутів зрізаної шестикутної піраміди?

А	Б	В	Г	Д
1440^o	2160^o	2880^o	3600^o	4320^o

9. (ЗНО, 2012 р., ІІ сесія). Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, а бічне ребро – 5 см. Визначте косинус кута між бічним ребром і площиною основи.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{4}$

10. У скільки разів збільшиться площа бічної поверхні правильної п’ятикутної піраміди, якщо піраміда залишиться правильною, а сторони її основи збільшити у 3 рази, а апофему – у 2 рази?

А	Б	В	Г	Д
у 1,5 рази	у 2 рази	у 3 рази	у 5 разів	у 6 разів

11. Визначте сторону основи правильної чотирикутної піраміди, якщо її бічне ребро утворює з площиною основи кут 45^{o}, а площа діагонального перерізу дорівнює 50 см^2.

А	Б	В	Г	Д
5 см	$5\sqrt{2}$ см	10 см	$10\sqrt{2}$ см	15 см

12. (ЗНО, 2015 р.). Висота правильної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, а сторона її основи – 12 см. Знайдіть довжину бічного ребра піраміди.

А	Б	В	Г	Д
6 см	$3\sqrt{5}$ см	$5\sqrt{3}$ см	9 см	15 см

13. Визначте апофему правильної чотирикутної піраміди, площа основи якої дорівнює S, а бічна грань утворює з основою кут β.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{S}}{2}\cdot\cos\beta$	$\frac{\sqrt{S}}{2\cdot\cos\beta}$	$\frac{\sqrt{S}}{2\cdot\sin\beta}$	$\frac{\sqrt{S}}{2}\cdot\sin\beta$	$\frac{\sqrt{S}}{\cos\beta}$

14. Визначте висоту трикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутний трикутник з катетами a і b, а об’єм цієї піраміди дорівнює V.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3V}{2ab}$	$\frac{2ab}{V}$	$\frac{3V}{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{3V}{ab}$	$\frac{6V}{ab}$

15. (ЗНО, 2017 р.). Периметр основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 72 см. Визначте довжину висоти піраміди, якщо її апофема дорівнює 15 см.

А	Б	В	Г	Д
6 см	9 см	10 см	12 см	14 см

16. (ЗНО, 2017 р., додаткова сесія). Визначте площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, довжина сторони основи якої дорівнює 10 см, а довжина бічного ребра – 13 см.

А	Б	В	Г	Д
180 см^2	$15\sqrt{69}$ см^2	$30\sqrt{69}$ см^2	360 см^2	390 см^2

17. Визначте площу бічної поверхні правильної п’ятикутної піраміди, бічне ребро якої дорівнює 4 дм та утворює 30^{o} з апофемою.

А	Б	В	Г	Д
20 дм^2	$20\sqrt{3}$ дм^2	32 дм^2	40 дм^2	$40\sqrt{3}$ дм^2

18. Визначте площу бічної поверхні правильної трикутної піраміди, апофема якої дорівнює $2\sqrt{3}$ см, а радіус кола, вписаного в її основу, дорівнює 2 см.

А	Б	В	Г	Д
$12\sqrt{3}$ см^2	24 см^2	36 см^2	$12\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)$см^2	72 см^2

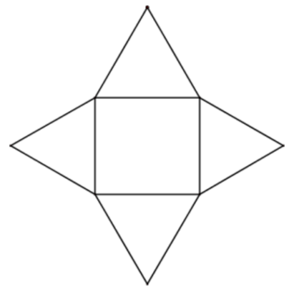
19. Визначте площу повної поверхні правильної трикутної піраміди (у см^2), плоский кут при вершині якої дорівнює 90^o, а бічне ребро дорівнює 6 см.

А	Б	В	Г	Д
$18\sqrt{3}$	54	108	$18\cdot\left(3+\sqrt{3}\right)$	$18\cdot\left(6+\sqrt{3}\right)$

20. У правильній трикутній піраміді висота дорівнює $\sqrt{6}$ см, а проекція апофеми на основу дорівнює $\sqrt{3}$ см. Знайдіть бічну поверхню піраміди.

А	Б	В	Г	Д
$4{,}5\sqrt{2}$ см^2	9 см^2	$9\sqrt{3}$ см^2	18 см^2	27 см^2

21. (ЗНО, 2014 р.). На рисунку зображено розгортку піраміди, що складається з квадрата, сторона якого дорівнює 10 см, і чотирьох правильних трикутників. Визначте площу бічної поверхні цієї піраміди (у см^2).



А	Б	В	Г	Д
$100\sqrt{3}$	100	$400\sqrt{3}$	$100\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)$	200

22. (ЗНО, 2007 р.). Апофема правильної чотирикутної піраміди дорівнює $2\sqrt{3}$ см і нахилена під кутом 60^o до площини основи. Знайдіть об'єм піраміди.

А	Б	В	Г	Д
9 см^3	12 см^3	$12\sqrt{3}$ см^3	36 см^3	$36\sqrt{3}$ см^3

23. Як зміниться об'єм піраміди, якщо її висоту збільшити у два рази?

А	Б	В	Г	Д
Зменшиться у вісім разів	Не зміниться	Збільшиться у два рази	Збільшиться у чотири рази	Збільшиться у вісім разів

24. Кожну сторону **основи** правильної піраміди збільшили у два рази так, що піраміда лишилася правильною. Як зміниться її об'єм?

А	Б	В	Г	Д
Зменшиться у вісім разів	Не зміниться	Збільшиться у два рази	Збільшиться у чотири рази	Збільшиться у вісім разів

25. Через середину висоти піраміди провели площину, паралельно до її основи. Визначте об'єм зрізаної піраміди, яка при цьому утворилася, якщо об'єм початкової піраміди дорівнює 16 см^3.

А	Б	В	Г	Д
2 см^3	6 см^3	8 см^3	12 см^3	14 см^3

26. Через середину висоти піраміди провели площину, паралельно до її основи. Визначте площу перерізу, якщо площа основи дорівнює 18 см^2.

А	Б	В	Г	Д
2,25 см^2	4,5 см^2	6 см^2	9 см^2	12 см^2

27. Визначте об'єм трикутної піраміди, бічні ребра якої дорівнюють 3 см, 4 см, 5 см, а усі плоскі кути при вершині – прямі.

А	Б	В	Г	Д
5 см^3	$\sqrt{41}$ см^3	$4/3\cdot\sqrt{34}$ см^3	10 см^3	20 см^3

28. Визначте об'єм трикутної піраміди, бічні грані якої взаємно перпендикулярні, а площі цих граней дорівнюють 2 см^2, 3 см^2, 12 см^2.

А	Б	В	Г	Д
4 см^3	6 см^3	$2\sqrt{17}$ см^3	12 см^3	24 см^3

29. Визначте об'єм правильної шестикутної піраміди, якщо висота піраміди дорівнює $\sqrt{3}$ см, а радіус **описаного** навколо основи кола – 2см.

А	Б	В	Г	Д
1 см^3	2 см^3	$2\sqrt{3}$ см^3	4 см^3	6 см^3

30. Визначте об'єм чотирикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутник зі сторонами 2 см і 24 см, а усі бічні ребра піраміди дорівнюють 17 см.

А	Б	В	Г	Д
192 см^3	272 см^3	$26\sqrt{145}$ см^3	408 см^3	576 см^3

31. Визначте об'єм правильної чотирикутної піраміди, якщо її діагональним перерізом є рівносторонній трикутник зі стороною $2\sqrt{3}$ см.

А	Б	В	Г	Д
3 см^3	$3\sqrt{3}$ см^3	6 см^3	$6\sqrt{3}$ см^3	18 см^3

32. Визначте площу перерізу (у см^2), проведеного у правильній трикутній піраміді через середини двох бічних ребер паралельно висоті піраміди, якщо бічне ребро піраміди дорівнює 13 см, а висота – 11 см.

А	Б	В	Г	Д
44	39	$33\sqrt{3}$	$44\sqrt{3}$	143

33. Визначте площу перерізу, проведеного у правильній чотирикутній піраміді через середини двох суміжних бічних ребер паралельно висоті піраміди, якщо бічне ребро піраміди дорівнює 11 см, а сторона основи –12 см.

А	Б	В	Г	Д
21 см^2	31,5 см^2	$21\sqrt{2}$ см^2	$6\sqrt{85}$ см^2	132 см^2

34. Визначте найменше бічне ребро чотирикутної піраміди, в основі якої лежить прямокутник, дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а інші бічні ребра дорівнюють 8 см, 9 см, 12 см.

А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	$\sqrt{17}$ см	$3\sqrt{4}$ см	$4\sqrt{5}$ см

35. Установіть відповідність між пірамідами (1–5) та числовими значеннями об'ємів цих пірамід (А–Е):

Фігура

1. Правильна трикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює 6 м, а висота – $5\sqrt{3}$ м.
2. Правильна чотирикутна піраміда, апофема якої дорівнює 5 м, а висота – 4 м.
3. Правильна шестикутна піраміда, сторона основи якої дорівнює $3\cdot\sqrt[4]{3}$ м, а висота – 3 м.
4. Правильна трикутна зрізана піраміда, сторони основи якої дорівнюють 2 м і 4 м, а висота – $6\sqrt{3}$ м.
5. Правильна чотирикутна зрізана піраміда, сторони основи якої дорівнюють 1 м і 6 м, а висота – 3 м.

Об'єм фігури (у м^3)

А. 40,5
Б. 42
В. 43
Г. 45
Д. 48
Е. $28\sqrt{3}$

36. Основою піраміди є прямокутник, а її бічні ребра утворюють однакові кути з площиною основи. Висота піраміди дорівнює 15 см, а проекції висот бічних граней дорівнюють 12 см і 16 см. Установіть відповідність між відрізками (1–5) та їхніми довжинами (А–Е):

Відрізок

1. Менша сторона основи дорівнює
2. Більша сторона основи дорівнює
3. Діагональ основи дорівнює
4. Проекція бічного ребра на основу дорівнює
5. Бічне ребро дорівнює

Довжина (у см)

А. $3\sqrt{41}$
Б. 20
В. 24
Г. 25
Д. 32
Е. 40

37. В основі піраміди лежить прямокутник зі сторонами 18 м і 24 м. Проекції бічних ребер піраміди рівні між собою. Висота піраміди дорівнює 8 м. Установіть відповідність між початком речення (1–5) та його продовженням (А–Е) так, щоб утворилося правильне твердження:

Початок речення

1. Котангенс кута нахилу бічної грані, що проходить через меншу сторону основи, до площини основи дорівнює
2. Котангенс кута нахилу бічної грані, що проходить через більшу сторону основи, до площини основи дорівнює
3. Проекція бічного ребра на площину основи (у м) дорівнює
4. Бічне ребро (у м) дорівнює
5. Котангенс кута нахилу бічної ребра до основи дорівнює

Продовження

А. 1,125
Б. 1,5
В. 1,875
Г. 15
Д. 17
Е. 30

38. Для кожного випадку (1–4) виберіть продовження (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження для правильної чотирикутної піраміди, у якої *a*

– сторона основи, b – бічне ребро, h – висота піраміди, l – апофема. Визначте двогранний **кут** α між несуміжними бічними гранями піраміди.

Початок речення	**Кут**
1. Сторона основи a=2 см, а висота h =1 см. Тоді кут α	**А**. 120^{o}
2. Сторона основи $a=\sqrt{3}$ см, а апофема l =1 см. Тоді кут α	**Б**. 90^{o}
3. Бічне ребро $b=\sqrt{5}$ см, сторона основи a =2 см. Тоді кут α	**В**. $2\mathrm{arctg}\sqrt{3}$
4. Бічне ребро $b=\sqrt{2}$ см, а апофема l =1 см.	**Г**. 60^{o}
	Д. не існує піраміди

39. Сторона основи правильної чотирикутної піраміди дорівнює 6, а висота 4.

1) Визначте площу **повної** поверхні піраміди.

2) Визначте відношення площі **бічної** поверхні піраміди до її об'єму.

40. В основі піраміди лежить прямокутник зі сторонами 2 м і 4 м, а усі бічні ребра піраміди дорівнюють 3 м.

1) Визначте двогранний кут (у градусах) при меншому ребрі основи.

2) Визначте більший з кутів (у градусах) між несуміжними бічними гранями.

41. В основі піраміди лежить паралелограм зі сторонами 1м і 9м та кутом 60^{o} між ними, вершина піраміди проектується в точку перетину діагоналей паралелограма. Визначте площу бічної поверхні S піраміди (у $м^2$), якщо висота **меншої** бічної грані $\frac{13\sqrt{2}}{4}$ м. У відповідь запишіть $\sqrt{2}\cdot S$.

42. Визначте повну поверхню правильної чотирикутної зрізаної піраміди (у $дм^2$), сторони основ якої дорівнюють 4 дм і 14 дм, а висота – 12 дм.

43. Сторони основ правильної трикутної зрізаної піраміди дорівнюють 6 см і 18 см. Бічна грань утворює з більшою основою кут 60^{o}. Визначте відношення площі бічної поверхні зрізаної піраміди до суми площ основ.

44. Визначте найбільше бічне ребро чотирикутної піраміди (у см), в основі якої лежить прямокутник, дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а менші бічні ребра дорівнюють 3 см, 7 см, 9 см.

45. Визначте площу повної поверхні чотирикутної піраміди (у **$дм^2$**), в основі якої лежить прямокутник, дві бічні грані піраміди перпендикулярні до основи, а менші бічні ребра дорівнюють 12 см, 13 см, 20 см.

46. Визначте об'єм піраміди (у $см^3$), в основі якої лежить рівнобедрений прямокутний трикутник з гіпотенузою $\sqrt{3}$ см. Бічна грань піраміди, що містить гіпотенузу, перпендикулярна до основи, а бічне ребро, що не належить цій грані, нахилене до основи під кутом 60^{o}.

