3D моделі Geogebra до задач на

Любарський ліцей №1

Наталія Сидорчук

3D моделі Geogebra до задач на комбінації геометричних тіл

Наочний посібник

Любар,

2024

Затверджено методичною радою Любарського ліцею №1

(Протокол №2 від 24.11.2023 р)

Укладач: Сидорчук Н.В., учитель математики та інформатики Любарського ліцею №1, учитель вищої категорії, вчитель-методист.

3D моделі Geogebra до задач на комбінації геометричних тіл: наочний посібник/ Н.В. Сидорчук – Любар: 2023. - 32 с.

Рецензент: Будім М.М. – голова методичної комісії учителів фізико-математичних дисциплін, учитель-методист

У посібнику розглянуто можливості програми Geogebra для використання її при розв’язуванні задач на комбінації геометричних тіл; запропоновані задачі та 3D моделі до них (з посиланнями на онлайн-ресурси), що включені до авторської онлайн книги «Комбінацій геометричних тіл».

Посібник допоможе вчителю швидко підготувати наочний матеріал до складних тем стереометрії. Учням посібник буде корисним для розгляду складних комбінацій геометричних тіл, пошуку шляхів розв’язання задач, розвитку просторового мислення.

Усі 3D моделі доступні для перегляду за посиланням або QR-кодом на комп’ютері чи смартфоні.

Для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл та профільних класів природничого та фізико-математичного спрямування.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Вивчення стереометрії, яка включає в себе геометричні властивості та об'єми тривимірних фігур, є елементом математичної освіти в школі. В сучасному світі технології швидко розвиваються, і багато інновацій та винаходів пов'язані з тривимірним простором. Вивчення стереометрії сприяє розвитку навичок просторового мислення, що є корисним при розв’язанні різноманітних завдань з фізики, хімії, інженерії, архітектури, дизайну, тощо.

Традиційно однією з найважчих у шкільному курсі геометрії вважається тема «Комбінації геометричних тіл», що спирається на гарно розвинене просторове мислення, є певним узагальненням усіх знань, вмінь і навичок з планіметрії, стереометрії та тригонометрії, є кульмінацією вивчення геометрії в школі.

Просторове мислення формується головним чином на графічній наочній основі, в умовах оперування образами під час розв’язування геометричних задач. Сучасні програми динамічної математики мають потужний інструментарій для побудови тривимірних зображень базових просторових фігур, зміни їх ракурсу (ефект обертання), правильного зображення видимих і невидимих елементів («розумні» ребра), імітації освітлення, прозорості, створення перерізів, розгорток.

У даному посібнику описані 3D моделі авторської онлайн книги «Комбінації геометричних тіл», створені засобами середовища GeoGebra. До зображень подані посилання та QR-коди для зручного переходу до них в режим онлайн з комп’ютера, планшета, смартфона.

Посібник містить тексти задач, при розв’язуванні яких доцільним є використання поданих 3D моделей. Зображення допоможуть розглянути, дослідити, проаналізувати складну тривимірну конструкцію, побудувати малюнок до задачі, знайти невідомі величини. До посібника також включено довідковий матеріал з теми «Комбінації геометричних тіл».

Посібник призначений для вчителів математики та учнів 10-11 класів з профільним вивченням математики.

.

І. ВИВЧЕННЯ КОМБІНАЦІЙ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Основне завдання сучасної освіти полягає не тільки в тому, щоб дати учням глибокі знання, але і навчити їх творчо мислити, самостійно застосовувати набуті навички до розв’язування тих чи інших завдань.

Тема «Комбінації геометричних тіл» вивчається наприкінці шкільного курсу геометрії. Важливість розв’язання такого типу задач полягає в наступному:

1. *Розвиток просторового мислення:* Розв'язання задач на комбінації геометричних тіл вимагає від учнів уявляти та розуміти просторові відношення між різними об'єктами. Це сприяє розвитку просторового мислення, яке є важливою компетенцією для багатьох областей науки та інженерії.

2. *Застосування в реальному житті:* Знання комбінацій геометричних тіл має практичне застосування в реальному житті. Наприклад, в архітектурі, інженерії будівництва, дизайні та інших галузях, де важливо враховувати об'ємні властивості різних об'єктів.

3. *Розвиток математичних навичок*: Розв'язання задач на комбінації геометричних тіл вимагає використання різних математичних понять, таких як об'єми, площі поверхні, координати тощо. Це сприяє розвитку математичних навичок учнів та розширює їх розуміння геометричних концепцій.

4. *Стимулювання інтересу*: Задачі на комбінації геометричних тіл можуть бути цікавими та захоплюючими для учнів. Вони надають можливість застосовувати знання в реальних ситуаціях, що може підвищити інтерес до вивчення математики.

5. *Сприяння критичному мисленню*: Розв'язання задач на комбінації геометричних тіл вимагає логічного мислення та аналітичних навичок. Учні вчаться розглядати проблему з різних боків та розв'язувати її крок за кроком, що сприяє розвитку їх критичного мислення.

Отже, розв'язання задач на комбінації геометричних тіл важливе не тільки для вивчення самої геометрії, але і для розвитку різних когнітивних та практичних навичок учнів.

Для того, щоб успішно розв’язувати задачі цієї теми, необхідно мати розвинене просторове мисленням; володіти знаннями основних фактів, методів, формул шкільної геометрії; мати уявлення про методи зображення геометричних тіл в паралельній проекції, досвід побудови таких зображень; вміти лаконічно, але в той же час правильно і послідовно, обґрунтовувати хід запропонованого розв’язання.

Графічна візуалізація інформації, що міститься в умові геометричної задачі, часто відіграє визначальну роль в процесі пошуку її розв’язання. Тому для задач на комбінації тіл зазвичай не потрібно мати в наявності повного проекційного креслення, в них достатньо «побачити», що для отримання відповіді на питання задачі можна обійтися зображенням певного перерізу даної комбінації або її проекції на деяку площину. При розв’язуванні такого типу задач важливим є набуття досвіду впізнавання подібних задач, «бачення» потрібних перерізів і проекцій.

