Оріон

Нова українська школа

7

Михайло Бурда
Ніна Тарасенкова

ГЕОМЕТРІЯ

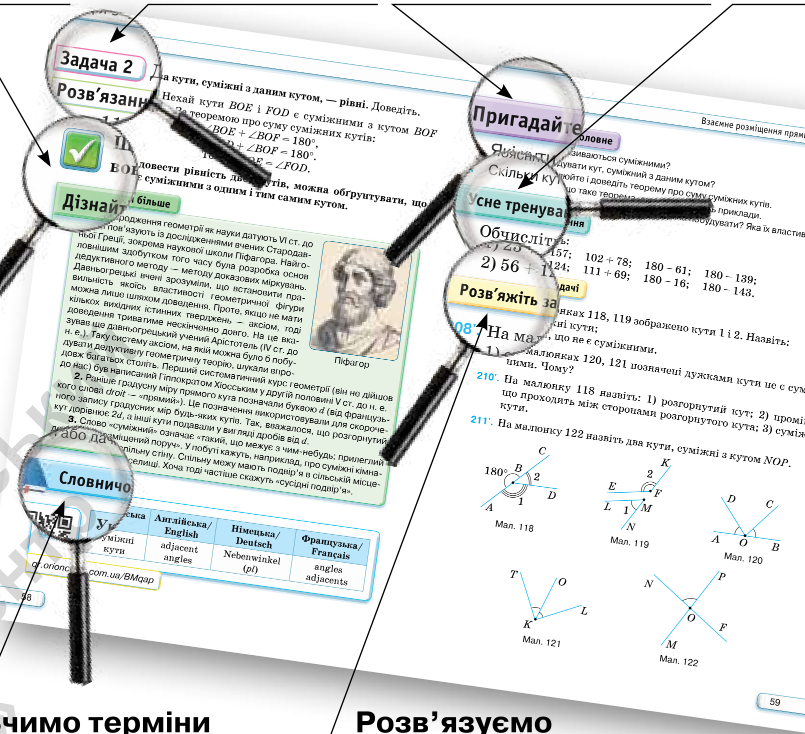
НАВЧАЄМОСЯ РАЗОМ З ПІДРУЧНИКОМ

Вчимося діяти

Розглядаємо типову задачу

Перевіряємо, як засвоїли теорію

Тренуємо усний рахунок



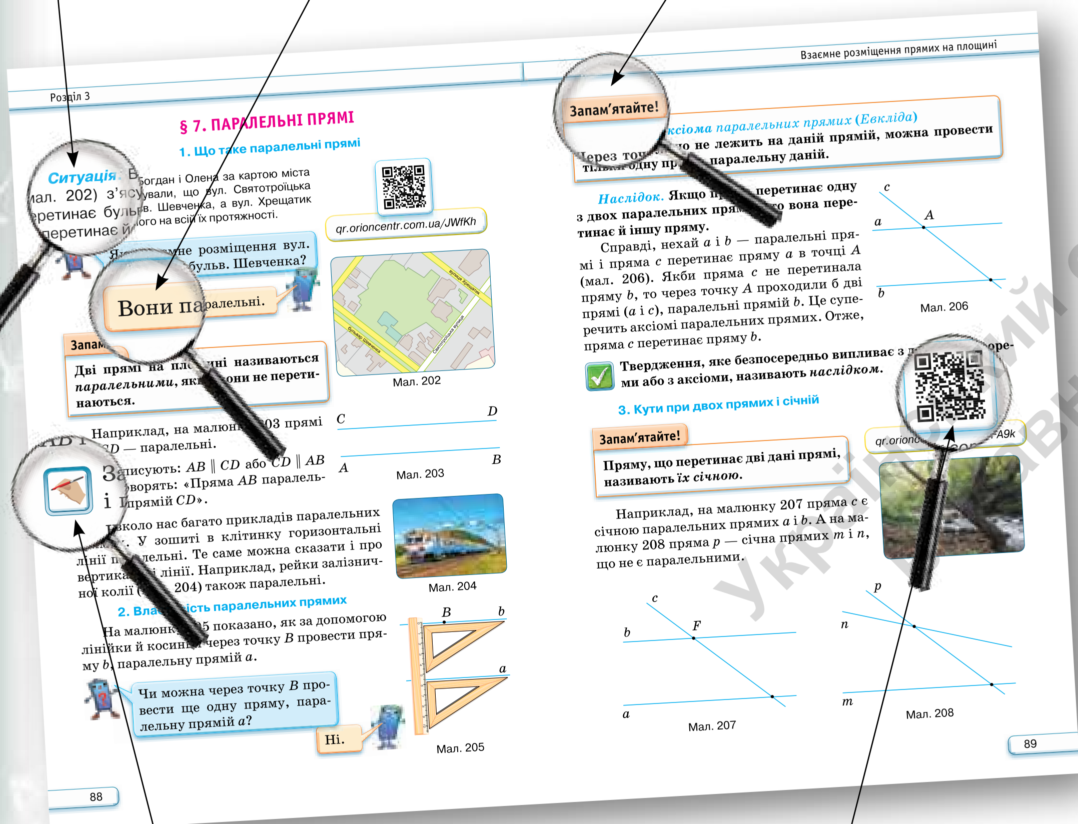
Вчимо терміни іншими мовами

Розв'язуємо задачі

Розглядаємо ситуацію

Відповідаємо на запитання

Вчимо правило

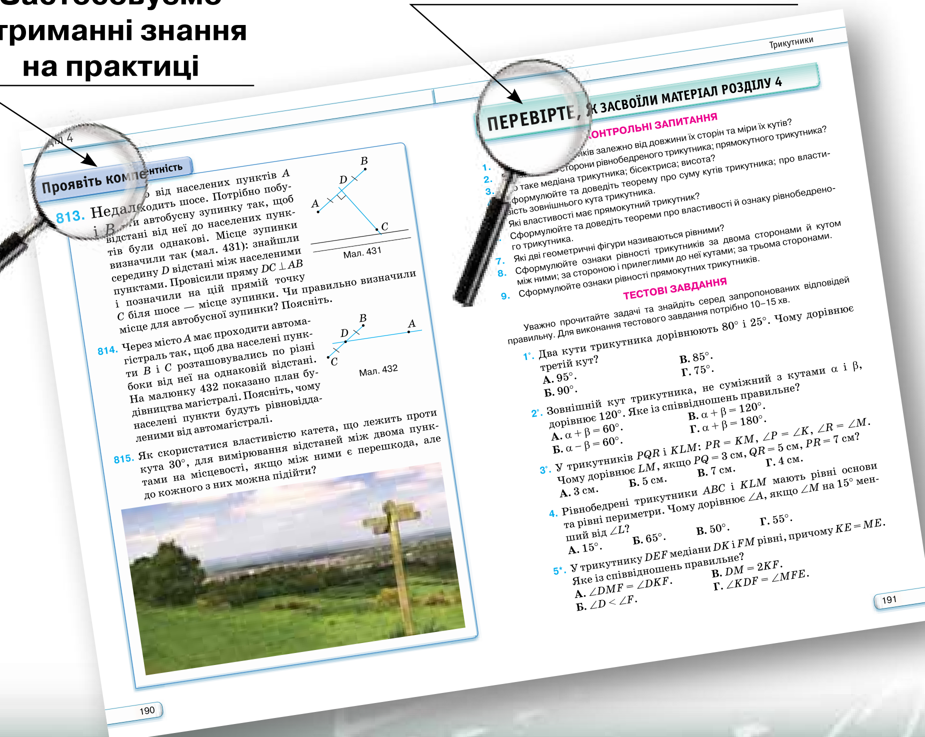


Записуємо і читаємо

Дивимося презентацію

Застосовуємо отримані знання на практиці

Перевіряємо свої знання



Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Михайло Бурда, Ніна Тарасенкова

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
Оріон
2024

УДК 514*кл7(075.3)
Б93

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(*наказ Міністерства освіти і науки України від 05.02.2024 № 124*)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (авторський колектив програми: *М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова, Д. В. Васильєва*)

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Адреса інтернет-ресурсу до підручника:

qr.orioncentr.com.ua/eXLkF

Бурда М. І., Тарасенкова Н. А.
Б93 Геометрія : підруч. для 7 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ : УОВЦ «Оріон», 2024. 288 с. : іл.

ISBN 978-966-991-292-3

УДК 514*кл7(075.3)

ISBN 978-966-991-292-3

© Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., 2024
© УОВЦ «Оріон», 2024

ДОРОГІ УЧНІ Й УЧЕНИЦІ!

Ви починаєте вивчати новий предмет, який називається геометрія. Це слово грецьке. У перекладі українською мовою воно означає землемірство («гео» — з грецької «земля», а «метрео» — «міряю»). Така назва зумовлена тим, що зародження геометрії пов'язано з вимірюваннями на місцевості.

У Стародавньому Єгипті 5–6 тисяч років тому існували правила, за якими вимірювали відстані, визначали площі земельних ділянок, будували зрошувальні канали, грандіозні храми й піраміди. До нас дійшли єгипетські папіруси і стародавні вавілонські тексти, які свідчать, що вже за 2 тис. років до н. е. людству були відомі окремі геометричні формули.

Греки запозичили знання в єгиптян, з якими вели торгівлю, доповнили, узагальнили їх і привели в систему. Особливо багато для розвитку геометрії зробив грецький вчений Евклід, який жив у III ст. до н. е. У своїй головній праці «Начала» він підсумував усі досягнення грецької математики і створив фундамент для її подальшого розвитку.

На уроках математики в попередніх класах ви знайомилися з деякими геометричними фігурами. Знаєте, як виміряти відрізок лінійкою з поділками, а також кут — транспортиром; як знайти площу прямокутника й квадрата, об'єм прямокутного паралелепіпеда і куба. Тепер ви розширите і поглибите свої знання з геометрії. Дізнаєтесь про властивості нових фігур, а також про багато важливих і цікавих властивостей уже відомих вам геометричних фігур. Дізнаєтесь про те, як широко застосовується геометрія на практиці. Її треба знати і робітнику, і інженеру, і архітектору, і художнику.

Як успішно вивчати геометрію за цим підручником? Увесь матеріал поділено на розділи, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теоретичний матеріал, особливу увагу звертайте на текст, надрукований **жирним шрифтом**. Це найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх треба зрозуміти, запам'ятати і вміти застосовувати під час розв'язування задач. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «**Пригадайте головне**», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Працюючи з матеріалом параграфа, ознайомтеся з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечками (°) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочками (*) позначено задачі високого рівня. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння й наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «**Дізнайтеся більше**», ви можете поглибити й розширити свої знання.

Номери завдань для домашньої роботи виділено іншим кольором.

У підручнику використовуються спеціальні позначки (піктограми). Вони допоможуть вам краще зорієнтуватись у навчальному матеріалі.


— Увага! Не допустіть помилку


— Важливо знати


— Як записати

Бажаємо вам успіхів і задоволення у пізнанні невідомого!

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Розділ 1. УЗАГАЛЬНЕННЯ ТА СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ВИВЧЕНОГО В 5–6 КЛАСАХ

ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ

qr.orioncentr.com.ua/B44kv

1. Позначте точки A і B. Скільки прямих можна провести:
1) через точку A;
2) через точку B;
3) через точки A і B?

2. На відрізку CD позначте: 1) одну точку; 2) дві точки; 3) три точки. Скільки відрізків утворилося? Назвіть їх.

3. На відрізку DF позначте: 1) одну точку; 2) дві точки. Скільки відрізків утворилося? Назвіть їх.

4. Проведіть пряму a. Позначте на ній точки M і N. Які фігури отримали?

5. Побудуйте промені: 1) AB; 2) BA. Поясніть, чим відрізняються ці промені.

6. Наведіть приклади з довкілля: 1) прямої; 2) відрізка; 3) променя.

7. Побудуйте два промені зі спільним початком K так, щоб утворився:
1) розгорнутий кут; 2) гострий кут; 3) прямий кут.

8. Як за клітинками побудувати:
1) розгорнутий кут; 2) гострий кут; 3) прямий кут?
Відповідь поясніть.

9. Проведіть будь-який внутрішній промінь:
1) розгорнутого кута ABC;
2) гострого кута CDE;
3) прямого кута MON.
Позначте утворені кути та запишіть відповідну рівність.

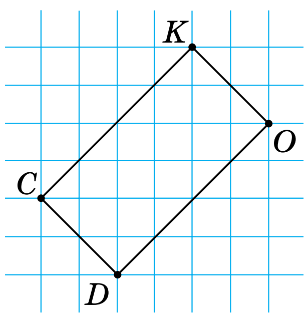
10. На окремому аркуші побудуйте розгорнутий кут. За допомогою згинання аркуша поділіть цей кут:
1) навпіл; 2) на чотири рівні кути.
Поясніть свої дії.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

11. Побудуйте пряму AB. За допомогою лінійки і косинця побудуйте пряму, яка:
1) паралельна прямій AB; 2) перпендикулярна до прямої AB.

12. Наведіть приклади з довкілля:
1) паралельних прямих;
2) перпендикулярних прямих.

13. Побудуйте прямокутник, рівний прямокутнику на малюнку 1. Дайте назву побудованому прямокутнику та запишіть пари його паралельних і перпендикулярних сторін.



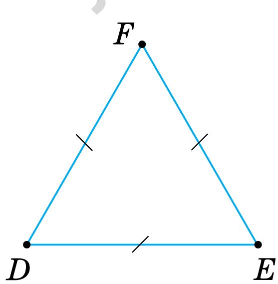
Мал. 1

qr.orioncentr.com.ua/JLoe2

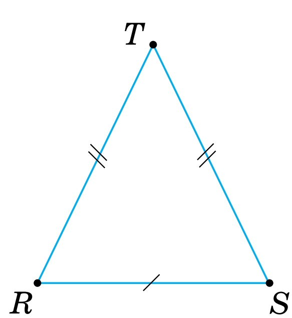
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

14. На аркуші в клітинку побудуйте квадрат так, щоб жодна його сторона не лежала на горизонтальних та вертикальних лініях аркуша. Дайте назву побудованому квадрату та запишіть пари його паралельних і перпендикулярних сторін.

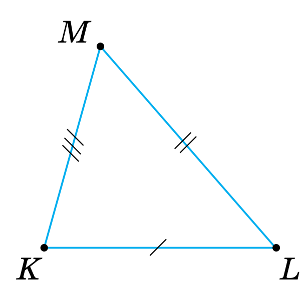
15. Якого виду трикутники на малюнках 2–4? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 2



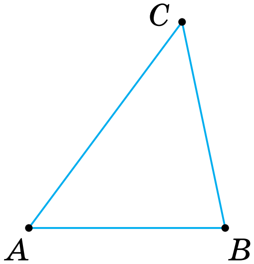
Мал. 3



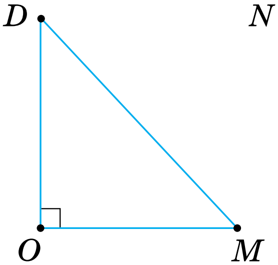
Мал. 4

16. На аркуші в клітинку побудуйте різносторонній, рівнобедрений та рівносторонній трикутники так, щоб у кожного з них одна сторона розміщувалась горизонтально і дорівнювала відповідній стороні двох інших трикутників. Поясніть, як будували дві інші сторони цих трикутників.

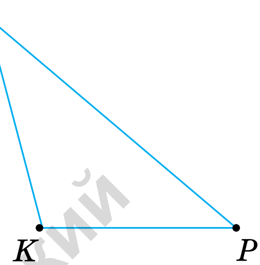
17. Якого виду трикутники за мірами кутів на малюнках 5–10? Відповідь обґрунтуйте.



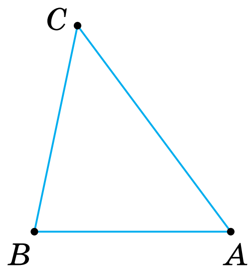
Мал. 5



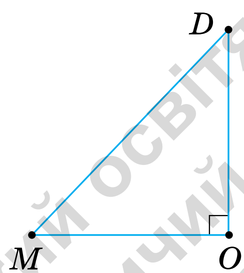
Мал. 6



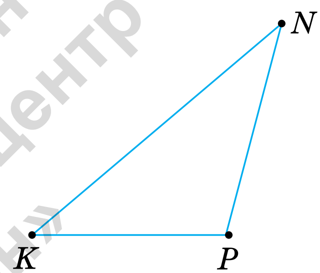
Мал. 7



Мал. 8



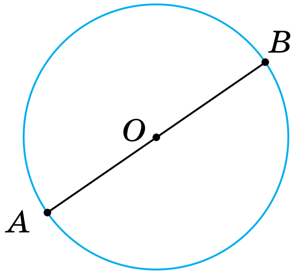
Мал. 9



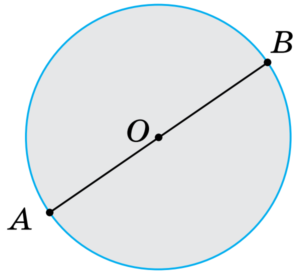
Мал. 10

18. На аркуші в клітинку побудуйте гострокутний, прямокутний і тупокутний трикутники так, щоб у кожного з них одна сторона розміщувалась горизонтально і дорівнювала відповідній стороні двох інших трикутників. Поясніть, як будували дві інші сторони цих трикутників.

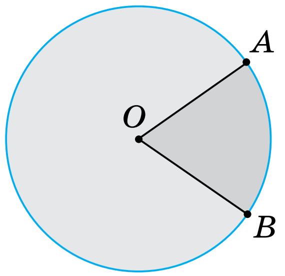
19. Дано фігури на площині (мал. 11–13). Як називається: 1) дана фігура; 2) точка O; 3) відрізок OA? Чи лежать на одній прямій точки A, O і B?



Мал. 11



Мал. 12

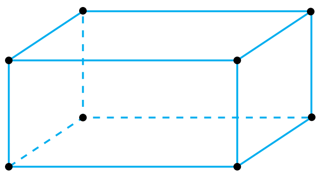


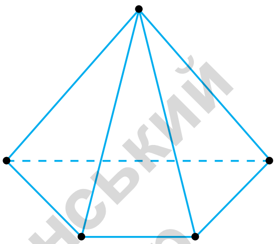
Мал. 13

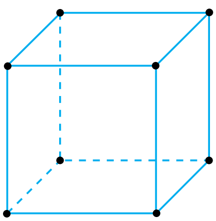
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

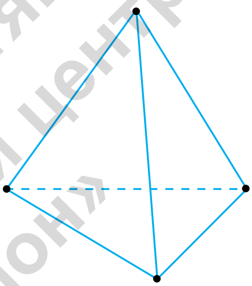
20. Наведіть приклади об'єктів довкілля, що мають форму:
1) кола; 2) круга; 3) кругового сектора.

21. Дано просторову фігуру (мал. 14–17). Як називається дана фігура? Скільки в даної фігури: 1) вершин, ребер, граней; 2) ребер, що сходяться в одній вершині; 3) граней, що є прямокутниками; 4) граней, що є квадратами; 5) граней, що є трикутниками?


Мал. 14


Мал. 16


Мал. 15


Мал. 17

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

22. Наведіть приклади об'єктів довкілля, що мають форму:
1) прямокутного паралелепіпеда;
2) куба;
3) трикутної піраміди;
4) чотирикутної піраміди.

ГЕОМЕТРИЧНІ ВЕЛИЧИНИ

23. На прямій від точки A спочатку відклали відрізок AB завдовжки 5 см, а потім відрізок BC завдовжки 8 см. Знайдіть довжину відрізка AC. Скільки розв'язків має задача?

24. Точка C ділить відрізок AB на два відрізки — AC і CB. Знайдіть довжини відрізків AC і CB, якщо:
1) $AC : CB = 1 : 2$ і $AB = 6$ см;
2) $AC : CB = 2 : 3$ і $AB = 15$ см;

3) $AC : CB = 3 : 5$ і $AB = 24$ см;
4) $AC : CB = 4 : 3$ і $AB = 28$ см.

25. Точка C ділить відрізок AB на два відрізки — AC і CB. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо CB на 2 см довший за AC і $CB = 7$ см.

26. Промінь OB — внутрішній промінь кута AOC. Знайдіть градусну міру:
1) кута AOC, якщо $\angle AOB = 40°$ і $\angle BOC = 25°$;
2) кута AOC, якщо $\angle AOB = \angle BOC = 45°$;
3) $\angle AOB$ і $\angle BOC$, якщо вони відносяться як $1 : 2$, і $\angle AOC = 126°$;
4) $\angle AOB$ і $\angle BOC$, якщо вони відносяться як $4 : 5$, і $\angle AOC = 90°$.

27. Промінь OB — внутрішній промінь кута AOC. Знайдіть градусну міру кута AOC, якщо $\angle AOB = \angle BOC = 79°$.

28. У трикутнику ABC $AB = 3$ см, сторона AC на 1 см довша за AB, а сторона BC на 1 см довша за AC. Знайдіть периметр трикутника ABC. Відповідь подайте в дециметрах.

29. Знайдіть довжини сторін рівностороннього трикутника, якщо його периметр дорівнює 15,6 дм. Відповідь подайте в сантиметрах.

30. Дано трикутник ABC. За даними таблиці 1 знайдіть невідомі кути.

Таблиця 1

$\angle A$	40°	30°		90°	120°
$\angle B$	40°		60°	45°	
$\angle C$		90°	60°		30°

31. Яка градусна міра третього кута трикутника ABC, у якого $\angle A = 36°$, $\angle B = 72°$?

32. a, b — сторони прямокутника, S — його площа, P — периметр. За даними таблиці 2 знайдіть невідомі величини.

qr.orioncentr.com.ua/m3Tna

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Таблиця 2

a	0,6 см	1 м	22 дм	0,5 дм
b	0,8 см		12 дм	
S				2 дм^2
P		3,6 м		

33. a — сторона квадрата, S — його площа, P — периметр. Знайдіть S і P, якщо $a = 3{,}5$ см.

34. У квадраті зі стороною 4 см кожну сторону збільшили на 2 см. На скільки відсотків збільшився периметр квадрата?

35. У прямокутнику зі сторонами 3 см і 5 см кожну сторону зменшили на 1 см. На скільки відсотків зменшився периметр прямокутника?

36. Знайдіть довжину кола, у якого:
1) $R = 4$ см;
2) $D = 5$ см;
3) $R = 3$ см;
4) $D = 7$ см.

qr.orioncentr.com.ua/o6yl3

37. Знайдіть площу круга, у якого:
1) $D = 10$ см; 2) $R = 4$ см; 3) $D = 6$ см; 4) $R = 2$ см.

38. Круг має діаметр 12 см. Знайдіть:
1) площу круга; 2) довжину кола, що його обмежує.

39. У крузі з центром O проведено радіуси OA і OB. Знайдіть градусну міру кута другого сектора, якщо в першого сектора $\angle AOB = 40°$. Побудуйте ці сектори.

40. У крузі з центром O проведено радіуси OB і OC. Знайдіть градусну міру кута другого сектора, якщо в першого сектора $\angle BOC = 160°$. Побудуйте ці сектори.

41. Ширина прямокутного паралелепіпеда дорівнює a, довжина — в n разів більша за ширину, а висота — на 10 см більша за ширину. Знайдіть об'єм паралелепіпеда, якщо:
1) $a = 20$ см, $n = 3$; 2) $a = 10$ см, $n = 2$.
Відповідь подайте в кубічних дециметрах.

42. Сума довжин усіх ребер куба дорівнює 24 дм. Знайдіть об'єм куба. Відповідь подайте в кубічних сантиметрах.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Розділ 2. ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

У розділі дізнаєтесь:

- що таке геометрична фігура і що вивчає геометрія;
- про пряму, відрізок, промінь, кут та їх властивості;
- як зображати ці фігури на аркуші паперу;
- як знаходити довжину відрізка і градусну міру кута, використовуючи властивості вимірювання;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

ЩО ВИВЧАЄ ГЕОМЕТРІЯ

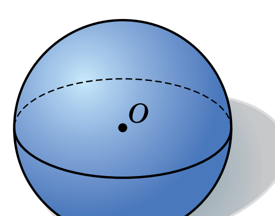
Предмети, які нас оточують, відрізняються один від одного матеріалом, з якого вони зроблені, призначенням, масою, розміром, формою та іншими ознаками. У геометрії беруть до уваги лише форму предметів, їх розміри та взаємне розміщення.

qr.orioncentr.com.ua/AL4nE

Схожим за формою предметам ставлять у відповідність певну *геометричну фігуру*. Наприклад, глобус, футбольний м’яч, апельсин (мал. 18) мають однакову форму — форму кулі (мал. 19). *Куля* — це геометрична фігура.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Мал. 18

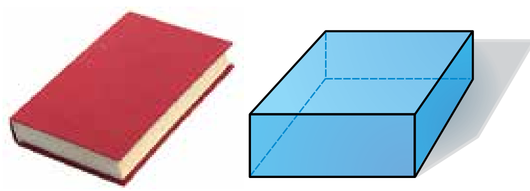


Мал. 19

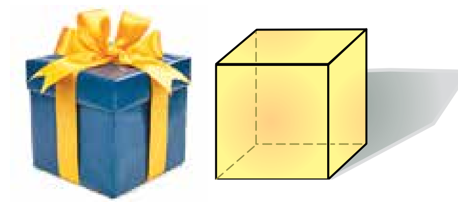
У навколишньому світі не існує геометричних фігур — їх «створює» уява людини. Зобразити геометричні фігури можна на папері. Так, на малюнку 19 ви бачите зображення кулі.

У геометрії вивчають фігури в просторі й на площині. Уявлення про *площину* дають аркуш паперу, поверхня столу, шибка або поверхня озера у штиль. Площина вважається необмеженою та ідеально рівною.

Просторовими фігурами, наприклад, є прямокутний паралелепіпед (мал. 20) і куб (мал. 21). Куля також є просторовою фігурою.



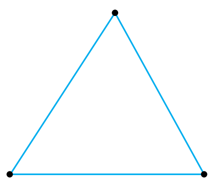
Мал. 20



Мал. 21

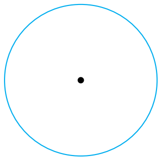
Фігурами на площині, наприклад, є відрізок (мал. 22), трикутник (мал. 23), прямокутник (мал. 24), коло (мал. 25).

Мал. 22



Мал. 23

Мал. 24



Мал. 25

Найпростіша геометрична фігура — *точка*. Кожну геометричну фігуру вважають складеною з точок.

Запам'ятайте!

***Геометрія* — це наука про властивості геометричних фігур.**

Розділ геометрії, у якому вивчають властивості фігур на площині, називають *планіметрією* (від латинського слова *planum* — площина). Просторові фігури та їх властивості вивчають у *стереометрії* (від грецького слова *stereos* — просторовий).

Ми почнемо вивчати геометрію з планіметрії.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 1. ТОЧКИ, ПРЯМІ, ПРОМЕНІ

1. Точки і прямі

qr.orioncentr.com.ua/U83x4

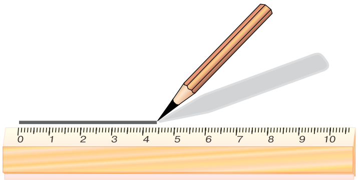
Ситуація. Марія Іванівна запропонувала учням знайти на фото об'єкти, які умовно можна прийняти за точку і пряму, а потім пригадати, як зображують точку і пряму на аркуші паперу. Антон і Наталка відповіли так:

Антон

Точку зображуємо, натиснувши на аркуш олівцем.

Наталка

Пряму проводимо за допомогою лінійки.



Чи праві Антон і Наталка?

Так.

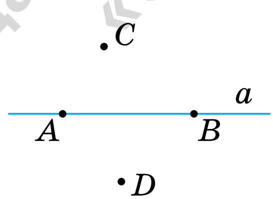
На малюнку зображуємо лише частину прямої, а всю пряму уявляємо необмежено продовженою в обидва боки.

Точки позначаємо великими латинськими буквами A, B, C, D..., а прямі — малими латинськими буквами a, b, c, d,... .

Як можуть взаємно розміщуватися точка і пряма?

Точка може лежати на прямій або не лежати на ній (табл. 3).

Таблиця 3

Точки і пряма		**Пряма і точки**
Точки A і B *лежать на* прямій a	 Мал. 26	Пряма a *проходить* через точки A і B
Точки C і D *не лежать на* прямій a		Пряма a *не проходить* через точки C і D

Коротко записуємо: $A \in a$, $B \in a$, $C \notin a$, $D \notin a$. Знак «$\in$» замінює слова «лежить на» («належить»), а знак «$\notin$» — «не лежить на» («не належить»).

Запам'ятайте!

Властивість прямої

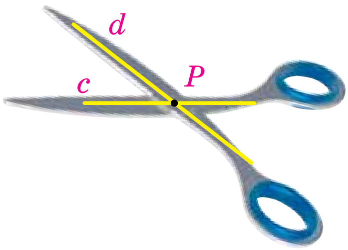
Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Завдяки цій властивості, пряму можна позначати двома її точками. Наприклад, пряма AB на малюнку 26.

Чи може точка належати двом прямим?

Так. На малюнку 27 точка P лежить і на прямій c, і на прямій d. Вона є їх спільною точкою.



Мал. 27

Якщо дві прямі мають спільну точку, то говорять, що вони *перетинаються* в цій точці.

Чи можуть дві прямі перетинатися у двох точках?

Не можуть.

Якби дві прямі перетиналися у двох точках, то кожна з прямих проходила б через ці точки. Але через дві точки можна провести тільки одну пряму.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

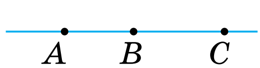
2. Розміщення точок на прямій

Як можуть розміщуватися три точки на прямій?

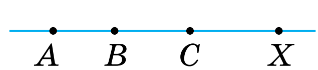
Одна з точок лежить між двома іншими.

Наприклад, на малюнку 28 точка B *лежить між* точками A і C.

На малюнку 29 точки A, B, C прямої a лежать *по один бік* від точки X. Це означає, що точка X не лежить між будь-якими двома з них.



Мал. 28



Мал. 29

Задача На прямій позначено точки T, R і S. Відомо, що точки T і R лежать з одного боку від точки S, а точка T не лежить між точками S і R. Розмістіть ці точки на прямій.

Розв'язання Занесемо дані в таблицю 4 і з'ясуємо, яка з даних трьох точок лежить між двома іншими.

Таблиця 4

Дано		Варіант 1	Варіант 2	Відповідь
Точки T і R	по один бік від точки S	S, T, R	S, R, T	S R T
Точка T	не лежить між точками S і R	–	+	

Чому розміщення точок T і R розглядали тільки праворуч від точки S?

Тому, що тільки одна з трьох точок може лежати між двома іншими. І це не залежить від того, з якого боку від точки S позначаємо точки T і R.

3. Промінь

Проведемо пряму a й позначимо на ній будь-яку точку O (мал. 30). Отримали два *промені*, які виходять з точки O.