47. На висоті *SO* піраміди *SABCDE* відмітили точку *N* так, що *SN*:*NO*=2:3, і провели через неї площину, паралельну до основи, яка перетнула бічні ребра *SA*, *SB*, *SC*, *SD*, *SE* у точках *A′*, *B′*, *C′*, *D′*, *E′*, відповідно. Обчисліть об’єм (у $см^3$) піраміди *OA′B′C′D′E′*, якщо сума об’ємів цієї і даної пірамід дорівнює 274 $см^3$.

4.4. Відповіді до завдань для самостійної роботи (Розділ IV)

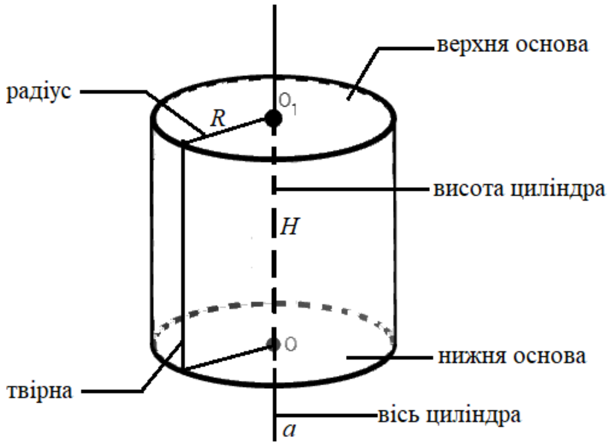
1. А	**2.** Д	**3.** В	**4.** Д	**5.** В	**6.** Г	**7.** Д
8. Г	**9.** Б	**10.** Д	**11.** В	**12.** Г	**13.** Б	**14.** Д
15. Г	**16.** А	**17.** Б	**18.** В	**19.** Г	**20.** Д	**21.** А
22. Б	**23.** В	**24.** Г	**25.** Д	**26.** Б	**27.** Г	**28.** А
29. Д	**30.** А	**31.** В	**32.** А	**33.** Б	**34.** А	**35.1.** Г
35.2. Д	**35.3.** А	**35.4.** Б	**35.5.** В	**36.1.** В	**36.2.** Д	**36.3.** Е
36.4. Б	**36.5.** Г	**37.1.** Б	**37.2.** А	**37.3.** Г	**37.4.** Д	**37.5.** В
38.1. Б	**38.2.** А	**38.3.** Г	**38.4.** Д	**39.1.** 96	**39.2.** 1,25	**40.1.** 45
40.2. 90	**41.** 38	**42.** 680	**43.** 1,6	**44.** 11	**45.** 3,6	**46.** 0,375
47. 24						

Розділ V
Циліндр

Для формування поняття одного з тіл обертання – циліндра, пригадуємо його означення та структурні елементи, формули для обчислення площі бічної та повної поверхні циліндра, а також його об'єму, розв'язуємо задачі на метричні співвідношення у циліндрі. Розглядаємо задачі з перерізами циліндрів та комбінацією геометричних тіл, одне з яких є циліндром.

5.1. Теоретичні відомості

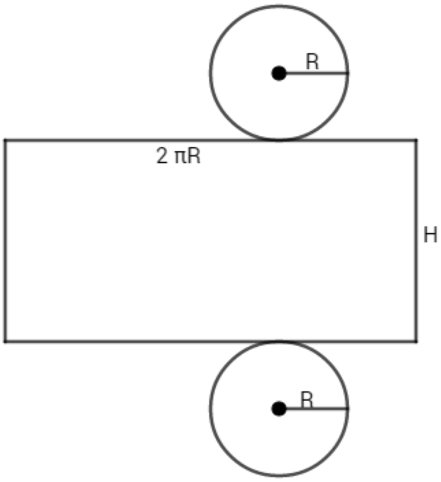
ОЗНАЧЕННЯ ЦИЛІНДРА ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ



Циліндром називається тіло, утворене обертанням прямокутника навколо однієї із сторін.

Циліндр складається з двох основ – рівних кругів та бічної поверхні. Радіуси основи є *радіусом* циліндра *R*. Відрізки, що сполучають відповідні точки кіл основ, називаються *твірними* циліндра. Множина усіх твірних утворює *бічну поверхню* циліндра. Пряма *a* – *вісь* симетрії циліндра, проходить через центри основ. Твірна і вісь циліндра перпендикулярні до площин основ. Відстань між площинами основ є *висотою* циліндра *H*[20].

РОЗГОРТКА ЦИЛІНДРА



Розгорткою циліндра є два рівні круги та прямокутник. Одна сторона прямокутника – це висота циліндра, а друга – це довжина кола основи.

Круги – це основи циліндра. Прямокутник – це бічна поверхня, розрізана по одній із твірних.

ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ ТА ОБ'ЄМУ

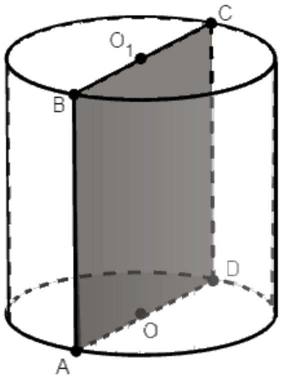
Площа бічної поверхні: $S_б = 2\pi RH$, де R – радіус циліндра, H – висота.

Площа повної поверхні: $S_п = S_б + 2S_о$, де $S_о$ – площа основи.

$$S_п = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H+R).$$

Об'єм призми: $V = S_о \cdot H \Rightarrow V = \pi R^2 H$ [18].

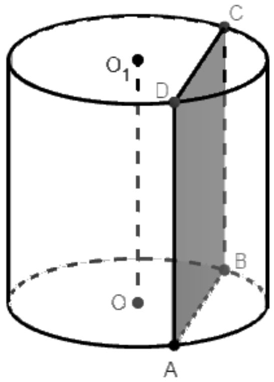
ПЕРЕРІЗИ ЦИЛІНДРА ПЛОЩИНОЮ



Осьовий переріз циліндра – це переріз, який проходить через його вісь.

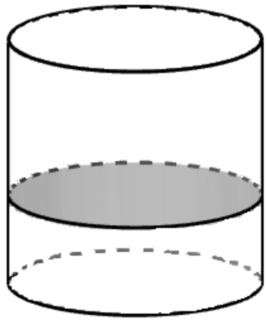
Осьовим перерізом є прямокутник, одна сторона якого дорівнює висоті циліндра, а друга – діаметру його основи.

Всі осьові перерізи циліндра рівні між собою.



Переріз циліндра площиною, паралельною до вісі циліндра, є прямокутник. Дві сторони цього прямокутника є твірними циліндра, а дві інші – хордами його основ.

Зауважимо, що якщо відстань від площини перерізу до вісі циліндра дорівнює радіусу циліндра R, то площина перерізу займає положення дотичної до циліндра площини.



Переріз циліндра площиною, паралельною до його основ, є круг, що дорівнює основам циліндра.

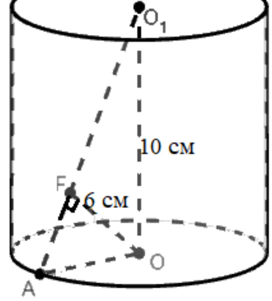
5.2. Приклади розв'язання задач

Проілюструємо на прикладах основні теоретичні факти цього пункту.

Приклад 1. Відрізок, що з'єднує центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи віддалений від центра нижньої основи на 6 см. Знайдіть об'єм даного циліндра, якщо його висота дорівнює 10 см.

А	Б	В	Г	Д
1000см^3	360π см^3	1125π см^3	$562{,}5\pi$ см^3	$562{,}5$ см^3

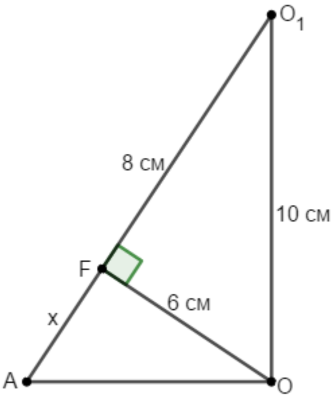
Розв'язання.



Точки O, O_1 є відповідно центрами нижньої та верхньої основ циліндра, тому за умовою задачі OO_1=10 см. Точка A лежить на колі нижньої основи. Тоді відрізок O_1A з'єднує центр верхньої основи циліндра з точкою кола нижньої основи. Проведемо $OF \perp O_1A$, OF=6 см.

Для знаходження об'єму заданого циліндру за формулою $V = \pi R^2 H$ не вистачає значення величини радіусу основи R.

З ΔO_1FO ($\angle F = 90°$) за теоремою Піфагора знайдемо O_1F: $O_1F = \sqrt{OO_1^2 - OF^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$ (см).



Розглянемо ΔO_1OA ($\angle O = 90°$). Відрізок OF – висота, проведена до гіпотенузи. Позначимо $x=AF$. Тоді, знаючи, що висота, проведена з вершини прямого кута прямокутного трикутника є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу, складемо рівняння: $OF^2 = AF \cdot FO_1 \Rightarrow 6^2 = 8 \cdot x$, $x = \frac{36}{8} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$ (см). Тепер, наприклад, можемо обчислити $AO_1=AF+FO_1$, $AO_1= 4\frac{1}{2} + 8 = 12\frac{1}{2}$ (см), та з ΔAOO_1 за теоремою Піфагора знайти катет AO, який є радіусом основи заданого циліндра: $AO = R$,

$$AO = \sqrt{AO_1^2 - OO_1^2} = \sqrt{\left(12\frac{1}{2}\right)^2 - 10^2} = \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 - 100} = \sqrt{\frac{625 - 400}{4}} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2} = 7\frac{1}{2} \text{ (см)}.$$

Або: катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією катета на гіпотенузу, тобто $OA^2 = AF \cdot AO_1 \Rightarrow OA = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{25}{2}} = \frac{15}{2} = 7{,}5$ (см).

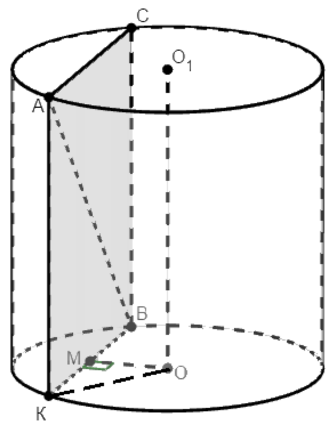
Тепер обчислюємо об'єм циліндра:

$$V = \pi R^2 H = \pi \left(\frac{15}{2}\right)^2 \cdot 10 = \pi \cdot \frac{2250}{4} = 562{,}5\pi \text{ (см}^3\text{)}.$$

Відповідь: Г.

Приклад 2. (ЗНО, 2014 р.) Через точки A і B, що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірній, проведено площину, паралельну вісі циліндра. Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює 2 см, а площа утвореного перерізу $40\sqrt{21}$ см^2. Визначте довжину відрізка AB (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює 200π см^2.

Розв'язання.



Площина, що паралельна вісі циліндра, здійснює його переріз, в результаті якого утворився прямокутник $AKBC$ з діагоналлю, яка дорівнює шуканому відрізку AB.

З точки O, центра нижньої основи, проведемо перпендикуляр до площини (AKB) – відрізок OM=2 см.

За умовою задачі $S_{AKBC} = 40\sqrt{21}$ см^2, а $S_б = 200\pi$ см^2.

Введемо позначення: $AC=a$, $AK=h$, $OK=R$. Тоді, в даних позначеннях, умова задачі перепишеться наступним чином: $ah = 40\sqrt{21}$,

$2\pi R h = 200\pi$. Звідки знайдемо співвідношення між величинами *a* та *R:* $ah = 40\sqrt{21}$, $Rh = 100 \Rightarrow \frac{a}{R} = \frac{40\sqrt{21}}{100} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$.

РозглянемоΔOMK ($\angle M = 90°$, $MK = \frac{1}{2}KB = \frac{1}{2}AC = \frac{a}{2}$) та за теоремою Піфагора складемо нове співвідношення між величинами *a* та *R:* $OK^2 = MK^2 + OM^2$, $R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2^2$. Із співвідношення $\frac{a}{R} = \frac{2\sqrt{21}}{5}$ виразимо *R:* $R = \frac{5a}{2\sqrt{21}}$ та підставимо його в отриману рівність. Отже, маємо:

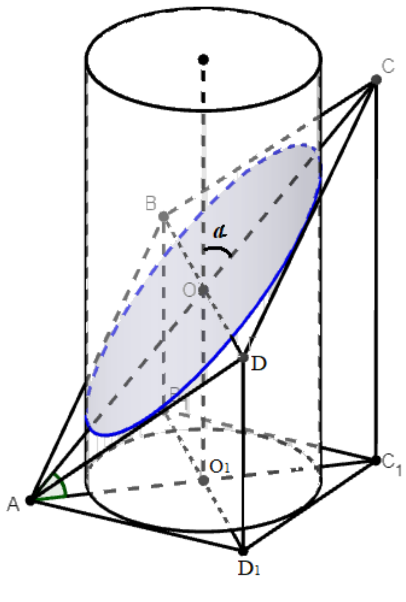
$$\left(\frac{5a}{2\sqrt{21}}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2^2;\ \frac{25a^2}{84} - \frac{a^2}{4} = 4;\ \frac{25a^2 - 21a^2}{84} = 4;\ \frac{4a^2}{84} = 4 \Rightarrow a^2 = 84.$$

Таким чином, сторона прямокутника перерізу становить: $a = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$ (см).З рівності $ah = 40\sqrt{21}$ знайдемо висоту циліндра, підставивши отримане вище значення $a = 2\sqrt{21}$: $h = \frac{40\sqrt{21}}{2\sqrt{21}} = 20$ (см).