Можливі типи комбінацій геометричних тіл:

1. Комбінації многогранників.

2. Комбінації многогранників та тіл обертання.

3. Комбінації тіл обертання.

У Додатку 1 подано теоретичний матеріал, який містить зображення комбінацій геометричних тіл, зображення перерізів комбінацій для розв’язання задач та необхідні формули.

II. 3D МОДЕЛІ GEOGEBRA ДО ЗАДАЧ НА КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

1. Віртуальні 3D моделі при розв’язуванні стереометричних задач

Розв’язування задачі в будь-якій галузі починається з її аналізу: виділення умови (що відомо) та запитання (що знайти, довести, дослідити). В стереометричних задачах складність полягає в тому, що вже перший етап викликає труднощі, так як вимагає абстрактного просторового мислення, яке дозволяє правильно зрозуміти умову, уявити та зобразити геометричне тіло чи їх комбінацію, встановити що саме має бути розв’язком задачі. Складність виконання рисунка і обґрунтування розв’язання задачі на комбінацію геометричних тіл призводять до того, що процес її розв’язання займає багато часу. Тому доцільним є використання матеріальних моделей, макетів, готових рисунків, шаблонів для побудови рисунків геометричних тіл та їх комбінацій.

Інноваційними підходами до організації навчання є інтерактивні технології, що допомагають зробити процес навчання більш цікавим, різноманітним, ефективним.

Альтернативою макетам геометричних тіл є віртуальні 3D моделі. При цьому вони набагато гнучкіші і різноманітні, вигідно відрізняються від матеріальних при доопрацюванні та зберіганні. Інтерактивні 3D моделі надають можливість спостерігати фігури та їх комбінації в різних ракурсах, находити такі положення, в яких можна було б «побачити» як відшукати співвідношення між елементами фігури, необхідні для вирішення задачі. Вони ж дозволяють знайти такі положення, в яких розглянута опорна конфігурація комбінації тіл є більш наочною, побачити, як краще виконати необхідний рисунок, зробити на ньому додаткові побудови. При цьому вчитель може надавати певні поради щодо розгляду малюнку при розв’язуванні задачі і тим самим підводити учня до правильного методу розв’язання.

Програмний засіб Geogebra володіє широким спектром можливостей роботи з багатьма розділами математики. Вона може бути використана для демонстрації як алгебраїчних, так і геометричних понять, правил. Інструментарій програми GeoGebra дозволяє ефективно використовувати її у процесі вивчення математики з різною метою – за її допомогою можна швидко створити якісні зображення математичних об’єктів (графіки функцій, графіки рівнянь, геометричні фігури, формули, діаграми, тощо), причому їх можна зберегти у файлах (аплетах) для подальшого використання. Матеріали можна експортувати в різні формати, в тому числі статичні зображення та в анімовані GIF. Векторні зображення можна редагувати за допомогою сторонніх програм та імпортувати безпосередньо в офісні додатки.

Geogebra створена Маркусом Хохенвартером у 2001 році. Програма написана мовою Java, підтримує роботу на різних операційних системах: Windows, Mac PS, Linux, Android.

Із сайту виробника можна завантажити звичайну версію Geogebra для комп’ютера. Програма має онлайн версію: Geogebra online. Після переходу на сайт www.geogebra.org можна відкрити програму в своєму браузері для виконання необхідних дій.

Таким чином за наявності доступу до мережі Інтернет можна працювати в цій математичній програмі навіть зі свого мобільного пристрою.

Отже перевагами GeoGebra є безкоштовність, наявність онлайн, офлайн та мобільної версій програми, простий у використанні інтерфейс при потужному функціоналі. Вільність доступу до даної програми дозволяє уникати проблем з ліцензуванням, що дозволяє вчителям та учням вільно користуватися нею як в навчальному закладі, так і вдома.

2. Онлайн книга «Комбінації геометричних тіл»

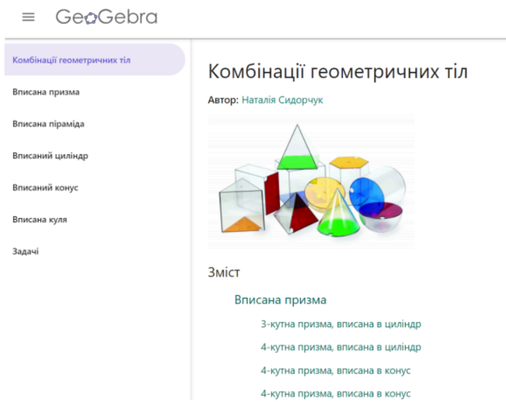
Програмний засіб Geogebra надає можливість на основі завантажених на онлайн-платформу розробок (аплетів) створювати онлайн книги. Доступ до таких книг або до кожного аплету окремо можна надати за посиланням іншим користувачам.

Таким чином учні, вчителі мають змогу працювати вже з готовими інтерактивними моделями, що суттєво економить час та поліпшує якість навчального процесу.

Онлайн книга *«Комбінації геометричних тіл»* побудована на основі створених аплетів комбінацій геометричних тіл, що включають як інтерактивні 3D та 2D моделі, так і статичні зображення перерізів таких комбінацій.

Перехід до книги можна виконати за онлайн посиланням чи за створеним QR-кодом.

https://www.geogebra.org/m/maxmuw7z



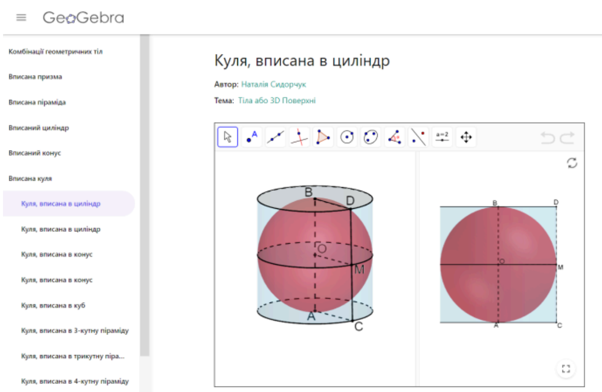
Для зручності пошуку необхідного зображення книгу поділено на розділи:

- Вписана призма;
- Вписана піраміда;
- Вписаний циліндр;
- Вписаний конус;
- Вписана куля.

