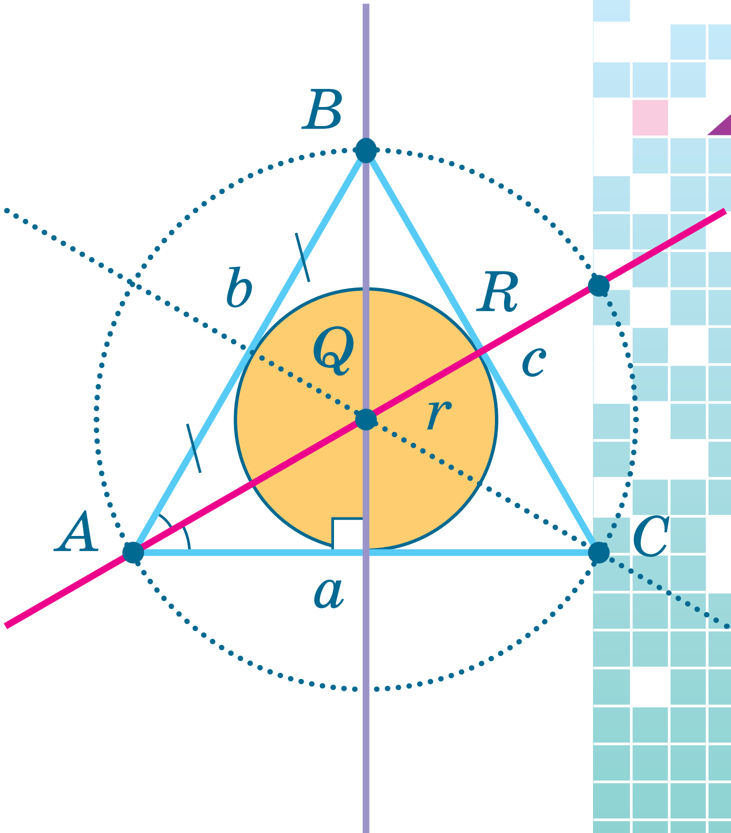
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ
НАПН УКРАЇНИ

Нова українська школа



М. І. Бурда,
В. В. Волошена,
Н. А. Тарасенкова

ПРАКТИКУМ З ГЕОМЕТРІЇ

Збірник практико-орієнтованих задач

7–9

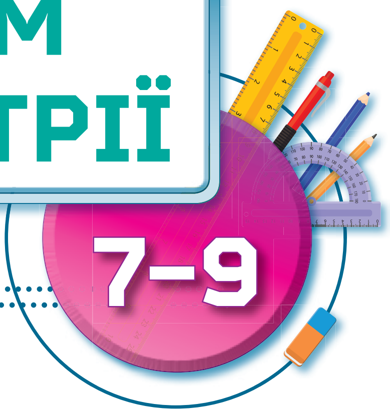
Оріон

НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
ПЕДАГОГІЧНИХ НАУК УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПЕДАГОГІКИ
НАПН УКРАЇНИ

М. І. Бурда
В. В. Волошена
Н. А. Тарасенкова

ПРАКТИКУМ З ГЕОМЕТРІЇ



Збірник практико-орієнтованих задач

Київ
Оріон
2024

УДК 514*кл7/*кл9(075.3+076)
Б93

Рекомендовано до друку
вченою радою Інституту педагогіки НАПН України
(протокол № 13 від 18 грудня 2023 р.)

Р е ц е н з е н т и:
Мініна Н. С., вчителька математики Ліцею «Престиж» м. Києва;

Годованюк Т. Л., проректор з наукової роботи, професор кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини, доктор педагогічних наук, професор

Бурда М. І., Волошена В. В., Тарасенкова Н. А.
Б93 Практикум з геометрії для 7–9 класів [електрон. вид.] : збірник практико-орієнтованих задач. Київ: УОВЦ «Оріон», 2024. 152 с. : іл.

ISBN 978-966-991-341-8

Збірник містить задачі практичного змісту різної складності для 7–9 класів закладів загальної середньої освіти. Задачі та їх складність орієнтовані на базові знання з геометрії та враховують вимоги Державного стандарту базової середньої освіти до обов'язкових результатів навчання учнів у математичній освітній галузі. Мета практикуму — показати, як використовуються властивості й ознаки геометричних фігур у різних практичних ситуаціях, виробити вміння розв'язувати відповідні задачі практичного змісту та перевірити рівень набутих умінь.
Посібник призначений для учнів 7–9 класів закладів загальної середньої освіти. Він стане в нагоді вчителям математики закладів загальної середньої освіти, студентам класичних та педагогічних закладів вищої освіти.

УДК 514*кл7/*кл9(075.3+076)

ISBN 978-966-991-341-8

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Мета цього збірника — показати, як використовуються властивості й ознаки геометричних фігур у різних практичних ситуаціях, виробити вміння розв'язувати відповідні задачі практичного змісту, відшукувати та застосовувати різні способи їх розв'язування, правильно інтерпретувати отримані результати. Задачі та їх складність орієнтовані на базові знання з геометрії та враховують вимоги Державного стандарту базової середньої освіти до обов'язкових результатів навчання учнів у математичній освітній галузі.

Збірник містить практичні задачі різних видів і рівнів складності. Також є задачі для допитливих, для тих, хто намагається розширити і поглибити свої знання. Це задачі з цікавими сюжетами, математичні жарти, головоломки, деякі несподівані практичні ситуації.

Як успішно використовувати цей збірник?

Увесь матеріал поділено на параграфи, а параграфи — на пункти. На початку кожного параграфа наводяться деякі корисні поради (вказівки, формули, прийоми розв'язування), використання яких допоможе розв'язати задачі параграфа. Тож, приступаючи до розв'язування задач параграфа, ознайомтеся з відповідними порадами.

Задачі згруповані за темами та за способами розв'язування. Наприклад, до теми «Властивості кола і круга» включені задачі на відшукання центра предметів, що мають форму круга; знаходження висоти, глибини, відстані; облаштування на місцевості клумб, ділянок землі, ковзанок тощо, що мають форму круга. У темі «Геометричне місце точок» вміщені задачі, що стосуються рівних та найкоротших відстаней; побудови прямих на місцевості (магістралей, каналів, вулиць, залізничних колій, шириною яких можна знехтувати, тощо).

Геометричні задачі є моделями задач практичного змісту. Тому рекомендується задачі суто геометричні (Г) і задачі практичного змісту (П) не віддаляти в навчальному часі, а розглядати як взаємно обернену діяльність:

(Г) ↔ (П).

Виробляючи вміння застосовувати властивості й ознаки геометричних фігур на практиці, спочатку пропонується розв'язати геометричну задачу, а потім — відповідну задачу практичного змісту, де використовується геометрична задача. Надалі, розв'язуючи задачі практичного змісту, виконуємо обернену дію — переходимо від даної практичної задачі до геометричної, яка є її моделлю, розв'язуємо її та інтерпретуємо одержаний результат.

Ще однією особливістю збірника є рубрики «Геометричні хитрощі», «Геометричні несподіванки». Рубрики включають задачі, які можна зустріти в повсякденному житті, але для їх розв'язання потрібно проявити нестандартність мислення, деяку винахідливість та кмітливість.

Перевірити набуті вміння розв'язувати задачі допоможуть запитання рубрики «Перевірте свої досягнення», які є після кожного параграфа.

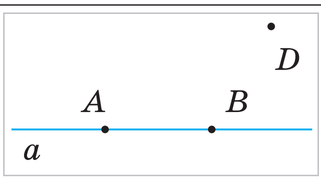
7 КЛАС

§ 1. ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

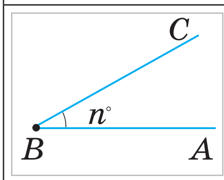
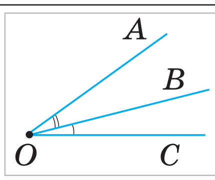
Корисні поради. Застосовуючи геометрію на практиці, використовуйте елементарні фігури та їх властивості (прямої, розміщення точок на прямій, вимірювання відрізків та кутів). Точками обирайте об'єкти, розмірами яких можна знехтувати (кілочки, віхи, споруди, рослини, міста, зображені на карті, тощо), прямими — об'єкти, шириною яких можна знехтувати (магістралі, канали, вулиці, залізничні колії тощо), відрізками на місцевості — довжини, висоти предметів, відстані між об'єктами на поверхні землі (населеними пунктами, спорудами тощо).

Ознайомтеся з даними, які наведені в таблиці 7.1.

Таблиця 7.1

Елементарні фігури в геометрії	**Елементарні фігури на практиці**
Точки і прямі	
 *Точки* A, B, D. *Пряма* a або AB. ***Властивість прямої*** Через будь-які дві точки можна *провести* пряму, і тільки одну. ***Властивість розміщення точок на прямій*** З трьох будь-яких точок прямої одна і тільки одна точка лежить між двома іншими.	*Точки:* кілочки, віхи, споруди, будівлі, рослини, міста, зображені на карті, розмірами яких можна знехтувати, тощо. *Прямі*: магістралі, канали, вулиці, залізничні колії, шириною яких можна знехтувати, тощо. ***Властивість прямої*** Через будь-які два об'єкти можна *провішити* пряму, і тільки одну. ***Властивість розміщення об'єктів на прямій*** З трьох будь-яких об'єктів, що розміщені на прямій, один і тільки один лежить між двома іншими.

Закінчення таблиці 7.1

Відрізки	
 *Відрізок AB.* ***Властивості вимірювання відрізків*** Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою його точкою. ***Способи діяльності*** 1. Щоб встановити, чи лежить точка C між точками A і B, перевірте правильність рівності $AB = AC + CB$. 2. Щоб з'ясувати, чи лежать на одній прямій три точки A, B і C, переконайтесь у правильності однієї з рівностей: $AB = AC + CB$, або $AC = AB + BC$, або $BC = BA + AC$.	*Відрізки:* довжини, висоти предметів, відстані між об'єктами на поверхні землі (населеними пунктами, спорудами тощо). ***Властивість вимірювання відрізків*** Кожна відстань між двома даними об'єктами дорівнює сумі відстаней, на які вона розбивається будь-яким об'єктом, що лежить між даними об'єктами. ***Способи діяльності*** 1. Щоб встановити, чи лежить об'єкт C між об'єктами A і B, перевірте правильність рівності $AB = AC + CB$. 2. Щоб з'ясувати, чи лежать на одній прямій три об'єкти A, B і C, переконайтесь у правильності однієї з рівностей: $AB = AC + CB$, або $AC = AB + BC$, або $BC = BA + AC$.
Кути	
  $\angle ABC$. ***Властивості вимірювання кутів*** Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами. ***Спосіб діяльності*** Щоб встановити, чи проходить промінь OB між сторонами $\angle AOC$, перевірте правильність рівності $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$.	*Кути:* підйомів доріг, відкосів, кути, під яким видно деякі предмети, кути між елементами будівлей, споруд тощо. ***Властивість вимірювання кутів*** Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами. ***Спосіб діяльності*** Щоб встановити, чи проходить промінь OB між сторонами $\angle AOC$, перевірте правильність рівності $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$.

1. Властивості прямої

Корисні поради. Для практичних цілей часто виникає необхідність виконувати простіші побудови на місцевості. Такі побудови потрібні при будівництві споруд, прокладанні доріг, різних вимірюваннях об’єктів. Побудови на поверхні землі відрізняються від побудов циркулем і лінійкою на аркуші паперу. На папері циркулем ми можемо проводити будь-які кола або їх дуги, а лінійкою — будь-які прямі. На місцевості, де відстані між точками можуть бути великими, побудови мають свою специфіку.

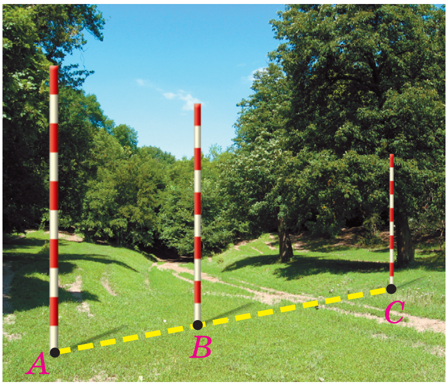
Прямі на місцевості не будують, а провішують за допомогою візування, тобто відмічають на них віхами (кілками, загостреними з одного боку) достатньо густу сітку точок. Спочатку визначають пряму двома віхами A і B, потім інші віхи C, D,... ставлять між ними так, щоб при спостереженні з-за віхи A вони закривали віху B. Якщо відстані невеликі (наприклад, під час розбивки газонів, доріжок, фундаментів під забудову тощо), то прямі проводять за допомогою мотузки. Аналогічно діють муляри, теслі, напинаючи шнур між точками, через які потрібно провести пряму. Спеціальним циркулем можемо відкладати на даних провішених прямих конкретні відстані.

Розв’яжіть простіші задачі (7.1–7.11), використовуючи властивості прямої та розміщення об’єктів на прямій.

7.1. Поясніть, як провішують пряму за допомогою віх (мал. 7.1).

7.2. На місцевості кілочками позначено дві точки однієї прямої й дві точки другої прямої. Як знайти точку перетину цих прямих? Розгляньте два випадки розміщення точок.

7.3. На місцевості позначено точки A і B. Знайдіть точку C, симетричну точці A відносно точки B.



Мал. 7.1

7.4. Для побудови перпендикулярних прямих на місцевості застосовують екер (див. мал. 7.2). Поясніть за малюнком 7.3, як за допомогою цього приладу будують прямий кут.

Удоскональте цей прилад так, щоб він давав змогу відкладати на місцевості ще й кути 45° та 60°.

Мал. 7.2

Мал. 7.3

7.5. Як за допомогою шнура, натертого крейдою, відмітити на класній дошці пряму? Як користуються шнуром для проведення прямої муляри і теслі?

7.6. Артему і Поліні запропонували перевірити, чи рівний край має лінійка. Артем перевірив у такий спосіб: через дві точки A і B за допомогою лінійки провів лінію. Потім лінійку повернув на площині на 180° і через ті самі точки знову провів лінію. Поліна виконала перевірку так: через дві точки A і B за допомогою лінійки також провела лінію. Потім лінійку повернула в просторі навколо прямої AB і через ті самі точки знову провела лінію. У Артема і Поліни лінії збіглися. Який висновок можна зробити?

7.7. Як, не користуючись лінійкою, перевірити чи за прямою відрізано папір, картон, фанеру?

7.8. Як за допомогою лінійки перевірити, чи прямий кут у косинця?

7.9. Щоб влучити в мішень у тирі, треба прицілитися. Поясніть, які умовні точки мають бути на одній прямій.

7.10. На карті України (див. мал. 7.4) знайдіть обласні центри, які розташовані:
1) на лівому березі Дніпра;
2) на правому березі Дніпра;
3) на умовній прямій «Луцьк–Рівне»;
4) на умовній прямій між містами Чернігів і Вінниця.
Запишіть відповідь.

Мал. 7.4

7.11. Поясніть зміст таких речень: 1) затемнення Сонця відбувається тоді, коли Місяць займає положення між Сонцем і Землею; 2) затемнення Місяця відбувається тоді, коли Земля займає положення між Сонцем і Місяцем.

2. Знаходження відстаней на місцевості

Корисні поради

1. У задачах практичного змісту для різних відстаней використовують різні назви: довжина, ширина, висота, глибина, дистанція, інтервал тощо. Розв'язуючи ці задачі, використовують моделі відстаней — відрізки.
2. Щоб встановити, чи лежить об'єкт C між об'єктами A і B, перевірте правильність рівності $AB = AC + CB$. З цієї рівності можете знайти довжину одного з трьох відрізків AB, AC або CB, знаючи довжини двох інших.
3. Щоб з'ясувати, чи лежать на одній прямій три об'єкти A, B і C, переконайтесь у правильності однієї з рівностей: $AB = AC + CB$, або $AC = AB + BC$, або $BC = BA + AC$.
4. Геометрична задача може використовуватись як математична модель для розв'язування практичної задачі. Тому розв'язання задачі полегшується, якщо спочатку розв'язати відповідну

геометричну задачу. Наприклад, розгляньте пару задач, де геометрична задача (**Г**) використовується під час розв'язування наступної задачі практичного змісту (**П**):

(**Г**). Чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо $AB = 17$ см, $AC = 6{,}5$ см, $BC = 10{,}5$ см?

(**П**). Відстань «Луцьк–Рівне» за прямою становить 66 км, «Рівне–Житомир» — 175 км, а «Луцьк–Житомир» — 240 км. Чи знаходяться ці міста на одній прямій?

Розв'яжіть спочатку геометричну задачу* (Г)*, а потім — відповідну задачу практичного змісту* (П)*, де використовується геометрична задача.

7.12. (**Г**). Відомо, що на прямій точки R і T лежать з одного боку від точки S, а точка T не лежить між точками S і R. Розмістіть ці точки на прямій.

(**П**). Три будинки X, Y, Z розміщені на прямолінійній вулиці. Будинки X і Y лежать з одного боку від будинку Z, а будинок Y не лежить між будинками X і Z. Зробіть малюнок.

7.13. (**Г**). Точка B лежить на відрізку AC. Знайдіть відрізок AB, якщо $AC = 15$ см, $BC = 6$ см.

(**П**). Відстань між Сумами і Житомиром дорівнює 480 км. Житомир розташований на відстані 140 км від Києва. Визначте відстань від Києва до Сум, вважаючи, що всі три міста розташовані на одній прямій.

7.14. (**Г**). Точки A, B, C розміщені на прямій, причому точка B лежить між точками A і C. Знайдіть довжину відрізка AC, якщо $AB = 10$ см, а відрізок BC у два рази менший.

(**П**). Бібліотека, школа та кінотеатр розташовані на прямолінійній вулиці, причому кінотеатр знаходиться між бібліотекою й школою. Знайдіть відстань між бібліотекою і школою, якщо відстань між бібліотекою та кінотеатром дорівнює 400 м, а між кінотеатром і школою у два рази менша.

7.15. (**Г**). Точки A, B, C лежать на прямій лінії. Відстань між точками A і B дорівнює 10 см, а між точками A і C — 6 см. Знайдіть відстань BC. Розгляньте два випадки.

(**П**). Три школи розміщено уздовж прямолінійної вулиці. Відстань між школами № 1 і № 2 становить 5 км, а між школами № 1 і № 3 — 4 км. Якою може бути відстань між школами № 2 і № 3?

Надалі, розв'язуючи задачі практичного змісту, робіть навпаки — спочатку сформулюйте відповідну геометричну задачу (перейдіть від практичної задачі до геометричної) та розв'яжіть її, а потім повертайтесь до розв'язання практичної задачі.

7.16. Від центра агрофірми до центра її відділення прокладають телефонну лінію. Для цього через кожні 50 м слід поставити стовп. Скільки потрібно заготовити стовпів, якщо довжина лінії становить 2 км?

7.17. Через кожен метр 30-метрового прямого паркану поставлено стовп. 1) Скільки поставлено стовпів? 2) Яка відстань між першим стовпом від початку і десятим від кінця?

7.18. Потрібно заготовити машину дров, розпилявши 4- і 5-метрові колоди однакової товщини на шматки завдовжки 1 м. Які колоди вигідніше розпилювати — коротші чи довші?

7.19. Зобразіть точками на площині два населені пункти A і B, відстань між якими дорівнює 8 км. Зобразіть між населеними пунктами A і B таке місце C, щоб виконувалась умова $AC = 3 \cdot BC$. Чому дорівнює відстань AC?

7.20. Накресліть на аркуші паперу відрізок AB. Як треба зігнути цей аркуш, щоб поділити відрізок AB навпіл.

‹ Наближені способи визначення відстаней ›

Корисні поради

Якщо відповідних інструментів для визначення відстаней немає, то скористайтеся наближеними способами.

■ За відрізками на місцевості

Спосіб полягає у здатності спостерігача уявляти на місцевості звичні відстані, наприклад 50, 100, 200, 300, 400, 500 метрів. Спостерігач подумки підраховує скільки разів потрібна відстань відкладеться до об'єкта, який спостерігає. При цьому враховуємо: великі предмети (ліс, населений пункт, горби) здаються ближчими ніж дрібні предмети, які знаходяться на тій же відстані; якщо між спостерігачем і предметом немає інших об'єктів, то здається, що він ближче, якщо є — далі.

7.21. За допомогою цього способу визначте відстань від свого будинку до сусіднього, до найближчого магазину та школи.

■ **За видимістю предмета.** Визначаючи відстань, можна скористатись даними таблиці 7.2.

Таблиця 7.2

Ознаки видимості	Відстань
Видно одноповерхові будинки	5 км
Розрізняються вікна в будинках	4 км
Видно димарі на покрівлі будинків	3 км
Видно окремих людей	2 км
Видно стовпи ліній зв'язку	1,5 км
Розрізняються стовбури дерев у лісі	1 км
Помітні рухи рук та ніг людини	700м
Видно колір та частини одягу, овал обличчя	250–300 м
Видно черепицю на покрівлях будинків, листя дерев	200 м
Видно риси обличчя, руки	100 м
Видно очі у виді крапок	70 м

7.22. На якій відстані від будинку (приблизно) перебуває людина, яка:

1) уже бачить будинок, але ще не бачить вікна в ньому;

2) уже бачить вікна у будинку, але ще не бачить димар?

■ **Вимірювання кроками (довжиною кроку).** Спочатку визначте довжину свого кроку, щоб потім вимірювати відстань кроками. Щоб дізнатися про довжину кроку, відміряйте рулеткою відстань, наприклад, 10 м і пройдіть цю відстань кілька разів. Запишіть, скільки кроків ви робили щоразу. Знайдіть середню кількість кроків. Розділіть 10 м на отриману середню кількість кроків — це і буде довжина вашого кроку.

Для приблизного вимірювання довжини кроків можна користуватися формулою: $D = \frac{P}{4} + 37$ см, де D — довжина кроку, см; P — зріст людини, см.

7.23. Виміряйте кроками і переведіть у метри:
1) довжину класної кімнати;
2) довжину шкільного коридору;
3) відстань від вашого дому до найближчої зупинки транспорту.

■ **За часом та швидкістю руху.** Для наближеного визначення довжини пройденого шляху, середню швидкість множать на час руху. Середня швидкість руху пішохода становить ≈ 5 км/год.

■ **Розмахом пальців.** Вимірюючи невеликі довжини пальцями руки, краще не відривати руку від поверхні, яку вимірюємо, а приставляти один палець до другого, який потім знову витягуємо в заданому напрямку і т.д.

7.24. Знайдіть: 1) довжину розмаху ваших пальців; 2) довжину поверхні вашого столу.

■ **За лінійними розмірами предметів.** Лінійкою, розташованою на відстані 50 см від очей, вимірюють у міліметрах висоту предмета, що спостерігається. Потім висоту предмета в сантиметрах ділять на виміряну лінійкою в міліметрах, результат множать на стале число 5. Отримують наближену відстань до предмета в метрах. Наприклад. Телеграфний стовп заввишки 6 м затуляє на лінійці відрізок 10 мм. Отже, відстань до нього: $S = \frac{600}{10} \times 5 = 300$ (м).

7.25. Виміряйте цим способом відстань від місця вашого перебування до будинку, висота якого 30 м.

Відстані на плані чи карті

Корисні поради

Якщо потрібно за відстанню на карті чи плані знайти відстань на місцевості, то спочатку виміряйте цю відстань лінійкою (якщо шлях непрямий, наприклад уздовж звивистої річки, його виміряйте ниткою, циркулем або спеціальним приладом — курвіметром), а потім виміряну відстань помножте на масштаб (наприклад, масштаб 1 : 1000000, а відстань на карті чи плані 3 см, тоді відстань на місцевості дорівнюватиме 4 × 1000000 = 4000000 см = = 40 км). Якщо на зображенні потрібно збільшити розміри реальних маленьких предметів, наприклад, у 100 разів, то записуєте 100 : 1.

7.26. Масштаб карти 1 : 25000. Яка відстань на місцевості між об'єктами, якщо на карті вона становить 2 см?

7.27. Відстань між містами на карті становить 6 см. Скільки кілометрів потрібно пройти туристам, якщо масштаб карти 1 : 200000.

7.28. Довжина деталі дорівнює 60 мм. Який використано масштаб, якщо на плані довжина деталі дорівнює 120 мм?

7.29. На карті Києва, виконаній у масштабі 1 : 30 000, довжина квартала: 1) між вулицями Хрещатик і Євгена Чикаленка дорівнює 2 см; 2) між вулицями Липською та Шовковичною дорівнює 1,5 см. Яка довжина цих кварталів?

7.30. За картою України назвіть кілька міст, розташованих західніше, східніше, північніше та південніше Києва. Визначте відстані до цих міст, користуючись масштабом карти.

7.31. Визначте напрямок своєї мандрівки, якщо ви спускатиметеся Дніпром від Києва до Чорного моря. Яка довжина шляху такої подорожі?

7.32. Майстерня має довжину 40 м і ширину — 20 м. Посередині коротшої стіни розташовано двері завширшки 4 м, а довша стіна має чотири вікна з рівними простінками між ними. Ширина кожного вікна дорівнює 4 м. Накресліть план майстерні в масштабі 1 : 400.

7.33. Ділянка землі має форму прямокутника зі сторонами 350 м і 220 м. Які розміри буде мати зображення цієї ділянки на плані, виконаному в масштабі 1 : 500?

3. Вимірювання кутів

Корисні поради

1. У задачах практичного змісту кути — це підйоми доріг, відкоси, кути, під якими видно деякі предмети, кути між елементами будівлей, споруд тощо.
2. Щоб встановити, чи проходить промінь OB між сторонами $\angle AOC$, перевірте правильність рівності $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$. Із цієї рівності ви можете знайти градусну міру одного з трьох кутів: $\angle AOC$, $\angle AOB$ або $\angle BOC$, знаючи градусні міри двох інших.

3. *Суміжні кути*: щоб знайти кут, суміжний з даним кутом, відніміть від 180° градусну міру даного кута. Якщо один із суміжних кутів гострий, то другий кут тупий, і навпаки. Якщо два суміжні кути рівні, то вони прямі. Якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути також рівні. Бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут.
4. *Вертикальні кути*: якщо два кути рівні, то вертикальні з ними кути також рівні. Бісектриси вертикальних кутів утворюють розгорнутий кут.

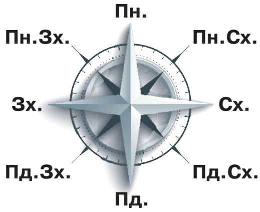
Кути на місцевості

7.34. Автомобільна дорога Київ–Одеса проходить через місто Умань. Вважатимемо, що всі три міста розташовані на одній прямій. Поясніть, до яких міст можуть прямувати два автомобілі, якщо вони виїхали з Умані: 1) у протилежних напрямках; 2) в одному напрямку. Зробіть малюнок.

7.35. Туристи пройшли від базового табору в напрямку на північ 4 км і повернули на схід. Пройшовши за цим напрямком 1 км, вони пройшли на північ ще 2,5 км. Накресліть їхній шлях на плані в масштабі 1 км в 1 см. За допомогою лінійки з'ясуйте, на якій відстані від базового табору вони були, пройшовши: 1) 5 км, 2) 7,5 км.

7.36. Північний вітер змінився на північно-східний. Який кут повороту вітру?

7.37. Визначте кут між напрямками (див. мал. 7.5): 1) південь і схід; 2) південь і північ; 3) південь і захід; 4) північ і південний захід; 5) захід і північний захід; 6) схід і північ; 7) схід і північний захід; 8) північний захід і південний схід.

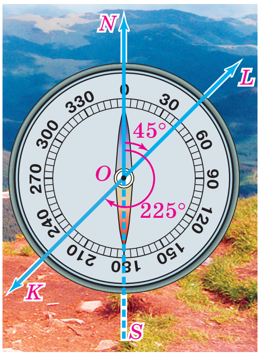


Мал. 7.5

7.38. У туристичному поході користуються *компасом* (див. мал. 7.6) — приладом, стрілка якого показує напрямок на північ, а нанесені поділки допомагають визначати кут між цим напрямком і напрямком руху. Такий кут, якщо його відкладати від напрямку на північ за стрілкою годинника, називають *азимутом*. Азимут напрямку визначають у межах від 0° до 360°. На малюнку 6 ви бачите: ON — напрямок на північ; OL і OK — напрямки руху; азимут напрямку OL становить 45°; азимут напрямку OK дорівнює 225°.

Визначте азимут:

1) напрямку OK (мал. 7.6);
2) за картою України напрямку:
   а) Київ–Чернігів;
   б) Київ–Полтава;
   в) Київ–Вінниця;
   г) Київ–Тернопіль.



Мал. 7.6

7.39. Доведіть, що на компасі бісектриса кута між напрямками «північ» і «схід» та бісектриса кута між напрямками «південь» і «захід» лежать на одній прямій.

7.40. (*Жарт.*) Від аркуша паперу відрізали один з кутів. Скільки кутів матиме аркуш?

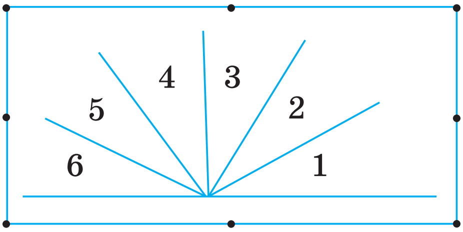
Годинник

Використайте, за потреби, геометричну задачу (Г) під час розв'язування задач практичного змісту (П).

7.41. (**Г**). На малюнку 7.7 розгорнутий кут поділено на 6 рівних кутів. Знайдіть: 1) кут, що дорівнює сумі кутів $1 + 2 + 3 + 4$; 2) половину кута 1; 3) кут, суміжний з кутом 6.

(**П**). Розгляньте малюнок 7.8.

1) Який кут утворюють стрілки годинника?
2) Чому дорівнює кут, суміжний з кутом, утвореним стрілками годинника?
3) Чому дорівнює кут, вертикальний куту, утвореному стрілками годинника?



Мал. 7.7

Мал. 7.8

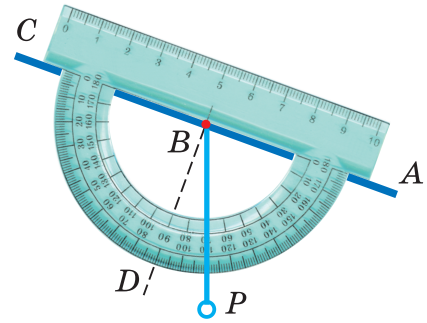
7.42. На скільки градусів повернеться хвилинна стрілка за: 1) 1 хв; 2) 5 хв; 3) 10 хв?

7.43. Котра тепер година, якщо стрілки годинника утворюють кут 105°, а хвилинна стрілка показує на цифру 6?

7.44. Чому дорівнює кут між стрілками годинника, якщо він показує:
1) 2 год 00 хв; 2) 6 год 00 хв; 3) 12 год 30 хв; 4) 14 год 35 хв?

■ Простіший прилад для вимірювання кутів

7.45. На малюнку 7.9 показано, як можна знайти кут нахилу лінії зору до горизонтального напрямку. Для цього дивляться на предмет уздовж лінійки транспортира AC і відмічають, на яку поділку показує висок BP. Поясніть, чому так можна знаходити шуканий кут.



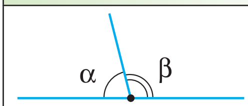
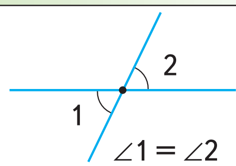
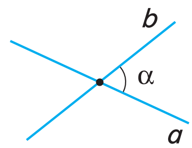
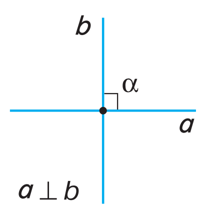
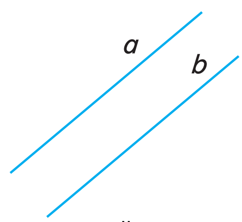
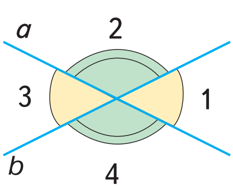
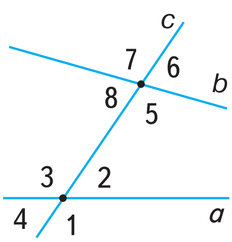
Мал. 7.9

4. Взаємне розміщення прямих

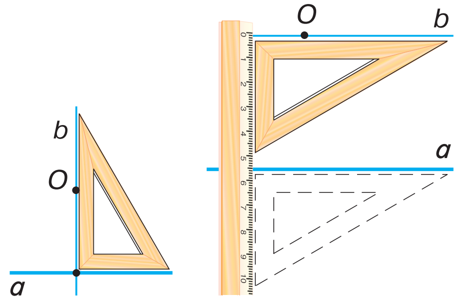
Корисні поради

Ознайомтеся з розміщенням прямих та їх властивостями, які наведені в таблицях 7.3 і 7.4.

Таблиця 7.3

<table>
<tr><th colspan="2">КУТИ</th><th colspan="2">ПРЯМІ</th></tr>
<tr><th>суміжні</th><th>вертикальні</th><th>перетинаються</th><th>не перетинаються</th></tr>
<tr><td>$\alpha + \beta = 180^\circ$</td><td>$\angle 1 = \angle 2$</td><td rowspan="3">під кутом $\alpha < 90^\circ$

під кутом $\alpha = 90^\circ$ (перпендикулярні)

$a \perp b$</td><td rowspan="3">(паралельні)

$a \parallel b$</td></tr>
<tr><th>між двома прямими</th><th>при двох прямих і січній</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Вертикальні:
$\angle 1$ і $\angle 3$,
$\angle 2$ і $\angle 4$
</td><td rowspan="2">Внутрішні:
а) односторонні
$\angle 2$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 8$;
б) різносторонні
$\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 3$ і $\angle 5$
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Через точку $\frac{\text{поза прямою або на прямій}}{\text{поза прямою}}$ можна провести єдину пряму, $\frac{\text{перпендикулярну}}{\text{паралельну}}$ даній</td></tr>
</table>

Закінчення таблиці 7.3

суміжні: $\angle 1$ і $\angle 2$, $\angle 2$ і $\angle 3$, $\angle 3$ і $\angle 4$, $\angle 4$ і $\angle 1$	*відповідні:* $\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 8$, *зовнішні*: а) односторонні $\angle 1$ і $\angle 6$, $\angle 4$ і $\angle 7$; б) різносторонні $\angle 1$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 6$	

Таблиця 7.4

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

ОЗНАКИ

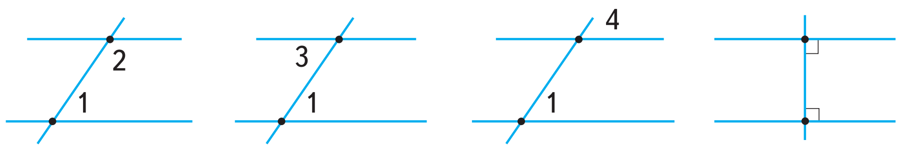
ЯКЩО

при двох прямих і січній:
- сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°
- внутрішні різносторонні кути рівні
- відповідні кути рівні

дві прямі:
- перпендикулярні до третьої прямої

ТО

дані прямі паралельні



ВЛАСТИВОСТІ

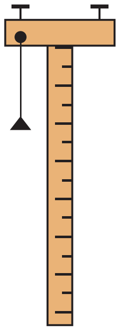
ЯКЩО

- дві прямі паралельні і їх перетинає третя пряма (січна)
- пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих

ТО

- сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°
- внутрішні різносторонні кути рівні
- відповідні кути рівні
- вона перпендикулярна і до другої прямої

■ **Як виміряти на місцевості висоту** (берега річки над водою, висоту схилу яру над його дном тощо)? Щоб визначити на місцевості висоту, наприклад, горба, потрібно виміряти відстань за вертикаллю від його підошви до вершини. Це можна зробити за допомогою нівеліра. Нівелір — прилад у вигляді вертикальної рейки заввишки 1 м і горизонтальної планки з виском (тягарцем) (мал. 7.10).



Мал. 7.10

Мал. 7.11

7.46. На малюнку 7.11 показано, як виміряти висоту горба за допомогою нівеліра. Поясніть вимірювання.

■ **Перетин доріг**

7.47. Скільки прямих доріг необхідно прокласти, щоб сполучити будь-які два з чотирьох міст? Розгляньте всі можливі випадки. Зробіть малюнки.

7.48. Знайдіть кути, які утворилися в результаті перетину двох доріг, якщо:
1) всі ці кути рівні між собою;
2) сума двох з них дорівнює $50°$;
3) два з них відносяться як $1:2$.

7.49. Знайдіть кожний з кутів, які утворилися при перетині двох доріг, якщо:
1) сума двох із них дорівнює $56°$;
2) різниця двох із них дорівнює $58°$;
3) один із них становить $50\ \%$ від суміжного.

7.50. Знайдіть кути, утворені при перетині двох паралельних доріг третьою, якщо:
1) один із кутів дорівнює $107°$;
2) сума двох кутів дорівнює $142°$;
3) один із кутів у 8 разів більший за другий.

7.51. Як виміряти кут, вершина якого лежить за межами аркуша паперу?

7.52. Вулиця проходить з північного сходу на південний захід. У якому напрямку проходить паралельна їй вулиця? А перпендикулярна? Зробіть малюнки, вважаючи вертикальний край зошита напрямком на північ.

7.53. Учень ішов вулицею AB, у точці B повернув ліворуч під кутом $60°$ і пройшов шлях BC, а у точці C повернув праворуч під кутом $60°$ і пройшов шлях CD. Накресліть шлях учня. Чи буде $AB \parallel CD$?

Перегинаючи аркуш паперу

Корисні поради

Кожному з вас доводилося виготовляти різноманітні вироби, перегинаючи папір: кораблики, пілотки, літачки тощо. Проте за допомогою перегинання аркуша можна робити всі операції, що й лінійкою та циркулем.

Перегинання паперу — оригінальний підхід до розв'язування задач, основні поняття якого: пряма, точка і прямокутний або квадратний аркуш паперу. Роль прямих виконують краї аркуша та лінії згину, що утворюються при його перегинанні. Роль точок — вершини кутів аркуша і точки перетинів ліній згину одна з одною або з краями аркуша. Цей підхід ґрунтується на аксіомах, зокрема: існує єдина лінія згину, що проходить через дві дані точки; існує єдина лінія згину, що суміщає дві дані точки; існує єдина лінія згину, що суміщає дві дані прямі; існує єдина лінія згину, що проходить через дану точку і перпендикулярна до даної прямої, тощо. Тож візьміть аркуш паперу та розв'яжіть наступні задачі.

7.54. За допомогою перегинань аркуша паперу проведіть через дану точку O пряму, перпендикулярну до даної прямої AB.

7.55. За допомогою перегинань аркуша паперу проведіть через дану точку O пряму, паралельну даній прямій AB.

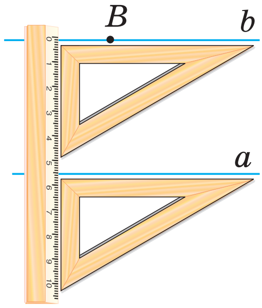
7.56. Виріжте з паперу круг. За допомогою перегинань знайдіть його центр.

7.57. Як треба зігнути аркуш паперу, щоб на згинах отримати дві прямі, що перетинаються під прямим кутом? А під кутом $45°$?

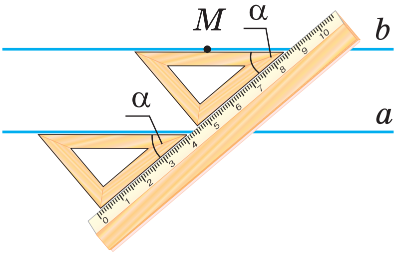
7.58. Як треба зігнути шматок тканини, щоб переконатися в тому, що два його краї паралельні?

Простіші прилади для проведення ліній

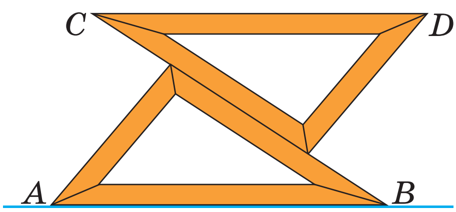
7.59. Як провести паралельні прямі, користуючись: 1) лінійкою і косинцем; 2) двома однаковими косинцями (див. малюнки 7.12–7.14). Обґрунтуйте побудову.



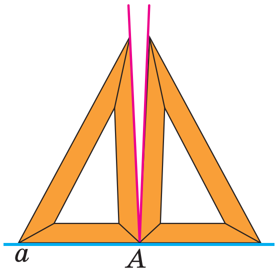
Мал. 7.12



Мал. 7.13



Мал. 7.14

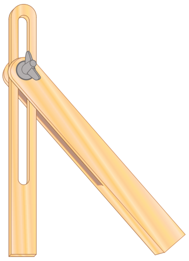


Мал. 7.15

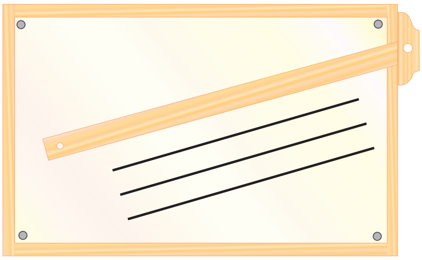
7.60. Прикладаючи косинець то одним, то іншим боком, через точку A проведено два перпендикуляри до прямої (мал. 7.15). Що можна сказати про такий косинець?

7.61. Для проведення паралельних прямих столярі й теслі користуються приладом, який називається *малкою* (мал. 7.16). Малка складається з двох пластин, з'єднаних гвинтом. Пластини можна встановити під будь-яким потрібним кутом і закріпити їх у такому положенні гвинтом.

На малюнку 7.17 показано, як у креслярській практиці будують паралельні прямі за допомогою *рейсшини*. Поясніть, як користуватися цими приладами.



Мал. 7.16



Мал. 7.17

Деякі хитрощі

Ці задачі можна зустріти в повсякденному житті. Щоб їх розв'язати, проявіть кмітливість і винахідливість.

7.62. У продавця конверти складені в пачки по 50 штук. Як йому швидше відрахувати 45 конвертів.

7.63. Потрібно виміряти лінійкою діаметр дуже тонкого дроту. Запропонуйте спосіб вимірювання.

7.64. Як від шматка тканини завдовжки 8 м відрізати, не відмірюючи:
1) 6 м; 2) 5 м?

7.65. Виріжте із цупкого паперу смужку. Згинанням поділіть її на 3; 4; 6 рівних частин.

7.66. Як можна швидко визначити приблизну кількість аркушів паперу, складеного у великий стос?

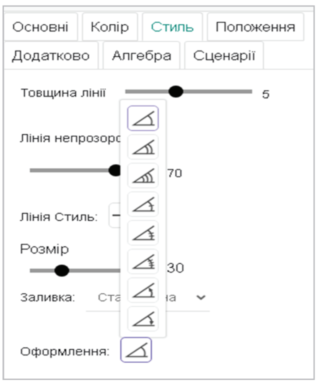
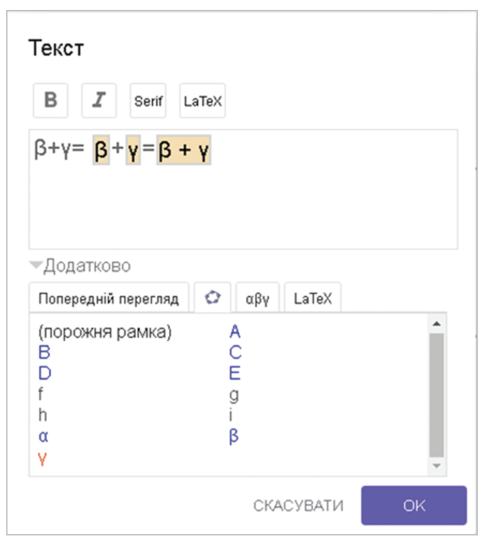
7.67. Як знайти товщину аркуша паперу вашого підручника з геометрії?

7.68. *Ситуація.* Визначення довжини діагоналі прямокутного паралелепіпеда.
Ваша роль. Будівельник.
Опис ситуації. Ви маєте цеглину й лінійку з міліметровими поділками.
Завдання. Виміряйте діагональ цеглини (відстань між найбільш віддаленими її вершинами), скориставшись лінійкою.

7.69. Настінному годиннику Марійки потрібно встановити більш точний час. Найближчий годинник, який показує правильний час, знаходиться в кількох хвилинах ходьби. Проте віднести туди настінний годинник вона не може. Як вчинити Марійці?

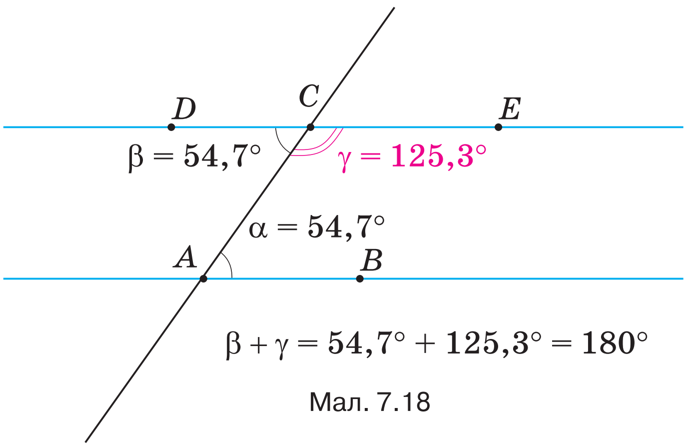
7.70. Побудуйте за допомогою програми GeoGebra дві паралельні прямі та січну. Переконайтесь у правильності тверджень про внутрішні односторонні та різносторонні кути.

Хід виконання

1.	Створіть новий файл GeoGebra — «Файл–Створити».
2.	За допомогою інструмента побудуйте пряму AB.
3.	За допомогою інструмента побудуйте паралельну пряму, вказавши на полотні довільну точку C.
4.	За допомогою інструмента виміряйте кути BAC, DCA, ACE, для цього поставте на прямій, що проходить через точку C, додаткові точки D (ліворуч) і E (праворуч) від точки C.
5.	 Нажавши на сам кут, змініть стиль, колір тощо.
6.	За допомогою інструмента ABC додайте на полотно напис. У поле «Редагування» введіть $\beta + \gamma =$ у меню «Об'єкти» виберіть β, введіть символ «+» у меню «Об'єкти» виберіть γ, введіть символ «=» Вставте пусте полотно. в пусте полотно введіть, вибираючи в меню «Об'єкти» β, введіть символ «+», введіть, вибираючи в меню «Об'єкти» γ.  Натисніть попередній перегляд, щоб переконатися у вірності набору. Натисніть ОК.