Для знаходження довжини шуканого відрізка *AB*, розглянемо ΔACB ($\angle C = 90°$, $AC = 2\sqrt{21}$ см, $CB = AK = 20$ см). За теоремою Піфагора: $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{84 + 400} = \sqrt{484} = 22$ см.

Відповідь: 22 см.

Приклад 3. Усі сторони квадрата *ABCD* дотикаються до циліндра, вісь якого утворює з площиною квадрата кут α. Діагональ квадрата *BD* перпендикулярна до вісі циліндра. Визначте площу основи циліндра, якщо довжина сторони квадрата дорівнює *b*.



Розв'язання.

Нехай *ABCD* заданий квадрат, діагональ *BD* якого перпендикулярна до вісі циліндра. Ортогонально спроектуємо квадрат та циліндричну поверхню на площину основи циліндра. Проекцією квадрата буде ромб $AB_1C_1D_1$, проекцією циліндричної поверхні – коло основи циліндра.

Точка *O* – точка перетину діагоналей квадрата, точка O_1 – точка перетину діагоналей ромба. Кут між віссю циліндра та діагоналлю *BD* за умовою задачі дорівнює α. Вертикальний з ним кут $\angle AOO_1$ також дорівнює α. Кут між площинами квадрата та ромба – це $\angle OAO_1 = 90° - \alpha$. За теоремою про площу ортогональної проекції фігури знайдемо площу ромба, скориставшись формулою: $S_{прк} = S \cdot \cos\varphi$, де φ – кут між площинами. Знайдемо площу квадрата *ABCD*, знаючи за умовою його сторону: $S_{ABCD} = b^2$. Тоді площа ромба: $S_{AB_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot \cos(90° - \alpha) = b^2 \sin\alpha$.

Коло основи циліндра є вписаним в ромб. Щоб знайти його площу, необхідно знати радіус (позначимо *R*). Скористаємось тим фактом, що діаметр кола, вписаного в ромб, дорівнює висоті ромба. Висоту можна виразити через площу та сторону ромба: $h = \frac{S_{AB_1C_1D_1}}{AD_1} = 2R$.

Так як вісь циліндра перпендикулярна до *BD* та до площини основи, а отже *BD* паралельна площині основи циліндра, то при ортогональному проектуванні на площину основи діагональ квадрата *BD* спроектувалась в рівну їй діагональ ромба B_1D_1. Таким чином $BD = B_1D_1 = b\sqrt{2}$, а $D_1O_1 = \frac{1}{2}B_1D_1 = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

З прямокутного трикутника ΔAO_1O ($\angle O_1 = 90°$, $AO = \frac{1}{2}AC = \frac{b\sqrt{2}}{2}$), знайдемо AO_1: $AO_1 = AO \cdot \sin\alpha = \frac{b\sqrt{2}\sin\alpha}{2}$. Далі розглянемо прямокутний трикутник ΔAO_1D_1 ($\angle O_1 = 90°$), з якого виразимо, за теоремою Піфагора, сторону ромба AD_1:

$$AD_1 = \sqrt{AO_1^2 + O_1D_1^2} = \sqrt{\left(\frac{b\sqrt{2}\sin\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{b^2}{2}\left(\sin^2\alpha + 1\right)}.$$

Тепер повернемось до формули $h = \frac{S_{AB_1C_1D_1}}{AD_1} = 2R$ та підставимо туди отримані значення для площі та сторони ромба:

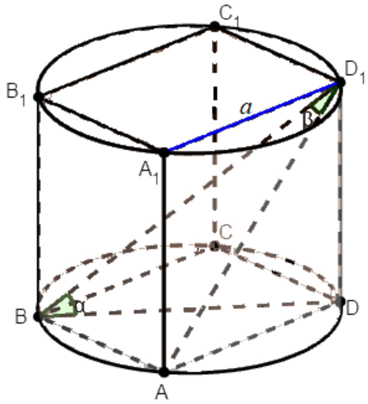
$$h = 2R = \frac{b^2\sin\alpha}{\sqrt{\frac{b^2}{2}\left(\sin^2\alpha + 1\right)}} = \frac{b^2\sin\alpha \cdot \sqrt{2}}{b\sqrt{\sin^2\alpha + 1}} = \frac{b\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}.$$

А тоді радіус кола основи циліндра дорівнює: $R = \frac{b\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}$. Отже, площа основи циліндра становить

$$S_o = \pi R^2 = \pi\left(\frac{b\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{\sin^2\alpha + 1}}\right)^2 = \frac{\pi b^2\sin^2\alpha}{2\left(\sin^2\alpha + 1\right)} \text{ (кв. од.).}$$

Відповідь: $\frac{\pi b^2\sin^2\alpha}{2\left(\sin^2\alpha + 1\right)}$ (кв. од.).

Приклад 4. Визначте об’єм циліндра, описаного навколо прямокутного паралелепіпеда, якщо більша сторона основи паралелепіпеда дорівнює *a*, діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α, а з більшою бічною гранню кут β.



Розв’язання.

Нехай задано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, більша сторона основи

$AD=A_1D_1=BC=B_1C_1=a$.

Діагональ паралелепіпеда BD_1 нахилена до площини основи під кутом α, який утворюється між діагоналлю паралелепіпеда BD_1 та її проекцією на площину основи BD. Тому $\angle D_1BD=\alpha$.

Більша бічна грань паралелепіпеда містить більшу сторону основи, тому це одна із граней ADD_1A_1 та BCC_1B_1. Спроектуємо діагональ паралелепіпеда на площину (ADD_1) – відрізок AD_1. Тоді кут між діагоналлю паралелепіпеда та більшою бічною гранню – це кут $\angle BD_1A=\beta$.

За умовою задачі, необхідно знайти об'єм циліндра, описаного навколо паралелепіпеда. Для цього треба знати висоту циліндра, яка дорівнює висоті паралелепіпеда, а також радіус циліндра, який дорівнює половині діагоналі прямокутника, що лежить в основі паралелепіпеда.

Задача зводиться до розв'язання трьох прямокутних трикутників, в кожному з яких є по одній лише відомій величині: ΔAA_1D_1 ($\angle A_1=90°$, $A_1D_1=a$); ΔBDD_1 ($\angle D=90°$, $\angle D_1BD=\alpha$); ΔBAD_1 ($\angle A=90°$ – за теоремою про три перпендикуляри: $DD_1\perp(ABC)$, $AD\perp AB\Rightarrow AD_1\perp AB$, $\angle BD_1A=\beta$).

Позначимо висоту циліндра та паралелепіпеда $h=AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$.

Скористаємося тригонометричними співвідношеннями в прямокутному трикутнику ΔBDD_1. Маємо: $BD=h\cdot ctg\alpha$, $BD_1=\dfrac{h}{\sin\alpha}$.

Перейдемо до ΔBAD_1. З нього отримаємо рівність: $AD_1=BD_1\cdot\cos\beta$. Підставимо отримане вище значення $BD_1=\dfrac{h}{\sin\alpha}\Rightarrow AD_1=\dfrac{h\cos\beta}{\sin\alpha}$.

Для ΔAA_1D_1 ($\angle A_1=90°$) складемо рівність за теоремою Піфагора: $AA_1^2+A_1D_1^2=AD_1^2\Rightarrow h^2+a^2=\dfrac{h^2\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}$. З отриманої рівності виразимо значення h через відомі за умовою задачі значення a,α, та β: $h^2\left(\dfrac{\cos^2\beta}{\sin^2\alpha}-1\right)=a^2\Rightarrow$

$$h^2=\frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}\Rightarrow h=\sqrt{\frac{a^2\sin^2\alpha}{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}}=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}}.$$

Залишилось знайти радіус основи циліндра: $R=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{1}{2}h\cdot ctg\alpha$. Підставивши знайдене значення висоти, маємо: $R=\dfrac{a\sin\alpha}{2\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}}\cdot ctg\alpha=\dfrac{a\cos\alpha}{2\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}}$.

Обчислюємо об'єм циліндра за формулою: $V=\pi R^2h$.

$$V=\pi\cdot\left(\frac{a\cos\alpha}{2\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}}\right)^2\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos^2\beta-\sin^2\alpha}}=\frac{\pi a^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\sqrt{(\cos^2\beta-\sin^2\alpha)^3}}.$$

Відповідь: $V = \dfrac{\pi a^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{4\sqrt{\left(\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha\right)^3}}$ (куб. од.)

5.3. Завдання для самостійної роботи у форматі ЗНО

1. Діагональ прямокутника дорівнює 15 см, а одна із його сторін становить $\frac{2}{3}$ діагоналі. Знайдіть діаметр циліндра, що утворився в результаті обертання даного прямокутника навколо більшої з його сторін.

А	Б	В	Г	Д
$5\sqrt{5}$ см	$10\sqrt{5}$ см	10 см	20 см	5 см

2. Площа прямокутника, який є розгорткою бічної поверхні циліндра становить 80 см^2. Знайдіть радіус основи циліндра, якщо його висота дорівнює 10 см.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{\pi}$ см	4 см	5 см	8 см	16π см

3. Осьовий переріз циліндра є квадратом, діагональ якого дорівнює a см. Знайдіть площу його повної поверхні (у см^2).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3\pi a^2}{2}$	$\frac{3\pi a^2}{4}$	$\frac{\pi a^2}{2}$	$\frac{\pi a^2}{8}$	$\frac{\pi a^2}{4}$

4. Осьовий переріз циліндра є прямокутником. Діагональ прямокутника дорівнює a см та утворює кут 30^0 з однією із сторін. Визначте площу його бічної поверхні (у см^2).

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi\sqrt{3}a^2}{8}$	$\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$	$\frac{\pi a^2}{2}\left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)$	$\frac{\pi\sqrt{3}a^2}{2}$	$\frac{\pi\sqrt{3}a^2}{4}$

5. Циліндр помістили у просторову систему координат так, що його основа лежить у площині Oxy і має рівняння $(x-1)^2+(y+3)^2=4$, а висота дорівнює 4. Визначте координати центра його другої основи.

А	Б	В	Г	Д
(–1;3;4)	(1;–3;2)	(1;–3;4) або (1;–3;–4)	(1;–3;2) або (–1;3;–2)	(4;1;–3)

6. Кінці відрізка, що з'єднує центри основ циліндра, мають координати (0; 0;–2) та (0; 0; 3). Яким рівнянням може визначатись переріз циліндра площиною, паралельною його основі, якщо його бічна поверхня дорівнює 20πкв. од.

А	Б	В	Г	Д
$x^2+y^2=4$	$x^2+y^2=2$	$(x+2)^2+(y-3)^2=4$	$x^2+y^2=25$	$(x-2)^2+(y+3)^2=4$

7. Точка кола нижньої основи циліндра з'єднана з центром верхньої основи відрізком довжиною a см. Даний відрізок утворює з площиною основи кут φ. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\pi a^2 \sin\varphi$	$\pi a^2 \sin\varphi\cos\varphi$	$\pi a^2 \sin 2\varphi$	$\dfrac{2\pi a^2}{\sin\varphi\cos\varphi}$	$2\pi a^2 \sin\varphi$

8. Відрізок, що з'єднує точку кола нижньої основи з точкою кола верхньої основи дорівнює 12 см та утворює з площиною основи кут 60^0. Проекція цього відрізка на площину основи циліндра віддалена від центра основи на 4 см. Знайдіть площу бічної поверхні даного циліндра (у см^2).

А	Б	В	Г	Д
$24\sqrt{26}\pi$	$60\sqrt{3}\pi$	$24\sqrt{13}\pi$	$30\sqrt{3}\pi$	$12\sqrt{43}\pi$

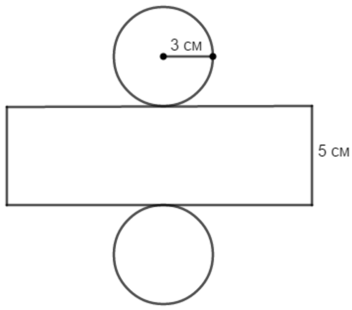
9. Склянка та каструля циліндричної форми мають пропорційні розміри. Встановіть діаметр днища каструлі, якщо в ній вміщується 27 склянок води, а діаметр склянки становить 6,5 см.

А	Б	В	Г	Д
$6{,}5\pi$ см	20,5 см	13 см	19,5 см	17,5 см

10. Висота однієї склянки вдвічі більша за її діаметр. Яким має бути відношення радіусу до висоти іншої склянки, якщо вона вміщує стільки ж води як і перша склянка, але вдвічі нижча за неї.

А	Б	В	Г	Д
1:1	1:2	2:1	$1:\sqrt{2}$	Неможливо встановити

11. (ЗНО, 2011 р.) На рисунку зображено розгортку циліндра. Знайдіть його об'єм.



А	Б	В	Г	Д
9π см^3	15π см^3	30π см^3	36π см^3	45π см^3

12. (ЗНО, 2015 р.) Лист заліза, що має форму прямокутника *ABCD*(*AB*=50 см), згортають таким чином, щоб отримати циліндричну трубу (див. рисунки 1 і 2). Краї *AB* і *CD* зварюють між собою без накладання одного краю на інший. Обчисліть площу бічної поверхні отриманого циліндра (труби), якщо діаметр його основи дорівнює 20 см. Виберіть відповідь, найближчу до точної. Товщиною листа заліза та швом від зварювання знехтуйте.