Мал. 30

qr.orioncentr.com.ua/Tfn46

На малюнку один із променів виділено. Цей промінь складається з точки O — початку променя і всіх точок прямої, які лежать по один бік від точки O.

Запам'ятайте!

Променем **називається частина прямої, яка складається з точки на прямій та всіх її точок, що лежать по один бік від даної точки.**

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Ця точка називається *початком променя.*

Промінь позначають двома великими латинськими буквами, наприклад, OA (мал. 31). Перша буква позначає початок променя, а друга — будь-яку точку на промені.

Промінь OA

Мал. 31

Чи можна променю на малюнку 31 дати назву AO?

Промінь AO

Мал. 32

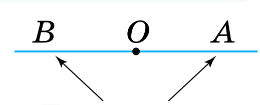
Ні. Це буде інший промінь. У нього початком є точка A (мал. 32).

У назві променя порядок запису букв є суттєвим.

Запам'ятайте!

Два *промені*, які мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називаються *доповняльними*.

Наприклад, на малюнку 33 промені OB і OA є доповняльними.



Мал. 33

Скільки променів утвориться, якщо на прямій позначити точку?

Два промені. Вони є доповняльними променями (за означенням).

У підручнику вам вже траплялися і ще траплятимуться речення, що містять слово «називається». Це — *означення понять*. В означенні розкривається зміст нового поняття. Прикладом може слугувати означення променя, доповняльних променів.

Дізнайтеся більше

1. У вас може виникнути запитання: *Чому, з'ясовуючи, що таке точка і пряма, ми використовували слово «уявімо»?*

У геометрії абстрагуються не лише від усіх властивостей предметів, крім їх форми і розмірів, а й частково і від самих розмірів. Тоді приходять до понять про точку і пряму. Евклід писав у своїх «Началах», що точка не має ніяких розмірів. Зобразити точку, яка не має ні довжини, ні ширини, не можна.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Ми умовно позначаємо те місце, де розміщена точка. Для цього використовуємо загострений олівець. Зрозуміло, що й на такому малюнку точка має певні розміри. Проте якщо зафарбувати аркуш паперу трьома кольорами (мал. 34), тоді те місце, де стикаються три кольори, дає повніше уявлення про точку.

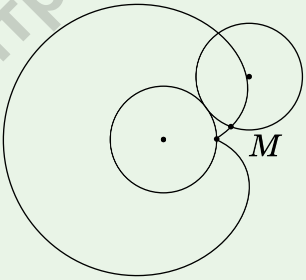
Мал. 34

Абстрактним є й поняття прямої. Кажуть: «Пряма не має ширини і товщини; вона нескінченна». Зрозуміло, що такої прямої в природі не існує. Але ми її уявляємо складеною з точок, або як слід від руху точки.

2. Може виникнути й таке запитання: *Якщо є прямі лінії, то мають бути і криві лінії?*

Їх безліч. За допомогою олівця ви можете зобразити різні криві лінії. Однак у геометрії вивчаються лише особливі криві лінії, які мають цікаві, лише їм притаманні властивості.

Намалюйте коло радіуса 2 см. Інше коло такого самого радіуса виріжте з цупкого паперу. Позначте на ньому деяку точку M і котіть це коло по першому. Тоді точка M опише криву лінію, яку називають *кардіоїдою* (мал. 35).



Мал. 35

3. Виникнення геометрії пов'язане з практичною діяльністю людей. Це відобразилось і в назвах геометричних фігур. Так, слово «*лінія*» походить від латинського «*linea*» — льон, льняна нитка; іноді це слово розуміють як «пряма лінія» і звідси походить назва пристрою для проведення прямих ліній — «лінійка». Слово «*точка*» — переклад латинського слова «*pungo*», що означає «тикаю», «дотикаюсь».

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
точка	point	Punkt (m)	point (m)
пряма	straight line	Gerade (f), gerade Linie	droite (f)

qr.orioncentr.com.ua/xOhM0

Пригадайте головне

1. Що вивчає геометрія?
2. Наведіть приклади геометричних фігур.
3. Як позначають точки і прямі?
4. Сформулюйте властивість прямої.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

5. Сформулюйте властивість розміщення точок на прямій.
6. Поясніть, що таке промінь. Як позначають промені?
7. Які промені називаються доповняльними?

Усне тренування

1. Подайте в міліметрах: 5 см, 5 дм, 5 м, 5 км.
2. Подайте в сантиметрах: 10 мм, 10 дм, 10 м, 10 км.

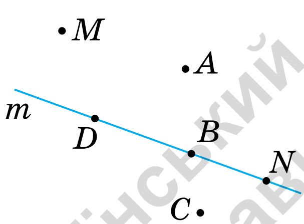
Розв'яжіть задачі

43'. На малюнку 36 назвіть точки, які:
1) лежать на прямій m; 2) не лежать на прямій m.

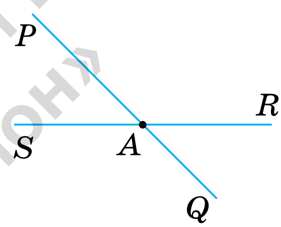
44'. На малюнку 36 дайте іншу назву прямій m — через дві її точки. Скільки назв отримаємо?

45'. На малюнку 36 назвіть точку, яка:
1) лежить між двома точками на прямій m;
2) лежить з точкою B по один бік від точки D.

46'. На малюнку 37 назвіть промені; доповняльні промені.



Мал. 36



Мал. 37

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

47°. Проведіть пряму. Позначте точки A і B, що лежать на цій прямій, і точки C і D, що не лежать на ній. Запишіть позначення цієї прямої.

48°. Позначте три точки A, B і C, що не лежать на одній прямій. Проведіть прямі AB, BC і AC.

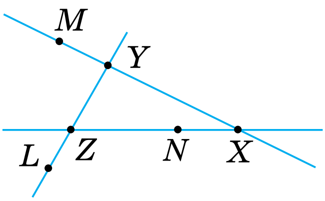
49°. Проведіть пряму і позначте на ній точки A і B. Позначте на цій прямій:
1) точку C так, щоб точка B лежала між точками A і C;
2) точки D і E, що лежать з одного боку від точки B;
3) точки L і M так, щоб і точка A, і точка B лежали між точками L і M.

50°. Проведіть пряму і позначте на ній точки C і D. Позначте на цій прямій точку A так, щоб точка D лежала між точками A і C.

51°. Чи завжди можна провести пряму через: 1) три точки; 2) чотири точки? Зробіть малюнки.

52°. Позначте точку M. Проведіть через неї три прямі. Скільки прямих можна провести через точку M?

53°. За малюнком 38 з'ясуйте, як розміщені точки відносно прямих. Накресліть у зошиті таблицю 5 і заповніть її за зразком, наведеним у другому стовпчику.



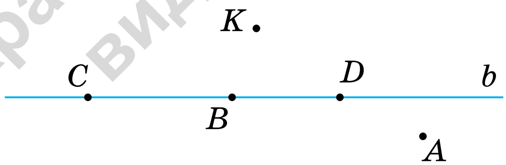
Мал. 38

Таблиця 5

	пряма XY	пряма YZ	пряма XZ	пряма MX
точка X	$X \in XY$			
точка Y	$Y \in XY$			
точка Z	$Z \notin XY$			
точка L	$L \notin XY$			
точка M	$M \in XY$			
точка N	$N \notin XY$			

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

54°. За малюнком 39 з'ясуйте, як розміщені точки відносно прямої. Зробіть відповідні записи.



Мал. 39

55°. Проведіть дві прямі c і d, що перетинаються в точці M. Позначте:
1) точку K на прямій c;
2) точку L на прямій d;
3) точку O, яка не лежить на цих прямих;
4) точку A, через яку не проходить ані пряма c, ані пряма d.
Зробіть відповідні записи. Чи можна дані прямі позначити по-іншому? Як?

qr.orioncentr.com.ua/WJB8u

56°. Проведіть дві прямі a і b, що перетинаються в точці A. Позначте:
1) точку B на прямій a;
2) точку C на прямій b;
3) точку D, яка не лежить на цих прямих;
4) точку E, через яку не проходить ані пряма a, ані пряма b.
Зробіть відповідні записи. Чи можна дані прямі позначити по-іншому? Як?

57°. На прямій n позначили точки X, Y і Z. Відомо, що:
1) точки X і Y лежать з одного боку від точки Z, а точка Y не лежить між точками X і Z;
2) точки X і Z лежать з одного боку від точки Y, а точка X не лежить між точками Y і Z.
3) точки Y і Z лежать з одного боку від точки X, а точка Y не лежить між точками X і Z;
4) точки Y і Z лежать з одного боку від точки X, а точка Z не лежить між точками X і Y.
Зробіть малюнки.

58°. На прямій a позначили точки A, B і C. Відомо, що точки A і B лежать з одного боку від точки C, а точка B не лежить між точками A і C. Зробіть малюнок.

59°. Проведіть два промені — CB і BC. Назвіть початок кожного променя.

60°. Проведіть два промені — KM і MK. Назвіть початок кожного променя.

61°. Проведіть прямі AB і CD, що перетинаються в точці O, яка лежить між точками A і B, C і D. Запишіть:
1) промені; 2) доповняльні промені.

62°. За малюнком 40 з'ясуйте, які з точок:
1) лежать на прямій CB, але не належать променю DC;
2) лежать на прямій CB, але не належать променю KD;
3) лежать на прямій DB, але не належать променю KC;
4) лежать на прямій KD, але не належать променю DK;
5) належать променю DB і променю BC;
6) належать променю BD і променю KC;
7) належать променю DB і променю CK.

qr.orioncentr.com.ua/V9EaL

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Мал. 40

Мал. 41

63°. За малюнком 41 з'ясуйте, які з точок:
1) лежать на прямій AN, але не належать променю CM;
2) належать променю AC і променю MC.

64°. Позначте на прямій: 1) три точки; 2) чотири точки. Скільки променів одержали? Запишіть їх назви, позначивши на прямій потрібні для запису точки.

65°. Позначте на прямій дві точки. Скільки променів одержали? Запишіть їх назви, позначивши на прямій потрібні для запису точки.

66°. Проведіть доповняльні промені з початком у точці C. Запишіть їх назви, позначивши на прямій потрібні для запису точки.

67°. Проведіть доповняльні промені з початком у точці B. Запишіть їх назви, позначивши на прямій потрібні для запису точки.

68°. Чи можуть бути доповняльними промені:
1) AB і BA; 2) QP і QR; 3) CM і AC?
Відповідь поясніть.

69°. Чи можуть бути доповняльними промені OB і OA? Відповідь поясніть.

70°. За малюнком 40 запишіть усі пари доповняльних променів. Скільки таких пар утворилося?

71°. За малюнком 41 запишіть усі пари доповняльних променів. Скільки таких пар утворилося?

72. Дві точки визначають одну пряму. Скільки прямих можуть визначати:
1) три точки; 2) чотири точки?
Зробіть малюнки.

73. Проведіть пряму a. Позначте точки A, B, C так, щоб прямі AB і a перетинались:
1) у точці C, і точка B лежала між точками A і C;
2) у точці B, і точка B лежала між точками A і C.

74. Проведіть пряму c. Позначте точки O, P, C так, щоб прямі OP і c перетинались у точці O, і точка C лежала між точками O і P.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

75. Чи правильно, що коли точка C не лежить між точками A і B, то ці точки не лежать на одній прямій? Зробіть малюнок.

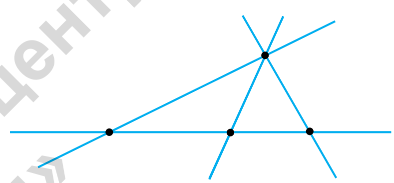
76. Проведіть чотири прямі. Позначте точки їх перетину. Скільки випадків треба розглянути? Скільки променів утворилось? Назвіть їх.

77. Проведіть три прямі. Позначте точки їх перетину. Скільки випадків треба розглянути? Скільки променів утворилось? Назвіть їх.

78. **Промені OA і OB — доповняльні. Чи лежать на одній прямій точки A, O, B?** Відповідь поясніть.

79*. Через точку A проведіть три прямі. Скільки променів утворилося? Якщо через точку A провести n прямих, то скільки променів утвориться?

80*. На малюнку 42 ви бачите, що чотири прямі перетинаються в чотирьох точках. Зробіть малюнки, на яких чотири прямі перетинаються: 1) у п'яти точках; 2) у шести точках. Чи можуть чотири прямі мати три точки перетину?



Мал. 42

81*. Дано п'ять точок, з яких жодні три не лежать на одній прямій. У цих точках попарно перетинаються п'ять прямих так, що утворилася «зірка». Скільки прямих перетинають кожну з даних прямих? Скільки всього точок перетину утворилося? Чи є серед них точка, через яку не проходить жодна пряма?

82*. Позначте на прямій точку. Скільки променів утворилося? Позначте ще одну точку і підрахуйте кількість утворених променів. Скільки променів отримаємо, якщо позначимо на прямій n точок?

Проявіть компетентність

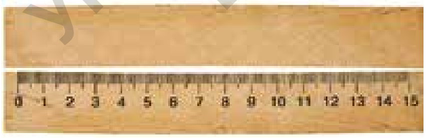
83. На карті України (мал. 43) знайдіть обласні центри, які розташовані:
1) на лівому березі Дніпра;
2) на правому березі Дніпра;
3) на умовній прямій «Луцьк–Рівне»;

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

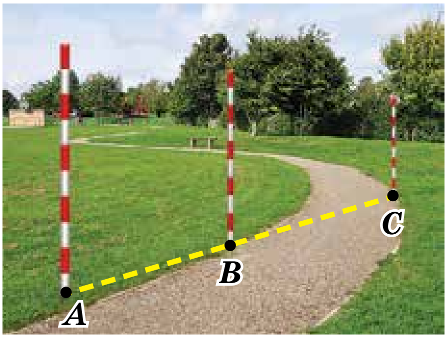
4) на умовній прямій між містами Чернігів і Вінниця. Запишіть відповідь.

Мал. 43

84. Правильність виготовлення лінійки перевіряють у такий спосіб. Через дві точки за допомогою лінійки проводять лінію. Потім лінійку перевертають і через ті самі точки знову проводять лінію (мал. 44). Якщо лінії збігаються, то лінійка правильна. Поясніть, чому це так.



Мал. 44



Мал. 45

85. Для проведення прямих ліній на землі користуються віхами (кілками, загостреними з одного боку). Поясніть, як проводять (провішують) пряму за допомогою віх (мал. 45).

§ 2. ВІДРІЗКИ ТА ЇХ ВИМІРЮВАННЯ

qr.orioncentr.com.ua/bXAJZ

1. Що таке відрізок

Ситуація. На уроці фізичної культури учні 7-А класу виконували стрибок у довжину з місця. Марина показала найвищий результат для дівчат цього віку — 160 см, та за нормативами отримала оцінку 12 балів.

Як учитель визначив результат Марини?

Виміряв довжину стрибка Марини мірною стрічкою.

Як на аркуші паперу схематично показати, на яку довжину стрибнула Марина?

Побудувати відрізок (мал. 46).

Запам'ятайте!

Відрізком **називається частина прямої, яка складається з двох точок на прямій та всіх її точок, що лежать між даними точками.**

Ці дві точки називаються *кінцями відрізка*. Інші точки відрізка називаються його *внутрішніми точками*. Наприклад, на малюнку 47 зображено *відрізок AB* (або BA). Він складається з точок A і B та всіх точок прямої, що лежать між ними.

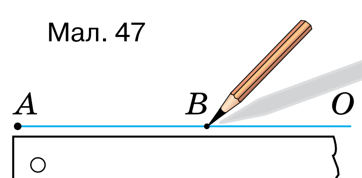
160 см

Мал. 46

відрізок AB

Мал. 47

Як правило, відрізок відкладають на промені від його початку (мал. 48).



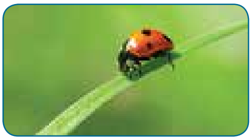
Мал. 48

Запам'ятайте!

На будь-якому промені від його початку можна відкласти тільки один відрізок даної довжини.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

2. Довжина відрізка

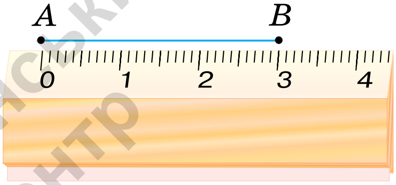


Як визначити довжину відрізка?

Виміряти його.

Щоб виміряти відрізок, спочатку обирають *одиницю вимірювання — одиничний відрізок*. Це може бути 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км та ін. Потім визначають, скільки разів у відрізку вміщується одиничний відрізок.

Наприклад, на малюнку 49 одиничний відрізок «1 см» уміщується у відрізку AB рівно 3 рази. Це означає, що довжина відрізка AB дорівнює 3 см.



Мал. 49

Коротко говоримо: «Відрізок AB дорівнює 3 см»; записуємо: $AB = 3$ см.

Чи зміниться довжина відрізка AB, якщо за одиницю вимірювання візьмемо 1 мм?

Ні, довжина відрізка не зміниться, але буде виражена інакше: $AB = 30$ мм.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

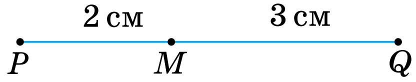
Запам'ятайте!

Довжина будь-якого відрізка більша за нуль.

Чи можна знайти довжину відрізка за довжинами його частин?

Так.

Наприклад, на малюнку 50 точка M ділить відрізок PQ на два відрізки: PM і MQ. Бачимо, що $PM = 2$ см, $MQ = 3$ см, а $PQ = 5$ см. Отже, довжина відрізка PQ дорівнює сумі довжин відрізків PM і MQ.



Мал. 50

Запам'ятайте!

Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він ділиться будь-якою його точкою.

Задача Точки A, B і C лежать на одній прямій. Чи може точка C лежати між точками A і B, якщо $AB = 6$ см, $AC = 9$ см, $CB = 3$ см?

Розв'язання Якщо точка C лежить між точками A і B, то $AB = AC + CB$. Але $6 \neq 9 + 3$. Отже, точка C не лежить між точками A і B.

Щоб установити, чи лежить точка C між точками A і B, перевірте правильність рівності $AB = AC + CB$.

Як з'ясувати, чи лежать на одній прямій три точки A, B і C?

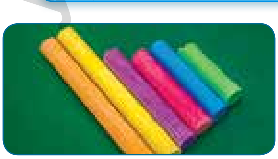
Треба переконатися у правильності однієї з рівностей:

$$AB = AC + CB,$$
$$\text{або } AC = AB + BC,$$
$$\text{або } BC = BA + AC.$$

3. Порівняння відрізків. Відстань

qr.orioncentr.com.ua/84Z4B

Як можна порівняти два відрізки?



Або накладанням, або за їхніми довжинами.

Запам'ятайте!

Два *відрізки* називаються *рівними*, якщо їх довжини рівні.

Із двох нерівних відрізків більший той, довжина якого більша.

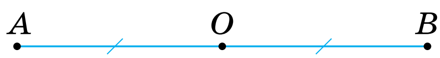
Наприклад, якщо $AB = 4$ см, $CD = 4$ см, $MN = 3{,}5$ см, то $AB = CD$, але $AB > MN$ і $CD > MN$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Чи можна відрізок поділити на два рівні відрізки?

Так.

Наприклад, на малюнку 51 відрізок *AB* точкою *O* ділиться на два рівні відрізки *AO* і *OB*.



Мал. 51

Точка, яка ділить відрізок на два рівні відрізки, називається *серединою відрізка*.

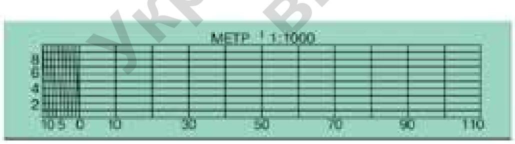
Наприклад, на малюнку 51 точка *O* — середина відрізка *AB*.

Записуємо: $AO = OB$, $AB = 2AO = 2OB$.

Рівні відрізки позначаємо на малюнку однаковою кількістю рисок.

Довжину відрізка *AB* називають також *відстанню* між точками *A* і *B*.

Відстані вимірюють за допомогою різних приладів. У технічному кресленні використовують масштабну міліметрову лінійку (мал. 52). Діаметри циліндричних предметів вимірюють штангенциркулем (мал. 53) або мікрометром (мал. 54). Для вимірювання відстаней на місцевості користуються рулеткою (мал. 55) або польовим циркулем (мал. 56).

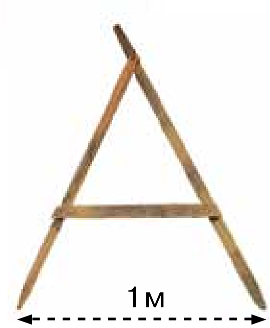


Мал. 52

Мал. 53

Мал. 54

Мал. 55



Мал. 56

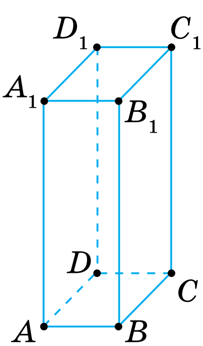
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

4. Відрізки як елементи граней прямокутного паралелепіпеда, куба, піраміди

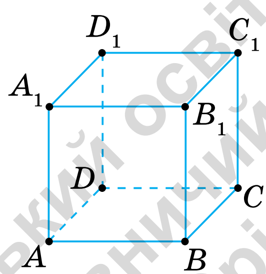
Які відрізки є в прямокутному паралелепіпеді, кубі, піраміді?

Кожне ребро — це спільний відрізок двох сусідніх граней цих просторових фігур.

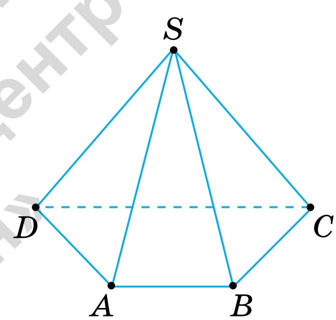
Наприклад, у прямокутному паралелепіпеді (мал. 57) і кубі (мал. 58) сусідні грані $ABCD$ і ABB_1A_1 мають спільний відрізок AB. А в чотирикутній піраміді (мал. 59) відрізок AB є спільним ребром основи $ABCD$ піраміди та її грані SAB.



Мал. 57



Мал. 58



Мал. 59

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Якими елементами граней прямокутного паралелепіпеда, куба, піраміди є відрізки?

Сторонами відповідних многокутників.

Наприклад, у прямокутному паралелепіпеді (мал. 57) кожна грань є прямокутником, сторони якого є відрізками. У кубі (мал. 58) усі грані є квадратами, а їх сторони — відрізками. У чотирикутній піраміді (мал. 59) основа є чотирикутником, а бічні грані — трикутниками. Сторони цих многокутників теж є відрізками.

В усіх предметах довкілля, що мають форму прямокутного паралелепіпеда, куба, піраміди, їх ребра — це відрізки.

Дізнайтеся більше

1. У вас може виникнути непросте запитання: *Як будуються означення?* Визначаючи поняття «відрізок», ми користувалися поняттями «точка», «пряма», «лежати між». Узагалі, визначаючи будь-яке поняття, користуються іншими, вже відомими поняттями. Але не можна дати означення всім поняттям. Тому деякі з них доводиться приймати без означень. Такі поняття називають *основними*. Для всіх інших понять даються означення.

Так, для поняття «промінь» основними поняттями є «точка», «пряма», «лежати з одного боку».

2. У давнину «вимірювальними інструментами» були частини тіла людини: долоня (містила чотири пальці), лікоть (дорівнював шести долоням), фаланга великого пальця (дорівнювала семи зернинам ячменю, розміщеним уздовж прямої) та ін. Використовувалися також крок, розмах рук. Поступово в кожній державі для потреб вимірювання встановилися спільні одиниці: в Англії — ярд, фут, дюйм та ін.; в Україні — верста, сажень, аршин, миля та ін.

З 1875 р. в Європі почала запроваджуватися *метрична система мір,* яка була розроблена французькими вченими ще в 1799 р.

У нас її прийнято в 1918 р. За одиницю довжини в цій системі взято *метр* (від грецького *metron*, що означає «міра»). Метр наближено становить $\frac{1}{40000000}$ частину земного меридіана. Метрична система зручна тим, що побудована на десятковій основі: 10 мм = 1 см, 10 см = 1 дм, 10 дм = 1 м; 1000 м = 1 км.

Використовуються й інші одиниці вимірювання відстаней: у мореплавстві — морська миля (1,852 км), в астрономії — світловий рік (шлях, який світло проходить за рік).

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
відрізок	closed interval, segment	Strecke (*f*), Segment (*n*)	segment (*m*)

qr.orioncentr.com.ua/HlbWa

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке відрізок.
2. Як позначають відрізки?
3. Яка властивість відкладання відрізків?
4. Сформулюйте властивості вимірювання відрізків.
5. Які відрізки називаються рівними?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

6. Що таке відстань між двома точками?
7. Якими елементами граней куба, піраміди є відрізки?

Усне тренування

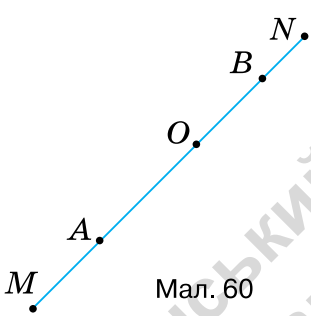
1. Подайте в дециметрах: 5 мм, 5 см, 5 м, 5 км.
2. Подайте в метрах: 10 мм, 10 см, 10 дм, 10 км.

Розв’яжіть задачі

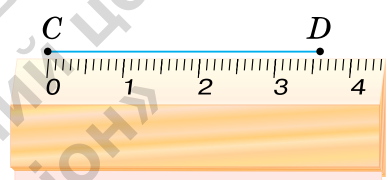
86'. Назвіть на малюнку 60 кінці та внутрішні точки відрізка: 1) MN; 2) AN; 3) AB.

87'. Скільки відрізків завдовжки 4 см можна відкласти на промені OA від його початку O: 1) один; 2) два; 3) безліч?

88'. Яка довжина відрізка CD (мал. 61): 1) у сантиметрах; 2) у міліметрах?



Мал. 60



Мал. 61

89'. Чи є помилка в записі: 1) $AB = 0$ см; 2) $AB = 0{,}01$ см; 3) $AB = -2$ см? Відповідь поясніть.

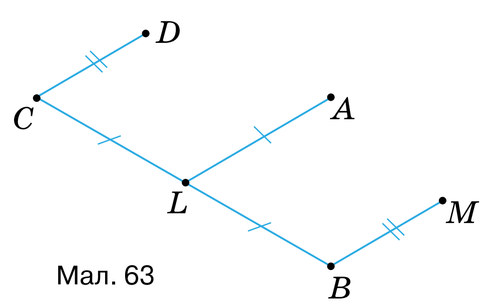
90'. Як знайти довжину відрізка AN (мал. 60)?

91'. Як обґрунтувати, що точка M лежить між точками A і N (мал. 62)?

92'. Назвіть рівні відрізки на малюнку 63. Яка точка є серединою відрізка BC?

Мал. 62

Мал. 64



Мал. 63

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

93'. На малюнку 64 схематично показано розміщення населених пунктів A, M і N. Як визначити відстань між населеними пунктами: 1) A і M, якщо відомі відстані AN і MN; 2) A і N, якщо відомі відстані AM і MN?

94°. Накресліть промінь OA і від його початку відкладіть відрізок завдовжки:

1) 3 см; 3) 4 см;
2) 3,5 см; 4) 4,2 см.

Дайте назву кожному відрізку та запишіть відповідні рівності.

95°. Накресліть промінь OB і від його початку відкладіть відрізок завдовжки 2,4 см. Дайте назву відрізку та запишіть відповідну рівність.

96°. Проведіть пряму a та позначте на ній точки A і B. Позначте:
1) точки C і D, які лежать на відрізку AB;
2) точки E і F, які лежать на прямій a, але не лежать на відрізку AB.

97°. Проведіть пряму b і позначте на ній точки C і D. Позначте:
1) точку A, яка лежить на відрізку CD;
2) точку B, яка лежить на прямій a, але не лежить на відрізку CD.

98°. Накресліть відрізки AB і CD так, щоб:
1) $AB = 3{,}5$ см, $CD = 42$ мм; 2) $AB = 38$ мм, $CD = 0{,}5$ дм.

99°. Накресліть два відрізки та виміряйте їх. Зробіть відповідні записи.

100°. Накресліть відрізок AB та позначте на ньому точки C і D. Скільки відрізків утворилося?

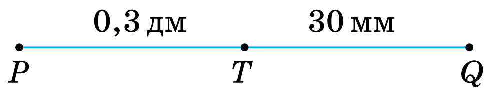
101°. Накресліть відрізок AB та позначте на ньому точку C. Скільки відрізків утворилося?

102°. Накресліть відрізок MN завдовжки a см. Позначте на відрізку точку K так, щоб $MK = b$ см. Знайдіть довжину відрізка KN, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 4{,}5$ см; 2) $a = 0{,}3$ дм, $b = 20$ мм; 3) $a = 40$ мм, $b = 1{,}5$ см.

qr.orioncentr.com.ua/2yqyi

103°. Яка довжина відрізка PQ на малюнку 65? Відповідь поясніть.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»



Мал. 65

104°. Точка B ділить відрізок AC на два відрізки. Накресліть у зошиті таблицю 6 та заповніть її.

Таблиця 6

AC		6,7 см	2,2 дм
AB	5,5 см		16 см
BC	45 мм	2,4 см	

105°. Точки A, B і C лежать на одній прямій. Чи лежить точка C між точками A і B, якщо:
1) $AB = 5$ см, $AC = 11$ см, $BC = 6$ см;
2) $AB = 12$ см, $AC = 3{,}5$ см, $BC = 8{,}5$ см?

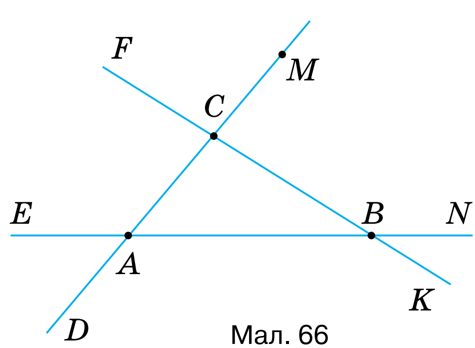
106°. Точки A, B і C лежать на одній прямій. Чи лежить точка B на відрізку AC, якщо $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AC = 11$ см?

107°. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо:
1) $AB = 17$ см, $AC = 6{,}5$ см, $BC = 10{,}5$ см;
2) $AB = 1{,}5$ дм, $AC = 0{,}6$ дм, $BC = 1$ дм?

108°. Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо $AB = 3$ см, $AC = 4$ см, $BC = 5$ см?

109°. Накресліть промінь OR і від його початку відкладіть відрізок, рівний відрізку (мал. 66):
1) AB; 2) BC; 3) AC; 4) AM.

110°. Накресліть промінь ST і від його початку відкладіть відрізок, рівний відрізку CM (мал. 66).