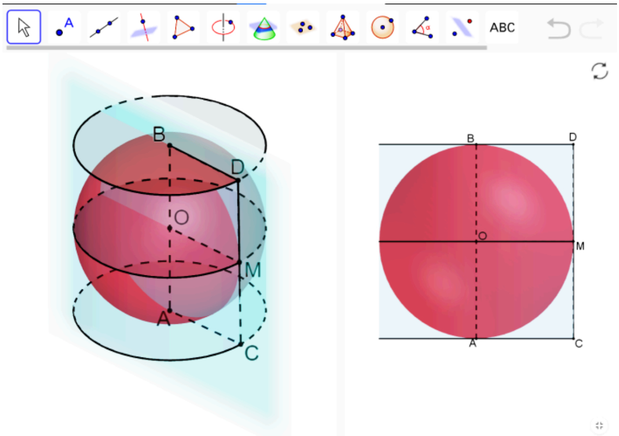
Кожен розділ містить набір відповідних 3D моделей:

Перегляд моделі можливий в онлайн книзі. Вікно моделі можна розгорнути на повний екран. ***Також до моделі подано окреме посилання та QR-код (перегляд окремо від книги).***

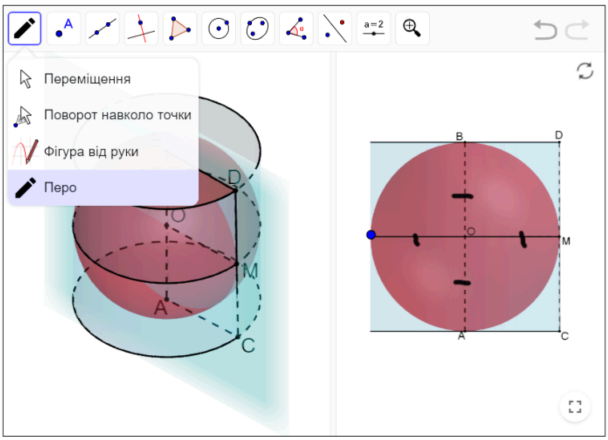
Аплет може містити 3D модель та зображення перерізу комбінації тіл, що полегшить сприйняття такої конструкції, виділить важливі елементи для побудови плоского малюнку до задачі та знаходження шляхів її розв'язання. Приклад аплету:



Кожен аплет має набір інструментів з 3D, 2D полотна для добудови моделі, її трансформування. Як приклад, на моделі «Куля, вписана в циліндр» побудовано осьовий переріз циліндра:



Серед інструментів є *Перо*, що дозволяє робити на зображенні помітки, позначення тощо:



Правий верхній куток аплету містить кнопки для покрокового скасування чи повернення дій, а також кнопку для скидання всіх виконаних змін.

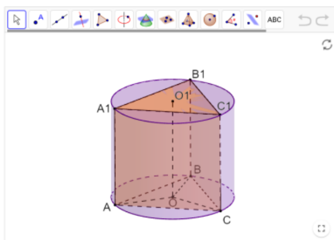
Аплети можна завантажити на власні пристрої, виконати їх редагування чи збереження в будь-якому графічному форматі.

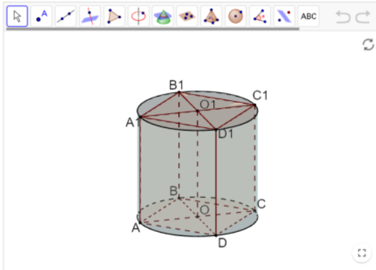
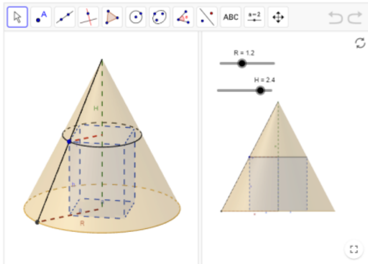
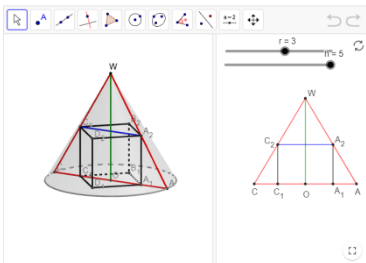
3. 3D моделі онлайн книги «Комбінації геометричних тіл»

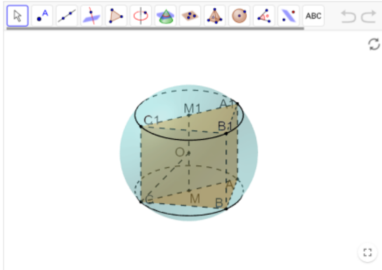
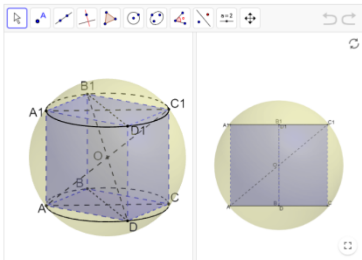
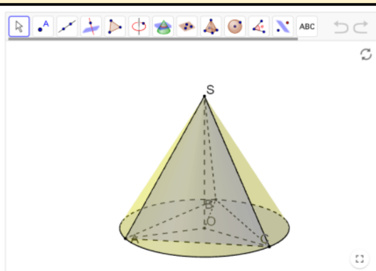
Таблиця містить посилання на 3D моделі онлайн книги «Комбінації геометричних тіл». Розділи таблиці:

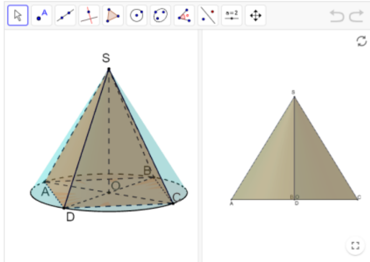
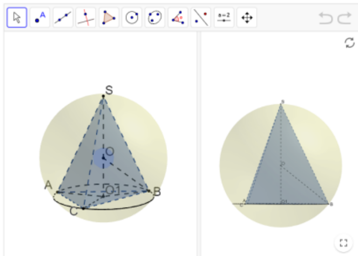
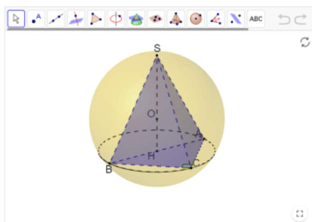
1. Призма
2. Піраміда
3. Циліндр
4. Конус
5. Куля

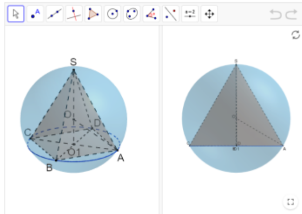
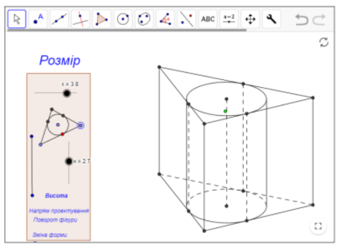
До кожної моделі є її назва, посилання для переходу, QR-код із зображенням даної моделі (для зручності), ескіз моделі.

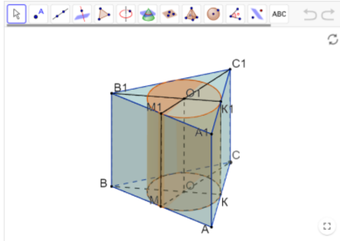
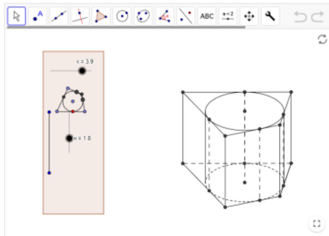
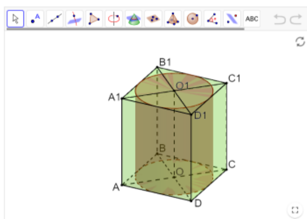
1. ПРИЗМА	
1.1. Призма трикутна, вписана в циліндр	https://www.geogebra.org/m/fxapgjks
	
1.2. Призма чотирикутна, вписана в циліндр	https://www.geogebra.org/m/ste5byu3

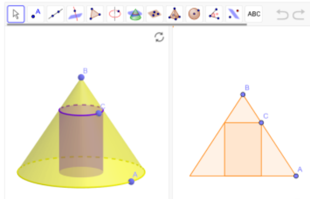
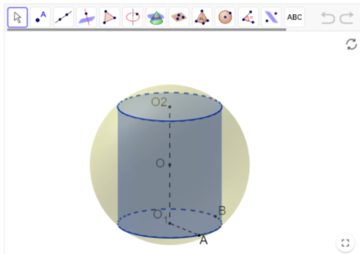
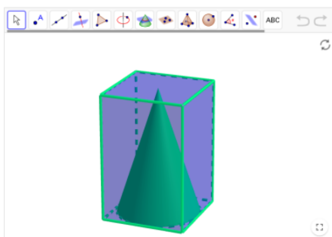
	
1.3. Призма чотирикутна, вписана у конус	https://www.geogebra.org/m/tpr7kfkx
	
1.4. Куб, вписаний у конус	https://www.geogebra.org/m/gdmd4zzv
	
1.5. Призма трикутна, вписана в кулю	https://www.geogebra.org/m/fg5m7fck

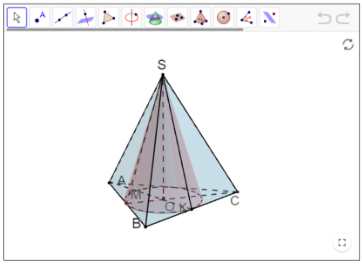
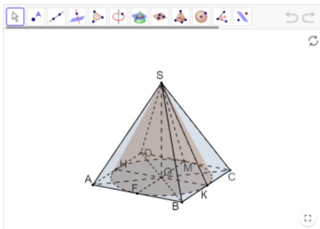
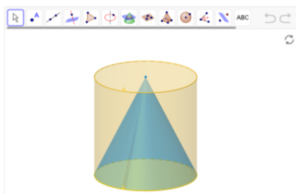
	
1.6. Призма чотирикутна, вписана в кулю	https://www.geogebra.org/m/u4zdarmt
	
2. ПІРАМІДА	
2.1. Піраміда трикутна, вписана в конус	https://www.geogebra.org/m/xnhnzafb
	

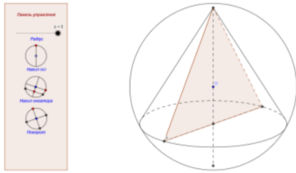
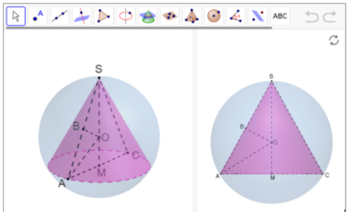
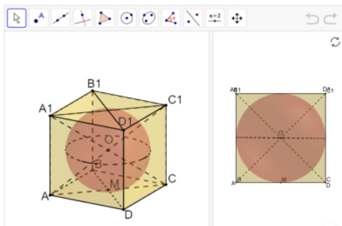
2.2. Піраміда чотирикутна, вписана в конус	https://www.geogebra.org/m/wqtggsvb
	
2.3. Піраміда трикутна, вписана в кулю	https://www.geogebra.org/m/cw3wvqc2
	
2.4. Піраміда трикутна (в основі прямокутний трикутник), вписана в кулю	https://www.geogebra.org/m/gwanyhqw
	