7.	Натиснувши на текст та налаштування, можете змінити колір, шрифт та його розмір.
8.	За допомогою змініть положення січної та паралельних прямих, зробіть висновки.
9.	Збережіть файл як «Завдання7.1.ggb».

Результат виконання завдання (мал. 7.18):



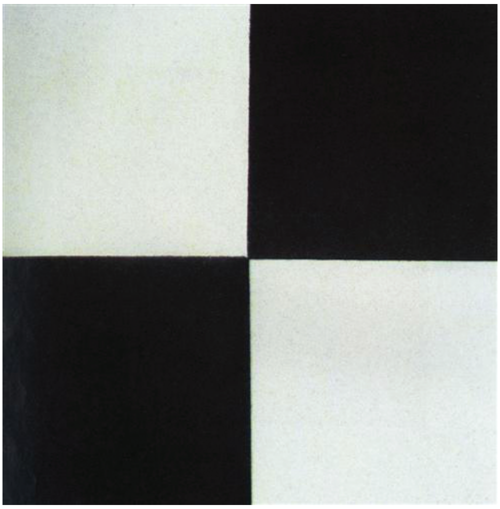
Мал. 7.18

Перевірте свої досягнення

1. Назвіть предмети довкілля, які можуть бути точкою, прямою, відрізком, кутом.
2. Учень сформулював властивість прямої. Яке з його тверджень є правильним?
   А. Через будь-які два об'єкти можна провішити безліч прямих.
   Б. Через будь-які два об'єкти можна провішити тільки одну пряму.
   В. Якщо відомі три об'єкти, то через них завжди можна провішити пряму і тільки одну.
3. Учень сформулював властивість розміщення об'єктів на прямій. Яке з його тверджень є правильним?
   А. На прямій можуть бути лише три об'єкти, один з яких лежить між двома іншими.
   Б. Якщо взяти об'єкти на одній прямій, то один з них лежатиме між двома іншими.
   В. З трьох довільних об'єктів, які лежать на даній прямій, лише один лежить між двома іншими.
4. Визначте менший кут між стрілками годинника, якщо він показує 16 год 00 хв.

5. Учень сформулював властивість вимірювання відрізків. Яке з його тверджень є правильним?
   А. Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків.
   Б. Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою точкою, що належить відрізку.
6. Поясніть Сергію:
   а) як встановити, чи лежить об'єкт *C* між об'єктами *A* і *B*;
   б) як з'ясувати, чи розміщені три об'єкти на одній прямій.
7. Як, не користуючись лінійкою, перевірити, чи за прямою відрізано папір, картон, фанеру?
8. Північний вітер змінився на північно-східний. Який кут повороту вітру?
9. Як за допомогою перегинання аркуша паперу провести через дану точку пряму, паралельну даній прямій?
10. Вулиця проходить із північного сходу на південний захід. У якому напрямку проходить паралельна їй вулиця?

Геометрія в мистецтві



Казимир Малевич.
Чотири квадрати

Казимир Северинович МАЛЕВИЧ
(*1879 — 1935*) —
український художник-авангардист польського походження, визначний діяч авангарду, засновник супрематизму, один з фундаторів кубофутуризму; педагог, теоретик мистецтва.

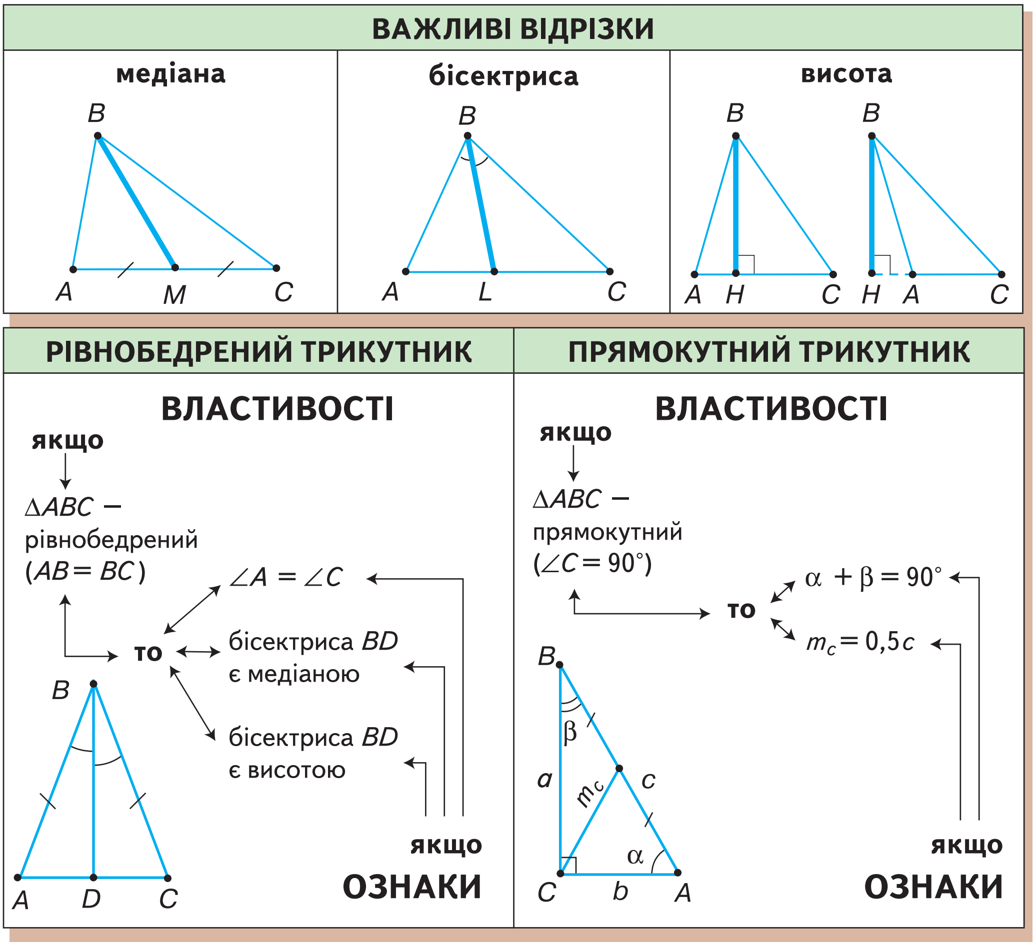
Казимир Малевич.
Письмовий стіл і кімната

§ 2. ТРИКУТНИКИ

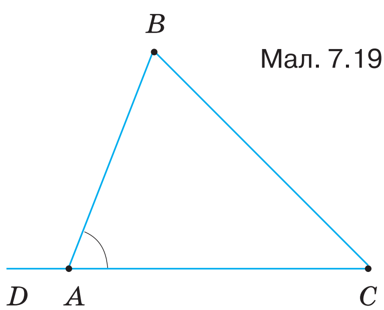
1. Властивості сторін і кутів трикутника

Корисні поради

Таблиця 7.5



1. Щоб установити, чи можна з трьох відрізків a, b і c утворити трикутник, перевірте, чи є найдовший з трьох відрізків меншим від суми двох інших.
2. Щоб знайти кут трикутника, наприклад, $\angle A$ ΔABC (мал. 7.19), обчисліть:
   1) $180° - (\angle B + \angle C)$, якщо відомі $\angle B$ і $\angle C$;
   2) $180° - \angle BAD$, якщо відомий зовнішній кут при вершині A;
   3) $90° - \angle$, якщо $\angle ABC$ — прямокутний з прямим $\angle C$.



Мал. 7.19

3. Щоб встановити, що трикутник ABC:

— **рівнобедрений**, перевірте, що у нього рівні або два кути, або дві сторони, або висота, медіана й бісектриса, проведені до однієї сторони, збігаються.

— **рівносторонній**, обґрунтуйте, що у нього або рівні три сторони, або рівні три кути, або збігаються центри описаного і вписаного кіл.

— **прямокутний**, установіть, що або сума гострих кутів дорівнює 90°, або медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

Виготовлення предметів трикутної форми

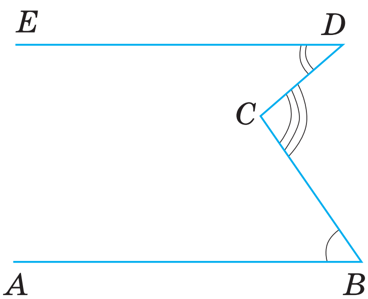
Мал. 7.20

7.71. Чи вистачить 12 см дроту, щоб зігнути з нього трикутник, одна зі сторін якого дорівнює: 1) 7 см; 2) 6 см; 3) 5 см?

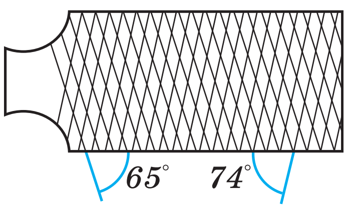
7.72. Потрібно виготовити з планок каркас дорожного знаку, периметр якого 150 см (мал. 7.20). Є планки задовжки 60 см, 45 см і 30 см. З планок якої довжини можна виготовити каркас?

7.73. **(Г)**. На малюнку 7.21 $\angle ABC = 49°$, $\angle CDE = 37°$. Знайдіть $\angle BCD$.
(П). Плоский напилок має перехресну насічку (мал. 7.22). Одна насічка утворює з його ребром кут 35°, а інша — 74°. Знайдіть гострий кут між двома різними насічками.

7.74. Оленка вирішила зробити із серветки квадратної форми дві однакові серветки трикутної форми та обшити їх мереживом по периметру (мал. 7.23) Для цього вона мала 180 см мережива. Чи вистачить Оленці цього мережива, якщо на оздоблення серветки квадратної форми необхідно 120 см мережива?



Мал. 7.21

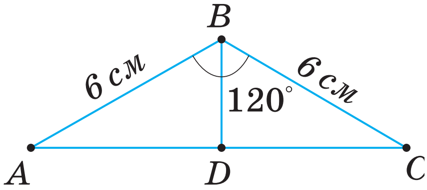


Мал. 7.22

Мал. 7.23

7.75. Васильку потрібно відпиляти кінець дошки з паралельними краями під кутом 45°. Як він це зробить?

Якщо виникли утруднення під час розв'язування практичної задачі (П), то спочатку розв'яжіть відповідну задачу геометричну (Г), а потім використайте її у розв'язуванні задачі практичного змісту.



Мал. 7.24

Відстані на будівлях

7.76. (**Г**). За даними на малюнку 7.24 знайдіть довжину відрізка BD.
(**П**). Крокви даху будинку утворюють між собою кут 120°. Знайдіть довжину крокви, якщо відстань від стелі до найвищої її частини (конька) дорівнює: 1) 4 м; 2) 1,5 м; 3) 2 м.

7.77. Крокви даху будинку утворюють між собою кут 130°. Під яким кутом нахилений дах до горизонту?

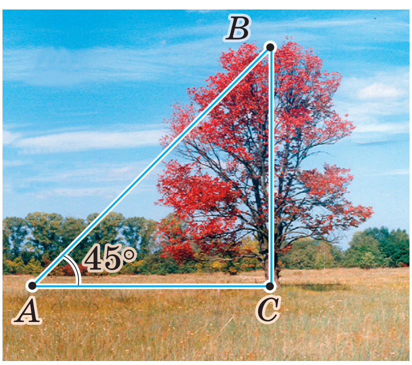
7.78. Знайдіть висоту даху, крокви якого мають форму рівнобедреного прямокутного трикутника, основа якого дорівнює 7 м.

7.79. Для черепичних дахів кут між кроквами беруть рівним приблизно 90°. Визначте висоту даху, якщо ширина будинку дорівнює: 1) 20 м; 2) 10 м; 3) 12 м.

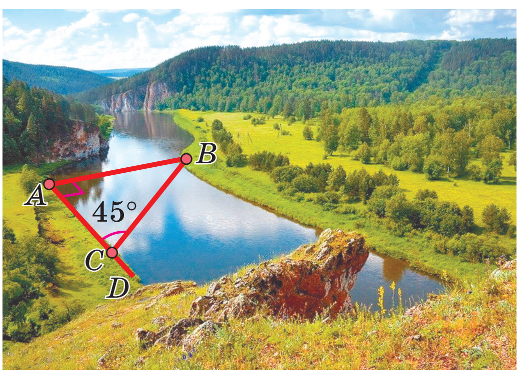
Визначення на місцевості довжини або висоти

7.80. (**Г**). Катет прямокутного трикутника дорівнює 5 см, а гострий кут — 45°. Знайдіть другий катет трикутника.
(**П**). Поясніть за малюнком 7.25, як можна знайти висоту дерева.

7.81. На малюнку 7.26 показано, як знайти відстань між двома пунктами A та B, з яких один (пункт B) неприступний. Поясніть вимірювання.



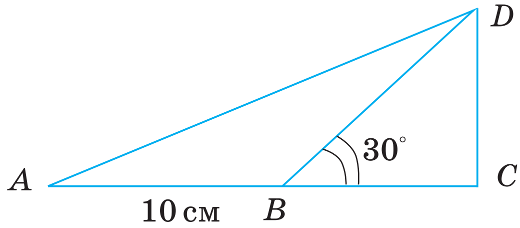
Мал. 7.25



Мал. 7.26

7.82. Як скористатися властивістю катета, що лежить проти кута 30°, для вимірювання відстаней між двома пунктами на місцевості, якщо між ними є перешкода, але до кожного з них можна підійти?

7.83. (**Г**). На малюнку 7.27 $AB = 10$ см, $\angle CBD = 30°$, $\angle CAD = 15°$ $DC \perp AC$. Знайдіть довжину відрізка CD.

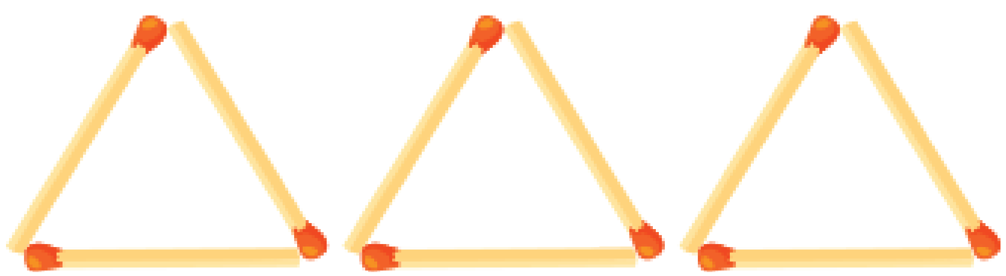


Мал. 7.27

(**П**). Для вимірювання висоти CD пагорба відійшли від нього по прямій і відмітили точку B так, щоб пагорб було видно під кутом 30°. Потім відійшли ще раз і відмітили точку A, з якої пагорб видно під кутом 15°. Яку відстань треба виміряти, щоб знайти висоту пагорба? Зробіть малюнок.

7.84. (**Г**). Накресліть довільний кут. Поділіть його на два рівні кути за допомогою лінійки з поділками.
(**П**). Поясніть, як на місцевості поділити кут на два рівні кути.

7.85. Викладіть сірники так, як показано на малюнку 7.28. Маємо три рівні трикутники. Перекладіть два сірники так, щоб отримати чотири рівні трикутники.



Мал. 7.28

Перегинаючи аркуш паперу (тканину)

7.86. Шматок тканини має форму трикутника. Як, перегинаючи тканину, встановити, чи є цей трикутник рівностороннім або хоча б рівнобедреним?

7.87. З аркуша паперу виріжте трикутник. За допомогою перегинання трикутника знайдіть: 1) бісектрису даного кута; 2) висоту, проведену з даної вершини (якщо кути при двох інших вершинах гострі; 3) медіану, проведену до даної сторони.

7.88. З аркуша паперу вирізано прямокутник. За допомогою перегинання отримайте з нього рівнобедрений трикутник.

7.89. З аркуша паперу виріжте прямокутник. За допомогою перегинання отримайте з нього рівносторонній трикутник.

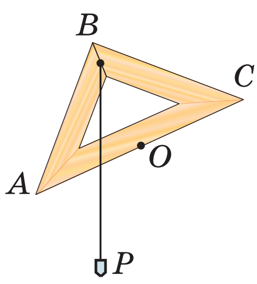
7.90. З аркуша паперу виріжте прямокутник. За допомогою перегинання отримайте з нього квадрат, сторона якого дорівнює меншій стороні прямокутника.

7.91. За допомогою перегинання довільного паперового трикутника продемонструйте той факт, що сума кутів при його вершинах дорівнює 180°.

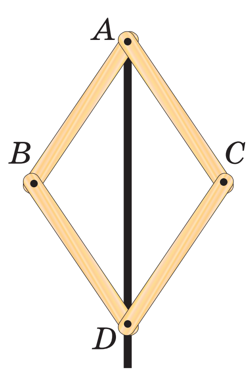
Простіші прилади для проведення ліній

7.92. На малюнку 7.29 зображено найпростіший прилад для проведення горизонтальних ліній. У ΔABC $AB = BC$, O — середина сторони AC, BP — висок. Поясніть, як користуватися цим приладом. У ватерпаса бічні сторони роблять однакової довжини. Тоді при горизонтальному положенні основи трикутника висок поділяє основу навпіл. Чому?

7.93. На малюнку 7.30 зображено найпростіший шарнірний прилад для поділу кута навпіл. У ньому всі ланки однакової довжини: $AB = BD = DC = AC$. Як користуватися цим приладом? Поясніть. Як скористатися цим приладом для побудови: 1) середини даного відрізка; 2) центра даного кола.



Мал. 7.29



Мал. 7.30

2. Ознаки рівності трикутників

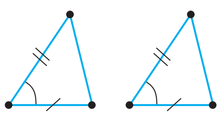
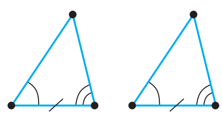
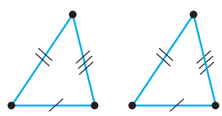
Корисні поради

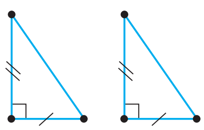
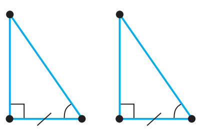
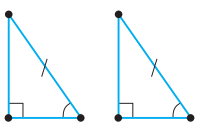
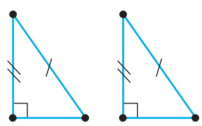
Щоб знайти на місцевості відстань до недоступного об'єкта або між двома об'єктами, якщо між ними є перешкода, але до кожного з них можна підійти:

1) розгляньте шукану відстань як невідому сторону одного з двох трикутників, які на малюнку будуємо, провівши допоміжні лінії;
2) доведіть, що трикутники рівні, скориставшись ознакою їх рівності;
3) зробіть висновок: відрізки рівні як відповідні сторони рівних трикутників.

У міркуваннях спирайтеся на ознаки рівності трикутників (табл. 7.6).

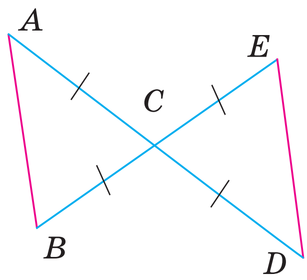
Таблиця 7.6

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ		
за двома сторонами і кутом між ними	за стороною і двома прилеглими кутами	за трьома сторонами
		

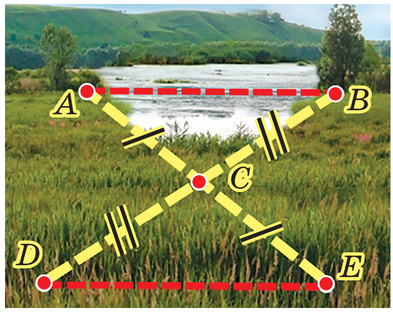
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ			
за двома катетами	за катетом і гострим кутом	за гіпотенузою і гострим кутом	за гіпотенузою і катетом
			

Визначення довжини на місцевості

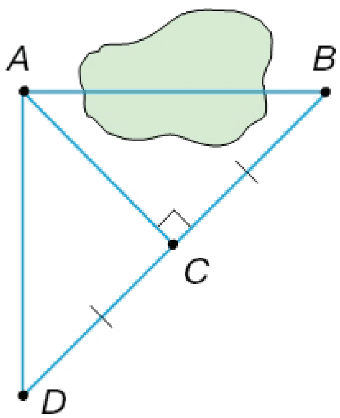
7.94. (**Г**). Дано: $AC = CD$, $BC = CE$ (мал. 7.31). Доведіть: $AB = DE$.
(**П**). На малюнку 7.32 показано, як виміряти відстань між пунктами A і B, між якими не можна пройти по прямій. Поясніть вимірювання.



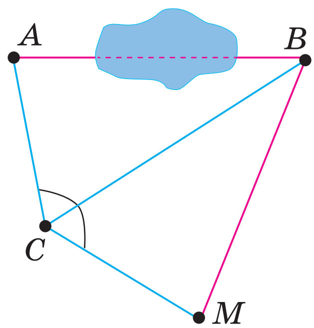
Мал. 7.31



Мал. 7.32



Мал. 7.33

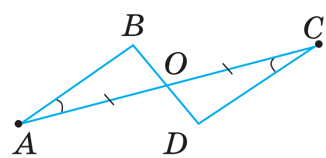


Мал. 7.34

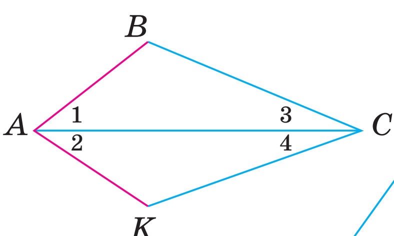
7.95. Скориставшись малюнками 7.33 і 7.34, запропонуйте інші способи розв'язання попередньої задачі.

7.96. (**Г**) У трикутників ABC і AKC $\angle BAC = \angle KAC$, $\angle BCA = KCA$ (мал. 7.35). Доведіть, що $AB = AK$.

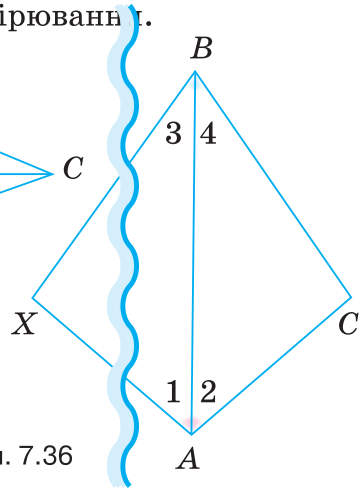
(**П**) На малюнку 7.36 показано, як можна знайти відстань між пунктами A та X, якщо до пункту X підійти не можна (наприклад, ширину річки). Поясніть вимірювання.



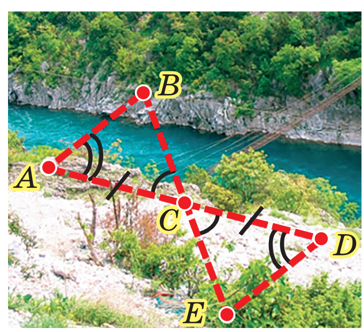
Мал. 7.37



Мал. 7.35



Мал. 7.36

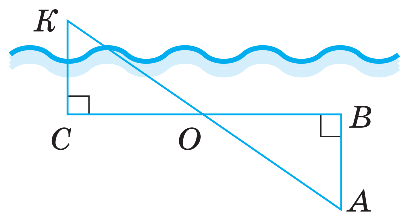


Мал. 7.38

7.97. (**Г**). Дано: $AO = OC$, $\angle OAB = \angle OCD$ (див. мал. 7.37). Доведіть: $AB = DC$.

(**П**). На малюнку 7.38 показано, як виміряти відстань між пунктами A і B, якщо до пункту B підійти не можна (наприклад, ширину річки). Поясніть вимірювання.

7.98. Розгляньте малюнок 7.39. У такий спосіб давньогрецький науковець Фалес Мілетський запропонував вимірювати відстань KC до ко-рабля, який знаходився в морі ($KC = AB$). Поясніть, як це робилося.



Мал. 7.39

Українські орнаменти

7.99. В основу багатьох українських орнаментів покладені різні комбінації геометричних фігур різного кольору (квадрати, ромби, паралелограми, відрізки) (мал. 7.40–7.42). Створіть орнамент з рівних трикутників і відрізків.

Мал. 7.40

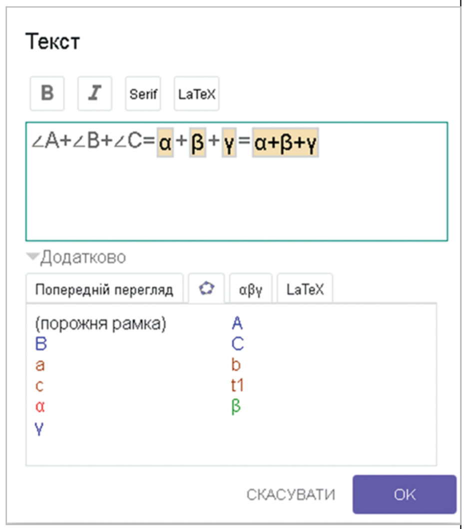
Мал. 7.41

Мал. 7.42

7.100. Створіть інтерактивне креслення в програмі GeoGebra, за допомогою якого можна переконатись, що сума кутів трикутника дорівнює 180°.

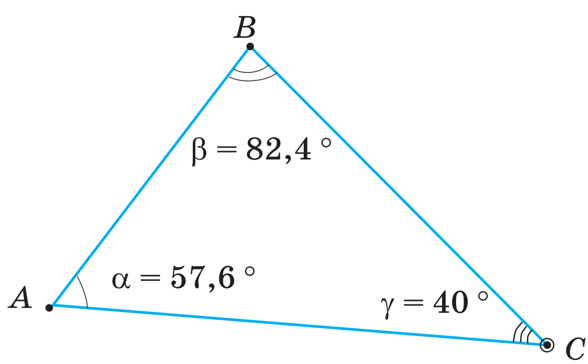
Хід виконання

1.	Створіть новий файл GeoGebra — «Файл–Створити».
2.	За допомогою інструмента «Многокутник»  побудуйте довільний трикутник ABC (точки краще ставити проти годинникової стрілки).
3.	За допомогою інструмента  виміряйте кути CAB, ABC, BCA.
4.	За допомогою інструмента  натискаючи на кожен кут, вибираючи налаштування, змініть колір та стиль.



5.	За допомогою інструмента «Текст» ABC додайте на полотно напис. У поле «Редагування» введіть «$\angle A+\angle B+\angle C=$ ». Символ «$\angle$» вводиться за допомогою меню «Символи». Не закриваючи вікна «Текст» у меню «Об'єкти», виберіть кут α. Введіть символ «+». У меню «Об'єкти» виберіть кут β. Введіть символ «+». У меню «Об'єкти» виберіть кут γ. Введіть символ «=». За допомогою меню «Символи» в порожню рамку, що з'явилася в полі «Правка», введіть $\alpha+\beta+\gamma$. Натисніть кнопку «ОК».
6.	За допомогою інструмента , натисніть на текст і змініть його шрифт, колір, розмір тощо.
7.	За допомогою інструмента натискаючи на одну з вершин, змініть трикутник, подивіться, чи буде постійною сума, зробіть висновки.
8.	Збережіть файл як «Завдання7.2.ggb».

Результат виконання завдання (7.43).



Мал. 7.43

$$\angle A + \angle B + \angle C = 57{,}6^\circ + 82{,}4^\circ + 40^\circ = 180^\circ$$

Перевірте свої досягнення

1. Як дізнатися, чи можна з трьох стержнів утворити трикутник?
2. Як знайти $\angle A$ трикутника ABC, якщо:
   1) відомі $\angle B$ і $\angle C$;
   2) відомий зовнішній кут при вершині A;
   3) ΔABC — прямокутний рівнобедрений з прямим $\angle C$.
3. Як дізнатися, чи можна з дроту даної довжини n виготовити трикутник, одна зі сторін якого дорівнює m.
4. Як відпиляти кінець дошки з паралельними краями під кутом 45°?
5. Як обґрунтувати рівність двох відстаней?
6. Якими способами можна знайти ширину річки, скориставшись властивостями прямокутного трикутника?
7. Поясніть, як виміряти відстань між пунктами A і B, між якими не можна пройти по прямій, але до кожного з них можна підійти. Запропонуйте кілька способів.
8. Поясніть, як виміряти відстань між пунктами A і B, якщо до пункту B підійти не можна (наприклад, ширину річки). Запропонуйте кілька способів.
9. Як знайти висоту даху, крокви якого мають форму рівнобедреного прямокутного трикутника з основою m.
10. Кусок тканини має форму трикутника. Як, перегинаючи тканину, встановити, чи є цей трикутник рівностороннім або хоча б рівнобедреним?

Геометрія в мистецтві

ТРИКУТНИКИ В АРХІТЕКТУРІ

Піраміди Хеопса в Єгипті

Пагода храму Кійомідзудера у Кіото

Фронтон Національного художнього музею України у Києві

§ 3. КОЛО І КРУГ

1. Властивості кола і круга

Корисні поради

Форму кола або круга мають різні предмети побуту, архітектурні форми, деталі машин і механізмів (втулка, клумба, піца, торт, тарілка, циркова арена, колесо, обхват дерева тощо). Під час розв'язування задач практичного змісту використовуємо означення понять, що стосуються кола і круга (радіус, діаметр, хорда) та їх властивості. Наприклад, при взаємодії колеса велосипеда (кола) і доріжки (прямої) матимемо одну спільну точку (випливає з означення дотичної), а кожна спиця перпендикулярна до доріжки в точці дотику до колеса (випливає з властивості дотичної: дотична до кола перпендикулярна до радіуса цього кола, проведеного в точку дотику).

Будемо використовувати також такі формули геометрії:

1. За даним радіусом R або діаметром D знайти довжину кола C і навпаки.

$C = 2\pi R = \pi D$, $R = \dfrac{C}{2\pi}$ або $D = \dfrac{C}{\pi}$.

2. За даним радіусом R або діаметром D знайти площу круга S і навпаки.

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi D^z}{4},\ R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \text{ або } D = \sqrt{\frac{4S}{\pi}}.$$

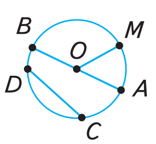
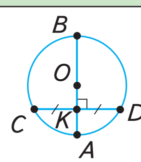
3. За даною довжиною кола C знайти площу круга S і навпаки.

$$C = 2\pi R,\ R = \frac{C}{2\pi},\ S = \pi\left(\frac{C}{2\pi}\right)^2 = \frac{C^z}{4\pi}.$$

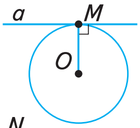
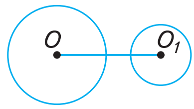
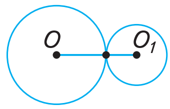
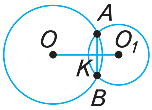
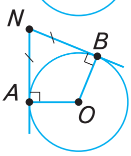
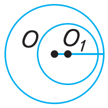
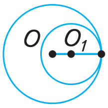
$$S = \pi R^2,\ R = \sqrt{\frac{S}{\pi}},\ C = 2\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

У міркуваннях спирайтеся на дані таблиці 7.7.

Таблиця 7.7

ВАЖЛИВІ ВІДРІЗКИ	ВЛАСТИВОСТІ
 AB — діаметр, CD — хорда, OM — радіус; $AB = 2OM$, $CD \le AB$	 Якщо $\dfrac{AB \perp CD}{CK = KD}$, то $\dfrac{CK = KD}{AB \perp CD}$

Закінчення таблиці 7.7

ДОТИЧНА ДО КОЛА		ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ КІЛ		
	a — дотична, $a \perp OM$			
	$AN = BN$			$AB \perp OO_1$, $AK = KB$

Розпочніть з розв'язання пар задач* (7.101–7.107) *— спочатку геометричної задачі* (Г)*, а потім задачі практичного змісту* (П)*, де використовується геометрична задача.

7.101. (Г). Знайдіть діаметр круга, площа якого дорівнює сумі площ двох кругів однакового діаметра 8 см. (П). Дві водопровідні труби однакового діаметра потрібно замінити однією трубою з тією самою пропускною здатністю. Яким має бути діаметр цієї труби порівняно з діаметром кожної з труб, які потрібно замінити?

7.102. (Г). Доведіть, що діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.

(П). Як визначити центр металевої деталі, скориставшись тільки кутником і лінійкою без поділок?

7.103. (Г). Діаметр круга дорівнює 12 см. Знайдіть довжину кола, що обмежує цей круг.

(П). Діаметр круглого диска дорівнює 14 см. Знайдіть довжину кола, що обмежує цей диск.

7.104. (Г). Знайдіть площу круга, діаметр якого дорівнює 10 см. (П). Знайдіть площу циркової арени діаметром 16 м.

7.105. (Г). Яка довжина кола, якщо площа круга дорівнює 25 см^2?

(П). Площа диска дорівнює 81 дм^2. Яка довжина кола, що обмежує цей диск?

7.106. (Г). Довжини двох кіл із спільним центром дорівнюють 8π см і 16π см. На скільки радіус першого кола менший від радіуса другого кола?

(П). Діаметр круглої заготовки деталі дорівнює 50 мм, а діаметр виробу — 46 мм. Якої товщини шар металу було знято під час виготовлення деталі?

7.107. (Г). Накресліть довільний трикутник *ABC*. За допомогою транспортира й лінійки знайдіть центр вписаного кола і проведіть це коло. Виміряйте його радіус.

(П). На малюнку зображено три перехрестя. На ділянці землі, обмеженій цими дорогами, вирішили розбити клумбу у формі круга, який дотикається до трьох доріг. Визначте центр і радіус клумби?

Надалі, розв'язуючи задачі практичного змісту, намагайтеся спочатку сформулювати відповідну геометричну задачу (перейти від практичної задачі до геометричної) та розв'язати її.

Майте на увазі, що найпоширеніші практичні ситуації з теми «Коло і круг» такі:

1) визначити центр предметів, що мають форму круга;
2) обчислити довжину кола і площу предметів, що мають форму круга за їх радіусом і діаметром (та обернена задача);
3) знайти висоту, глибину, відстань;
4) облаштувати предмети на місцевості (клумби, ділянки землі, ковзанки тощо), що мають форму круга;
5) знайти місце для об'єкта (автобусної зупинки, залізничної станції, криниці, мосту, бази відпочинку тощо), де йдеться про рівність певних відстаней.

Як відшукати центр предметів, що мають форму круга

7.108. Щоб виготовити металеву заготовку круглої форми, учень накреслив циркулем коло, але забув позначити його центр. Чи зможе він знайти центр, якщо має лише циркуль і пам'ятає, що радіус дорівнює 5 см?

7.109. Як відшукати центр кола за допомогою лінійки з поділками і косинця. Поясніть, на основі якої властивості можна це зробити.

7.110. Запропонуйте різні способи знаходження центра круга, якщо круг вирізаний: 1) з паперу або тканини; 2) з металу, пластмаси або дерева.

7.111. *Ситуація.* Визначення центра предмета, що має форму круга.
Ваша роль. Столяр, Слюсар.
Опис ситуації. Виготовлена стільниця столу має форму круга. Потрібно зробити отвір в центрі стільниці столу, щоб прикріпити ніжку та визначити її радіус.
Завдання.
1) Знайдіть центр стільниці, якщо у вас є тільки кутник і лінійка з поділками.
2) Чи зможете виконати завдання, якщо у вас є тільки кутник і лінійка без поділок?
3) Як визначити радіус стільниці, скориставшись тільки рулеткою?

Обчислення площі круга, довжини кола за радіусом або діаметром (та обернена задача)

7.112. Чи можна вирізати з квадрата зі стороною 3 дм круг, площа якого дорівнює 7 дм^2?

7.113. Людина на рівному місці бачить навколо себе на відстані 2 км. Яка довжина кола горизонту, що його бачить людина?

7.114. Модель літака літає по колу, діаметр якого 50 м. 1) Яка довжина цього кола? 2) Який шлях пролетить ця модель за 10 обертів?

7.115. На луці пасеться кінь, прив'язаний до кілка мотузкою, довжина якої 10 м. Знайдіть площу ділянки, на якій може пастись кінь.

7.116. Маємо монету. Скільки потрібно таких самих монет, щоб їх можна було розмістити навколо даної монети так, щоб всі вони дотикалися даної монети і попарно одна одної.

7.117. По колу нерухомого круга котиться другий круг, радіус якого в три рази менший від радіуса нерухомого круга. Скільки разів обернеться навколо свого центра круг, що рухається, за той час, протягом якого він прокотиться навколо великого круга один раз?

7.118. Колесо на відстані 240 м зробило 480 обертів. Знайдіть діаметр колеса.

7.119. Діаметр колеса дорівнює 60 см. Скільки обертів зробить це колесо, якщо автомобіль проїде 15 км?

Як знайти висоту, глибину, відстань

7.120. Мавпеня пробігло три кола цирковою ареною, діаметр якої 13 м. Яку відстань пробігло мавпеня?

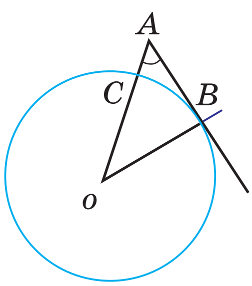
7.121. Під час змагання велосипедистам необхідно було проїхати 6 кругів по колу радіусом 45 м. Яку загальну відстань у ході змагань довелося проїхати кожному велосипедисту?

7.122. Спостерігач знаходиться на висоті 2 км над Землею і спостерігає об'єкт під кутом 60° (мал. 7.44). На якій відстані знаходиться об'єкт від спостерігача. (Радіус Землі ≈ 6370 км.)

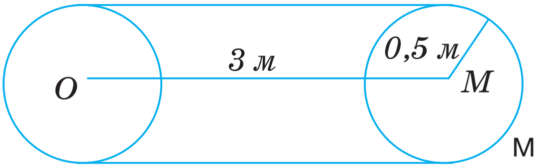
7.123. На котушку, діаметр якої дорівнює 5 см, намотано 20 витків дроту. Знайдіть довжину цього дроту.

7.124. Знайдіть довжину паса, натягнутого на два шківи, якщо радіус кожного з них дорівнює 0,5 м, а відстань між їх центрами — 3 м (мал. 7.45).

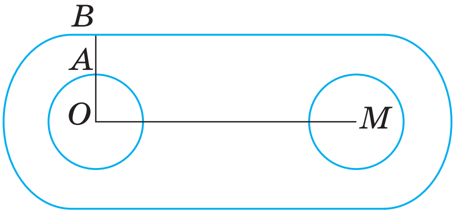
7.125. Обчисліть площу прокладки, зображеної на малюнку 7.46, якщо $OA = 2$ см, $OB = 4$ см, $OM = 5$ см.



Мал. 7.44



Мал. 7.45



Мал. 7.46

7.126. Вантаж піднімають за допомогою блока. На скільки підніметься вантаж за 16 обертів блока, якщо його діаметр дорівнює 30 см?

7.127. Щоб витягти відро води, треба ручку коловорота криниці повернути 20 разів. Знайдіть глибину криниці, якщо діаметр барабана 30 см.

7.128. Який шлях проходить за 2 год кінець годинникової стрілки, довжина якої дорівнює 10 см.

Облаштування предметів на місцевості (клумб, ділянок землі, ковзанок тощо), що мають форму круга

7.129. На клумбі, що має форму круга, довжина кола якого дорівнює 60 м висаджують кущі гортензій. Яку найбільшу кількість кущів гортензій можна висадити на клумбі, відводячи під кожний кущ 0,8 м^2 землі?

7.130. Навколо круглої клумби, радіус якої дорівнює 5 м, прокладено доріжку завширшки 1 м. Скільки потрібно піску, щоб посипати цю доріжку, якщо на 1 м^2 доріжки потрібно 0,6 дм^3 піску?

7.131. Потрібно залити водою ковзанку круглої форми діаметром 60 м. Скільки знадобиться води, якщо на квадратний метр ковзанки потрібно 30 л води?

7.132. Для встановлення вежі заливають фундамент у формі круга. Зовнішнє коло фундаменту повинно дорівнювати 60 м, а внутрішнє — 40 м. Знайдіть площу ділянки під фундаментом вежі.

7.133. Лісова ділянка має форму круга. Знайдіть площу ділянки, якщо її можна обійти узліссям за 36 хв зі швидкістю 5 км/год.

7.134. Ділянку землі, що має форму круга радіуса 10 м, засівають газонною травою. Скільки потрібно витратити коштів для посіву, якщо вартість кілограма насіння трави 170 грн, а щоб засіяти 1 м^2 землі потрібно 30 г насіння.

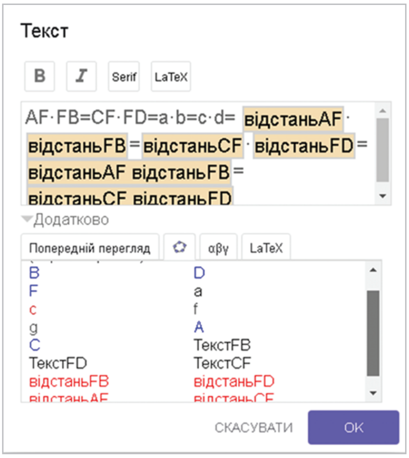
7.135. Уявіть, що земну кулю щільно обмотали мотузкою по екватору (вважатимемо, що екватор — коло). Потім довжину мотузки збільшили на 1 м і розташували її так, щоб будь-яка точка екватора була рівновіддалена від мотузки. Чи можна між мотузкою і поверхнею Землі просунути апельсин?

7.136. У першому автомобілі радіус колеса дорівнює 20 см і під час руху колесо робить 20 об/с. Колесо другого автомобіля має радіус 30 см і під час руху робить 15 об/с. Який автомобіль першим подолає відстань 100 км?

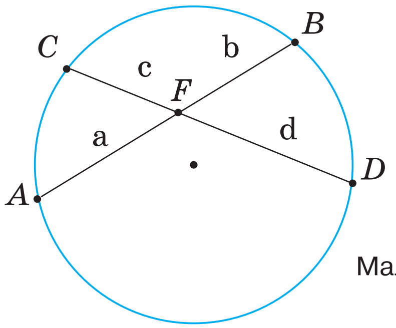
7.137. За скільки часу можна облетіти на літаку Землю вздовж екватора, якщо літак летить на висоті 10 км зі швидкістю 1000 км/год?

7.138. Створіть інтерактивне креслення в програмі GeoGebra, за допомогою якого можна дослідити властивості хорд, що перетинаються.

Хід виконання

1.	Створіть новий файл GeoGebra — «Файл–Створити».
2.	За допомогою інструмента «Коло» побудуйте довільне коло.
3.	За допомогою інструмента побудуйте дві хорди, що перетинаються. Нажавши правою клавішею на кожну точку за допомогою налаштування, перейменуйте за необхідністю.
4.	За допомогою інструмента відміряйте кожен з відрізків.
5.	За допомогою інструмента «Текст» ABC додайте на полотно напис. У поле «Редагування» введіть «$AF \cdot FB = CF \cdot FD = a \cdot b = c \cdot d =$ ». У меню «Об’єкти» виберіть відстань AF, введіть символ «·», далі виберіть відстань FB, введіть символ «=», виберіть відстань CF, введіть символ «·», виберіть відстань FD, введіть символ «=».  Виберіть «порожню рамку» і вже в неї введіть за домопогою вибору відстаней попередній запис разом. За допомогою меню «Символи» в порожню рамку, що з’явилася в полі «Правка», введіть $\alpha+\beta+\gamma$. Натисніть кнопку «ОК».
6.	За допомогою інструмента , натискаючи на одну з точок, змініть розташування хорд, подивіться, чи буде постійним добуток, зробіть висновки.
7.	Збережіть файл як «Завдання7.3.ggb».

Результат виконання завдання (мал. 7.47).



Мал. 7.47

$AF \cdot FB = CF \cdot FD = a \cdot b = c \cdot d = 3.9 \cdot 3.2 =$
$= 2.8 \cdot 4.5 = 12.7 = 12.7$

2. Геометричне місце точок

Корисні поради

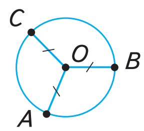
Найбільш уживані геометричні місця точок (ГМТ) такі:

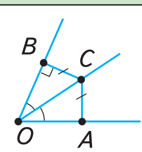
1) ГМТ, рівновіддалених від даної точки, є коло;
2) ГМТ, рівновіддалених від сторін кута, є бісектрисою цього кута;
3) ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка, є серединний перпендикуляр (пряма, яка перпендикулярна до відрізка і проходить через його середину).

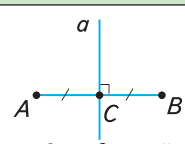
Геометричне місце точок використовується на практиці для знаходження об'єктів на місцевості де йдеться про рівність яких-небудь відстаней. Щоб виконати побудови, необхідні для розв'язання задачі, зображаємо вихідну конфігурацію на плані і, розв'язуємо задачу за допомогою циркуля та лінійки, потім, за потреби, можна перенести результат на місцевість. Пам'ятатимемо, що всі населені пункти, будівлі, споруди будемо вважати такими, що мають незначні розміри та прийматимемо в задачах за точки, а магістралі, канали, залізничні колії такими, що мають незначну ширину, тобто є прямими лініями.

У міркуваннях спирайтеся на дані таблиці 7.8.

Таблиця 7.8

<table>
<tr><th colspan="4">ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК</th></tr>
<tr>
<td>Фігура F є геометричним місцем точок (ГМТ) площини, якщо:
1) кожна точка фігури має ту саму властивість;
2) кожна точка площини, яка має цю властивість, належить даній фігурі</td>
<td>

Коло є ГМТ, рівновіддалених від даної точки</td>
<td>

Бісектриса кута є ГМТ, рівновіддалених від сторін кута</td>
<td>

Серединний перпендикуляр до відрізка є ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка</td>
</tr>
</table>

На рівній відстані

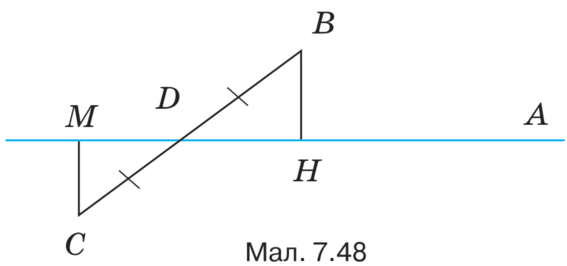
Знаходимо місце для об'єкта (автобусної зупинки, залізничної станції, криниці, мосту, бази відпочинку тощо), де йдеться про рівність певних відстаней.