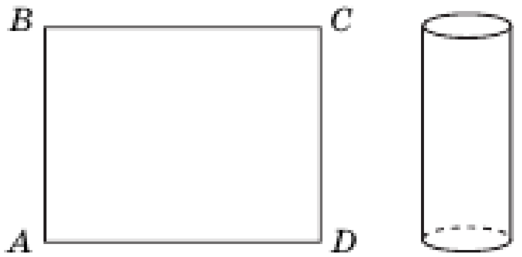


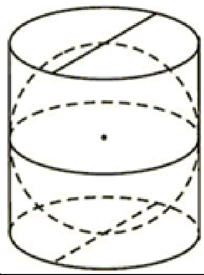
Рис. 1 Рис. 2

А	Б	В	Г	Д
1570 см^2	3150 см^2	5240 см^2	6300 см^2	1000 см^2

13. Тридцять однакових металевих кульок діаметром 1 см переплавили в один циліндр. Знайдіть висоту цього циліндра, якщо його радіус дорівнює радіусу кульки.

А	Б	В	Г	Д
20 см	30 см	15 см	60 см	10 см

14. (ЗНО, 2008 р.) У склянку циліндричної форми, наповнену водою по самі вінця, поклали металеву кульку, що дотикається до дна склянки та стінок (див. рис.). Визначте відношення об'єму води, яка залишилась у склянці, до об'єму води, яка вилилась зі склянки.



А	Б	В	Г	Д
$1:\pi$	$2:\pi$	1:2	2:3	1:3

15. Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо конуса, якщо об'єм конуса становить 18 см^3.

А	Б	В	Г	Д
18π см^3	36 см^3	9 см^3	54 см^3	6 см^3

16. Конус та циліндр мають спільну основу. Вершина конуса знаходиться на середині висоти циліндра. Знайдіть об'єм циліндра, якщо об'єм конуса становить 1,5 м^3.

А	Б	В	Г	Д
$4{,}5\pi$ м^3	3 м^3	9 м^3	4,5 м^3	6 м^3

17. Всі ребра правильної трикутної призми дорівнюють *a.* Знайдіть об'єм циліндра, описаного навколо неї.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{a^3\pi}{3}$	$\frac{a^3\pi}{2}$	$\frac{a^3\pi}{12}$	$a^3\pi$	$\frac{a^3\sqrt{3}}{4}\pi$

18. Об'єм куба, описаного навколо циліндра, дорівнює *V*. Визначте об'єм циліндра.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\pi V}{2}$	$\frac{V}{3}$	$\frac{\pi V}{3}$	$\frac{\pi V}{4}$	$\frac{V\sqrt[3]{V^2}\pi}{4}$

19. Циліндр перетинається площиною, яка не паралельна його основі. При цьому дана площина перетинає бічну поверхню циліндра, але не перетинає його основи. Знайдіть площу утвореного перерізу, якщо радіус основи циліндра дорівнює *R*, а площина перетинається з площиною основи циліндра під кутом α .

А	Б	В	Г	Д
$\pi R^2\cos\alpha$	$\pi R^2 tg\alpha$	$\pi R^2\sin\alpha$	$\frac{\pi R^2}{\sin\alpha}$	$\frac{\pi R^2}{\cos\alpha}$

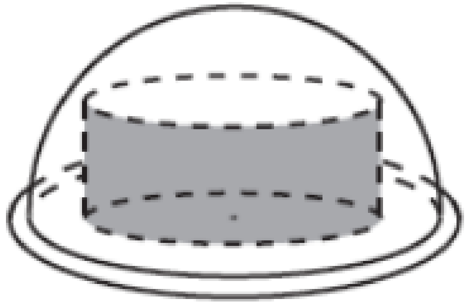
20. Через одну з твірних циліндра проведено два взаємно перпендикулярних перерізи, площі яких дорівнюють 25 см^2 та 60 см^2. Знайдіть площу осьового перерізу цього циліндра.

А	Б	В	Г	Д
85 см^2	65 см^2	42,5 см^2	35 см^2	100 см^2

21. Напівциліндричне склепіння підвалу має 6 м довжини та 4,2 м у діаметрі. Знайдіть площу повної поверхні стелі підвалу у м^2. Виберіть відповідь найближчу до правильної.

А	Б	В	Г	Д
40 м^2	80 м^2	76 м^2	26 м^2	72 м^2

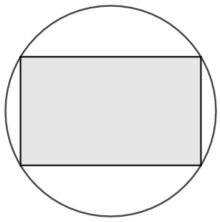
22. (**ЗНО, 2013 р.**) Для розігрівання в мікрохвильовій печі рідких страв використовують посудину у формі циліндра, радіус основи якого дорівнює 9 см. Посудина ставиться на горизонтальний диск у формі круга і накривається кришкою, що має форму півсфери (див. рисунок). Радіус півсфери дорівнює 12 см і є меншим за радіус круга. Укажіть найбільше з наведених значень, якому може дорівнювати висота посудини, якщо посудина не торкається кришки.



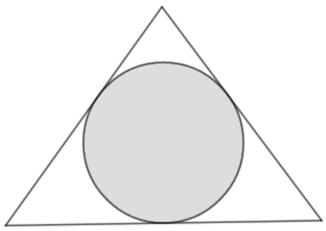
А	Б	В	Г	Д
3 см	5 см	6 см	7 см	8 см

23. На рисунках 1–4 зображені перерізи циліндрів, паралельні їх основам. Встановіть відповідність між зображеннями (1–4) та можливими комбінаціями геометричних тіл (А–Д), що їм відповідають.

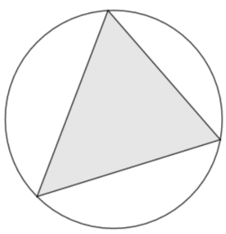
1.



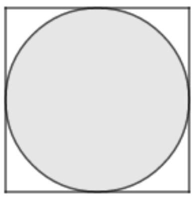
2.



3.



4.



А. Циліндр, вписаний в трикутну призму

Б. Куб, описаний навколо циліндра

В. Циліндр, описаний навколо прямокутного паралелепіпеда

Г. Куб, вписаний у циліндр

Д. Трикутна призма, вписана у циліндр

24. Об’єм циліндра дорівнює 54 см^3, а його радіус – 3 см. Встановіть відповідності між величинами (1–4) та їх значеннями числовими значеннями (А–Д).

1. Площа бічної поверхні циліндра (у см^2)
2. Площа осьового перерізу циліндра (у см^2)

А. $\frac{6}{\pi}$

3. Площа перерізу, паралельного до основи циліндра (у см^2)
4. Висота циліндра (у см)

Б. 9π
В. 36
Г. $\frac{36}{\pi}$
Д. 6π

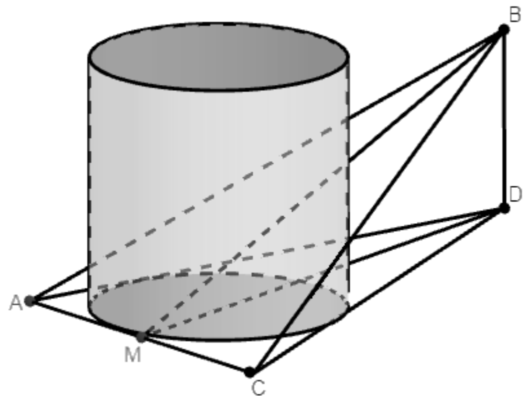
25. У циліндр вписано трикутну призму так, що одна з бічних граней призми проходить через вісь циліндра. Визначте площу бічної поверхні циліндра (у см^2), якщо периметри бічних граней призми дорівнюють 62 см, 64 см, 80 см. У відповідь запишіть число, враховуючи, що $\pi \approx 3{,}1$.

26. У циліндр вписано чотирикутну призму так, що один із діагональних перерізів призми проходить через вісь циліндра. Визначте площу бічної поверхні циліндра (у м^2), якщо периметри бічних граней призми дорівнюють 40 м, 50 м, 58 м, 24 м. У відповідь запишіть відношення $\frac{S_б}{\pi}$.

27. У верхній та нижній основах циліндра по різні боки від його вісі проведено дві хорди однакової довжини. На цих хордах побудовано прямокутник, сторони якого відносяться як 1:4. Визначте площу цього прямокутника, якщо радіус основи циліндра дорівнює 5 см, а твірна $16\sqrt{2}$ см.

28. (ЗНО, 2014 р.) Через точки A і B, що лежать на колах верхньої та нижньої основ циліндра і не належать одній твірній, проведено площину паралельну осі циліндра. Відстань від центра нижньої основи до цієї площини дорівнює $\sqrt{10}$ см, а площа утвореного перерізу $54\sqrt{10}$ см^2. Визначте довжину відрізка AB (у см), якщо площа бічної поверхні циліндра дорівнює 180π см^2.

29. Циліндр дотикається до всіх сторін рівнобедреного трикутника ABC, бічна сторона та основа якого дорівнюють відповідно $\sqrt{73}$ см та 6 см (див. рисунок). Твірні циліндра нахилені до площини трикутника ABC під кутами 30°. Визначте радіус основи циліндра.



30. Під час роботи на лебідку намотується 162 м тросу, діаметром 15 мм. У скільки шарів намотується трос, якщо барабан лебідки має довжину 65 см, а його діаметр 40 см. Відповідь округліть до цілих.

31. У правильну чотирикутну піраміду вписано циліндр, основа якого лежить в площині основи піраміди. Визначте площу осьового перерізу циліндра, якщо відомо, що він квадрат і бічні ребра піраміди дорівнюють a та нахилені до площини основи під кутом φ.

32. Визначте об’єм циліндра, описаного навколо прямої трикутної призми, якщо основа призми – рівнобедрений трикутник з бічною стороною a та кутом при вершині φ, а діагоналі рівних бічних граней призми, що виходять з однієї вершини утворюють між собою кут α.

33. Визначте об'єм циліндра (у см^3), якщо у цей циліндр можна вписати кулю, радіус якої дорівнює $\frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$ см.

34. Зрізаний конус, у якого радіуси основ 1 м і 4 м, і рівновеликий йому циліндр мають одну й ту ж висоту (рівновеликі – мають однакові об'єми). Чому дорівнює радіус R основи цього циліндра (у м)? У відповідь запишіть R^2.

35. Три циліндри, основи яких є концентричними кругами з радіусами, що утворюють геометричну прогресію зі знаменником 2, мають однакову висоту. Знайдіть відношення об'ємів меншого з циліндрів до більшого.

36. Крапля мильної води заповнює циліндр, висота та радіус якого дорівнюють відповідно $9\frac{1}{30}$ мм та 1,6 мм. З цієї краплі можна надути мильну бульбашку довжиною радіуса 4 мм. Знайдіть товщину мильної оболонки у мм.

37. У циліндричній посудині рівень води дорівнює 11 см. У посудину опускають важку кулю, поверхня і об'єм якої виражаються одним числом. Після занурення кулі рівень води піднявся до країв посудини. Знайти висоту посудини (у см), якщо довжина радіуса її основи дорівнює 6 см.

5.4. Відповіді до завдань для самостійної роботи (Розділ V)

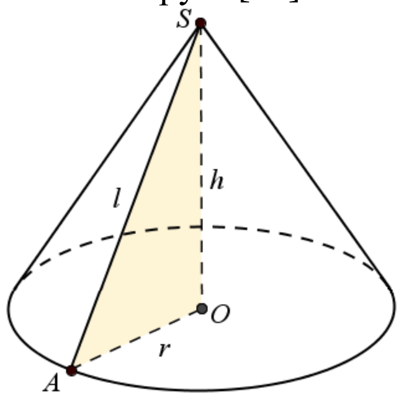
1.Г	**2**. А	**3**. Б	**4**. Д	**5**. В	**6**. А	**7**. В
8. Б	**9**. Г	**10**. Г	**11**. Д	**12**. Б	**13**. А	**14**. В
15. Г	**16**. В	**17**. А	**18**. Г	**19**. Д	**20**. Б	**21**. А
22. Г	**23.1.**В	**23.2.**А	**23.3.**Д	**23.4.**Б	**24.1.**В	**24.2.**Г
24.3.Б	**24.4.**А	**25.** 988,9	**26.** 125	**27.** 144	**28.** 21	**29.**1,5
30. 3	**31.** $\frac{4a^2\sin^2\varphi}{(2+tg\varphi)^2}$		**32.** $\frac{\pi a^3\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$		**33.** 54	**34.** 7
35. 0, 0625			**36.**0,4		**37.**12	

Розділ VI
Конус, зрізаний конус та куля

Забезпечуючи формування поняття конуса, зрізаного конуса та кулі пропонуємо повторити тіла обертання та їхні елементи: конус, зрізаний конус, кулю, сферу, їхні елементи, перерізи тіл обертання площиною, комбінації геометричних тіл, розгортки поверхонь, формули для обчислення площ поверхонь та об’ємів тіл обертання; акцентуємо увагу на застосуванні означень, ознак, властивостей тіл і поверхонь обертання до розв’язування стереометричних задач та задач практичного змісту.

6.1. Теоретичні відомості

Круговим *конусом* називається фігура, що складається із круга і точки S, що не лежить у площині круга, і всіх відрізків, що сполучають цю точку з точками круга [15].



Конус називається *прямим*, якщо пряма SO перпендикулярна до площини основи, де O – центр основи (круга).

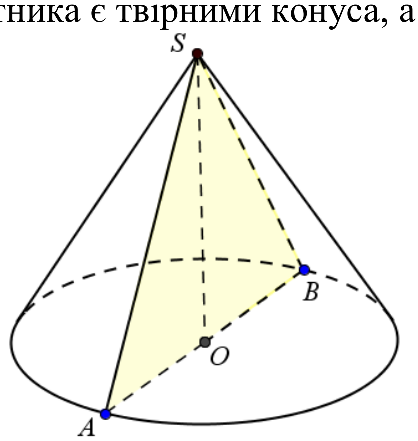
У шкільному курсі розглядаються тільки прямі кругові конуси, а тому конус можна розглядати, як тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника AOS навколо свого катета OS. При цьому гіпотенуза SA опише *бічну* поверхню конуса, а катет OA – основу конуса – круг. Радіус круга називають *радіусом конуса*, точку S – *вершиною* конуса, відрізок SO – *висотою*, пряму SO – *віссю* конуса, SA – *твірною* конуса, де точка A лежить на **колі** основи.