Мал. 66

111°. Точка C лежить на відрізку AB. Який із відрізків довший — AB чи AC?

112°. Точка A лежить на відрізку BC. Який із відрізків довший — AB чи BC?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

113°. Відрізки AC, BD і KL мають довжини: 1) 3 см, 20 мм, 0,3 дм; 2) 0,01 дм, 10 см, 1 мм; 3) 4,2 мм, 0,042 дм, 0,42 см. Порівняйте дані відрізки.

114°. Відрізки AC, BD і KL мають довжини 3,5 см, 37 мм, 0,35 дм. Порівняйте дані відрізки.

115°. Точка O — середина відрізка AB, а точка C — середина відрізка AO. Накресліть у зошиті таблицю 7 та заповніть її. Яка довжина поданих відрізків у дециметрах? А в метрах?

qr.orioncentr.com.ua/Enhnf

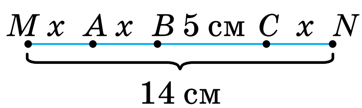
Таблиця 7

AB	9 см		
AO		43 мм	
OB			83 мм
AC			
CO			
CB			

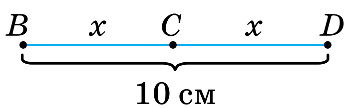
116°. Точка C — середина відрізка AB, точка O — середина відрізка AC. Знайдіть довжину відрізків AC, CB, AO, OC, OB, якщо $AB = 8$ см.

117°. Знайдіть невідомі відстані за даними на малюнку 67.

118°. Знайдіть невідомі відстані за даними на малюнку 68.



Мал. 67



Мал. 68

119°. Віртуальні населені пункти Абрикосове, Веселе, Заможне і Щасливе розміщені вздовж прямолінійної траси. Веселе розміщується на рівних відстанях від Абрикосового і Щасливого, а Заможне — посередині між Веселим і Щасливим. Накресліть у зошиті таблицю 8 та заповніть її для різних указаних віртуальних відстаней.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

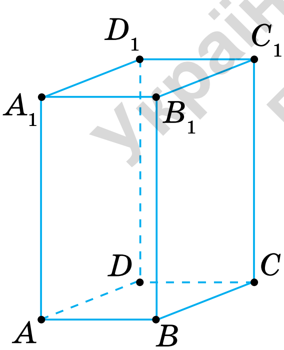
Таблиця 8

Абрикосове–Щасливе	24 км			
Абрикосове–Веселе		8 км		
Веселе–Щасливе			6 км	
Веселе–Заможне				4 км
Заможне–Щасливе				
Абрикосове–Заможне				

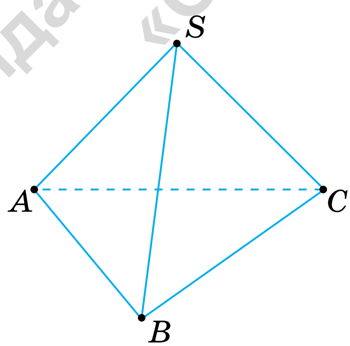
120°. Школа, бібліотека, музей і спортивний комплекс розміщені вздовж прямолінійного проспекту. Музей розташований посередині між школою та спортивним комплексом, а бібліотека — посередині між музеєм та школою. Знайдіть відстані між усіма чотирма об'єктами інфраструктури, якщо відстань від школи до спортивного комплексу становить 1 км.

121°. Скільки ребер має: 1) прямокутний паралелепіпед (мал. 69); 2) трикутна піраміда (мал. 70)? Назвіть їх.

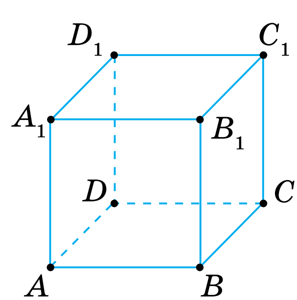
122°. Скільки ребер має куб (мал. 71)? Назвіть їх.



Мал. 69



Мал. 70



Мал. 71

123°. Знайдіть суму довжин усіх ребер: 1) прямокутного паралелепіпеда, виміри якого 3 см, 4 см, 5 см; 2) трикутної піраміди, кожне ребро якої дорівнює 6 см.

124°. Знайдіть суму довжин усіх ребер куба, якщо сторона його грані дорівнює 10 см.

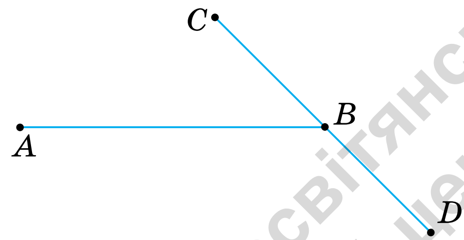
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

125. На прямій позначте точки A, B, C, D і E. Запишіть усі відрізки, на яких:
1) лежить точка D; 2) не лежить точка C.

126. Позначте точки A, B, C і D так, щоб ніякі три з них не лежали на одній прямій. Скільки існує відрізків з кінцями в цих точках?

127. На відрізку AB завдовжки a позначте точку C так, щоб $AC : CB = 3 : 1$. Знайдіть довжину відрізків AC і CB, якщо:
1) $a = 8$ см; 2) $a = 12$ см; 3) $a = 18$ см.

128. На малюнку 72 $AB = 2BC$. За якої умови $AB = CD$?



Мал. 72

129. Яка з точок A, B і C лежить між двома іншими, якщо:
1) $AB = 16$ см, $BC = 2$ дм, $AC = 4$ см;
2) $AB + BC = AC$;
3) $BA + AC = BC$;
4) $BA = BC - AC$?

130. Як розміщені точки A, B і M, якщо $AM + MB = AB$ і $AM = MB$?

131. Точки M, N і K лежать на одній прямій. Відомо, що $MN = 14$ см, $NK = 16$ см. Якою може бути відстань MK?

132. На промені AK відкладіть відрізки $AB = 6$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть відстань між точками A і C, якщо:
1) точка B лежить між точками A і C;
2) точка C лежить між точками A і B.

133. На промені AM відкладіть відрізки $AB = 30$ мм, $AC = 40$ мм. Знайдіть відстань:
1) між точками B і C;
2) між серединами відрізків AB і AC.

134. Відрізок завдовжки 18 см поділено на дві нерівні частини. Чому дорівнює відстань між серединами цих частин? Відповідь поясніть.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

135. **Відрізок завдовжки m поділено на два довільні відрізки. Знайдіть відстань між серединами цих відрізків.**

136. Відрізок поділено на дві нерівні частини. Знайдіть довжину цього відрізка, якщо відстань між серединами цих частин дорівнює n.

137. У прямокутному паралелепіпеді всі ребра рівні, а їх сума дорівнює 144 см. Знайдіть довжину ребра паралелепіпеда.

138. У кубі сума довжин ребер дорівнює 48 см. Знайдіть довжину ребра куба.

139. У чотирикутній піраміді всі ребра рівні, а їх сума дорівнює 56 см. Знайдіть довжину ребра піраміди.

140. У трикутній піраміді всі ребра рівні, а сума їх довжин дорівнює 30 см. Знайдіть довжину ребра піраміди.

141*. Накресліть відрізок і позначте на ньому чотири точки. Скільки утворилося відрізків, що мають не більше однієї спільної точки?

142*. Накресліть відрізок. Позначте на відрізку спочатку одну точку, потім дві точки, три точки і т. д. Кожного разу підраховуйте кількість утворених відрізків. Спробуйте встановити деяке правило підрахунку кількості утворених відрізків.

143*. Із чотирьох точок A, B, C і D точки A, B, C лежать на одній прямій і точки B, C, D також лежать на одній прямій. Обґрунтуйте, що всі чотири точки лежать на одній прямій.

144*. Відрізок $AM = 24$ см поділено трьома точками на чотири нерівні відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 20 см. Знайдіть відстань між серединами середніх відрізків.

145*. Відстань між точками A і B дорівнює a см. Знайдіть на прямій AB всі точки, які задовольняють умову:
1) відстань від кожної з них до точки A вдвічі менша, ніж відстань до точки B, якщо $a = 9$ см;
2) сума відстаней від кожної з них до точок A і B дорівнює 8 см, якщо $a = 8$ см;
3) різниця відстаней від кожної з них до точок A і B дорівнює 2 см, якщо $a = 14$ см.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Проявіть компетентність

146. Відстань між Сумами й Житомиром дорівнює 480 км. Житомир розташований на відстані 140 км від Києва. Визначте відстань від Києва до Сум, вважаючи, що всі три міста розміщені на одній прямій.

147. Щоб дізнатися про довжину свого кроку, відміряйте рулеткою відстань 10 м і пройдіть цю відстань кілька разів. Запишіть, скільки кроків ви робили щоразу. Знайдіть середню кількість кроків. Поділіть 10 м на отриману середню кількість кроків — це й буде довжина вашого кроку. Виміряйте у кроках і подайте в метрах: 1) довжину класної кімнати; 2) довжину шкільного коридору; 3) відстань від вашого дому до найближчої зупинки транспорту.

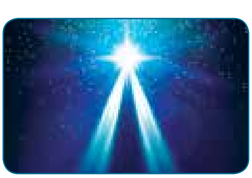
148. Неозброєним оком людина може бачити одноповерховий будинок на відстані 5 км, вікна в цьому будинку — за 4 км, а димар — за 3 км. На якій приблизно відстані від будинку знаходиться людина, яка:
1) вже бачить будинок, але ще не бачить вікна в ньому;
2) вже бачить вікна в будинку, але ще не бачить димар?

149. Укажіть рівні відрізки на предметах довкілля за малюнком 73.

Мал. 73

§ 3. КУТИ ТА ЇХ ВИМІРЮВАННЯ

1. Що таке кут



Мал. 74

Ситуація. Артем і Поліна дивилися фільм-фентезі про міжпланетні подорожі. Один із кадрів (мал. 74) їх заворожив. Артем сказав: «Об’єкт, що світиться, надсилає два промені з повідомленнями». Поліна додала, що ці промені утворюють кут і, можливо, він теж містить якусь інформацію про об’єкт.

qr.orioncentr.com.ua/qM0a7

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

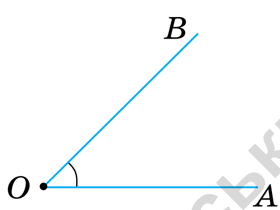
Чи праві Артем і Поліна?

Так, якщо йдеться про геометричні фігури — точку, промені, кут. Усе інше — фантазії.

Запам'ятайте!

Кутом **називається геометрична фігура, утворена двома променями зі спільним початком.**

Промені називаються *сторонами кута*, а їх спільний початок — *вершиною кута*. Наприклад, на малюнках 75 і 76 зображено кути з вершиною O та сторонами OA і OB. На малюнку 76 сторони кута є доповняльними променями, тому цей кут називають *розгорнутим*.



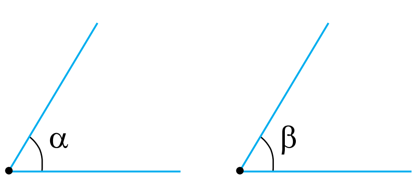
Мал. 75

Мал. 76

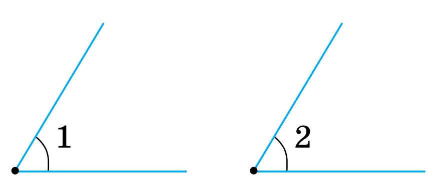
Коротко записуємо: $\angle AOB$ або $\angle BOA$. Знак $\angle$ замінює слово «кут». Даний кут можна позначити лише назвою його вершини, наприклад, $\angle O$.

Якщо кут позначено трьома буквами, то середня буква в його назві відповідає вершині кута.

Кут можна позначити і маленькою буквою грецького алфавіту: α, β та ін. (мал. 77). Тоді знак $\angle$ не пишуть. Розглядаючи кілька кутів, їх можна позначити номерами, наприклад, $\angle 1$, $\angle 2$ (мал. 78).



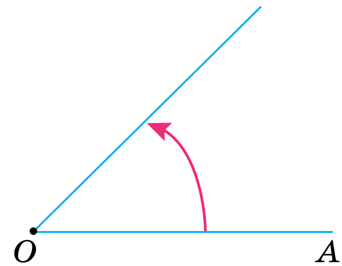
Мал. 77



Мал. 78

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Як правило, кут відкладають від променя по один бік від нього (мал. 79).

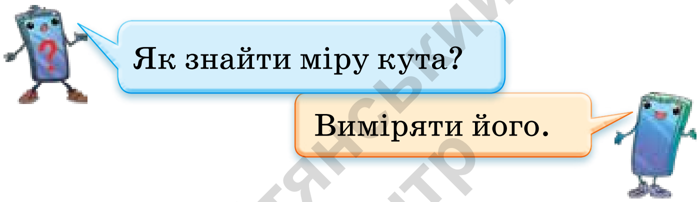


Мал. 79

Запам'ятайте!

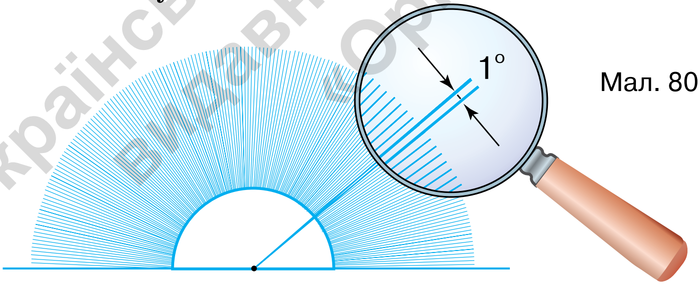
Від будь-якого променя по один бік від нього можна відкласти тільки один кут даної міри.

2. Міра кута



Для вимірювання кутів потрібна *одиниця вимірювання* — *одиничний кут*. Щоб утворити його, поділимо розгорнутий кут на 180 рівних частин (мал. 80). Кут, утворений двома сусідніми променями, обираємо за одиничний. Його міру називають *градусом*.

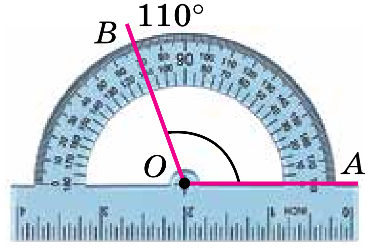
Коротко записуємо 1°.



Мал. 80

Запам'ятайте!

Градусна міра будь-якого кута більша за нуль.
Градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180°.



Мал. 81

Кути вимірюють *транспортиром* (мал. 81).

Наприклад, на малюнку 81 градусна міра кута *AOB* дорівнює 110°.

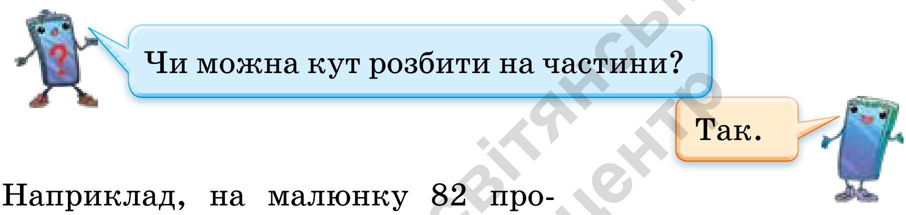
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Коротко говоримо: «Кут AOB дорівнює 110°» і записуємо: $\angle AOB = 110°$.

Для точнішого вимірювання кутів, градус ділять на мінути і секунди. *Мінутою* називають $\frac{1}{60}$ градуса, а *секундою* — $\frac{1}{60}$ мінути.

Одну мінуту позначають $1'$, одну секунду — $1''$.

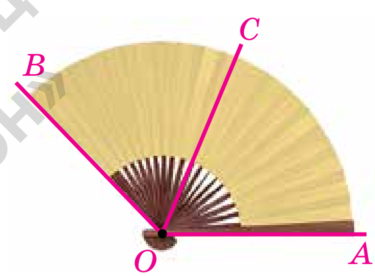
Наприклад, кут в 50 градусів, 23 мінути і 39 секунд записуємо: $50°\,23'\,39''$.



Наприклад, на малюнку 82 промінь OC проходить між сторонами кута AOB і ділить його на два кути: $\angle AOC$ і $\angle COB$. Можемо записати:

$$\angle AOB = \angle AOC + \angle COB.$$

Коротко говоримо: «Промінь OC — внутрішній промінь кута AOB».



Мал. 82

Запам'ятайте!

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір частин, на які він ділиться будь-яким променем, що проходить між його сторонами.

Задача Чи проходить промінь OC між сторонами кута AOB, якщо $\angle AOB = 50°$, $\angle AOC = 20°$, $\angle COB = 30°$?

Розв'язання Оскільки $50° = 20° + 30°$, то, за властивістю вимірювання кутів, промінь OC проходить між сторонами кута AOB.

Якщо потрібно встановити, чи проходить промінь *OC* між сторонами кута *AOB*, перевірте правильність рівності $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

3. Порівняння кутів

Як можна порівняти два кути?

Або накладанням, або за градусними мірами.

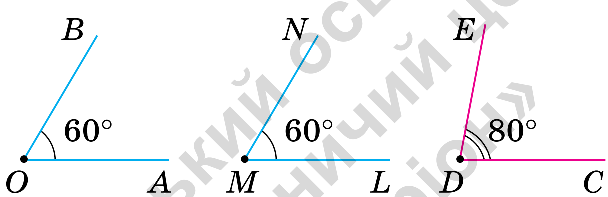
qr.orioncentr.com.ua/1l1CO

Запам'ятайте!

Два *кути* називаються *рівними*, якщо їх градусні міри рівні.

Із двох кутів більшим є той кут, градусна міра якого більша.

Наприклад, якщо $\angle AOB = 60°$, $\angle LMN = 60°$, $\angle CDE = 80°$ (мал. 83), то $\angle AOB = \angle LMN$, але $\angle AOB < \angle CDE$ і $\angle LMN < \angle CDE$.

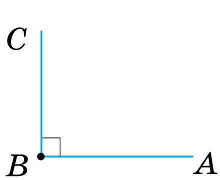


Мал. 83

На які види можна поділити кути, менші від розгорнутого?

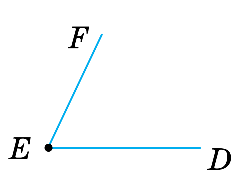
На три види — прямі, гострі та тупі кути.

Кут, що дорівнює 90°, називають *прямим* (мал. 84). Кут, менший від 90°, називають *гострим* (мал. 85), а більший за 90° — *тупим* (мал. 86).



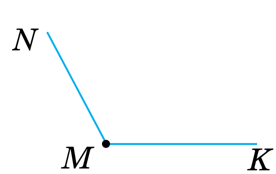
Прямий кут
$\angle ABC = 90°$

Мал. 84



Гострий кут
$\angle DEF < 90°$

Мал. 85



Тупий кут
$90° < \angle KMN < 180°$

Мал. 86

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Знаком «⌝» на малюнку позначаємо прямий кут.

Чи можна кут поділити на два рівні кути?

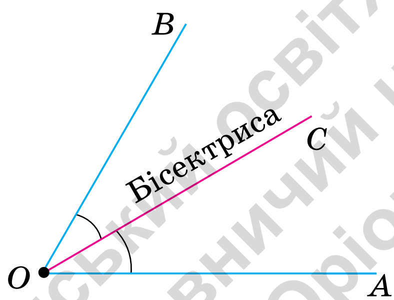
Так.

На окремому аркуші зобразимо будь-який кут, а потім зігнемо аркуш так, щоб сторони кута сумістилися. Лінія згину намітить такий внутрішній промінь кута, який ділить даний кут навпіл.

Запам'ятайте!

Промінь, який ділить кут на два рівні кути, називається *бісектрисою кута*.

Наприклад, на малюнку 87 промінь OC — бісектриса кута AOB.



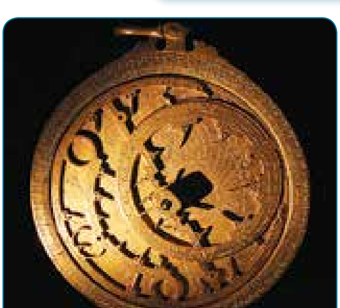
Мал. 87

Записуємо: $\angle AOC = \angle COB$, $\angle AOB = 2\angle AOC = 2\angle COB$.

Рівні кути позначаємо на малюнку однаковою кількістю дужок.

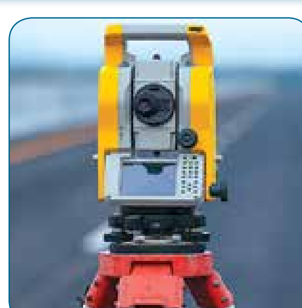
Які прилади використовують для вимірювання кутів на місцевості?

Астролябію (мал. 88) або теодоліт (мал. 89).



Перська астролябія XVIII ст.

Мал. 88



Мал. 89

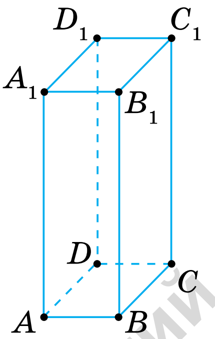
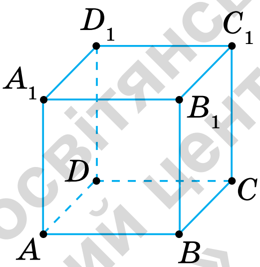
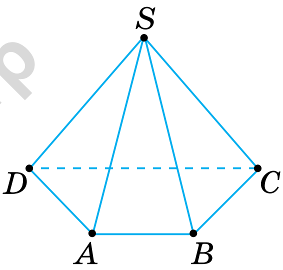
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

4. Кути як елементи граней прямокутного паралелепіпеда, куба, піраміди

Які кути є в прямокутному паралелепіпеді, кубі, піраміді?

Наприклад, кути їхніх граней (табл. 9).

Таблиця 9

Просторова фігура	Прямокутний паралелепіпед	Куб	Чотирикутна піраміда
Малюнок			
Грані	прямокутники	квадрати	чотирикутник і трикутники
Кути грані $ABCD$	$\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$	$\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$	$\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$, $\angle DAB$
Кути передньої грані	$\angle ABB_1$, $\angle BB_1A_1$, $\angle B_1A_1A$, $\angle A_1AB$	$\angle ABB_1$, $\angle BB_1A_1$, $\angle B_1A_1A$, $\angle A_1AB$	$\angle SAB$, $\angle ABS$, $\angle BSA$

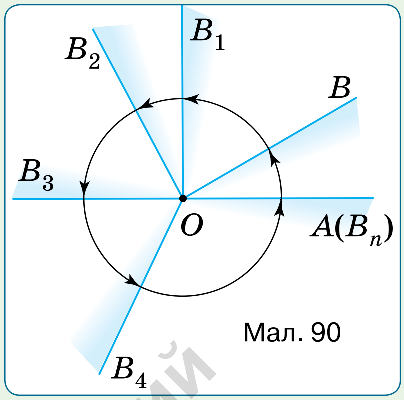
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

У всіх предметів довкілля, що мають форму прямокутного паралелепіпеда, куба, піраміди, кути їхніх граней є кутами цих предметів.

Про інші види кутів цих просторових фігур ви дізнаєтесь у старшій школі.

Дізнайтеся більше

1. Кут можна уявити як результат повороту променя, наприклад, OA, навколо свого початку O (мал. 90). Унаслідок повороту променя початкове OA і кінцеве OB його положення утворять кут AOB. Обертаючи промінь у тому самому напрямку, будемо отримувати нові кути: $\angle AOB_1$ — прямий, $\angle AOB_2$ — тупий, $\angle AOB_3$ — розгорнутий, $\angle AOB_4$ — більший за розгорнутий. Нарешті, повний оберт променя утворить кут, який називають повним кутом. Він дорівнює 360°.



Мал. 90

2. Слово *«транспортир»* походить від французького слова *transportare*, що означає «переносити». Мабуть, спочатку транспортир використовувався не стільки для вимірювання кутів, скільки для побудови кута, що дорівнює даному. У перекладі з латинської «*gradus*» означає крок, ступінь.

Кути вимірюють не лише в градусах, а й у *радіанах* (1 рад ≈ 57°18′), *градах* (1 град ≈ 0,9°), *румбах* (1 румб ≈ 11,29°).

3. Знак кута «∠» увів французький математик П. Ерігон у XVII ст.

4. Назва «градус» походить від латинського слова *gradus*, що означає «крок» або «сходинка». Сучасне позначення градуса «°» увів французький медик і математик Жак Пелетьє дю Ман у 1558 році.

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
кут	angle	Winkel (*m*)	angle (*m*)
градус	degree	Grad (*m*)	degré (*m*)

qr.orioncentr.com.ua/KTlcr

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Пригадайте головне

1. Що називають кутом? Вершиною кута? Стороною кута?
2. Як позначають кут?
3. Яка властивість відкладання кутів?
4. У яких одиницях вимірюють кути й за допомогою якого приладу?
5. Сформулюйте властивості вимірювання кутів.
6. Як порівнюють кути?
7. На які види поділяють кути? Назвіть їх градусні міри.
8. Що таке бісектриса кута?
9. Які кути є на гранях куба; на гранях піраміди?

Усне тренування

1. Подайте в сантиметрах: 5 м, 5 дм, 5 мм.
2. Подайте в кілометрах: 100 см, 100 дм, 100 м, 100 мм.

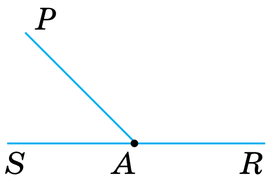
Розв'яжіть задачі

150'. Назвіть кути на малюнку 91.

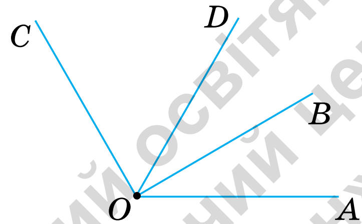
151'. Скільки кутів з градусною мірою $50°$ можна відкласти від променя OA по один бік від нього:
1) один; 2) два; 3) безліч.

152'. На малюнку 92 зображені промені зі спільним початком. Назвіть кути:
1) зі стороною OD;
2) між сторонами яких проходить промінь OD;
3) зі стороною OB;
4) між сторонами яких проходить промінь OB.

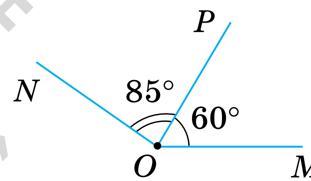
153'. Яка градусна міра кута MON (мал. 93)?



Мал. 91



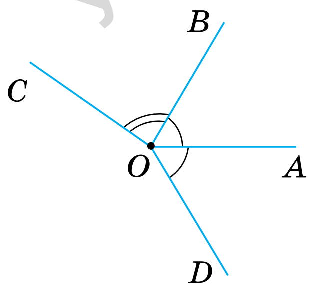
Мал. 92



Мал. 93

154'. Як обґрунтувати, що промінь OP проходить між сторонами кута MON (мал. 93)?

155'. Назвіть рівні кути на малюнку 94. Чи зображено бісектрису якогось кута? Назвіть цей промінь.



Мал. 94

qr.orioncentr.com.ua/GJKih

156°. Накресліть промінь OA й по один бік від нього відкладіть кут: 1) $30°$; 2) $60°$; 3) $90°$; 4) $120°$.
Дайте назву куту та запишіть відповідну рівність.

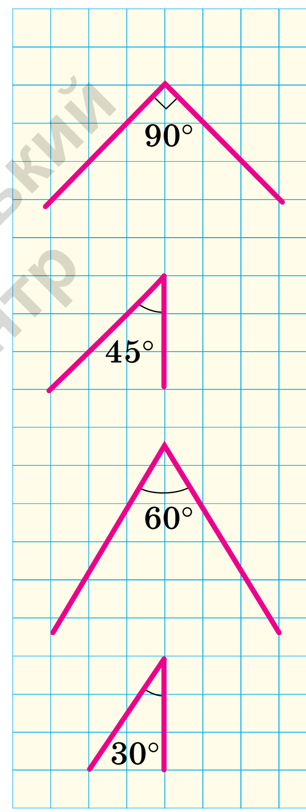
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

157°. Накресліть промінь OB й по один бік від нього відкладіть кут $45°$. Дайте назву куту та запишіть відповідну рівність.

158°. Накресліть два кути. Дайте їм назви:
1) трьома латинськими літерами;
2) грецькими літерами; 3) номерами.
Виміряйте їх та зробіть відповідний запис.

159°. Накресліть кут. Дайте йому назву: 1) трьома латинськими літерами; 2) грецькою літерою; 3) номером. Виміряйте його та зробіть відповідний запис.

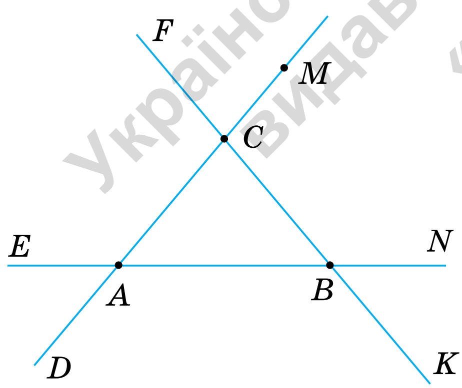
160°. Побудуйте за клітинками кути, зображені на малюнку 95.



Мал. 95

161°. Побудуйте за клітинками розгорнутий кут так, щоб його сторони не лежали на сторонах клітинок.

162°. Порахуйте, скільки зображено кутів (мал. 96):
1) з вершиною A, що не є розгорнутими; 2) з вершиною B, що є розгорнутими; 3) з вершиною C.



Мал. 96

163°. Проведіть три прямі, що перетинаються в одній точці. Скільки розгорнутих кутів утворилося? Запишіть їх.

164°. Два кути мають спільну вершину. Чи мають вони спільну сторону? Відповідь поясніть.

165°. Два кути мають спільну сторону. Чи спільна в них вершина? Відповідь поясніть.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

166°. Кути α і β мають спільну сторону. Накресліть у зошиті таблицю 10 і заповніть її.

Таблиця 10

α	20°		49°		68°
β	93°	80°		63°	32°
$\alpha + \beta$		125°	77°	152°	

167°. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB. Знайдіть:
1) $\angle AOB$, якщо $\angle AOC = 23°$, $\angle BOC = 47°$;
2) $\angle AOC$, якщо $\angle AOB = 82°$, $\angle BOC = 41°$;
3) $\angle COB$, якщо $\angle COA = 41°$, $\angle BOA = 49°$;
4) $\angle COA$, якщо $\angle BOA = 102°$, $\angle BOC = 12°$.

168°. Промінь OB проходить між сторонами кута AOC. Яка градусна міра кута AOC, якщо $\angle AOB = 95°$, $\angle BOC = 25°$?