7.139. Недалеко від населених пунктів A і B проходить шосе. Потрібно побудувати автобусну зупинку так, щоб відстані від неї до населених пунктів були однакові.

7.140. Недалеко від залізниці розташовано два села. Знайдіть біля залізниці місце для станції, яка була б рівновіддаленою від цих сіл.

7.141. Мешканці трьох дачних будинків A, B і C вирішили побудувати криницю. Як обрати місце для криниці, щоб відстані від неї до будинків були однакові?

7.142. Через місто A має проходити автомагістраль так, щоб два населених пункти B і C розташовувались із різних боків від неї на однаковій відстані. На малюнку 7.48 показано план будівництва магістралі. Поясніть, чому населені пункти будуть рівновіддаленими від автомагістралі, якщо вона проходитиме через середину D відстані між ними.



Мал. 7.48

7.143. Як повинна проходити магістраль, щоб відстані від неї до трьох населених пунктів були однаковими?

7.144*. Автомагістраль перетинає канал під кутом, всередині якого розміщений населений пункт. В якому напрямку потрібно прокласти через цей пункт пряму дорогу, щоб відстань по ній до магістралі та до каналу були рівними?

7.145. Два автобани перетинаються під кутом, всередині якого протікає річка. Де побудувати міст через річку, щоб відстані від нього до обох автобанів були однаковими?

Найкоротші відстані

Визначаємо найкоротший маршрут (катера, автобуса, велосипедиста тощо) або місце для будівництва об'єкта (заводу, водонапірної башти, школи тощо) так, щоб затрати були мінімальними.

7.146*. Для забезпечення водою двох населених пунктів, що розташовані з одного боку від каналу, потрібно на його березі побудувати водонапірну башту так, щоб сумарна довжина труб від неї до кожного з пунктів (по прямій) була найменшою. Як це зробити? Поясніть.

7.147. На озері правильної круглої форми розташований маленький острів. Знайдіть найкоротший прямий маршрут катера, який сполучатиме дві точки берега й матиме проміжну пристань біля острова.

7.148*. Три фабрики розміщені у вершинах A, B і C різностороннього трикутника і сполучені між собою магістралями. Всередині цього трикутника на однаковій відстані від магістралей розташований населений пункт, який сполучено дорогами з кожною фабрикою. Яким має бути найкоротший замкнений маршрут автобуса, призначеного для розвезення жителів населеного пункту до всіх трьох фабрик?

7.149. Чотири населених пункти розміщені у вершинах опуклого чотирикутника. Потрібно побудувати спортивний комплекс так, щоб сума відстаней від нього до всіх чотирьох даних пунктів була найменшою. Як це зробити?

Побудова прямих на місцевості

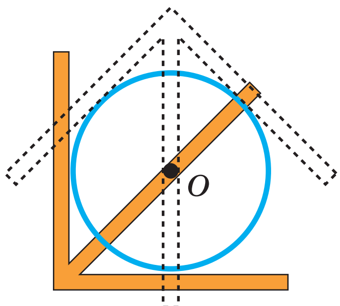
7.150. Як поділити навпіл кут на місцевості, не вимірюючи його?

7.151. Як на місцевості провести пряму, перпендикулярну до даної прямої, користуючись лише кілочками та мотузкою?

7.152*. Як поділити навпіл кут, вершина якого недоступна (задача Евкліда).

Простіший прилад для відшукання центра круга

7.153. Центрошукач — це довільний кут, виготовлений з двох металевих або дерев'яних планок, в якому прикріплена ще одна планка — бісектриса цього кута. На малюнку 7.49



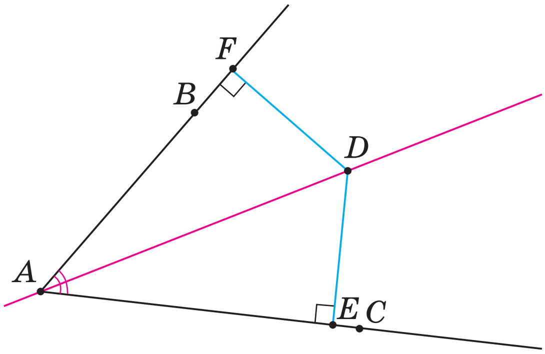
Мал. 7.49

показано, як знаходять центр круга. Поясніть, як користуватися цим приладом.

7.154. У сервісі GeoGebra створіть інтерактивне креслення геометричного місця точок, що рівновіддалені від сторін кута.

Хід виконання

1.	Створіть новий файл GeoGebra — «Файл–Створити».
2.	За допомогою інструмента «Промінь» відкладіть промені AB і AC.
3.	За допомогою інструмента «Бісектриса кута», нажавши на промені AB і AC, відкладіть бісектрису кута BAC.
4.	На бісектрисі відмітьте довільну точку D. Для візуалізації відмітьте дугами кути DAB і CAD, скориставшись інструментом «Кут», в налаштуваннях змініть колір та стиль оформлення.
5.	Через точку D проведіть прямі перпендикулярні до прямих AB і AC використавши інструмент «Перпендикулярна пряма»: нажимаєм на точку D та відповідну пряму, відмічаєм точки перетину E, F, відмічаємо відрізки DE, DF, в налаштуваннях знімаємо галочки з «показувати об’єкт» на перпендикулярних прямих. Відмітьте прямі кути DEA, AED.
6.	За допомогою інструмента «Довжина» знайдіть довжини відрізків DE, DF.
7.	За допомогою налаштувань змініть колір та стиль ліній.
8.	Змініть розмір шрифту напису на великий, можете змінити колір.
9.	Рухаючи точку D чи промені, переконайтесь в правільності ГМТ, зробіть висновки.
10.	Збережіть файл як «Завдання7.4.ggb».



Мал. 7.50

Перевірте свої досягнення

1. Як знайти центр деталі, що має форму круга?
2. Як знайти діаметр дерева та площу його перерізу?
3. Як знайти довжину кола, що обмежує круглий диск, і площу цього диска?
4. Скільки спільних точок буде при взаємодії колеса велосипеда (кола) і доріжки (прямої) кожної миті?
5. Потрібно розмітити коло для клумби. Як це зробити?
6. Як поділити навпіл кут на місцевості, не вимірюючи його?
7. Як на місцевості провести пряму, перпендикулярну до даної прямої, користуючись лише кілочками та мотузкою?
8. Як знайти відстань, яку проїхав автомобіль, якщо відомі діаметр його коліс та кількість їх обертів?
9. Криниця має коловорот, прикріплений до нього ланцюг, а до ланцюга відро. Як знайти глибину криниці?
10. Недалеко від населених пунктів *A* і *B* проходить шосе. Як побудувати автобусну зупинку так, щоб відстані від неї до населених пунктів були однакові?

Геометрія в мистецтві

Яків ГНІЗДОВСЬКИЙ
(*1915–1985*) —
американський художник українського походження, графік, кераміст, мистецтвознавець.



Тарілки Гніздовського

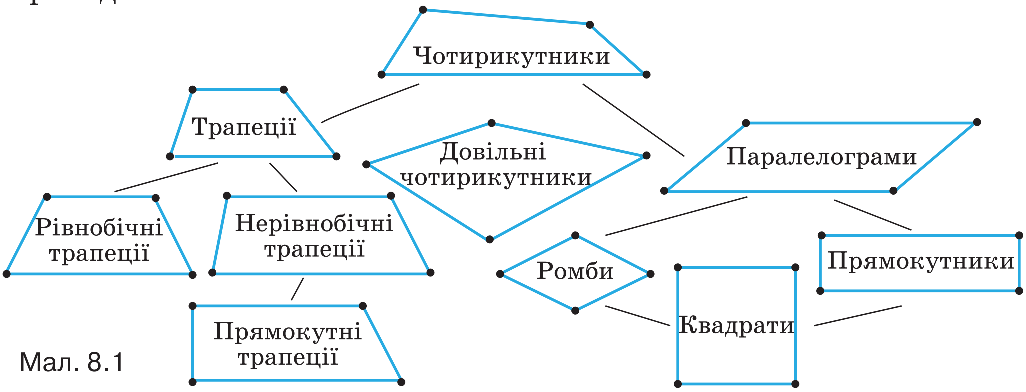
8 КЛАС

§ 1. ЧОТИРИКУТНИКИ

1. Види чотирикутників та їх властивості

Корисні поради

1. На малюнку 8.1 зображено окремі види чотирикутників. Пригадайте їх властивості.

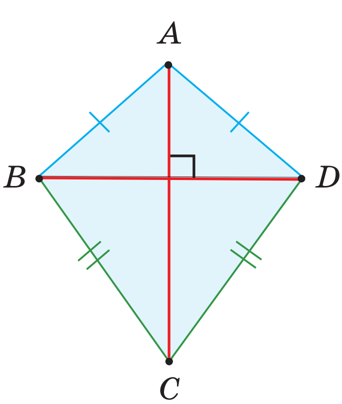


Мал. 8.1

Ще один вид чотирикутників — *дельтоїд*. Складається з двох різних рівнобедрених трикутників зі спільною основою, вершини яких лежать по різні боки від цієї основи. Сформулюйте властивості дельтоїда, скориставшись його зображенням (мал. 8.2).

2. На відміну від трикутника, чотирикутник — фігура не жорстка. Його форму можна змінювати. Ця властивість чотирикутника використовується у техніці для створення шарнірних механізмів. Перпендикулярність діагоналей ромба застосовується у чотириланкових шарнірних механізмах для реалізації прямолінійного поступального руху. Одним із найпоширеніших прикладів такого застосування є домкрат. Поєднання декількох ромбів втілюється в конструкції різних утримувачів, розсувних решіток, кронштейнів.

3. Щоб установити, чи можна з чотирьох відрізків a, b, c, d утворити чотирикутник, перевірте, чи є найдовший із чотирьох відрізків меншим від суми трьох інших.



Мал. 8.2

4. Щоб довести, що чотирикутник є:

• паралелограмом, доведіть, що в ньому: або протилежні сторони попарно паралельні (означення паралелограма), або протилежні сторони попарно рівні (ознака паралелограма), або дві протилежні сторони рівні й паралельні (ознака паралелограма), або діагоналі точкою їх перетину діляться навпіл (ознака паралелограма);

• прямокутником, покажіть, що: або цей чотирикутник є паралелограмом, а паралелограм — прямокутником, або три кути чотирикутника — прямі.

5. Щоб установити, що даний паралелограм є:

• прямокутником, доведіть, що в ньому: або всі кути прямі (означення прямокутника), або діагоналі рівні (ознака прямокутника), або хоча б один кут прямий, або сума двох протилежних кутів дорівнює 180°;

• ромбом, доведіть, що в ньому: або всі сторони рівні (означення ромба), або діагоналі взаємно перпендикулярні (ознака ромба), або діагоналі якого ділять кути навпіл.

Щоб установити, що даний ромб — квадрат, доведіть, що в нього: або один кут прямий, або діагоналі рівні.

Розв'яжіть спочатку геометричну задачу (Г), а потім — відповідну задачу практичного змісту (П), де використовується геометрична задача.

8.1. (Г). Чи можна з відрізків 2 см, 4 см, 5 см, 12 см утворити чотирикутник?

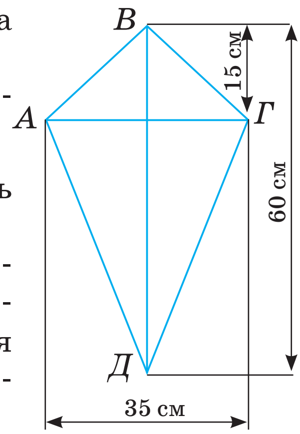
(П). Чи може ділянка чотирикутної форми мати сторони 10 м, 20 м, 30 м, 60 м?

8.2. (Г). Чи можуть усі кути чотирикутника бути тупими?

(П). Чи можуть усі кути ділянки чотирикутної форми бути гострими?

8.3. (Г). За даними на малюнку 8.3 обчисліть периметр та площу дельтоїда.

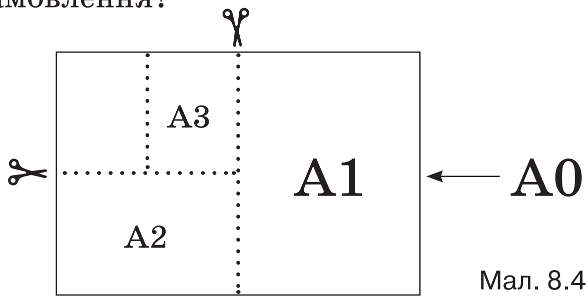
(П). За даними попередньої задачі створіть модель повітряного змія. Розрахуйте необхідну кількість матеріалу для обтягування каркасу, урахувавши припуски на підгортання 10% від площі.



Мал. 3

Розв'яжіть задачі, використовуючи властивості чотирикутників.

8.4. Формати аркушів паперу позначають літерою А та цифрою: А0, А1, А2 і т. д. Якщо аркуш формату А0 розрізати навпіл, отримаємо два аркуші формату А1. Якщо аркуш А1 розрізати навпіл, отримаємо два аркуші формату А2 і т. д. (мал. 8.4). Майстерня друку, у розпорядженні якої є аркуші паперу формату А1, отримала замовлення на виготовлення 12 книг обсягом 25 сторінок з форматом аркуша А5. Скільки аркушів паперу формату А1 необхідно розрізати, щоб виконати замовлення?

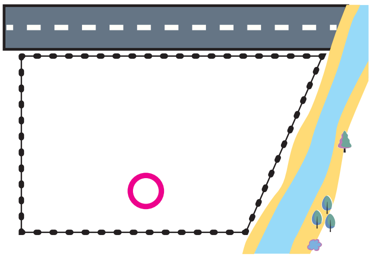


Мал. 8.4

8.5. У кутах квадратного ставка ростуть 4 дуби. Ставок треба розширити, зробивши водойму вдвічі більшою за площею, зберігаючи при цьому квадратну форму. Чи можна розширити ставок до необхідних розмірів так, щоб усі чотири дуби, залишаючись на своїх місцях, не були затоплені водою, а стояли біля берегів нового ставка?

8.6. У безвітряну погоду швидкість приземлення парашутиста $\upsilon_1 = 4$ м/с. Якою буде швидкість його приземлення у вітряну погоду, якщо швидкість вітру у горизонтальному напрямку $\upsilon_2 = 5$ м/с?

8.7. З одного боку земельної ділянки протікає річка, а з іншого проходить дорога (мал. 8.5). Потрібно побудувати на цій ділянці будинок, обгородити ділянку парканом, у якому має бути дві хвіртки, які розміщені так, щоб через одну хвіртку можна було вийти до річки, а через іншу — до дороги. При цьому ці хвіртки і будинок мають бути з'єднані прямою доріжкою, відстані по якій від дому до річки та до дороги були рівними. Як прокласти таку доріжку?



Мал. 8,5

8.8. Від стовпа заввишки 9 м до будинку натягнутий дріт, що кріпиться на висоті 3 м від землі. Відстань від будинку до стовпа 8 м. Обчисліть довжину дроту. Відповідь подайте у метрах.

8.9. *При покупці телевізора враховують довжину діагоналі екрану, роздільну його здатність та відстань між глядачем та екраном телевізора. Довжину діагоналі екрану в дюймах (1 дюйм = 2,54 см) позначено на маркуванні моделі телевізора. На вибір розміру діагоналі екрану телевізора впливає відстань, з якої можна дивитися телевізор, та роздільна здатність екрану. Що більша роздільна здатність екрану, то ближче можна переглядати картинку на екрані без втрати якості зображення. Відповідно, що менша роздільна здатність екрану, то меншою має бути діагональ телевізора.*

У вашій квартирі під телевізор визначено на стіні місце з розмірами 120 см × 65 см, відстань від передбачуваного місця перегляду до екрану телевізора становить 2,5 м. Як правильно вибрати діагональ телевізора?

Виконайте завдання, використовуючи програму GeoGebra

8.10. Побудуйте чотирикутник, за допомогою програми GeoGebra установіть градусні міри кутів, переконайтеся, що сума кутів чотирикутника 360°.

Хід виконання

1.	Створіть новий файл GeoGebra — «Файл–Створити».
2.	За допомогою інструмента «Багатокутник»  побудуйте чотирикутник $ABCD$. Побудову проводьте проти годинникової стрілки (щоб закрити чотирикутник: з вершини D поверніться на вершину A).
3.	Виберіть інструмент «Кут»  і натисніть на точки B, A, D.
4.	Виберіть інструмент «Кут»  і натисніть на точки A, D, C.
5.	Виберіть інструмент «Кут»  і натисніть на точки D, C, B.
6.	Виберіть інструмент «Кут»  і натисніть на точки C, B, A.
7.	На панелі об'єктів клацніть правою кнопкою на куті α. У меню зробіть неактивним розділ «Показувати позначення». Виконайте ті ж дії для кутів β, γ і δ.

8.	За допомогою інструмента «Текст» ABC додайте на полотно напис. У поле «Редагування» введіть «$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D =$ ». Символ «$\angle$» вводиться за допомогою меню «Символи».
9.	Не закриваючи вікна «Текст» у меню «Об'єкти», виберіть кут α. Введіть символ «+». У меню «Об'єкти» виберіть кут β. Введіть символ «+». У меню «Об'єкти» виберіть кут γ. Введіть символ «+». У меню «Об'єкти» виберіть кут δ. Введіть символ «=». У меню «Об'єкти» виберіть пункт «Порожня рамка». За допомогою меню «Символи», в порожню рамку, що з'явилася в полі «Правка», введіть $\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Натисніть кнопку «ОК».
10.	Змініть розмір шрифту напису на великий.
11.	Виконайте «Налаштування–округлення–0 розрядів».
12.	За допомогою інструмента спробуйте змінити місце розташування вершин чотирикутника. При цьому значення кутів у написі змінюватимуться, а сума кутів залишатиметься рівною 360°.
13.	Збережіть файл як «Завдання 8.1.ggb».

2. Середні лінії трикутника і трапеції

Корисні поради

Геометричні несподіванки. Чи знали ви, що існує фігура, у якій всі числові середні двох чисел a і b можна побачити «живцем»? Це — трапеція $ABCD$ з основами $BC = a$ і $AD = b$. Надалі домовимося розглядати трапецію, у якої $b > a$.

Середнє арифметичне: $\frac{a+b}{2}$. Найбільш відомий відрізок з тих, довжини яких є середніми величинами в трапеції, — це середня лінія трапеції, тобто відрізок, що з'єднує середини її бічних сторін. У будь-якій трапеції з основами a і b довжина середньої лінії дорівнює середньому арифметичному довжин основ.

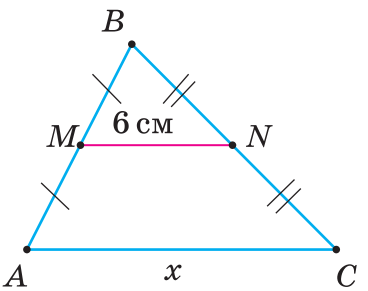
Середнє геометричне: $\sqrt{ab}$. Середнє геометричне використовується, в основному, при обчисленні середніх темпів зростання якого-небудь показника (продукції, населення і т. д.), а також при побудові фондових індексів. Довжина відрізка, паралельного основам трапеції, кінці якого лежать на бічних сторонах, дорівнює середньому геометричному чисел a і b, якщо він ділить дану трапецію на дві трапеції, подібні між собою.

Середнє гармонійне: $\dfrac{2ab}{a+b}$. Середнє гармонійне використовується тоді, коли один і той же обсяг роботи виконується на різних швидкостях. Напевно, найкрасивішою з властивостей відрізків, паралельних основам трапеції, є властивість відрізка, що проходить через точку перетину діагоналей трапеції. Довжина такого відрізка дорівнює середньому гармонійному довжин основ трапеції.

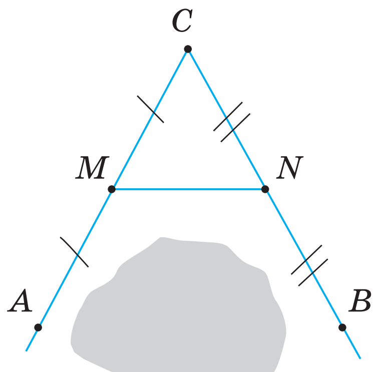
Розв'яжіть спочатку геометричну задачу* (Г)*, а потім — відповідну задачу практичного змісту* (П)*, де використовується геометрична задача.

8.11. (Г). За даними на малюнку 8.6 знайдіть x.

(П). На малюнку 8.7 показано, як на місцевості виміряли відстань між пунктами A і B, розділеними перешкодою. Позначили довільну точку C і провішили прямі CA і CB. Знайшли точки M і N — середини відрізків AC і BC та виміряли відстань між точками M і N. Поясніть, чому шукана відстань $AB = 2MN$.



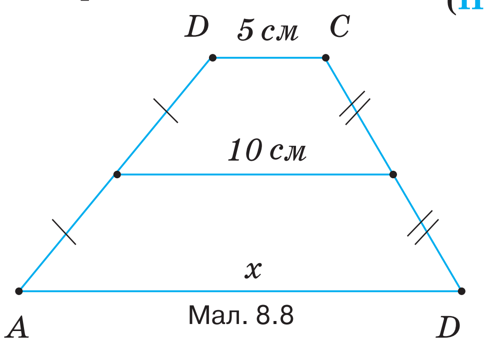
Мал. 8.6



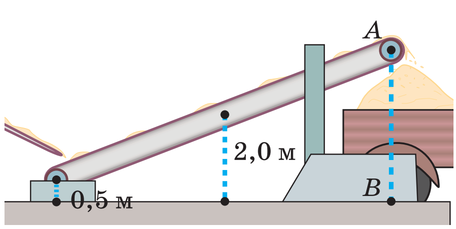
Мал. 8.7

8.12. (Г). За даними на малюнку 8.8 у трапеції $ABCD$ знайдіть відрізок x.

(П). Знайдіть відстань від кінця транспортера (мал. 8.9) до поверхні



Мал. 8.8

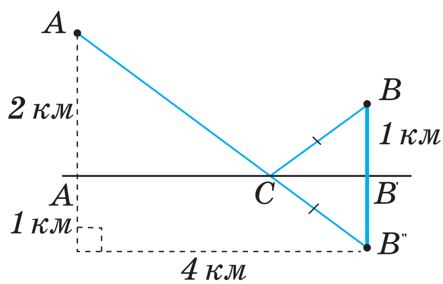


Мал. 8.9

землі (яку безпосередньо виміряти не можна), якщо другий його кінець і середина віддалені від поверхні землі відповідно на 0,5 м і 2 м.

Розв'яжіть задачі, використовуючи властивості середніх ліній

8.13. Населені пункти A та B розташовані по одну сторону від шосе (мал. 8.10). Потрібно побудувати автобусну зупинку та прокласти від неї доріжки до населених пунктів так, щоб сумарна довжина доріжок була найменшою.



8.14. Від ділянки землі, що має форму трапеції, необхідно відділити трикутну ділянку так, щоб її площа дорівнювала площі ділянки, що залишилась. Як це можна зробити?

8.15. Ділянку землі, що має форму трапеції, необхідно розділити на чотири рівновеликі частини теж у формі трапецій. Як це можна зробити?

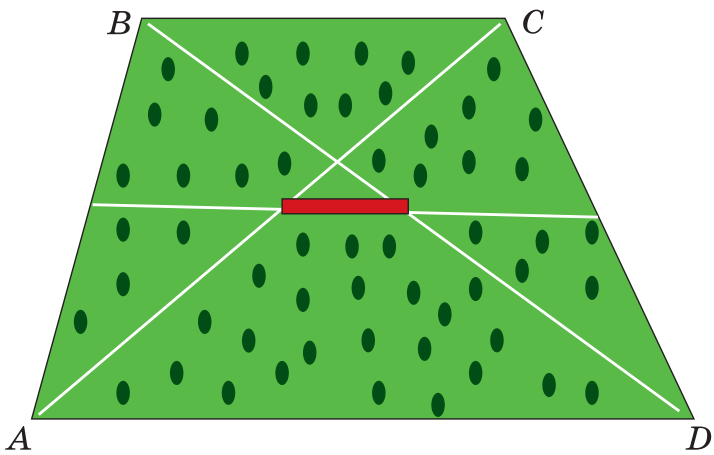
8.16. Територія підприємства має форму рівнобічної трапеції, у якої бічна сторона дорівнює 300 м, дві інші відносяться як 7 : 3, а відстань між серединами бічних сторін становить 400 м. Скільки часу потрібно охоронцю, щоб обійти вздовж огорожі територію підприємства, якщо його швидкість 4 км/год?

8.17. Під садок відведено ділянку землі, що має форму рівнобічної трапеції, одна основа якої на 50 м більша за кожну з інших сторін, а середня лінія дорівнює 90 м. Навколо саду проходить алея завширшки 2 м. По дві сторони алеї потрібно посадити дерева на відстані 3 м одне від одного. Скільки потрібно для цього дерев? Яка вартість дерев для алеї, якщо ціна одного дерева 450 грн?

8.18. Дах сараю нахилений і встановлений на трьох вертикальних опорах так, що середня опора стоїть посередині між малою та великою опорами, а їхні основи розташовані на одній прямій. Висота більшої опори 2,85 м, а малої — 2,25 м. Знайдіть висоту середньої опори.

8.19. Над входом у школу є навіс. Згодом виникла потреба поставити підпори до середини навісу Як, не вимірюючи, знайти довжину підпори, якщо відповідні краї навісу віддалені від поверхні землі на 2,5 м і 3,5 м? Подумайте, поміркуйте і зробіть геометричний малюнок до цієї задачі так, щоб за готовим кресленням можна було розв'язати задачу.

8.20. Петро й Василь вирішили зустрітися в парку. У парку є 4 входи та кілька стежок, як зазначено на малюнку 8.11. Хлопці завчасно не домовилися, де саме вони зустрінуться. Тому Петро, зайшовши через вхід A, вирішив перейти парк до протилежного входу C. Василь діяв аналогічно. Він зайшов через вхід D і пішов до входу B. Коли вони підійшли до стежки, розташованої посередині парку, то побачили один одного і їм стало цікаво, на якій відстані між ними вони помітили один одного. Маючи доступ до інтернету, вони дізналися, що відстані між входами A і D та B і C відповідно дорівнюють 200 м та 150 м. Чи достатньо хлопцям даних, щоб відповісти на їхнє запитання?



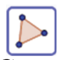
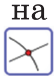
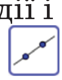
Мал. 8.11

8.21. Два села A і B розташовані по одну сторону прямолінійної залізниці на відстані відповідно 10 км та 20 км. Чому дорівнює відстань від залізниці до села C, розташованого посередині прямої дороги, що з'єднує села A та B?

Виконайте завдання, використовуючи програму GeoGebra

8.22. За допомогою програми GeoGebra побудуйте трапецію та її середню лінію. Переконайтесь у правильності формули для обчислення довжини середньої лінії.

Хід виконання

1.	Створіть новий файл GeoGebra — «Файл–Створити».
2.	За допомогою інструмента  відкладіть вдрізок AB — це буде одна із основ трапеції.
3.	Щоб відкласти іншу сторону, потрібно за допомогою інструмента  спочатку відкласти парелельну пряму.
4.	За допомогою інструмента  будуємо нашу трапецію, натискаючи на точки A, B, C та ставимо довільну точку D на прямій паралельній AB, повертаємось до точки A, «закриваємо» наш чотирикутник. Щоб не було видно прямої, натискаємо на , тиснемо на саму пряму правою клавішею й знімаємо галочку «Показувати об'єкт». Все, наша трапеція готова, спробуйте її порухати; змінити, натиснувши на одну з вершин і рухаючи її.
5.	Щоб провести середню лінію, побудуємо на бічних ребрах серединні перпендикуляри: за допомогою інструмента серединний перпендикуляр  натискаємо на сторону AD, далі за допомогою інструмента перетин  отримаємо точку E, натиснувши на пряму перпендикуляра правою клавішею, знімаємо галочку «Показувати об'єкт». На стороні BC проводимо такі ж дії і отримаємо точку F натиснувши інструмент відрізок , з'єднуємо точки E і F. Це і є середня лінія.
6.	За допомогою інструмента «Текст»  додайте на полотно напис. У поле «Редагування» введіть «$EF = (AB + DE) / 2 =$ » вставте порожнє полотно.

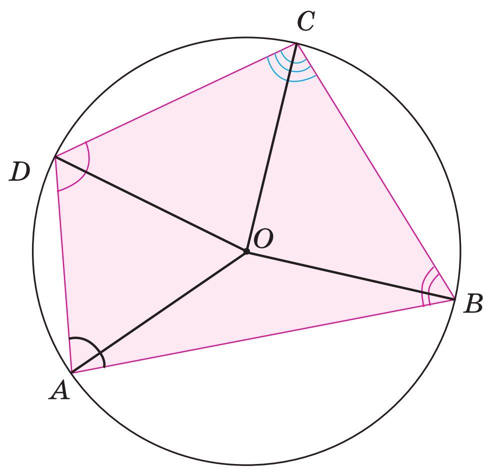
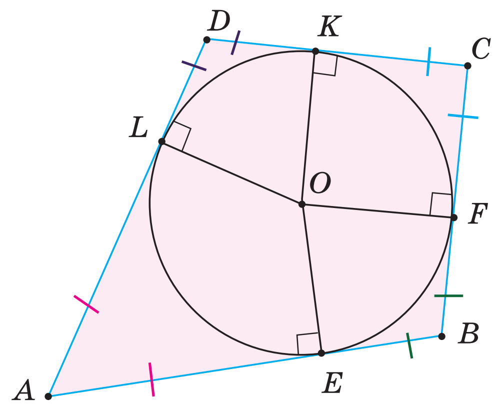
7.	В порожнє полотно, введіть символ «(», у меню «Об'єкти» виберіть відстань AB, введіть символ «+», у меню «Об'єкти» виберіть відстань DE, введіть символ «+», введіть символ «/» та цифру 2. Натисніть кнопку «ОК».
8.	Змініть розмір шрифту написів на великий, можете змінити колір.
9.	Спробуйте змінити місце розташування вершин трапеції. При цьому значення довжин буде мінятись і ви зможете переконатись у вірності формули.
10.	Збережіть файл як «Завдання 8.2.ggb».

3. Вписані й описані чотирикутники

Корисні поради

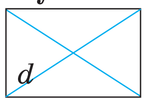
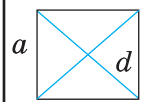
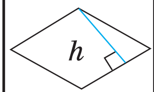
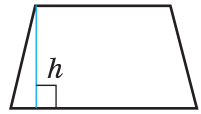
Ознаки вписаного та описаного чотирикутників (табл. 8.1).

Таблиця 8.1

Вписаний чотирикутник	**Описаний чотирикутник**
	
Ознака: $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$	*Ознака*: $AB + DC = AD + BC$

Радіуси вписаних та описаних кіл чотирикутника

Таблиця 8.2

<table>
<tr><th></th><th>Довільний паралелограм
</th><th>Прямокутник
</th><th>Квадрат
</th><th>Ромб
</th><th>Трапеція
</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Описати коло

R-радіус кола</td><td rowspan="2">ні</td><td>$R=\frac{1}{2}d$</td><td>$R=\frac{1}{2}d$</td><td rowspan="2">ні</td><td rowspan="2">якщо трапеція — рівнобічна (центр кола лежить на серединному перпендикулярі до основ)</td></tr>
<tr><td colspan="2">центр кола-точка перетину діагоналей</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Вписати коло

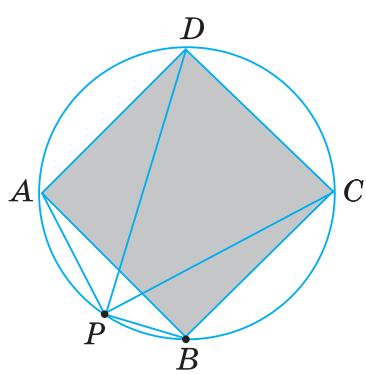
r-радіус кола</td><td rowspan="2">НІ</td><td rowspan="2">НІ</td><td>$r=\frac{1}{2}a$</td><td>$r=\frac{1}{2}h$</td><td rowspan="2">$r=\frac{1}{2}h$

(якщо суми основ і бічних сторін рівні)</td></tr>
<tr><td colspan="2">центр кола-точка перетину діагоналей</td></tr>
</table>

Розв'яжіть спочатку геометричну задачу (Г), а потім — відповідну задачу практичного змісту (П), де використовується геометрична задача.

8.23. (Г). Квадрат $ABCD$ вписаний в коло, точка P — довільна точка дуги AB (мал. 8.12). Доведіть, що промені PD і PC ділять кут APB на три рівні частини.

8.24. (П). Мешканці чотирьох дачних будинків вирішили знайти таке місце для криниці, щоб відстані від неї до будинків були однаковими. Зробіть малюнок і знайдіть місце для криниці, якщо будинки розташовані:
1) у вершинах прямокутника;
2) у вершинах рівнобічної трапеції.



Мал. 8.12

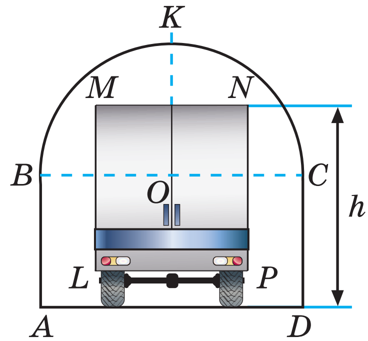
8.25. З круглої колоди потрібно вирізати брус з поперечним перерізом 5×12 см. Який найменший діаметр має бути в колоди?

8.26. Якого найменшого діаметра має бути циліндрична посудина, щоб у неї можна було помістити деталь у формі прямокутного паралелепіпеда з розмірами $6 \times 8 \times 10$ см?

8.27. Тунель має форму півкола радіуса 3 м. Яку найбільшу висоту може мати машина завширшки 2 м, щоб вона могла проїхати цим тунелем? У відповіді вкажіть наближене значення в метрах з точністю до одного знака після коми.

8.28. (ЗНО 2017) На малюнку 8.13 зображено поперечний переріз аркового проїзду, верхня частина якого (дуга BKC) має форму півкола радіуса $OC = 2$ м. Відрізки AB і DC перпендикулярні до AD, $AB = DC = 2$ м. Яке з наведених значень є найбільш можливим значенням висоти h вантажівки, за якого вона може проїхати через цей арковий проїзд? Уважайте, що $LMNP$ — прямокутник, у якому $MN = 2{,}4$ м і $MN \parallel AD$.

А 4,4 м **Г** 3,5 м
Б 4 м **Д** 3,2 м
В 3,7 м



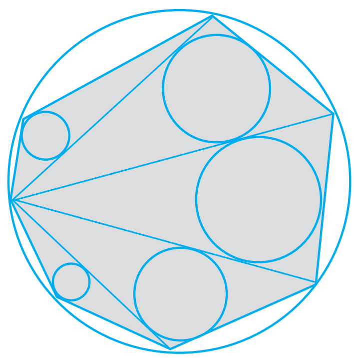
Мал. 8.13

Геометричні несподіванки

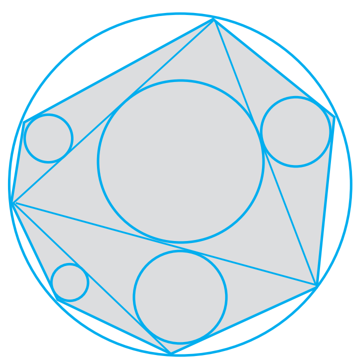
На стінах японських пагод (пагода — культова споруда, ярусна башта у комплексі буддійського храму або монастиря, що вшановує Будду) зображено багато несподіваних фактів, які відкрили японські математики. Так, у 1800 році з'явилася дощечка, яка містила наступні факти:

— якщо вписаний в коло многокутник розбити на трикутники, провівши діагоналі з однієї вершини, і в кожний трикутник вписати коло, то сума радіусів цих кіл є величиною сталою і не залежить від вибору вершини (мал. 8.15);

— та сама сума виходить і для будь-якого розбиття многокутника (мал. 8.16).



Мал. 8.14



Мал. 8.15

Спробуйте виконати ці побудови та довести наведені факти.

Виконайте завдання, використовуючи програму GeoGebra

8.29. За допомогою програми GeoGebra побудуйте вписаний чотирикутник і переконайтеся, що сума його протилежних кутів дорівнює 180°.

1.	Створіть новий файл GeoGebra — «Файл–Створити».
2.	За допомогою інструмента «Коло» побудуйте коло, точку центра заховати, знявши галочку з «показувати об'єкт». За допомогою інструмента «многокутник»  побудуйте на колі чотирикутник $ABCD$. Побудову проводьте проти годинникової стрілки (щоб закрити чотирикутник: з вершини D поверніться на вершину A). Щоб перейменувати точки, тиснете на них правою клавішею, вибираєте «перейменувати».
3.	Виберіть інструмент «Кут»  і натисніть на точки B, A, D, аналогічні дії проведіть із точками (A, D, C), (D, C, B), (C, B, A)
4.	За допомогою інструмента «Текст»  додайте на полотно напис. У поле «Редагування» введіть «$\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=$ ». Символ «$\angle$» вводиться за допомогою меню «Символи».
5.	Не закриваючи вікна «Текст» у меню «Об'єкти», виберіть кут α. Введіть символ «+». У меню «Об'єкти» виберіть кут γ. Введіть символ «=». У меню «Об'єкти» виберіть кут β. Введіть символ «+». У меню «Об'єкти» виберіть кут δ. Введіть символ «=». У меню «Об'єкти» виберіть пункт «Порожня рамка». За допомогою меню «Символи», в порожню рамку, що з'явилася в полі «Правка», введіть $\alpha+\gamma=\beta+\delta$. Натисніть кнопку «ОК».
6.	Змініть розмір шрифту напису на великий.
7.	Виконайте «Налаштування–округлення–0 розрядів».
8.	За допомогою інструмента  спробуйте змінити місце розташування вершин чотирикутника. При цьому значення кутів у написі змінюватимуться. Зробіть висновки.
9.	Збережіть файл як «Завдання 8.3.ggb».

Перевірте свої досягнення

1. Майстер-паркетник хоче пересвідчитися, що випиляні з дуба чотирикутники є квадратами. Чи достатньо для цього:
   1) рівності чотирьох сторін;
   2) рівності обох діагоналей;
   3) рівності чотирьох відрізків поділу діагоналей;
   4) ваша версія.
2. Як агроному, не вимірюючи кутів чотирикутної земельної ділянки, пересвідчитися, що вона квадратна? Чи достатньо для цього:
   1) перевірити рівність діагоналей;
   2) перевірити рівність сторін;
   3) пересвідчитись, що діагоналі точкою перетину діляться навпіл;
   4) ваша версія.
3. Потрібно виготовити чотирикутну рамку для повітряного змія. Взяли чотири планки й закріпили їхні кінці. З'ясувалося, що виготовлена рамка нежорстка — змінюється її форма. Як можна укріпити рамку?
4. Як, користуючись властивістю середньої лінії трикутника, визначити відстань від пункту *A* до пункту B, між якими не можна пройти?
5. Три населені пункти *A*, *B* і *C* розташовані на рівнині й не лежать на одній прямій. Потрібно прокласти дорогу, щоб вона пройшла на однаковій відстані від цих пунктів.
   1. Як це зробити? Покажіть на малюнку.
   2. Скільки таких доріг можна прокласти?
6. Виріжте з паперу три рівні різносторонні трикутники. Кожен із них розріжте уздовж середньої лінії (лінії до різних 3 сторін) і з двох утворених частин кожного складіть по паралелограму. Чи рівні всі утворені таким способом паралелограми? Чи рівні їх периметри?
7. Зазвичай приймають, що громовідвід оберігає площу кола, описаного навколо нього, радіусом, який дорівнює подвоєній його висоті. Виходячи з даного правила, встановіть, в якій точці покрівлі вигідніше поставити громовідвід, щоб висота була найменша. Якщо довжина будівлі 32 метри, а ширина 10 метрів, чи достатній громовідвід у 8 метрів висоти?
8. Виріжте з паперу дві рівні трапеції і складіть з них паралелограм. Скільки різних паралелограмів можна скласти з них? Чи рівні периметри таких паралелограмів?

Геометрія в мистецтві

Піт Мондріан
(*1872–1944*) —
нідерландський художник, один із зачинателів і провідників абстракціонізму в світовому мистецтві.

Картини Піта Мондріана у колекції Ів-Сен Лорана

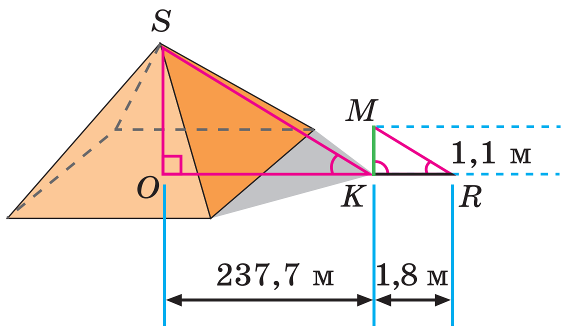
§ 2. ПОДІБНІСТЬ ТРИКУТНИКІВ

1. Подібні трикутники

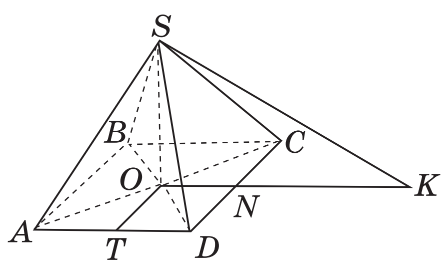
1. *Екскурс в історію*

За легендою древній грецький учений Фалес, мандруючи Єгиптом, був вражений величчю піраміди Хеопса. Він спитав у жерців, яка висота піраміди, але у відповідь почув: «Це може знати лише бог Сонця, а не людина». Фалес повернувся до них і сказав: «Зараз я виміряю висоту піраміди». Він виміряв довжину своєї тіні. Вона виявилася вдвічі більшою за зріст Фалеса. З цього він зробив висновок, що на даний момент усі предмети мають тінь удвічі більше, ніж їхня власна висота. Тоді він виміряв довжину тіні піраміди Хеопса. Тінь піраміди (мал. 8.16) дорівнює відрізку OK (мал. 8.17.) Знаючи, що $TD = ON$, отримаємо $OK = TD + NK$. Фалес з легкістю виміряв ці відстані, і знайшов, що висота піраміди дорівнює 145 м.

Жерці обурилися і наказали Фалесу якнайшвидше покинути Єгипет. *Завдання.* За малюнком 8.17 висота піраміди Хеопса дорівнює 145 м.



Мал. 8.16



Мал. 8.17

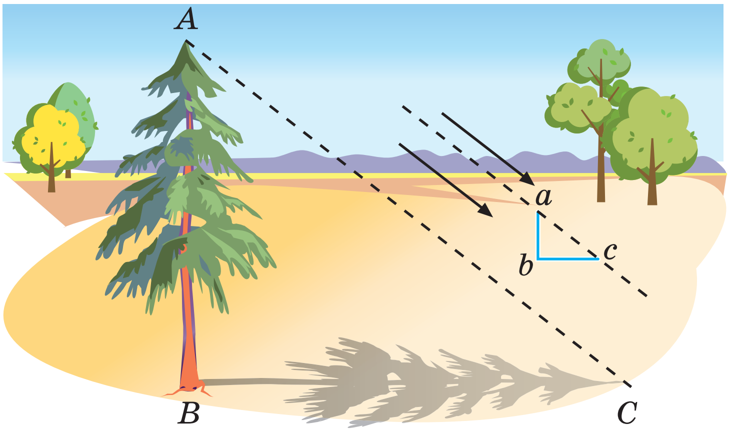
Проведіть обчислення, щоб перевірити результат, отриманий Фалесом.

2. *Використання подібності на місцевості*

Цим простим способом дуже зручно, здавалося б, користуватися в ясний сонячний день для вимірювання поодиноких дерев, тінь яких не зливається з тінню сусідніх. Але в наших широтах не так легко, як у Єгипті, підстерегти потрібний для цього момент. Тому спосіб Фалеса у вказаному вигляді застосовується не завжди.

Визначення висоти за тінню:

Неважко однак змінити цей спосіб так, щоб у сонячний день можна було користуватися будь-якою тінню, якою б довжини вона



Мал. 8.18

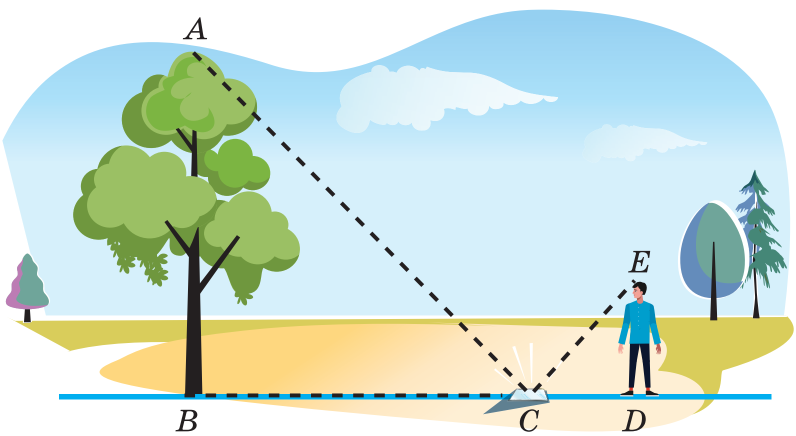
не була. Вимірявши, крім того, і свою тінь чи тінь якоїсь жердини, обчислюють шукану висоту (мал. 8.18) з пропорції:

$AB : ab = BC : bc.$

Тобто висота дерева в стільки ж разів більша за вашу власну висоту (або висоту жердини), у скільки разів тінь дерева довша за вашу тінь (або тінь жердини).

Визначення висоти за допомогою дзеркала

В основі цього способу лежить закон відбивання світла. Обираємо поодиноке дерево і на деякій відстані від нього, на рівній поверхні, кладемо дзеркальце. Відходимо від нього назад так, щоб у дзеркальце було видно верхівку дерева (мал. 8.19). Дерево у стільки разів вище за зріст спостерігача, у скільки відстань від дерева до дзеркальця більша за відстань від дзеркальця до спостерігача.