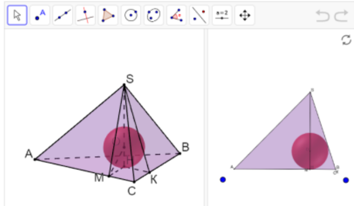
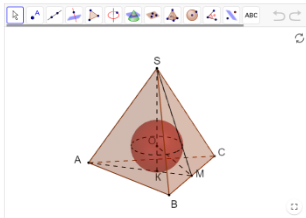
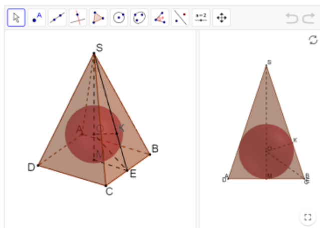
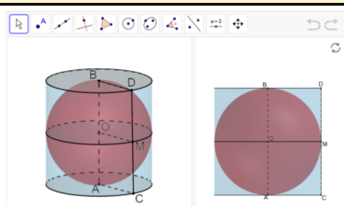
2.5. Піраміда чотирикутна, вписана в кулю	https://www.geogebra.org/m/evmfxf3w
	
3. ЦИЛІНДР	
3.1. Циліндр, вписаний у трикутну призму	https://www.geogebra.org/m/abnsm7wc
	
3.2. Циліндр, вписаний у правильну трикутну призму	https://www.geogebra.org/m/vs6pgvfx

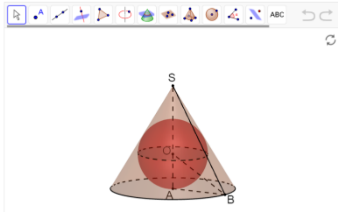
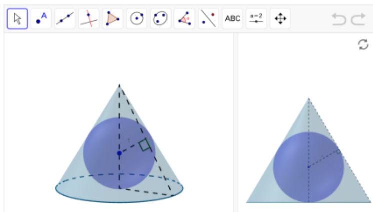
	
3.3. Циліндр, вписаний у чотирикутну призму	https://www.geogebra.org/m/xmuue6fs
	
3.4. Циліндр, вписаний у прямокутний паралелепіпед	https://www.geogebra.org/m/getmktym
	
3.5. Циліндр, вписаний у конус	https://www.geogebra.org/m/xdvunt8h

	
3.6. Циліндр, вписаний у кулю	https://www.geogebra.org/m/qhdzqkpc
	
4. КОНУС	
4.1. Конус, вписаний у призму	https://www.geogebra.org/m/bshqtts2
	

4.2. Конус, вписаний у трикутну піраміду	https://www.geogebra.org/m/sgpjkdj
	
4.3. Конус, вписаний в чотирикутну піраміду	https://www.geogebra.org/m/fafzg2rr
	
4.4. Конус, вписаний в циліндр	https://www.geogebra.org/m/f6y2yt8r
	
4.5. Конус, вписаний у кулю	https://www.geogebra.org/m/qngk4wyz

	
4.6. Конус, вписаний у кулю 2	https://www.geogebra.org/m/hc9vnxh5
	
5. КУЛЯ	
5.1. Куля, вписана в куб	https://www.geogebra.org/m/gw69za9r
	
5.2. Куля, вписана в трикутну піраміду	https://www.geogebra.org/m/rqff3ayu

	
5.3. Куля, вписана в правильну трикутну піраміду	https://www.geogebra.org/m/s4gstgaz
	
5.4. Куля, вписана в чотирикутну піраміду	https://www.geogebra.org/m/gasuurah
	
5.5. Куля, вписана в циліндр	https://www.geogebra.org/m/tbjkyag4
	

5.6. Куля, вписана в конус	https://www.geogebra.org/m/tub5bggh
	
5.7. Куля, вписана конус2	https://www.geogebra.org/m/sfx6bjca
	

Доступ до моделей можливий з будь-якого пристрою, що має підключення до мережі Інтернет. При цьому інсталяція Geogebra не потрібна.

Також моделі можна завантажити на пристрій аби в подальшому використовувати в режимі офлайн у програмі Geogebra чи в іншому додатку як статичне зображення.

III. ЗАДАЧІ НА КОМБІНАЦІЇ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ

Задача 1.

Дослідити комбінації тіл. Вибрати правильні твердження:

1) У призму можна вписати кулю тоді, коли в перпендикулярний переріз цієї призми можна вписати коло, а висота призми дорівнює діаметру цього кола.

Відповідь: так.

2) Многогранник називається вписаним у сферу, а сфера – описана навколо многогранника, якщо більшість вершин многогранника лежать на сфері.

Відповідь: ні.

3) Навколо призми можна описати кулю тоді і тільки тоді, коли ця призма пряма і навколо її основи можна описати коло.

Відповідь: так.

4) Навколо будь-якої прямої трикутної призми можна описати кулю.

Відповідь: так.

5) Якщо основою прямої призми є рівнобічна трапеція, бічна сторона якої дорівнює середній лінії, то в дану призму можна вписати циліндр.

Відповідь: так.

6) Якщо основою піраміди є ромб, то навколо даної піраміди можна описати конус.

Відповідь: ні.

7) Центр сфери, описаної навколо призми, лежить на середині відрізка, що сполучає центри кіл, вписаних в основи призми.

Відповідь: ні.

8) Навколо будь-якого тетраедра можна описати кулю.

Відповідь: так.

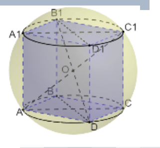
9) Якщо основою піраміди є рівнобічна трапеція, то навколо такої піраміди можна описати кулю.

Відповідь: так.

Призма та куля

Задача 2.

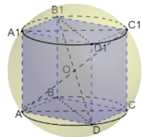
Діагональ куба дорівнює 6. Обчисліть радіус кулі, описаної навколо куба.



Відповідь: 3.

Задача 3.

У кулю з радіусом R уписаний прямокутний паралелепіпед, діагональ якого утворить із меншою бічною гранню кут α. Діагональ основи паралелепіпеда утворює з більшою стороною основи кут ß. Визначити виміри паралелепіпеда.