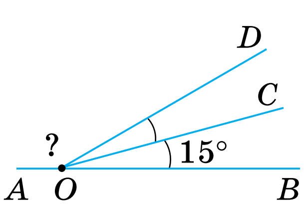
169°. З'ясуйте, чи проходить промінь OC між сторонами кута AOB, якщо:
1) $\angle AOC = 45°$, $\angle BOC = 35°$, $\angle AOB = 81°$;
2) $\angle AOC = 23°$, $\angle BOC = 56°$, $\angle AOB = 79°$;
3) $\angle AOC = 54°$, $\angle BOC = 53°$, $\angle AOB = 106°$;
4) $\angle AOC = 84°$, $\angle BOC = 15°$, $\angle AOB = 69°$.
Відповідь обґрунтуйте.

170°. З'ясуйте, чи проходить промінь OB між сторонами кута AOC, якщо $\angle AOC = 97°$, $\angle BOC = 65°$, $\angle AOB = 32°$. Відповідь обґрунтуйте.

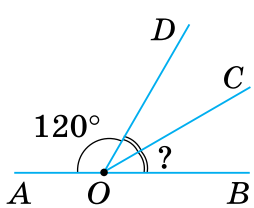
171°. Побудуйте $\angle ABC$ і два промені BM і BN, що проходять між його сторонами. Запишіть кути, які при цьому утворилися.

172°. Знайдіть невідомий кут на малюнках 97–98.

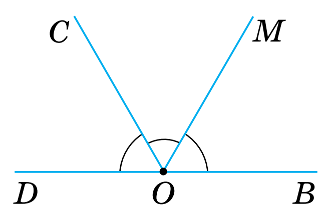
173°. Яка градусна міра кутів на малюнку 99?



Мал. 97



Мал. 98



Мал. 99

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

174°. Порівняйте кути α і β, якщо:
1) $\alpha = 55°$, $\beta = 90°$;
2) $\alpha = 90°$, $\beta = 107°$;
3) $\alpha = 125°$, $\beta = 125°$;
4) $\alpha = 165°$, $\beta = 89°$.
Зробіть відповідний запис.

175°. Порівняйте кути α і β, якщо $\alpha = 91°$, $\beta = 59°$.
Зробіть відповідний запис.

176°. Порівняйте кути α і β, якщо:
1) α — гострий кут, β — тупий кут;
2) α — прямий кут, β — тупий кут;
3) α — прямий кут, β — прямий кут;
4) α — тупий кут, β — гострий кут.
Зробіть відповідний запис.

qr.orioncentr.com.ua/u5Qk8

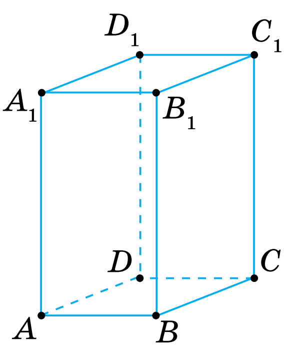
177°. Порівняйте кути α і β, якщо α — прямий кут, β — гострий кут.

178°. OC — бісектриса кута AOB. Знайдіть:
1) $\angle AOB$, якщо $\angle AOC = 36°$;
2) $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 174°$;
3) $\angle AOB$, якщо $\angle BOC = 65°$;
4) $\angle AOC$, якщо $\angle AOB = 82°$.

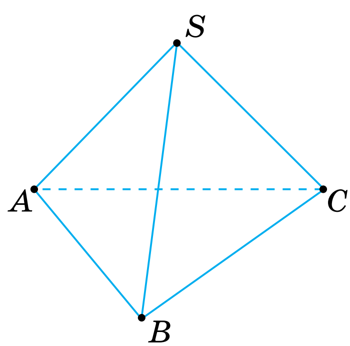
179°. OB — бісектриса кута AOC. Знайдіть $\angle AOC$, якщо $\angle AOB = 72°$.

180°. Назвіть кути граней:
1) прямокутного паралелепіпеда (мал. 100);
2) трикутної піраміди (мал. 101).

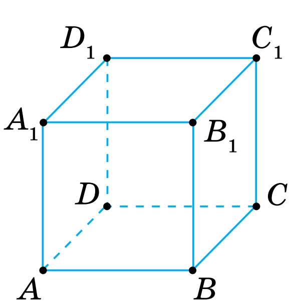
181°. Назвіть кути граней куба (мал. 102).



Мал. 100



Мал. 101



Мал. 102

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

182. Промінь, що проходить між сторонами кута α, розбиває його на два кути — β і γ. За даними, наведеними в таблиці 11, складіть рівняння та знайдіть градусні міри невідомих кутів.

Таблиця 11

α	$90°$	$n°$	$120°$	$n°$
β	$2n°$	$50°$	$n°$	$\frac{n°}{3}$
γ	$n°$	$\frac{n°}{2}$	$n° + 40°$	$120°$

183. Два кути, градусна міра яких дорівнює $40°$ і $50°$, мають спільну сторону. Який кут можуть утворювати інші їх сторони?

184. Кути AOB і BOC мають спільну сторону OB. Знайдіть $\angle AOC$, якщо $\angle AOB = 45°$, $\angle BOC = 60°$. Для кожного з можливих випадків зробіть малюнок.

185. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB. Знайдіть:
1) $\angle BOC$, якщо $\angle AOB = 62°$, а $\angle AOC$ на $20°$ менший від $\angle BOC$;
2) кути AOC і BOC, якщо $\angle AOB = 80°$, а $\angle AOC$ на $50°$ більший за $\angle BOC$.

186. Промінь OK проходить між сторонами кута NOM. Знайдіть кути NOK і MOK, якщо $\angle NOM = 60°$, а градусні міри кутів NOK і MOK відносяться як $1 : 5$.

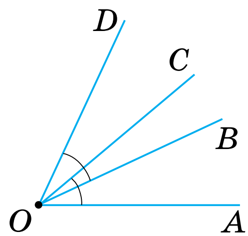
187. Із вершини розгорнутого кута AOB проведено в один бік два промені OC і OD. Знайдіть:
1) $\angle COD$, якщо $\angle AOC = 60°$, $\angle BOD = 70°$;
2) $\angle AOC$, якщо $\angle COD = 41°$, $\angle BOD = 69°$;
3) $\angle COD$, якщо $\angle AOD = 110°$, $\angle BOC = 130°$.

188. Від променя OA по один бік від нього відкладіть $\angle AOC = 31°$, $\angle AOD = 46°$, $\angle AOB = 85°$. Знайдіть: 1) $\angle BOD$; 2) $\angle BOC$; 3) $\angle COD$.

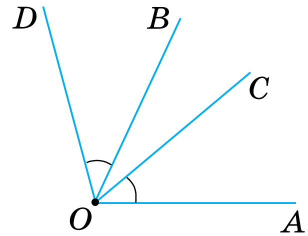
189. **Промінь OK — бісектриса кута MON, що не є розгорнутим. Чи може кут MOK бути: 1) прямим; 2) гострим; 3) тупим?**

190. На малюнках 103–104 $\angle AOC = \angle BOD$. Обґрунтуйте, що $\angle AOB = \angle COD$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»



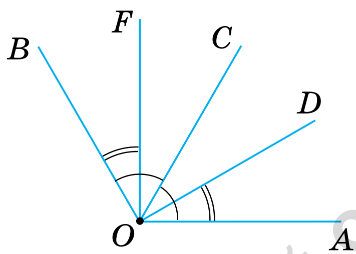
Мал. 103



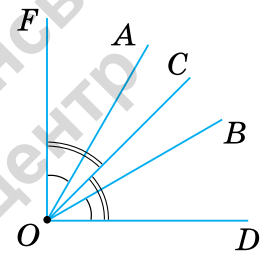
Мал. 104

191. OC — бісектриса кута AOB (мал. 105), $\angle AOD = \angle FOB$. Обґрунтуйте, що промінь OC є бісектрисою кута DOF.

192. $\angle DOB = \angle AOF$, $\angle DOC = \angle COF$ (мал. 106). Обґрунтуйте, що промінь OC є бісектрисою кута AOB.



Мал. 105



Мал. 106

193. За допомогою транспортира поділіть на три рівні кути: 1) прямий кут; 2) розгорнутий кут. Знайдіть кут між бісектрисами крайніх кутів.

194. Промінь OC проходить між сторонами прямого кута AOB, причому $\angle AOC = 30°$. Знайдіть кути, що утворює бісектриса OK кута BOC зі сторонами кута AOB.

195. Промінь OK проходить між сторонами кута MON, причому $\angle MOK = 46°$, $\angle NOK = 100°$. Знайдіть кут між бісектрисами кутів MOK і NOK.

196. Знайдіть суму кутів кожної грані прямокутного паралелепіпеда.

197. Знайдіть суму кутів кожної грані трикутної піраміди.

198*. Між сторонами кута AOB проведено промені OC і OD. Знайдіть $\angle AOC$, якщо $\angle COB = 55°$, $\angle AOD = 80°$, $\angle DOB = 33°$.

199*. Проведіть пряму AB і позначте на ній точку O. Відкладіть від променя OA в один бік $\angle AOC = 120°$, а в інший — $\angle AOD = 140°$. 1) Який із променів — OA чи OB — проходить між сторонами кута COD? 2) Знайдіть градусну міру кута COD.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

200*. Кут AOB дорівнює 120°. Промінь OC проходить між сторонами цього кута й утворює зі стороною OA кут 80°. Знайдіть кут між променем OC і бісектрисою кута AOB.

201*. Промені, що проходять між сторонами кута α, розбивають його на 2, або 4, або 6,..., або $2n$ рівних кутів. Чому дорівнює кут між бісектрисами сусідніх кутів, якщо: 1) $\alpha = 180°$; 2) $\alpha = 90°$; 3) $\alpha = 120°$; 4) $\alpha = 60°$?

Проявіть компетентність

202. Північний вітер змінився на північно-східний. Який кут повороту вітру?

203. Автомобільна дорога «Київ–Одеса» проходить через місто Умань. Вважатимемо, що всі три міста розміщені на одній прямій. Поясніть, до яких міст можуть прямувати два автомобілі, якщо вони виїхали з Умані: 1) у протилежних напрямках; 2) в одному напрямку. Зробіть малюнок.

204. Туристи пройшли 4 км від базового табору в напрямку на північ і повернули на схід. Пройшовши за цим напрямком 1 км, вони пройшли на північ ще 2,5 км. Накресліть їх шлях на плані в масштабі 1 км в 1 см. За планом з'ясуйте, на якій відстані (якщо рахувати по прямій) від базового табору вони були, пройшовши: 1) 5 км; 2) 7,5 км.

205. На який кут повернеться хвилинна стрілка годинника на малюнку 107 за: 1) 15 хв; 2) 30 хв? (Кутом повороту годинної стрілки знехтувати.)

Мал. 107

206. Котра тепер година, якщо стрілки годинника утворюють кут 105°, а хвилинна стрілка показує на цифру 6? (Кутом повороту годинної стрілки знехтувати.)

207. Назвіть рівні кути на предметах довкілля за малюнком 108.

Мал. 108

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 2

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

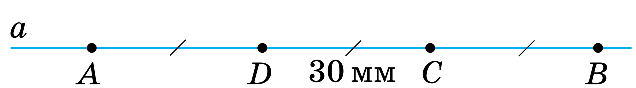
1. Поясніть, що таке відрізок.
2. Що таке промінь?
3. Що таке доповняльні промені?
4. Що таке кут?
5. Дайте означення бісектрисі кута.
6. Який кут називається гострим; прямим; тупим; розгорнутим?
7. У яких одиницях вимірюють відрізки?
8. У яких одиницях вимірюють кути?
9. Які відрізки називаються рівними?
10. Які кути називаються рівними?
11. Сформулюйте властивість розміщення точок на прямій.
12. Сформулюйте властивість відкладання відрізків.
13. Сформулюйте властивість відкладання кутів.
14. Сформулюйте властивість вимірювання відрізків.
15. Сформулюйте властивість вимірювання кутів.
16. Що називається відстанню між двома точками?
17. Якими елементами граней прямокутного паралелепіпеда, куба, піраміди є відрізки?
18. Якими елементами граней прямокутного паралелепіпеда, куба, піраміди є кути?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

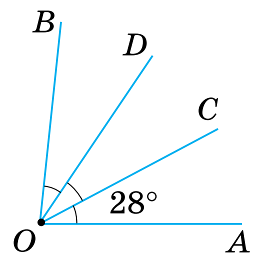
1°. За даними на малюнку 109 знайдіть відстань між точками A і B. Яке із співвідношень правильне?



Мал. 109

А. $AB = 90$ см.
Б. $AB < 10$ см.
В. $AB > 30$ см.
Г. $AB = 60$ мм.

2°. За даними на малюнку 110 знайдіть градусну міру кута AOB. Яке із співвідношень правильне?



Мал. 110

А. $\angle AOB = 90°$.
Б. $\angle AOB = 56°$.
В. $\angle AOB > 90°$.
Г. $\angle AOB < 90°$.

3°. Бісектриса OC кута AOB утворює з його стороною OB кут $75°$. Чому дорівнює кут AOC?
А. $32°30'$.
Б. $75°$.
В. $150°$.
Г. $25°$.

4. Точка M — внутрішня точка відрізка AB, причому середина цього відрізка лежить між точками A і M. Яке із співвідношень правильне?
А. $\frac{AM}{MB} = 1$.
Б. $\frac{AM}{MB} = 0$.
В. $\frac{AM}{MB} > 1$.
Г. $\frac{AM}{MB} < 1$.

5*. Знайдіть кути AOC і COB, якщо їх сторони OA і OB є доповняльними променями і $\angle AOC = 0{,}5\angle COB$.
А. $110°$ і $110°$.
Б. $180°$ і $90°$.
В. $48°$ і $96°$.
Г. $60°$ і $120°$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Розділ 3. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

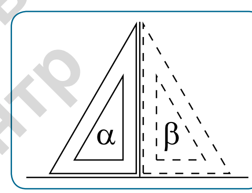
У розділі дізнаєтесь:

- що таке аксіома, теорема, ознака;
- про суміжні та вертикальні кути, їх властивості;
- про взаємне розміщення прямих та як зображати паралельні та перпендикулярні прямі за допомогою лінійки й косинця;
- як установити, чи паралельні дві прямі, і які властивості паралельних прямих;
- як застосувати вивчений матеріал на практиці

§ 4. СУМІЖНІ КУТИ

1. Що таке суміжні кути

Ситуація. Альбіна й Денис перевіряли правильність виготовлення косинця. Вони спочатку побудували кут α за допомогою цього косинця (мал. 111). А потім перевернули косинець і від вертикальної сторони кута α відклали кут β.



Мал. 111

qr.orioncentr.com.ua/KF5iJ

Чи зможуть учні встановити правильність виготовлення косинця?

Так.

Справді, за побудовою, кути α і β мають спільну вертикальну сторону і $\alpha = \beta$. Тоді:

Якщо косинець виготовлено

правильно,	**неправильно,**
то	
$\alpha = \beta = 90°$ і $\alpha + \beta = 180°$.	$\alpha = \beta \neq 90°$ і $\alpha + \beta \neq 180°$.

Отже, інші сторони кутів α і β:

утворюють розгорнутий кут.	не утворюють розгорнутий кут.

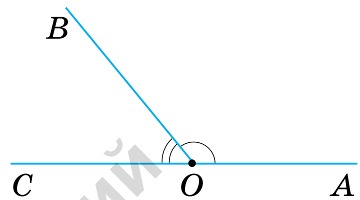
Залишається встановити, чи є утворений кут розгорнутим, та зробити висновок. Для цього за допомогою лінійки встановлюємо, чи лежать інші сторони кутів на одній прямій.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Запам'ятайте!

Два кути, у яких одна сторона спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями, називаються *суміжними*.

На малюнку 112 зображено суміжні кути AOB і COB. У них сторона OB спільна, а сторони OA і OC — доповняльні промені.



Мал. 112

Щоб побудувати кут, суміжний з даним кутом, побудуйте доповняльний промінь до однієї із сторін даного кута.

Чи можуть бути суміжними три кути?

Не можуть, бо за означенням — це два кути.

2. Основна властивість суміжних кутів

Запам'ятайте!

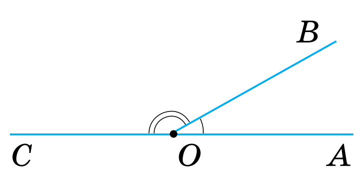
Теорема (*про суму суміжних кутів*)

Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

Дано: $\angle AOB$ і $\angle COB$ — суміжні (мал. 113).

Довести: $\angle AOB + \angle COB = 180°$.

Доведення. За умовою, кути AOB і COB суміжні. За означенням суміжних кутів, сторони OA і OC — доповняльні промені, тому кут AOC — розгорнутий.



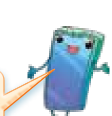
Мал. 113

Отже, $\angle AOC = 180°$.

Промінь OB проходить між сторонами кута AOC, тому: $\angle AOB + \angle COB = \angle AOC = 180°$.

Чи можна за одним із суміжних кутів знайти інший кут?

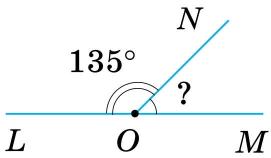
Так.



Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Задача 1 Один із суміжних кутів дорівнює 135°. Яка градусна міра іншого кута?

Розв'язання Нехай $\angle LON$ і $\angle MON$ — дані суміжні кути (мал. 114) і $\angle LON = 135°$. За теоремою про суму суміжних кутів, $\angle LON + \angle MON = 180°$. Звідси $\angle MON = 180° - \angle LON$. Отже, $\angle MON = 180° - 135° = 45°$.



Мал. 114

Щоб знайти кут, суміжний з даним кутом, відніміть від 180° градусну міру даного кута.

3. Що таке теорема

Чи будь-яке твердження можна називати теоремою?

Ні.

qr.orioncentr.com.ua/ZBYQt

Запам'ятайте!

Теоремою **називають твердження, істинність якого встановлена шляхом доведення.**

Наприклад, твердження про суму суміжних кутів є теоремою.

Як будується теорема?

Формулювання теореми містить *умову* (те, що дано) і *вимогу* (те, що треба довести).

Як легше виділити умову і вимогу теореми?

Переформулювати її зі словами «якщо» і «то».

Наприклад:

Якщо два кути суміжні, **то** їх сума дорівнює 180°.

умова — *вимога*

Як доводять теорему?

Шляхом логічних міркувань.

Український освітньо-видавничий центр «Оріон»

Під час *доведення* спираються на означення, аксіоми, а також на вже доведені раніше теореми.

Що таке аксіома?

Найбільш очевидне твердження про властивості елементарних геометричних фігур, істинність якого приймають без доведення.

Наприклад, аксіомою є твердження, що через дві точки можна провести пряму і лише одну.

Щоб засвоїти теорему, уважно прочитайте та запам'ятайте її формулювання. Зробіть малюнок і запишіть її скорочено. Прочитайте за підручником доведення, а потім запишіть ланцюжок основних висновків. Спробуйте відтворити цей ланцюжок, не підглядаючи в записи. Якщо ви зробили це без помилок, то засвоїли теорему.

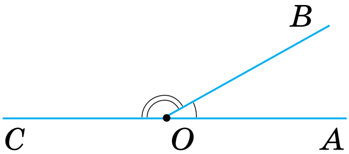
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

4. Інші властивості суміжних кутів

Як побудувати суміжні кути, маючи розгорнутий кут?

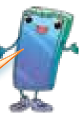
Провести промінь між його сторонами.

Наприклад, на малюнку 115 промінь OB проведено між сторонами розгорнутого кута AOC. За означенням, $\angle AOB$ і $\angle COB$ — суміжні.



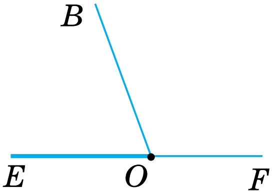
Мал. 115

Скільки кутів, суміжних з даним кутом, можна побудувати?

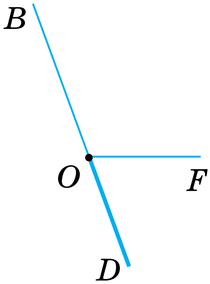


Два.

На малюнках 116 і 117 показано, як будували кути BOE і FOD, суміжні з кутом BOF. Поясніть побудову.



Мал. 116



Мал. 117

Задача 2 **Два кути, суміжні з даним кутом, — рівні**. Доведіть.

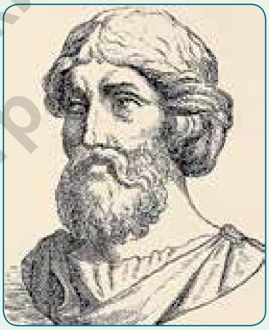
Розв'язання Нехай кути BOE і FOD є суміжними з кутом BOF (мал. 116–117). За теоремою про суму суміжних кутів:

$$\angle BOE + \angle BOF = 180°,$$
$$\angle FOD + \angle BOF = 180°.$$
$$\text{Тому } \angle BOE = \angle FOD.$$

Щоб довести рівність двох кутів, можна обґрунтувати, що вони є суміжними з одним і тим самим кутом.

Дізнайтеся більше

1. Зародження геометрії як науки датують VI ст. до н. е. й пов'язують із дослідженнями вчених Стародавньої Греції, зокрема наукової школи Піфагора. Найголовнішим здобутком того часу була розробка основ дедуктивного методу — методу доказових міркувань. Давньогрецькі вчені зрозуміли, що встановити правильність якоїсь властивості геометричної фігури можна лише шляхом доведення. Проте, якщо не мати кількох вихідних істинних тверджень — аксіом, тоді доведення триватиме нескінченно довго. На це вказував ще давньогрецький учений Арістотель (IV ст. до н. е.). Таку систему аксіом, на якій можна було б побудувати дедуктивну геометричну теорію, шукали впродовж багатьох століть. Перший систематичний курс геометрії (він не дійшов до нас) був написаний Гіппократом Хіосським у другій половині V ст. до н. е.



Піфагор

2. Раніше градусну міру прямого кута позначали буквою d (від французького слова *droit* — «прямий»). Це позначення використовували для скороченого запису градусних мір будь-яких кутів. Так, вважалося, що розгорнутий кут дорівнює $2d$, а інші кути подавали у вигляді дробів від d.

3. Слово «суміжний» означає «такий, що межує з чим-небудь; прилеглий до чогось; розміщений поруч». У побуті кажуть, наприклад, про суміжні кімнати. Вони мають спільну стіну. Спільну межу мають подвір'я в сільській місцевості або дачному селищі. Хоча тоді частіше скажуть «сусідні подвір'я».

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
суміжні кути	adjacent angles	Nebenwinkel (*pl*)	angles adjacents

qr.orioncentr.com.ua/BMqap

Пригадайте головне

1. Які кути називаються суміжними?
2. Як побудувати кут, суміжний з даним кутом?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про суму суміжних кутів.
4. Поясніть, що таке теорема, аксіома. Наведіть приклади.
5. Скільки кутів, суміжних з даним, можна побудувати? Яка їх властивість?

Усне тренування

Обчисліть:

1) $23 + 157$; $102 + 78$; $180 - 61$; $180 - 139$;
2) $56 + 124$; $111 + 69$; $180 - 16$; $180 - 143$.

Розв’яжіть задачі

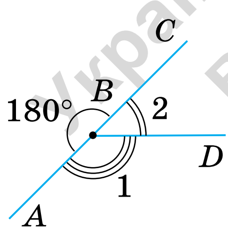
208'. На малюнках 118, 119 зображено кути 1 і 2. Назвіть:
1) суміжні кути;
2) кути, що не є суміжними.

209'. На малюнках 120, 121 позначені дужками кути не є суміжними. Чому?

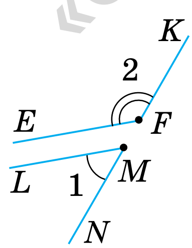
210'. На малюнку 118 назвіть: 1) розгорнутий кут; 2) промінь, що проходить між сторонами розгорнутого кута; 3) суміжні кути.

211'. На малюнку 122 назвіть два кути, суміжні з кутом NOP.

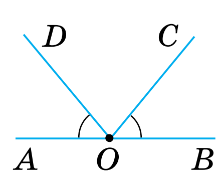
Український освітянський видавничий центр «Оріон»



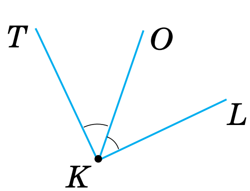
Мал. 118



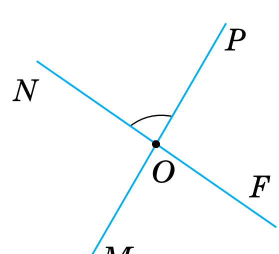
Мал. 119



Мал. 120



Мал. 121



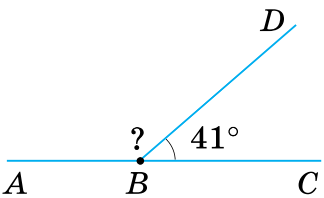
Мал. 122

212°. Побудуйте тупий кут і кут, суміжний з ним. Виміряйте побудовані кути.

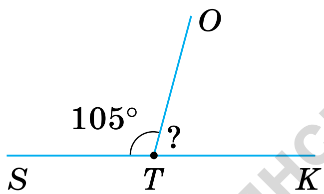
213°. Побудуйте гострий кут і кут, суміжний з ним. Виміряйте побудовані кути.

214°. На малюнках 123, 124 зображено суміжні кути. Знайдіть невідомий кут.

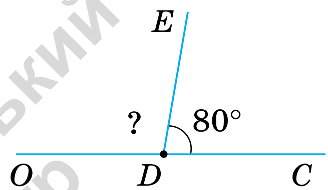
215°. На малюнку 125 зображено суміжні кути. Знайдіть невідомий кут.



Мал. 123



Мал. 124



Мал. 125

216°. Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) 137°; 2) 54°; 3) 162°; 4) 23°.

qr.orioncentr.com.ua/8iPWs

217°. Знайдіть кут, суміжний з кутом:
1) 37°; 2) 154°.

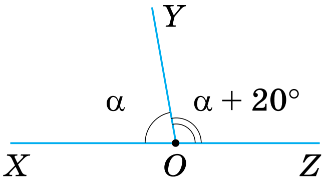
218°. Кути α і β — суміжні. Накресліть у зошиті таблицю 12 і заповніть її.

Таблиця 12

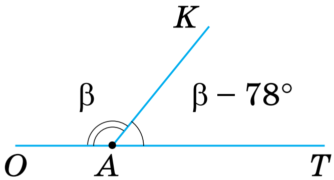
α	10°		30°		50°		70°	
β		20°		40°		60°		80°

За даними в таблиці 12 дайте відповіді на запитання:
1) на скільки градусів кут α менший від кута β, якщо α < 90°;
2) на скільки градусів кут α більший за кут β, якщо α > 90°;
3) на скільки градусів кут α більший за кут β, якщо β < 90°;
4) на скільки градусів кут α менший від кута β, якщо β > 90°?

219°. За даними, наведеними на малюнках 126, 127, знайдіть градусні міри суміжних кутів.



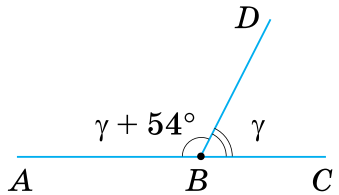
Мал. 126



Мал. 127

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

220°. За даними, наведеними на малюнку 128, знайдіть градусні міри суміжних кутів.



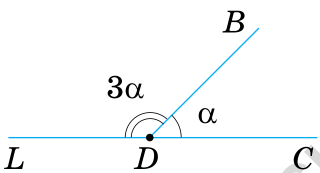
Мал. 128

221°. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них:
1) на 30° менший від іншого;
2) на 56° більший за інший;
3) на 42° менший від іншого;
4) на 69° більший за інший;
5) на 51° менший від іншого.

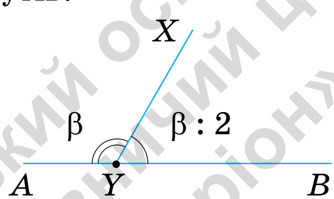
222°. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них на 24° менший від іншого.

223°. За даними, наведеними на малюнках 129, 130, знайдіть градусні міри суміжних кутів.

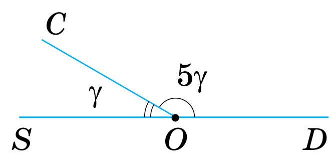
224°. За даними, наведеними на малюнку 131, знайдіть градусні міри суміжних кутів.



Мал. 129



Мал. 130



Мал. 131

225°. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них:
1) у 4 рази менший від іншого;
2) удвічі більший за інший;
3) у 8 разів більший за інший;
4) у 5 разів менший від іншого;
5) в 11 разів більший за інший.

226°. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них утричі більший за інший.

227°. Проведіть пряму AB. Позначте на ній точку O, що лежить між точками A і B. Проведіть промінь OC так, щоб один із суміжних кутів дорівнював:
1) 45°; 3) 110°;
2) 135°; 4) 70°.

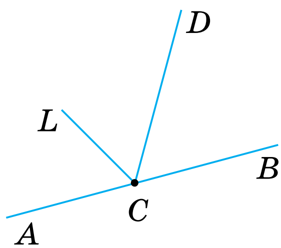
qr.orioncentr.com.ua/5E1hH

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

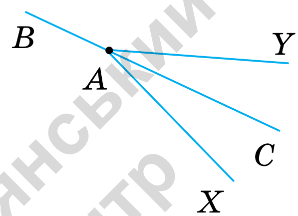
228°. Проведіть пряму AB. Позначте на ній точку O, що лежить між точками A і B. Проведіть промінь OC так, щоб один із суміжних кутів дорівнював:
1) $60°$; 2) $120°$.

229°. На малюнку 132 точки A, B і C лежать на одній прямій. Запишіть пари суміжних кутів.

230°. На малюнку 133 точки A, B і C лежать на одній прямій. Запишіть пари суміжних кутів.



Мал. 132



Мал. 133

231°. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них становить:
1) третину розгорнутого кута;
2) половину розгорнутого кута;
3) шосту частину розгорнутого кута;
4) десяту частину розгорнутого кута.

232°. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них становить четверту частину розгорнутого кута.

233°. Накресліть за клітинками кут: 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $90°$. Побудуйте два суміжні з ним кути. Позначте ці кути, порівняйте їх та зробіть відповідні записи.

234°. Накресліть за клітинками кут $30°$. Побудуйте два суміжні з ним кути. Позначте ці кути, порівняйте їх та зробіть відповідні записи.

235. Чи можна стверджувати, що два кути суміжні, якщо їх сума дорівнює $180°$?

236. **Якщо один із суміжних кутів гострий, то інший кут — тупий.** Доведіть.

237. **Якщо один із суміжних кутів тупий, то інший кут — гострий.** Доведіть.

238. **Якщо два суміжні кути рівні, то вони прямі.** Доведіть.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

239. Побудуйте суміжні кути так, щоб один із них мав градусну міру:
1) меншу від $45°$, але більшу за $40°$;
2) більшу за $90°$, але меншу від $100°$;
3) меншу від $150°$, але більшу за $140°$;
4) більшу за $100°$, але меншу від $110°$.