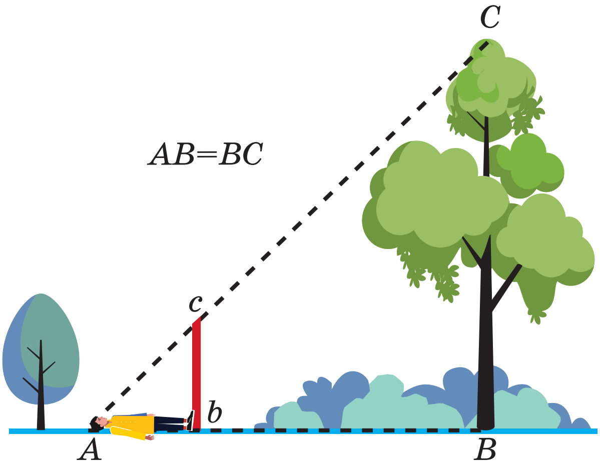


Мал. 8.19

Визначення висоти за своїм зростом

Необхідно відійти від дерева, знайти палицю, що дорівнює вашому зросту, лягти головою в точці A і ногами в бік дерева в точці

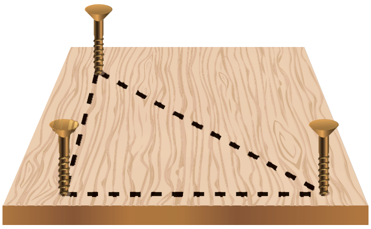
B, при цьому між ногами затиснути палицю. Якщо промінь вашого зору проходить через верх палиці до верхівки дерева *C*, то відстань від голови до дерева і буде висотою дерева (мал. 8.20).



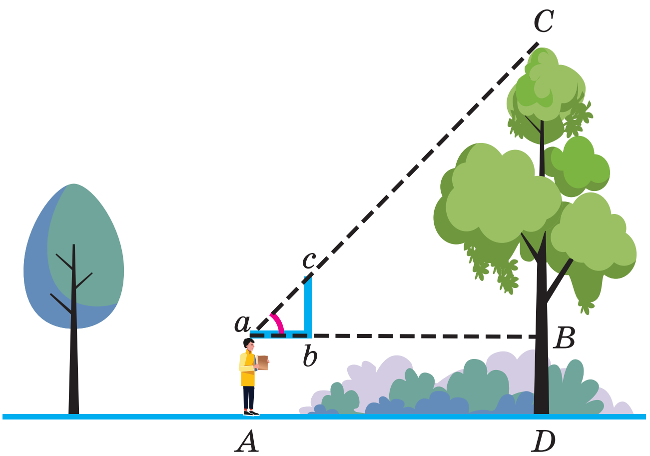
Мал. 8.20

Визначення висоти за допомогою допоміжного трикутника

Ми можемо скористатися властивістю рівнобедреного прямокутного трикутника, застосувавши дуже простий прилад, який легко виготовити з дощечки та трьох шпильок (мал. 8.21). На дощечці будь-якої форми, навіть на шматку кори, якщо у нього є плоска сторона, намічають три точки — вершини рівнобедреного прямокутного трикутника і в них встромляють шпильки.



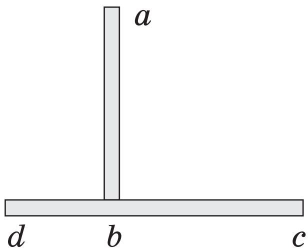
Мал. 8.21



Мал. 8.22

Відійшовши від вимірюваного дерева, тримайте прилад так, щоб один із катетів трикутника був направлений прямовисно, для цього можете користуватися ниткою з грузилом, прив'язаним до верхньої шпильки (див. мал. 8.22). Наближаючись до дерева або віддаляючись від нього, ви завжди знайдете таке місце A, з якого, дивлячись на шпильки a і c, побачите, що вони покривають верхівку C дерева. Це означає, що продовження гіпотенузи AC проходить через точку C. Тоді, очевидно, відстань AB дорівнює CB, оскільки кут $a = 45°$.

Визначення за допомогою найпростішого висотоміра

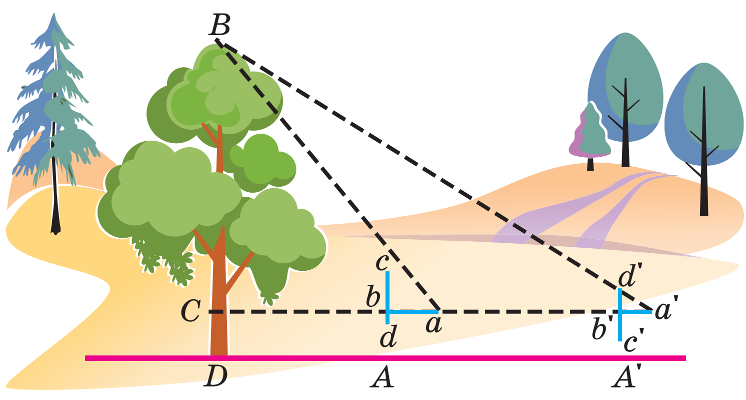


Мал. 8.23

Дві планки ab та cd скріплюються під прямим кутом так, щоб ab дорівнювало bc, а bd становило половину ab. Ось і весь прилад (мал. 8.23).

Щоб виміряти приладом висоту, його тримають у руках, направивши планку cd вертикально, і стають послідовно у двох місцях: спочатку в точці A, де мають прилад кінцем c вгору, а потім у точці A', подалі, де прилад тримають вгору кінцем d.

Точка A обирається так, щоб, дивлячись з a на кінець c, бачити його на одній прямій з верхівкою дерева. А точку A' відшукують так, щоб, дивлячись з a на точку d, бачити її так, щоб вона збігалася з B (мал. 8.24).



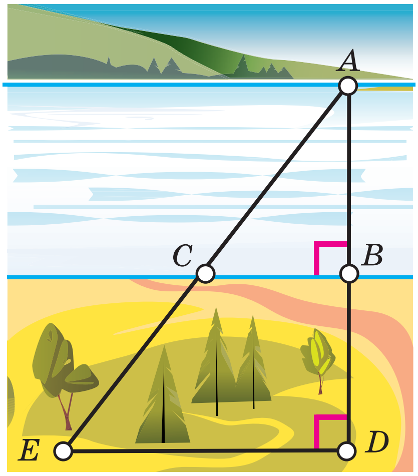
Мал. 8.24

У відшуканні цих двох точок A і A' полягає все вимірювання, тому що шукана частина висоти дерева BC дорівнює відстані AA'.

Визначення ширини річки

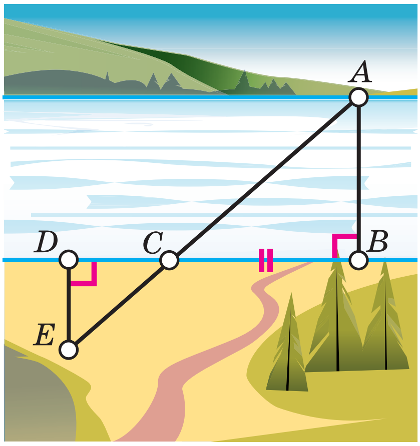
За допомогою подібності трикутників можна виміряти не тільки висоту предметів, а також і їх ширину, наприклад, ширину річки. Розгляньмо деякі способи вимірювання ширини річки на місцевості.

1) *Використання допоміжного рівнобедреного прямокутного трикутника* (*коли рух уздовж берега неможливий*). Спочатку на протилежному березі треба вибрати видимий об'єкт (наприклад, дерево). Це буде перша точка — точка A. Далі треба стати навпроти нього та відмітити точку B (якщо немає в цій точці дерева тощо, то відмічаємо і ставимо, наприклад, палку). Тепер нам знадобиться вже відомий допоміжний прилад, який розглядали в попередньому пункті (мал. 8.25) з рівнобедрним прямокутним трикутником, утворений шпильками чи цвяхами. Рухаючись перпендикулярно від берега, знаходимо таку точку D, тримаємо прилад на рівні очей і дивимось одним оком вздовж двох шпильок у напрямку точок A і B так, щоб вони покривали дані умовні точки. Це дозволить опинитися на продовженні прямої AB. Далі, не рухаючи прилад, треба дивитися вздовж інших двох шпильок (перпендикулярно до напрямку, який задають перші дві шпильки) і відмітити умовно на місцевості точку E, яку покривають обидві шпильки другої пари. У такий спосіб побудовано рівнобедрний прямокутний трикутник ADE ($ED = AD$). Відмірявши кроками DE, рухаємось за прямою DA, відміряючи кроками відстань DB. Тоді $AB = ED - BD$.



Мал. 8.25

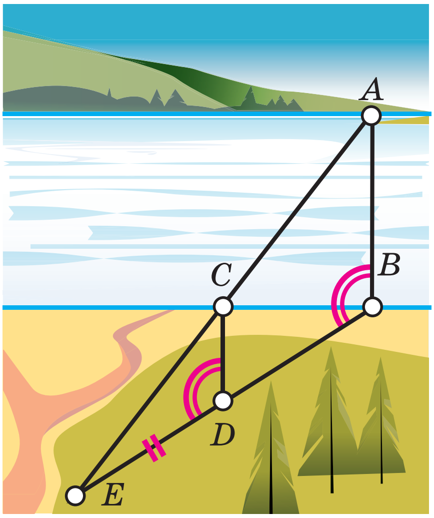
2) *Використання подібності прямокутних трикутників* (*руху берегом ніщо не пререшкоджає*). Знову на протилежному березі річки обираємо об'єкт, який буде слугувати точкою A (мал. 8.26). Стаємо навпроти і відмічаємо точку B. Далі рухаємось берегом, рахуючи кроки, у таку точку на березі, у якій, дивлячись на об'єкт A, він повністю перекривається. Відмічаємо точку C. Йдемо далі вздовж берега, роблячи в k разів кроків



Мал. 8.26

менше, ніж між точками B і C. Далі йдемо в перпендикулярному напрямку від берега до такої точки E, у якій точки C і A перекриваються (тобто знаходяться на одній прямій). Отримали два подібні трикутники ABC та EDC. Оскільки коефіцієнт k відомий, то $AB = k \cdot DE$.

3) *Використання подібності довільних трикутників*. Відстань від точки B на даному березі річки і об'єкта на протилежному березі, який позначимо як точку A (мал. 8.27), будемо вважати шириною річки. Рухаючись вздовж берега на певну кількість кроків, зупиняємось в точці C. На продовженні AC, рухаючись вглиб берега, знаходимо точку E так, щоб дивлячись з неї на точку A, перекривалась точка C. На прямій BE відшуковуємо точку D таку, що пряма DC перпендикулярна до берега. Тоді за подібністю трикутників ABE та CED можемо знайти AB:



Мал. 8.27

$$AB = \frac{BE}{DE} DC.$$

3. *Щоб довести подібність двох трикутників*:

1) виділіть їх на малюнку;

2) доведіть: рівність двох пар відповідних кутів, або дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника й кути, утворені цими сторонами, рівні, або сторони одного трикутника пропорційні сторонам другого трикутника;

3) зробіть висновок: трикутники подібні за двома кутами, або за двома сторонами й кутом між ними, або за трьома сторонами.

4. *Щоб довести рівності, що містять добутки двох пар відрізків, виконайте дії, описані у таблиці 8.3.*

Пошук доведення	Доведення
1. Припустіть правильність доводжуваної рівності.	1. Виділіть на малюнку подібні трикутники.
2. Запишіть її у вигляді пропорції.	2. Обґрунтуйте їх подібність.

Пошук доведення	Доведення
3. Відшукайте на малюнку (або побудуйте) трикутники, сторонами яких є члени утвореної пропорції.	3. Складіть пропорції з відповідних сторін цих трикутників.
4. Обґрунтуйте подібність цих трикутників.	4. Дістаньте з пропорції рівність, яку треба довести.

5. *Властивості середніх пропорційних у прямокутному трикутнику*

Важливу роль у геометрії відіграють теореми про середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику. Нагадаємо, що відрізок або число x називають середнім пропорційним відрізків або чисел a і b, якщо правильною є пропорція $a : x = x : b$.

Цікаву властивість має висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи: вона розбиває даний трикутник на два менші прямокутні трикутники, подібні даному, а сама *висота є середнім пропорційним відрізків, на які ця висота ділить гіпотенузу*. Використавши малюнок 8.28, запишемо формулу:

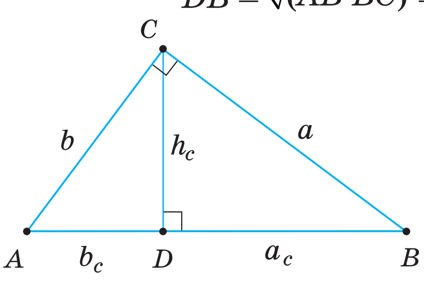
$$b_c : h_c = h_c : a_c$$
$$h_c^2 = a_c \cdot b_c$$

Катет є середнім пропорційним між гіпотенузою та його проєкцією на гіпотенузу:

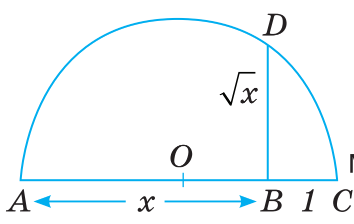
$$a^2 = c \cdot a_c$$
$$b^2 = c \cdot b_c$$

Дану властивість використовують на практиці, щоб зобразити квадратний корінь якогось числа (мал. 8.29). Для цього на прямій відкладають відрізки AB, BC, що дорівнюють m і n (*частіше беруть x та 1*) на AC, як на діаметрі, описують півколо. З точки B проводять пряму перпендикулярну AC і визначають точку перетину цієї прямої з півколом. Відрізок DB — той, який треба було побудувати:

$$DB^2 = AB \cdot BC$$
$$DB = \sqrt{(AB \cdot BC)} = \sqrt{(x \cdot 1)} = \sqrt{x}$$



Мал. 8.28



Мал. 8.29

Розв'яжіть спочатку геометричну задачу* (Г)*, а потім — відповідну задачу практичного змісту* (П)*, де використовується геометрична задача.

8.30. (**Г**). Сторони трикутника відносяться, як 1 : 3 : 4. Знайдіть сторони подібного йому трикутника у якого більша сторона дорівнює 12 см.

(**П**). На географічній карті три населені пункти віддалені один від одного на 6 см, 5 см і 4 см. На місцевості найбільша відстань між ними дорівнює 15 км.

1) Який масштаб цієї карти?

2) Яка найменша відстань між населеними пунктами?

3) Яка відстань між іншими населеними пунктами?

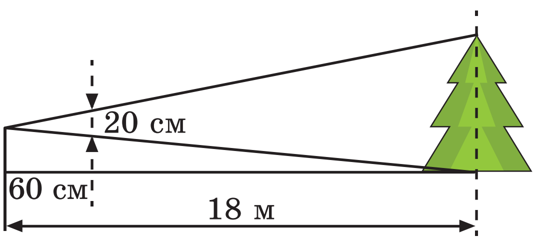
8.31. (**Г**). Як графічно знайти $\sqrt{5}$?

(**П**). Як застосувати графічний спосіб добування кореня на місцевості?

8.32. Для знаходження висоти єгипетської піраміди недалеко від неї було встановлено жердину завдовжки 1,5 м. Її тінь становила 1 м. У той же момент тінь піраміди дорівнювала 96 м. Чому дорівнює висота піраміди?

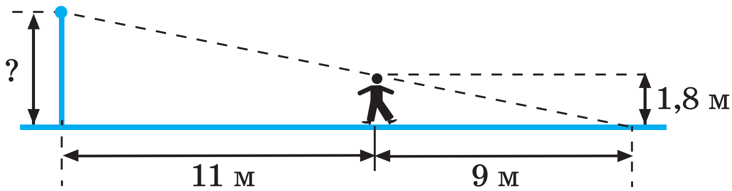
8.33. Дерево заввишки 5,4 м стоїть на відстані 14 кроків від будинку, на якому встановлено прожектор. Тінь від дерева дорівнює 3 кроки. Яка висота будинку в метрах?

8.34. Щоб виміряти висоту дерева, учень тримає лінійку у вертикальному положенні на відстані витягнутої руки. Відстань від ока учня до лінійки дорівнює 60 см. Частина лінійки, що закриває дерево, становить 20 см. Відстань від учня до дерева дорівнює 18 м (мал. 8.30). Чому дорівнює висота дерева?



Мал. 8.30

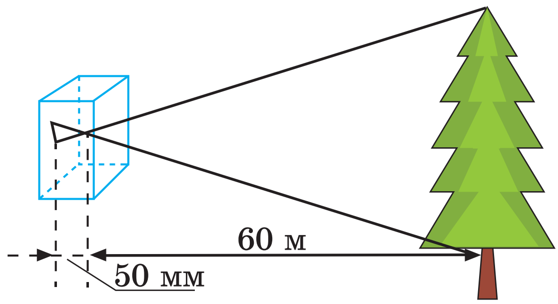
8.35. Людина, зріст якої дорівнює 1,8 м, стоїть на відстані 11 м від вуличного ліхтаря (мал. 8.31). При цьому довжина тіні людини дорівнює 9 м. Визначте висоту ліхтаря (у метрах).



Мал. 8.31

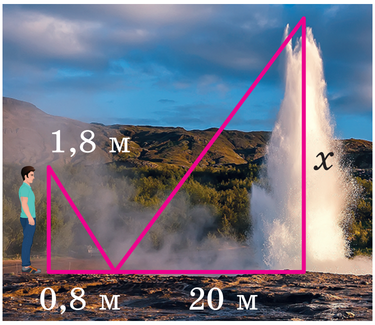
8.36. На якій відстані (у метрах) від ліхтаря стоїть людина зростом 1,6 м, якщо довжина її тіні дорівнює 2 м, а висота ліхтаря — 4 м?

8.37. Зображення дерева на фотоплівці має висоту 15 мм (мал. 8.32). Знайдіть висоту дерева, якщо відстані від об'єктива фотоапарата до зображення і до дерева відповідно дорівнюють 50 мм та 60 м.



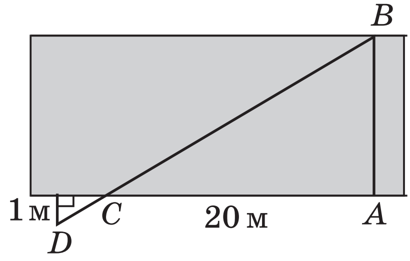
Мал. 8.32

8.38. Визначте висоту дерева, якщо зріст спостерігача 1,6 м, дзеркальце знаходиться від дерева на відстані 7,2 м, а від спостерігача — на відстані 1,2 м.



Мал. 8.33

8.39. Гарячі підземні джерела при виверженні, подібно до вулкана, викидають назовні фонтан гарячої води та пари. У холодній північній столиці Ісландії Рейк'явіку є багато підземних джерел гейзерів, які завжди привертають велику увагу туристів. Гейзери кожні 10 хвилин тричі викидають вгору фонтан води заввишки 40–60 метрів. Один із туристів виміряв висоту стовпа води.



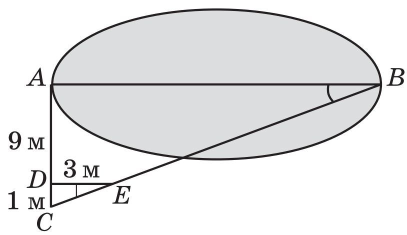
Мал. 8.34

Для цього він поклав дзеркало на деякій відстані від гейзера і став відходити від дзеркала доти, доки в дзеркалі не відобразиться верхівка стовпа води. За даними на малюнку 8.33 (с. 71) знайдіть висоту гейзера.

8.40. Використовуючи дані, наведені на малюнку 8.44 (с. 71), знайдіть ширину *AB* річки.

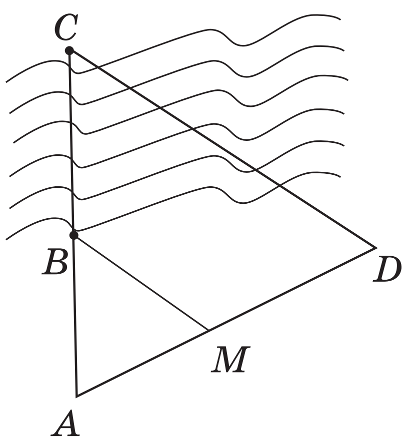
8.41. Визначте відстань від берега до корабля в морі, знаючи висоту щогли — 20 м, довжину великого пальця — 4 см, відстань від очей до руки — 60 см.

8.42. Використовуючи дані, наведені на малюнку 8.35, знайдіть ширину *AB* озера.



Мал. 8.35

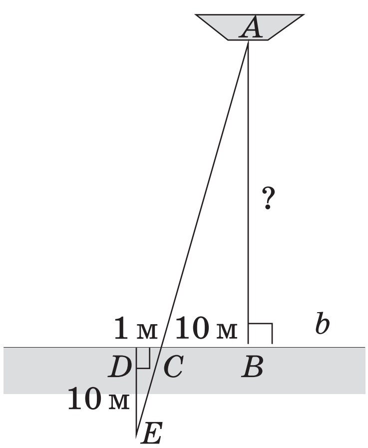
8.43. Чоловік високого зросту визначає ширину річки. Відстань від його п'ят до очей дорівнює 180 см. Він встановлює на березі річки жердину заввишки 170 см і відходить від неї доти, доки верхівка жердини і протилежний берег річки не опиняться на одній лінії (промені зору). Відійти йому довелося на 10 м. Яка ширина річки?



Мал. 8.36

8.44. Знайдіть ширину річки *CB*, якщо на місцевості виконали деякі виміри: $AB = 5$ м, $AM = 3$ м, $MD = 9$ м (мал. 8.36). Відповідь поясніть.

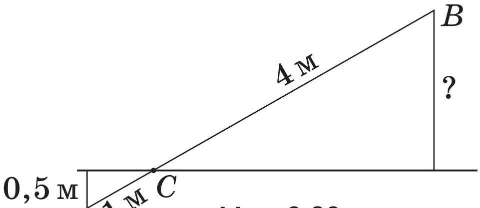
8.45. Використовуючи дані, наведені на малюнку 8.37, знайдіть відстань *AB* від човна *A* до берега *b*.



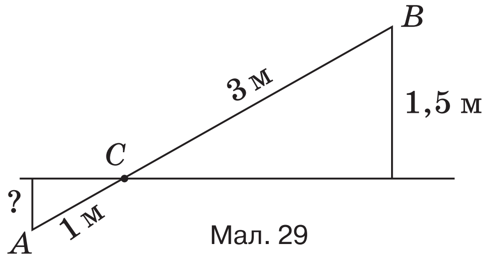
Мал. 8.37

8.46. Коротке плече шлагбаума має довжину 1 м, а довге плече — 4 м. На яку висоту піднімається кінець довгого плеча (мал. 8.38), коли кінець короткого плеча опускається на 0,5 м?

8.47. Коротке плече шлагбаума (мал. 8.39) має довжину 1 м, а довге плече — 3 м. На яку висоту опускається кінець короткого плеча, коли кінець довгого плеча піднімається на 1,5 м? Дайте відповідь у метрах.

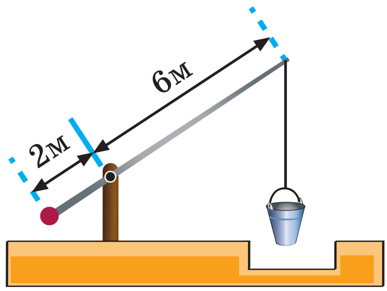


Мал. 8.38



Мал. 29

8.48. На малюнку 8.40 зображений колодязь із «журавлем». Коротке плече має довжину 2 м, а довге плече — 6 м. На скільки метрів опуститься кінець довгого плеча, коли кінець короткого підніметься на 0,5 м?



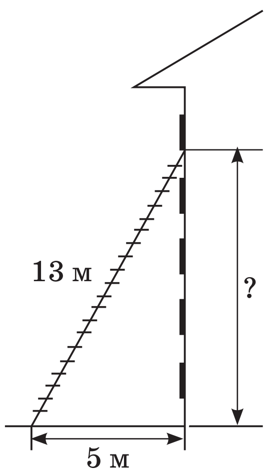
Мал. 8.40

8.49. Пожежну драбину завдовжки 13 м приставили до вікна п'ятого поверху будинку (мал. 8.41). Нижній кінець драбини віддалений від стіни на 5 м. На якій висоті розташоване вікно? Відповідь дайте в метрах.

8.50. Між двома фабричними будівлями влаштований похилий жолоб передачі матеріалів. Відстань між будівлями дорівнює 10 м, а кінці жолоба розташовані на висоті 8 м і 4 м над землею. Знайдіть довжину жолобу.

8.51. Правий берег річки має висоту 30 м над рівнем води. Ширина річки дорівнює 40 м.

1) Яка відстань від спостерігача, що сидить на правому березі, до іншого берега річки?



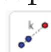
Мал. 8.41

2) Спостерігачеві здається, що човен стоїть посередині річки (човен і береги річки видно спостерігачеві під однаковими кутами). Яка відстань від човна до берегів річки?

Виконайте завдання, використовуючи програму GeoGebra

8.52. За допомогою програми GeoGebra перевірте всі ознаки подібності трикутників.

Хід виконання

1.	Створіть новий файл GeoGebra — «Файл–Створити».
2.	За допомогою інструмента «Многокутник»  побудуйте трикутник. Побудову проводьте проти годинникової стрілки (щоб закрити трикутник: з вершини C поверніться на вершину A).
3.	Виберіть інструмент «Кут»  і натисніть на точки C, A, B, аналогічні дії проведіть із точками (A, B, C), (B, C, A).
4.	Виконайте «Налаштування–округлення–0 розрядів».
5.	Щоб побудувати подібний трикутник, скористайтесь інструментом «Гомотетія відносно точки» , оберіть довільну точку D на полотні і декілька раз зробіть, змінюючи коефіцієнт, як додатній, так і від'ємний.
6.	На одному з подібних трикутників позначте кути, використовуючи інструмент «Кут» (див. пункт 3).
7.	Використовуючи інструмент «Переміщення» , змінюйте сторони та кути основного трикутника. Подивіться, що буде з подібними, зробіть висновки.
8.	Збережіть файл як «Завдання8.4.ggb».

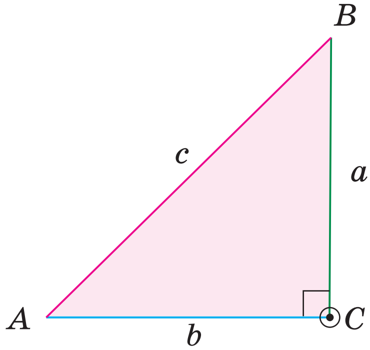
Перевірте свої досягнення

1. Рівносторонній трикутник зі стороною 0,1 мм розглядають під мікроскопом, який дає збільшення в 40 разів. Чи збільшаться кути трикутника?
2. Від трикутного шматка покрівельного заліза масою 5 кг необхідно відрізати паралельно стороні смугу масою 2 кг. Як це зробити?
3. Трикутний наділ необхідно розділити на три рівні частини прямими, паралельними одній з його сторін. На якій відстані від вершини мають проходити межі цих окремих наділів?
4. Як знайти відстань між двома пунктами A і B, між якими не можна пройти?
5. Чому вдень за тінню можна визначити висоту дерева, а вночі за тінню від ліхтаря — ні?
6. Були виміряні листок кульбабки, який ріс в тіні, і такої ж форми листок другої кульбабки, що ріс на сонці. Довжина першого — 31 см, другого — 3,1 см. У скільки разів площа листка, що виріс в тіні, більша за площу листка, що виріс на сонці?
7. На прямій відкладені один за одним два відрізки завдовжки 1 см і 3 см. На отриманому відрізку як на діаметрі побудовано півколо, а потім

зі спільної точки даних відрізків побудовано перпендикуляр до перетину з півколом. Доведіть, що відстань від основи перпендикуляра на діаметрі та його кінця на півколі дорівнює $\sqrt{3}$ (і впевніться за малюнком побудови, що довжина його 1,7 см).

§ 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

1. Теорема Піфагора



Мал. 8.42

Корисні поради

1. *Екскурс в історію*. Для побудови прямого кута на місцевості в Стародавньому Єгипті використовували мотузку, яку ділили вузлами на 12 рівних частин, потім розтягували туго на землі так, щоб отримати трикутник зі сторонами 3, 4, 5. Тоді, за теоремою протилежною до теореми Піфагора, кут навпроти сторони 5 і буде прямим. Трикутник зі сторонами 3, 4, 5 і досі називають єгипетським.

2. Якщо a, b — катети прямокутного трикутника (мал. 8.42), c — його гіпотенуза, то з формули $c^2 = a^2 + b^2$ одержимо такі формули: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $a^2 = c^2 - b^2$, або $a = \sqrt{c^2 - b^2}$; $b^2 = c^2 - a^2$, або $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

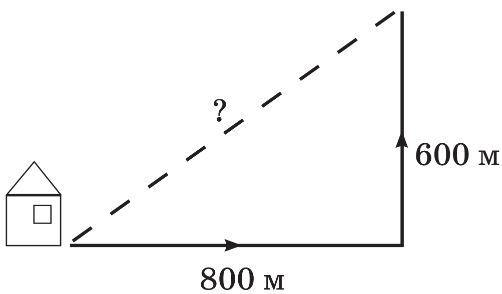
Скориставшись цими формулами, за двома будь-якими сторонами прямокутного трикутника можна знайти його третю сторону.

3. Якщо квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших його сторін, то цей трикутник — прямокутний.

Розв'яжіть спочатку геометричну задачу* (Г)*, а потім — відповідну задачу практичного змісту* (П)*, де використовується геометрична задача.

8.53. (**Г**). Знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його катети дорівнюють 12 см і 5 см.

(**П**). Богдан пройшов від будинку на схід 800 м. Потім повернув на північ і пройшов 600 м (мал. 2). На якій відстані від будинку опинився хлопець?



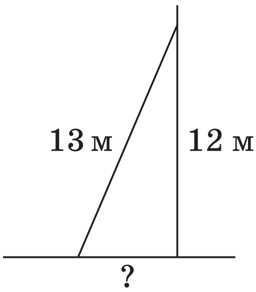
Мал. 8.43

8.54. (**Г**). Знайдіть катет прямокутного трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 15 см, а катет — 12 см.

(**П**). На яку відстань слід відсунути від стіни будинку нижній кінець драбини завдовжки 13 м, щоб верхній її кінець опинився на висоті 12 м (мал. 8.44).

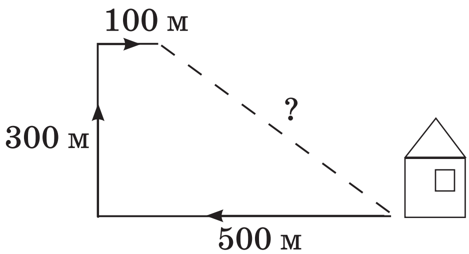
Розв’яжіть задачі

8.55. Микола здійснює прогулянку ділянкою прямокутної форми розмірами 90 м × 120 м. За одну секунду він проходить 1,5 м. Він рухається то за периметром, то за діагоналлю ділянки. На скільки менше часу витратить Микола на переміщення з одного кута ділянки до іншого за діагоналлю, ніж рухаючись за периметром (за один прохід)?



Мал. 8.44

8.56. Олена пройшла від будинку в напрямку на захід 500 м (мал. 8.45). Потім повернула на північ і пройшла 300 м. Після цього вона повернула на схід і пройшла ще 100 м. На якій відстані від будинку опинилася дівчина?



Мал. 8.45

8.57. Два пароплави вийшли з порту, слідуючи один на північ, другий на захід. Швидкості їх дорівнюють відповідно 15 км/год та 20 км/год. Яка відстань між ними через 2 год?

8.58. Василь розпочав рух на автомобілі зі швидкістю 60 км/год від залізничного вокзалу у східному напрямку о 14:00. Через годину, у напрямку на північ, зі швидкістю 50 км/год із тієї ж точки почав рух Левко. Яка відстань буде між ними о 16:00?

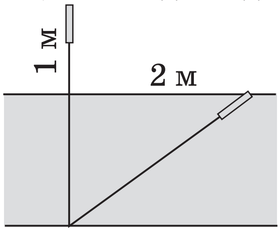
8.59. У парку при центральному вході на порожній квадратній ділянці зі стороною 14 м вирішили зробити велику композицію з живих квітів у вигляді квадрата. Вершина кута клумби мала ділити сторону ділянки на дві нерівні частини — 6 м і 8 м, але так, щоб відповідні відрізки на рівних сторонах ділянки були рівні. Якою є площа квіткової композиції?

8.60. У цирку до вершин двох щогл прив’язаний трос. Коли канатоходець дійшов до середини троса, його натяг послабили так, що трос опустився до арени. На якій відстані від щогли заввишки 6 м канатоходець торкнувся арени, якщо висота другої щогли 4 м, а відстань між ними 10 м? Відповідь запишіть у метрах.

8.61. Пожежні сходи, укріплені на машині, можуть бути висунуті на 20 м, а їх нахил може досягати 60°. Основа сходів знаходиться на висоті 2 м. Якого поверху можна нею дістатися, якщо висота поверху 3 м?

8.62. Знайдіть довжину драбини, яку притулили до дерева, якщо її верхній кінець знаходиться на висоті 2,4 м над землею, а нижній віддалений від стовбура дерева на 1,8 м. Відповідь дайте в метрах.

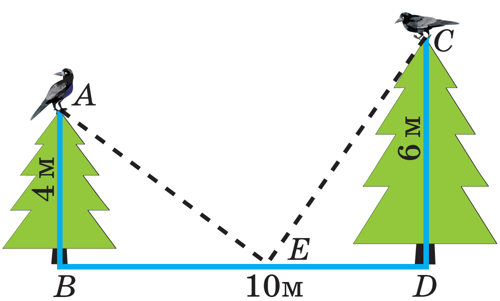
8.63. Стебло очерету виступає з води озера на 1 м (мал. 8.46). Його верхній кінець відхилили від вертикального положення на 2 м і він опинився на рівні води. Знайдіть глибину озера у місці, де росте очерет.



Мал. 8.46

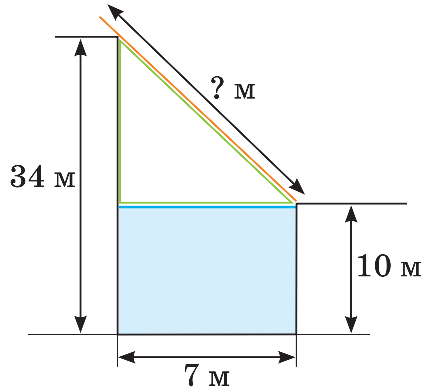
8.64. *Старовинна арабська задача*. На протилежних берегах річки ростуть одна навпроти другої дві пальми. Висота однієї з них дорівнює 30 ліктів, іншої — 20 ліктів, а відстань між основами пальм становить 50 ліктів. На вершині кожної пальми сидить птах. Раптом обидва птахи побачили рибу, яка з'явилась на поверхні води між пальмами. Вони злетіли з пальм одночасно і, рухаючись з однаковою швидкістю, одночасно схопили рибу. На якій відстані від основи вищої пальми з'явилася риба?

8.65. На вершинах двох ялинок сидять дві ворони (мал. 8.47). Висота ялинок дорівнює 4 м і 6 м. Відстань між ними дорівнює 10 м. На якій відстані потрібно покласти сир для цих ворон, щоб відстані від них до сиру були однакові?



Мал. 8.47

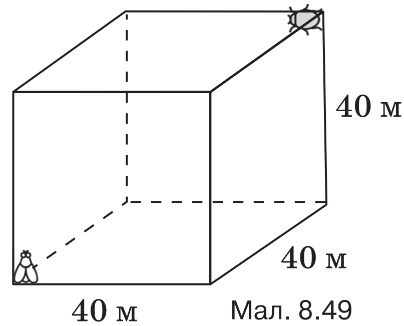
8.66. Глибина кріпосного рову дорівнює 10 м, ширина — 7 м, а висота фортечної стіни від її основи — 34 м. Довжина драбини, якою можна піднятися на стіну, на 2 м більша, ніж відстань від краю рову до верхньої точки стіни (мал. 8.48). Знайдіть довжину драбини.



Мал. 8.48

8.67. Тунель має форму півкола радіуса 3 м. Якою найбільшої висоти має бути машина завширшки 2 м, щоб вона могла проїхати цим тунелем? У відповіді вкажіть наближене значення в метрах з точністю до одного знаку після коми.

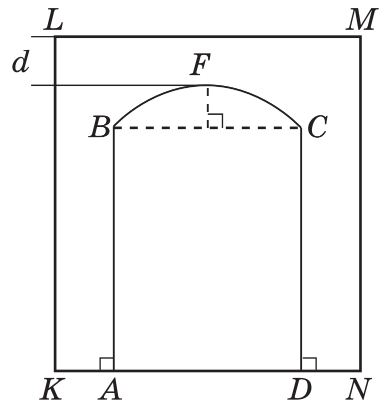
8.68. В одному кутку кубічної коробки з розмірами 40 × 40 × 40 (см) сидить муха. У протилежному кутку сидить павук (мал. 8.49). Знайдіть довжину найкоротшого шляху по поверхні коробки, якою павук може дістатися мухи. Відповідь округліть до цілих.



Мал. 8.49

8.69. З круглої колоди потрібно вирізати брус із прямокутним поперечним перерізом розміром 5 × 12 см. Який найменший діаметр має бути в колоди?

8.70. (ЗНО 2018) На малюнку 8.50 зображено фрагмент поперечного перерізу стіни (прямокутник $KLMN$) з арковим прорізом $ABFCD$, верхня частина BFC якого є дугою кола радіуса 1 м. Відрізки AB і DC перпендикулярні до AD, $AB = DC = 2$ м, $AD = 1{,}6$ м, $KL = 2{,}75$ м. Визначте відстань d від найвищої точки F прорізу до стелі LM.



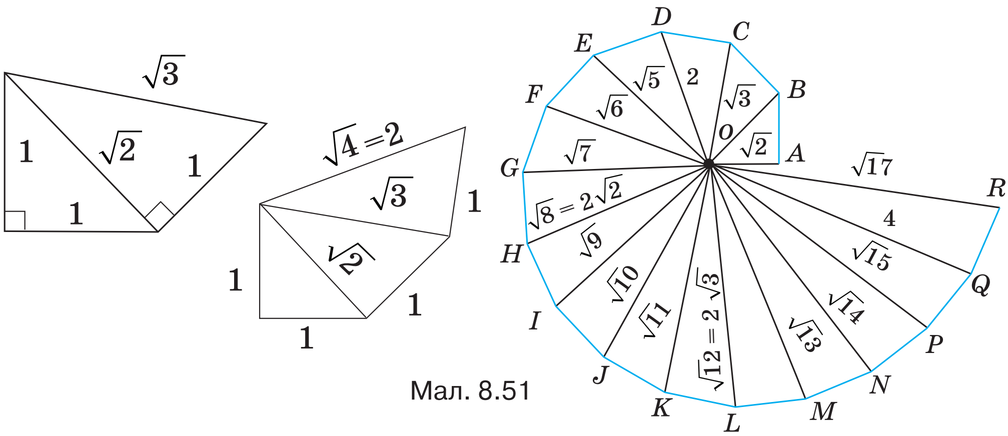
Мал. 8.50

Геометричні несподіванки

Побудова відрізка $\sqrt{n}$ ($\sqrt{n} \in N$). *Спіраль Теодора.*

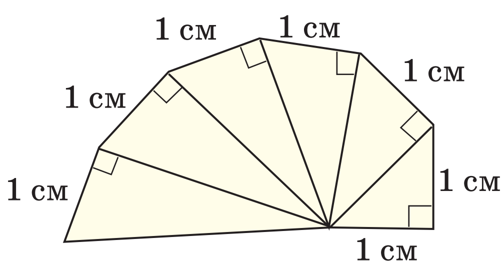
Гіпотенуза прямокутного трикутника з катетами 1 дорівнює $\sqrt{2}$. Побудуємо трикутник, один із катетів якого дорівнює гіпотенузі даного трикутника, а інший дорівнює 1. На його гіпотенузі знову побудуємо прямокутний трикутник і т. д. Трикутники, побудовані в такий спосіб, утворюють спіраль (мал. 8.51).

Грецький вчений Теодор, який жив через 100 років після Піфагора, створив математичну модель спіральної форми з прямокутних трикутників. Ця форма названа його ім’ям Спіраль Теодора.



Мал. 8.51

8.71. За спіраллю Теодора на малюнку 8.52 виконайте такі завдання:



Мал. 8.52

1) для кожного прямокутного трикутника на малюнку визначте, квадратним коренем з якого числа є його гіпотенуза;

2) обчисліть квадратний корінь за допомогою калькулятора з точністю до десятих;

3) виміряйте довжину кожної гіпотенузи лінійкою;

4) порівняйте результати виконання завдань 2 і 3.

Виконайте завдання, використовуючи програму GeoGebra

8.72. З допомогою програми GeoGebra переконайтесь у вірності теореми Піфагора, а саме: в прямокутному трикутнику площа квадрата, побудованого на гіпотенузі, дорівнює сумі площ квадратів побудованих на катетах.

Хід виконання

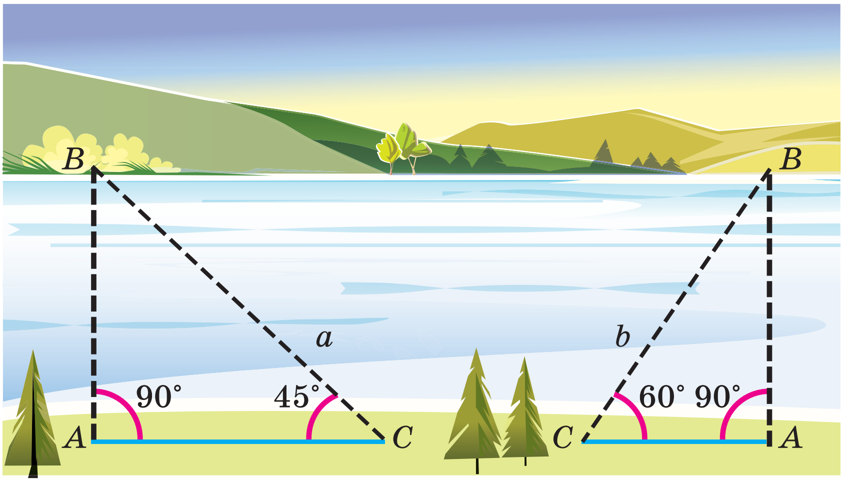
1.	Створіть новий файл GeoGebra — «Файл–Створити».
2.	Щоб створити прямокутний трикутник, необхідно задати прямий кут, є декілька варіантів побудови, розглянемо один із них (а які запропонуєш ти?), ми підемо шляхом побудови двох перпендикулярних прямих: за допомогою інструмента «Пряма» побудуйте довільну пряму, точки, які з'явились, нам не потрібні, тому правою клавішею знімаємо галочку на показувати об'єкт. за допомогою інструмента «Перпендикулярна пряма» побудуйте пряму, вибравши довільну точку та вже побудовану пряму, з довільної точки, також можна зняти галочку або вже використати для трикутника, а от точку перетину краще відмітити, використавши інструмент «Перетин» , нажавши на наші дві прямі, перетягніть букву, якщо це потрібно, перейменуйте на С; щоб позначити прямий кут вибираємо , нажавши на наші дві прямі, позначення нам не потрібне, тому нажавши правою клавішею, знімаємо галочку з показати позначення; вибравши інструмент «Многокутник» , побудуйте трикутник, вибравши довільні точки на прямих і точку С, точки будуть з іншими буквами, тому перейменуйте, щоб отримати трикутник АВС. Перпендикулярні прямі вже виконали свою місію, з них теж зніміть позначку, вибравши, щоб їх не було видно, для цього не забудьте нажати інструмент , наведіть курсор на пряму, клацніть правою клавішею, виберіть показувати об'єкт.
3.	За допомогою інструмента «Правильний многокутник» побудуйте на сторонах трикутника квадрати.

4.	За допомогою інструмента «Площа» , натискаючи на квадрати, визначте їх площі, змініть назву «Площа многокутник1» на S_1, так для всіх квадратів.
5.	За допомогою інструмента «Текст» ABC додайте на полотно напис. У поле «Редагування» введіть $S_1 =$ не закриваючи вікна «Текст» у меню «Об'єкти», виберіть многокутник 2; потім введіть символ «+»; у меню «Об'єкти» виберіть многокутник 3; потім введіть символ =. У меню «Об'єкти» виберіть пункт «Порожня рамка» в ній за допомогою меню «Об'єкти» введіть многокутник 2 + многокутник 3. Натисніть кнопку «ОК». Змініть розмір шрифту напису на великий, можете змінити колір, шрифт тощо. Перемістіть текст. Порівняйте кінцевий результат у формулі й площу квадрата, побудованого на гіпотенузі, зробіть висновки.
6.	Збережіть файл як «Завдання8.5.ggb».

2. Прямокутні трикутники

Корисні поради

1. *Екскурс в історію.* У далеку давнину відстані й кути спочатку вимірювали безпосередньо інструментами. Так, транспортиром вавилоняни користувалися ще за 2000 років до н. е. Проте на практиці безпосередньо виміряти відстані й кути не завжди можливо. Як виміряти відстань між двома пунктами, розділеними перешкодою (річкою, озером, лісом), відстань до Сонця, Місяця? Як виміряти висоту дерева, гори? Як знайти кут підйому дороги або кут, під яким спускаємося з гори? Були відкриті прийоми опосередкованого вимірювання відстаней і кутів. Стали використовувати рівні або подібні трикутники та геометричні побудови. Будували на місцевості допоміжний трикутник і вимірювали потрібні його елементи.



Мал. 8.53

Визначення відстані побудовою трикутника на місцевості застосовується для визначення ширини непрохідних ділянок місцевості. Точку A вибирають так, щоб з неї було видно орієнтир (точка B) на протилежному березі і при цьому була можливість вздовж берега виміряти відстань (у випадку *а* на малюнку 8.53 вона і буде шириною річки, а у випадку *б* ширина ріки буде дорівнювати подвоєному значенню відстані AC).

2. Види прикладних задач: на знаходження висоти предмета, основа якого є доступною; на знаходження висоти предмета, основа якого недоступна; на знаходження відстані між двома пунктами, які розділені перешкодою; на знаходження кутів (кута підйому дороги, кута відкосу, кута, під яким видно деякий предмет, тощо). Розв'язування багатьох прикладних задач ґрунтується на розв'язуванні прямокутних трикутників.