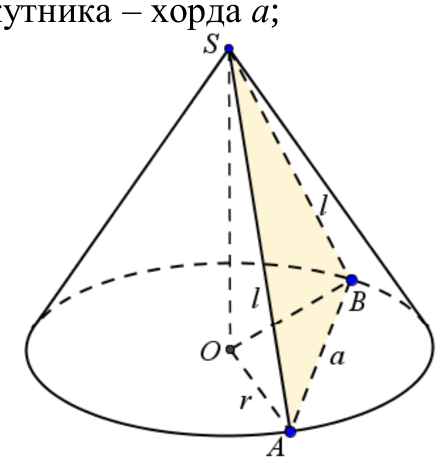
Площина, що проходить через твірну конуса і не має з ним інших спільних точок, називається *дотичною* площиною до конуса.

Перерізами поверхні конуса можуть бути частини параболи, гіперболи, еліпса та інших кривих. У шкільному курсі розглядають **перерізи** конуса:

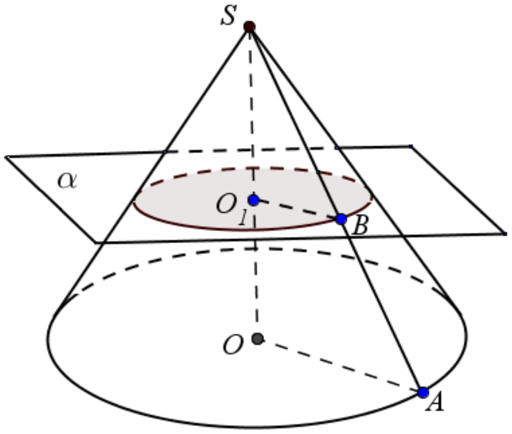
1) площинами, які проходять через вісь конуса, – маємо рівнобедрені трикутники: на рисунку ΔSAB, дві бічні сторони цього трикутника дорівнюють твірним конуса, а основа трикутника – діаметру кола;

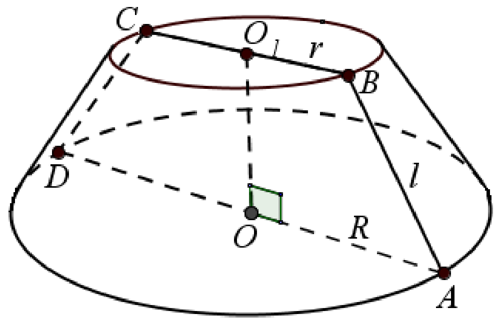
2) площинами, які проходять через вершину конуса і перетинають основу конуса по хорді: переріз – рівнобедрений ΔSAB, дві бічні сторони SA і SB цього трикутника є твірними конуса, а основа трикутника – хорда a;





3) площинами, які паралельні до основи. Такі площини перетинають конус по кругу, відтинаючи при цьому конус (менший, з вершиною S та радіусом основи O_1B) та зрізаний конус.

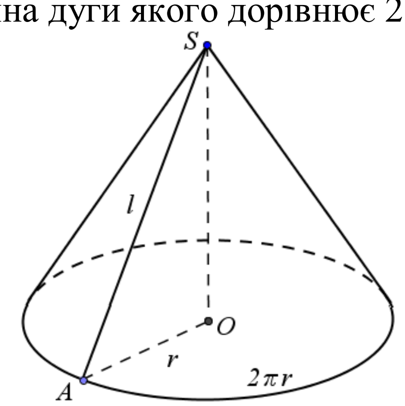


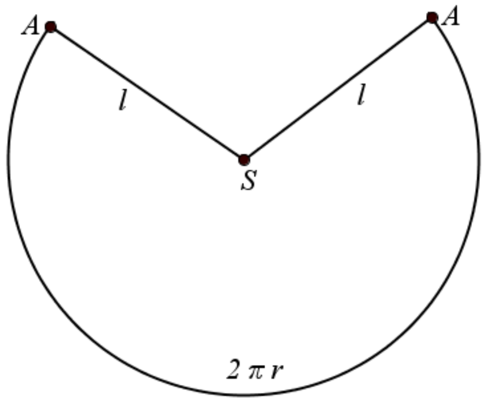


Зрізаний конус можна розглядати як тіло, яке утворене обертанням прямокутної трапеції O_1BAO навколо меншої її бічної сторони O_1O. На рисунку пряма OO_1 – *вісь* зрізаного конуса, відрізок OO_1 – *висота*, $AB = l$ – *твірна* зрізаного конуса, відрізки O_1B, OA – *радіуси* основ.

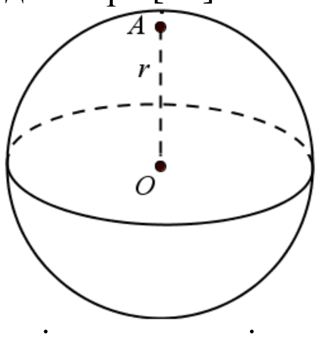
Аналогічно розглядають перерізи зрізаного конуса, отримують рівнобічні трапеції чи круги, інші перерізи (криві другого порядку) не розглядають.

Розгорткою *бічної* поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює l, довжина дуги якого дорівнює $2\pi r$.



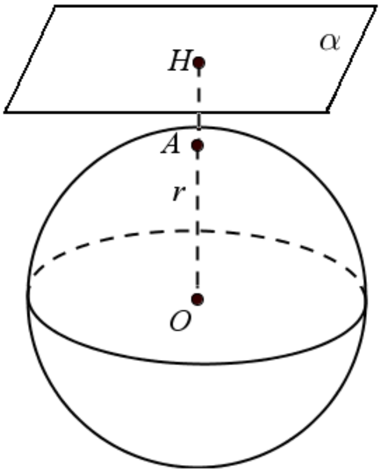


Куля – це тіло, утворене обертанням **круга** (півкруга) навколо його діаметра. *Сфера* – фігура, утворена обертанням **кола** (півкола) навколо його діаметра [20].



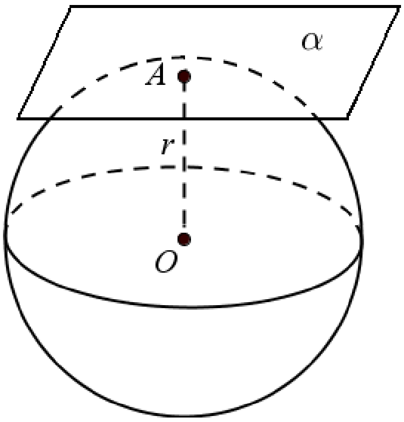
На рисунку O – центр кулі, OA – радіус кулі. Акцентуємо увагу учнів на суттєвих відмінностях у означеннях кулі і сфери: *сфера* – це поверхня, що складається з усіх точок простору, які розташовані на **однаковій** відстані r від центра O сфери (кулі); *куля* – це тіло, що складається з усіх точок простору, які розташовані на відстані **не більшій** за дану відстань r від центра O кулі.

Взаємне розташування кулі і площини подано на рисунках (відстань від центра кулі до площини OH, радіус кулі $r = OA$):



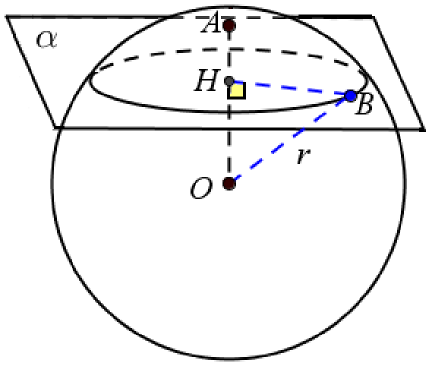
$OH>r$

Куля і площина не перетинаються



$OH = OA = r$

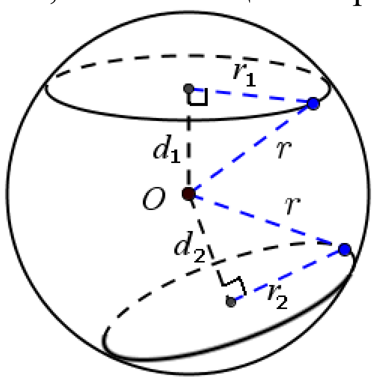
Куля і площина дотикаються в точці A



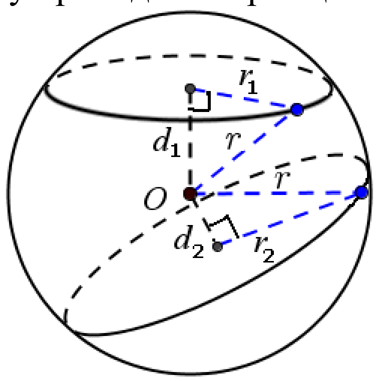
$OH<r$

Куля і площина перетинаються по кругу

Якщо куля і площина перетинаються по кругу, то відстань від центра кулі до площини d пов'язана з радіусом кулі $r_{kul.}$ і радіусом круга перерізу $r_{pereriz.}$ теоремою Піфагора: $d=\sqrt{r_{kul.}^2-r_{pereriz.}^2}$. Найбільший переріз отримуємо тоді, коли d=0, тобто площина перерізу проходить через центр кулі.



$d_1=d_2 \leftrightarrow r_1=r_2$



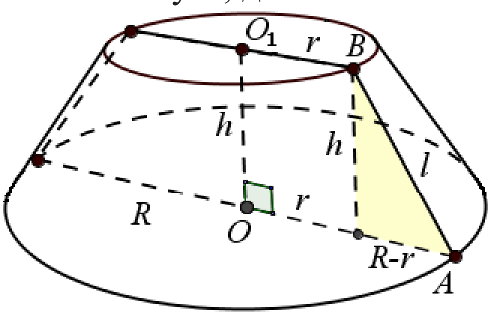
$d_1>d_2 \leftrightarrow r_1<r_2$

Якщо є дві площини, що перетинають кулю (по кругу), то круг тим більший, чим ближчий він до центра кулі. Круги рівні лише тоді, коли вони знаходяться на однакових відстанях від центра кулі.

ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ПЛОЩ ПОВЕРХОНЬ ТА ОБ'ЄМІВ

Площа *бічної* поверхні прямого кругового конуса $S_{б.}=\pi r l$, де r і l – радіус кола основи та довжина твірної бічної поверхні, відповідно. Щоб знайти площу всієї *поверхні* конуса, треба до площі її бічної поверхні $S_{б.}$ додати площу $S_{ос.}$ основи: $S_{повн.}=S_{б.}+S_{ос.}$, звідки $S_{повн.}=\pi r l+\pi r^2$, або $S_{повн.}=\pi r\cdot(l+r)$ [16].

Об'єм кругового **конуса**: $V=\frac{1}{3}S_{ос.}\cdot h$; $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$, де $S_{ос.}$ – площа основи, h – висота конуса, де $h=\sqrt{l^2-r^2}$.



Площа *бічної* поверхні зрізаного конуса $S_{б.}=\pi r l+\pi R l=\pi\cdot(r+R)\cdot l$, де r, R і l – радіуси кіл основ та довжина твірної, відповідно. Щоб знайти площу всієї *поверхні* зрізаного конуса, треба до площі її бічної поверхні $S_{б.}$

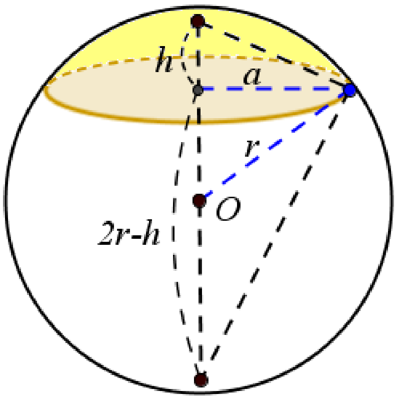
додати площі двох її основ $S_{\text{ос.1}}$ і $S_{\text{ос.2}}$: $S_{повн.} = S_{б.} + S_{\text{ос.1}} + S_{\text{ос.2}}$, звідки $S_{повн.} = \pi r l + \pi R l + \pi r^2 + \pi R^2$.

Об’єм **зрізаного** конуса: $V_{zriz.} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \left(S_{oc.1} + \sqrt{S_{oc.1} S_{oc.2}} + S_{oc.2}\right)$, де $S_{\text{ос.1}}$ і $S_{\text{ос.2}}$ – площі основ, h – висота конуса або $V = \frac{1}{3}\pi h \cdot \left(r^2 + rR + R^2\right)$, де $h = \sqrt{l^2 - (R - r)^2}$.

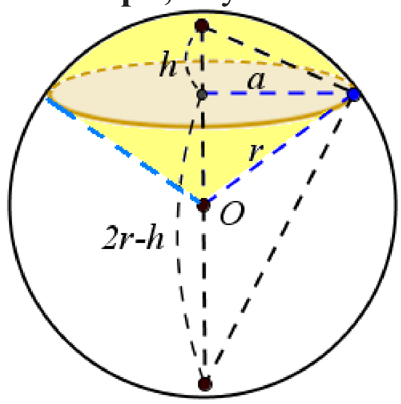
Для найкращого запам’ятовування формул після їхнього виведення, доцільно акцентувати увагу учнів на тому, що призма і циліндр у тривимірному просторі (3D) «не звужуються» догори, а тому у об’ємах тіл маємо **добуток** площі основи на висоту, у той час, як піраміда і конус (зрізаний конус) у тривимірному просторі (**3D**) «звужуються» догори, а тому у об’ємах тіл маємо **третину добутку** площі основи на висоту. Проводимо аналогію з двовимірним простором (площиною, 2D): трикутник (трапеція) у двовимірному просторі (**2D**) «звужується» догори, а тому у площах фігур маємо **половину добутку** основи (суми основ) на висоту, а паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат у 2D «не звужуються» догори, а тому у площах фігур маємо **добуток** площі основи на висоту.