240. Побудуйте суміжні кути так, щоб один із них мав градусну міру більшу за $100°$, але меншу від $130°$.

241. Знайдіть суміжні кути, якщо їх різниця дорівнює:
1) $30°$; 2) $105°$; 3) $67°$; 4) $0°$.

242. Знайдіть суміжні кути, якщо їх різниця дорівнює $60°$.

243. Знайдіть суміжні кути, якщо їх частка дорівнює:
1) 9; 2) 11; 3) 1; 4) 17.

244. Знайдіть суміжні кути, якщо їх частка дорівнює 2.

245. Знайдіть суміжні кути, якщо вони відносяться як:
1) $1 : 9$; 2) $11 : 1$; 3) $1 : 1$; 4) $1 : 17$.

246. Знайдіть суміжні кути, якщо вони відносяться як $1 : 2$.

247. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них становить від іншого:
1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{7}{8}$.

248. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них становить від іншого $0,5$.

249. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них становить від іншого:
1) $20\ \%$; 2) $60\ \%$; 3) $80\ \%$; 4) $25\ \%$.

250. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них становить від іншого $50\ \%$.

251. **Бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут.** Доведіть.

252. Бісектриса одного із суміжних кутів утворює з їх спільною стороною кут α.
Знайдіть суміжні кути, якщо:
1) $\alpha = 15°$; 2) $\alpha = 75°$; 3) $\alpha = 60°$; 4) $\alpha = 45°$.

253. Бісектриса одного із суміжних кутів утворює з їх спільною стороною кут β.
Знайдіть суміжні кути, якщо $\beta = 30°$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

254*. Позначте точки A, B і C, що не лежать на одній прямій. Побудуйте суміжні кути, сторони яких проходять через ці точки, причому:
1) точка A є їх вершиною, а точка C лежить на спільній стороні;
2) промінь BC є їх спільною стороною;
3) відрізок AC не лежить на спільній стороні, але вершина міститься в його середині.

255*. Який із суміжних кутів α чи β є гострим, якщо:
1) $\frac{\alpha}{\beta} < 1$; 2) $\frac{\alpha}{\beta} > 1$; 3) $\frac{\beta}{\alpha} < 1$; 4) $\frac{\beta}{\alpha} > 1$?

256*. У яких межах може бути кут α, суміжний з кутом β, якщо:
1) $20° \le \beta \le 30°$; 3) $38° \le \beta \le 45°$;
2) $120° \le \beta \le 130°$; 4) $175° \le \beta \le 179°$?

257*. Знайдіть суміжні кути, якщо їх різниця менша від їх суми на:
1) 20°; 2) 105°; 3) 49°; 4) 123°.

258*. Знайдіть суміжні кути, якщо їх різниця відноситься до їх суми як:
1) 2 : 3; 2) 3: 4; 3) 4 : 5; 4) 5 : 6.

259*. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них на 30° більший за:
1) різницю цих кутів;
2) середнє арифметичне цих кутів;
3) 25 % суми цих кутів;
4) потроєну піврізницю цих кутів.

260*. Чому дорівнює кут, якщо два суміжні з ним кути становлять у сумі:
1) 80°; 2) 220°; 3) 120°; 4) 300°.

261*. Якщо сума двох кутів зі спільною вершиною і спільною стороною дорівнює 180°, то ці кути суміжні. Чи правильне дане твердження?

262*. Кути AOB і BOC — суміжні. Промінь ON — бісектриса кута BOC, а промінь OM проходить між сторонами кута AOC. Доведіть, що промінь OM є бісектрисою кута AOC, якщо $\angle MON$ — прямий.

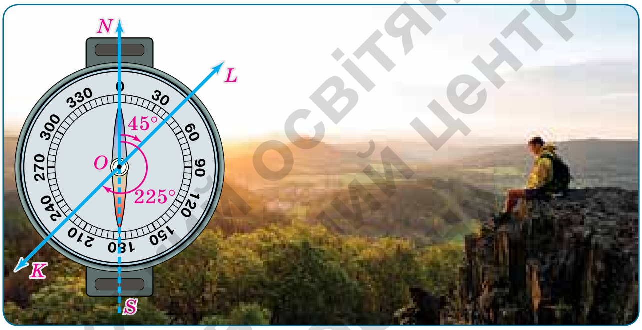
263*. Бісектриси двох кутів утворюють прямий кут. Чи можна стверджувати, що дані кути суміжні? Відповідь поясніть.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Проявіть компетентність

264. У туристичному поході користуються *компасом* (мал. 134) — приладом, стрілка якого показує напрямок на північ, а нанесені поділки допомагають визначати кут між цим напрямком і напрямком руху. Такий кут, якщо його відкладати від напрямку на північ за стрілкою годинника, називають *азимутом*. Азимут напрямку визначають у межах від 0° до 360°.

На малюнку 134 ви бачите: ON — напрямок на північ; OL і OK — напрямки руху; азимут напрямку OL становить 45°; азимут напрямку OK дорівнює 225°. Як визначати азимут, більший за 180°, наприклад, азимут напрямку OK?



Мал. 134

За картою України (мал. 135) визначте азимут напрямку:

Київ–Чернігів;	Київ–Вінниця;
Київ–Полтава;	Київ–Житомир;
Київ–Сімферополь;	Київ–Тернопіль;
Київ–Одеса;	Київ–Луцьк.

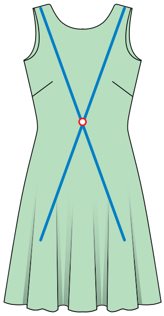
Мал. 135

§ 5. ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

1. Що таке вертикальні кути

qr.orioncentr.com.ua/WyfTR

Ситуація. Оксана з бабусею вирішили оздобити тасьмою літню сукню. Спочатку вони пришили на ліфі до талії дві смужки тасьми так, що утворився кут. А потім вирішили оздобити й спідницю і на ній пришили ще дві смужки тасьми так, як показано на малюнку 136.



Мал. 136

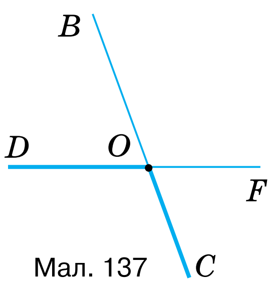
Які особливості двох кутів, які утворилися на ліфі сукні та на її спідниці?

Відповідні сторони цих кутів доповнюють одна одну до прямої.

Запам’ятайте!

Два кути називаються *вертикальними*, якщо сторони одного кута є доповняльними променями до сторін іншого.

На малюнку 137 зображено вертикальні кути BOF і COD. У них сторони OB і OC доповнюють одна одну до прямої BC, а сторони OF і OD — до прямої DF.



Мал. 137

Щоб побудувати кут, вертикальний до даного кута, побудуйте доповняльний промінь до кожної сторони даного кута.

Чи можуть бути вертикальними три кути?

Не можуть, бо за означенням — це два кути.

2. Основна властивість вертикальних кутів

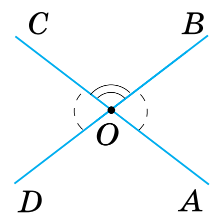
Запам’ятайте!

Теорема (*про вертикальні кути*)

Вертикальні кути рівні.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Дано: $\angle AOB$ і $\angle COD$ — вертикальні (мал. 138).
Довести: $AOB = \angle COD$.
Доведення. За умовою кути AOB і COD вертикальні.



Мал. 138

Кут AOB суміжний з кутом COB. За теоремою про суміжні кути, їх сума дорівнює $180°$. Звідси $\angle AOB = 180° - \angle COB$.

Кут COD також суміжний з кутом COB. Тому $\angle COD = 180° - \angle COB$.

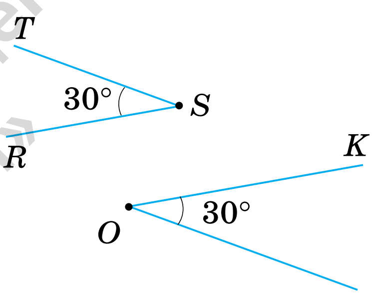
З отриманих рівностей випливає: $\angle AOB = \angle COD$.

Якщо два кути рівні, чи вертикальні вони?

Не обов'язково.

Наприклад, на мал. 139 кути NOK і RST рівні, але ці кути не є вертикальними.

Щоб спростувати деяке твердження, достатньо навести хоча б один приклад, який задовольняє умову твердження, але суперечить його вимозі.

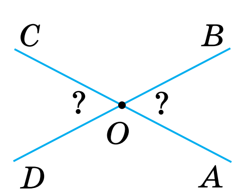


Мал. 139

Задача 1 Сума вертикальних кутів дорівнює $110°$. Яка градусна міра цих кутів?

Розв'язання Нехай $\angle AOB$ і $\angle COD$ — дані вертикальні кути (мал. 140) і $\angle AOB + \angle COD = 110°$. За теоремою про вертикальні кути:

$$\angle AOB = \angle COD = 110° : 2 = 55°.$$

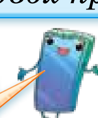


Мал. 140

Щоб довести рівність двох кутів, можна обґрунтувати, що вони є вертикальними.

3. Інші властивості вертикальних кутів

Чи правильно, що вертикальні кути утворюються при *перетині двох прямих*?

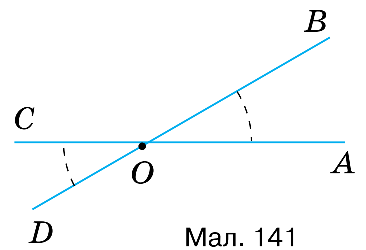


Так.

qr.orioncentr.com.ua/0Tlhq

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

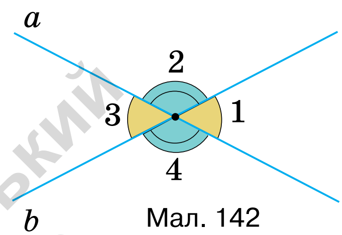
Справді, кожна з двох прямих, що перетинаються, точкою перетину ділиться на доповняльні промені (мал. 141). Вони є відповідними сторонами вертикальних кутів.



Мал. 141

Скільки кутів зі спільною вершиною утворюється при перетині двох прямих?

Чотири кути (мал. 142).



Мал. 142

Чи правильно, що при перетині двох прямих утворюються і вертикальні, і суміжні кути?

Так.

Наприклад, на малюнку 142 два кути, позначені однаковим кольором — вертикальні, а різними кольорами — суміжні.

Скільки пар вертикальних і суміжних кутів утворюється при перетині двох прямих?

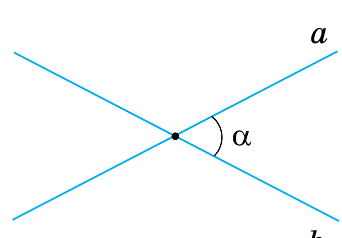
Шість пар кутів (табл. 13).

Таблиця 13

Пари кутів				
Вертикальні	$\angle 1$ і $\angle 3$	$\angle 2$ і $\angle 4$		
Суміжні	$\angle 1$ і $\angle 2$	$\angle 2$ і $\angle 3$	$\angle 3$ і $\angle 4$	$\angle 4$ і $\angle 1$

Який з утворених кутів вважають кутом між прямими, що перетинаються?

Найменший.



Мал. 143

Якщо це кут α, то кажуть, що дані прямі *перетинаються під кутом* α (мал. 143). Можна також сказати, що α — це *кут між прямими a* і *b*.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Задача 2 Прямі a і b перетинаються під кутом $30°$. Знайдіть градусну міру трьох інших кутів.

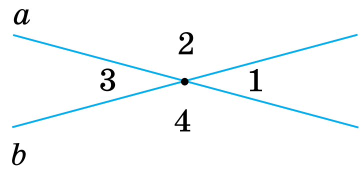
Розв'язання Нехай $\angle 1$ — це кут між прямими a і b (мал. 144). Тоді $\angle 1 = 30°$.

$\angle 3 = \angle 1$ як вертикальні, тому $\angle 3 = 30°$.

$\angle 2$ і $\angle 1$ — суміжні, тому їх сума дорівнює $180°$. Отже,

$\angle 2 = 180° - 30° = 150°$.

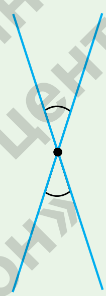
$\angle 4 = \angle 2$ як вертикальні, тому $\angle 4 = 150°$.

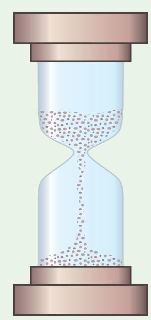


Мал. 144

Дізнайтеся більше

Слово «вертикальний» (*verticalis*) у перекладі з латинської мови означає «прямовисний», тобто той, що має напрямок виска. Висок — це невеличкий предмет на нитці. Його використовують, щоб визначати вертикальний напрямок. Будівельники користуються виском, коли кладуть стіни. Щодо кутів назву «вертикальні» можна зрозуміти з малюнків 145, 146. Форму вертикальних кутів можна побачити в зображенні піскового годинника.


Мал. 145


Мал. 146

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
вертикальні кути	vertical angles	Scheitelwinkel (*pl*)	angles verticaux

qr.orioncentr.com.ua/B3S4A

Пригадайте головне

1. Які кути називаються вертикальними?
2. Як побудувати кут, вертикальний до даного кута?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про вертикальні кути.
4. Які пари кутів утворюються при перетині двох прямих?
5. Що таке кут між двома прямими?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Усне тренування

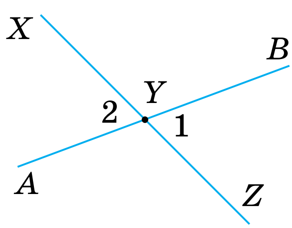
Обчисліть:

1) 124 : 2; 102 : 2; 86 : 2; 38 : 2;

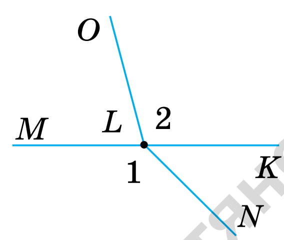
2) $56 \cdot 2$; $81 \cdot 2$; $18 \cdot 2$; $59 \cdot 2$.

Розв’яжіть задачі

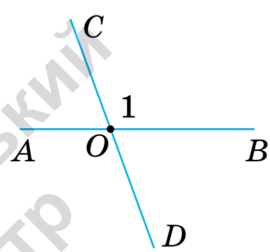
265'. На малюнках 147, 148 зображено кути 1 і 2. Назвіть: 1) вертикальні кути; 2) кути, що не є вертикальними.



Мал. 147



Мал. 148



Мал. 149

266'. На малюнку 147 прямі AB і XZ перетинаються в точці O. Назвіть:
1) кут, вертикальний з кутом XYB; 2) кути, суміжні з кутом 1.

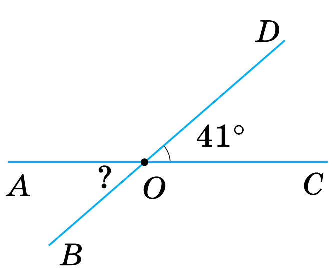
267'. На малюнку 149 прямі AB і CD перетинаються в точці O. Чи є кут 1 кутом між цими прямими?

268°. Накресліть за клітинками кут:
1) 45°; 2) 60°; 3) 30°.
Побудуйте вертикальний з ним кут. Яка його градусна міра?

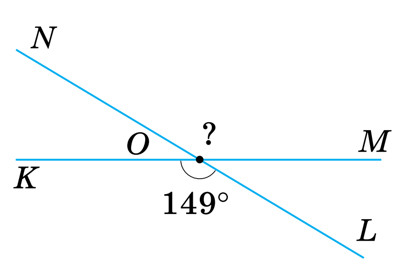
qr.orioncentr.com.ua/I9RBA

269°. Побудуйте довільний кут і кут, вертикальний з ним. Виміряйте побудовані кути.

270°. На малюнках 150, 151 зображено вертикальні кути. Знайдіть невідомий кут.



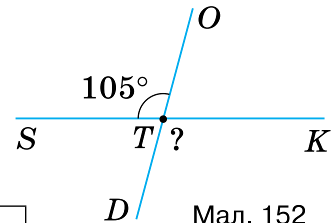
Мал. 150



Мал. 151

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

271°. На малюнку 152 зображено вертикальні кути. Знайдіть невідомий кут.



Мал. 152

272°. Кути 1 і 2 — вертикальні. Накресліть у зошиті таблицю 14 та заповніть її.

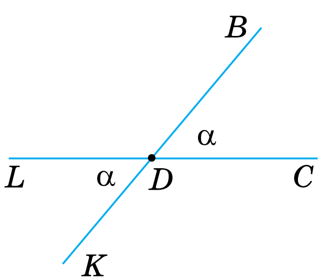
Таблиця 14

∠1	12°		34°		156°		178°	
∠2		121°		143°		65°		87°

273°. Чи можуть вертикальні кути бути:
1) гострими; 2) тупими; 3) прямими?

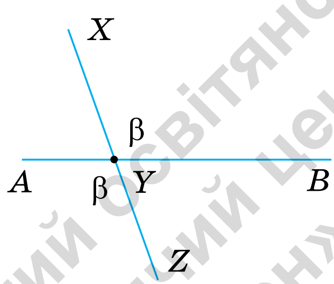
274°. Знайдіть вертикальні кути за даними на малюнках 153, 154.

275°. Знайдіть вертикальні кути за даними на малюнку 155.



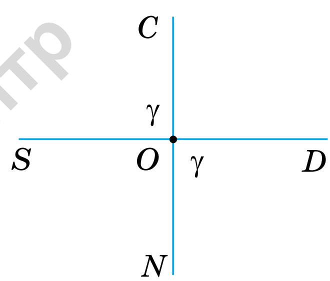
$\alpha + \alpha = 100°$

Мал. 153



$2\beta = 220°$

Мал. 154



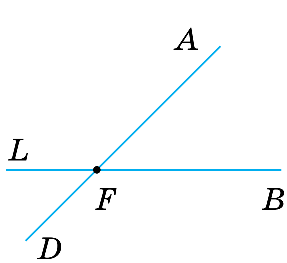
$\gamma + \gamma = 180°$

Мал. 155

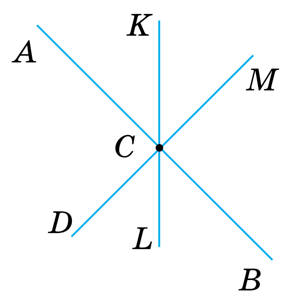
276°. Знайдіть вертикальні кути, якщо їх сума дорівнює:
1) 30°; 3) 67°;
2) 211°; 4) 190°.

277°. Знайдіть вертикальні кути, якщо їх сума дорівнює:
1) 40°; 2) 208°.

278°. Запишіть вертикальні й суміжні кути, що утворилися при перетині прямих на малюнках 156 і 157.



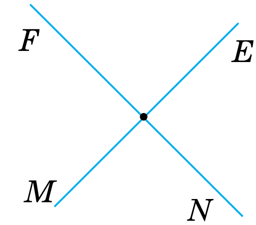
Мал. 156



Мал. 157

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

279°. Запишіть вертикальні й суміжні кути, що утворилися при перетині двох прямих на малюнку 158.



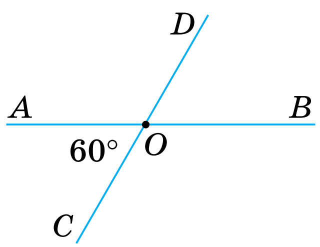
Мал. 158

280°. Побудуйте дві прямі, що перетинаються під кутом: 1) 75°; 2) 60°; 3) 45°; 4) 30°.

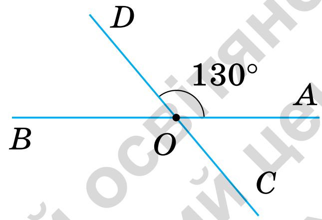
281°. Побудуйте дві прямі, що перетинаються під кутом: 1) 55°; 2) 80°.

282°. За даними, наведеними на малюнках 159, 160, знайдіть градусні міри кутів, що утворилися при перетині прямих.

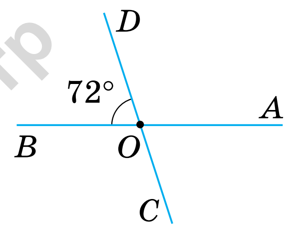
283°. За даними, наведеними на малюнку 161, знайдіть градусну міру кутів, що утворилися при перетині прямих.



Мал. 159



Мал. 160



Мал. 161

284°. Дві прямі перетинаються під кутом α. Знайдіть інші три кути, що утворюють дані прямі, якщо:
1) α = 40°; 3) α = 25°;
2) α = 12°; 4) α = 17°.

qr.orioncentr.com.ua/N25Q5

285°. Дві прямі перетинаються під кутом β. Знайдіть інші три кути, що утворюють дані прямі, якщо β = 64°.

286°. При перетині двох прямих утворилися суміжні кути, один з яких більший за інший на: 1) 14°; 2) 56°; 3) 38°; 4) 70°. Знайдіть чотири кути, що утворюють дані прямі.

287°. При перетині двох прямих утворилися суміжні кути, один з яких менший від іншого на 40°. Знайдіть чотири кути, що утворюють дані прямі.

288°. При перетині двох прямих утворилися суміжні кути, один з яких менший від іншого: 1) у 3 рази; 2) у 4 рази; 3) у 5 разів; 4) у 8 разів. Знайдіть чотири кути, що утворюють дані прямі.

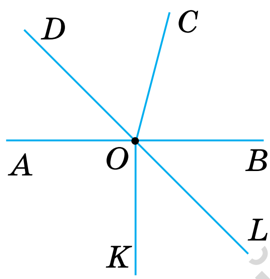
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

289°. При перетині двох прямих утворилися суміжні кути, один з яких удвічі більший за інший. Знайдіть чотири кути, що утворюють дані прямі.

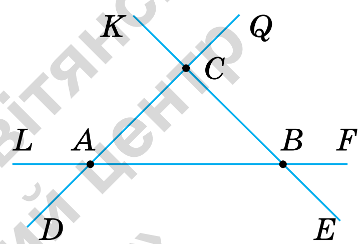
290. Побудуйте вертикальні кути так, щоб один із них:
1) був меншим від $85°$, але більшим за $75°$;
2) був більшим за $100°$, але меншим від $110°$.

291. Побудуйте вертикальні кути так, щоб один із них дорівнював третині прямого кута.

292. Точки A, O і B лежать на одній прямій. Запишіть вертикальні кути, якщо промені OD і OL — доповнняльні, а промені OC і OK не доповнюють один одного до прямої (мал. 162).



Мал. 162



Мал. 163

293. Прямі LF, DQ, KE перетинаються в точках A, B і C (мал. 163). Запишіть вертикальні кути.

294. Яка градусна міра вертикальних кутів, якщо їх сума більша за один із них на:
1) $45°$; 2) $90°$; 3) $109°$; 4) $130°$?

295. Яка градусна міра вертикальних кутів, якщо їх різниця менша від одного з них на $115°$?

296. Якщо два кути не вертикальні, то чи можуть вони бути рівними? Відповідь поясніть.

297. Чи можна стверджувати, що два нерівні кути не вертикальні? Відповідь поясніть.

298. **Якщо два кути рівні, то вертикальні з ними кути також рівні**. Доведіть.

299. Побудуйте дві прямі, які перетинаються під кутом α так, що суміжні з ним кути дорівнюють:
1) $100°$; 2) $92°$; 3) $136°$; 4) $108°$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

300. Побудуйте дві прямі, які перетинаються під кутом β так, що суміжні з ним кути дорівнюють 74°.

301. Дві прямі перетинаються. Яка градусна міра утворених кутів, якщо сума двох із них дорівнює:
1) 102°; 2) 320°; 3) 238°; 4) 182°?

302. Дві прямі перетинаються. Яка градусна міра утворених кутів, якщо сума двох із них дорівнює 122°?

303. Знайдіть кути, які утворилися при перетині двох прямих, якщо різниця двох із них дорівнює:
1) 29°; 2) 115°; 3) 107°; 4) 53°.

304. Знайдіть кути, які утворилися при перетині двох прямих, якщо різниця двох із них дорівнює 49°.

305. Знайдіть кути, які утворилися при перетині двох прямих, якщо частка двох із них дорівнює:
1) 9; 2) 11; 3) 5; 4) 17.

306. Знайдіть кути, які утворилися при перетині двох прямих, якщо частка двох із них дорівнює 8.

307*. **Бісектриси вертикальних кутів утворюють розгорнутий кут.** Доведіть.

308*. Знайдіть вертикальні кути, якщо їх сума кратна числу 9 і лежить у межах:
1) від 55° до 70°; 2) від 111° до 120°; 3) від 241° до 249°.

309*. Проведіть дві прямі, що перетинаються в точці O. Через цю точку проведіть ще одну пряму. Чи змінилася при цьому кількість пар вертикальних кутів? А суміжних кутів? Як саме? Як зміниться ця кількість, якщо через точку O провести четверту, п'яту пряму?

310*. Під яким кутом перетинаються дві прямі, якщо сума трьох із чотирьох утворених кутів, становить:
1) сім шостих розгорнутого кута;
2) шістнадцять дев'ятих розгорнутого кута;
3) 25 % суми п'яти розгорнутих кутів;
4) різниці потроєного прямого кута і його дев'ятої частини;
5) $\frac{8}{3}$ середнього арифметичного двох із цих кутів, що не є рівними?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

311*. Доведіть, що коли дві прямі перетинаються, то дві інші прямі, які містять бісектриси утворених суміжних кутів, перетинаються під прямим кутом.

312*. Доведіть, що коли дві прямі перетинаються, то дві інші прямі, які містять бісектриси утворених вертикальних кутів, перетинаються під прямим кутом.

Проявіть компетентність

313. Як треба зігнути аркуш паперу, щоб на згинах отримати дві прямі, що перетинаються під прямим кутом? А під кутом 45°?

314. Який кут утворюють напрямки компаса (*румби*):
1) північ і північ–схід;
2) південь і південь–схід;
3) північ–схід і південь–захід?

315. Доведіть, що на компасі бісектриса кута між напрямками «північ» і «схід» та бісектриса кута між напрямками «південь» і «захід» лежать на одній прямій.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 6. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

1. Що таке перпендикулярні прямі

Ситуація. Богдан і Олена за картою міста (мал. 164) з'ясували, що вул. Смілянська перетинає бульв. Шевченка під прямим кутом.

qr.orioncentr.com.ua/gIE3l

Який саме із чотирьох кутів, що утворюють вул. Смілянська і бульв. Шевченка, є прямим?

Кожний.

Мал. 164

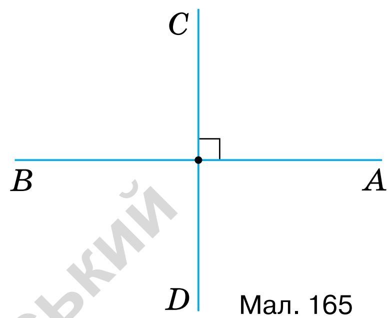
Справді, якщо один із кутів прямий (мал. 165), то інші три кути також прямі, оскільки будь-який з них або суміжний з прямим кутом, або вертикальний до нього.

Запам'ятайте!

Дві прямі називаються *перпендикулярними*, якщо вони перетинаються під прямим кутом.

Наприклад, на малюнку 165 прямі AB і CD — перпендикулярні.

Записують: $AB \perp CD$, а на малюнку ставлять знак прямого кута ⌝. Говорять: «Пряма AB перпендикулярна до прямої CD».



Мал. 165

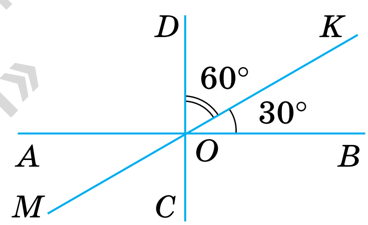
Якщо $AB \perp CD$, то і $CD \perp AB$, тобто прямі AB і CD *взаємно перпендикулярні*.

Задача Прямі AB, CD і MK перетинаються в точці O (мал. 166). Кут між прямими AB і MK дорівнює 30°, а між прямими CD і MK — 60°. Чи перпендикулярні прямі AB і CD?

Розв'язання За умовою $\angle BOK = 30°$, $\angle DOK = 60°$.

$\angle BOD = \angle BOK + \angle DOK = 30° + 60° = 90°$.

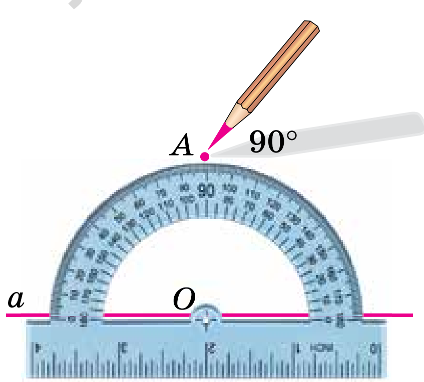
Отже, прямі AB і CD перетинаються під кутом 90°, тобто $AB \perp CD$.



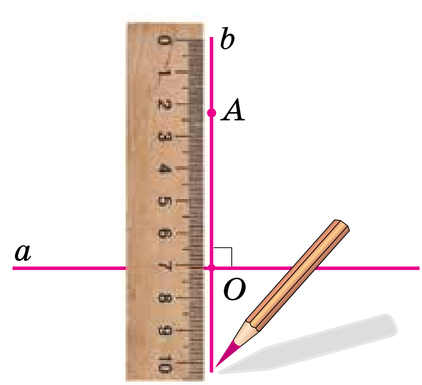
Мал. 166

2. Властивість перпендикулярних прямих

На малюнках 167 і 168 ви бачите, як за допомогою транспортира й лінійки будували пряму b, перпендикулярну до прямої a.



Мал. 167



Мал. 168

Побудовою фігури доводять існування цієї фігури.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Скільки прямих, перпендикулярних до даної прямої, можна провести через задану на ній точку?

Лише одну.

Запам'ятайте!

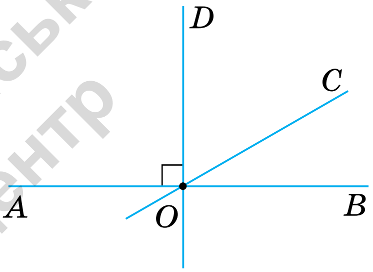
Теорема (про єдиність перпендикулярної прямої)

Через будь-яку точку на прямій проходить єдина перпендикулярна до неї пряма.

Дано: пряма AB,
$O \in AB$,
$OD \perp AB$ (мал. 169).

Довести: пряма $OD \perp AB$ тільки одна.

Доведення. За умовою прямі AB і OD перпендикулярні. Тому $\angle BOD = 90°$.



Мал. 169

Припустимо, що існує інша пряма, наприклад, OC, яка проходить через точку O і перпендикулярна до AB. Тоді одержимо два кути BOD і BOC, кожний з яких дорівнює 90°.

Але, за властивістю відкладання кутів, від променя OB по один бік від нього можна відкласти тільки один кут, що дорівнює 90°. Тому не може бути іншої прямої, крім OD, яка проходить через точку O і перпендикулярна до прямої AB.