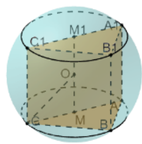


Модель 1.6

Відповідь: $2Rsina$; $2Rsina\ tg\beta$; $2R\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \cdot tg^2\beta}$

Задача 4.

У кулю радіуса R вписана пряма призма, основа якої - прямокутний трикутник із гострим кутом α. Найбільша бічна грань призми - квадрат. Знайдіть об'єм призми.

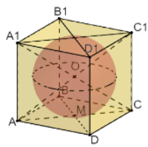


Модель 1.5

Відповідь: $V_{приз.} = \frac{\sqrt{2}}{2} R^3 \sin sin\, 2\alpha$.

Задача 5.

Знайти відношення площі повної поверхні куба до площі поверхні вписаної в нього кулі.



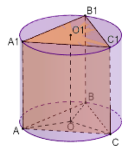
Модель 5.1

Відповідь: 6 : π

Призма та циліндр

Задача 6.

Знайдіть радіус основи циліндра, описаного навколо правильної трикутної призми, якщо висота призми дорівнює h, а бічна поверхня дорівнює S.

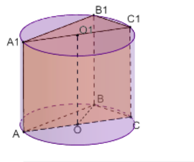


Модель 1.1

Відповідь: $\frac{\sqrt{3}S}{9h}$.

Задача 7.

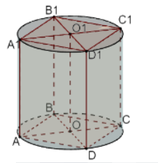
В циліндр з радіусом 5 см і площею осьового перерізу 40 см^2 вписано трикутну призму. Основа призми – прямокутний трикутник, катети якого відносяться як 3:4. Знайдіть об’єм призми.



Відповідь: 96 см3

Задача 8.

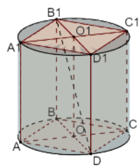
Сторони основи прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 6 см і 8 см, а його висота дорівнює 12 см. Знайдіть площу повно поверхні циліндра, описаного навколо паралелепіпеда.



Відповідь: 170 π см^2.

Задача 9.

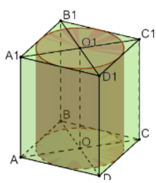
У циліндр вписано паралелепіпед зі стороною основи а. Діагональ паралелепіпеда нахилена до площини основи під кутом α і утворює кут ß з бічною гранню, що проходить через сторону α. Знайти бічну поверхню циліндра. Обчислити, якщо α = 6 см, α = 45°, β = 15°.



Відповідь:
$$\frac{\pi a^2 \sin 2\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} \approx 130{,}6 см^2.$$

Задача 10.

Діагональ осьового перерізу циліндра дорівнює 12 і утворює з площиною основи кут 60^0. Знайдіть об’єм правильної чотирикутної призми, описаної навколо циліндра.

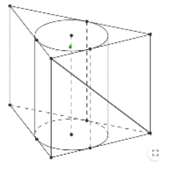


Модель 3.4

Відповідь: 216$\sqrt{3}$.

Задача 11.

В основі прямої призми лежить прямокутний трикутник з гіпотенузою с і гострим кутом ß. Діагональ грані, що містить протилежний до даного кута катет, нахилена до площини основи під кутом α. Обчислити бічну поверхню циліндра, вписаного в дану призму. Обчислити, якщо з = 12 см, α = 60°, ß = 30°.

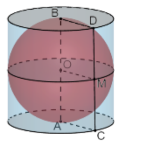


Відповідь: $\dfrac{\pi \cdot c^2 \sin\beta \cdot \sin 2\beta \cdot tg\alpha}{1+\sin\beta+\cos\beta}$; $36\left(3-\sqrt{3}\right)\pi\left(см^2\right)$

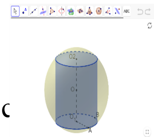
Куля та циліндр

Задача 12.

Кулю, радіус якої 8, вписано в циліндр. Знайдіть площу бічної поверхні циліндра.



Відповідь: 256π.



а 13.

ру з радіусом 4 см вписано циліндр, діагональ
ос ерізу якого утворює з основою кут 30^0.
Знаидіть оо єм циліндра.

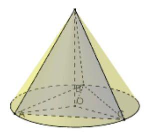
Відповідь: 48π см³.

Модель 3.6

Піраміда та конус

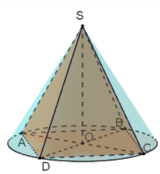
Задача 14.

У конус, висота і радіус основи якого відповідно дорівнюють 3 см і 4 см, вписано правильну трикутну піраміду. Знайти бічне ребро піраміди.



Відповідь: 5 см.

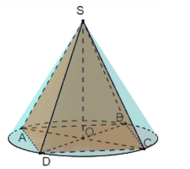
Задача 15.



В основі піраміди лежить прямокутник, площа якого дорівнює S, а кут між діагоналями дорівнює α. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом β. Обчислити об'єм конуса, описаного навколо цієї піраміди. Обчислити, якщо S= 36см^2,α= 60°; ß=60°.

Відповідь:

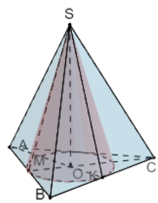
Задача 16. $\frac{\pi \cdot S \cdot tg\beta}{12\sin\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$.



Основа піраміди – прямокутник, менша сторона якого дорівнює 6 см, а кут між діагоналями – 60º. Всі бічні ребра піраміди нахилені до площини основи під кутом 45º. Знайдіть об’єм конуса, описаного навколо піраміди.

Відповідь: 72(см3).

Задача 17.

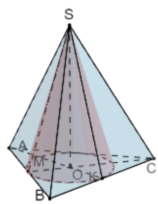


Модель 4.2

Основою піраміди є рівнобедрений трикутник з бічною стороною b і кутом ß при основі. Всі двогранні кути при основі піраміди рівні γ . Визначити бічну поверхню конуса, вписаного в дану піраміду.