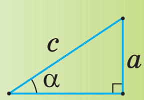
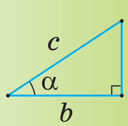
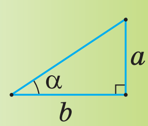
3. Синусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.

Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до прилеглого катета.

Відношення сторін прямокутного трикутника та їх позначення подано в таблиці 8.4.

Таблиця 8.4

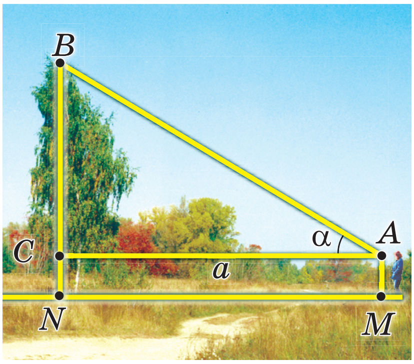
 $\sin\alpha = \frac{a}{c}$	 $\cos\alpha = \frac{b}{c}$	 $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$

1. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого є доступною.

Розв'яжіть спочатку геометричну задачу (Г), а потім – відповідну задачу практичного змісту (П), де використовується геометрична задача.

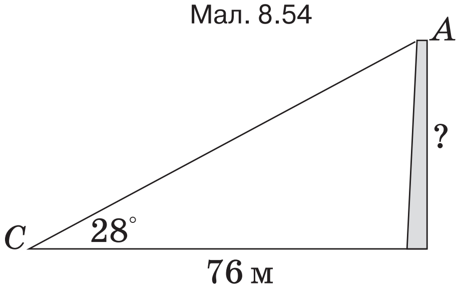
8.73. (**Г**). У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) знайдіть AC, якщо $BC = 6$ см, $\angle B = 38°$.

(**П**). За допомогою застосунку в телефоні знайдіть висоту дерева, якщо зріст людини, яка стоїть за 30 м від дерева, становить 1,8 м, а кут, під яким вона бачить дерево, дорівнює 31° (мал. 8.54).



Мал. 8.54

8.74. Кут підйому сходів дачного будиночка дорівнює 58°. Використовуючи таблицю тригонометричних функцій, знайдіть висоту сходинок сходів, якщо ширина сходинок дорівнює 20 см.



Мал. 8.55

8.75. При висоті сонця 28° (мал. 8.55) заводська труба дає тінь завдовжки 76 м. Знайдіть висоту труби. Відповідь округліть до цілих.

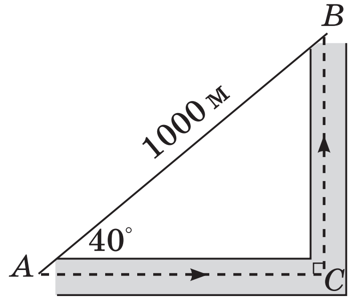
8.76. Драбина завдовжки 12,5 м приставлена до стіни так, що відстань від її нижньої частини до стіни дорівнює 3,5 м. На якій висоті знаходиться верхній кінець драбини?

8.77. Вертикальна висота ескалатора в торговому центрі 4,3 м. При підйомі на ескалаторі пройдений шлях за горизонталлю становитиме 15 м.

1. Знайдіть довжину ескалатора. Накресліть відповідний малюнок.
2. Змініть дані в задачі так, щоб її можна було розв'язати за допомогою тригонометричних відношень.

2. Задачі на знаходження висоти предмета, основа якого недоступна.

8.78. Кут підйому дороги 7°. Знайдіть висоту, на яку підніметься пішохід, пройшовши 200 м.

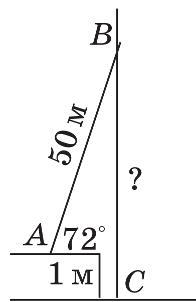


Мал. 8.56

8.79. Використавши дані на малюнку 8.56, знайдіть, на скільки метрів шлях з A до B за прямою коротший, аніж шлях з A до B дорогою з поворотом на 90° . Відповідь округліть до цілих.

8.80. Пішохід пішов у напрямку, що становить кут 35° з напрямом дороги. На скільки метрів він відійде від дороги, пройшовши 1000 м?

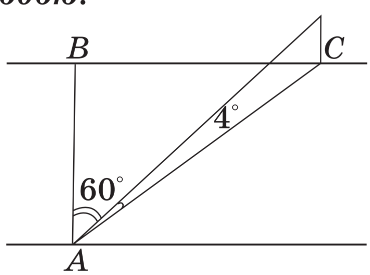
8.81. Пожежна драбина висунута на 50 м при граничному куті підйому 72° (мал. 8.57). Знайдіть висоту, якої досяг верхній край драбини, якщо її нижній край віддалений від поверхні землі на 1 м.



Мал. 8.57

3. Задачі на знаходження відстані між двома пунктами, які розділені перешкодою.

8.82. Спостерігач A, що стоїть на березі річки, бачить людину C на іншому березі під кутом 4° (мал. 8.58). Напрямок на цю людину утворює кут 60° з напрямком AB, перпендикулярним до берегів річки. Знайдіть ширину AB річки, вважаючи зріст людини 1 м 70 см. Відповідь округліть до цілих.



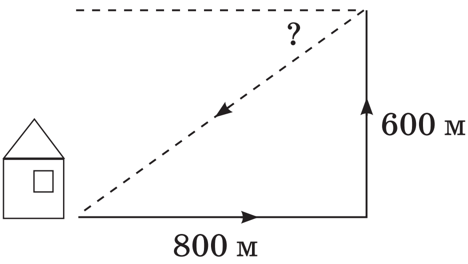
Мал. 8.58

8.83. Мисливець, що стоїть на висоті 30 м, бачить звіра, що стоїть у западині, під кутом 20° . Знайдіть відстань між мисливцем та звіром.

8.84. Телеграфний стовп заввишки 10 м знаходиться на березі річки. Верхній кінець стовпа видно з іншого берега під кутом 20° до горизонту. Використовуючи таблицю тригонометричних функцій, знайдіть ширину річки.

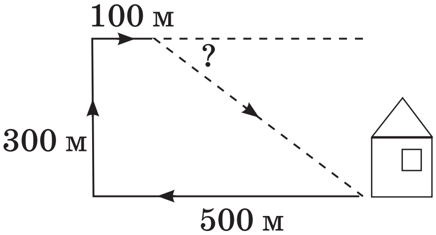
4. Задачі на знаходження кутів (кута підйому дороги, кута відкосу, кута, під яким видно деякий предмет, тощо).

8.85. Знайдіть кут підйому шосейної дороги, якщо на відстані 200 м висота підйому становить 6 м.



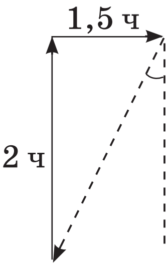
Мал. 8.59

8.86. Микита пройшов від будинку на схід 800 м (мал. 8.59). Потім повернув на північ і пройшов 600 м. Під яким кутом до напрямку на захід він має йти, щоб повернутися додому? Відповідь округліть до цілих. Для обчислень використайте таблицю тригонометричних функцій.



Мал. 8.60

8.87. Олена пройшла від будинку у напрямку на захід 500 м (мал. 8.60). Потім повернула на північ і пройшла 300 м. Після цього вона повернула на схід і пройшла ще 100 м. Під яким кутом до напрямку на схід вона має йти, щоб повернутися додому? Відповідь округліть до цілих. Для обчислень використайте таблицю тригонометричних функцій.

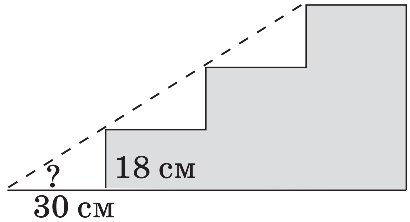


Мал. 8.61

8.88. Грибник, увійшовши в ліс, протягом двох годин йшов у напрямку на північ (мал. 8.61), а потім з тією ж швидкістю протягом півтори години — на схід. Під яким кутом до напрямку на південь він має йти, щоб повернутися до місця, де він увійшов у ліс? Відповідь округліть до цілих. Для обчислень використайте таблицю тригонометричних функцій.

8.89. Людина, пройшовши вгору схилом пагорба 1000 м, піднялася на 90 м над площиною основи пагорба. Використовуючи таблицю тригонометричних функцій, знайдіть (у середньому) кут нахилу пагорба в градусах. У відповіді вкажіть наближене значення, яке виражається цілим числом градусів.

8.90. Сходи мають сходинки, ширина яких дорівнює 30 см, а висота — 18 см (мал. 8.62). Використовуючи таблицю тригонометричних функцій, знайдіть кут підйому сходів. У відповіді вкажіть наближене значення, яке виражається цілим числом градусів.



Мал. 8.62

8.91. Підводний човен, перебуваючи попереду корабля, занурився у воду і пішов у напрямку, перпендикулярному до корабля зі швидкістю 30 км/год. Під яким кутом до напрямку ходу підводного човна має йти корабель зі швидкістю 60 км/год, щоб у певній точці пройти над підводним човном? Відповідь укажіть у градусах.

8.92. Ширина футбольних воріт дорівнює 8 ярдам. Для розмітки штрафного майданчика на футбольному полі на відстані 18 ярдів від кожної стійки воріт під прямим кутом до лінії воріт углиб поля проводяться два відрізки завдовжки 18 ярдів кожен. Кінці цих відрізків з'єднуються відрізком, паралельним лінії воріт. Знайдіть кут, під яким видно ворота з кута штрафного майданчика. У відповіді вкажіть цілу кількість градусів.

8.93. Ширина футбольних воріт дорівнює 8 ярдам. Відстань від 11-метрової позначки до лінії воріт дорівнює 12 ярдам. Знайдіть кут, під яким видно ворота з 11-метрової позначки. У відповіді вкажіть цілу кількість градусів.

8.94. Ширина футбольних воріт дорівнює 8 ярдам. Для розмітки воротарського майданчика на відстані 18 ярдів від кожної стійки воріт під прямим кутом до лінії воріт углиб поля проводяться два відрізки завдовжки 6 ярдів кожен. Кінці цих відрізків з'єднуються відрізком, паралельним лінії воріт. Знайдіть кут, під яким видно ворота з кута воротарського майданчика. У відповіді вкажіть цілу кількість градусів.

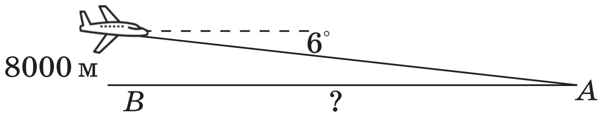
Мал. 8.63

8.95. Корабель, що знаходиться на відстані 5 км на південь від вежі маяка, подав сигнал SOS про допомогу (мал. 8.63). Цей сигнал був переданий гелікоптеру, який знаходиться на відстані 8 км на захід від вежі. Під яким кутом має змінити напрямок руху вертоліт, щоб досягти корабля?

5. Комбіновані задачі

8.96. З певної точки вершину гори видно під кутом 30°. При наближенні до гори на 1000 м вершина стала видна під кутом 45°. Знайдіть наближену висоту гори. У відповіді вкажіть ціле число метрів.

8.97. Літак наближається до аеропорту A на висоті 8000 м (мал. 8.64). Пілот має розпорядження проводити зниження для посадки під кутом 6°. Використовуючи таблицю тригонометричних функцій, знайдіть відстань від посадкової смуги до того місця, над яким літак повинен почати зниження. Відповідь округліть до цілих.



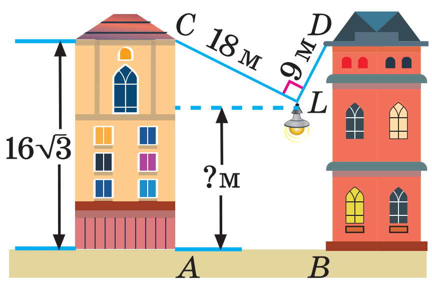
Мал. 8.64

8.98. З літака доповідають капітану рибальського судна, що літак знаходиться над косяком риби на висоті 1000 м. З судна визначають, що кут, під яким видно літак над горизонтом, дорівнює 30°. Знайдіть відстань від судна до косяка риби. Відповідь округліть до цілих.

8.99. З вікна, що розташоване на висоті 15 м над поверхнею землі, нижній край будинку, що стоїть прямо з іншого боку вулиці, видно під кутом зниження 32°. Знайдіть ширину вулиці. У відповіді вкажіть ціле число метрів.

8.100. Лампа, що освітлює вулицю, підвішена на двох перпендикулярних кабелях завдовжки 18 м і 9 м (мал. 8.65, L — лампа, $\angle CLD = 90^\circ$), прикріплених на висоті $16\sqrt{3}$ м від землі (точки C і D знаходяться на однаковій висоті від землі).

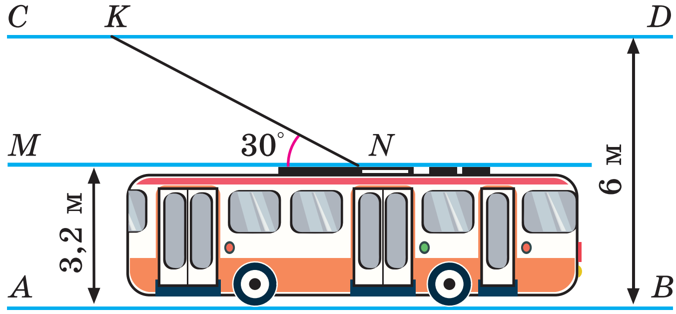
1. Знайдіть ширину вулиці (тобто AB).
2. Знайдіть, на якій висоті від землі підвішено лампу.



Мал. 8.65

8.101. (ЗНО 2021) Прямолінійною дорогою AB рухається тролейбус (мал. 8.66). Лінія CD електричного дроту паралельна AB й даху MN тролейбуса. Штанга KN, що на малюнку є відрізком, утворює з MN кут 30°. Відстані між прямими AB і DC та AB і MN дорівнюють 6 м і 3,2 м відповідно. Укажіть проміжок, якому належить довжина (у м) штанги KN. Уважайте, що всі зазначені прямі лежать в одній площині.

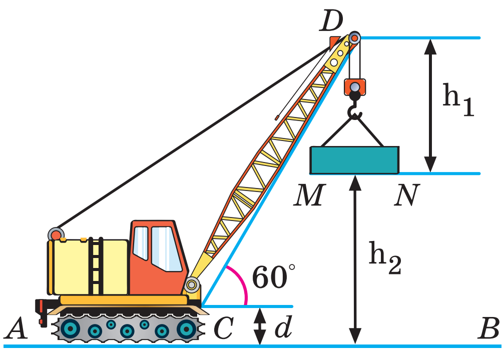
А. [1; 3)
Б. [3; 5)
В. [5; 5,5)
Г. [5,5; 6)
Д. [6; 8)



Мал. 8.66

8.102. (ЗНО 2020) Стріла CD автокрана нахилена до горизонтальної поверхні AB під кутом 60°, $CD = 20$ м (мал. 8.67). Основа C стріли розташована на відстані $d = 2$ м від AB. Відстань h_1, від кінця D стріли до нижньої основи MN вантажу становить 6 м. Укажіть проміжок, якому належить відстань h_2 (у м) від MN до AB. Уважайте, що $MN \parallel AB$.

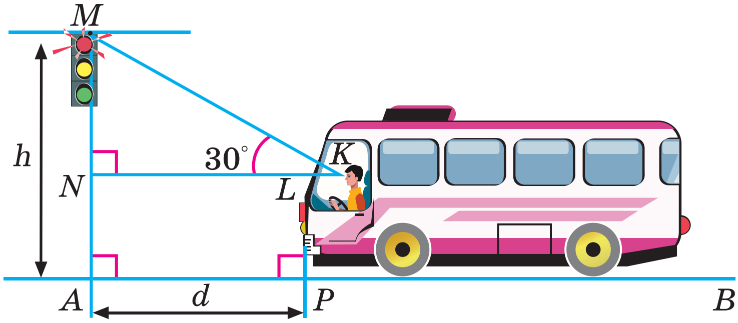
А. (4; 8]
Б. (8; 10,5]
В. (10,5; 12,5]
Г. (12,5; 14,5]
Д. (14,5; 20)



Мал. 8.67

8.103. (ЗНО 2019) Перед світлофором на горизонтальній дорозі AB зупиняється автобус. Найбільший кут MKN, під яким водієві автобуса видно світлофор повністю, дорівнює 30° (мал. 8.68). Проєкція відрізка KM на пряму AB паралельна напрямку руху автобуса, $LP \perp AB$. $KL = 0{,}6$ м, $LP = 1{,}6$ м. Світлофор установлено на висоті $h = 4{,}6$ м над дорогою. Укажіть з-поміж наведених найменшу відстань d від точки A до точки P місця зупинки автобуса, за якої світлофор повністю потрапляє в поле зору водія.

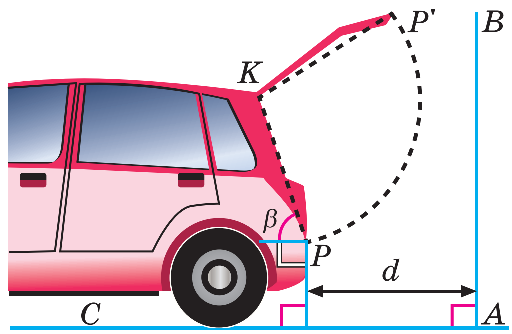
А. 3,6
Б. 4
В. 4,4
Г. 4,7
Д. 5,2



Мал. 8.68

8.104. (ЗНО 2018) Автомобіль, задні дверцята якого відкриваються так, як зображено на малюнку 28, під'їжджає заднім ходом на горизонтальній поверхні CA перпендикулярно до вертикальної стіни AB. Укажіть серед наведених найменшу відстань від автомобіля до стіни AB, за якої задні дверцята автомобіля зможуть із зачиненого стану KP безперешкодно набувати зображеного на малюнку положення KP'. $KP' = KP = 0{,}9$ м, $\cos\beta = 0{,}3$. Наявністю заднього бампера автомобіля знехтуйте.

А. 0,85 м
Б. 0,8 м
В. 0,75 м
Г. 0,7 м
Д. 0,6 м



Мал. 8.69

Виконайте завдання, використовуючи програму GeoGebra

8.105. На світлині (мал. 8.70) ви бачите Рейдовий (Воронцовський) маяк в Одесі.

Скопіюйте фото за посиланням https://odessa.online/1111tropoj-mayachnika-idyom-tuda-kuda-dohodyat-tolko-korabli-fotoreportazh/ та вставте його в нове полотно. Провівши певні геометричні добудови, дайте відповідь на запитання фотографа: «Яка відстань від нього до маяка за прямою, якщо висота маяка 26 метрів?».

Мал. 8.70

Перевірте свої досягнення

1. Чи правильно, що для розв'язування прямокутного трикутника достатньо знати:
   1) одну сторону;
   2) дві сторони;
   3) один гострий кут;
   4) одну сторону і прямий кут;
   5) одну сторону і гострий кут?
2. Сторони трикутника дорівнюють 6 м, 8 м і 10 м. Чи прямокутний цей трикутник?
3. За допомогою яких трикутників можна виміряти ширину річки і як?
4. Як за допомогою квадратного аркуша паперу виміряти на місцевості висоту дерева?
5. У будівництві часто замість градусної міри кута використовують його тангенс. Обґрунтуйте, чому.
6. Як виміряти відстань між двома пунктами, розділеними перешкодою (річкою, озером, лісом)?
7. Як виміряти висоту дерева, гори?
8. Як знайти кут підйому дороги або кут, під яким спускаємося з гори?
9. Чому в геометрії особливу увагу приділяють саме прямокутному трикутнику, хоча в довкіллі не часто можна натрапити на предмети такої форми?

Геометрія в мистецтві

Алла Олександрівна ГОРСЬКА (1929–1970) — українська художниця та дисидентка, громадська діячка, одна із засновниць та найяскравіших творчих особистостей покоління руху шістдесятництва, одна з перших представниць андерграунду, діячка правозахисного руху 1960-х в Україні. Працювала в монументальних творах, мозаїці, графіці та живопису.

Боривітер

Дерево життя

«Дерево життя» — мозаїчне панно, створене 1967 року у Маріуполі Аллою Горською з групою співавторів, до якої входили художники Віктор Зарецький, Галина Зубченко, Борис Плаксій, Григорій Пришедько, Василь Прахнін та Надія Світлична. Митці прибули до Маріуполя та менш ніж за два місяці створили в ресторані «Україна» дві мозаїки: «Дерево життя» та «Боривітер». У 2022 році обидві мозаїки були знищені російськими агресорами.

§ 4. МНОГОКУТНИКИ. ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКІВ

1. Площі многокутників

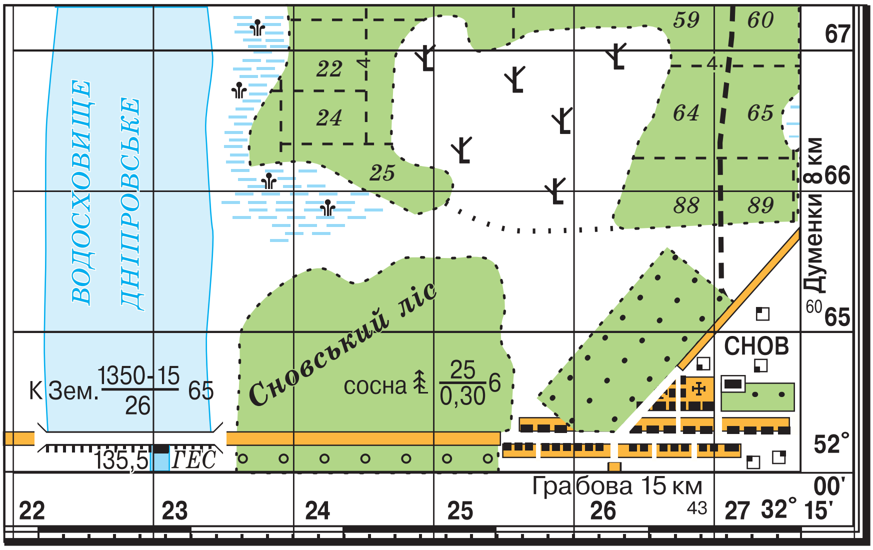
Корисні поради

Площі об'єктів місцевості визначають окомірно, порівнюючи їх з розмірами (площею) квадрата координатної сітки (табл. 8.5).

Таблиця 8.5

Масштаб карти	Розміри сторони квадрата		Площа квадрата	
	см	км	кв. км	га
1 : 25 000	4	1	1	100
1 : 50 000	2	1	1	100
1 : 100 000	2	2	4	400
1 : 200 000	2	4	16	1600

Це найшвидший спосіб і, за певних навичок, достатньо точний для визначення площ об'єктів місцевості.



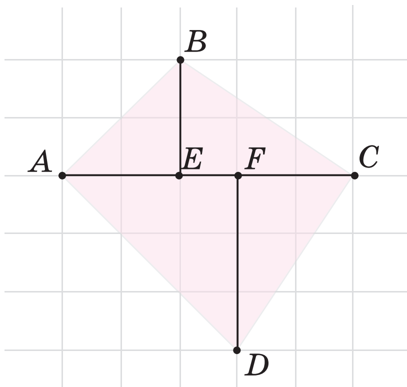
Мал. 8.71

Наприклад, на малюнку 8.71 наведені приклади визначення площі горілого лісу — 2,2 кв. км (220 га), Сновського лісу — 2,3 кв. км (230 га), водосховища — 3,5 кв. км (350 га), фруктового саду — 1,2 кв. км (120 га), а площа 22-го, 24-го і 25-го кварталів у лісовому масиві — 0,75 кв. км (75 га).

Великі площі визначають палеткою, у якої сторони квадратів нанесені через 4 мм для карт масштабів 1 : 25 000 та 1 : 50 000 і через 5 мм — для карти масштабу 1 : 100 000. У цьому випадку кожен квадрат палетки відповідатиме для карти масштабу 1 : 25 000 — 1га, для карти масштабу 1 : 50 000 — 4 га, а для карти масштабу 1 : 100 000 — 25 га. Палетку виготовляють за допомогою технічних засобів або власноруч нанесеною на кальку (пластик) сітки квадратів через відповідні інтервали. Цей спосіб використовують військові на місцевості.

Екскурс в історію. Розглянемо цікаву формулу для знаходження площі на папері в клітинку.

Теорема Піка (Георг Олександр Пік (1859–1942), австрійський математик, опублікував цю теорему в 1899 році) формулюється так:



Мал. 8.72

$$S = В + Г / 2 - 1,$$

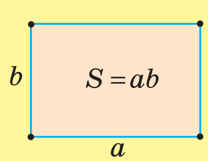
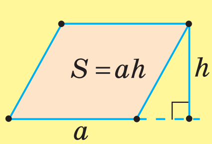
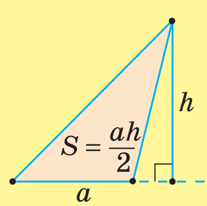
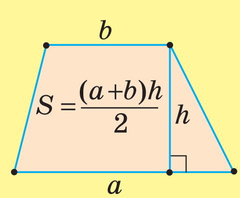
де S — площа многокутника, В — кількість цілих точок усередині многокутника, а Г — кількість цілих точок на межі многокутника.

Розділимо чотирикутник (мал. 8.72) горизонтальною лінією на два трикутники із спільною основою, що дорівнює 5. Висоти цих трикутників дорівнюють 2 і 3. Тоді площа чотирикутника дорівнює сумі площ двох трикутників: $S = 5 + 7{,}5 = 12{,}5$. Використаємо формулу Піка: $В = 10$, $Г = 7$, отже, $S = 10 + 7/2 - 1 = 12{,}5$.

Наслідок: площа трикутника з вершинами у вузлах сітки, який більше не має точок (вузлів) ані всередині, ані на сторонах, окрім вершин, дорівнює 1/2.

2. Формули площі (таб. 8.6):

Таблиця 8.6

прямокутника	паралелограма	трикутника	трапеції
 $S = ab$	 $S = ah$	 $S = \frac{ah}{2}$	 $S = \frac{(a+b)h}{2}$

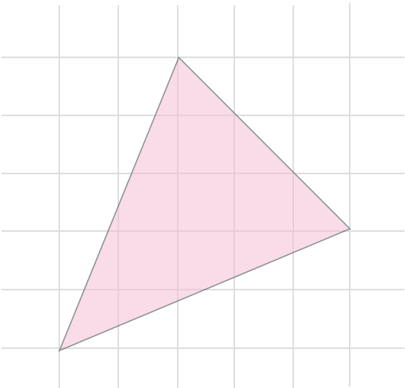
3. Щоб знайти площу трикутника (чотирикутника), можна скористатися способом додавання площ його частин. Для застосування цього способу іноді потрібні допоміжні побудови, щоб утворилися допоміжні трикутники, площу яких можна знайти за даними задачі.

Щоб установити, що нерівні фігури мають рівні площі, можна довести, що площі цих фігур дорівнюють або сумі рівних площ, або різниці рівних площ.

Розв'яжіть спочатку геометричну задачу* (Г), *а потім — відповідну задачу практичного змісту* (П), *де використовується геометрична задача.

8.106. (Г). Обчисліть площу прямокутника, якщо його сторони дорівнюють 2 см і 4 см.

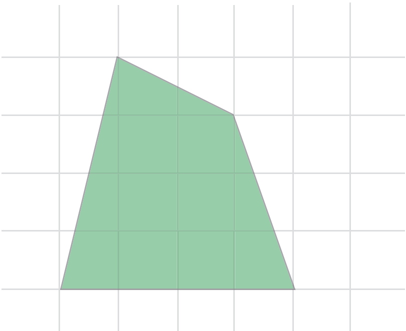
(П). Ділянка прямокутної форми на плані в масштабі 1 : 100 має сторони 10 см і 25 см. Яка площа цієї ділянки?



Мал. 8.73

8.107. (Г). Знайдіть площу зафарбованої фігури на малюнку 8.73.

(П). Знайдіть площу лісового масиву (у м^2), зображеного на плані з квадратною сіткою 1×1 см (мал. 8.74) у масштабі 1 см — 200 м.



Мал. 8.74

(П). Знайдіть площу вашого міста за допомогою карти Google та палетки 5×5 мм, виготовленої власноруч.

Розв'яжіть задачі

8.108. Дві ділянки землі огороджено парканами однакової довжини. Перша ділянка має форму прямокутника зі сторонами 220 м і 160 м, а друга — форму квадрата. Площа якої ділянки більша і наскільки?

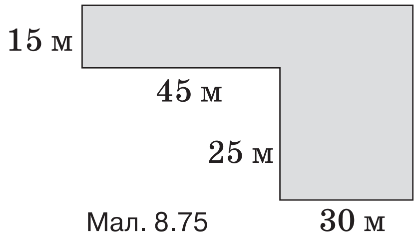
8.109. Для посадки помідорів дід Василь загородив спеціальними щитами ділянку прямокутної форми розміром 15 м × 25 м. Потім вирішив збільшити площу ділянки так, щоб вона стала квадратної форми і при цьому не купувати нових щитів. На скільки квадратних метрів збільшиться площа ділянки?

8.110. Ширина футбольних воріт дорівнює 8 ярдам, висота — 8 футам. Знайдіть площу футбольних воріт у квадратних футах (один ярд становить три фути).

8.111. Футбольне поле має форму прямокутника, довжина якого в 1,5 рази більша за ширину. Площа футбольного поля дорівнює 7350 м^2. Знайдіть його ширину.

8.112. Ширина хокейних воріт дорівнює 6 футам, висота — 4 футам. Знайдіть наближену площу воріт у квадратних метрах з точністю до двох знаків після коми. (Один фут дорівнює 30,5 см.)

8.113. Хокейний майданчик має форму прямокутника розміром 200×85 футів з кутами, закругленими за дугами кіл радіуса 28 футів. Знайдіть приблизну площу хокейного майданчика у квадратних футах. (Прийміть $\pi \approx 3$.)



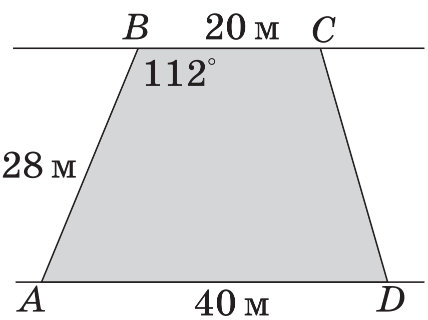
Мал. 8.75

8.114. Знайдіть площу земельної ділянки, зображеної на малюнку 8.75.

8.115. Підлогу кімнати, що має форму прямокутника зі сторонами 5 м та 6 м, потрібно покрити паркетом із прямокутних дощечок зі сторонами 5 см та 30 см. Скільки таких дощечок знадобиться?

8.116. Скільки потрібно кахельних плиток квадратної форми зі стороною 15 см, щоб облицювати ними стіну, що має форму прямокутника зі сторонами 3 м та 2,7 м?

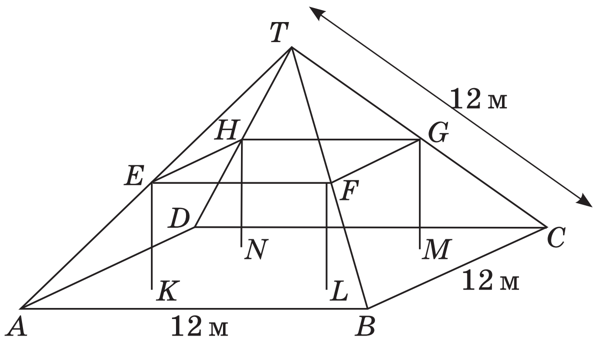
8.117. Ділянка між двома паралельними вулицями має вигляд чотирикутника $ABCD$ (мал. 8.76) ($AD \parallel BC$) $AB = 28$ м, $BC = 20$ м, $AD = 40$ м, $\angle B = 112°$. Знайдіть площу цієї ділянки. У відповіді вкажіть наближене значення, що дорівнює цілому числу квадратних метрів.



Мал. 8.76

8.118. (PISA). На світлині (мал. 8.77) можна побачити житловий будинок, дах якого має форму піраміди. Нижче зображена математична модель даху будинку і вказані довжини деяких відрізків (мал. 8.78).

Мал. 8.77



Мал. 8.78

На цій моделі підлога горища будинку — квадрат $ABCD$. Балки, на які спирається дах, є сторонами бетонного блоку, що має форму прямокутного паралелепіпеда $EFGHKLMN$. E — середина ребра AT, F — середина BT, G — середина CT, H — середина DT. Усі ребра піраміди дорівнюють 12 м.

1. Обчисліть площу підлоги горища — квадрата $ABCD$.

2. Знайдіть довжину відрізка EF — горизонтальної сторони бетонного блоку.

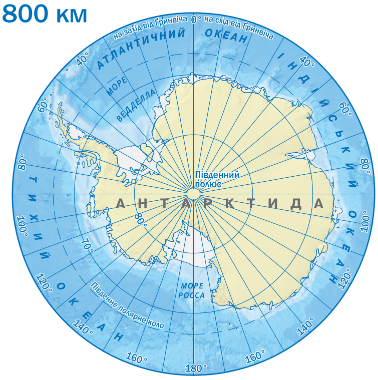
8.119. Площа ділянки землі дорівнює 1200 м^2. Чому дорівнює його площа (у дм^2 на плані, якщо масштаб дорівнює 1 : 100)?

8.120. Площа плану ділянки землі дорівнює 3,75 дм^2, масштаб плану 1 : 200. Чому дорівнює площа ділянки (в м^2)?

8.121. Чи достатньо 5 т гороху, щоб засіяти ним поле, що має форму прямокутника зі сторонами 500 м та 400 м, якщо на 1 га потрібно висіяти 260 кг гороху?

8.122. (PISA). На малюнку 8.79 зображено карту Антарктиди. Зважаючи на масштаб цієї карти, визначте приблизну площу континенту.

масштаб 1: 80 000 000
в 1 см 800 км

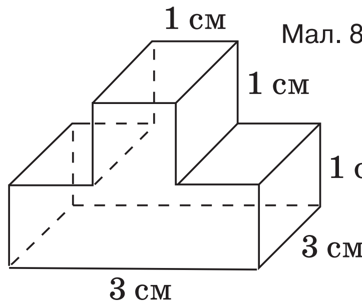


Мал. 8.79

8.123. З квадратного листа жерсті зі стороною 20 см вирізали коло найбільшого діаметра. Який приблизний відсоток площі листа жерсті становить площу обрізків? (Прийміть $\pi \approx 3$.)

8.124. Зіниця людського ока, що має форму кола, може змінювати свій діаметр залежно від освітлення від 1,5 мм до 7,5 мм. У скільки разів при цьому збільшується площа поверхні зіниці?

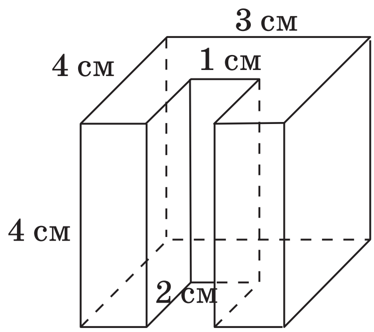
8.125. У піцерії пропонують два види круглої піци однакової товщини, але різного розміру. Діаметр меншої піци дорівнює 30 см, і вона коштує 230 грн. Діаметр більшої піци дорівнює 40 см, і вона коштує 250 грн. Яку із піц вигідніше купити? Наведіть хід своєї роботи.



Мал. 8.80

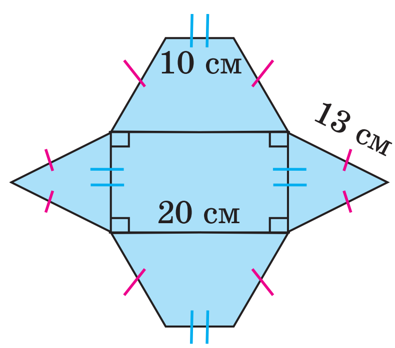
8.126. Знайдіть площу поверхні деталі, зображеної на малюнку 8.80 (усі частини деталі — прямокутні паралелепіпеди).

8.127. Знайдіть площу поверхні деталі, зображеної на малюнку 8.81 (усі частини деталі — прямокутні паралелепіпеди).



Мал. 8.81

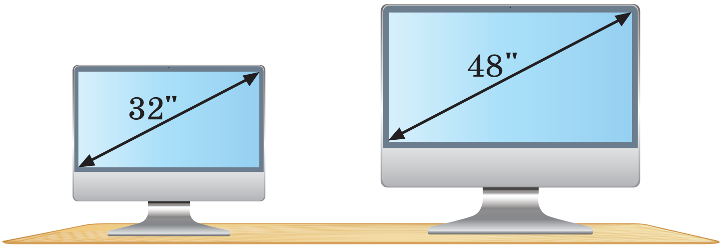
8.128. З листа картону прямокутної форми розміром 34 см × 50 см вирізали шаблон для коробки, як показано на малюнку 8.82. Знайдіть:
1) площу поверхні шаблону;
2) скільки відсотків цілого аркуша картону становить шаблон?
3) масу 100 коробок для іграшок, якщо маса 1 м^2 картону дорівнює 250 грамів?



Мал. 8.82

8.129. (ЗНО 2016). Екрани телевізорів, зображених на малюнку 8.83, мають форму прямокутників, відповідні сторони яких пропорційні. Діагоналі екранів цих телевізорів дорівнюють 32'' дюйма і 48'' дюймів. Визначте, у скільки разів площа екрана більшого телевізора більша за площу меншого.

А. У 1,5 рази
Б. У 16 разів
В. У 2,56 рази
Г. У 4 рази
Д. У 2,25 рази

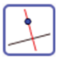


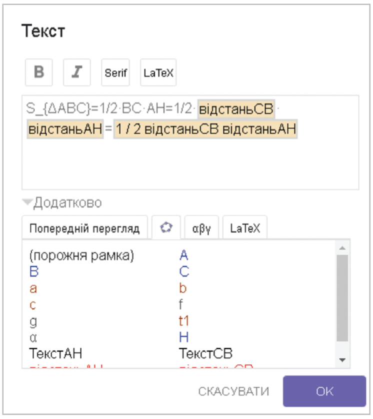
Мал. 8.83

Виконайте завдання, використовуючи програму GeoGebra

8.130. Створіть інтерактивне креслення в програмі GeoGebra, за допомогою якого можна переконатись, що площа трикутника дорівнює пів добутку його сторони та висоти, проведеної до неї.

Хід виконання

1.	Створіть новий файл GeoGebra — «Файл–Створити».
2.	За допомогою інструмента «Многокутник»  побудуйте довільний трикутник ABC.
3.	За допомогою інструмента «Перпендикулярна пряма»  побудуйте висоту з За допомогою інструмента «Перетин»  позначте перетин перпендикуляра і сторони точкою H, для цього перейменуйте точку D в H, натиснувши правою клавішею, виберіть «Перейменувати» і введіть нове ім'я «H» вершини A.
4.	Натисніть на перпендикулярну пряму правою клавішею, зніміть галочку показувати об'єкт.
5.	Тепер сполучіть BH, використавши інструмент «Відрізок» .
6.	За допомогою інструмента «Кут»  позначте прямий кут, для цього клацніть на точки B, H, A, клацніть правою клавішею на позначенні та зробіть його неактивним в розділі «Показати позначення».
7.	За допомогою інструмента «Відстань або довжина»  клацніть по стороні BC та висоті AH.

8.	За допомогою інструмента «Текст»  додайте на полотна напис. Активуйте «LaTeX-формула». В полі правка введіть текст S_{Δ∠ABC} = 1/2 · BC · AH = 1/2.
9.	Не зачиняючи вікна текст в меню об'єкти виберіть «відстань CB» та «відстань AH», потім = В меню об'єкти виберіть «Порожня рамка» і в ній введіть попередній текст. Натисніть кнопку «OK». 
10.	За допомогою інструмента «Площа»  клацніть на трикутник.
11.	Порівняйте значення площ, змініть трикутник, рухаючи вершини, зробіть висновки.
12.	Збережіть файл як «Завдання8.6.ggb».

2. Задачі на покриття та розрізання

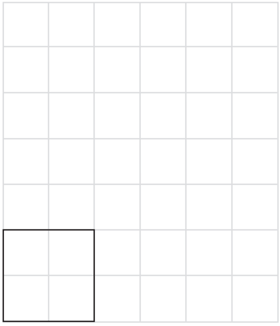
Паркети

Корисні поради

Паркети з давніх часів привертали до себе увагу людей.

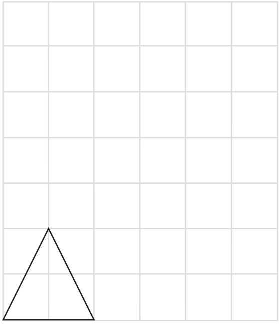
Ними мостили дороги, прикрашали підлогу в приміщеннях, стіни будинків, використовували в декоративно-ужитковому мистецтві. Знаменитий голландський художник М. Ешер присвятив паркетам кілька своїх картин. Паркети є об'єктом дослідження математиків, фізиків, хіміків та ін.

8.131. На папері в клітинку намалюйте паркет, складений з квадратів, що дорівнюють даному на малюнку 8.84. Зафарбуйте квадрати так, щоб сусідні квадрати були зафарбовані різними кольорами. Яка найменша кількість кольорів для цього знадобиться?



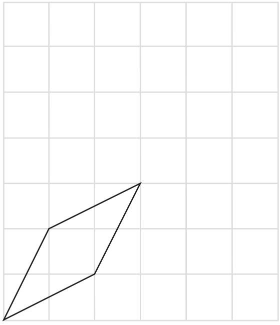
Мал. 8.84

8.132. На папері в клітинку намалюйте паркет, складений із трикутників, що дорівнюють даному на малюнку 8.85. Зафарбуйте трикутники так, щоб сусідні трикутники були зафарбовані різними кольорами. Яка найменша кількість кольорів для цього знадобиться?

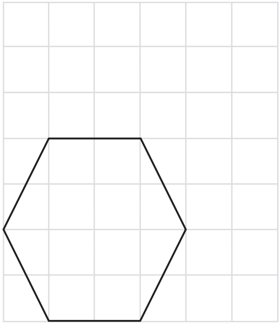


Мал. 8.85

8.133. На папері в клітинку намалюйте паркет, складений із чотирикутників, що дорівнюють даному на малюнку 8.86. Зафарбуйте чотирикутники так, щоб сусідні чотирикутники були зафарбовані різними кольорами. Яка найменша кількість кольорів для цього знадобиться?



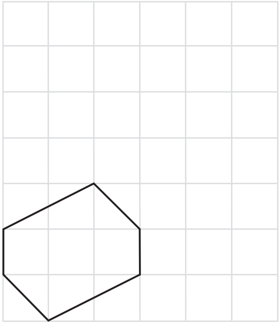
Мал. 8.86



Мал. 8.87

8.134. На папері в клітинку намалюйте паркет, складений із шестикутників, що дорівнюють даному на малюнку 8.87. Зафарбуйте шестикутники так, щоб сусідні шестикутники були зафарбовані різними кольорами. Яка найменша кількість кольорів для цього знадобиться?

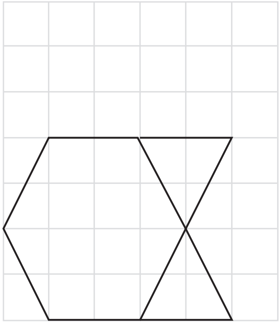
8.135. На папері в клітинку намалюйте паркет, складений із шестикутників, що дорівнюють даному на малюнку 8.88. Зафарбуйте шестикутники так, щоб сусідні шестикутники були зафарбовані різними кольорами. Яка найменша кількість кольорів для цього знадобиться?

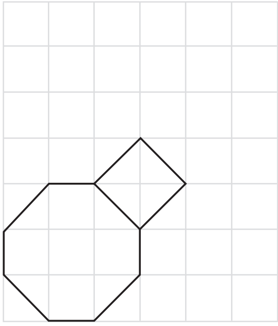


Мал. 8.88

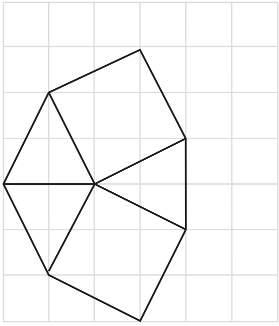
8.136. На папері в клітинку намалюйте паркет, у кожній вершині якого сходиться два шестикутники і два трикутники, що дорівнюють даним на малюнку 8.89. Зафарбуйте многокутники так, щоб сусідні були зафарбовані різними кольорами. Яка найменша кількість кольорів для цього знадобиться?

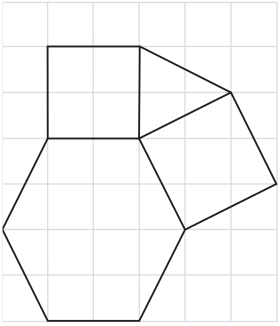
8.137. На папері в клітинку намалюйте паркет, у кожній вершині якого сходиться два восьмикутники і квадрат, що дорівнюють даним на малюнку 8.90. Зафарбуйте многокутники так, щоб сусідні були зафарбовані різними кольорами. Яка найменша кількість кольорів для цього знадобиться?


Мал. 8.89


Мал. 8.90

8.138. На папері в клітинку намалюйте паркет, у кожній вершині якого сходиться два квадрати та три трикутники, що дорівнюють даним на малюнку 8.91. Зафарбуйте многокутники так, щоб сусідні були зафарбовані різними кольорами. Яка найменша кількість кольорів для цього знадобиться?


Мал. 8.91


Мал. 8.92

8.139. На папері в клітинку намалюйте паркет, у кожній вершині якого сходиться шестикутник, два квадрати і трикутник, що дорівнюють даним на малюнку 8.92. Зафарбуйте многокутники так, щоб сусідні були зафарбовані різними кольорами. Яка найменша кількість кольорів для цього буде знадобиться?

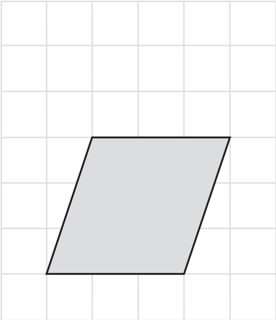
Розрізання

Корисні поради

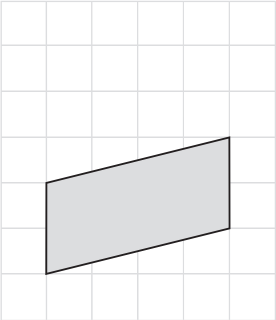
Дивно, але якщо розрізати будь-який опуклий чотирикутник за середніми лініями, то з отриманих частин завжди можна скласти паралелограм. Спробуйте самі зробити це за допомогою паперу та ножиць, а потім доведіть, що новостворений вами чотирикутник — паралелограм.