Площа поверхні **кулі** (площа сфери): $S = 4\pi r^2$, об’єм кулі $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Кульові **сегменти** висотою h і $2r–h$



Кульові **сектори,** опуклий і неопуклий



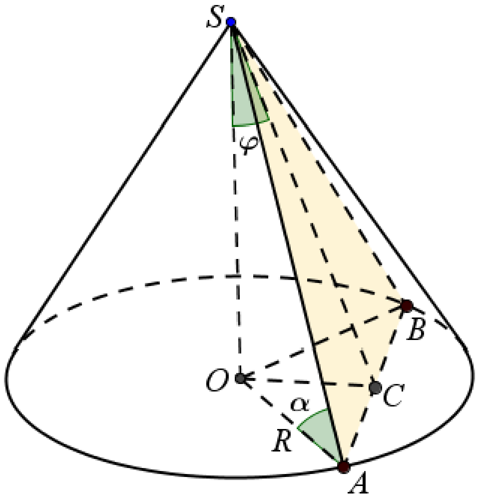
Для кульового **сегмента** (висотою h): $a^2 = h \cdot (2r - h)$, $a^2 = r^2 - (r - h)^2$, де a – основа сегмента (радіус перерізу кулі площиною), об’єм $V_{segm.} = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$, площа сферичної частини сегмента $S = 2\pi r h$.

Для опуклого кульового **сектора** (висотою h): для відшукання об’єму досить до об’єму сегмента додати об’єм конуса, матимемо відповідно об’єм $V_{\text{sector}} = \frac{2}{3}\pi r^2 h$.

Сферичний пояс або кульовий пояс – частини поверхні сфери (кулі), яка розташована між двома взаємно паралельними площинами, що перетинають цю сферу (кулю). Відстань між цими площинами називається висотою сферичного пояса. Якщо одна з площин є дотичною до сфери, то відрізана поверхня сфери між площинами перетвориться на сферичний сегмент. Площа сферичного пояса $S_{пояс.}$ залежить лише від висоти пояса h і радіуса кулі r: $S_{пояс.} = 2\pi r h$[21].

6.2. Приклади розв'язання задач

Приклад 1. (ЗНО, 2009 р.). Радіус основи конуса R, твірна нахилена до площини основи під кутом α. Через вершину конуса проведено площину під кутом φ до його висоти. Ця площина перетинає основу конуса по хорді. Знайдіть площу утвореного перерізу.



Розв'язання. Виконаємо рисунок. SO – висота, AB – хорда, SAB – переріз, AOB – рівнобедрений трикутник ($AO=OB=R$), OC – медіана, бісектриса, висота трикутника AOB. Оскільки SO – перпендикуляр до основи, то пряма SO перпендикулярна до будь-якої прямої площини основи: $SO\perp AB$. Оскільки і $OC\perp AB$, то уся площина $SOC\perp AB$. А тому проекцією прямої SO на площину SAB буде пряма SC, тобто $\angle OSC=\varphi$. Проекцією твірної SA на площину основи OAB буде пряма OA, тобто $\angle SAO=\alpha$.

З ΔSOA:$\angle SOA=90^{\circ}$, $\angle SAO=\alpha$, $AO=R$, з тригонометричних співвідношень отримаємо $SA=R/\cos\alpha$, $SO=R\cdot \operatorname{tg}\alpha$.

З ΔSOC:$\angle SOC=90^{\circ}$, $\angle OSC=\varphi$, $SO=R\cdot \operatorname{tg}\alpha$, отримаємо $SC=SO/\cos\varphi$, $SC=R\cdot \operatorname{tg}\alpha/\cos\varphi$.

З ΔSCA:$\angle SCA=90^{\circ}$, $SA=R/\cos\alpha$, $SC=R\cdot \operatorname{tg}\alpha/\cos\varphi$, за теоремою Піфагора отримаємо $AC=\sqrt{SA^2-SC^2}=\sqrt{\left(\frac{R}{\cos\alpha}\right)^2-\left(\frac{Rtg\alpha}{\cos\varphi}\right)^2}=\sqrt{\frac{R^2}{\cos^2\alpha}-\frac{R^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha\cos^2\varphi}}$ або

$$AC=\sqrt{\frac{R^2}{\cos^2\alpha}\left(1-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi}\right)}=\frac{R}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha}{\cos^2\varphi}}=\frac{R}{\cos\alpha\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha}\,.$$

Площа перерізу $S=½\cdot AB\cdot SC=AC\cdot SC$ після підстановки значень матиме вигляд $S=\frac{R}{\cos\alpha\cos\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha}\cdot\frac{Rtg\alpha}{\cos\varphi}=\frac{R^2tg\alpha}{\cos\alpha\cos^2\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi-\sin^2\alpha}$.

Зауваження: $\cos\varphi=\sin SCO$, а кут $\angle SCO>\angle SAO$; за умовою $\angle SAO=\alpha$, тому маємо, що $\sin SCO>\sin\alpha$, тобто $\cos\varphi>\sin\alpha$, тобто вираз під коренем є додатним.

Можливе альтернативне розв'язання, наприклад:

З ΔSOA:$\angle SOA=90^{\circ}$, $\angle SAO=\alpha$, $AO=R$, маємо $SO=R\cdot \operatorname{tg}\alpha$.

З ΔSOC:$\angle SOC=90^{\circ}$, $\angle OSC=\varphi$, отримаємо $SC=SO/\cos\varphi$, $SC=R\cdot \operatorname{tg}\alpha/\cos\varphi$; $OC=SO\cdot\operatorname{tg}\varphi$, а тому $OC=R\cdot \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

З ΔOCA:за теоремою Піфагора отримаємо $AC=\sqrt{OA^2-OC^2}$,

$AC=\sqrt{R^2-(Rtg\alpha\, tg\varphi)^2}=\sqrt{\frac{R^2}{1}-\frac{R^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{\cos^2\alpha\cos^2\varphi}}=\sqrt{\frac{R^2\left(\cos^2\alpha\cos^2\varphi-\sin^2\alpha\sin^2\varphi\right)}{\cos^2\alpha\cos^2\varphi}}$, або

$AC = \dfrac{R}{\cos\alpha\cos\varphi}\sqrt{(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi)(\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi)}$, звідки отримаємо $AC = \dfrac{R}{\cos\alpha\cos\varphi}\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}$, маємо вирази для основи і висоти перерізу, щоб обчислювати його площу $S = AC \cdot SC$:

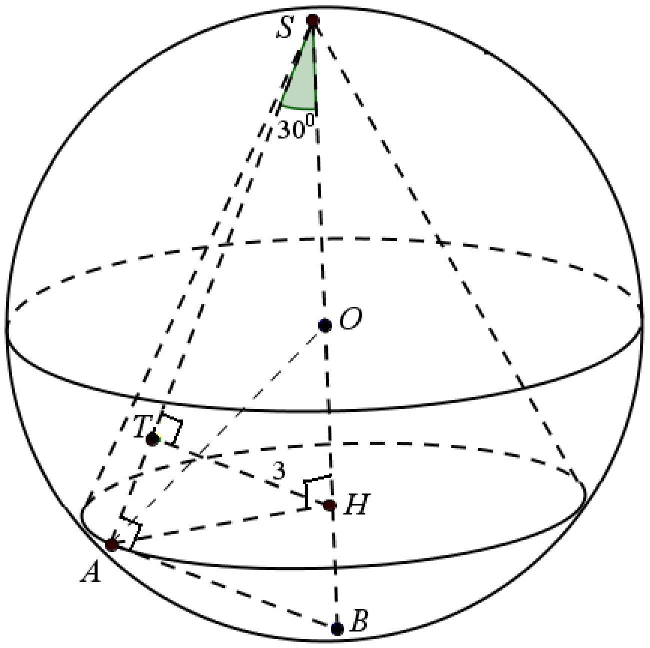
$$S = \frac{R}{\cos\alpha\cos\varphi}\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cdot\cos(\alpha-\varphi)}\cdot\frac{Rtg\alpha}{\cos\varphi} = \frac{R^2\,tg\alpha}{\cos\alpha\cos^2\varphi}\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cdot\cos(\alpha-\varphi)}.$$

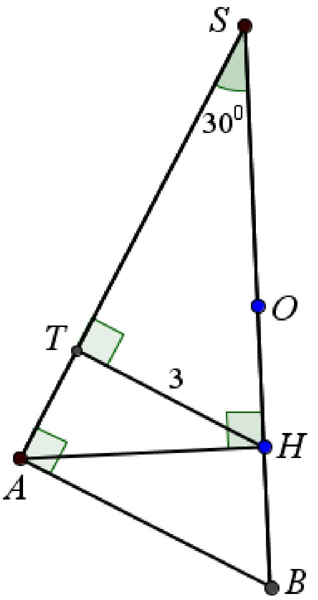
З останнього співвідношення чітко випливає, що сума кутів $\alpha + \varphi < 90^{\text{o}}$, це випливає також із зауваження, розглянутого вище.

На перший погляд відповідь є іншою (зовні), але вона може бути перетворена до вище отриманої шляхом нескладних перетворень. Зауважимо, що від учнів не вимагалось перетворювати відповідь до **єдиної** правильної, наприклад, правильною є також і відповідь $\dfrac{R^2 tg\alpha}{\cos\alpha\cos^2\varphi}\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\varphi}$, у цьому неважко переконатися, використавши основну тригонометричну тотожність.

Відповідь: площа перерізу $\dfrac{R^2 tg\alpha}{\cos\alpha\cos^2\varphi}\sqrt{\cos^2\varphi - \sin^2\alpha}$.

Приклад 2. У кулю вписано конус, твірна якого утворює з висотою кут 30^{o}. Відомо, що відстань від центра основи конуса до твірної дорівнює 3 см. Визначте площу поверхні кулі у см^2.





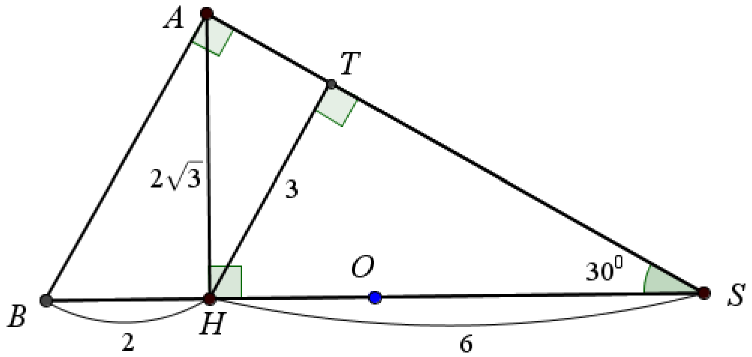
Розв’язання. Виконаємо рисунок. Нехай є куля з центром у точці *O*, точки *S* і *B* – точки, які лежать на поверхні кулі (сфері), діаметрально протилежні точки, *SH*, *SA* і *AH* – висота, твірна і радіус конуса, відповідно, *TH* – перпендикуляр з центра основи конуса до твірної, *TH*=3 см. Точка *A* лежить на сфері, *SB* – діаметр, а тому $\angle SAB$ – прямий.

З прямокутного ΔSTH: $SH = \frac{TH}{\sin TSH} = \frac{3}{0{,}5} = 6$ см, $ST = TH \cdot ctgTSH = 3\sqrt{3}$ см. З подібності $\Delta STH \cong \Delta SHA$: $\frac{ST}{SH} = \frac{SH}{SA}$, звідки $SA = \frac{SH^2}{ST} = \frac{6^2}{3\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$ см. З подібності $\Delta STH \cong \Delta SAB$: $\frac{ST}{SA} = \frac{SH}{SB}$, звідки $SB = \frac{SA \cdot SH}{ST} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 6}{3\sqrt{3}} = 8$ см (діаметр кулі), а тоді $R = SO = 4$ см.

А тоді площа поверхні кулі $S = 4\pi R^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 64\pi$ см^2.

Розв’язуючи задачу, у якій є подібні прямокутні трикутники, доцільно повторити співвідношення у прямокутному трикутникові: між катетом, його проекцією та гіпотенузою; між проекціями катетів на гіпотенузу та висотою, проведеною до гіпотенузи. Це розширює можливості учня при розв’язуванні інших задач, у яких фігурують схожі об’єкти.

Розглянемо інші способи відшукання радіуса кулі у цій задачі.



У прямокутному трикутнику STH сторона TH є катетом, що лежить навпроти кута в 30°, а тому дорівнює половині гіпотенузи, звідки SH=6 см.

У прямокутному трикутнику SHA сторони AH і SH є катетами (гострий кут 30°), а тому $AH = SH \cdot tgTSH = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$ см.

У прямокутному трикутнику BAS відрізки AH і SH є висотою, проведеною до гіпотенузи, і проекцією катета на гіпотенузу, відповідно: $AH^2 = SH \cdot BH$, звідки $6 \cdot BH = \left(2\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow BH = 2$ см. А тоді діаметр SB=8 см і R=4 см.