3. Доведення від супротивного

У доведенні теореми про єдиність перпендикулярної прямої застосували особливий хід міркувань. Його називають *доведенням від супротивного*. У такому доведенні є три етапи.

Перший етап. Формулюємо припущення, протилежне вимозі теореми (нехай існує інша пряма, наприклад, OC, яка проходить через точку O і перпендикулярна до AB).

Другий етап. Доходимо висновку, що суперечить або умові теореми, або певній властивості, або доведеній раніше теоремі (отримали суперечність з властивістю: «Від променя по один бік від нього можна відкласти тільки один кут даної градусної міри»).

Третій етап. Робимо висновок, що зроблене припущення було неправильним, а правильним є твердження теореми (пряма OD, перпендикулярна AB, тільки одна).

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

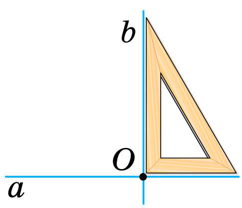
4. Побудова перпендикулярної прямої за допомогою косинця

Скільки є випадків побудови перпендикулярної прямої через задану точку?

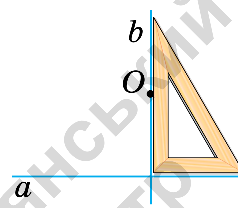
qr.orioncentr.com.ua/r6RiD

Два (мал. 170, 171).

Перший випадок (мал. 170) — *точка лежить на прямій*.
Другий випадок (мал. 171) — *точка не лежить на прямій*.



Мал. 170



Мал. 171

Через будь-яку точку, яка не лежить на прямій, можна провести тільки одну перпендикулярну до неї пряму.

Це твердження доведемо пізніше.

5. Перпендикуляр і відстань

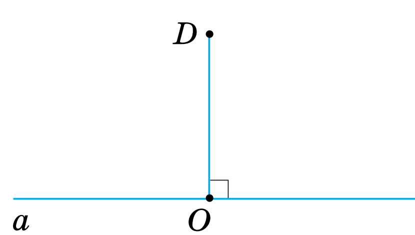
Чи бувають перпендикулярними промені або відрізки?

Так.

Промені або відрізки, що лежать на перпендикулярних прямих, також вважають перпендикулярними.

Запам'ятайте!

***Перпендикуляром*, проведеним із даної точки до даної прямої, називається відрізок, перпендикулярний до неї, який має кінці в даній точці й точці на даній прямій. Точка на даній прямій називається *основою перпендикуляра*.**



Мал. 172

На малюнку 172 відрізок DO — перпендикуляр до прямої a, точка O — основа перпендикуляра.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

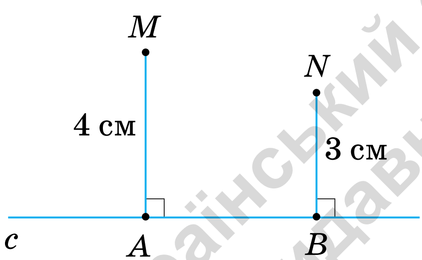
Цей відрізок — найменший з усіх відрізків, що сполучають точку D з точками прямої a. Тому довжину перпендикуляра DO називають *відстанню* від точки D до прямої a.

Чи можна порівнювати відстані?

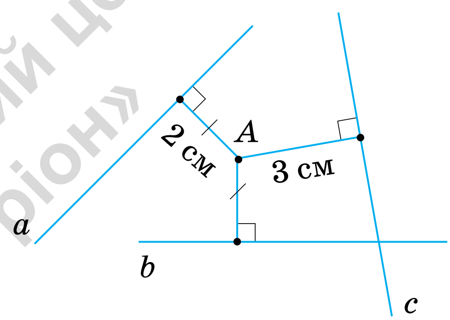
Так.

Наприклад, на малюнку 173 відстань від точки M до прямої c дорівнює 4 см, а відстань від точки N до цієї самої прямої дорівнює 3 см. Зрозуміло, що точка M знаходиться далі (на більшій відстані) від прямої c, аніж точка N.

Також можна порівнювати відстані від даної точки до кількох прямих. На малюнку 174 точка A лежить на однаковій відстані 2 см від прямих a і b. Але від прямої c вона розміщена на більшій відстані — 3 см. Про точку, яка розміщена на однаковій відстані від кількох прямих, кажуть, що вона *рівновіддалена* від цих прямих.



Мал. 173



Мал. 174

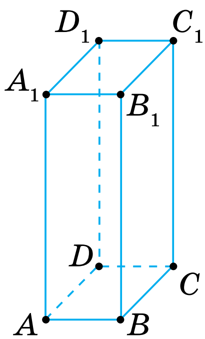
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

6. Перпендикулярні відрізки як елементи граней прямокутного паралелепіпеда і куба

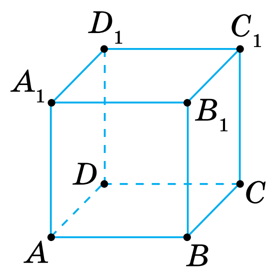
Чи є перпендикулярні відрізки на гранях прямокутного паралелепіпеда і куба?

Так.

Кожна грань прямокутного паралелепіпеда (мал. 175) і куба (мал. 176) є прямокутником або квадратом. Їх суміжні сторони — перпендикулярні відрізки. Тому суміжні сторони кожної грані паралелепіпеда і куба теж є перпендикулярними відрізками. Наприклад, на грані $ABCD$ перпендикулярними є відрізки AB і BC, BC і CD.



Мал. 175



Мал. 176

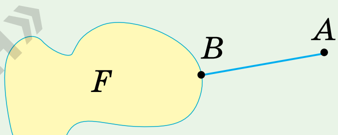
Дізнайтеся більше

1. Назва «перпендикулярний» походить від латинського слова «perpendicularis», яке означає «прямовисний». Схоже значення має термін «вертикальний», проте ці два поняття розрізняють. Якщо пряма a розташована горизонтально, то перпендикулярну до неї пряму b можна вважати вертикальною або, коротше, вертикаллю. Наприклад, лінії у зошиті в клітинку мають два напрямки — горизонтальний і вертикальний. Якщо ж пряма a розміщена інакше, тоді перпендикулярні до неї прямі не називають вертикальними.

Знак $\perp$ ввів у 1634 р. П. Ерігон.

2. Може виникнути запитання: Що таке відстань від точки до будь-якої фігури?

Відстанню від точки A до фігури F називають відстань від точки A до найближчої до неї точки B фігури F (мал. 177).



Мал. 177

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
перпендикулярні прямі	perpendicular lines	senkrechte Geraden	lignes perpendiculaires

qr.orioncentr.com.ua/N8YYW

Пригадайте головне

1. Які прямі називаються перпендикулярними?
2. Як побудувати пряму, перпендикулярну до даної прямої за допомогою: 1) транспортира та лінійки; 2) косинця?

3. Сформулюйте і доведіть теорему про єдиність перпендикулярної прямої.
4. Поясніть, як доводять від супротивного.
5. Що таке перпендикуляр до прямої; основа перпендикуляра?
6. Що називають відстанню від точки до прямої?

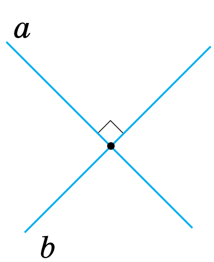
Усне тренування

Обчисліть:

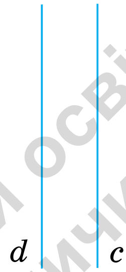
1) $180 : 2$; $180 : 4$; $90 - 33$; $90 - 57$;
2) $56 + 34$; $180 - 29$; $45 \cdot 3$; $57 : 3$.

Розв'яжіть задачі

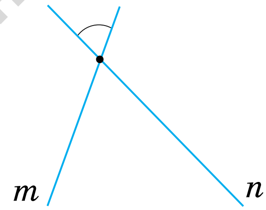
316'. На малюнках 178–180 зображено пари прямих. Запишіть:
1) перпендикулярні прямі;
2) не перпендикулярні прямі.



Мал. 178

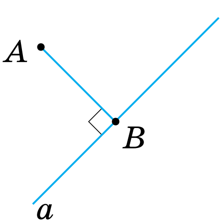


Мал. 179

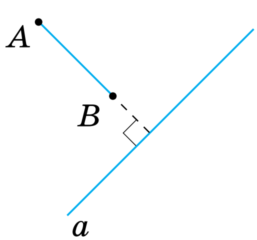


Мал. 180

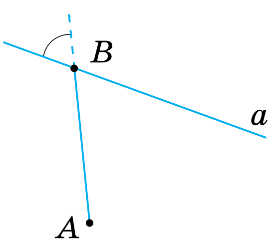
317'. На якому з малюнків 181–183:
1) відрізок AB є перпендикуляром до прямої a;
2) довжина відрізка AB дорівнює відстані від точки A до прямої a?
Відповідь поясніть.



Мал. 181



Мал. 182

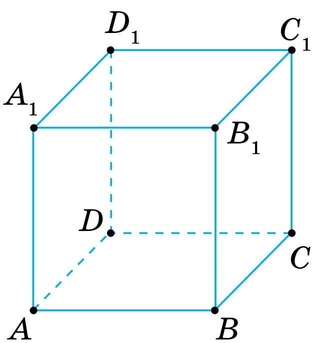


Мал. 183

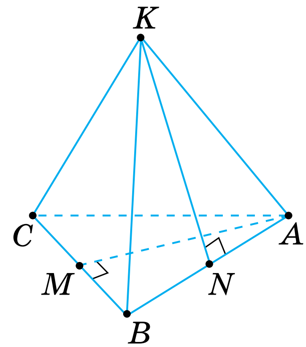
318'. У кубі (мал. 184) назвіть перпендикулярні відрізки на грані:
1) $ABCD$; 2) BCC_1B_1; 3) $A_1B_1C_1D_1$.

319'. Назвіть перпендикулярні відрізки, зображені на малюнку 185.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»



Мал. 184

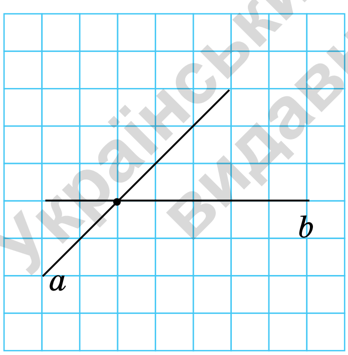


Мал. 185

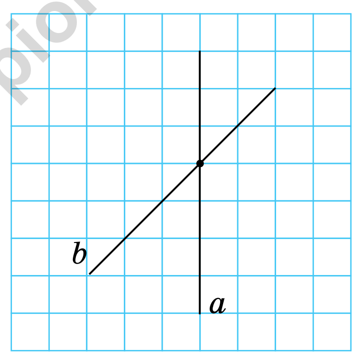
320°. Проведіть пряму a. За допомогою транспортира й лінійки побудуйте пряму b, перпендикулярну до прямої a.

321°. Побудуйте в зошиті прямі a і b так, як показано на малюнках 186, 187. Через точку їх перетину проведіть за клітинками пряму, перпендикулярно:
1) до прямої a;
2) до прямої b.

qr.orioncentr.com.ua/UcZeX

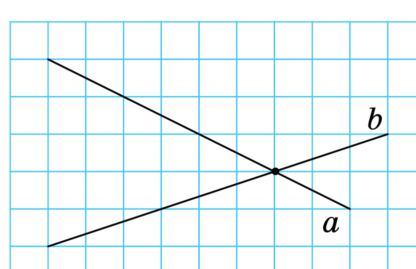


Мал. 186



Мал. 187

322°. Побудуйте в зошиті прямі a і b так, як показано на малюнку 188. Через точку їх перетину проведіть за клітинками пряму, перпендикулярно:
1) до прямої a;
2) до прямої b.

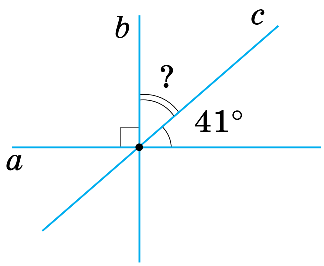


Мал. 188

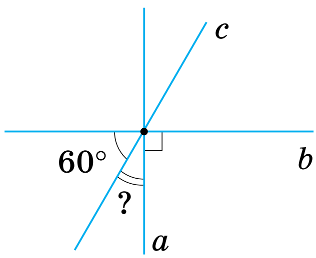
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

323°. На малюнках 189, 190 зображено перпендикулярні прямі a і b. Знайдіть невідомі кути.

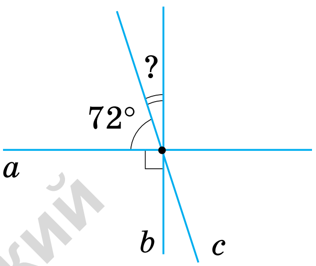
324°. На малюнку 191 зображено перпендикулярні прямі a і b. Знайдіть невідомий кут.



Мал. 189



Мал. 190

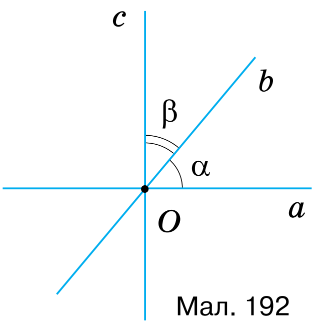


Мал. 191

325°. Перпендикулярні прямі AB і CD перетинаються в точці O. Пряма OT перетинає пряму AB під кутом α. Знайдіть градусну міру кута між прямими CD і OT, якщо:
1) $\alpha = 30°$; 2) $\alpha = 53°$; 3) $\alpha = 44°$; 4) $\alpha = 79°$.

326°. Перпендикулярні прямі KN і OP перетинаються в точці A. Пряма AB перетинає пряму KN під кутом β. Знайдіть градусну міру кута між прямими AB і OP, якщо $\beta = 60°$.

327°. Прямі b і c перетинають пряму a в точці O. Кут між прямими a і b дорівнює α, між прямими b і c — β (мал. 192). Накресліть у зошиті таблицю 15 і заповніть її за зразком, наведеним у другому стовпчику.



Мал. 192

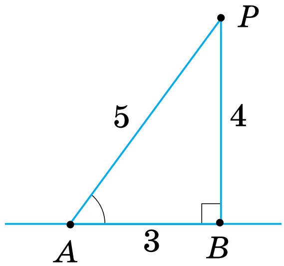
Таблиця 15

α	45°	57°	25°	38°	13°
β	45°	43°	65°	32°	77°
$\alpha + \beta$	90°				
$a \perp c$ — ?	Так				

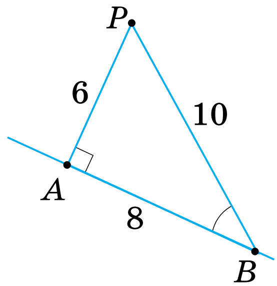
328°. За даними на малюнках 193–194, запишіть відстань:
1) від точки P до прямої AB (мал. 193);
2) від точки B до прямої AP (мал. 194).

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

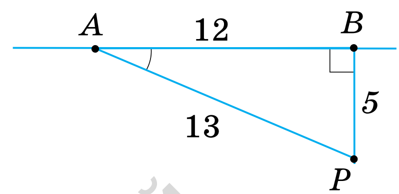
329°. За даними на малюнку 195 укажіть відстань:
1) від точки P до прямої AB; 2) від точки A до прямої BP.



Мал. 193



Мал. 194



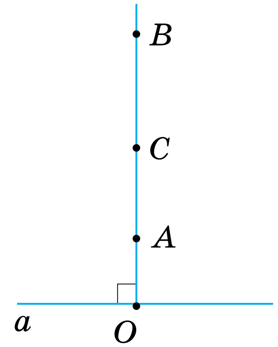
Мал. 195

330°. На малюнку 196 точки A, B і C розташовані на промені OA, перпендикулярному до прямої a. Заповніть таблицю 16.

Таблиця 16

№	Довжини відрізків						Відстань до прямої a від точки		
	AB	AC	BC	OA	OB	OC	A	B	C
1	6 см		3 см	2 см					
2		1 см	2 см			4 см			
3	5 см	1 см			8 см				

331°. Проведіть пряму a. Позначте точку A на відстані 3 см від даної прямої. По той самий бік від прямої позначте точку B так, щоб вона була:
1) на 2 см далі від прямої a, ніж точка A;
2) утричі ближче до прямої a, ніж точка A;
3) на 0,25 дм далі від прямої a, ніж точка A.



Мал. 196

332°. Проведіть пряму c. Позначте точку C на відстані 2 см від даної прямої. По той самий бік від прямої позначте точку A так, щоб вона була вдвічі далі від прямої c, ніж точка C.

333. Через точку M провели прямі a, b і c так, що прямі a і b перетинаються під кутом α, а прямі a і c — під кутом β. Кути α і β лежать по різні боки від прямої a. Чи перпендикулярні прямі b і c, якщо:

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

1) кут α становить третину розгорнутого кута і вдвічі більший за β;
2) кут β на $50°$ менший від прямого кута і дорівнює $\frac{4}{5}\alpha$?

334. Через точку O провели прямі a, b і c так, що прямі a і b перетинаються під кутом α, а прямі a і c — під кутом β. Кути α і β лежать по різні боки від прямої a. Чи перпендикулярні прямі b і c, якщо $\alpha = 5\beta$ і $\alpha - \beta = 60°$?

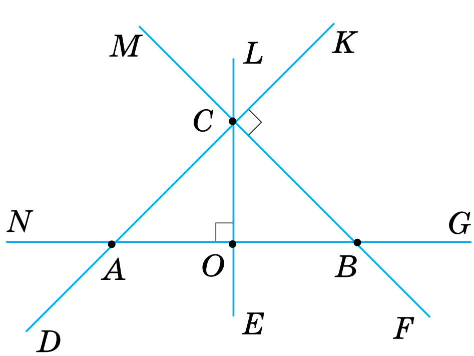
335. **Пряма a перетинає сторони кута A в точках B і C. Чи можуть обидві прямі AB і AC бути перпендикулярними до прямої a?**

336. Побудуйте $\angle AOB$ заданої градусної міри α. На стороні OA позначте точку C. Через цю точку проведіть прямі CK і CM так, щоб $CK \perp OA$ і $CM \perp OB$. Виміряйте $\angle KCM$. Порівняйте його градусну міру з мірою даного кута AOB, якщо:
1) $\alpha = 75°$;
2) $\alpha = 160°$;
3) $\alpha = 45°$.

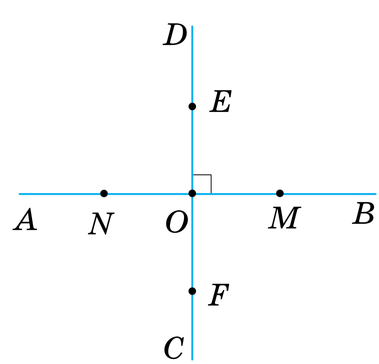
337. Побудуйте $\angle AOB = 130°$. На стороні OA позначте точку C. Через цю точку проведіть прямі CK і CM так, щоб $CK \perp OA$ і $CM \perp OB$. Виміряйте $\angle KCM$. Порівняйте його градусну міру з мірою даного кута AOB.

338. За малюнком 197 запишіть:
1) дві пари перпендикулярних променів;
2) чотири пари перпендикулярних відрізків;
3) три пари, до кожної з яких входять перпендикулярний промінь і відрізок.

339. За малюнком 198 запишіть дві пари перпендикулярних:
1) променів; 2) відрізків.



Мал. 197



Мал. 198

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

340. Побудуйте довільний кут, менший від розгорнутого. Проведіть його бісектрису. Позначте на ній довільні точки A, B і C. Із цих точок проведіть перпендикуляри до сторін кута і виміряйте їх. Яка закономірність спостерігається?

341. Точки O, P і T лежать на прямій, перпендикулярній до прямої c. Знайдіть відстань від точок O і T до прямої c, якщо точка P є серединою відрізка OT і лежить на відстані 2 см від прямої c, причому $OT = 7$ см, а точки P і T лежать:
1) по один бік від прямої c;
2) по різні боки від прямої c.

qr.orioncentr.com.ua/k77sL

342. Прямі MN і a — перпендикулярні. Відстані від точок M і N до прямої a відповідно дорівнюють 6 см і 9 см. Знайдіть:
1) довжину відрізка MN;
2) відстань від середини відрізка MN до прямої a.
Скільки випадків треба розглянути?

343*. Через точку O прямої AB провели прямі OC і OD під кутом α до даної прямої. Доведіть, що бісектриса OK кута COD перпендикулярна до прямої AB. Скільки випадків треба розглянути?

344*. Доведіть, що коли бісектриси кутів ABC і CBD перпендикулярні, то точки A, B і D лежать на одній прямій.

345*. Перпендикулярні прямі a і b перетинаються в точці K. Пряму c проведено через точку K під кутом $60°$ до прямої a. Пряму d проведено через точку K під кутом $30°$ до прямої a. Доведіть, що прямі c і d можуть бути перпендикулярними.

346*. Побудуйте кут β, сторони якого перпендикулярні до сторін кута α, якщо вершина кута β лежить:
1) у внутрішній області кута α;
2) у зовнішній області кута α.
Розгляньте три випадки, коли кут α гострий, прямий або тупий.

347*. Через точку A, що не лежить на прямій a, проведені три прямі, які перетинають пряму a. Доведіть, що принаймні дві з них не перпендикулярні до прямої a.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

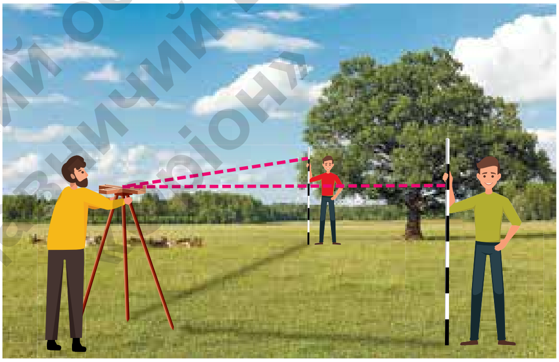
348*. Відстані від точок A, B і C до прямої d відповідно дорівнюють 3 см, 4 см і 5 см, причому $AB = 1$ см, а $BC = 9$ см. Чи можуть дані три точки:
1) лежати на одній прямій по один бік від прямої d;
2) лежати на одній прямій по різні боки від прямої d;
3) не лежати на одній прямій?

349*. Взаємно перпендикулярні прямі a і b перетинаються в точці A. Побудуйте прямі c і d так, щоб точка A була рівновіддаленою від них. Виміряйте відстані й кути на отриманому малюнку. Яка закономірність спостерігається?

Проявіть компетентність

350. Для побудови перпендикулярних прямих на місцевості застосовують екер (мал. 199). Поясніть за малюнком 200, як за допомогою цього приладу будують прямий кут. Як треба діяти, щоб через точку на прямій повести пряму, перпендикулярну до даної?

Мал. 199



Мал. 200

351. Укажіть перпендикулярні відрізки на предметах довкілля за малюнком 201.

Мал. 201

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 7. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

1. Що таке паралельні прямі

Ситуація. Богдан і Олена за картою міста (мал. 202) з'ясували, що вул. Святотроїцька перетинає бульв. Шевченка, а вул. Хрещатик не перетинає його на всій їх протяжності.

qr.orioncentr.com.ua/JWfKh

Мал. 202

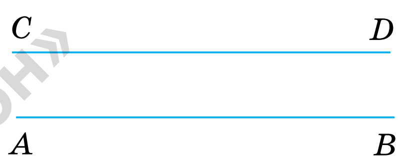
— Яке взаємне розміщення вул. Хрещатик і бульв. Шевченка?

— Вони паралельні.

Запам'ятайте!

Дві прямі на площині називаються *паралельними*, якщо вони не перетинаються.

Наприклад, на малюнку 203 прямі AB і CD — паралельні.



Мал. 203

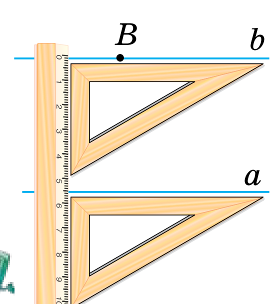
Записують: $AB \parallel CD$ або $CD \parallel AB$ і говорять: «Пряма AB паралельна прямій CD».

Навколо нас багато прикладів паралельних прямих. У зошиті в клітинку горизонтальні лінії паралельні. Те саме можна сказати і про вертикальні лінії. Наприклад, рейки залізничної колії (мал. 204) також паралельні.


Мал. 204

2. Властивість паралельних прямих

На малюнку 205 показано, як за допомогою лінійки й косинця через точку B провести пряму b, паралельну прямій a.



Мал. 205

— Чи можна через точку B провести ще одну пряму, паралельну прямій a?

— Ні.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

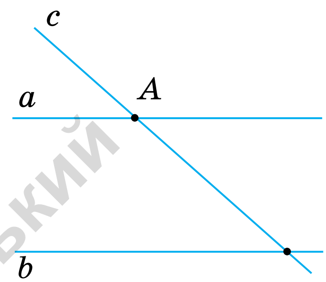
Запам'ятайте!

Аксіома паралельних прямих (Евкліда)

Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Наслідок. **Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й іншу пряму.**

Справді, нехай a і b — паралельні прямі і пряма c перетинає пряму a в точці A (мал. 206). Якби пряма c не перетинала пряму b, то через точку A проходили б дві прямі (a і c), паралельні прямій b. Це суперечить аксіомі паралельних прямих. Отже, пряма c перетинає пряму b.

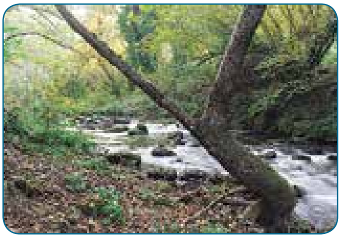


Мал. 206

Твердження, яке безпосередньо випливає з доведеної теореми або з аксіоми, називають *наслідком*.

3. Кути при двох прямих і січній

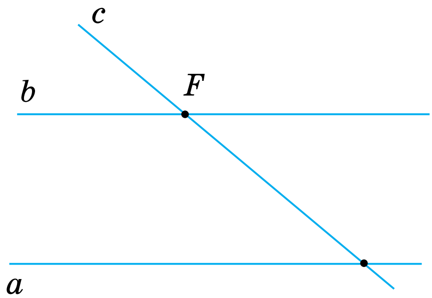
qr.orioncentr.com.ua/0FA9k



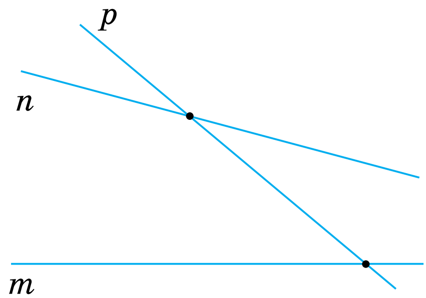
Запам'ятайте!

Пряму, що перетинає дві дані прямі, називають *їх січною*.

Наприклад, на малюнку 207 пряма c є січною паралельних прямих a і b. А на малюнку 208 пряма p — січна прямих m і n, що не є паралельними.



Мал. 207



Мал. 208

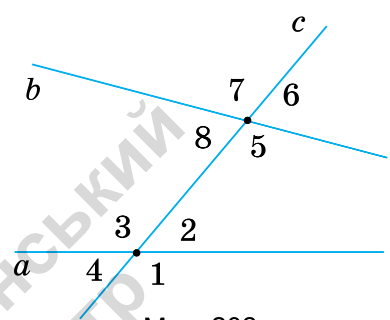
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Скільки кутів утворюється при перетині двох прямих січною?

Вісім.

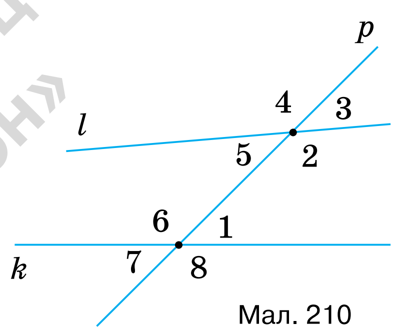
Ці кути можна об'єднати в пари і дати їм такі назви (мал. 209):

- *внутрішні односторонні кути* — $\angle 2$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 8$;
- *внутрішні різносторонні кути* — $\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 3$ і $\angle 5$;
- *відповідні кути* — $\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 8$;
- *зовнішні односторонні кути* — $\angle 1$ і $\angle 6$, $\angle 4$ і $\angle 7$;
- *зовнішні різносторонні кути* — $\angle 1$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 6$.



Мал. 209

Задача Внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній дорівнюють 45° і 140°. Знайдіть решту кутів.



Мал. 210

Розв'язання Позначимо кути при двох прямих і січній цифрами (мал. 210).

Нехай $\angle 1 = 45°$, а $\angle 2 = 140°$. Тоді одержимо:

1) $\angle 3$ і $\angle 2$ — суміжні, тому $\angle 3 = 180° - \angle 2 = 180° - 140° = 40°$.

2) $\angle 4$ і $\angle 2$ — вертикальні, тому $\angle 4 = \angle 2 = 140°$.

3) $\angle 5$ і $\angle 3$ — вертикальні, тому $\angle 5 = \angle 3 = 40°$.

4) $\angle 6$ і $\angle 1$ — суміжні, тому $\angle 6 = 180° - \angle 1 = 180° - 45° = 135°$.

5) $\angle 7$ і $\angle 1$ — вертикальні, тому $\angle 7 = \angle 1 = 45°$.

6) $\angle 8$ і $\angle 6$ — вертикальні, тому $\angle 8 = \angle 6 = 135°$.

Чи бувають паралельними промені або відрізки?

Так.

Промені або відрізки, що лежать на паралельних прямих, також вважають паралельними.

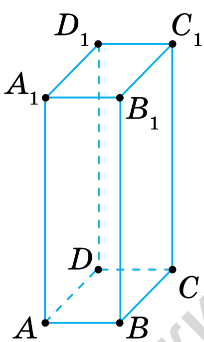
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

4. Паралельні відрізки як елементи граней прямокутного паралелепіпеда і куба

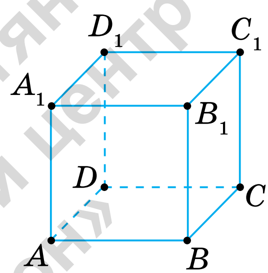
Чи є паралельні відрізки на гранях прямокутного паралелепіпеда і куба?

Так.

У прямокутному паралелепіпеді (мал. 211) і кубі (мал. 212) кожна грань є прямокутником або квадратом. А їх протилежні сторони — паралельні відрізки. Тому протилежні сторони кожної грані паралелепіпеда і куба теж є паралельними відрізками. Наприклад, на грані ABB_1A_1 паралельними є відрізки AB і A_1B_1, AA_1 і BB_1.