8.140. Побудуйте паралелограм, як на малюнку 8.93. Проведіть пряму, розрізавши вздовж якої цей паралелограм, з отриманих частин можна скласти прямокутник.

8.141. Побудуйте паралелограм, як на малюнку 8.94. Проведіть пряму, розрізавши за якою цей паралелограм, з отриманих частин можна скласти прямокутник.



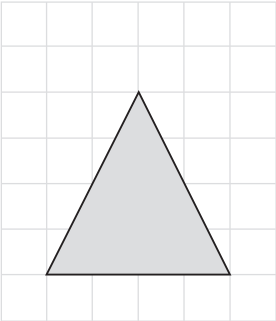
Мал. 8.93



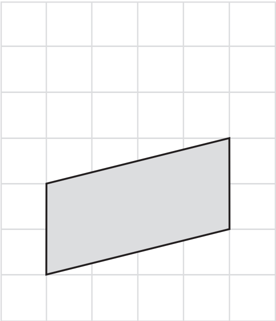
Мал. 8.94

8.142. Побудуйте трикутник, як на малюнку 8.95. Проведіть пряму, розрізавши за якою цей трикутник, з отриманих частин можна скласти прямокутник.

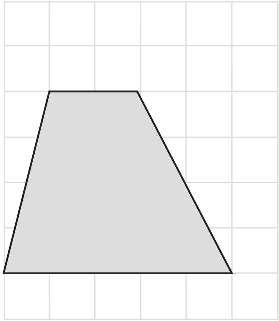
8.143. Побудуйте паралелограм, як на малюнку 8.96. Проведіть пряму, розрізавши за якою цей паралелограм, з отриманих частин можна скласти трикутник.



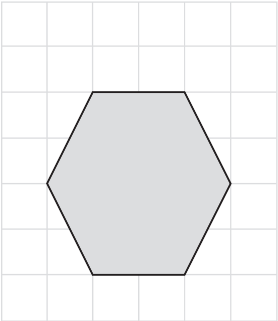
Мал. 8.95



Мал. 8.96



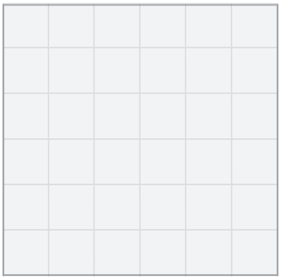
Мал. 8.97



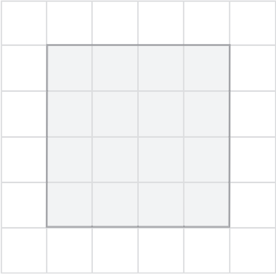
Мал. 8.98

8.144. Побудуйте трапецію, як на малюнку 8.97. Проведіть пряму, розрізавши за якою цю трапецію, з отриманих частин можна скласти трикутник.

8.145. Побудуйте шестикутник, як на малюнку 28. Проведіть пряму, розрізавши за якою цей многокутник, з отриманих частин можна скласти паралелограм.



Мал. 8.99

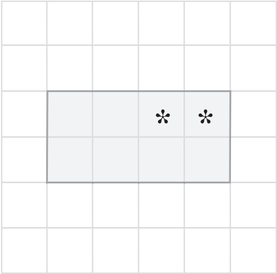


Мал. 8.100

8.146. Розріжте квадрат на шість квадратів (мал. 8.99).

8.147. Розріжте квадрат на сім квадратів (мал. 8.100).

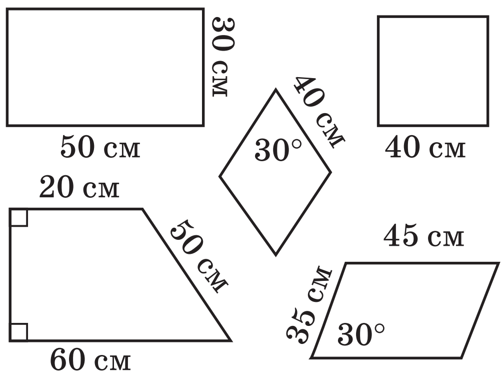
8.148. Розріжте прямокутник на дві рівні частини так, щоб у кожній з них була зірочка (мал. 8.101).



Мал. 8.101

Перевірте свої досягнення

1. Прямокутну рамку стиснули так, що утворився паралелограм із тими самими сторонами, що й прямокутник. Чи рівні площі прямокутника та паралелограма?
2. Дано шарнірний паралелограм зі сторонами 4 дм та 5 дм. У яких межах може змінюватися площа паралелограма?
3. Ділянку, що має форму паралелограма, потрібно розділити на 3 частини однакової площі. Як провести межі?
4. На луці трикутної форми потрібно провести межу так, щоб одержати дві частини з рівними площами. Як це зробити за допомогою віх і польового циркуля?
5. Ділянка має форму прямокутної трапеції. Як провести перпендикулярну пряму до її основ, щоб поділити площу ділянки навпіл?
6. Якого найменшого периметра може бути прямокутний майданчик із площею 100 м^2?
7. Якої найбільшої площі може бути прямокутний майданчик із периметром 100 м?
8. Стародавні єгиптяни користувалися таким прийомом для обчислення площі рівнобедреного трикутника — множили його основу на половину бічної сторони. Чи правильний вийде результат? Якщо ні, то перебільшений чи зменшений?
9. Щоб знайти площу ділянки, яка має форму рівнобічної трапеції, стародавні єгиптяни множили суму основ на половину бічної сторони. Отриманий результат буде перебільшеним чи зменшеним?
10. Квадрат і ромб мають однакові периметри. У якої з цих фігур більша площа?
11. Визначте, скільки рулонів шпалер потрібно придбати, щоб обклеїти ними вашу кімнату. Довжина рулону дорівнює 10 м, а ширина: 1) 0,5; 2) 1 м. Які шпалери вигідніше купити, якщо ціна на ширші з них вдвічі більша? Чому?
12. У магазині продаються таці різних форм (квадратні, прямокутні, ромбічні тощо) (мал. 8.102). Усі вони мають однаковий периметр основи та висоту стінок. Петро хоче вибрати тацю з найбільшою площею. Яку тацю йому варто купити?



Мал. 8.102

9 КЛАС

§ 1. КООРДИНАТИ І ВЕКТОРИ

Корисні поради

1. *Щоб застосувати метод координат*:
1) накресліть задану фігуру та введіть прямокутну декартову систему координат (для цього вкажіть розміщення початку координат та осей абсцис і ординат відносно даної фігури);
2) визначте координати точок даної фігури;
3) скористайтеся відомими формулами.

2. *Щоб застосувати метод векторів*:
1) сформулюйте задачу мовою векторів, для чого спочатку введіть базис і допоміжні вектори, а потім складіть векторну рівність;
2) перетворіть векторну рівність, користуючись законами дій над векторами і відомими векторними рівностями;
3) перекладіть знайдений результат мовою геометрії.

3. Установивши колінеарність векторів та пропорційність їх довжин, можна довести, що:
1) прямі або відрізки паралельні;
2) деяка точка є серединою відрізка або ділить його в певному відношенні;
3) три точки лежать на одній прямій.

4. Використовуючи скалярний добуток векторів, можна знайти:
1) довжину відрізка (як квадратний корінь зі скалярного квадрата відповідного вектора);
2) градусну міру кута (за формулою косинуса кута та тригонометричними таблицями).

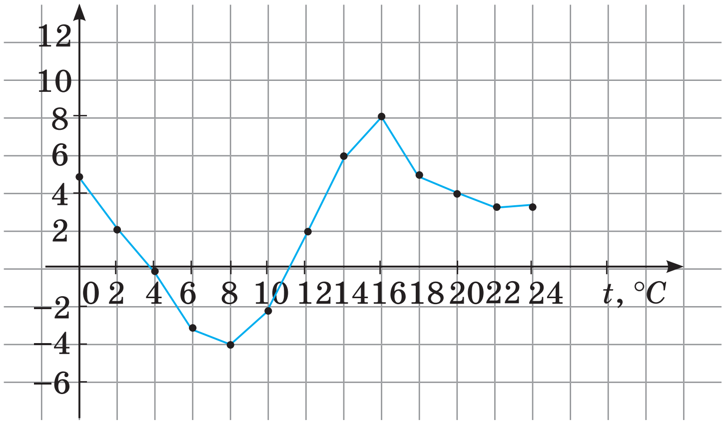
Розв’яжіть задачі

9.1. Що вказано в білеті до театру чи кіно?

9.2. Коли можна було б обійтися вказуванням лише номера крісла?

9.3. Намалюйте план залу кінотеатру. Визначте, де сидітимуть учні, якщо в білетах указано: 2-й ряд 6-те місце, 3-й ряд 7-ме місце, 12-й ряд 4-те місце.

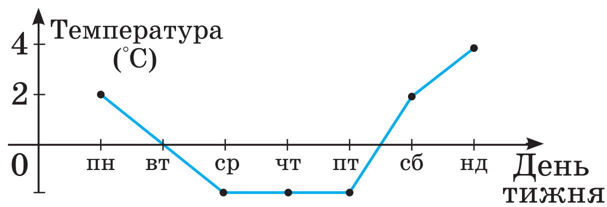
9.4. Температуру повітря вимірювали протягом доби, отримані дані заносили в таблицю (протокол спостережень), а потім побудували графік (мал. 9.1).



Мал. 9.1

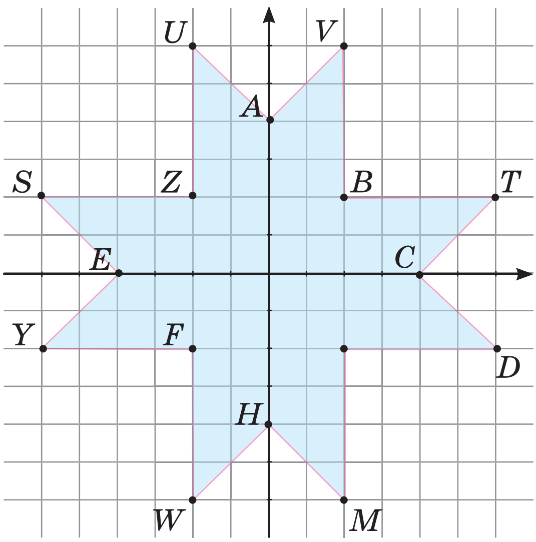
1. Назвіть максимальну й мінімальну температуру та її час.
2. У який час температура була додатною, від'ємною, дорівнювала нулю?
3. У який час температура повітря зростала, спадала?

9.5. На малюнку 9.2 зображено графік зміни температури повітря протягом тижня. З'ясуйте:
1) у який день температура повітря була найвищою;
2) якою була найвища температура;
3) у які дні температура повітря була найнижчою;
4) протягом скількох днів температура не змінювалась;
5) у які дні температура була нижчою від нуля;
6) якою була температура у вівторок, у середу;
7) у який день температура була вищою: у четвер чи суботу.



Мал. 9.2

9.6. Побудуйте зображення сузір'я за координатами його зірок:
1) $A(6; 6)$, $B(3; 7)$, $C(0; 8)$, $D(-3; 5)$, $E(-6; 3)$, $F(-8; 5)$, $G(-5; 7)$, $D(-3; 5)$;
2) $K(-15; -7)$, $L(-10; -5)$, $M(-6; -5)$, $N(-3; -6)$, $O(-1; -10)$, $P(5, -10)$, $R(6; -6)$, $N(-3; -6)$.
Яку назву має це сузір'я?



Мал. 9.3

9.7. Запишіть координати вузлових точок сніжинки (мал. 9.3).

9.8. Як на папері в клітинку побудувати відрізок $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{5}$, якщо a — довжина сторони:

1) однієї клітинки;

2) двох клітинок?

9.9. Як на папері в клітинку побудувати прямокутний трикутник з вершинами у вузлах сітки й гіпотенузою, що лежить на горизонтальній лінії, якщо даний трикутник:

1) рівнобедрений;

2) не є рівнобедреним?

9.10. Доведіть, що коло з центром у вузлі сітки й радіусом 5 клітинок проходить через 12 вузлів сітки.

9.11. Як через даний вузол сітки провести прямі з кутовими коефіцієнтами 1/2 і 2/3 відносно горизонтальної лінії сітки? А відносно вертикальної?

9.12. Якщо середини двох сторін трикутника та їх спільна вершина лежать у вузлах сітки, то середина третьої сторони також лежить у вузлі сітки. Доведіть.

9.13. Якщо дві сусідні вершини квадрата лежать у вузлах сітки, то дві інші його вершини також лежать у вузлах сітки. Доведіть.

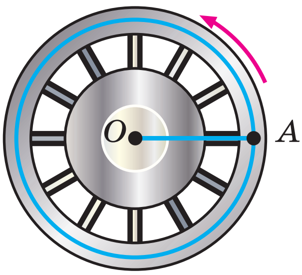
9.14. Поясніть, як побудувати вершини квадрата у вузлах сітки, не будуючи його сторін. Розгляньте випадки, коли діагоналі квадрата:
1) лежать на лініях сітки; 2) не лежать на лініях сітки.

9.15. Основу драбини завдовжки 6 м відсунуто від стіни на 1 м. На скільки знизиться верхній кінець драбини, якщо основу відсунути від стіни ще на 0,5 м? Розв'яжіть задачу, скориставшись системою координат.

9.16. Два туристи, які перебували на відстані 100 м один від одного, одночасно почули вигук керівника групи. На якій найменшій відстані від кожного з них міг бути керівник у момент вигуку, якщо точно посередині між туристами стоїть дерево, яке в обхваті має 2,5 м?

9.17. Визначте, який кут утворюється внаслідок обертання хвилинної стрілки протягом 25 хв.

9.18. Довжина хвилинної стрілки на годиннику, що висить на адміністративній будівлі, 30 см 27 мм. Який шлях пробігає її кінець за 1 хв? За 1 годину?

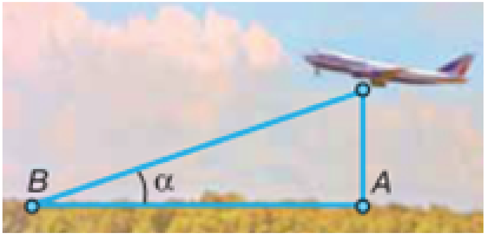


Мал. 9.4

9.19. Маховик дизеля робить 40 обертів за хвилину. Який кут опише його спиця OA (мал. 9.4) через 0,5 секунди?

9.20. Дві прямі дороги перетинаються під кутом 47°. На одній із цих доріг на відстані 6,5 км від перехрестя розташована автобусна зупинка. Потрібно прокласти найкоротший шлях від цієї зупинки до другої дороги. Знайдіть довжину цього шляху.

9.21. Пасажирський літак, який перебував на висоті 400 м над пунктом A, почав посадку на злітну смугу аеродрому (мал. 9.5). Знайдіть кут α приземлення літака, якщо аеродром розміщений на відстані 1,2 км від пункту A.



Мал. 9.5

9.22. Де на відкритій ділянці трикутної форми потрібно розмістити ліхтар, щоб усі три кути її були освітлені однаково?

9.23. Яка лінія є графіком рівномірного прямолінійного руху, що визначається рівнянням $s = s_0 + vt$?

9.24. На малюнку 9.6 зображено графік руху велосипедиста. З'ясуйте за графіком:

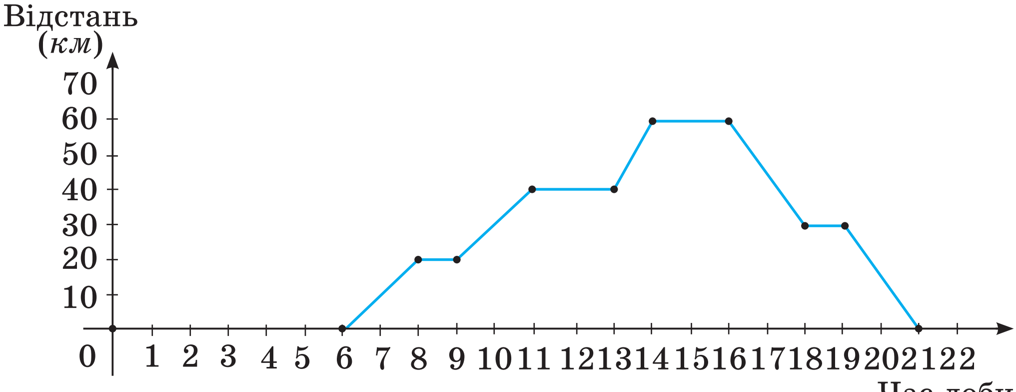
1) на якій відстані від початку руху знаходився велосипедист: о 8 год; о 13 год; о 15 год;

2) скільки разів велосипедист робив перепочинок;

3) о котрій годині велосипедист зупинився вперше і скільки часу він відпочивав;

4) скільки кілометрів проїхав велосипедист за перші 2 год руху; з 9 год до 11 год;

5) о котрій годині велосипедист завершив подорож.

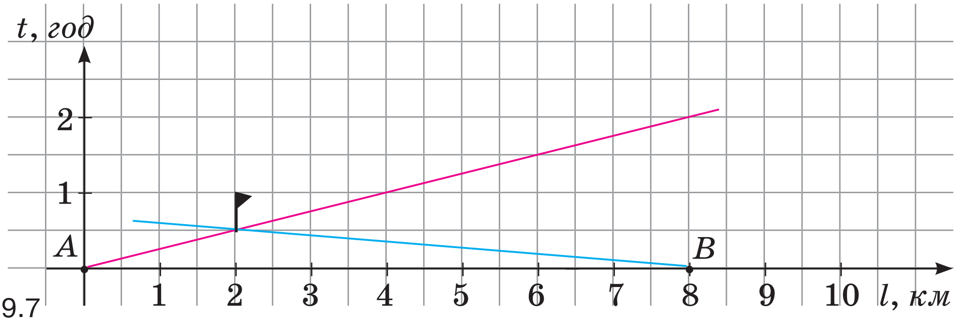


Мал. 9.6

9.25. Населені пункти A і B розташовані на відстані 8 км один від одного. З пункту A вийшов пішохід зі швидкістю 4 км/год, а назустріч йому з пункту B виїхав велосипедист зі швидкістю 12 км/год. За малюнком 9.7 поясніть:

1) як дізнатися про те, який час до зустрічі були в дорозі пішохід і велосипедист;

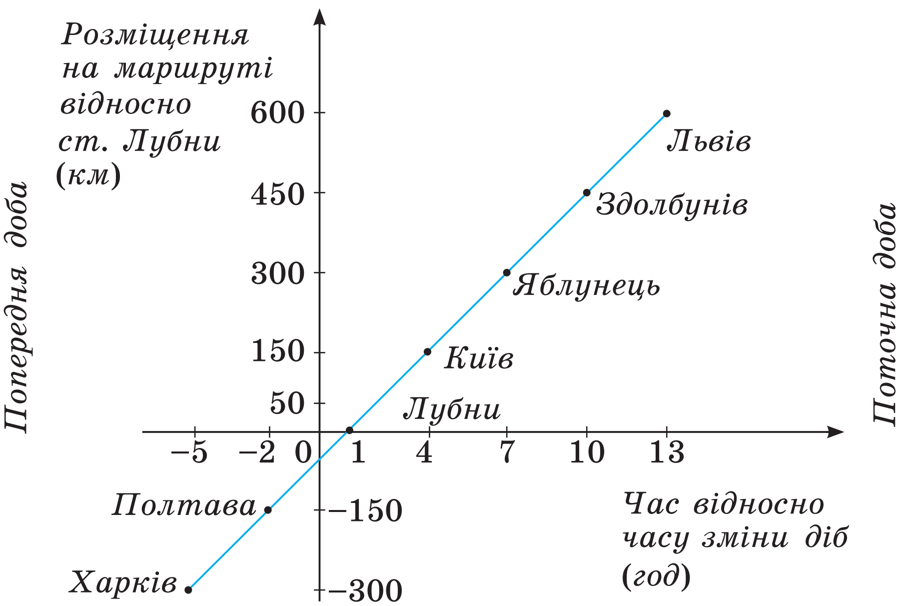
2) на якій відстані від пункту A пішохід і велосипедист зустрілися.



Мал. 9.7

9.26. Потяг Харків–Львів вирушає з Харкова близько 19 год і прибуває до Львова близько 13 год. Швидкість потяга становить 50 км/год. На маршруті він робить 5 зупинок, які заплановано через кожні 3 години. На малюнку 9.8 показано графік руху цього потяга.

1. О котрій годині нової доби потяг робить першу зупинку? Яка це станція?
2. Що показує число 5 на осі абсцис? А число 2?
3. На яких відстанях від першої зупинки потяг зупиняється на інших станціях?
4. Що показує число 300 на осі ординат? А число 150?
5. Які координати кінцевих точок маршруту?



Мал. 9.8

9.27. Вулиця проходить за напрямком з північного сходу на південний захід. У якому напрямку проходить паралельна їй вулиця? А перпендикулярна? Зробіть малюнки, вважаючи вертикальний край аркуша в зошиті напрямком на північ.

9.28. Туристи пройшли від базового табору в напрямку на північ 4 км й повернули на схід. Пройшовши за цим напрямком 1 км, вони пройшли на північ ще 2,5 км. Побудуйте напрямки їхнього руху на плані в масштабі 1 км в 1 см.

9.29. Крайні точки України мають такі географічні координати: північ на (55°22' пн.ш.; 33°11' сх.д.), східна (49°15' пн.ш.;

40°13ʹ сх.д.), південна (44°23ʹ пн.ш.; 33°44ʹ сх.д.), західна (48°05ʹ пн.ш.; 22°08ʹ сх.д.). Якщо провести умовні прямі через крайні північну й південну точки та крайні західну і східну точки (мал. 9.9), то чи можна переконатися в перпендикулярності цих прямих?

Мал. 9.9

9.30. За допомогою векторів покажіть зміну середньодобової температури:
1) за два дні; 2) за тиждень.

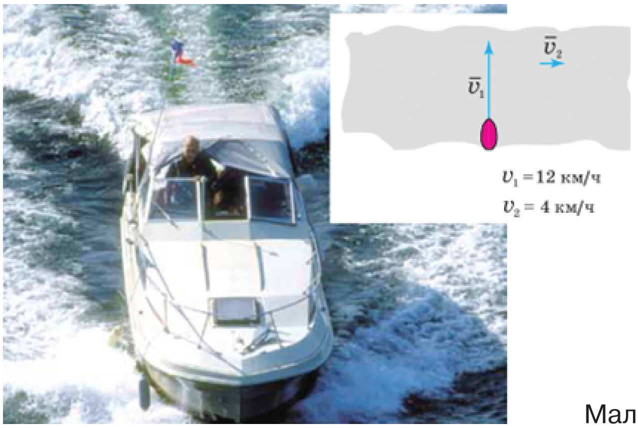
9.31. На тіло діють сили $\overline{F}_1(1;5)$ і $\overline{F}_2(-4;7)$. Знайдіть вектор рівнодійної сили.

9.32. Знайдіть, яку роботу виконує сила $\overline{F}(4;7)$, якщо її точка прикладання переміщується на вектор $\overline{s}\,(-1;\,10)$.

9.33. Двоє учнів витягують човен на берег, тримаючи його за трос. Яка сила діє на човен, якщо один учень прикладає силу 100 Н, а другий — 120 Н?

9.34. Моторний човен відчалює від берега річки з власною швидкістю $v_1 = 12$ км/год, а течія річки має швидкість $v_2 = 4$ км/год (мал. 9.10).

1. З якою швидкістю човен віддаляється від берега?
2. За який час човен опиниться посередині річки й на якій відстані від причалу, якщо ширина річки становить 6 км? Виконайте відповідні малюнки.



Мал. 9.10

9.35. Малюк тягне санки із силою 10 Н на відстань 20 м. Кут між напрямом сили і напрямом переміщення дорівнює 45°. Яку роботу виконав малюк, перетягуючи санки?

9.36. Троє учнів, намагаючись зрушити з місця вантаж, тягнуть його кожний у свою сторону з однаковою силою 100 Н. Які кути між напрямами їхніх сил, якщо вантаж не зрушив з місця? Як треба змінити ці напрями, щоб зрушити з місця вантаж?

9.37. Два автомобілі виїхали з міста A в протилежних напрямках зі швидкостями 85 км/год і 90 км/год. Побудуйте малюнок і покажіть на ньому відповідні вектори.

9.38. Два велосипедисти виїхали з міста А в одному напрямку зі швидкостями 15 км/год і 12 км/год. Побудуйте малюнок і покажіть на ньому відповідні вектори.

9.39. Власна швидкість катера дорівнює 12 км/год, а швидкість течії річки — 2 км/год. Яка швидкість катера: 1) за течією річки; 2) проти течії річки? Побудуйте малюнок і покажіть на ньому відповідні вектори.

9.40. Власна швидкість плавця дорівнює 1,5 м/с, а швидкість течії річки — 0,5 м/с. Яка швидкість плавця: 1) за течією річки; 2) проти течії річки? Побудуйте малюнок і покажіть на ньому відповідні вектори.

9.41. Промінь світла падає на дзеркало під кутом 17° і, відбиваючись від нього, потрапляє на друге дзеркало, що розміщено перпендикулярно до першого. Яким є кут відбивання променя від другого дзеркала?

9.42. Промінь світла зазнає заломлення на межі «повітря–скло». Як зміниться відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення, якщо кут падіння променя:
1) збільшиться; 2) зменшиться?

Виконайте завдання, використовуючи програму GeoGebra

9.43. Відкривши алгебраїчне полотно графіки, на координатній площині відмітьте задані точки, послідовно з'єднайте їх і отримайте малюнок.
(12; 2), (5; 5), (2; 5), (–3; 7), (–1; 4,5), (–6; 4), (–11; –1), (–7; –5), (3; –8),
(5; –11), (4; –7), (6; –5), (3; –6), (2; –6), (–1; –5), (–6; –2), (0; –1), (–1; –3),
(2; –2), (3; –1), (5; –1), (4; 0), (8; 0), (9; 1), (12; 2), (7,5; 3).

Перевірте свої досягнення

1. На папері в клітинку дано відрізок з кінцями у вузлах сітки. Чи завжди його середина буде міститися у вузлі сітки?
2. Як потрібно розмістити відрізок з кінцями у вузлах сітки, щоб можна було знайти його середину, не виконуючи вимірювань і додаткових побудов?
3. Вершини трикутника містяться у вузлах сітки. Проведіть його медіани, не виконуючи вимірювань. Чи завжди точка перетину медіан буде міститися у вузлі сітки? Відповідь поясніть.
4. Через яку кількість вузлів сітки проходить коло, центр якого міститься в її вузлі, а радіус дорівнює 25 клітинкам?
5. Де на подвір'ї потрібно розмістити ліхтар, щоб хвіртка, криниця та вхід до будинку освітлювались однаково?
6. Через заданий вузол сітки проведіть пряму, яка паралельна даній прямій і проходить через два дані вузли сітки.
7. Накресліть рівносторонній трикутник *ABC* та його середні лінії. Чи можна позначити два вектори так, щоб вони були:
   1) колінеарними;
   2) співнапрямленими;
   3) протилежно напрямленими;
   4) рівними;
   5) протилежними?

8. Північний вітер змінився на:
1) східний;
2) північно-східний;
3) південно-східний;
4) західний;
5) північно-західний;
6) південно-західний.
Покажіть початковий і кінцевий напрямок вітру та напрямок його зміни. На який кут повернувся вітер?

9. Південний вітер змінився на:
1) східний;
2) північно-східний;
3) південно-східний;
4) західний;
5) північно-західний;
6) південно-західний.
Покажіть початковий і кінцевий напрямок вітру та напрямок його зміни. На який кут повернувся вітер?

10. Модуль рівнодійної двох сил дорівнює модулю кожної з них. Який кут між двома даними силами?

Геометрія в мистецтві

Мауріц Корнеліс ЕШЕР
(*1898–1972*) —
нідерландський художник-графік. Відомий перш за все своїми концептуальними літографіями, гравюрами на дереві й металі, в яких він майстерно досліджував пластичні аспекти понять нескінченності і симетрії, а також особливості психологічного сприйняття складних тривимірних об’єктів.

Скульптура, зроблена за малюнком Ешера

Дерев’яна карта Лейдена, виготовлена за малюнком Ешера

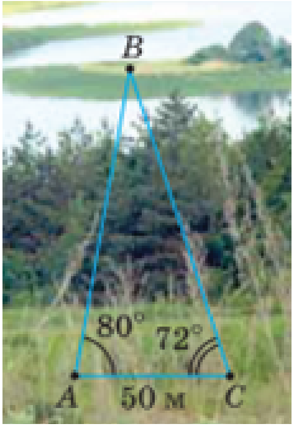
§ 2. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТРИКУТНИКІВ

1. Розв'язування трикутників

Корисні поради

1. За теоремою косинусів можна знайти: 1) сторону трикутника за двома його сторонами та кутом між ними; 2) кути трикутника за трьома його сторонами
2. Теорема синусів дає можливість за стороною і прилеглими до неї кутами або за двома сторонами й кутом, протилежним одній з них, знаходити інші сторони й кути трикутника.
3. Види задач, у яких вимагається розв'язати трикутник:
   1) за двома сторонами і кутом між ними;
   2) за стороною і прилеглими до неї кутами;
   3) за трьома сторонами;
   4) за двома сторонами і кутом, прилеглим до однієї з них.

   Повторіть схеми розв'язування кожного з цих видів задач, оскільки вони використовуються під час розв'язування задач практичного змісту.

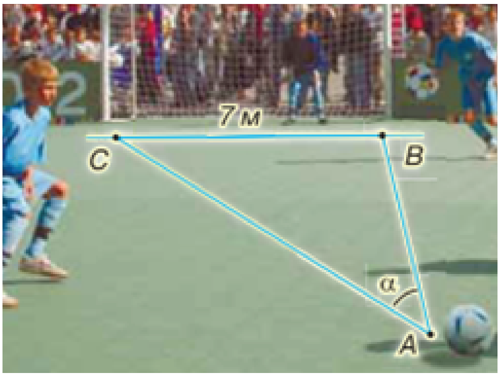


Мал. 9.11

Розв'яжіть задачі

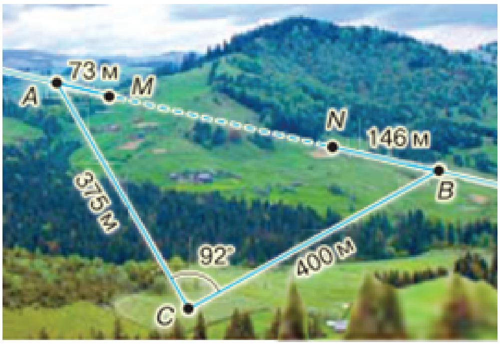
9.44. (**Г**). Дано: $c = 40$, $\angle A = 28°$, $\angle B = 31°$. Знайти: a, b, $\angle C$.
(**П**). Знайдіть відстань від точки A до недоступної точки B, якщо $AC = 50$ м, $\angle CAB = 80°$ і $\angle ACB = 72°$ (мал. 9.11).

9.45. (**Г**). У трикутнику задано сторони: $a = 18$, $b = 24$, $c = 13$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.
(**П**). Футбольний м'яч перебуває в точці A футбольного поля на відстані 4,5 м і 9,4 м від основ B і C стійок воріт (мал. 9.12). Футболіст направляє м'яч у ворота. Знайдіть кут α влучення м'яча у ворота, якщо ширина воріт становить 7 м.



Мал. 9.12

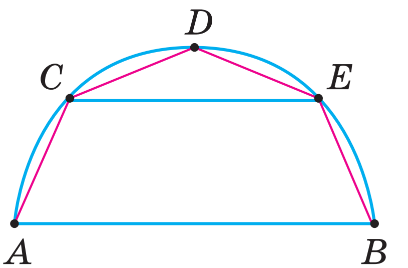
9.46. Із пунктів A і B на березі моря, відстань між якими становить 3 км, спостерігають за пароплавом, що рухається прямолінійно й рівномірно. У певний час пароплав було видно з пункту A під кутом $102°$ до напрямку AB, а з пункту B — під кутом $51°$ до напрямку BA. Через 10 хв кути змінилися й стали дорівнювати відповідно $84°$ і $74°$. Знайдіть швидкість пароплава.



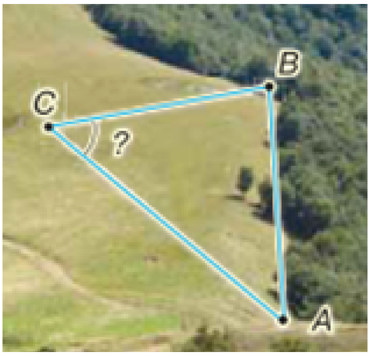
Мал. 9.13

9.47*. На будівництві залізниці на ділянці AB потрібно прокласти тунель MN (мал. 9.13). За даними на малюнку поясніть, як знайти довжину й напрямок тунелю. Обчисліть довжину тунелю.

9.48. Мансардну покрівлю спроєктували так: на відрізку $AB = 11{,}5$ м (ширина перекриття, мал. 9.14) описали півколо та поділили його на чотири рівні частини. Точки A, C, D, E і B сполучили відрізками. Знайдіть:
1) довжину схилів покрівлі AC і CD;
2) довжину поперечки CE;
3) кути нахилу схилів AC і CD покрівлі.



Мал. 9.14

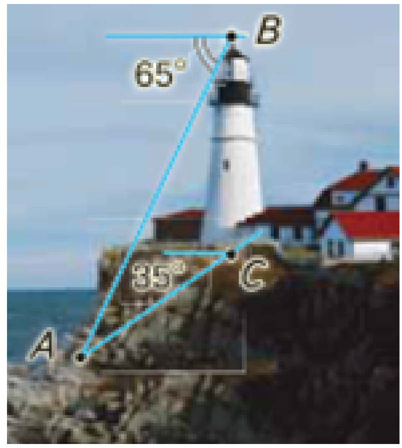


Мал. 9.15

9.49. Під яким кутом видно прямолінійний край лісу $AB = 1240$ м з пункту C, який віддалений від пункту A на 1600 м і від пункту B — на 1170 м (мал. 9.15)?

9.50. Щоб знайти кут на місцевості, на його сторонах від вершини відклали по 10 м і виміряли відстань між одержаними точками — 16 м. Отримали, що кут дорівнює 106°. Поясніть, як обчислили кут.

9.51. На горі розміщена башта заввишки 60 м (мал. 9.16). Деякий предмет на підошві гори видно з вершини B башти під кутом 65° до горизонту, а з її основи C — під кутом 35° до горизонту. Знайдіть висоту гори.



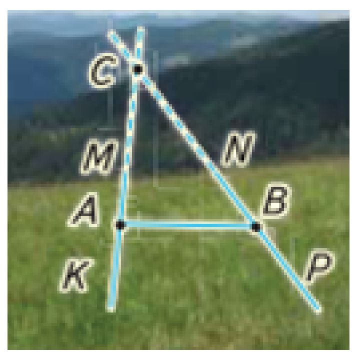
Мал. 9.16

9.52. Вершину дерева, віддаленого від пагорба на 16 м, видно під кутом 16° до горизонту, а вершину другого дерева, віддаленого від цього самого пагорба на 24 м, видно під кутом 19°. Яке дерево вище і на скільки?

9.53. Висоти двох вертикальних стовпів на подвір'ї підприємства дорівнюють 5 м і 12,5 м. Відстань між ними становить 10 м. Знайдіть відстань між верхівками стовпів.

9.54. Висота труби на подвір'ї фабрики дорівнює 35,8 м. У той самий час вертикально поставлена жердина завдовжки 1,9 м дає тінь завдовжки 1,62 м. Знайдіть довжину тіні, що дає труба.

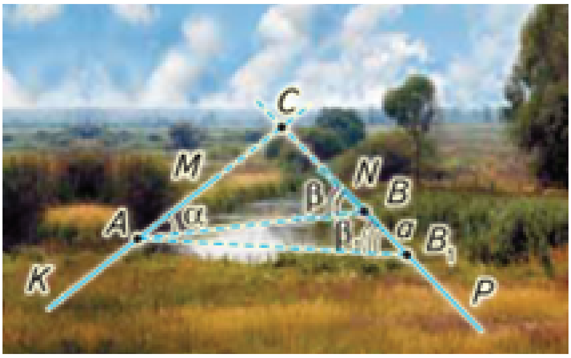
9.55*. На малюнку 9.17 зображено дві прямі дороги KM і PN, які перетинаються десь за лісом у недоступній точці C. Потрібно знайти відстань від деякого пункту A на дорозі KM до точки C перетину доріг. Для цього на дорозі PN позначили пункт B так, щоб можна було виміряти відстань AB, і визначили кути BAM і ABN. Поясніть спосіб знаходження відстані AC. Визначте відстань AC, якщо $AB = 800$ м, $\angle BAM = 85°$, $\angle ABN = 52°$.



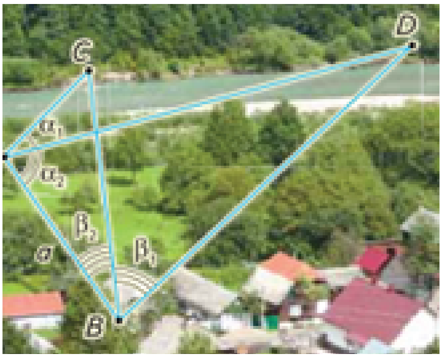
Мал. 9.17

9.56*. Трапилося так, що місцевість між дорогами заболочена й виміряти відстань AB, як у попередній задачі, не можна (мал. 9.18). Але пункт A видно з двох місць B і B_1 на дорозі PN, а також можна підійти до пункту A. Тоді виміряли BB_1,

$\angle BAM$, $\angle ABN$ і $\angle AB_1N$. Поясніть, як знайти відстань AC. Знайдіть цю відстань, якщо:
$BB_1 = a$, $\angle BAM = \alpha$, $\angle ABN = \beta$, $\angle AB_1N = \beta_1$.



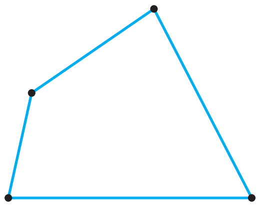
Мал. 9.18



Мал. 9.19

9.57*. Потрібно обчислити відстань між недоступними пунктами C і D (мал. 9.19). Для цього на місцевості вибрали точки A і B так, щоб можна було виміряти відстань AB і щоб із цих точок було видно точки C і D. Потім виміряли $AB = a$, $\angle CAD = \alpha_1$, $\angle BAD = \alpha_2$, $\angle ABC = \beta_2$, $\angle CBD = \beta_1$. Поясніть, як знайти відстань CD. Визначте відстань CD, якщо $a = 100$ м, $\alpha_1 = 30°$, $\alpha_2 = 70°$, $\beta_1 = 54°$, $\beta_2 = 28°$.

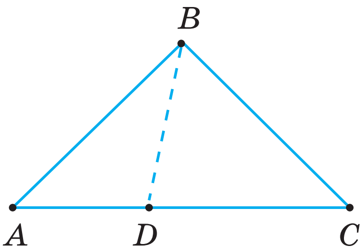
9.58. На малюнку 9.20 зображено план ділянки в масштабі 1 : 1000. Скориставшись планом, знайдіть площу цієї ділянки.



Мал. 9.20

9.59. Маса 1 м^2 листового заліза становить 38 кг. Яку масу має трикутник, вирізаний із цього заліза, якщо його сторони дорівнюють 29 см, 35 см і 48 см?

9.60. Від трикутної ділянки площею 5 га потрібно межею BD відділити ділянку площею 2 га (мал. 9.21). Як це зробити, якщо $AC = 1000$ м?

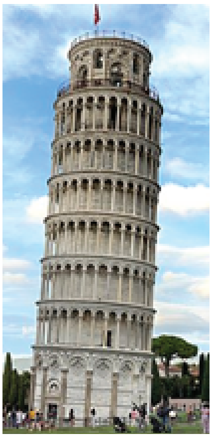


Мал. 9.21

9.61. Верхній край драбини, яку приставляють до стіни, упирається у верхній край стіни заввишки 2,25 м. Кут між драбиною і стіною становить 60°. Якою має бути довжина (у см) драбини?

9.62. Висота Пізанської вежі (мал. 9.22) в найвищій точці дорівнює 56,7 м від землі, а в найнижчій точці — 55,86 м. Її діаметр становить 15 м, а діаметр її фундаменту — 19,6 м.

Чи правильно, що кут нахилу вежі становить $\approx 4°$?

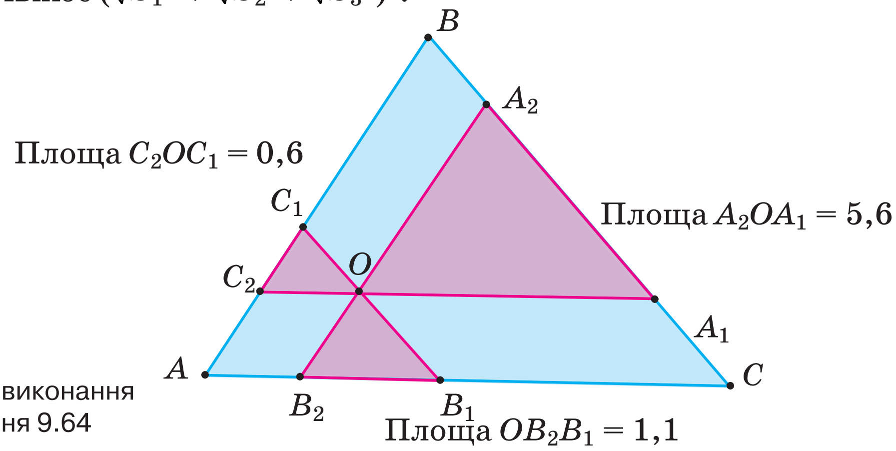


Мал. 9.22

9.63. Під час екскурсії учні виміряли кроками сторони трикутної площі й отримали такі довжини її сторін — 58, 65 і 78 кроків. Які кути цього трикутника?

Виконайте завдання, використовуючи програму GeoGebra

9.64. . Побудуйте довільний трикутник. Всередині візьміть довільну точку O і через неї проведіть три прямі, паралельні сторонам трикутника, ці прямі ділять трикутник на 6 частин, із яких три – це трикутники. Якщо площі цих трикутників дорівнюють S_1, S_2, S_3, переконайтесь, що площа основного трикутника дорівнює $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.



Результат виконання завдання 9.64

Перевірте свої досягнення

1. Назвіть види прикладних задач, що потребують розв'язування трикутників.
2. Як розв'язують трикутники за двома сторонами і кутом проти однієї з них? Скільки розв'язків може мати ця задача?
3. Як розв'язують трикутники за двома сторонами і кутом між ними?
4. Як розв'язують трикутники за стороною і двома кутами?
5. Як розв'язують трикутники за трьома сторонами?
6. Щоб знайти кут на місцевості, на його сторонах від вершини відклали по 10 м і виміряли відстань між одержаними точками — 16 м. Отримали, що кут дорівнює 106°. Поясніть, як обчислили кут.
7. Під яким кутом до берега річки необхідно направити човен, щоб його знесло якнайменше, якщо швидкість течії річки вдвічі більша за швидкість човна, яка становить 3 км/год?

§ 3. ПРАВИЛЬНІ МНОГОКУТНИКИ. КОЛО. КРУГ

Корисні поради

1. Щоб знайти кут правильного n-кутника, скористайтеся формулою:
$\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$. Щоб знайти центральний кут правильного n-кутника, скористайтеся формулою: $\beta = \dfrac{360°}{n}$.

2. Щоб побудувати правильний n-кутник, поділіть коло на n рівних частин і послідовно сполучіть точки поділу.

3. За даним радіусом R або діаметром D знайти довжину кола C і навпаки можна за формулами:

$C = 2\pi R = \pi D$, $R = \dfrac{C}{2\pi}$ або $D = \dfrac{C}{\pi}$.

4. Пам'ятайте, що за формулою $1 = \dfrac{\pi R n°}{180°}$ також знаходимо:

1) радіус R кола за довжиною його дуги l та її градусною мірою $n°$:

$$R = \frac{l \cdot 180°}{\pi n°};$$

2) градусну міру $n°$ дуги за її довжиною l та радіусом R кола:

$$n° = \frac{l \cdot 180°}{\pi R}.$$

5. Формули для радіусів описаних і вписаних кіл правильних n-кутників подано в таблиці 9.1.

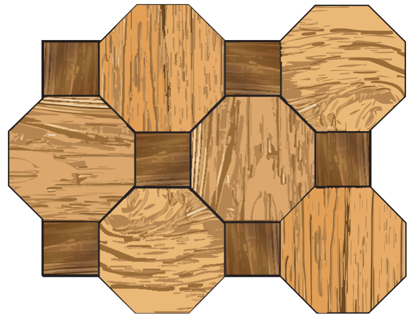
Таблиця 9.1

R, r \ n	n	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
R	$\dfrac{a}{2\sin\dfrac{180°}{n}}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$	$\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$	a
r	$\dfrac{a}{2tg\dfrac{180°}{n}}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{6}$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Розв'яжіть задачі

9.65. Доведіть, що підлогу можна покрити плитками, які мають форму правильних трикутників, чотирикутників або шестикутників.

9.66. Підлогу покрили плитками, які мають форму правильних чотирикутників і восьмикутників (мал. 9.23). Поясніть, чому можливе таке покриття.

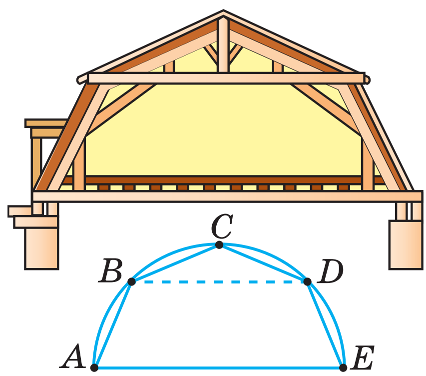


Мал. 9.23

9.67. Знайдіть розмір отвору h ключа для правильної шестигранної гайки, якщо ширина грані гайки $a = 2{,}5$ см (мал. 9.24). Величина зазору між гранями гайки та ключа дорівнює 0,5 мм.