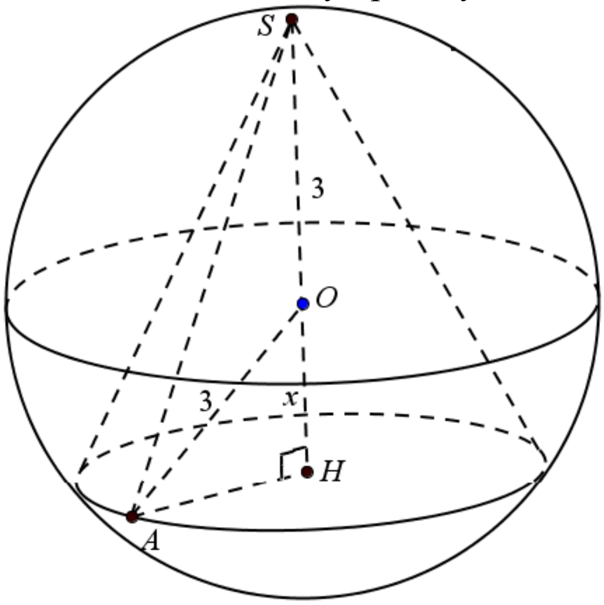
Можна було використати виключно тригонометрію: позначимо даний в умові кут $\angle ASH$ через α. Тоді кут $\angle AHT$ теж дорівнює α і $\angle BAH=\alpha$. Виразимо з прямокутного ΔATH гіпотенузу $AH = \frac{TH}{\cos\alpha}$, з прямокутного ΔAHB: $HB = AH \cdot tg\alpha = \frac{TH}{\cos\alpha} \cdot tg\alpha$, маємо $HB = \left(3 : \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2$ см, SB=8 см, R=4 см.

У цій задачі можна було міркувати і інакше: $\angle ASB$ вписаний, градусна міра 30°, кут $\angle AOB$ центральний, вдвічі більший, тобто 60°, $AO=OB$ (як радіуси), а тому ΔAOB рівносторонній. Відрізок AH – висота рівностороннього трикутника, а отже і медіана, тобто, якщо $HB = x$, то $HO = x$, $SO = OB = R = 2x$, $SH = 3x$, а тоді $3x = 6$, звідки $x = 2$, $R = 2x = 4$ см.

Відповідь: площа сфери 64π см^2.

Приклад 3. У кулю радіуса 3 см вписано конус. При якій довжині висоти конуса об’єм конуса буде найбільшим? Чому дорівнює цей об’єм?

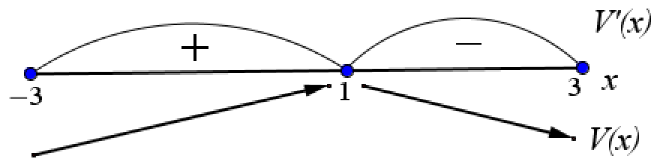
Розв'язання. Виконаємо рисунок. Нехай є куля з центром у точці *O*, *SO*=*OA* =3 см, *SH* і *AH* – висота і радіус конуса. Позначимо *OH* через *x*, тоді висота конуса *SH* =3+*x*. Зауважимо, що *x* може набувати від'ємних значень, тобто висота конуса може бути меншою за 3 см. Проте, при **від'ємному** значенні *x* точка *H* знаходитиметься між *S* і *O*, і якщо розглянути точку *H'*, яка буде симетричною до *H* відносно точки *O*, то площі основ будуть однаковими (бо площини перерізу знаходитимуться на однакових відстанях від центра кулі), а висоти будуть різними, причому у першому випадку (від'ємному *x*) висота буде меншою, а отже і об'єм буде менший. Тому нас будуть цікавити тільки $x \geq 0$. Насправді, можна не робити такого дослідження, обчислення мають показати нашу правоту.



Виразимо радіус основи конуса: $AH=\sqrt{OA^2-OH^2}$, або $AH=\sqrt{9-x^2}$. Об'єм запишеться $V=\frac{1}{3}\pi\cdot AH^2\cdot SH$ або $V=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(9-x^2\right)\cdot\left(3+x\right)$, після розкриття дужок отримаємо, що $V=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(-x^3-3x^2+9x+27\right)$.

Необхідною умовою екстремуму є рівність нулю похідної.

Обчислимо похідну: $V'=\frac{1}{3}\pi\cdot\left(-3x^2-6x+9\right)=-\pi\cdot\left(x^2+2x-3\right)$, похідна дорівнює нулю при $x=-3,\ x=1$:



Оскільки при переході через точку *x* = 1 похідна змінює знак з плюса на мінус, то при *x* = 1 функція досягає максимуму.

А тому висота конуса *SH* =3+1=4 см (відповідь на перше питання задачі). Обчислимо радіус основи $AH=\sqrt{9-1}=2\sqrt{2}$ та об'єм: $V=\frac{1}{3}\pi\cdot 8\cdot 4=\frac{32}{3}\pi$ см^3.

Відповідь: висота дорівнює 4 см, а об'єм конуса $\frac{32}{3}\pi$ см^3.

6.3. Завдання для самостійної роботи у форматі ЗНО.

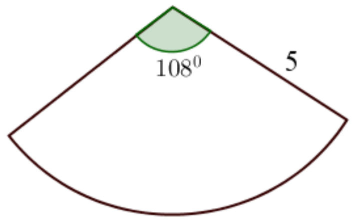
1. **(ЗНО, 2010 р., I сесія)**. Довжина кола основи конуса дорівнює 8π см. Знайдіть довжину твірної конуса, якщо його висота дорівнює 3 см.

А	Б	В	Г	Д
11 см	10 см	7 см	5 см	4 см

2. Визначте кут при вершині осьового перерізу конуса, якщо висота конуса удвічі менша за його твірну.

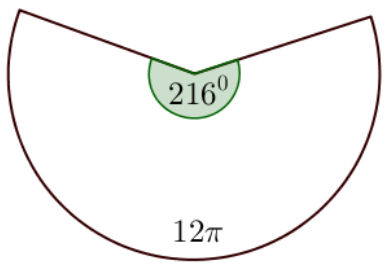
А	Б	В	Г	Д
30^o	45^o	60^o	90^o	120^o

3. На рисунку зображено розгортку бічної поверхні конуса. Визначте радіус основи цього конуса (у тих самих одиницях розмірності).



А	Б	В	Г	Д
1	1,5	2	2,5	5

4. На рисунку зображено розгортку бічної поверхні конуса – сектор, градусна міра кута якого дорівнює 216^o, а довжина дуги – 12π см. Визначте твірну цього конуса (у см).



А	Б	В	Г	Д
5	6	8	10	12

5. Визначте центральний кут розгортки бічної поверхні конуса, твірна якого дорівнює 40 см, а радіус основи – 9 см.

А	Б	В	Г	Д
81^o	90^o	108^o	120^o	162^o

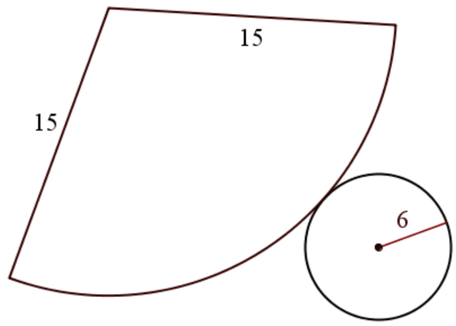
6. Визначте площу бічної поверхні конуса (у дм^2), осьовим перерізом якого є прямокутний трикутник з гіпотенузою 4 дм.

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{2}$	4π	$4\sqrt{2}\pi$	8π	$8\sqrt{2}\pi$

7. Обчисліть площу повної поверхні конуса (у см^2), діаметр основи якого дорівнює 8 см, а твірна – 17 см.

А	Б	В	Г	Д
16π	64π	68π	84π	168π

8. (ЗНО, 2008 р.). На рисунку зображено розгортку конуса. Визначте відношення площі повної поверхні цього конуса до площі його бічної поверхні.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{7}$	1,4	2,4	2,5	2,8

9. Визначте висоту конуса, площа бічної поверхні якого дорівнює 135 π см^2, а площа повної поверхні – 216 π см^2.

А	Б	В	Г	Д
1,6 см	9 см	12 см	15 см	9π см

10. Визначте площу бічної поверхні конуса (у кв. од.), якщо його твірна дорівнює l і утворює кут α з площиною основи.

А	Б	В	Г	Д
$\pi l^2 \cos\alpha$	$\pi l^2 \sin\alpha$	$\pi l^2 tg\alpha$	$\pi l^2 \cos\alpha \cdot (1+\cos\alpha)$	$\frac{\pi l^2}{\cos\alpha}$

11. Визначте площу повної поверхні конуса (у кв. од), якщо його твірна дорівнює l, а відношення твірної до висоти дорівнює 5:3.

А	Б	В	Г	Д
$0{,}64\pi\cdot l^2$	$0{,}8\pi\cdot l^2$	$\pi\cdot l^2$	$\pi\cdot l^2\cdot(1+\sin 0{,}6)$	$1{,}44\pi\cdot l^2$

12. Визначте площу повної поверхні конуса (у см^2), осьовим перерізом якого є рівнобедрений трикутник, основа якого в 1,5 рази більша за його висоту, а площа перерізу дорівнює 12 см^2.

А	Б	В	Г	Д
12π	15π	24π	36π	48π

13. Через вершину конуса проведено площину під кутом 30^o до площини основи. Ця площина перетинає основу конуса по хорді, яку видно з центра його основи під кутом 120^o. Визначте площу перерізу (у см^2), якщо радіус основи конуса 3 см.

А	Б	В	Г	Д
4,5	6,75	$4{,}5\sqrt{3}$	9	$9\sqrt{3}$

14. В основі конуса проведено хорду завдовжки $2\sqrt{2}$ см на відстані 1 см від центра основи. Визначте площу повної поверхні конуса (у см^2), якщо його твірна нахилена до площини основи під кутом 60^o.

А	Б	В	Г	Д
6π	9π	$6\sqrt{3}\,\pi$	$9\sqrt{3}\,\pi$	27π

15. Визначте площу повної поверхні конуса (у см^2), якщо твірна нахилена до площини основи під кутом 60^o, а площа бічної поверхні дорівнює 14 см^2.

А	Б	В	Г	Д
21	23	$14+7\sqrt{2}$	$14\sqrt{3}$	$14+7\sqrt{3}$

16. Визначте об'єм конуса (у дм^3), якщо відомо, що твірна нахилена до площини основи під кутом 30^o, а висота дорівнює 2 дм.

А	Б	В	Г	Д
24π	16π	$8\sqrt{3}\,\pi$	$8\sqrt{2}\,\pi$	8π

17. Визначте об'єм конуса (у см^3), якщо відомо, що його висота втричі менша за радіус основи, а твірна конуса дорівнює $\sqrt{10}$ см.

А	Б	В	Г	Д
π	2π	3π	$\sqrt{10}\,\pi$	$3\sqrt{10}\,\pi$

18. Визначте об'єм конуса (у см^3), якщо відомо, що площа бічної поверхні конуса дорівнює 136π см^2, а площа повної поверхні – 200π см^2.

А	Б	В	Г	Д
64π	255π	320π	336π	960π

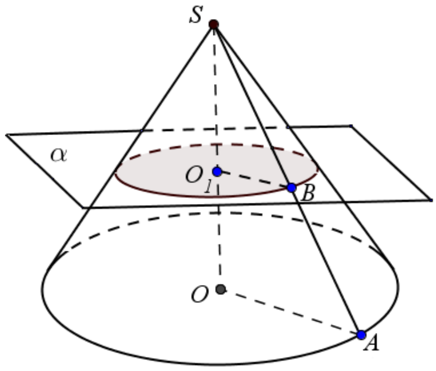
19. Визначте об'єм конуса, якщо відомо, що його висота дорівнює h і менша утричі за радіус основи конуса.

А	Б	В	Г	Д
πh^3	$3\pi h^3$	$4{,}5\sqrt{3}\,\pi h^3$	$9\pi h^3$	$27\pi h^3$

20. Якщо висоту конуса збільшити у два рази, а радіус основи зменшити у два рази, то об'єм конуса:

А	Б	В	Г	Д
Зменшиться у чотири рази	Зменшиться у два рази	Не зміниться	Збільшиться у два рази	Збільшиться у чотири рази

21. Через середину висоти конуса провели площину, паралельну до основи (див. рисунок). Визначте відношення об'єму утвореного конуса з основою O_1B до об'єму зрізаного конуса.



А	Б	В	Г	Д
1:2	1:3	1:4	1:6	1:7

22. Визначте площу осьового перерізу зрізаного конуса (у **дм**^{2}), якщо твірна зрізаного конуса дорівнює 10 см, а діаметри основ – 12 см і 24 см.

А	Б	В	Г	Д
0,036	0,96	1,44	1,8	2,88

23. Визначте площу **бічної** поверхні зрізаного конуса (у см^2), висота якого дорівнює 3 см, а діаметри основ – 4 см і 12 см.

А	Б	В	Г	Д
16π	24π	32π	40π	48π

24. Визначте площу **повної** поверхні зрізаного конуса (у см^2), висота якого дорівнює 12 см, а радіуси основ – 1 см і 6 см.

А	Б	В	Г	Д
91π	128π	156π	168π	182π

25. Визначте об'єм зрізаного конуса (у см^3), твірна якого дорівнює $2\sqrt{3}$ см і нахилена до площини основи під кутом 60°, а діагональ осьового перерізу ділить цей кут навпіл.

А	Б	В	Г	Д
6π	12π	15π	18π	21π

26. Визначте об'єм зрізаного конуса (у см^3), твірна якого дорівнює 17 см, а радіуси основ – 1 см і 9 см.

А	Б	В	Г	Д
91π	410π	455π	1365π	1394π

27. Визначте площу повної поверхні зрізаного конуса (у см^2), твірна якого дорівнює 2 см і нахилена до площини основи під кутом 60°, а діагональ осьового перерізу ділить цей кут навпіл.