Мал. 211

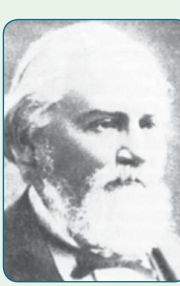


Мал. 212

Дізнайтеся більше

1. Близько 300 р. до н. е. побачила світ фундаментальна праця «Начала» давньогрецького вченого Евкліда. Саме її упродовж 2 тис. років вважали взірцем математичної строгості. Хоча із сучасного погляду не всі положення, сформульовані Евклідом, є бездоганними. Зокрема в «Началах» наведено означення всіх понять, навіть точки й прямої. За Евклідом «точка — це та, що не має розмірів», «пряма лінія — така, що однаково розміщена відносно всіх своїх точок» тощо. Зрозуміло, що такі формулювання не можна вважати означеннями. Проте безсумнівним здобутком Евкліда була і залишається побудова відносно стрункої дедуктивної геометричної теорії. У «Началах» чітко виділено систему аксіом, з якої виводяться всі інші твердження. Упродовж тривалого часу в різних країнах світу геометрію вивчали за «Началами» Евкліда. Навіть зараз британські школярі підручник з геометрії коротко називають «Евклід».

2. Вітчизняний переклад «Начал» (1880 р.) належить видатному українському математику **Михайлу Єгоровичу Ващенку-Захарченку** (1825–1912), який народився в селі Маліївка Золотоніського повіту на Полтавщині



М. Є. Ващенко-Захарченко

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

(нині — район Черкаської області). Інша його фундаментальна праця «Історія математики» (1883 р.) також добре відома всім знавцям і любителям математики.

3. Сучасна аксіома паралельних прямих (від грецького слова *paralelos* — «що йде поруч») є твердженням, рівносильним аксіомі, яка в «Началах» Евкліда має назву V постулат. Протягом багатьох століть математики намагалися довести це твердження, виходячи з інших аксіом Евкліда. Проте всі спроби були марними.

На початку XIX ст. троє видатних геометрів — М. І. Лобачевський (1792–1856), К. Ф. Гаус (1777–1855), Я. Бойяї (1802–1860) — незалежно один від одного дійшли висновку, що довести V постулат Евкліда неможливо. За аксіому взяли твердження, протилежне аксіомі паралельних: «Через точку поза прямою можна провести принаймні дві прямі, паралельні даній». Виводячи наслідки з цього твердження та інших аксіом Евкліда, кожний учений побудував нову, незвичну, але не менш струнку геометричну теорію.

4. Знак || для позначення паралельності прямих уперше ввів у своїх працях англійський математик В. Оутред (1574–1660).

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
паралельні прямі	parallel lines	parallele Geraden	lignes parallèles

qr.orioncentr.com.ua/5skDO

Пригадайте головне

1. Які прямі називаються паралельними?
2. Сформулюйте аксіому паралельних.
3. Сформулюйте наслідок з аксіоми паралельних.
4. Що таке січна?
5. Як називаються пари кутів при двох прямих і січній?

Усне тренування

Обчисліть:

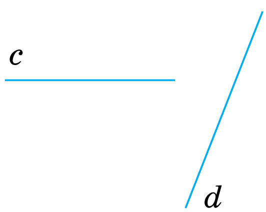
1) 180 – 21;   72 + 18;   180 – 103;   93 + 87;
2) 156 + 24;   90 – 39;   45 + 135;   180 – 99.

Розв'яжіть задачі

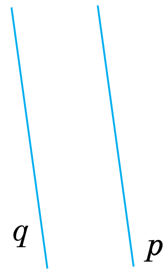
352'. На малюнках 213, 214 зображено пари прямих. Назвіть прямі, які: 1) перетинаються; 2) паралельні.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

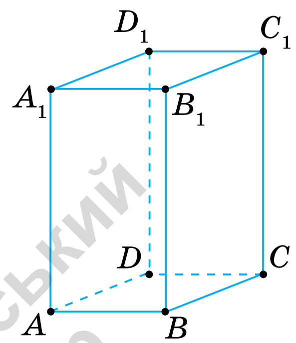
353'. У прямокутному паралелепіпеді (мал. 215) назвіть паралельні відрізки на грані:
1) $ABCD$;
2) BCC_1B_1;
3) $A_1B_1C_1D_1$.



Мал. 213



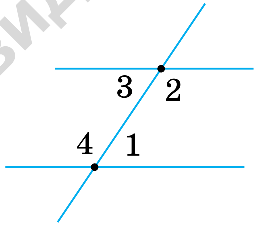
Мал. 214



Мал. 215

354'. У записах $AB*CD$, $BC*CC_1$, $AD*A_1D_1$, $CC_1*B_1C_1$ (мал. 215) замість * поставте потрібний знак — $\perp$ чи $\parallel$.

355'. Які назви мають пари кутів при двох прямих і січній (мал. 216):
1) $\angle 1$ і $\angle 2$;
2) $\angle 1$ і $\angle 3$;
3) $\angle 3$ і $\angle 4$;
4) $\angle 2$ і $\angle 4$?

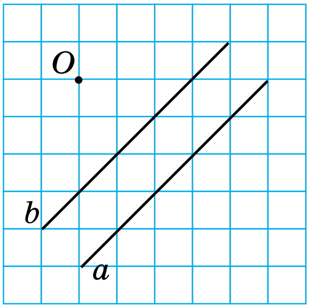


Мал. 216

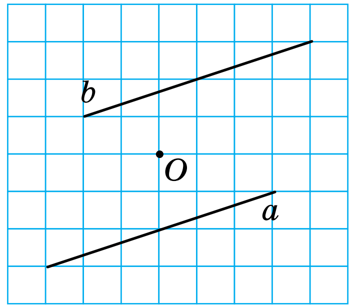
356°. Проведіть паралельні прямі a і b так, як показано на малюнках 217, 218. Через точку O проведіть пряму c, паралельну прямій b. За допомогою лінійки й косинця перевірте, чи є паралельними прямі a і c.

357°. Проведіть паралельні прямі a і b так, як показано на малюнку 219. Через точку O проведіть пряму c, паралельну прямій b. За допомогою лінійки й косинця перевірте, чи є паралельними прямі a і c.

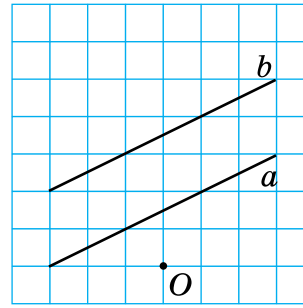
Український освітянський видавничий центр «Оріон»



Мал. 217



Мал. 218



Мал. 219

358°. Скільки прямих можна провести через точку O паралельно:
1) прямій a (мал. 217);
2) прямій b (мал. 217);
3) прямій a (мал. 218);
4) прямій b (мал. 218)?
Відповідь обґрунтуйте.

359°. Скільки прямих можна провести через точку O паралельно:
1) прямій a (мал. 219);
2) прямій b (мал. 219)?
Відповідь обґрунтуйте.

360°. Побудуйте пряму k. Через точку O, що не лежить на прямій k, проведіть:
1) пряму m, паралельну прямій k, і пряму n;
2) пряму c, паралельну прямій k, і пряму d.
Яка з побудованих прямих не перетинає пряму k, а яка перетинає її? Висновок поясніть.

qr.orioncentr.com.ua/vw2l0

361°. Проведіть пряму a. Позначте точку A, що не лежить на цій прямій. За допомогою лінійки й косинця проведіть пряму b, паралельну прямій a.

362°. Яке взаємне розміщення прямих n і p, якщо:
1) $n \parallel m$, $A \in m$, $A \in p$;   2) $p \parallel m$, $A \in m$, $A \in n$?

363°. Яке взаємне розміщення прямих a і c, якщо $a \parallel b$, $O \in a$, $O \in c$?

364°. Прямі m і n не перетинаються. На прямій m позначено точки C, D і E, а на прямій n — точки A і B. Зробіть малюнок і назвіть:
1) промені, паралельні відрізку CD;
2) відрізки, паралельні променю AB.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

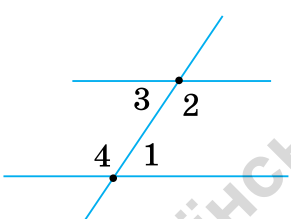
365°. Прямі a і b не перетинаються. На прямій a позначено точки A, B і C, а на прямій b — точки M і N. Зробіть малюнок і назвіть:
1) промені, паралельні відрізку AB;
2) відрізки, паралельні променю MN.

366°. Побудуйте $\angle MON = \alpha$. Через точку P на стороні OM проведіть пряму PT, яка паралельна променю ON, якщо:
1) $\alpha = 75°$; 2) $\alpha = 90°$; 3) $\alpha = 120°$.

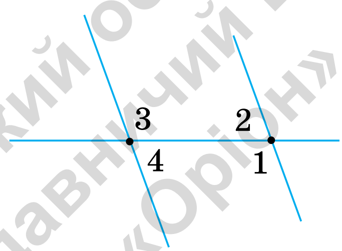
367°. Побудуйте $\angle AOB = 150°$. Через точку C на стороні OA проведіть пряму CD, яка паралельна променю OB.

368°. На малюнках 220, 221 зображено дві прямі з їх січною. Запишіть назви пар кутів:
1) $\angle 1$ і $\angle 2$; 2) $\angle 3$ і $\angle 4$; 3) $\angle 2$ і $\angle 4$.

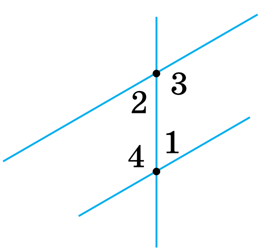
369°. На малюнку 222 зображено дві прямі з їх січною. Запишіть назви пар кутів:
1) $\angle 1$ і $\angle 2$; 2) $\angle 3$ і $\angle 4$; 3) $\angle 2$ і $\angle 4$.



Мал. 220



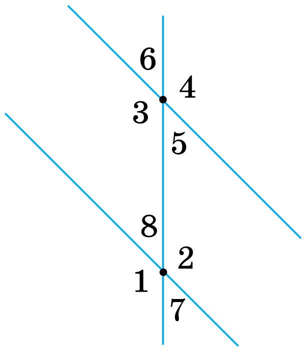
Мал. 221



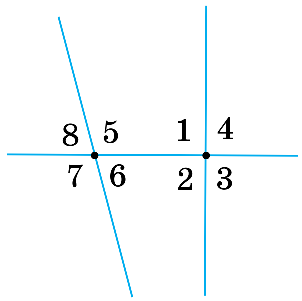
Мал. 222

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

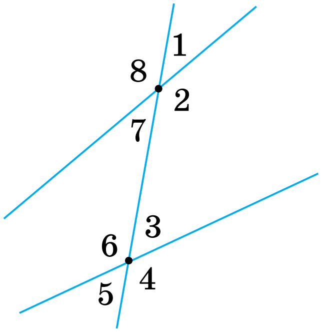
370°. Перемалюйте в зошит і заповніть таблицю 17, скориставшись позначеннями на:
1) мал. 223; 2) мал. 224; 3) мал. 225.



Мал. 223



Мал. 224



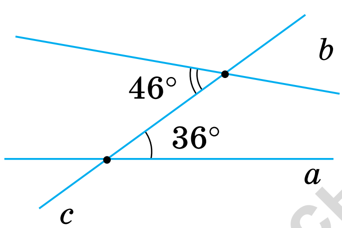
Мал. 225

Таблиця 17

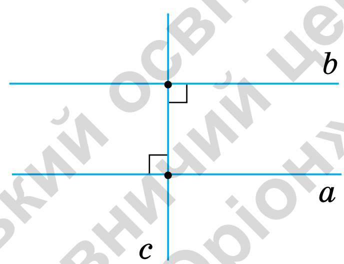
Назви кутів	**Номери кутів при двох прямих і січній**		
	мал. 223	мал. 224	мал. 225
внутрішні односторонні			
внутрішні різносторонні			
відповідні			
зовнішні односторонні			
зовнішні різносторонні			

371°. За даними на малюнках 226, 227 знайдіть градусні міри внутрішніх кутів з обох боків від січної *c*.

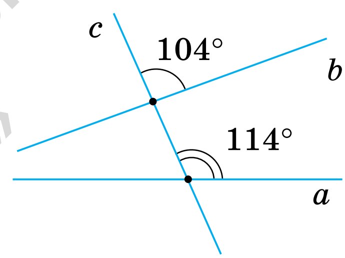
372°. За даними на малюнку 228 знайдіть градусні міри внутрішніх кутів з обох боків від січної *c*.



Мал. 226



Мал. 227



Мал. 228

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

373°. Чому дорівнюють внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній, якщо:
1) внутрішні різносторонні кути дорівнюють 50° і 45°;
2) відповідні кути рівні й мають градусну міру 60°;
3) внутрішні різносторонні кути становлять по 110°;
4) зовнішні односторонні кути дорівнюють 100° і 45°;
5) зовнішні односторонні кути становлять по 90°;
6) зовнішні різносторонні кути становлять по 90°?

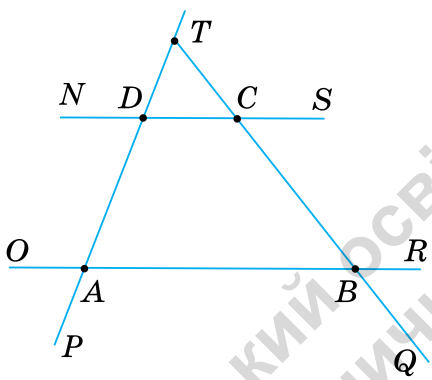
qr.orioncentr.com.ua/usmMi

374°. Чому дорівнюють внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній, якщо:
1) внутрішні різносторонні кути дорівнюють 60° і 90°;
2) зовнішні односторонні кути дорівнюють 60° і 90°?

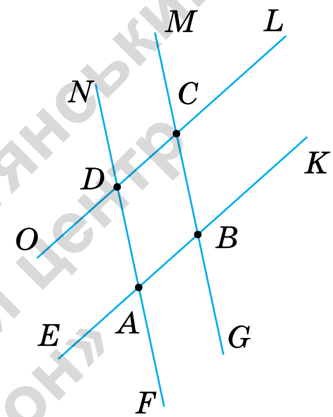
375. **Доведіть, що коли дві прямі паралельні третій прямій, то вони паралельні.**

376. На малюнку 229 $AB \parallel CD$. Запишіть:
1) паралельні відрізки;
2) три пари паралельних променів;
3) дві пари, кожну з яких утворюють паралельні промінь і відрізок.

377. На малюнку 230 $AB \parallel DC$ і $AD \parallel BC$. Запишіть:
1) паралельні відрізки;
2) дві пари паралельних променів.

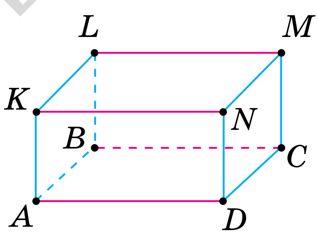


Мал. 229



Мал. 230

378. У паралелепіпеда (мал. 231) $AD \parallel KN$ і $LM \parallel KN$ як протилежні сторони прямокутників. Чи правильно, що $AD \parallel LM$? Відповідь поясніть.



Мал. 231

379. Скількома способами можна послідовно занумерувати кути при двох прямих і січній, щоб їх обхід від кута 1 до кута 8 здійснювався:
1) за стрілкою годинника;
2) проти стрілки годинника;
3) за стрілкою годинника і так, щоб кут 1 був внутрішнім? Зробіть малюнок.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

380. Скількома способами можна послідовно занумерувати кути при двох прямих і січній, щоб їх обхід від кута 1 до кута 8 здійснювався проти стрілки годинника і так, щоб кут 1 був зовнішнім? Зробіть малюнок.

381. Внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній дорівнюють:
1) $127°$ і $43°$;
2) $15°$ і $165°$;
3) $95°$ і $95°$.
Знайдіть решту кутів. Зробіть малюнок.

382. Внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній дорівнюють $105°$ і $95°$. Знайдіть решту кутів. Зробіть малюнок.

383. При перетині двох прямих із січною утворилися внутрішні різносторонні кути, які позначили α. Знайдіть решту кутів, якщо:
1) $\alpha = 30°$;
2) $\alpha = 150°$;
3) $\alpha = 80°30'$.

384. При перетині двох прямих із січною утворилися внутрішні різносторонні кути, які позначили α. Знайдіть решту кутів, якщо $\alpha = 99°30'$.

385. **Доведіть, що коли внутрішні різносторонні кути рівні, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює $180°$.**

386. **Доведіть, що коли сума внутрішніх односторонніх кутів становить $180°$, то внутрішні різносторонні кути рівні.**

387*. Проведіть прямі a і b та січну c. Послідовно занумеруйте утворені кути так, щоб при їх обході від кута 1 до кута 8 проти стрілки годинника:
1) кути 1 і 5 були внутрішніми різносторонніми, кути 4 і 6 були відповідними, а кути 1 і 8 були внутрішніми односторонніми;
2) кути 2 і 4 були відповідними, а кути 7 і 8 були внутрішніми односторонніми.
Скількома способами можна занумерувати кути?

388*. Доведіть, що відповідні кути при двох прямих і січній не можуть бути рівними, якщо внутрішні односторонні кути в сумі не становлять $180°$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

389*. Знайдіть кути при двох прямих і січній, якщо відповідні кути відносяться як 2 : 1, а сума внутрішніх односторонніх кутів становить $135°$.

390*. Січна перетинає одну із двох даних прямих під кутом α, а іншу — під кутом β ($\alpha \neq \beta$). Чому дорівнює решта кутів при двох даних прямих і січній? Розгляньте випадки, коли кути α і β:
1) внутрішні односторонні;
2) внутрішні різносторонні;
3) відповідні;
4) зовнішні односторонні;
5) зовнішні різносторонні.
Чи спостерігається якась закономірність?

391*. Доведіть, що січна перпендикулярна до двох прямих, якщо кожний із двох відповідних кутів дорівнює середньому арифметичному внутрішніх односторонніх кутів.

Проявіть компетентність

392. Вулиця проходить з північного сходу на південний захід. У якому напрямку проходить паралельна їй вулиця? А перпендикулярна? Зробіть малюнки, вважаючи вертикальний край аркуша в зошиті напрямком на північ.

393. Укажіть паралельні відрізки на предметах довкілля за малюнком 232.

Мал. 232

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 8. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

1. Що таке ознака

qr.orioncentr.com.ua/64iFL

Ситуація. Юрій Петрович нагадав означення паралельних прямих: **Дві прямі на площині, які не перетинаються, називаються паралельними.**

Як за означенням встановити, чи паралельні дві прямі?

Треба їх продовжувати до нескінченності.

Але це неможливо!

Тому доводять твердження, що дозволяє виявляти паралельність прямих, не продовжуючи їх. Таку теорему називають *ознакою*.

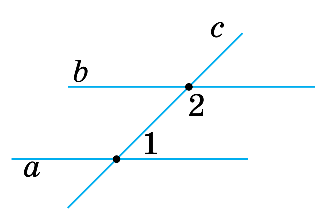
2. Перша ознака паралельності прямих

Запам'ятайте!

Теорема (ознака паралельності прямих)

Дві прямі паралельні, якщо сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

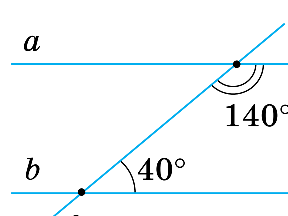
Дано: прямі a і b, січна c,
$\angle 1$ і $\angle 2$ — внутрішні односторонні,
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (мал. 233).
Довести: $a \parallel b$.



Мал. 233

Приймемо істинність цього твердження без доведення.

Задача 1 Внутрішні односторонні кути при прямих a і b та січній c дорівнюють 40° і 140°. Чи паралельні прямі a і b?



Мал. 234

Розв'язання

Нехай $\angle 1 = 40°$, а $\angle 2 = 140°$ (мал. 234).

Тоді $\angle 1 + \angle 2 = 40° + 140° = 180°$.

Отже, за першою ознакою паралельності прямих, $a \parallel b$.

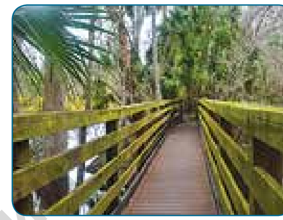
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

3. Інші ознаки паралельності прямих

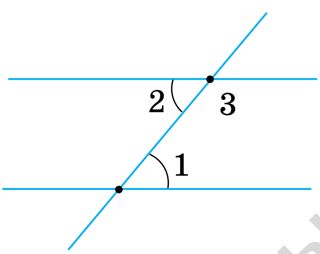
Чи тільки за внутрішніми односторонніми кутами можна встановити паралельність двох прямих?

qr.orioncentr.com.ua/A7WVe

Ні.



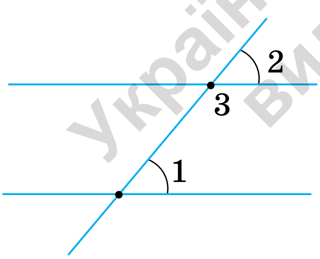
Паралельність двох прямих можна встановити за будь-якою парою кутів, що утворюються при перетині двох прямих із січною. Такі ознаки паралельності прямих безпосередньо випливають з першої ознаки. Сформулюємо деякі з них як наслідки.



Мал. 235

Наслідок 1. **Дві прямі паралельні, якщо внутрішні різносторонні кути рівні.**

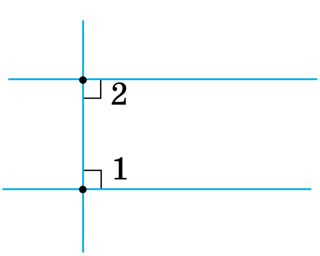
Справді, за умовою, $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 235), а $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, бо ці кути суміжні. Тому $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Отже, за першою ознакою паралельності прямих, дані прямі — паралельні.



Мал. 236

Наслідок 2. **Дві прямі паралельні, якщо відповідні кути рівні.**

Справді, за умовою, $\angle 1 = \angle 2$ (мал. 236), а $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, бо ці кути суміжні. Тому $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Отже, за першою ознакою паралельності прямих, дані прямі — паралельні.



Мал. 237

Наслідок 3. **Дві прямі паралельні, якщо вони перпендикулярні до третьої прямої.**

Справді, $\angle 1 = \angle 2 = 90°$ (мал. 237). Тому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ і, за першою ознакою паралельності прямих, дані прямі — паралельні.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Кожний наслідок є ознакою паралельності прямих.

Спираючись на наслідок 3, можна сформулювати правило побудови прямої, паралельної даній.

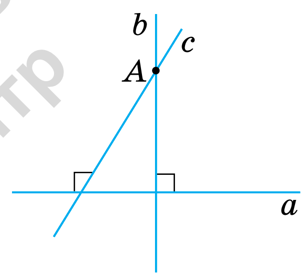
Щоб провести пряму, паралельну даній, за допомогою косинця побудуйте:
1) перпендикулярну до неї пряму;
2) до отриманої прямої побудуйте іншу перпендикулярну пряму.

Задача 2 Доведіть, що через точку, що не лежить на прямій, проходить тільки одна перпендикулярна до неї пряма.

Розв'язання Нехай точка A не лежить на прямій a (мал. 238).

Припустимо, що через точку A проходять дві прямі b і c, перпендикулярні до прямої a. Тоді за наслідком 3 прямі b і c повинні бути паралельними, тобто не можуть мати спільної точки A.

Отже, припущення неправильне. Тому через точку A проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до прямої a.



Мал. 238

Дізнайтеся більше

Починаючи з XVIII століття, багато вчених намагалися створити більш досконалий підручник, ніж «Начала» Евкліда. Одним із них був **Михайло Васильович Остроградський** (1801–1862), який народився у селі Пашенне Кобеляцького повіту Полтавської губернії. Його підручник з елементарної геометрії вважається однією з перлин творчого доробку вченого.

Наведемо одну з теорем та її доведення.

Твердження 14. Дві прямі, що утворюють внутрішні кути з одного боку від січної, сума яких менша від $2d$, неодмінно зустрічаються.

Д о в е д е н н я. Назвемо для скорочення буквами a і b лінії, які перетинає січна. Через точку перетину січної з однією з них, нехай з a, проведемо паралельну лінії b. Ця паралельна, яку назвемо буквою c, звичайно буде відмінна від a, бо вона і b утворюють з січною внутрішні кути, сума яких не менша, а рівна $2d$. Тут говориться про внутрішні кути з того боку від січної, де сума цих кутів для a і b менша від $2d$. Якщо тепер припустите, що a не перетинається з b, то через одну точку ви матимете дві лінії a і c, паралельні прямій b, що суперечить попередньому твердженню. Таким чином паралельними прямими є тільки ті, які дають суму внутрішніх кутів з кожного боку січної, рівну $2d$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
ознака паралельності прямих	a sign of line parallelis	ein Zeichen für parallele Linien	signe de parallélisme des droites

qr.orioncentr.com.ua/fLJOP

Пригадайте головне

1. Поясніть, яку теорему називають ознакою.
2. Сформулюйте першу ознаку паралельності прямих за внутрішніми односторонніми кутами.
3. Сформулюйте ознаку паралельності прямих за внутрішніми різносторонніми кутами.
4. Сформулюйте ознаку паралельності прямих за відповідними кутами.
5. Сформулюйте ознаку паралельності прямих за перпендикулярністю цих прямих до третьої прямої.
6. Як побудувати пряму, паралельну даній за допомогою косинця?

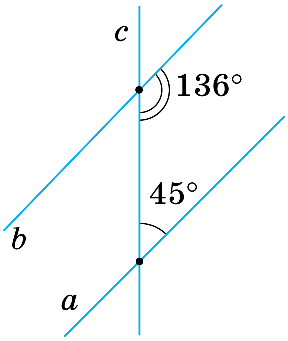
Усне тренування

Обчисліть:

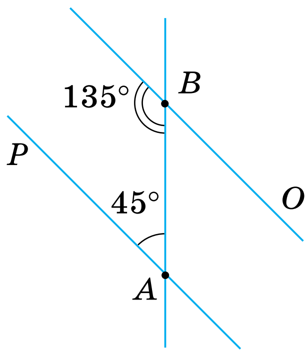
1) $79 + 101$; $172 + 18$; $105 + 75$; $83 + 97$;
2) $136 + 44$; $90 + 89$; $65 + 115$; $81 + 99$.

Розв’яжіть задачі

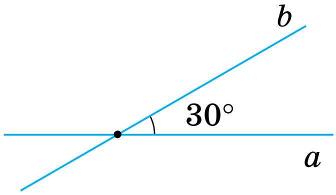
394'. За даними, наведеними на малюнках 239, 240, з’ясуйте, які прямі: 1) паралельні; 2) не паралельні.
Зробіть відповідні записи.



Мал. 239



Мал. 240



Мал. 241

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

395°. Побудуйте прямі a і b так, як показано на малюнку 241. Скориставшись транспортиром і лінійкою, побудуйте пряму c, паралельну:
1) прямій a; 2) прямій b.
Яка пряма є січною для двох паралельних прямих?

396°. Чи паралельні дві прямі, які із січною утворюють внутрішні односторонні кути:
1) 25° і 125°; 3) 61° і 117°;
2) 38° і 142°; 4) 56° і 124°?

qr.orioncentr.com.ua/Qxlp8

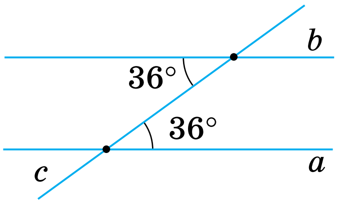
397°. Чи паралельні дві прямі, які із січною утворюють внутрішні односторонні кути 45° і 135°?

398°. Обґрунтуйте, що дві прямі не паралельні, якщо вони із січною утворюють внутрішні односторонні кути:
1) 18° і 118°; 2) 130° і 102°; 3) 37° і 87°.

399°. Обґрунтуйте, що дві прямі не паралельні, якщо вони із січною утворюють внутрішні односторонні кути 81° і 81°.

400°. Чи можуть бути паралельними дві прямі, якщо вони із січною утворюють внутрішні односторонні кути α і β так, що:
1) $\alpha = \beta$; 2) $\alpha = 2\beta$; 3) $\alpha + \beta = 150°$; 4) $\alpha - \beta = 60°$?
Побудуйте ці прямі.

401°. Чи можуть бути паралельними дві прямі, якщо вони із січною утворюють внутрішні односторонні кути α і β так, що:
1) $5\alpha = \beta$; 2) $\alpha + \beta = 181°$?
Побудуйте ці прямі.



Мал. 242

402°. За даними на малюнку 242 обґрунтуйте, що прямі a і b паралельні.

403°. Чи паралельні дві прямі, які утворюють із січною внутрішні різносторонні кути:
1) 45° і 55°; 3) 91° і 91°?
2) 168° і 168°;

qr.orioncentr.com.ua/RRHNj

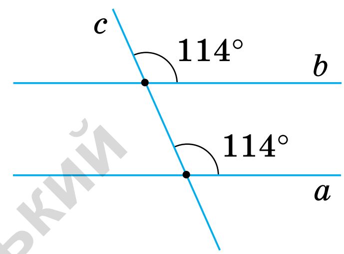
404°. Чи паралельні дві прямі, які утворюють із січною внутрішні різносторонні кути:
1) 30° і 150°; 2) 12° і 12°?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

405°. Обґрунтуйте, що дві прямі не паралельні, якщо вони із січною утворюють внутрішні різносторонні кути:
1) $18°$ і $19°$; 2) $130°$ і $120°$; 3) $37°$ і $73°$.

406°. Обґрунтуйте, що дві прямі не паралельні, якщо вони із січною утворюють внутрішні різносторонні кути $81°$ і $91°$.

407°. За даними на малюнку 243 обґрунтуйте, що прямі a і b паралельні.



Мал. 243

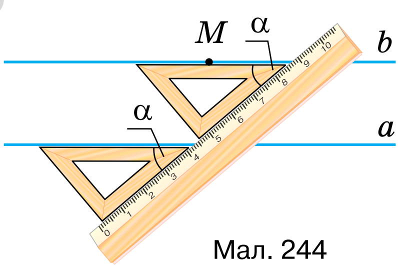
408°. Чи паралельні дві прямі, які утворюють із січною відповідні кути:
1) $117°$ і $117°$; 2) $63°$ і $163°$; 3) $48°$ і $84°$?

409°. Чи паралельні дві прямі, які утворюють із січною відповідні кути $121°$ і $121°$?

410°. Обґрунтуйте, що дві прямі не паралельні, якщо вони із січною утворюють відповідні кути:
1) $81°$ і $91°$; 2) $103°$ і $102°$; 3) $73°$ і $37°$.

411°. Обґрунтуйте, що дві прямі не паралельні, якщо вони із січною утворюють внутрішні різносторонні кути $81°$ і $91°$.