Мал. 9.24

9.68. Найпростіше мансардне покриття утворює у вертикальному перерізі половину правильного восьмикутника (мал. 9.25). Знайдіть ширину перекриття BD, сторону восьмикутника та висоту мансардної кімнати $ABCDE$, якщо $AE = 6$ м.

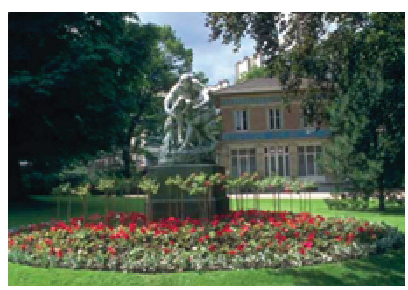


Мал. 9.25

9.69. На квадратній ділянці землі потрібно розбити клумбу для квітів у формі правильного восьмикутника. Запропонуйте спосіб побудови такої клумби.

9.70*. Як розбити клумбу для квітів у формі : 1) пентаграми; 2) гексаграми; 3) октаграми; 4) нонаграми?

9.71. Навколо круглої клумби є доріжка, яка прилягає до клумби. Довжина зовнішнього кола доріжки дорівнює 25 м, а її ширина — 0,5 м. Який об'єм піску знадобиться, щоб посипати ним доріжку, якщо на 1 м^2 доріжки витрачають 0,8 дм^3 піску?



Мал. 9.26

9.72. Круглу клумбу з радіусом 6 м розділили на дві рівні частини, провівши коло, центр якого збігається з центром клумби. Чому дорівнює радіус цього кола?

9.73. Скільки стовпчиків потрібно для паркана навколо майданчика, що має форму круга, якщо відстань між стовпчиками (за дугою кола) має становити ≈ 1,5 м, а діаметр майданчика — 60 м?

9.74. Щоб знайти товщину дерева (діаметр), можна виміряти його обхват (довжину кола). Обчисліть товщину дерева, обхват якого дорівнює:
1) 2 м; 2) 2,5 м.

9.75. На котушці є 80 витків дроту. Знайдіть довжину дроту, якщо діаметр котушки дорівнює 0,5 м.

9.76. Вантаж піднімають за допомогою блока, який зображено на малюнку 9.27. На яку висоту підніметься вантаж за 9 обертів блока, якщо його діаметр дорівнює 20 см?

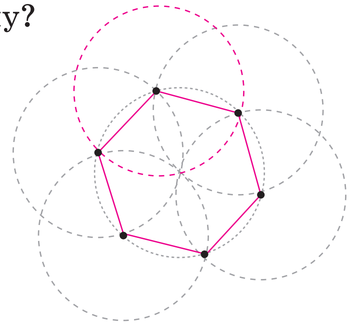
Мал. 9.27

9.77. Якої товщини шар потрібно зняти з круглого мідного дроту, що має площу перерізу 314 мм^2, щоб дріт проходив крізь отвір діаметром 18,5 мм?

9.78. Діаметр заготовки дорівнює 30 мм. Поперечний переріз після обробки цієї заготовки — квадрат зі стороною 20 мм. Скільки відсотків становлять відходи металу?

Виконайте завдання, використовуючи програму GeoGebra

9.79. На новому полотні побудуйте правильний 6-кутник, використовуючи при цьому лише кола як інструмент.



Результат виконання 9.79

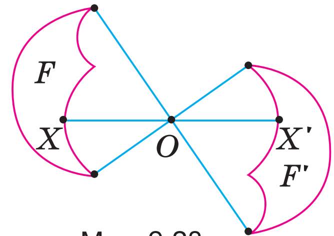
Перевірте свої досягнення

1. Наведіть приклади предметів з довкілля, які мають форму правильних многокутників.
2. Чому плити для покриття площ, вулиць, аеродромів не виготовляють у формі правильних п'ятикутників?
3. Знайдіть площу циркової арени, довжина кола якої 41 м.
4. Із квадратного листа жерсті вирізали круг найбільшої площі. Скільки відсотків листа становлять відходи?
5. Як знайти відстань до води в колодязі, якщо можна виміряти діаметр вала, на який намотується ланцюг для відра?

§ 4. ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

Корисні поради

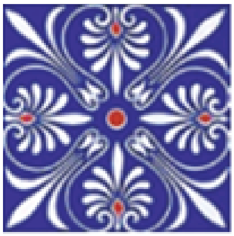
1. Щоб побудувати точку X', симетричну точці X відносно точки O, проведіть промінь XO, відкладіть на ньому з другого боку від точки O відрізок $OX' = OX$ (мал. 9.28).



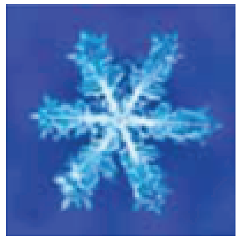
Мал. 9.28

Фігури, що мають центр симетрії, часто зустрічаються в довкіллі, наприклад, пропелер літака (мал. 2), орнамент (мал. 3), квітка (мал. 4), сніжинка (мал. 5).

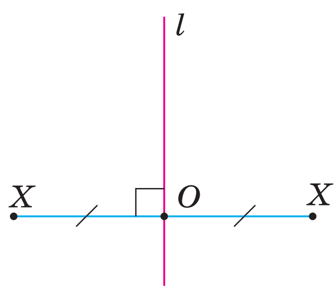

Мал. 9.29


Мал. 9.30


Мал. 9.31


Мал. 9.32

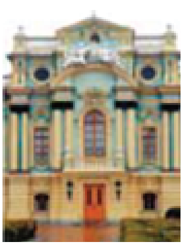
2. Щоб побудувати точку X', симетричну точці X відносно прямої l, проведіть з точки X перпендикуляр XO до прямої l і на його продовженні з другого боку від прямої l відкладіть відрізок $OX' = OX$ (мал. 9.33).



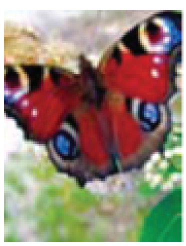
Мал. 9.33

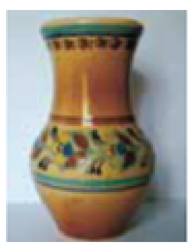
Фігури, що мають вісь симетрії, часто трапляються в техніці (мал. 9.34), архітектурі (мал. 9.35, мал. 9.36), природі (мал. 9.37), побуті (мал. 9.38).


Мал. 9.34

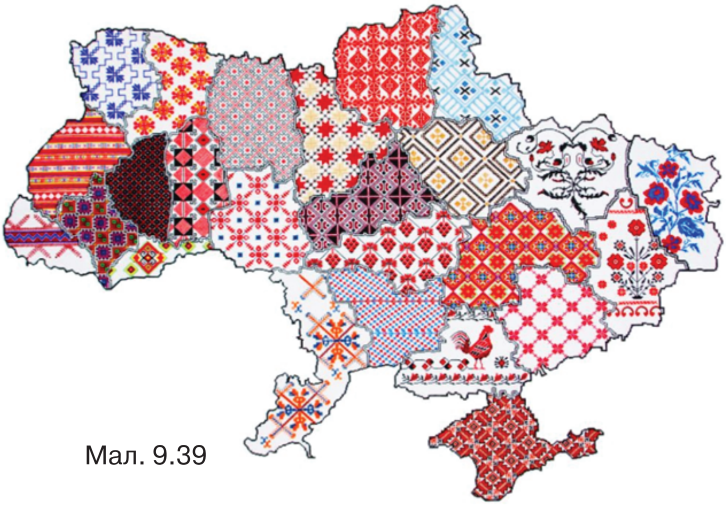

Мал. 9.35


Мал. 9.36


Мал. 9.37


Мал. 9.38

Симетрію широко застосовують у художніх композиціях, зокрема у вишивках. Історія української вишивки своїм корінням сягає у глибину віків. Вишивкою, за свідчення давньогрецького вченого Геродота, був прикрашений одяг скіфів. Українські майстрині оздоблювали вишитими орнаментами не лише одяг, а й предмети побуту — рушники, скатертини, наволочки, серветки тощо. При цьому в різних регіонах України вишивки мали свій колорит і техніку виконання (мал. 9.39).



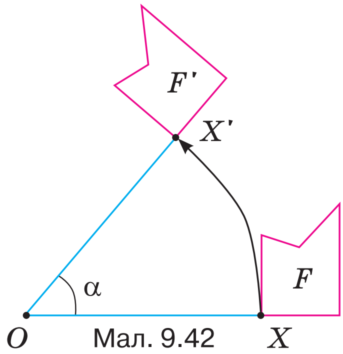
Мал. 9.39

Наприклад, на Харківщині й Луганщині різнокольорові вишивки виконували грубою ниткою, через що узори справляли враження рельєфних (мал. 9.40). А для гуцульських вишивок характерним є густе заливання тла, коли велика кількість дрібних елементів заповнює площину орнаменту, а візерунок окреслюється тонкими просвітками (мал. 9.41).

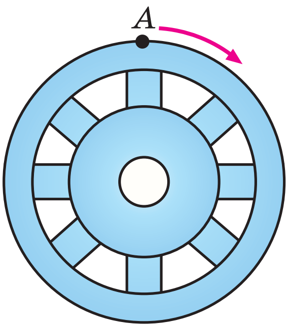
Мал. 9.40

Мал. 9.41

3. Якщо центр O і кут α повороту задано, то точку X', у яку переходить точка X унаслідок повороту проти годинникової стрілки, будуємо так (мал. 9.42): проводимо промінь OX; від променя OX відкладаємо кут XOA, що дорівнює куту α; на промені OA знаходимо точку X', таку, що $OX' = OX$.



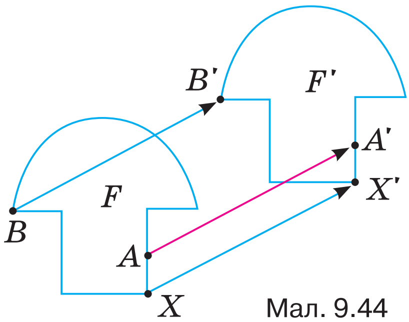
Мал. 9.42



Мал. 9.43

Геометричне поняття «поворот» слід відрізняти від фізичного обертання. Обертання — це процес, який визначається часом, кутовою швидкістю, кутовим прискоренням тощо. Обертання може бути рівномірним або нерівномірним, здійснюватися на який завгодно великий кут в одному й іншому напрямках. Наприклад, якщо шків (мал. 9.43) зробить два чи десять повних обертів, кажуть, що він обернувся, відповідно, на 720° чи 3600°. Поворот як геометричне перетворення не пов'язаний із часом чи швидкістю, а є відображенням однієї фігури на іншу, рівну їй.

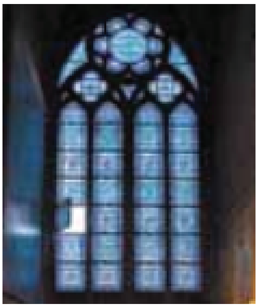
4. Щоб перемістити фігуру за допомогою паралельного перенесення, необхідно кожну точку фігури F змістити в одному й тому самому напрямку (уздовж паралельних прямих XX', AA', BB'...) на одну й ту саму відстань ($XX' = AA' = BB' = ...$). Отримали фігуру F' (мал. 9.44). Говорять, що фігура F перейшла у фігуру F' унаслідок паралельного перенесення на вектор XX'.



Мал. 9.44

Паралельне перенесення малюнків (вони однакові й періодично повторюються) є на вишивках, шпалерах, тканинах, паркетній підлозі, орнаментах. На малюнках 9.45–9.47 подано орнаменти на старовинній грецькій вазі (мал. 9.45), вітражі в соборі Паризької Богоматері (Франція, Середньовіччя) (мал. 9.46), на стіні палацу Дарія в Сузах (Давня Персія) (9.47).

Мал. 9.45



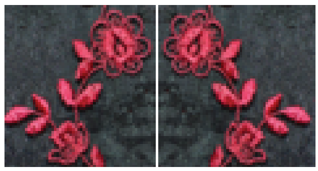
Мал. 9.46

Мал. 9.47

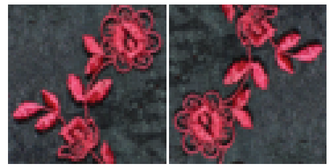
Розв'яжіть задачі

9.80. Базовий елемент орнаменту містить два елементи. Опишіть математичною мовою принцип побудови такого орнаменту:
1) на малюнку 9.48;
2) на малюнку 9.49;
3) на малюнку 9.50.

Мал. 9.48

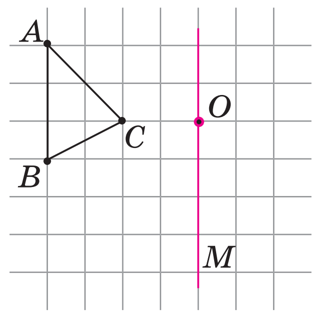


Мал. 9.49



Мал. 9.50

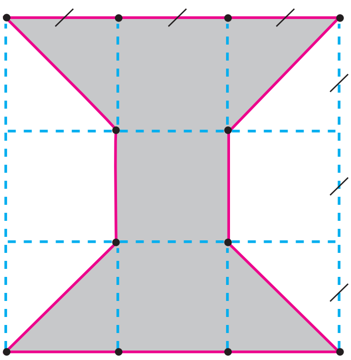
9.81. На клітчастому папері з двох його клітинок утворіть базовий елемент орнаменту. Побудуйте орнамент, повторивши тричі його базовий елемент. Опишіть, за допомогою яких геометричних перетворень утворився орнамент.



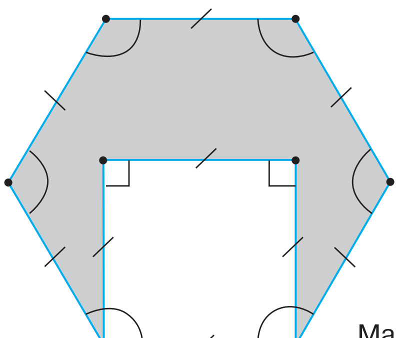
Мал. 9.51

9.82. Дано частину базового елемента орнаменту (мал. 9.51).
1. На основі цієї частини побудуйте повний базовий елемент орнаменту, використавши симетрію відносно:
а) точки O; б) прямої OM;
2. Побудуйте орнамент із трьох базових елементів.

9.83. Побудуйте фігури, які рівні фігурам, зображеним на малюнках 9.52 і 9.53 (для побудови можна скористатися лінійкою, циркулем, косинцем або калькою). Обчисліть площі цих фігур, зробивши найменшу кількість вимірювань.



Мал. 9.52



Мал. 9.53

9.84*. Дано пряму l і точки A і B з одного боку від неї. На прямій l знайдіть таку точку N, щоб сума відстаней $AN + BN$ була найменшою.

9.85. Села A і B розміщені на різних берегах річки (мал. 9.54). У якому місці потрібно побудувати міст, щоб шлях між селами був найкоротшим?

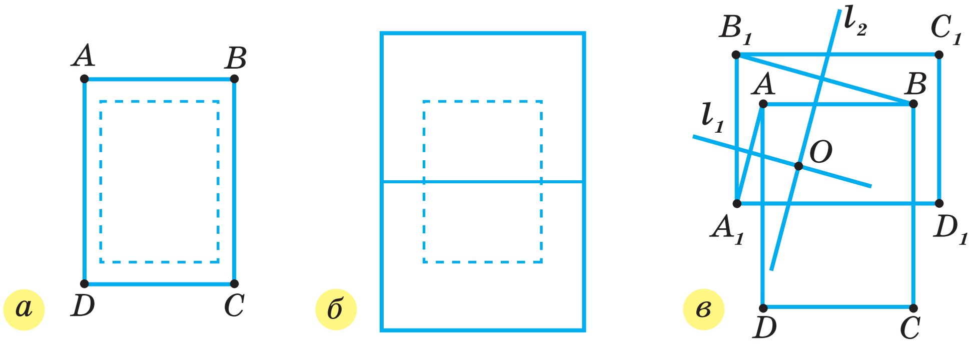
Мал. 9.54

9.86. З одного боку від газопроводу розташовані міста A і B. У якому місці газопроводу слід побудувати газову підстанцію, щоб при розподілі газу для міст A і B витратити найменшу кількість труб?

9.87. На прямолінійному шосе треба знайти місце для автобусної зупинки так, щоб сума відстаней від неї до будівель A і B була найменшою. Розгляньте два випадки:
1) будівлі розміщені з різних боків від шосе;
2) будівлі розміщені з одного боку від шосе.

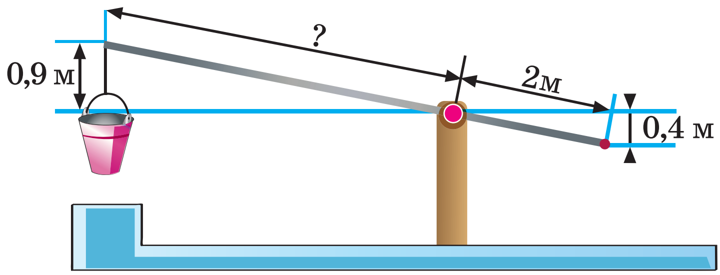
9.88. Стрілки годинника показують 12 годин. Який час показуватиме годинник, якщо хвилинна стрілка здійснить поворот:
1) на $60°$;
2) на $120°$;
3) на $150°$?

9.89. Потрібно виготовити розкладний столик так, щоб у закритому стані його кришка (стільниця) була розміщена, як показано на малюнку 9.55 (*а*), у відкритому — як на малюнку 9.55 (*б*). У якому місці потрібно помістити шип, поворотом навколо якого кришка столу переходила б з положення, зображеного на малюнку 9.55 (*с*), у положення, зображене на малюнку 9.55 (*б*)?



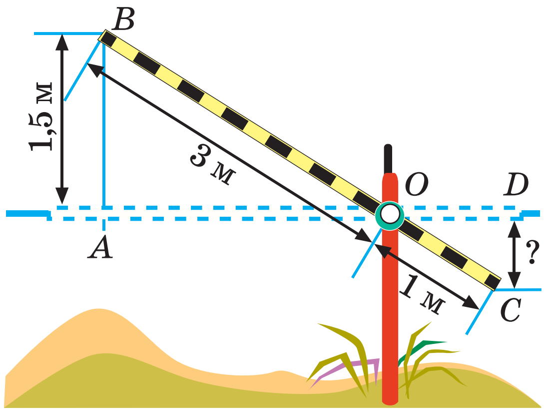
Мал. 9.55

9.90. Коротке плече «журавля» колодязя має довжину 2 м. Коли кінець короткого плеча опустився на 0,4 м, кінець довгого піднявся на 0,9 м (мал. 9.56). Яка довжина довгого плеча?



Мал. 9.56

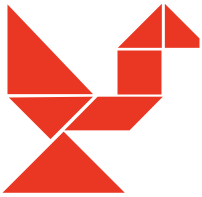
9.91. Коротке плече шлагбаума має довжину 1 м, а довге плече — 3 м. На скільки метрів опускається коротке плече, коли довге плече підіймається на 1,5 м (мал. 9.57)?

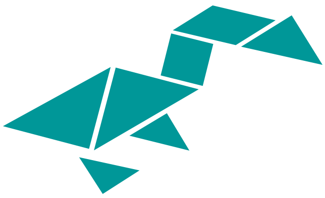


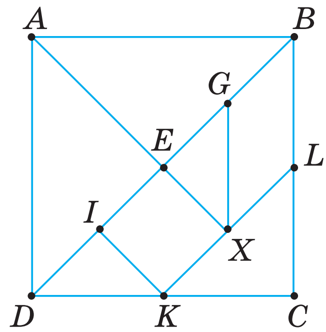
Мал. 9.57

9.92. У шлагбаума довге плече має довжину 4 м, а коротке плече на 3 м коротше. На скільки метрів підніметься довге плече, коли коротке плече опуститься на 0,5 м?

9.93. У давньому Китаї зародилася гра (за легендою, її придумав китаєць Тан) — з певних геометричних фігур («танграмів»), складали різні силуети. Танграми вирізали із чорного картону або випилювали з дерева, тому силуети виходили правдоподібними (мал. 9.58, 9.59). На малюнку 9.60 ви бачите квадрат $ABCD$, у якому проведено відрізки — лінії розрізу квадрата для одержання танграмів. Точки K, M, L, G, I — середини відповідних відрізків.


Мал. 9.58


Мал. 9.59

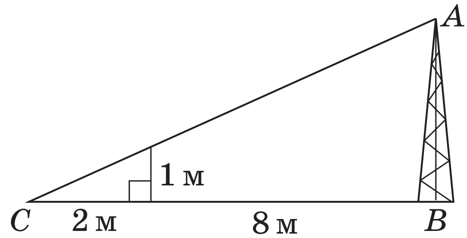


Мал. 9.60

1. Форму яких геометричних фігур мають танграми:
а) на малюнку 9.58; б) на малюнку 9.59?
Відповідь обґрунтуйте.
2. Чи є серед танграмів подібні фігури:
а) на малюнку 9.58; б) на малюнку 9.59?
Відповідь обґрунтуйте.
3. Чи є серед танграмів подібні фігури з коефіцієнтом 1:
а) на малюнку 9.58; б) на малюнку 9.59?
Відповідь обґрунтуйте.
4. Якщо серед танграмів є подібні фігури, то який коефіцієнт їх подібності:
а) на малюнку 9.58; б) на малюнку 9.59?
Відповідь обґрунтуйте.
5. Скільки рівних і скільки подібних танграмів використали для складання:
а) силуету на малюнку 9.58;
б) силуету на малюнку 9.59;
в) силуетів на обох малюнках разом?
6. Придумайте інший силует, який можна скласти із танграмів.

9.94. План земельної ділянки в масштабі 1 : 200 виконано на аркуші 407 × 288 мм. Чи поміститься на аркуші 288 × 203 мм цей план у масштабі 1 : 300?

9.95. На відстані 21 м одна від одної ростуть дві сосни. Висота першої сосни становить 39 м, а висота другої — 11 м. Знайдіть відстань між їхніми верхівками. Відповідь подайте в метрах.



Мал. 9.61

9.96. За даними на малюнку 9.61 знайдіть висоту вежі, на якій розміщено інтернет-антену.

9.97. Хлопець стоїть на відстані 8 кроків від стовпа, на якому висить ліхтар. Зріст хлопця 1,7 м, а його тінь має довжину 4 кроки. На якій висоті (у метрах) розміщено ліхтар?

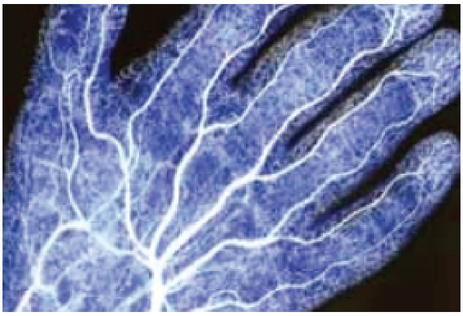
9.98. Дівчина зростом 1,5 м стоїть на відстані 12 м від стовпа, на якому висить ліхтар на висоті 7,5 м. Знайдіть довжину тіні дівчини.

9.99. Тінь від вертикальної вежі заввишки 30 м становить 1,5 м. Виразіть у градусах висоту сонця над горизонтом.

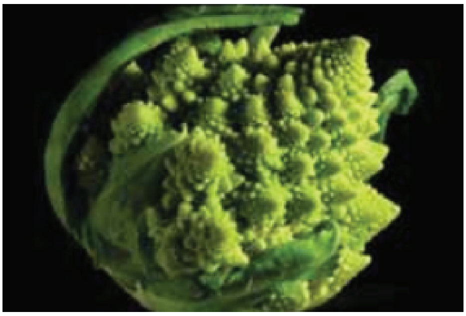
Геометричні несподіванки

Подивіться на малюнки 9.62–9.65. Ви бачите дельту річки, судини людської долоні, лист папороті, качан капусти Романеско. Якщо виокремити будь-яку частину такого зображення, то можна побачити, що ця частина є зменшеною копією повного зображення. Якщо далі з виділеної частини виокремити якусь її частину, то знову одержимо зменшену копію, причому не лише виділеної за першим разом частини, а й повного зображення. Таке явище називають самоподібністю. У природі самоподібність є досить поширеною. Її можна побачити в будові блискавки, сніжинки, крони дерева, мушлі тощо. Нині для самоподібних структур використовують спеціальну назву «фрактал».

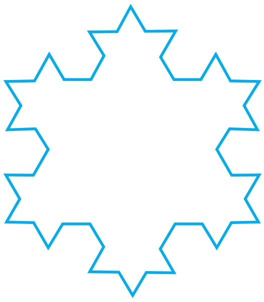

Мал. 9.62


Мал. 9.63

Мал. 9.64



Мал. 9.65

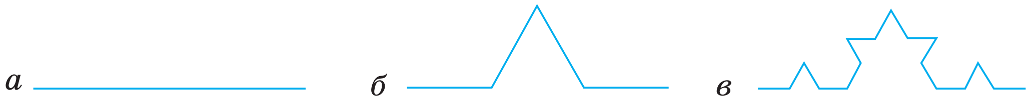


Мал. 9.66

У геометрії фракталом називають геометричну фігуру, яка складається із частин, що за довільного збільшення є подібними до неї самої. Одним із перших фракталів, досліджених ученими, є сніжинка Коха (мал. 9.66). Вона складається з трьох копій кривої Коха, про яку вперше йшлося у статті шведського математика Хельге фон Коха в 1904 р. Ця крива була придумана як приклад неперервної лінії, до якої не можна провести дотичну в жодній точці. Це суцільна «колючка». У цьому можна переконатися, виконавши принаймні перші кроки побудови цієї кривої.

Схема побудови (мал. 9.67).

1. Побудуємо відрізок (мал. 9.67 (*а*)).
2. Поділимо цей відрізок на три рівні частини й на середній з них добудуємо рівносторонній трикутник, а його основу видалимо. Отримаємо ламану, що складається з чотирьох рівних відрізків, довжина кожного з яких дорівнює третині довжини початкового відрізка (мал. 9.67 (*б*)).
3. До кожного з одержаних чотирьох відрізків застосуємо алгоритм, описаний у п. 2. Отримаємо нову ламану, у якої всі ланки є рівними відрізками. Довжина кожної ланки ламаної дорівнює дев'ятій частині довжини початкового відрізка (мал. 9.67 (*в*)).



Мал. 9.67

9.100. Побудуйте сніжинку Коха.

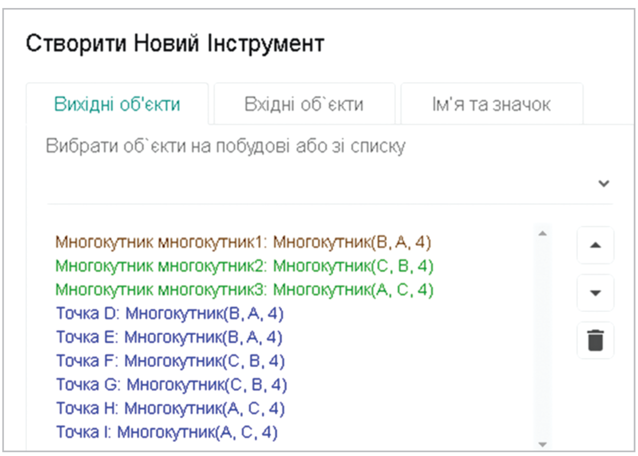
9.101. Побудуйте сніжинку Коха «навпаки» (криві Коха будуються всередину рівностороннього трикутника).

9.102. Побудуйте квадратний варіант сніжинки Коха «навпаки» (використайте квадрат замість трикутника).

Виконайте завдання, використовуючи програму GeoGebra

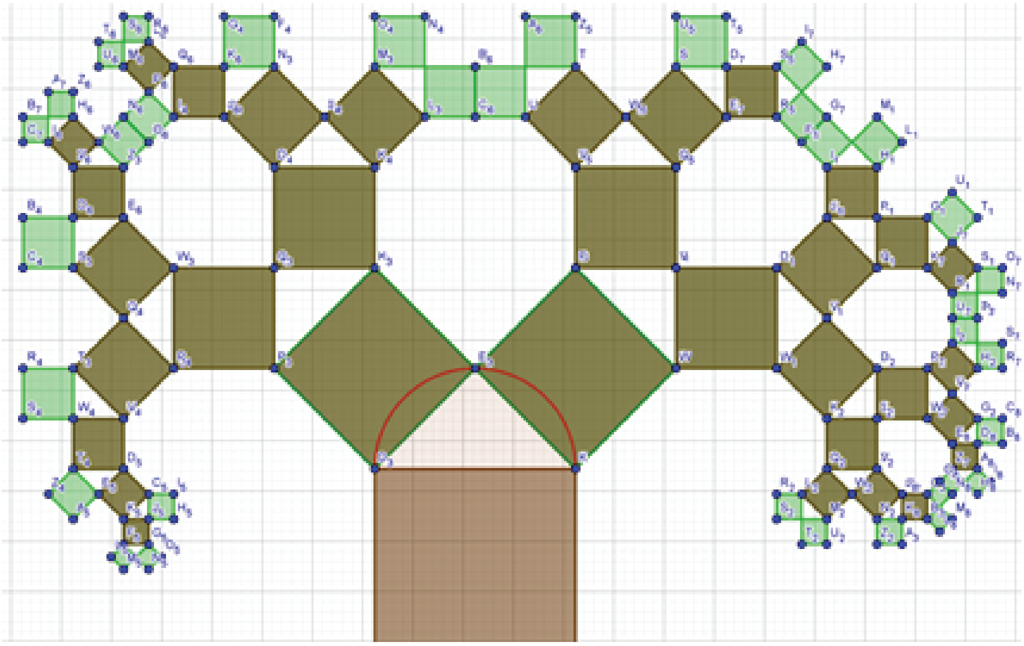
9.103. Побудуйте фрактал із назвою «Дерево Піфагора», основою якого є прямокутний трикутник і квадрати на його сторонах.

<table>
<tr><td>1.</td><td>За допомогою інструмента «Півколо» на відрізку AB побудуємо півколо (для точності відкрийте сітку і зробіть відрізок на 4 клітинки).</td></tr>
<tr><td>2.</td><td>За допомогою інструмента «Многокутник» в півколі будуємо трикутник ABC, зрозуміло що він прямокутний, на даному етапі будуємо рівнобедрений трикутник.</td></tr>
<tr><td>3.</td><td>На кожній стороні трикутника за допомогою інструмента «Правильний многокутник» будуємо квадрати.</td></tr>
<tr><td>4.</td><td>Створюємо інструмент, в вихідних даних вибираємо многокутники та їх вершини, у вхідних мають бути точки A і B. Нажимаємо зберегти і на панелі з’являється новий значок , нажавши на нього, зробивши активним, вибираємо наступні сторони квадратів і там вже автоматично виросте дві гілки (важливо: точки вибираємо зліва направо).



</td></tr>
<tr><td>5.</td><td>Рухаючи точку C, зможете подивитись, як змінюється дерево.</td></tr>
<tr><td>6.</td><td>Збережіть роботу.</td></tr>
</table>

Результат виконання (мал. 9.68).



Мал. 9.68

Перевірте свої досягнення

1. Опишіть ситуацію математичною мовою:
1) машина виїхала з гаража й зупинилася;
2) викрійку сорочки поклали на тканину;
3) чайник переставили з однієї конфорки плити на іншу;
4) шафу пересунули від однієї стіни кімнати до іншої;
5) книжки поставили на полицю;
6) складену вчетверо квадратну серветку розгорнули;
7) для зручності читання тексту на екрані смартфона збільшили масштаб зображення.

2. Опишіть ситуацію математичною мовою:
1) подивившись на годинник, Андрій побачив, що пройшло:
   а) чверть години;
   б) пів години;
2) розкрили складаний ніж;
3) шматок мотузки склали вдвічі.

3. Наведіть приклад фракталу з довкілля.

7 клас

§ 1

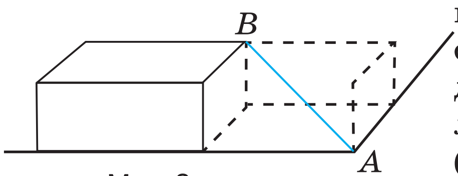
7.1. *Розв'язання*. Якщо треба провісити пряму лінію між двома точками A і C, то спочатку в цих точках ставлять віхи, потім між ними встановлюють проміжну віху B так, щоб віхи A і C закривали віху B. Якщо від точки A до точки C далеко, тоді доводиться ставити ще віхи між точками A і B та B і C. Іноді доводиться провішувати пряму лінію, напрям якої задано двома віхами, поставленими в точках A і B. У цьому випадку ставлять в потрібному напрямі третю віху C так, щоб її закривали віхи A і B. Потім ставлять наступні віхи, щоб їх закривали дві раніше встановлені віхи. **7.2.** *Вказівка*: скористайтесь розв'язуванням задачі 7.1. **7.3.** *Розв'язання*. Провішуємо пряму AB за точку B і відкладаємо на ній точку C на відстані AB від точки B. **7.5.** Напинають шнур, змащений крейдою, між точками, через які потрібно провести пряму, а потім відпускають його. **7.6.** *Розв'язання*. Способи перевірки правильності лінійки відрізнялися її поворотом. Артем лінійку повернув на площині на 180°, а Поліна — лінійку повернула в просторі навколо прямої AB. У Артема, якщо лінії співпали, то це ще не означатиме, що лінійка має рівний край. Проілюструйте це на малюнку. У Поліни, якщо лінії збігаються, тоді лінійка має рівний край. Це випливає з властивості прямої: через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну. **7.7.** *Вказівка*: скористайтесь розв'язуванням задачі 7.6. **7.9.** *Розв'язання*. На одній прямій мають бути умовні три точки — приціл, мушка і ціль. Спершу дивитесь крізь проріз прицілу на мушку і встановлюєте її таким чином, щоб її верхівку було видно в центрі прорізу прицілу на одному рівні з краями. Це надасть стволу напряму, необхідного для того, щоб уразити ціль. Потім напрям ствола переміщаєте на ціль. **7.10.** 4) Київ. **7.11.** *Вказівка*: скористайтесь властивостями прямої та розміщення точок на прямій. **7.12.** *Розв'язання*. Якщо точки R і T лежать з одного боку від точки S, то це означає, що точка S не лежить між точками R і T. Тоді або точка R лежить між точками S і T, або T — між S і R.

Мал. 1

За умовою, точка T не лежить між точками S і R. Отже, точка R лежить між точками S і T (мал. 1). **7.13.** (**Г**). Точка B лежить між точками A і C, тому $AC = AB + BC$. Звідси $AB = AC - BC = 15 - 6 = 9$ (см); (**П**). 340 км. **7.14.** (**Г**). 15 см; (**П**). 600 м. **7.15.** (**Г**). 4 см або 16 см; (**П**). 1 км або 9 км. **7.16.** 41 стовп. **7.17.** 1) 31 стовп;

2) 21 м. **7.18.** *Поміркуємо*. Щоб отримати, наприклад, 40 кусків із 4-метрових колод потрібно зробити 30 розпилювань, а із 5-метрових колод — 32. Отже, відношення числа розпилювань до числа отриманих кусків для коротшої колоди менше ніж для довшої, тому вигідніше розпилювати коротші колод. **7.19.** 6 км. **7.20.** *Розв'язання*. Перегніть аркуш паперу так, щоб точки A і B сумістилися. Тоді лінія згину поділить відрізок AB навпіл. **7.22.** 1) Від 4 до 5 км; 2) від 3 до 4 км. **7.24.** 1) Відкладіть рулеткою 1 м, і порахуйте розмахи пальців на цій відстані. Розділіть 1 м на отриману кількість розмахів пальців. **7.26.** 500 м. **7.27.** 12 км. **7.28.** 1: 0,5. **7.29.** 1) 600 м; 2) 450 м. **7.33.** 35000:500=70 см, 22000 : 500 = 44 см. **7.34.** 1) Один до Києва, другий до Одеси; 2) обидва до Києва або обидва до Одеси. **7.36.** 45°. **7.37.** 1) 90°; 2) 180°; 3) 90°; 4) 135°; 5) 135°; 6) 90°; 7) 145°; 8) 180°. **7.38.** 1) *Вказівка:* додайте до 180° градусну міру кута між напрямком на південь і даним напрямком. **7.39.** *Вказівка*: скористайтесь тим, що бісектриси вертикальних кутів утворюють розгорнутий кут. **7.41.** (**Г**). *Вказівка*: скористайтесь тим, що один з рівних кутів дорівнює 180° : 6 = 30°. (**П**). 1) Розв'язання. На циферблаті годинника півколо відповідає 6 годинам. Тому одній годині відповідає 1/6 частина розгорнутого кута, тобто 30°. На годиннику 5-та година, кут між його стрілками дорівнює 30° × 5 = 150°; 2) 30°; 3) 150°. **7.42.** 1) 6°; 2) 30°; 3) 60°. **7.43.** 14 год 30 хв (або 2 год 30 хв) чи 21 год 30 хв (або 9 год 30 хв). **7.44.** 1)60°; 2) 180°; 3) 165°; 4) 172°30^1. **7.45.** *Вказівка*: Кути з відповідно перпендикулярними сторонами рівні. **7.46.** Спочатку встановлюють нівелір біля підошви горба. За виском перевіряють його вертикальність. Горизонтальну планку нівеліра спрямовують на схил. У напрямку планки «прицілюються» і відмічають точку на схилі, в яку вона спрямована. Там забивають кілок. Якщо висота нівеліра дорівнює 1 м, ця точка буде на 1 м вищою від того місця, де стоїть нівелір. Після цього нівелір переносять до кілка і «прицілюються» на іншу точку вище по схилу. Друга точка вже буде на 2 м вищою від підошви. Так послідовно переставляють нівелір кілька разів уздовж схилу. Досягнувши вершини, за кількістю кілків визначають висоту горба в метрах. **7.47.** Одну; чотири; шість. **7.48.** 1) усі по 90°; 2) 30°, 30°,150°, 150; 3) 60°, 60°, 120°, 120°. **7.49.** 1) 28° і 152°; 2) 61° і 119°; 3) 120° і 60°. **7.50.** 1) 156° і 24°; 2) 21° і 159°; 3) 20° і 160°. **7.51.** *Вказівка*: проведіть на однакових відстанях (рівних ширині лінійки) від сторін кута паралельні їм прямі та знайдіть точку їх перетину. **7.52.** З північного сходу на південний захід (або навпаки); з північного заходу на південний

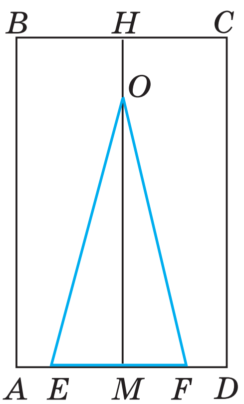
схід (або навпаки). **7.53.** Так. **7.54.** *Розв'язання*. Спочатку перегніть аркуш паперу по даній прямій AB так, щоб дана точка O була на видимій стороні аркуша. Не розгортаючи аркуш, перегніть його ще раз так, щоб лінія згину пройшла через точку O, а частини лінії першого згину співпали. Прямі від першого і другого перегинання — перпендикулярні. **7.55.** Розв'язання. Спочатку проведіть пряму, перпендикулярну до даної прямої (див. задачу 7.54). Потім проведіть перпендикуляр до побудованої прямої так, щоб він проходив через дану точку. Остання пряма буде паралельною даній, оскільки дві прямі паралельні, якщо вони перпендикулярні до третьої прямої. **7.56.** *Розв'язання*. Перегніть круг так, щоб два півкола збіглися. Потім перегніть півкруг так, щоб збіглися четвертини кола. Розгорніть аркуш. Точка перетину двох згинів буде центром кола. **7.57.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівних суміжних кутів; бісектриси прямого кута. **7.62.** *Розв'язання*. Відрахуйте 5 конвертів, тоді в пачці їх залишиться 45. **7.63.** *Розв'язання*. Намотайте дріт на лінійку так, щоб сусідні витки дроту були щільно притиснуті один до одного. Визначте, скориставшись лінійкою, ширину намотаних витків та поділіть отриманий результат на кількість витків. Дістанете товщину одного витка, тобто діаметр дроту. **7.64.** *Розв'язання.* 2) перегніть шматок тканини навпіл, потім одну з половинок перегніть ще раз навпіл. Четвертину, яка ближче до середини, знову перегніть навпіл. Остання лінія згину шукана, оскільки довжина отриманого куска дорівнює 4 см + + 1 см = 5 см. **7.65.** *Вказівка*: скористайтесь розв'язанням задачі 64. **7.66.** *Розв'язання*. Спочатку виміряйте невеликий стос аркушів (наприклад, висотою 1 см) і підрахуйте кількість аркушів у ньому. Потім виміряйте висоту даного стосу і знайдіть кількість аркушів у ньому. **7.67.** *Вказівка*: скористайтесь розв'язанням задачі 7.66. **7.68.** *Розв'язання*. Покладіть цеглину на край столу, як показано на малюнку 2, а потім пересуньте її паралельно краю столу на довжину ребра цеглини. Виміряйте лінійкою відстань між точками A і B (найбільш віддаленими її вершинами). Відстань AB дорівнює діагоналі цеглини. **7.69.** *Розв'язання.* Запам'ятавши час на стінному годиннику, сходити і узнати правильний час. Повернутись додому і визначити за стінним годинником час своєї відсутності та прибавити половину цього часу до того часу, який бачила Марійка на правильному годиннику. Цей час і потрібно встановити на годиннику Марійки.



Мал. 2

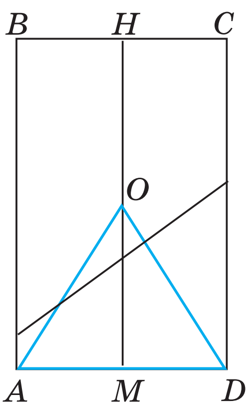
§ 2

7.71. 1) Ні, 2) ні, 3) так. **7.72.** *Розв'язання*. Сторона каркасу дорівнює 150 : 3 = 50 (см). Отже, каркас можна виготовити з планок довжиною 60см, вкоротивши кожну з них на 10см. **7.73.** (Г) 86°; (П) 41°. **7.74.** *Розв'язання*. Не вистачить. Маємо два рівних прямокутних трикутники. На обшивку кожного катета потрібно 120 : 4 = 30 (см). Тоді на обшивку двох гіпотенуз залишиться 180 – 120 = 60 (см), тобто на кожну гіпотенузу також по 30 см мережива. **7.75.** *Розв'язання*. Відкладе ширину дошки AB від краю A її довжини. Отриману точку O сполучить з точкою B. ΔABO прямокутний і рівнобедрений ($BA \perp AO$ і $AB = AO$), тому $\angle AOB = 45°$. Отже, відпилить дошку по відрізку OB. **7.76.** (Г). *Розв'язання*. ΔABC — рівнобедрений, тому $\angle ACB = \angle CAB = (180° - 120°) : 2 = 30°$. У ΔBDC катет BD лежить проти кута 30°, тому дорівнює половині гіпотенузи. $BD = 6 : 2 = 3$ (см); (П). 1) 8 м, 2) 3 м, 3) 4 м. **7.77.** 25°. **7.78.** 3,5 м. *Вказівка*: знайдіть гострий кут прямокутного трикутника. **7.79.** 1) 10 м; 2) 5 м; 3) 3 м. **7.80.** (Г). 5 см. **7.81.** *Розв'язання*. Провішуємо пряму AD, перпендикулярну до AB. На прямій AD знаходимо таку точку C, щоб $\angle ACB = 45°$. Шукана відстань AB дорівнює AC, оскільки прямокутний трикутник ABC рівнобедрений — $\angle ACB = \angle ABC$. **7.82.** *Вказівка*: відрізок між пунктами візьміть за гіпотенузу. **7.83.** (Г). *Вказівка*: обґрунтуйте, що ΔABD — рівнобедрений, тоді $AB = BD = 10$ см. Скористайтесь тим, що катет CD лежить проти кута 30°; (П). Відстань AB. *Вказівка*: обґрунтуйте, що ΔABD — рівнобедрений, тому $AB = BD$. У DBCD катет DC лежить проти кута 30°, тому дорівнює половині гіпотенузи. Отже, $CD = BD : 2 = AB : 2$. **7.84.** (П). *Розв'язання*. Нехай на місцевості позначені точки A, B і C. Виберемо на сторонах AB і BC $\angle ABC$ точки M і H так, щоб $BM = BH$. Знайдемо точку O — середину відрізка MH. Тоді промінь AO буде бісектрисою $\angle ABC$, оскільки в рівнобедреному $\angle MBH$ медіана BO є також бісектрисою. **7.86.** *Розв'язання*. Нехай тканина має форму трикутника ABC. Щоб встановити рівність $AB = BC$ достатньо перегнути трикутник по бісектрисі кута ABC шляхом суміщення променя BA з променем BC і визначити, чи суміщаються при цьому точки A і C. Аналогічно перевіряємо рівності $BC = AC$ і $AB = AC$. **7.87.** 1) Щоб побудувати бісектрису кута A трикутника ABC перегніть аркуш паперу так, щоб сторона AB співпала зі стороною AC; 2) висоту проводимо так, як в задачі 7.54, де опускаємо перпендикуляр з даної точки до прямої; 3) щоб провести медіану



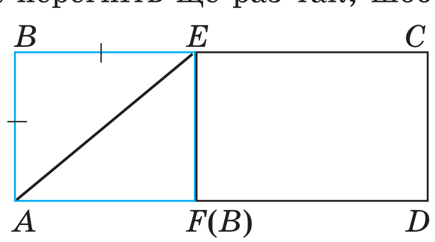
Мал. 3

до сторони BC даного трикутника спочатку знаходимо середину цієї сторони (див. задачу 7.20), а потім перегинанням сполучимо її з вершиною A трикутника ABC. **7.88.** *Розв'язання* (мал.3). Спочатку перегніть прямокутник $ABCD$ так, щоб вершина D співпала з вершиною A, а вершина C — з вершиною B. Дістанете серединний перпендикуляр MH до сторін AD і BC. Не розгортаючи аркуш, перегніть його ще раз так, щоб лінія згину перетинала відрізки AM і MH. Розгорніть аркуш. Остання лінія згину, пройде по прямокутнику $AMHB$ і прямокутнику ΔMHC. Тоді відрізки OE, OF і EF утворюють рівнобедрений ΔEOF ($OE = OF$). **7.89.** *Розв'язання* (мал. 4). Спочатку перегніть прямокутник $ABCD$ так, щоб вершина D співпала з вершиною A, а



Мал. 4

вершина C – з вершиною B. Дістанете серединний перпендикуляр MH до сторін AD і BC. Потім перегніть прямокутник так, щоб лінія згину проходила через вершину A, а точка D співпала з якою-небудь точкою O відрізка MH. Тоді ΔAOD буде рівносторонній, оскільки за побудовою $AD = AO = OD$. **7.90.** *Розв'язання* (мал. 5). Перегніть вирізаний прямокутник $ABCD$ так, щоб сторона його AB наклалася на сторону AD, точка B зайняла на стороні AD положення $F(B)$, а лінія згину перетнула сторону BC в точці E. Потім прямокутник перегніть ще раз так, шоб лінія згину пройшла через точки E і $F(B)$. Обгрунтуйте самостійно, що в отриманому чотирикутнику $ABEF$ всі сторони рівні, а кути прямі, тобто цей чотирикутник — квадрат. **7.92.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника. **7.93.** *Вказівка*: скористайтеся третьою ознакою рівності трикутників. **7.94.** (**II**). *Розв'язання*. Вибираємо таку точку C, від якої можна пройти до A і до B. Потім на прямих AC і BC відкладаємо відрізки $CE = AC$ і $CD = BC$. Тоді $\angle ABC = \angle DEC$ за першою ознакою рівності трикутників і $ДЕ = AB$. **7.95.** *За мал. 7.33*. Виконуємо побудови: $AC \perp BD$, $CD = BC$. Тоді



Мал. 5

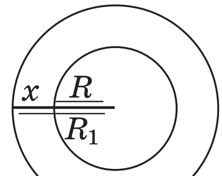
шукана відстань AB дорівнюватиме AD. Поясніть, чому це так. *За мал. 7.34*. Відкладаємо $\angle BCM = \angle BCA$ і $CM = CA$. Тоді $\angle ABC = \angle MBC$ за першою ознакою і $AB = BM$. **7.96.** (**П**). *Розв'язання*. На березі річки позначаємо точки B і C так, щоб виконувались рівності $\angle 1 = \angle 2$ і $\angle 3 = \angle 4$. Тоді $\angle ABX = \angle ABC$ за другою ознакою і $AX = AC$). **7.98.** *Вказівка*. Потрібно на місцевості утворити два рівних прямокутних трикутники AMO і BCO ($\angle A = \angle B = 90^\circ$, $AO = OB$).