Відповідь: $S\text{біч} = \frac{\pi \cdot b^2 \cdot \cos^2\beta \cdot tg^2\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\gamma}$.

Задача 18.

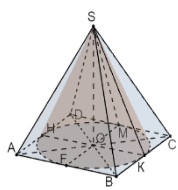


Модель 4.2

У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює α. Знайдіть повну поверхню вписаного конуса, якщо площа основи піраміди дорівнює S.

Відповідь: $S_{\text{пов. кон.}} = \frac{\pi S}{9}\left(\sqrt{3} + 3ctg\frac{\alpha}{2}\right)$.

Задача 19.



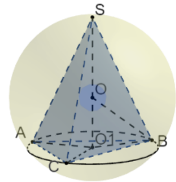
У правильну чотирикутну піраміду вписано конус, осьовий переріз якого правильний трикутник. Знайдіть площу цього перерізу, якщо бічна поверхня піраміди дорівнює $\frac{S\sqrt{3}}{16}$. S.

Відповідь:

Піраміда та куля

Задача 20.

В основі піраміди лежить трикутник з кутами α і β і площею S. Всі бічні ребра піраміди утворюють із її висотою кут φ. Визначити площу поверхні сфери, описаної навколо піраміди. Обчислити, якщо S= 36 см^2, $\alpha = 60°$, ß= 30°, $\varphi = 45°$.

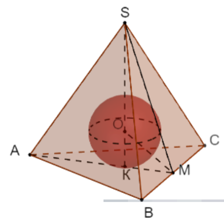


Модель 2.3

Відповідь: $$\frac{2\pi S}{\sin^2 2\varphi \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta)}.$$

Задача 21.

У правильній трикутній піраміді висота дорівнює H, а бічні грані нахилені до площини основи під кутом α. Визначити об'єм кулі, вписаної в дану піраміду.

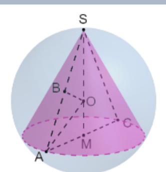


Відповідь: $$\frac{4}{3}\pi H^3 \cdot ctg^3\alpha \cdot tg^3\frac{\alpha}{2}.$$

Конус та куля

Задача 22.

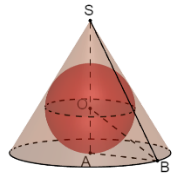
Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом ß. Визначити об'єм конуса, якщо радіус описаної навколо нього кулі дорівнює R.



Відповідь: $$\frac{2}{3}\pi R^3 \sin^2\beta \cdot \sin^2 2\beta.$$

Задача 23.

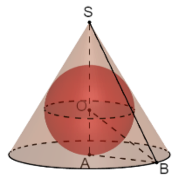
Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α. Визначити об'єм конуса, якщо радіус вписаної в нього кулі дорівнює r. Обчислити, якщо
 r = 6 см, α =60°.



Відповідь: $\frac{1}{3}\pi r^3 ctg^3\frac{\alpha}{2}\cdot tg\alpha.$

Задача 24.

У конус, у якого радіус основи дорівнює r, а твірна — l, вписано кулю. Знайдіть довжину лінії, по якій поверхня кулі дотикається до бічної поверхні конуса.

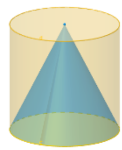


Відповідь. $2\pi r$.

Конус та циліндр

Задача 25.

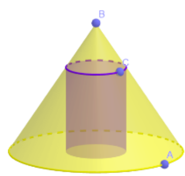
Із циліндра виточено конус так, що його основа збігається з однією з основ циліндра, а вершина – із центром іншої основи циліндра. Знайдіть відношення об’єму сточеної частини циліндра до об’єму конуса.



Відповідь: 2 : 1.

Задача 26.

Радіус основи конуса дорівнює 39 см, а висота – 52 см. У нього вписано циліндр такої висоти, що його бічна поверхня рівновелика бічній поверхні малого конуса, який стоїть на його верхній основі. Знайдіть висоту циліндра.

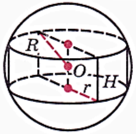
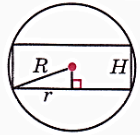
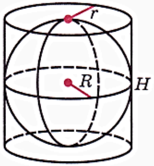
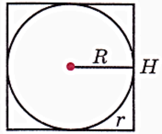
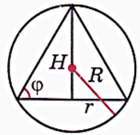
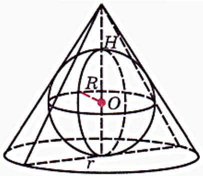
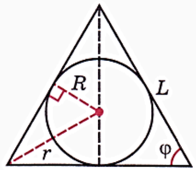


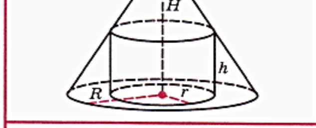
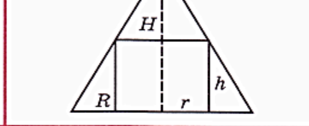
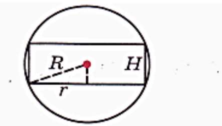
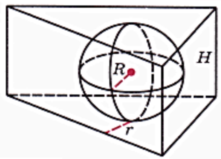
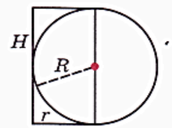
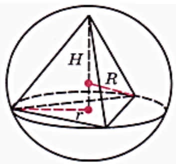
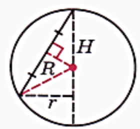
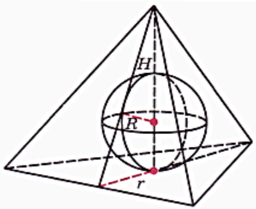
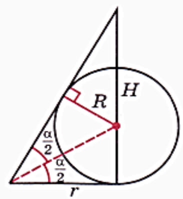
Модель 3.5

Відповідь: висота циліндра 20 см.