А	Б	В	Г	Д
11π	6π	5π	4π	π

28. Об’єм першої кулі у 64 рази більший за об’єм другої кулі. Чому дорівнює радіус першої кулі (у см), якщо радіус другої кулі дорівнює 3 см?

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
0,75	12	$^{64}\!/_{3}$	48	192

29. Площа поверхні однієї кулі у чотири рази більша за площу поверхні другої кулі. Чому дорівнює об’єм кулі більшого радіуса (у см^3), якщо об’єм кулі меншого радіуса дорівнює 3см^3?

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
0,75	1,5	6	12	24

30. (ЗНО, 2009 р.)Свинцеву кулю радіуса 5 см переплавили в кульки однакового розміру, радіус кожної з яких – 1 см. Скільки таких кульок одержали? Втратами свинцю під час переплавлення знехтуйте.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
125	50	25	10	5

31. На фарбування поверхні кулі діаметром 40 см витратили одну банку фарби. На скільки кульок діаметром 10 см вистачить такої банки фарби?

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
2	4	16	30	64

32. (ЗНО, 2010 р.). Обчисліть площу сфери, діаметр якої дорівнює 12 см.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
36π см^2	72π см^2	144π см^2	288π см^2	576π см^2

33. Дві сфери, діаметри яких дорівнюють 5 мм і 15 мм, мають **зовнішній** дотик. Визначте відстань (у **см**) між центрами цих сфер.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
0,25	0,5	0,75	1	2

34. Точки A і B лежать на поверхні кулі радіуса 25 см. Визначте відстань (у см) від центра кулі до відрізка AB, якщо AB=48 см.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1	7	11,5	12	23

35. (ЗНО, 2011 р.). Об’єм кулі дорівнює 36π см^3. Визначте її діаметр.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
3 см	6 см	12 см	18 см	24 см

36. Площа перерізу кулі площиною, що проходить через центр кулі, дорівнює 7 дм^2. Визначте площу сфери (у дм^2).

А	Б	В	Г	Д
$3{,}5\pi$	14	7π	28	$7\sqrt{7}\pi$

37. Площа перерізу кулі площиною, що знаходиться на відстані 6 см від її центра, дорівнює 64π см^2. Визначте площу поверхні кулі (у см^2).

А	Б	В	Г	Д
144π	192π	256π	384π	400π

38. Лінія перетину сфери і площини, віддаленої від центра на 12 см, має довжину 18π см. Визначте площу сфери (у см^2).

А	Б	В	Г	Д
216π	225π	900π	1080π	1296π

39. Визначте площу поверхні кулі (у см^2), яка дотикається до граней двогранного кута, міра якого 120°, а відстань між точками дотику дорівнює 3 см.

А	Б	В	Г	Д
36π	$36\sqrt{3}\pi$	72π	108π	$72\sqrt{3}\pi$

40. (**ЗНО, 2007 р.**). Визначте об'єм тіла (у см^3), утвореного обертанням круга навколо свого діаметра, довжина якого дорівнює *a* см.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{4}{3}\pi a^3$	$\frac{2}{3}\pi a^3$	$\frac{1}{3}\pi a^3$	$\frac{1}{6}\pi a^3$	$\frac{1}{12}\pi a^3$

41. Визначте площу поверхні сфери (в кв. од.), рівняння якої в прямокутній системі координат має вигляд $x^2 + y^2 - 2x + 4y + z^2 = 4$.

А	Б	В	Г	Д
π	4π	8π	16π	36π

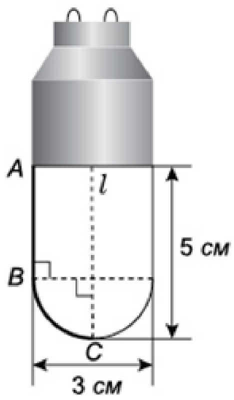
42. У прямокутній системі координат задано сферу, відрізок AB – діаметр цієї сфери, $A(1;0;-2)$, $B(5;1;6)$. Визначте площу поверхні цієї сфери (в кв. од.).

А	Б	В	Г	Д
25π	36π	64π	81π	324π

43. Дано дві концентричні кулі (із спільним центром), радіуси яких 6 м і 10 м. До меншої кулі проведено дотичну площину. Визначте площу перерізу більшої кулі цією площиною (у м^2).

А	Б	В	Г	Д
16π	36π	64π	100π	136π

44. (**ЗНО, 2015 р.,** додаткова сесія). На рисунку зображено осьовий переріз світлодіодної лампи. Активна поверхня цієї лампи, через яку відбувається випромінювання світла, є тілом обертання, утвореним обертанням відрізка AB та чверті кола BC навколо осі l. Використовуючи зазначені на рисунку дані, обчисліть площу активної поверхні світлодіодної лампи. Виберіть відповідь, найближчу до точної.



А	Б	В	Г	Д
39 см^2	42 см^2	45 см^2	48 см^2	51 см^2

45. У кулю діаметра 12 см вписано куб. На якій відстані (у см) від центра кулі знаходиться кожна вершина куба?

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{3}$	6	8	$6\sqrt{2}$	$6\sqrt{3}$

46. Якщо пряму п’ятикутну призму, довжина бічного ребра якої 6 дм, описано навколо кулі, то радіус кулі дорівнює

А	Б	В	Г	Д
3 дм	6 дм	$3\sqrt{2}$ дм	$3\sqrt{3}$ дм	6 дм

47. Установіть відповідність між геометричним тілом (1–5) та його об’ємом (А–Е):

Геометричне тіло	Об’єм тіла (у см^3)
1. Конус з радіусом основи 4 см та висотою 6 см	**А.** 16π
2. Зрізаний конус з радіусами основ 1 см і 3 см і висотою 9 см	**Б.** 32π
3. Куля радіуса 3 см	**В.** 36π
4. Циліндр, описаний навколо кулі радіуса 2 см	**Г.** 39π
5. Кульовий сегмент, радіус кулі 6 см, висота сегмента 3 см	**Д.** 45π
	Е. 50π

48. У зрізаному конусі твірна дорівнює 10 см, а радіуси основ – 1 см і 7 см.

1) Визначте площу S повної поверхні (у см^2) зрізаного конуса. У відповіді запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.

2) Визначте радіус основи (у см) циліндра такої ж висоти, як і зрізаний конус, повна поверхня якого рівновелика повній поверхні зрізаного конуса.

49. Дано кулю радіуса 1,5 см, яка дотикається до усіх сторін трикутника, які дорівнюють 3 см, 6 см і 7 см. Визначте відстань (у см) від центра кулі до площини трикутника.

50. Дано конус, вершина якого S, SO – висота, повна поверхня якого дорівнює 90 см^2. На його вісі відмітили точку M, так, що $SM=2\cdot MO$ і провели площину, паралельну до основи конуса. Чому дорівнює повна поверхня малого конуса, з висотою SM (у см^2)?

51. Трикутник зі сторонами 7 см, 15 см, 20 см обертається навколо меншої сторони. Визначте площу поверхні S фігури обертання (у см^2). У відповіді запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.

52. Трикутник зі сторонами 7 см та $3\sqrt{2}$ см і кутом 45^o між ними обертається навколо третьої сторони. Знайдіть об'єм V тіла обертання (у см^3). У відповіді запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.

53. У правильну чотирикутну піраміду з апофемою 5 см і висотою 4 см вписано кулю. Знайдіть площу S поверхні кулі (у см^2). У відповіді запишіть $\frac{S}{\pi}$.

54. У зрізаному конусі твірна дорівнює 13 см, а радіуси основ – 1 см і 6 см. Визначте радіус кулі (у см), площа поверхні якої дорівнює половині площі повної поверхні зрізаного конуса.

55. Визначте об'єм V зрізаного конуса (у см^3), діаметри основ якого дорівнюють 3 см і 13 см, а діагональ осьового перерізу ділить тупий кут навпіл. У відповіді запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.

56. У відкриту циліндричну посудину з радіусом основи 24 см кинули кульку радіуса 6 см так, що вона повністю занурилася у воду. На скільки сантиметрів підніметься рівень води в посудині?

57. Твірна конуса утворює з висотою кут 30^o. Визначте об'єм кулі V, вписаної в цей конус, якщо відстань від центра основи конуса до твірної дорівнює 4,5 см. У відповіді запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.

58. (ЗНО, 2011 р.). У чотирикутну піраміду, в основі якої лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 13 см і основою 18 см, вписано конус. Знайдіть площу S **бічної** поверхні конуса (у см^2), якщо всі бічні грані піраміди нахилені до основи під кутом 60^o. У відповіді запишіть значення $\frac{S}{\pi}$.

59. **(ЗНО, 2015 р.)**. Навколо конуса описано трикутну піраміду, площа основи якої дорівнює $50\sqrt{3}$, а периметр основи – 50. Визначте об'єм цього конуса, якщо довжина його твірної дорівнює 4. У відповіді запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.

60. Циліндр і конус мають однакові площі бічних поверхонь та рівні твірні. Визначте відношення площ основ циліндра і конуса.

6.4. Відповіді до завдань для самостійної роботи (Розділ VI)

1. Г	**2.** Д	**3.** Б	**4.** Г	**5.** А	**6.** В	**7.** Г
8. Б	**9.** В	**10.** А	**11.** Д	**12.** В	**13.** А	**14.** Б
15. А	**16.** Д	**17.** В	**18.** В	**19.** Б	**20.** Б	**21.** Д
22. В	**23.** Г	**24.** Б	**25.** Д	**26.** В	**27.** А	**28.** Б
29. Д	**30.** А	**31.** В	**32.** В	**33.** Г	**34.** Б	**35.** Б
36. Г	**37.** Д	**38.** В	**39.** А	**40.** Г	**41.** Д	**42.** Г
43. В	**44.** Г	**45.** Б	**46.** А	**47.1.** Б	**47.2.** Г	**47.3.** В
47.4. А	**47.5.** Д	**48.1.** 130	**48.2.** 5	**49.** 1	**50.** 40	**51.** 420
52. 29,4	**53.** 9	**54.** 4	**55.** 217	**56.** 0,5	**57.** 36	**58.** 72
59. 8	**60.** 0,25					

Список використаних джерел

1. Атанасян Л.С., Бутузов С.Б. та ін. Геометрія. – К.: Освіта, 1993.
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Геометрія. 10-11 класи: Пробний підручник. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2003. – 264 с.
3. Бевз Г.П. Методика розв'язування стереометричних задач /Г.П.Бевз. – К.: Радянська школа, 1989. – 192 с.
4. Бевз Г.П. Обобщения при решении задач с помощью векторов / Г.П.Бевз //Математика в школе. – 1978. – № 2. – С. 12–14.
5. Белешко Д.Т. Геометрія: Навчальний посібник / Д.Т. Белешко, Н.М. Гнедко. – Рівне. РІСКСУ, 2006. – 75 с.
6. Бурда М.І., Савченко Л.Н. Геометрія. – К.: Освіта, 1998.
7. Гусев В.А. Векторы в школьном курсе геометрии / В.А. Гусев, Ю.М. Колягин, Г.Д. Луканин. – М.: Просвещение, 1978. – 48 с.
8. Жовнір Я.М. Позиційні задачі в стереометрії: Посібник для вчителя / Я.М. Жовнір. – К.: Освіта, 1991. – 95 с.
9. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В., Захарійченко Л.І., Школьна О.В. Повний курс математики в тестах: У 2 ч. Ч.1: Різнорівневі завдання. – 7-ме вид., випр. – Харків: Вид-во «Ранок», 2018. –496 с.
10. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Геометрія. 11 клас / За ред. З.І. Слєпкань. – Харків: Гімназія, 2006.
11. Кисельов А.П. Элементарная геометрия. – М.: Просвещение, 1980.
12. Кобко Л.М. Використання аналогії під час вивчення стереометрії / Л.М. Кобко// Математика. – № 10 (262) – березень 2004. – С. 8–10.
13. Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978. – 223 с.
14. Кушнір І.А. Методи розв'язання задач з геометрії: кн. для вчителя / І.А. Кушнір. – К.: Абрис, 1994. – 464 с.
15. Погорєлов О.В. Геометрія: підручник для 7-11 класів середньої школи. – К.: Освіта, 1993 р. – 346 с.
16. Погорєлов О.В. Геометрія. Стереометрія : підруч. для 10–11 кл. середн. шк. / О.В. Погорєлов. – 5-те вид. – К.: Освіта, 2001. – 128 с.
17. Полонський В.Б. Вчимося розв'язувати задачі з геометрії: навч.-метод. посібник / В.Б. Полонський, Ю.М. Рабинович, М.С. Якір. –К.: Маніст–S, 1998. – 256 с.
18. Прасолов В.В. Задачи по стереометрии: сборник задач /В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин. – М.: Наука, 1989. – 288 с.
19. Скопец З.А. Геометрические миниатюры. – М.: Просвещение, 1990.
20. Тадеєв В.О. Геометрія. Фігури обертання. Векторно-координатний метод: Дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів /За ред. М.Й. Ядренка. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 480с.
21. Фетисов А.И. Геометрия в задачах : пособие для учащихся школ и классов с углубл. теоретическим и практическим изучением математики/ А.И. Фетисов. – М.: Просвещение, 1977. – 192 с.

Ізюмченко Л.В., Ботузова Ю.В.,Ткаченко Л.А.

Інтенсифікація підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики (стереометрія)

Підписано до друку 10.09.2018 р.
Формат 60х84 1/16. Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.
Друк – принтер. Тираж 100 прим.
Зам. № 301

КЗ «КОІППО імені Василя Сухомлинського», вул. Велика Перспективна, 39/63, Кропивницький, 25006

Віддруковано в лабораторії інформаційно-методичного забезпечення освітнього процесу КЗ «КОІППО імені Василя Сухомлинського», вул. Велика Перспективна 39/63, Кропивницький, 25006