§ 3

7.101. (**Г**). *Розв'язання*. Площа кожного з даних кругів $S = \pi \frac{D^2}{4} = 16\pi$ (см^2). Площа шуканого круга $S_x = 2 \times 16$р $= 32\pi$ (см^2). Тоді $S_x = \pi \frac{D^2}{4} = 32\pi$, звідки $D = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ (см). (*П*). *Розв'язання*. Площа перерізу кожної з даних труб $S = \pi \frac{D^2}{4}$ (кв.од), де D – їх діаметр. Площа перерізу шуканої труби $S_x = \pi \frac{x^2}{4} =$ р $\frac{2D^2}{4}$ (кв. од). Тоді $x^2 = 2D^2$, звідки $x = D\sqrt{2}$ (кв.од). **7.102.** (*П*). *Вказівка*. Скористайтесь властивістю дотичної: дотична до кола перпендикулярна до радіуса цього кола, проведеного в точку дотику. **7.103.** (**Г**). 12р см.; (**П**). 14р см. **7.104.** (**Г**). 25р см^2; (**П**). 64р см^2. **7.105.** (**Г**). 17,4 см; (**П**). 31,4 дм. **7.106.** (**Г**). На 4 см; (**П**). 2 мм. **7.108.** *Вказівка*: позначте на колі будь-які дві точки і за допомогою циркуля побудуйте точку, віддалену від кожної з цих двох точок на відстань 5 см. **7.109.** *Вказівка*: пряма, що перпендикулярна до хорди кола і ділить її навпіл, проходить через центр кола. **7.112.** Так. Круг матиме найбільшу площу (≈7,1дм^2), якщо вписаний в квадрат. **7.113.** 12,6 км. **7.114.** 1) 157 м; 2) 1570 м або 1,6 км. **7.115.** 100р м^2 ≈ 314 м^2. **7.116.** Шість. **7.117.** *Розв'язання*. Три рази. Нехай довжина кола більшого круга C, меншого — C_1, а їх радіуси дорівнюють x і $\frac{x}{3}$ Тоді $\frac{C}{C_1} = \frac{2x\pi}{\frac{2x\pi}{3}} = 3$. **7.118.** ≈ 0,2 м. **7.119.** 7894. **7.120.** Довжина кола циркової арени $C = D\pi = 13\pi \approx 40{,}82$(м). Тоді відстань, яку пробігло мавпеня дорівнює $40{,}82 \times 3 \approx 122{,}5$ (м). **7.121.** 1696 м. **7.122.** *Розв'язання*. ΔABO — прямокутний, оскільки дотична AB до кола, перпендикулярна до радіуса OB цього кола, проведеного в точку дотику. У прямокутному трикутнику сума гострих кутів дорівнює 90°, тому $\angle AOB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Гіпотенуза трикутника дорівнює $AO = OC + AC = 6370 +$

$+ 3 = 6373$. Катет AB лежить проти кута $30°$, тоді $AB = 6373 : 2 = 3186{,}5$ (км). **7.123.** Довжина одного витка дроту $C = D\pi = 5\pi$ (см), а довжина всього дроту $20 \times 5\pi \approx 3{,}14$ (м). **7.124.** Довжина паса L дорівнюватиме сумі довжин відстаней між центрами шківів $(2 \times OM)$ доданій до довжини двох рівних півкіл радіуса 0,5 м, або до довжини кола цього радіуса. Дістанемо: $L = 2 \times OM + 2\pi \times 0{,}5 = 6 + 3{,}14 \approx 9$ (м). **7.125.** Шукана площа $S_x = S - (S_1 + S_2)$, де S площа всієї фігури, обмеженої зовнішнім контуром, а $S_1 + S_2$ сума площ двох рівних кругів з центрами O і M. Площа S складається із суми площ прямокутника зі сторонами рівними $2OB$ і OM та двох рівних півкругів радіуса OB, або круга цього радіуса. Тоді $S = 2OB \times OM + \pi OB^2 = 40 + 3{,}14 \times 4^2 = 65{,}12$ (см). Сума площ $S_1 + S_2 = 2\pi \times OA^2 = 2 \times 3{,}14 \times 2^2 \approx 25{,}12$ (см). Тоді $S - (S_1 + S_2) = 65{,}12 - 25{,}12 \approx 40$ (см^2). **7.26.** 1507,2 см або 15 м. **7.127.** $C = \pi D = 3{,}14 \times 30 \approx 94{,}2$ см; $94{,}2 \times 20 \approx 1884$ см $\approx 18{,}8$ м. **7.128.** *Розв'язання*. Довжина кола, описаного кінцем стрілки, дорівнює $C = 2\pi \times 10$ см $\approx 62{,}8$ см. За дві години стрілка опише $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$ частину кола. Дістанемо, $\frac{1}{6} \times 62{,}8$ см $\approx 10{,}5$ см. **7.129.** *Розв'язання*. Радіус клумби $R = \frac{C}{2x} = \frac{60}{2 \times 3{,}14} \approx 9{,}6$ м. Площа клумби $S = \pi R^2 \approx 289{,}5$ м^2. Тоді $289{,}5 : 0{,}8 \approx 362$ кущі гортензій. **7.130.** *Розв'язання*. Площа доріжки S дорівнює різниці площ двох кругів:площі круга S_1 радіуса $R = 6$ м, обмеженого зовнішнім краєм доріжки, і площі клумби S_2 радіуса $r = 5$ м. Дістанемо $S = S_1 - S_2 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R - r)(R + r) = \pi \times 1 \times 11 \approx 34{,}5$ м^2.Тоді $34{,}5 \times 0{,}6 \approx 20{,}7$ дм^3. **7.131.** *Розв'язання*. $S = \pi R^2 = 3{,}14 \times 60^2 \approx 11304$ м^2; $11304 \times 30 \approx 339120$ л. **7.132.** *Розв'язання*. Знайдемо радіуси R і r зовнішнього і внутрішнього кола фундамента: $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{60}{2\pi} = \frac{30}{\pi}$; $r = \frac{40}{2\pi} = \frac{20}{\pi}$. Тоді $S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi (R - r)(R + r) = \pi \frac{10}{\pi} \frac{50}{\pi} = \frac{500}{\pi} \approx 159{,}2$ м^2.

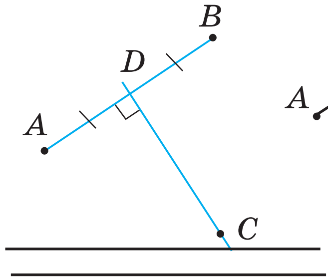
7.133. *Розв'язання*. Довжина кола $C = 5\frac{36}{60} = 3$ км; $C = 2\pi R$, звідки $R = \frac{C}{2\pi} = \frac{3}{2 \times 3{,}14} \approx 0{,}48$ км. Тоді $S = \pi R^2 = 3{,}14 \times 480^2 \approx 723456$ м^2. **7.134.** *Розв'язання*. $S = \pi R^2 = 3{,}14 \times 10^2 \approx 314$ м^2; $314 \times 0{,}03 \approx 9{,}42$ кг; $9{,}42 \times 170 \approx 1601$ грн. **7.135.** *Розв'язання*. Радіус кола до збільшення мотузки $R = \frac{C}{2\pi}$ та після збільшення $R_1 = \frac{C+1}{2\pi}$ (мал. 6). Тоді утворена відстань x між мотузкою і поверхнею землі дорівнюватиме $x = R_1 - R = \frac{C + 1 - C}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}$. Матимемо: $x \approx 0{,}16$ м або 16 см. Висновки: 1) можна просунути не лише апельсин; 2) величина x не залежить від радіуса кола. **7.136.** *Розв'язання*. Довжина кола колеса першого автомобіля $C_1 = 2\pi \times 20 = 125{,}6$ см. За секунду автомобіль долає відстань $125{,}6 \times 20 \approx 2512$ см. Довжина кола колеса другого автомобіля $C_2 = 2\pi \times 30 \approx 188{,}4$ см. За секунду він долає відстань $188{,}4 \times 15 \approx 2826$ см. Отже, швидкість другого автомобіля більша за швидкість першого. Тому він першим подолає відстань 100 км.



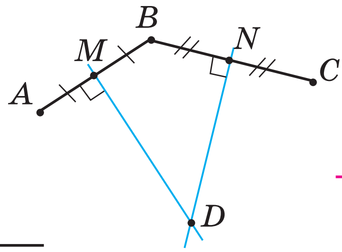
Мал. 6

7.137. *Розв'язання*. Радіус екватора наближено дорівнює 6370 км. Радіус кола по якому летить літак $R = 6370 + 10 \approx 6380$ км, а довжина кола $C = 2 \times 6380\pi \approx 40066{,}4$ км. Тоді час руху літака

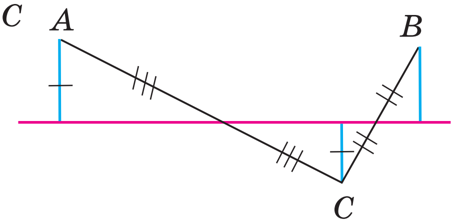
$$t = \frac{S}{V} = \frac{40066{,}4}{1000} \approx 40 \text{ год.}$$



Мал. 7



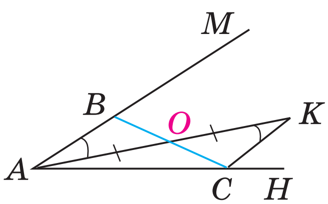
Мал. 8



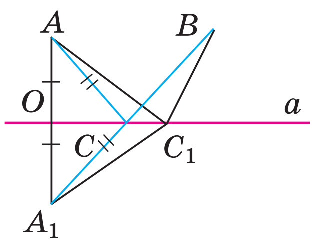
Мал. 9

7.139. *Розв'язання*. Проведіть серединний перпендикуляр до відрізка AB. Для цього знайдіть середину D відстані між населеними пунктами A і B (мал. 7), проведіть пряму $DC \perp AB$ і позначте на цій прямій точку C біля шосе — місце автобусної зупинки. Справді, сполучивши точку C з точками A і B дістанемо $\Delta ADC = \Delta BDC$ за двома катетами ($AC = BC$ за побудовою, DC — спільний катет). З рівності трикутників випливає: $AC = BC$. **7.140.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю серединного перпендикуляра до відрізка. **7.141** *Розв'язання*. Нехай A, B, C – точки розміщення дачних будинків, які не лежать на одній прямі (мал. 8). Проведіть серединні перпендикуляри до відрізків AB і BC. Точка O їх перетину шукана, оскільки рівновіддалена від точок A, B, і C за властивістю серединного перпендикуляра до відрізка. **7.142.** *Розв'язання*. Трикутники CDM і BDH рівні за гіпотенузою і гострим кутом. Тоді $CM = BH$ як відповідні сторони рівних трикутників **7.143.** *Розв'язання*.

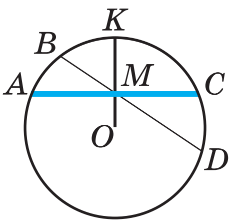
Нехай A, B, C – дані населені пункти (мал. 9). Якщо всі три населені пункти лежать по одну сторону від магістралі і розміщені на одній прямій, то магістраль проходитиме паралельно цій прямій. Розглянемо випадок, коли дві з даних точок, наприклад A і B, лежать по одну сторону магістралі, а третя — по другу. Так як магістраль рівновіддалена від точок A і C, то вона проходить через середину відрізка AC (див. розв'язання задачі 7.142), а так як вона рівновіддалена від точок B і C, то проходить і через середину відрізка BC. Тобто магістраль повинна проходити через середини відрізків AC і BC. **7.144.** *Розв'язання.* Нехай автомагістраль перетинає канал під кутом MAH, населений пункт O розміщений всередині цього кута (мал. 10). Потрібно через цей пункт прокласти пряму дорогу, так щоб відстань по ній до магістралі і до каналу були рівними. Проведіть пряму AO і відкладіть на ній від точки O відрізок $OK = AO$. Проведіть через точку K пряму KC паралельну AM. Проведіть через точки C і O пряму до перетину з стороною кута в точці B. Шукана пряма дорога має проходити через точки B і C. Справді $\Delta ABO = \Delta KCO$ за стороною і прилеглими кутами ($AO = OK$ за побудовою, $\angle AOB = \angle KOC$ як вертикальні, $\angle BAO = \angle COK$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AB і CK та січній AK. Тоді $CO = BO$ як відповідні сторони рівних трикутників.



Мал. 10

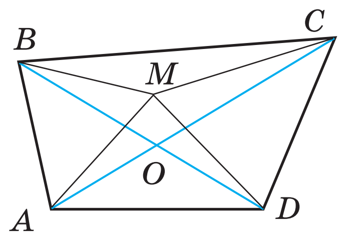


Мал. 11



Мал. 12

7.145. *Вказівка.* Проведіть бісектрису кута, який утворюють автобани. Оскільки всі точки цієї бісектриси рівновіддалені від автобанів, то міст через річку потрібно побудувати в точці перетину бісектриси з річкою. **7.146.** *Розв'язання.* Нехай точки A і B — населені пункти, пряма a — берег каналу (мал. 11). Опустіть з однієї з двох точок, наприклад A, перпендикуляр AO на пряму a. Відкладіть на продовжені відрізка AO відрізок $OA_1 = AO$ і знайдіть точку C перетину прямих A_1B і a. Точка C – шукане місце для побудови водонапірної башти. Справді, для будь-якої іншої точки C_1 на тому ж березі каналу сумарна довжина труб до точок A і B дорівнюватиме сумарній довжині труб до точок A і A_1 ($A_1C_1 = AC_1$ як відповідні сторони рівних прямокутних трикутників AOC_1 і A_1OC_1 за двома катетами. Тоді $AC_1 + BC_1 = A_1C_1 + BC_1 > A_1B$. **7.147.** *Вказівка*: Позначне острів точкою M (мал.12). Проведіть через точку M радіус OK і хорду AC, перпендикулярну до радіуса. Найкоротший маршрут катера співпадає з хордою AC. Спробуйте показати, що будь-який інший маршрут, наприклад, BD довший ніж AC. Якщо ж острів знаходиться у центрі кола, то всі маршрути матимуть однакову довжину. **7.148.** *Вказівка*: найменшу довжину буде мати маршрут, який не проходить за найбільшою стороною ΔABC. **7.149.** Спортивний комплекс потрібно побудувати в точці O перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$ з вершинами в даних населених пунктах (мал. 13). *Вказівка*. Покажіть, що сума відстаней від усіх чотирьох пунктів A, B, C, D до будь-якої точки M більша, ніж до точки O. **7.150.** За допомогою мотузки треба відкласти на сторонах кута від його вершини рівні відрізки; закріпити у кінцях відрізків кінці мотузки і натягнути її, тримаючи за середину. Тоді одержана точка лежатиме на бісектрисі кута. **7.151.** Треба позначити кілочками три точки на даній прямій так, щоб одна з точок була серединою відрізка з кінцями у двох інших точках; закріпити кінці мотузки у кінцях цього відрізка і натягнути мотузку, тримаючи її за середину; отримана точка і середина відрізка визначатимуть перпендикулярну пряму. **7.152.** Нехай a і b сторони кута. З довільної точки A сторони а кута проведемо перпендикуляр AB до сторони b, а з точки B – перпендикуляр BC до сторони a. Шукана бісектриса буде перпендикулярною до бісектриси BM ΔABC і проходитиме через середину BM. **7.153.** *Вказівка*: доведіть, що центр кола лежить на бісектрисі кута між дотичними.

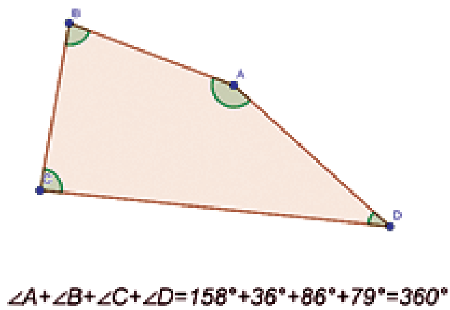


Мал. 13

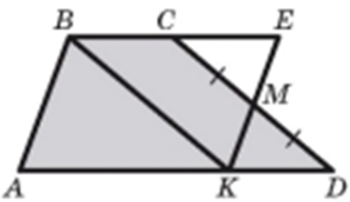
8 клас

§ 1

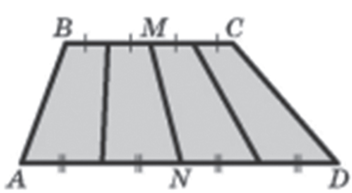
8.1. (**Г**). Ні, бо найдовший із чотирьох відрізків більший від суми трьох інших. (**П**). Не може, бо найбільша сторона дорівнює сумі трьох інших. **8.2.** (**Г**). Ні, бо тоді сума кутів була більшою 360°. (**П**). Ні, бо тоді сума кутів була б меншою 360° **8.3.** (**Г**). 1050 см². **8.4.** 19 аркушів формату А1. **8.5.** Треба вирити басейн так, щоб дуби опинилися на серединах сторін нового квадрата. **8.6.** 6,4 м/с. **8.7.** Потрібно скористатися властивостями паралелограма. **8.8.** 10 м. **8.9.** Необхідно купити телевізор роздільною здатністю 1080р з діагоналлю 55 дюймів. **8.10.** Результат виконання завдання (мал.1). **8.11.** (**Г**) 12 см. (**П**). За властивістю середньої лінії трикутника.**8.12.** (**Г**) 15 см. (**П**). 3,5 м. **8.13.** 5 км. **8.14.** Площа трапеції $ABCD$ дорівнює площі паралелограма $ABEK$, пряма BK, як один з варіантів поділу (мал.2). **8.15.** поділити двічі основи трапеції навпіл (мал. 3). **8.16.** 21 хв. **8.17.** 212 дерев вартістю 95400 грн.



Мал. 1

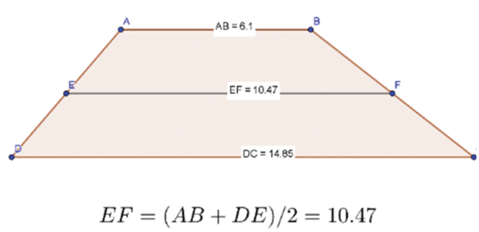


Мал. 2



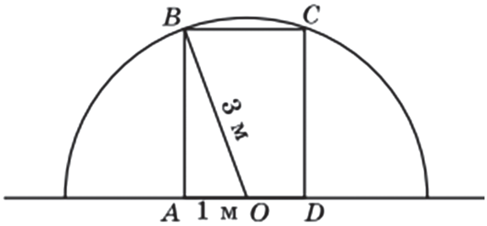
Мал. 3

8.18. 2,55 м. **8.19.** 3 м. **8.20.** 25 м. **8.21.** 15 км. **8.22.** Результат виконання завдання (мал.4). **8.24.** (**П**) Криниця має бути розміщена в центрі кола, описаного навколо прямокутника/ трапеції. **8.25.** Найменший діаметр колоди — діагональ прямокутника, її довжина дорівнює 13см.



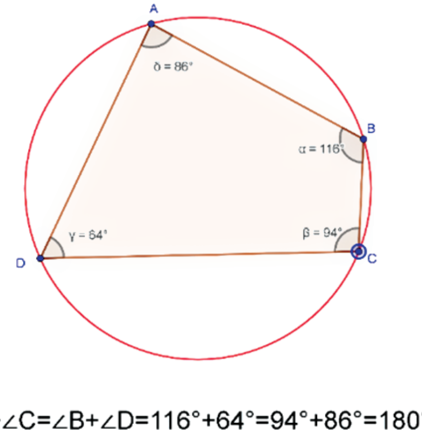
Мал. 4

8.26. Найменший діаметр циліндричної посудини дорівнює діагоналі прямокутника зі сторонами 6см і 8 см, тобто дорівнює 10.



Мал. 5

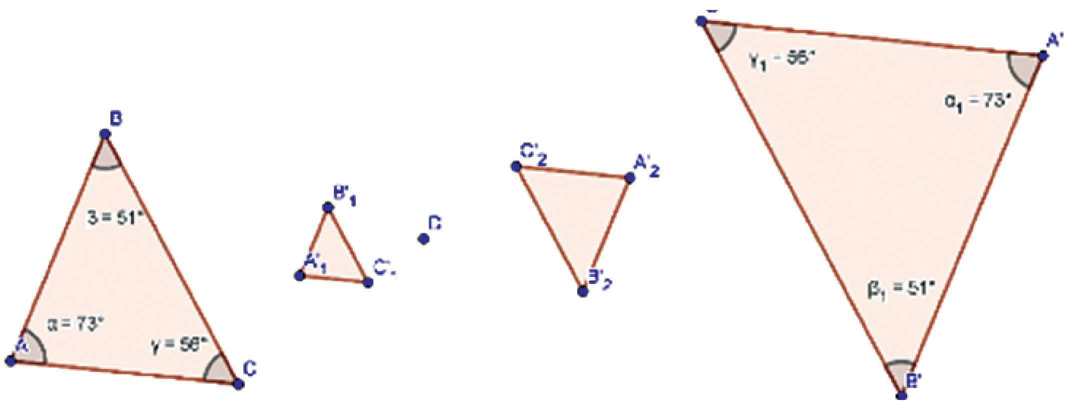
8.27. Найменша висота машини (мал. 5) дорівнює катету AB прямокутного трикутника OAB, де O — центр кола. Вона дорівнює $2\sqrt{2}$ м. наближене значення дорівнює 2,8 м. **8.28.** 3,6, отже Г). **8.29.** Результат виконання завдання (мал.6)



Мал. 6

§ 2

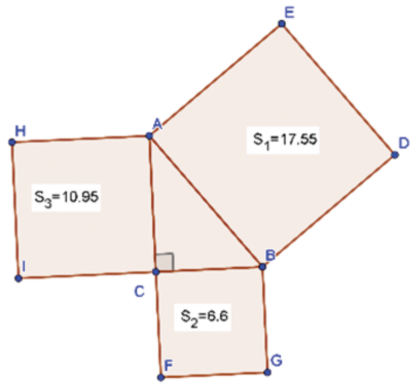
8.30. (**Г**) 3 см, 9 см. (**П**) 1) 1:250000; 2) 10 км; 3) 10 км, 12,5 км, 15 км **8.32.** 144 м. **8.33.** 30,6 м. **8.34.** 6 см. **8.35.** 4 м. **8.36.** 3 м. **8.37.** 18 м. **8.38.** 9,6 м. **8.39.** 45 м. **8.40.** 10 м. **8.41.** 300 м. **8.42.** 30 м. **8.43.** 170 м. **8.44.** 15 м. **8.45.** 100 м. **17.**2 м. **8.46.** 0,5 м. **8.47.** 1,5 м. **8.48.** 7. м. **8.49.** $2\sqrt{29} \approx 10{,}77$м. **8.50.** Проводимо BR || AC. На прямій BR знайдемо точку D таку що, $BD : DR = AC : CK$. Напрямок CD шуканий. **8.51.** 1) 50 м; 2) 15 м, 25 м. **8.52.** Результат виконання завдання мал. 7.



Мал. 7

§ 3

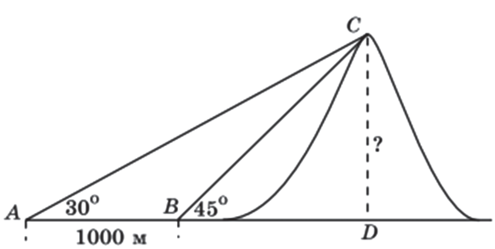
8.53. (**Г**) 7 см., (**П**) 1000 м. **8.54.** (**Г**) 9 см, (**П**) 12 м. **8.55.** На 400 с. **8.56.** 500 м. **8.57.** 50 км. **8.58.** 130 км. **8.59.** 100 м^2. **8.60.** 4 м. **8.61.** До 6 поверху. **8.62.** 3 м. **8.63.** 1,5 м. **8.64.** 20 ліктів. **8.65.** 6 м. **8.66.** 27 м. **8.67.** 2,8 м. **8.68.** 89 см. **8.69.** 13 см. **8.70.** 0,35 м. **8.72.** Результат виконання завдання (мал. 8). **8.73.** (**Г**) 4, 69 см., (**П**) $BN = 1{,}8 + 30 \cdot \operatorname{tg} 31° \approx 1{,}8 + 30 \cdot 0{,}601 \approx 19{,}83$ (м). **8.74.** висота сходинок буде дорівнювати 20 · tg58° = 20 ·1,6 =32.



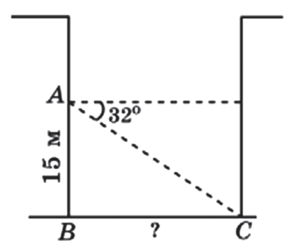
$S_1 = 6.6 + 10.95 = 17.55$

Мал. 8

8.75. 4,5 м. **8.76.** 12 м. **8.77.** 15,6 м. **8.78.** 24 м. **8.79.** 410 м. **8.80.** 570 м. **8.81.** 48,5 м. **8.82.** 12 м. **8.83.** 87,72 м. **8.84.** 3,7 м. **8.85.** 11°. **8.86.** тангенс шуканого кута дорівнює 0,75, за таблицею тригонометричних функцій знаходимо, що кут дорівнює 37°. **8.87.** 37°. **8.88.** 37°. **8.89.** Синус шуканого кута дорівнює 0,09. За таблицею тригонометричних функцій знаходимо, що кут дорівнює 5°. **8.90.** тангенс шуканого кута 0,6, використовуючи таблицю тригонометричних функцій знаходимо, що кут дорівнює 31°. **8.91.** 30°. **8.92.** 10°. **8.93.** 37°. **8.94.** 22°. **8.95.** Тангенс шуканого кута 0,625, використовуючи таблицю тригонометричних функцій знаходимо, що кут дорівнює 32°. **8.96.** Припустимо, що висота гори $CD = x$ (мал.9), тоді має місце рівність $(1000 + x)\, tg\, 30°$. Враховуючи, що $tg\, 30° = 0{,}58$, знаходимо, що x приблизно дорівнює 1351 м. **8.97.** Шукана відстань дорівнює $8000 \cdot tg 84° = 8000 \cdot 9{,}51 = 76080$ (м). **8.98.** 1700 м. **8.99.** (мал.10) 24 м. **8.100.** 1) $9\sqrt{3}$ м; 2) $6\sqrt{5}$ м. **8.101.** 5,6, отже Г. **8.102.** 19,5, отже Д. **8.103.** 4,5, отже В. **8.104.** 0,63 отже Г. **8.105.** (див мал. 11)



Мал. 9



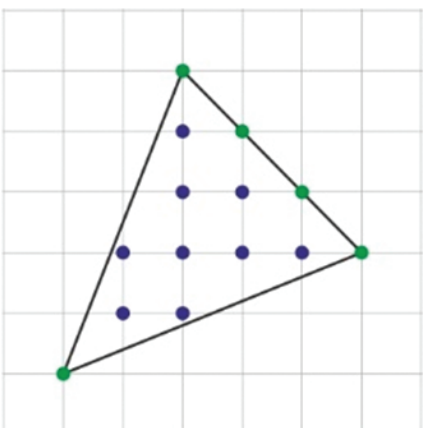
Мал. 10

Мал. 11

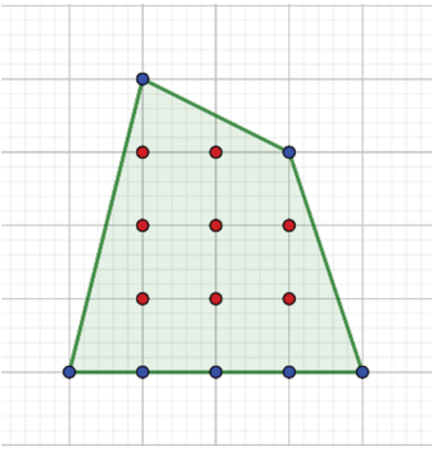
DF=tg ¹(24.9°)*26= 56

§ 4

8.106. (**Г**) 8 см^2; (**П**) 250 м^2. **8.107.** (**Г**) 10,5 кв.одн (див мал. 12); (**П**) 420000 м^2 (мал. 13). **8.108.** площа квадрата на 900 м^2 більша. **8.109.** 25 м^2. **8.110.** 192 фт^2. **8.111.** 70 м. **8.112.** 642 м^2. **8.113.** 16216 фт^2. **8.114.** 1875 м^2. **8.115.** 2000 дощечок. **8.116.** 360 плиток. **8.117.** 781 м^2. **8.118.** 12 дм^2. **8.119.** 15000 м^2. **8.121.** недостатньо,

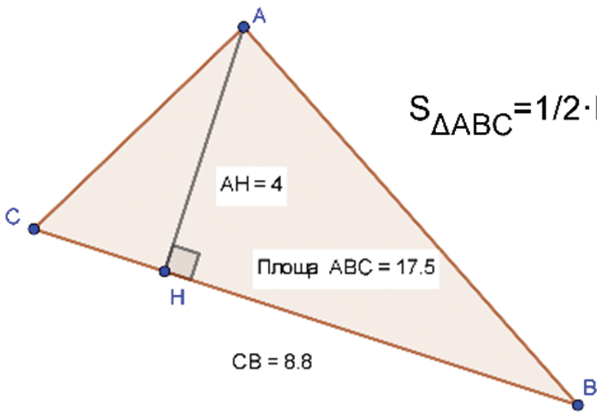


Мал. 12



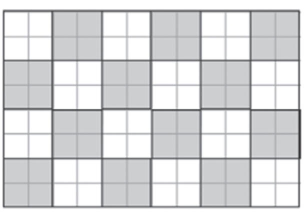
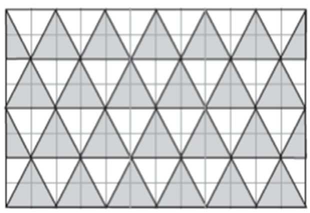
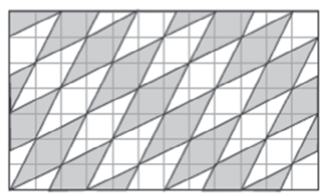
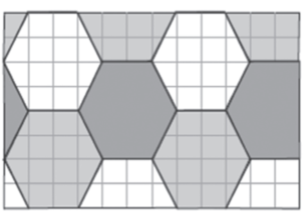
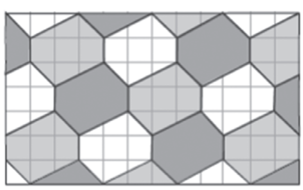
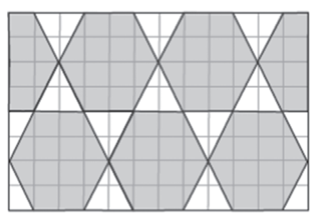
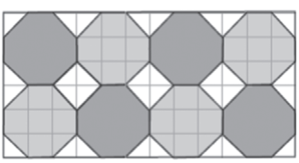
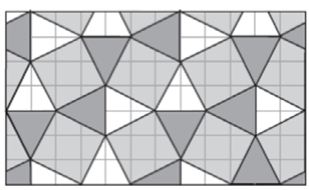
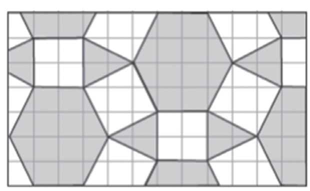
Мал. 13

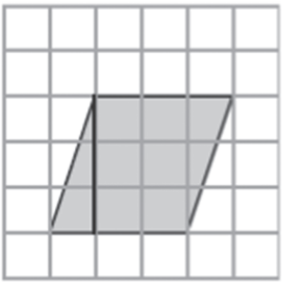
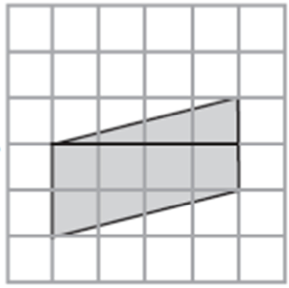
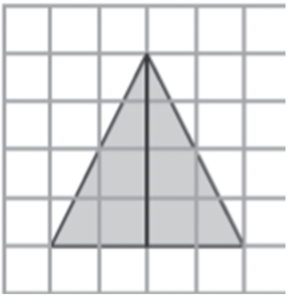
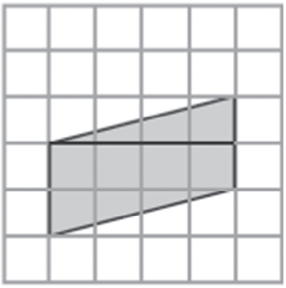
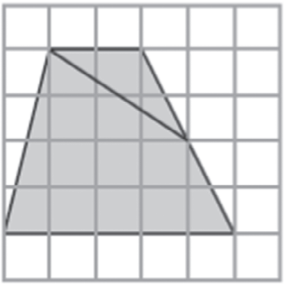
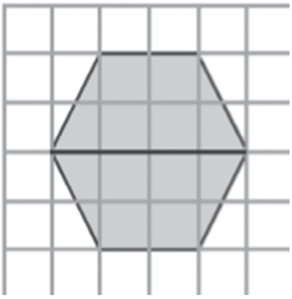
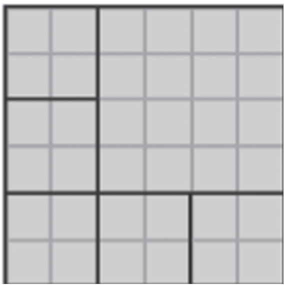
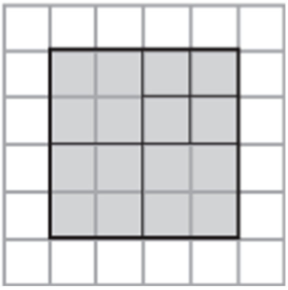
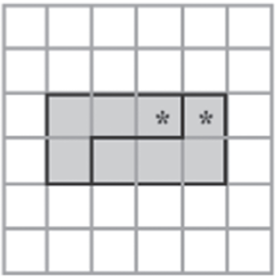
потрібно 5,2 т. **8.122.** *Вказівка*: Оцінимо площу Антарктиди площею круга, накладеного на континент. Вимірявши лінійкою діаметр накресленого круга і довжину 1000 км на масштабній лінійці, знайдемо їх відношення та визначимо реальний розмір круга. Він складає 4000 км. Площа круга дорівнює приблизно 12,6 млн км^2. **8.123.** 25. **8.124.** 25. **8.125.** 2. **8.126.** 38 см^2. **8.127.** 750 дощечок. **8.128.** 92 см^2. **8.129.** 2,25, отже Д. **8.130.** Мал. 14.



$S_{\Delta ABC}=1/2\cdot BC\cdot AH=1/2\cdot 8.8\cdot 4=17.5$

Мал. 14

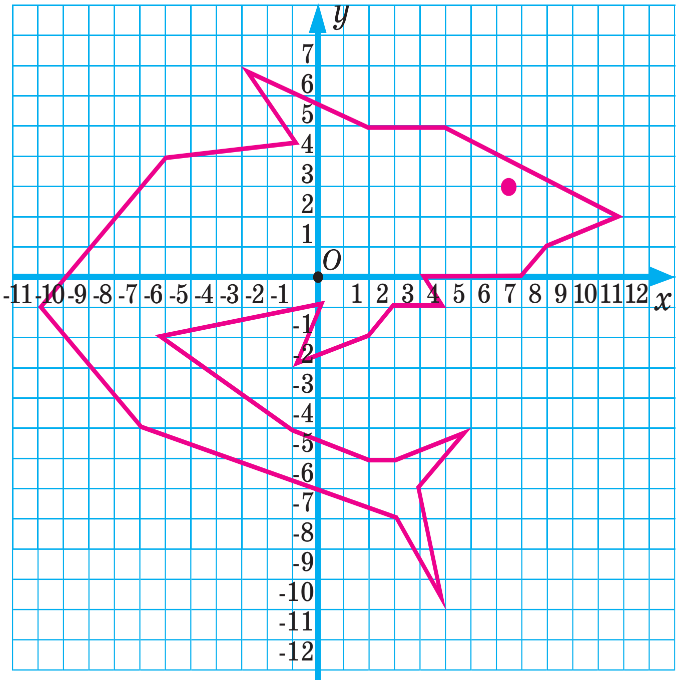
8.131. два кольори	**8.132** два кольори	**8.133.** два кольори
		
8.134. три кольори	**8.135.** три кольори	**8.136.** два кольри
		
8.137. три кольори	**8.138.** три кольори	**8.139.** два кольори
		

8.140.	8.141.	8.142.
		
8.143.	**8.144.**	**8.145.**
		
8.146.	**8.147.**	**8.148.**
		

9 клас

§ 1

9.1. Номер ряду і номер крісла. **9.2.** Якби в залі був лише один ряд. **9.6.** 1) Мала ведмедиця; 2) Велика ведмедиця. **9.8.** 1) $a\sqrt{2}$ — діагональ квадрата зі стороною 1 клітинка, $a\sqrt{5}$ — діагональ прямокутника зі сторонами 1 та 2 клітинки; 2) $a\sqrt{2}$ — діагональ квадрата зі стороною 2 клітинки, $a\sqrt{5}$ — діагональ прямокутника зі сторонами 2 та 4 клітинки. **9.9.** 1) *Вказівка*: скористайтеся властивістю висоти до гіпотенузи рівнобедреного прямокутного трикутника. **9.15.** На $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ м. **9.17.** 150°. **9.19.** 120°. **9.20.** ≈ 4,8 км. **9.21.** α ≈ 18°. **9.22.** Якщо уявити, що дані об'єкти містяться у вершинах трикутника, то ліхтар потрібно розмістити в центрі кола, описаного навколо цього трикутника. **9.23.** Пряма. **9.24.** 1) 20 км. **9.25.** 2) 2 км. **9.26.** 1) Лубни. **9.27.** Паралельна — з північного сходу на південний захід або з південного заходу на північний схід. **9.31.** $\overline{F}$ (–3; 12). **9.32.** 66. **9.35.** $100\sqrt{2}$. **9.36.** 120°. **9.43.**



Мал. до 9.43

§ 2

9.44. (Г). 22, 24, 121°; (П). ≈101,3м. 9.45. (Г). 48°, 100°, 32°; (П). $\alpha \approx 45°$. 9.47. ≈ 339 м. 9.49. ≈ 44°. 9.51. ≈ 29 м. 9.55. ≈ 924,3 м. 9.57. ≈ 162 м. 9.59. ≈ 1,9 кг. 9.60. $AD = 400$ м. 9.61. 450 см.

§ 3

9.65. *Вказівка*: покажіть, що сума кутів многокутників, які мають спільну вершину, дорівнює 360°. 9.66. *Вказівка*: скористайтеся вказівкою до попередньої задачі. 9.67. ≈ 4,4 см. 9.68. 4,2 м, 2,3 м, 2,1 м. 9.69. *Вказівка*: від кожної вершини квадрата відкладіть відрізки, що дорівнюють половині його діагоналі. Отримані вісім точок послідовно сполучить. 9.70. *Вказівка*: побудуйте коло й поділіть його на п'ять рівних частин. Сполучіть точки поділу, утворивши зірку. 9.71. ≈ 9,4 дм³. 9.73. 126. 9.74. 2) ≈ 80 см. 9.75. ≈ 126 м. 9.76. ≈ 5,7 м. 9.77. 0,75 мм. 9.78. 43,4%.

§ 4

9.83. 5 см² (мал. 9.52); $2(3\sqrt{3}-2)$ см² (мал. 9.53). 9.84. *Вказівка*: побудуйте точку B_1, симетричну точці B відносно прямої l. Точка перетину прямих AB_1 і l — шукана точка N. 9.85. *Вказівка*: нехай $AMNB$ — деякий шлях між селами A і B. Побудуйте точку A', у яку переходить точка A при паралельному перенесенні, що переводить точку M в N. Знайдіть точку K перетину прямої $A'B$ з берегом річки, який є ближчим до села B. Проведіть з точки K перпендикуляр до другого берега річки. 9.88. 1) 10 хвилин на 13-ту; 2) 20 хвилин на 13-ту. 9.89. *Вказівка*: знайдіть центр повороту, за якого прямокутник $ABCD$ займе положення прямокутника $A_1B_1C_1D_1$. Для цього знайдіть точку O перетину серединних перпендикулярів l_1 і l_2 до відрізків AA_1, BB_1. При повороті навколо точки O на кут 90° прямокутник $ABCD$ займе положення $A_1B_1C_1D_1$. 9.90. 4,5 м. 9.94. Ні. 9.95. 35 м. 9.97. 5,1 м. 9.98. 3 м.

Список використаних джерел

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владімірова Н. Г. Геометрія : підруч. для 8 кл. середніх загальноосвітніх закладів. Харків: ФОЛІО, 2016. 272 с.
2. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: УОВЦ «Оріон», 2024. 288 с.
3. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія : підруч. для 8 кл. загальноосвітніх навч. закл. Київ: УОВЦ «Оріон», 2021. 194 с.
4. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А. Геометрія : пі друч. для 9 класу закладів загальної середньої освіти. Київ: УОВЦ «Оріон», 2022. 224 с.
5. Калашник Н. І., Суботіна О. С. Шахтна геометрія. Збірник прикладних задач. Покровський район, 2017. 48 с.
6. Перельман Я. І. Жива математика: математичні розповіді та головоломки. Київ: Видавнича група КМ БУКС, 2019. 176 с.
7. Тарасенкова Н. А., Бурда М. І., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Компетентнісні контрольні роботи з геометрії для 9 класу: Навч. посіб.; за ред. Н. А. Тарасенкової. Черкаси: Вид. Чабаненко Ю., 2016. 24 с.
8. Тарасенкова Н. А., Бурда М. І., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Перевірка предметних компетентностей. Геометрія, 7 кл. Збірник завдань для оцінювання навчальних досягнень учнів: Навч. посіб.; за ред. Н. А. Тарасенкової. Київ: УОВЦ «Оріон», 2015. 24 с.
9. Тарасенкова Н. А., Бурда М. І., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О. Перевірка предметних компетентностей. Геометрія, 8 кл. Збірник завдань для оцінювання навчальних досягнень учнів: Навч. посіб.; за ред. Н. А. Тарасенкової. Київ: УОВЦ «Оріон», 2017. 24 с.
10. Тарасенкова Н. А., Бурда М. І., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О., Терех О. Я. Формування предметних компетентностей. Геометрія, 7 кл. Збірник К-задач: Навч. посіб.; за ред. Н. А. Тарасенкової. Київ: УОВЦ «Оріон», 2016. 48 с.
11. Тарасенкова Н. А., Бурда М. І., Богатирьова І. М., Коломієць О. М., Сердюк З. О., Терещенко В. А. Формування предметних компетентностей. Геометрія, 8 кл. Збірник К-задач : Навч. посіб.; за ред. Н. А. Тарасенкової. Київ: УОВЦ «Оріон», 2017. 48 с.
12. Шмаль С. Г. Довідник з військової топографії. Київ: РЗЦ ЗСУ, 2016. 119 с.

Навчальне видання

БУРДА Михайло Іванович
ВОЛОШЕНА Вікторія Вікторівна
ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна

ПРАКТИКУМ З ГЕОМЕТРІЇ ДЛЯ 7–9 КЛАСІВ

Збірник практико-орієнтованих задач

Головна редакторка *І. В. Красуцька*
Редактор *О. С. Ісак*
Головна художниця *І. П. Медведовська*
Художня редакторка *К. В. Берсенєва*
Технічний редактор *Е. А. Авраменко*
Коректорка *О. В. Должикова*
Верстка і комп'ютерна графіка *С. А. Поспішна*

В оформленні посібника використано деякі світлини з вільних джерел мережі «Інтернет» та матеріали фотобанку *Shatterstock*

Формат 70 × 100 $^1/_{16}$. Ум. друк. арк. 12,5.
Обл.-вид. арк. 11,3.

ТОВ «Український освітянський видавничий центр "Оріон"»
Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 4918 від 17.06.2015 р.
Адреса видавництва: 03061, м. Київ, вул. Миколи Шепелєва, 2

Оріон

ISBN: 978-966-991-341-8

9 789669 913418