ДОДАТОК 1

Комбінації геометричних тіл

	**Куля, описана навколо циліндра:** $R^2=\left(\frac{H}{2}\right)^2+r^2$	
	**Куля, вписана в циліндр:** $R=r,\ R=\frac{H}{2}$	
	**Куля, описана навколо конуса:** $R^2=(H-R)^2+r^2;\quad R=\frac{L^2}{2H},\quad R=\frac{r}{\sin 2\varphi}$	
	**Куля, вписана в конус:** $\frac{R}{H-R}=\frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}},\quad R=\frac{Hr}{r+L},\quad R=r\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}$	

	**Циліндр, вписаний у конус:** $\frac{R-r}{h}=\frac{R}{H}=\frac{r}{H-h}$, $\frac{R}{r}=\frac{H}{H-h}$	
	**Куля, описана навколо призми:** $R^2=\left(\frac{H}{2}\right)^2+r^2$	
	**Куля, вписана в пряму призму:** $R=r=\frac{H}{2}$, $V=\frac{1}{3}RS$	
	**Куля, описана навколо правильної піраміди:** $R^2=(H-R)^2+r^2$	
	**Куля, вписана в правильну піраміду:** $\frac{R}{H-R}=\frac{r}{\sqrt{H^2+r^2}}$, $V=\frac{1}{3}RS$, $R=r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$	

ІНФОРМАЦІЙНІ ДЖЕРЕЛА

1. Архіпова Т. Л. Вплив нових інформаційних технологій на активізацію навчально-пізнавальної діяльності підлітків / Т.Л. Архіпова // Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання. - Київ. - Вип.3. - С. 160-167

2. Гордієнко І.В. Формування просторових уявлень в учнів під час навчання стереометрії / І.В. Гордієнко // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 10. – С. 7-12.

3. Друшляк М.Г, Шкарупа О.О. Особливості вивчення теми «Комбінації геометричних тіл»/М.Г.Друшляк, О.О. Шкарупа // Фізико-математична освіта(ФМО) випуск 2(12), 2017. – 61с.

4. Клочко І.Я. Математика: Тестові завдання. Ч. IV. Стереометрія (зовнішнє незалежне оцінювання)/ І.Я. Клочко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2019. – 224 с.

5. Ракута В.М. Система динамічної математики GeoGebra як іноваційний засіб для вивчення математики / В.М. Ракута // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2012. – № 4 (30).

6. Роганін О.М. Геометрія. 7-11 класи / О.М. Роганін. – Х. : ПП Українське літературне агенство «УЛА», 2018. – 32с. – (Довідник у таблицях)

7. Семеніхіна О. В. Інструментарій програми GeoGebra 5.0 і його використання для розв’язування задач стереометрії [Електронний ресурс] / О. В. Семеніхіна, М. Г. Друшляк // Інформаційні технології і засоби навчання. – 2014. – Т. 44, № 6. – С. 124 – 133.

8. Швець В. О., Прус А. В. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії : навчальний посібник. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2007. 156 с.

Рецензія

на наочний посібник
«3D моделі Geogebra до задач на комбінації геометричних тіл»
вчителя математики Любарського ліцею №1 Любарської селищної ради Житомирської області Сидорчук Н.В.

Сидорчук Н.В. запропонувала ідею використання динамічних 3D моделей, створених програмним засобом GeoGebra, на уроках математики, а зокрема для вивчення теми «Комбінації геометричних тіл». Беручи до уваги, що можливості сучасних інформаційних технологій допомагають докорінно змінити освітній процес, у якому учень від «споживача знань» переходить до ролі активного дослідника - «відкривача знань», створена Сидорчук Н.В. онлайн книга «Комбінації геометричних тіл» стане незамінним інструментом при розв'язуванні задач з даної теми. Адже GeoGebra — вільно-поширюване динамічне середовище, призначення для створення та роботи з віртуальними моделями, що вдало замінюють матеріальні, не потребують фінансових затрат, можуть бути продемонстровані з будь-якого сучасного гаджета. До кожної моделі в посібнику є ескіз, посилання на онлайн ресурс та QR -код.

Створені автором моделі допоможуть учителям організувати самостійну дослідницьку роботу учнів, урізноманітнити форми роботи на уроці, особливо під час дистанційного навчання, значно збільшити частку активної творчої роботи, підвищити інтерес до вивчення стереометрії за рахунок інтерактивності 3D побудов. Дослідження таких моделей сприятиме кращому розумінню навчального матеріалу з теми «Комбінації геометричних тіл» та формуватиме абстрактне просторове мислення учнів.

Автор до розробки включила набір типових задач з теми «Комбінації геометричних тіл», вказавши до кожної з них номер відповідної 3D моделі, яку можна використати при розв'язанні задачі.

Сидорчук Н.В. описала та обґрунтувала роботу з виділенням актуальності, новизни та практичної значущості посібника.

Наочний посібник відповідає вимогам чинної програми, може бути використаний у навчальному процесі. Посібник рекомендовано для вчителів математики та учнів 10-11 класів.

Рецензент Будім М.М.

Інформація до каталогу

1. ПІБ автора, посада: Сидорчук Наталія Володимирівна, вчитель математики та інформатики

2. Назва закладу: Любарський ліцей №1 Любарської селищної ради Житомирського району Житомирської області

3. Вид і назва роботи: наочний посібник «3D моделі Geogebra до задач на комбінації геометричних тіл»

4. Короткий зміст розробки:

У посібнику розглянуто можливості програми Geogebra для використання її при розв'язуванні задач на комбінації геометричних тіл; запропоновані задачі та 3D моделі до них (з посиланнями на онлайн-ресурси), що включені до авторської онлайн книги «Комбінацій геометричних тіл».

Посібник допоможе вчителю швидко підготувати наочний матеріал до складних тем стереометрії. Учням посібник буде корисним для розгляду складних комбінацій геометричних тіл, пошуку шляхів розв'язання задач, розвитку просторового мислення.

Усі 3D моделі доступні для перегляду за посиланням або QR-кодом на комп'ютері чи смартфоні.

Для вчителів та учнів загальноосвітніх шкіл та профільних класів природничого та фізико-математичного спрямування.