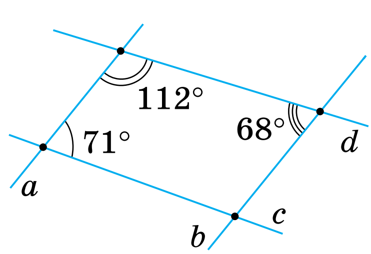
412°. На малюнку 244 показано, як провести паралельні прямі за допомогою лінійки та косинця. Поясніть побудову.



Мал. 244

413°. На аркуші в клітинку побудуйте прямі $a \perp b$ так, щоб пряма a: 1) збігалася з горизонтальною лінією; 2) не збігалася з горизонтальною лінією. За допомогою прямого кута косинця проведіть пряму $c \parallel b$. Поясніть побудову.

414°. На аркуші в клітинку побудуйте прямі $c \perp b$ так, щоб жодна з них не збігалася з лініями аркуша. За допомогою прямого кута косинця проведіть пряму $a \parallel c$. Поясніть побудову.



Мал. 245

415. З'ясуйте, які з прямих на малюнку 245 паралельні.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

416. Побудуйте паралельні прямі та їх січну так, щоб градусна міра одного із внутрішніх односторонніх кутів:
1) була меншою від $59°$, але більшою за $50°$;
2) була більшою за $122°$, але меншою від $130°$;
3) дорівнювала третині розгорнутого кута.

417. Один із внутрішніх односторонніх кутів при двох прямих і січній удвічі менший від іншого. Чи паралельні прямі, якщо різниця даних кутів дорівнює: 1) $30°$; 2) $45°$; 3) $60°$; 4) $75°$?

418. Один із внутрішніх односторонніх кутів при двох прямих і січній утричі більший за інший. Чи паралельні прямі, якщо різниця даних кутів дорівнює $90°$?

419. Внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній відносяться як $1 : 3$. Чи паралельні прямі, якщо різниця даних кутів дорівнює: 1) $40°$; 2) $80°$; 3) $100°$; 4) $90°$?

420. Внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній відносяться як $1 : 5$. Чи паралельні прямі, якщо різниця даних кутів дорівнює $120°$?

421. Кути α і β — внутрішні різносторонні при двох прямих і січній. Чи можуть бути паралельними прямі, якщо:
1) $\alpha - \beta > 0°$; 2) $\beta - \alpha = 0°$; 3) $\alpha + \beta = 180°$; 4) $\alpha + \beta = 90°$?

422. Кути α і β — внутрішні різносторонні при двох прямих і січній. Чи можуть бути паралельними прямі, якщо $\beta - \alpha \geq 0°$?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

423. Кути α і β є відповідними при двох прямих і січній. Чи можуть бути паралельними дані прямі, якщо:

1) $\alpha : \beta = 1 : 1$;
2) $\frac{\alpha}{\beta} < 1$;
3) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$;
4) $\alpha - \beta = 90°$?

424. Кути α і β є відповідними при двох прямих і січній. Чи можуть бути паралельними дані прямі, якщо $\alpha : \beta = 1 : 2$?

425*. Доведіть, що прямі паралельні, коли бісектриси внутрішніх односторонніх кутів утворюють із січною кути, які в сумі дорівнюють $90°$.

426*. Сума меншого із внутрішніх односторонніх кутів і половини більшого кута дорівнює: 1) $100°$; 2) $135°$. Якою має бути градусна міра меншого кута, щоб прямі були паралельними?

427*. Дві прямі утворюють із січною рівні внутрішні різносторонні кути. Доведіть, що бісектриси цих кутів не перетинаються.

428*. Прямі a і b перетинають січні c і d, що проходять через точку A ($A \in a$). Січні утворюють з прямою a кути α і β. Чи паралельні прямі a і b, якщо:

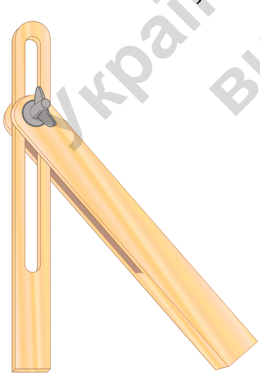
1) кут, відповідний з кутом β, становить третину кута α, причому $\beta : \alpha = 2 : 1$;

2) кут, який є внутрішнім різностороннім із кутом α, удвічі менший від кута β і $\frac{\beta}{\alpha} = 2$?

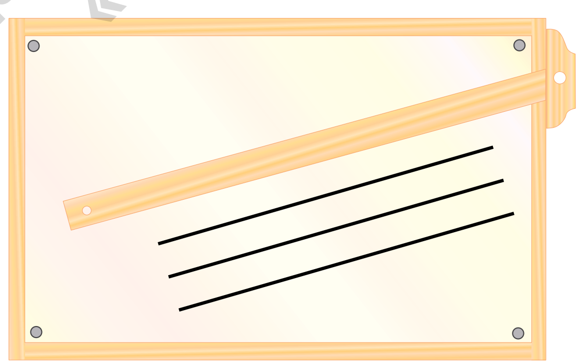
Проявіть компетентність

429. Поясніть, як зігнути аркуш паперу, щоб лінія згину була паралельною краю аркуша.

430. Для проведення паралельних прямих столярі й теслі користуються приладом, який називається *малкою* (мал. 246). Малка складається з двох пластин, з'єднаних гвинтом. Пластини можна встановити під будь-яким потрібним кутом і закріпити їх у такому положенні гвинтом.
На малюнку 247 показано, як у креслярській практиці будують паралельні прямі за допомогою *рейсшини*.
Поясніть, як користуватися цими приладами.



Мал. 246



Мал. 247

431. Учень ішов вулицею AB, у точці B повернув ліворуч під кутом $60°$ і пройшов шлях BC, а в точці C повернув праворуч під кутом $60°$ і пройшов шлях CD. Накресліть шлях учня. Чи буде $AB \parallel CD$?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 9. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

1. Зв'язок між ознаками й властивостями

qr.orioncentr.com.ua/QDJ6Z

Ситуація. Марія Іванівна нагадала першу ознаку паралельності прямих: **Дві прямі паралельні, якщо при перетині із січною сума внутрішніх односторонніх кутів становить 180°.**

Чи є істинним обернене твердження?

Так. Це властивість паралельних прямих.

Як отримати обернене твердження?

Поміняти місцями умову і вимогу теореми.

У таблиці 18 показано, якими є умова і вимога ознаки паралельності прямих (це *пряма теорема*) та властивості паралельних прямих (це *обернена теорема*).

Таблиця 18

	Ознака паралельності прямих (*пряма теорема*)	**Властивість паралельних прямих (*обернена теорема*)**
Умова (*відомо, що*)	При перетині двох прямих січною сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°	Дві паралельні прямі перетинає січна
Вимога (*треба довести, що*)	Прямі є паралельними	Сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°

Чи завжди обернене твердження є істинним?

Ні.

Істинність оберненого твердження треба доводити.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

2. Перша властивість паралельних прямих

Запам’ятайте!

Теорема (*властивість паралельних прямих*)
Якщо дві паралельні прямі перетинає січна, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

Дано: $a \parallel b$ (мал. 248), c — січна, $\angle 1$ і $\angle 2$ — внутрішні односторонні.

Довести: $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

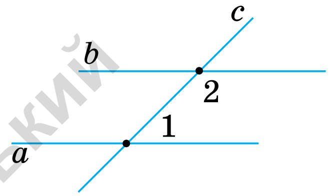
Доведення. Припустимо, що $\angle 1 + \angle 2 \neq 180°$.

Тоді можна побудувати $\angle ABK \neq \angle 2$ так, щоб він у сумі з $\angle 1$ дорівнював 180° (мал. 249).

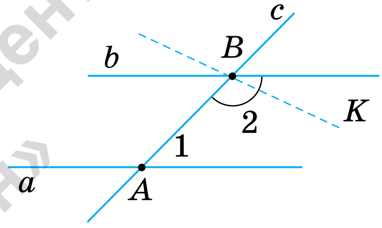
Оскільки $\angle 1 + \angle ABK = 180°$, то, за ознакою паралельності прямих, $a \parallel BK$. Але за умовою $a \parallel b$. Отримали, що через точку B проходять дві прямі — b і BK, паралельні прямій a.

Це суперечить аксіомі паралельних.

Отже, наше припущення неправильне, тому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.



Мал. 248



Мал. 249

3. Інші властивості паралельних прямих

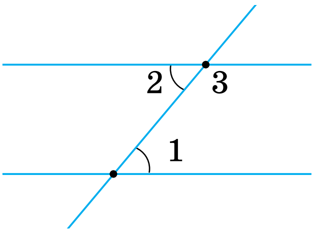
Чи є інші властивості паралельних прямих?

Так.

qr.orioncentr.com.ua/2EoLv

Будь-яка пара кутів, що утворюються при перетині двох паралельних прямих січною, пов’язана певним співвідношенням. Такі властивості паралельних прямих безпосередньо випливають з першої властивості. Сформулюємо деякі з них як наслідки.

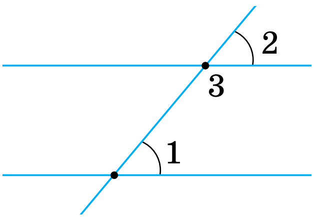
Український освітянський видавничий центр «Оріон»



Мал. 250

***Наслідок 1*. Якщо дві паралельні прямі перетинає січна, то внутрішні різносторонні кути рівні.**

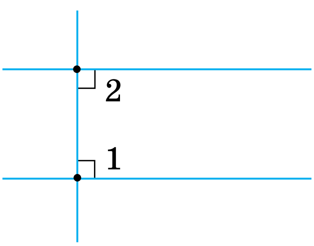
Справді, за умовою дані прямі паралельні (мал. 250), тому $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Але $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, бо ці кути суміжні. Отже, $\angle 1 = \angle 2$.



Мал. 251

***Наслідок 2*. Якщо дві паралельні прямі перетинає січна, то відповідні кути рівні.**

Справді, за умовою дані прямі паралельні (мал. 251), тому $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Але $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, бо ці кути суміжні. Отже, $\angle 1 = \angle 2$.



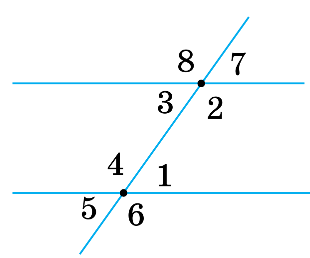
Мал. 252

***Наслідок 3*. Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.**

Справді, за умовою дані прямі паралельні (мал. 252), тому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Але $\angle 1 = 90°$. Тому і $\angle 2 = 90°$. Отже, січна перпендикулярна і до другої прямої.

Кожний наслідок є властивістю паралельних прямих.

Задача Прямі a і b паралельні. Один із внутрішніх односторонніх кутів, утворених даними прямими із січною, дорівнює 56°. Знайдіть решту кутів.



Мал. 253

Розв'язання Позначимо менший із двох внутрішніх односторонніх кутів цифрою 1, а інші кути так, як на малюнку 253.

Тоді $\angle 1 = 56°$. За властивостями паралельних прямих отримаємо:

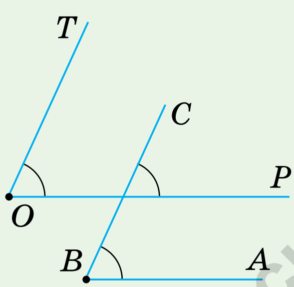
1) $\angle 2$ і $\angle 1$ — внутрішні односторонні, тому $\angle 2 = 180° - \angle 1 = 180° - 56° = 124°$. Отже: $\angle 2 = 124°$.
2) $\angle 3$ і $\angle 1$ — внутрішні різносторонні, тому $\angle 3 = \angle 1 = 56°$. Отже: $\angle 3 = 56°$.
3) $\angle 4$ і $\angle 2$ — внутрішні різносторонні, тому $\angle 4 = \angle 2 = 124°$. Отже: $\angle 4 = 124°$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

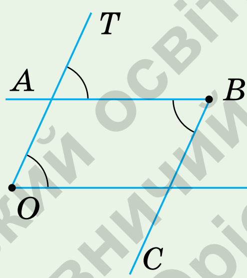
4) $\angle 5$ і $\angle 3$ — відповідні, тому
$\angle 5 = \angle 3 = 56°$. Отже: $\angle 5 = 56°$.
5) $\angle 6$ і $\angle 2$ — відповідні, тому
$\angle 6 = \angle 2 = 124°$. Отже: $\angle 6 = 124°$.
6) $\angle 7$ і $\angle 1$ — відповідні, тому
$\angle 7 = \angle 1 = 56°$. Отже: $\angle 7 = 56°$.
7) $\angle 8$ і $\angle 4$ — відповідні, тому
$\angle 8 = \angle 4 = 124°$. Отже: $\angle 8 = 124°$.

Дізнайтеся більше

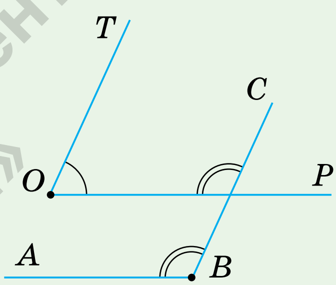
Знаючи властивості паралельних прямих, можна дослідити кути з відповідно паралельними сторонами. На малюнку 254 відповідні сторони кутів мають однаковий напрямок відносно вершини, а на малюнку 255 — протилежні напрямки відносно вершини. На малюнку 256 у кутів одна пара відповідних сторін має той самий напрямок, а інша пара — протилежні напрямки. Кути з відповідно паралельними сторонами мають такі властивості.



Мал. 254



Мал. 255



Мал. 256

Властивість 1. Кути з відповідно паралельними сторонами рівні, якщо їх сторони мають однакові або протилежні напрямки від вершини.

Властивість 2. Кути з відповідно паралельними сторонами в сумі дорівнюють 180°, якщо сторони однієї пари мають однакові напрямки, а іншої пари — протилежні.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
властивість паралельних прямих	property of parallel lines	Eigenschaft paralleler Linien (Geraden)	propriété des droites parallèles

qr.orioncentr.com.ua/gPXyd

Пригадайте головне

1. Поясніть, що таке обернена теорема. Як її утворити з даної теореми?
2. Сформулюйте й доведіть першу властивість паралельних прямих.
3. Поясніть, чому рівні внутрішні різносторонні кути при двох паралельних прямих і січній.
4. Поясніть, чому рівні відповідні кути при двох паралельних прямих і січній.
5. Поясніть, чому пряма, перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, перпендикулярна й до іншої прямої.

Усне тренування

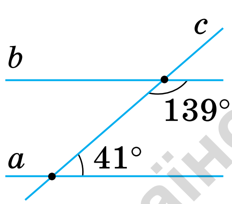
Обчисліть:

1) $78 + 102$; $173 + 17$; $106 + 74$; $88 + 92$;

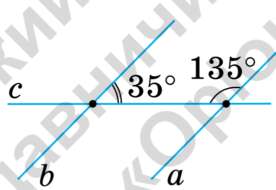
2) $133 + 47$; $91 + 89$; $63 + 117$; $82 + 98$.

Розв'яжіть задачі

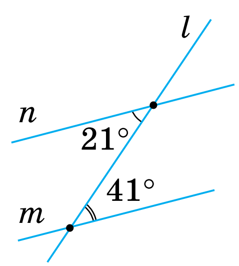
432'. На малюнках 257, 258 прямі a і b паралельні, c — січна. Чи правильно вказано градусні міри внутрішніх односторонніх кутів?



Мал. 257



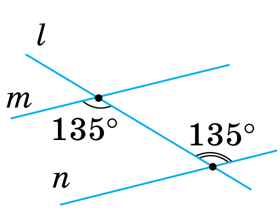
Мал. 258



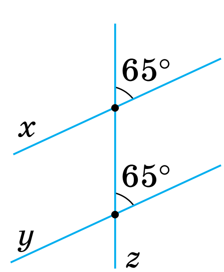
Мал. 259

433'. На малюнках 259, 260 паралельні прямі m і n перетинає пряма l. Чи можуть внутрішні різносторонні кути мати наведену градусну міру?

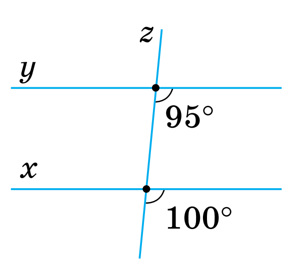
434'. Паралельні прямі x і y перетинає пряма z (мал. 261, 262). Чи правильно вказано на малюнках градусні міри відповідних кутів?



Мал. 260



Мал. 261



Мал. 262

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

435°. Проведіть паралельні прямі та їх січну так, щоб один із внутрішніх односторонніх кутів дорівнював:
1) $30°$; 2) $135°$; 3) $150°$; 4) $60°$.
Яка градусна міра іншого кута?

436°. Проведіть паралельні прямі та їх січну так, щоб один із внутрішніх односторонніх кутів дорівнював $50°$. Яка градусна міра іншого кута?

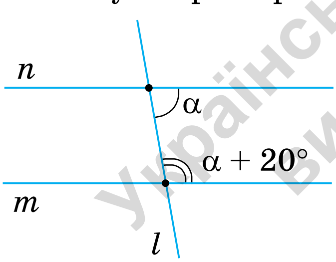
437°. Чому дорівнює один із внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній, якщо інший кут дорівнює:
1) $137°$; 3) $162°$;
2) $54°$; 4) $23°$?

qr.orioncentr.com.ua/QSulj

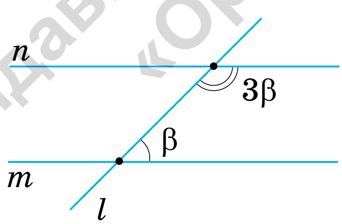
438°. Чому дорівнює один із внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній, якщо інший кут дорівнює $129°$?

439°. За даними на малюнках 263, 264 знайдіть внутрішні односторонні кути при паралельних прямих m і n та січній l.

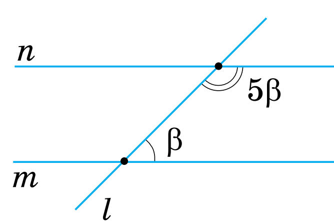
440°. За даними на малюнку 265 знайдіть внутрішні односторонні кути при паралельних прямих m і n та січній l.



Мал. 263



Мал. 264



Мал. 265

441°. Знайдіть внутрішні односторонні кути при паралельних прямих і січній, якщо:
1) тупий кут на $30°$ більший за гострий кут;
2) гострий кут у 3 рази менший від тупого кута;
3) гострий кут становить половину тупого кута;
4) тупий кут удвічі більший за гострий кут.

442°. Знайдіть внутрішні односторонні кути при паралельних прямих і січній, якщо тупий кут у 5 разів більший за гострий кут.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

qr.orioncentr.com.ua/O7OGb

443°. Чому дорівнюють внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих і січній, якщо їх сума становить:
1) 107°; 3) 132°;
2) 94°; 4) 43°?

444°. Чому дорівнюють внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих і січній, якщо їх сума становить:
1) 120°;
2) 90°?

445°. Чи можуть внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих і січній бути:
1) гострими; 2) прямими; 3) тупими?
Відповідь поясніть.

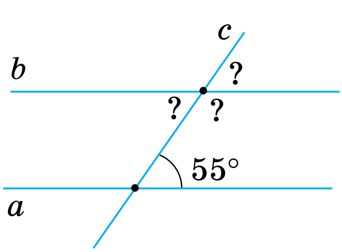
446°. Чому дорівнюють відповідні кути при паралельних прямих і січній, якщо їх сума становить:
1) 137°; 3) 162°;
2) 54°; 4) 23°?

447°. Чому дорівнюють відповідні кути при паралельних прямих і січній, якщо їх сума становить:
1) 108°;
2) 30°?

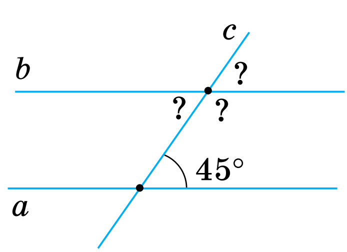
448°. Чи можуть відповідні кути при паралельних прямих і січній бути:
1) гострими; 2) прямими; 3) тупими?
Відповідь поясніть.

449°. На малюнку 266 прямі a і b — паралельні, c — січна. Знайдіть невідомі кути.

450°. На малюнку 267 прямі a і b — паралельні, c — січна. Знайдіть невідомі кути.



Мал. 266



Мал. 267

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

451°. Яке взаємне розміщення прямих p і n, якщо:
1) $m \parallel n$ і $m \perp p$; 2) $m \parallel p$ і $m \perp n$?
Відповідь обґрунтуйте.

452°. Яке взаємне розміщення прямих b і c, якщо $a \parallel b$ і $a \perp c$? Відповідь обґрунтуйте.

453. Накресліть дві паралельні прямі. Побудуйте їх січну так, щоб градусна міра одного із внутрішніх односторонніх кутів:
1) була меншою від 50°, але більшою за 45°;
2) була більшою за 100°, але меншою від 105°.

454. Накресліть дві паралельні прямі. Побудуйте їх січну так, щоб градусна міра одного із внутрішніх односторонніх кутів дорівнювала двом п'ятим розгорнутого кута.

455. Знайдіть кути при паралельних прямих і січній, якщо різниця внутрішніх односторонніх кутів дорівнює:
1) 30°; 3) 67°;
2) 105°; 4) 0°.

456. Знайдіть кути при паралельних прямих і січній, якщо частка градусних мір внутрішніх односторонніх кутів дорівнює:
1) 9;
2) 1.

457. Знайдіть кути при паралельних прямих і січній, якщо внутрішні односторонні кути відносяться як:
1) 1 : 9; 3) 1 : 1;
2) 11 : 1; 4) 1 : 17.

458. Знайдіть кути при паралельних прямих і січній, якщо один із внутрішніх односторонніх кутів становить від іншого:
1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$.

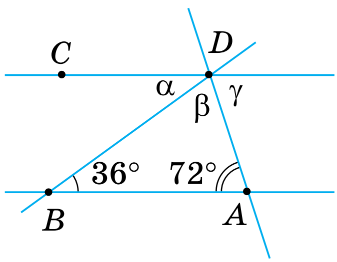
459. Знайдіть кути при паралельних прямих і січній, якщо один із внутрішніх кутів становить від іншого:
1) 20 %; 3) 80 %;
2) 60 %; 4) 25 %.
Відповідь поясніть.

460. Знайдіть кути при паралельних прямих і січній, якщо один із внутрішніх кутів становить від іншого 50 %. Відповідь поясніть.

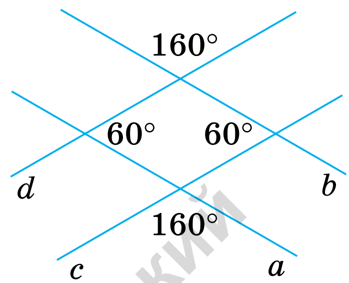
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

461. За даними, наведеними на малюнку 268, знайдіть кути α, β і γ, якщо прямі AB і CD паралельні.

462. На малюнку 269 $a \parallel b$ і $c \parallel d$. Чи правильно вказано градусні міри кутів?



Мал. 268



Мал. 269

463. Паралельні прямі a і b перетинають січні c і d. Доведіть, що два внутрішні односторонні кути при січній c і два внутрішні односторонні кути при січній d становлять у сумі 360°.

464*. Накресліть дві паралельні прямі. Позначте на них точки A, B і C так, щоб:
1) той внутрішній односторонній кут при даних прямих і січній AC, що має вершину C, був удвічі більшим за внутрішній односторонній кут при січній AB, вершина якого лежить на тій самій прямій, що й точка C;
2) січна AC була бісектрисою більшого із внутрішніх односторонніх кутів при даних прямих і січній AB.

465*. **Доведіть, що бісектриси внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній перетинаються.**

466*. Який із внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній — α чи β — є гострим, якщо:

1) $\frac{\alpha}{\beta} < 1$; 3) $\frac{\beta}{\alpha} < 1$;
2) $\frac{\alpha}{\beta} > 1$; 4) $\frac{\beta}{\alpha} > 1$?

467*. Знайдіть кути при двох паралельних прямих і січній, якщо різниця внутрішніх односторонніх кутів менша від їх суми на:

1) 20°; 3) 49°;
2) 105°; 4) 123°.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

468*. Знайдіть кути при двох паралельних прямих і січній, якщо різниця внутрішніх односторонніх кутів відноситься до їх суми як:
1) 2 : 3; 2) 3 : 4; 3) 4 : 5; 4) 5 : 6.

469*. Знайдіть кути при двох паралельних прямих і січній, якщо один із внутрішніх односторонніх кутів на 30° більший від:
1) різниці цих кутів;
2) середнього арифметичного цих кутів;
3) 25 % суми цих кутів;
4) потроєної піврізниці цих кутів.

470*. **Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній паралельні.**

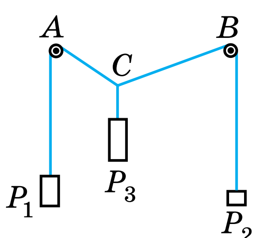
471*. Доведіть, що бісектриси двох відповідних кутів при паралельних прямих і січній не перетинаються.

472*. Доведіть паралельність прямих, що перпендикулярні до бісектрис:
1) двох внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній;
2) двох відповідних кутів при паралельних прямих і січній.

473*. Чотири прямі попарно перпендикулярні. Доведіть, що довільна пряма, яка проходить через точку перетину будь-яких двох даних прямих, не може бути паралельною жодній із двох інших даних прямих.

Проявіть компетентність

474. Два предмети P_1 і P_2 масою 10 кг і 5 кг підвішено на кінцях нитки (мал. 270), яку перекинуто через ролики A і B. Предмет P_3 масою 15 кг підвішений на тій самій нитці. Він урівноважує предмети P_1 і P_2. Доведіть, що $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.



Мал. 270

475. На певній ділянці автостради її смуги розділені суцільною лінією (її не можна перетинати). Чи можуть на цій ділянці зіткнутися автомобілі законослухняних водіїв, що рухаються назустріч один одному? Відповідь поясніть.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 3

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які кути називаються суміжними; вертикальними?
2. Поясніть, що таке аксіома; теорема; доведення.
3. Доведіть теорему про суму суміжних кутів; про вертикальні кути.
4. Які прямі називаються перпендикулярними; паралельними?
5. Сформулюйте та доведіть теорему про єдиність перпендикулярної прямої.
6. Що таке «відстань від точки до прямої»?
7. Сформулюйте аксіому паралельних прямих.
8. Як називаються пари кутів при двох прямих і січній?
9. Сформулюйте та доведіть ознаки паралельності прямих; властивості паралельних прямих.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1°. Один із суміжних кутів на 100° менший від іншого. Знайдіть ці кути.

А. 100° і 110°. **Б.** 90° і 90°. **В.** 140° і 40°. **Г.** 80° і 180°.

2°. Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 55°. Чому дорівнюють інші кути?

А. 125°, 55°. **В.** 125°, 55°, 55°.
Б. 155°, 25°, 55°. **Г.** 125°, 55°, 125°.

3. У якому з випадків дві прямі паралельні, якщо із січною вони утворюють:

А. Внутрішні односторонні кути 130° і 90°.
Б. Зовнішні односторонні кути 40° і 40°.
В. Внутрішні різносторонні кути 80° і 80°.
Г. Відповідні кути 53° і 127°?

4. Паралельні прямі із січною утворюють внутрішні різносторонні кути α і β. Яке із співвідношень правильне?

А. $\frac{\alpha}{\beta}=1$. **Б.** $\frac{\alpha}{\beta}=0$. **В.** $\frac{\alpha}{\beta}>1$. **Г.** $\frac{\alpha}{\beta}<1$.

5*. Один із зовнішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній на 60° більший за їх середнє арифметичне. Знайдіть ці кути.

А. 60° і 120°. **Б.** 30° і 150°. **В.** 25° і 85°. **Г.** 90° і 110°.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Розділ 4. ТРИКУТНИКИ

У розділі дізнаєтесь:

- про елементи трикутника та класифікацію трикутників за сторонами і кутами;
- які властивості сторін і кутів мають різні види трикутників;
- як установити вид трикутника та рівність двох трикутників;
- як правильно міркувати, спираючись на властивості та ознаки рівності трикутників

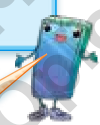
§ 10. ТРИКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

1. Що таке трикутник

Ситуація. Нічна хуртовина занесла снігом подвір'я. Зранку батько з Ігорем і Денисом вийшли розчистити доріжки. Батько розчищав доріжку від будинку до хвіртки, Ігор — від будинку до сарайчика, а Денис — від сарайчика до хвіртки.

Яка фігура утворилася на подвір'ї?

Трикутник.

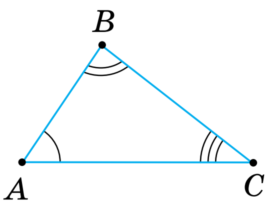


qr.orioncentr.com.ua/uDAeJ

Запам'ятайте!

Трикутником **називається геометрична фігура, яка складається з трьох відрізків, які попарно сполучають три точки, що не лежать на одній прямій.**

Наприклад, на малюнку 271 точки A, B, C — це *вершини* трикутника, а відрізки AB, BC, AB — його *сторони*.



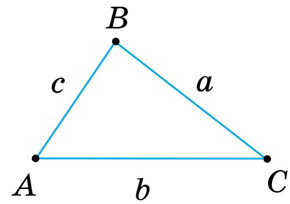
Мал. 271

Записуємо: $\Delta\ ABC$ і говоримо: «трикутник ABC». У назві трикутника букви можна записати і в іншому порядку: ΔBCA, ΔCBA, ΔCAB.

Кути ABC, BCA, CAB — це кути трикутника ABC. Їх позначають і однією буквою: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Сторони трикутника ABC можна позначити маленькими буквами a, b, c (мал. 272).



Мал. 272

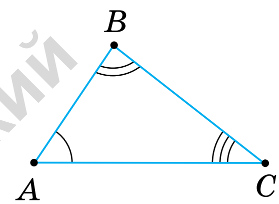
Надалі будемо дотримуватися правила:
- проти кута A лежить сторона a,
- проти кута B лежить сторона b,
- проти кута C лежить сторона c.

2. Нерівність трикутника

На малюнку 273 точка B не лежить на відрізку AC. Тому довжина відрізка AC менша від суми довжин відрізків AB і BC:

$$AC < AB + BC.$$

Так само $AB < AC + BC$, $BC < AB + AC$.



Мал. 273

Запам'ятайте!

Нерівність трикутника

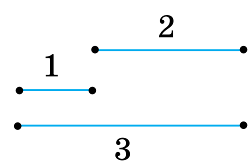
Будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

Чи можуть відрізки на малюнку 274 бути сторонами трикутника?

Не можуть.

Справді, найбільший з даних відрізків дорівнює сумі двох інших, тому вони не можуть утворити трикутник.

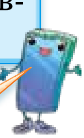
Щоб установити, чи можна з трьох відрізків a, b і c утворити трикутник, перевірте, чи є найдовший із трьох відрізків меншим від суми двох інших.



Мал. 274

4. Класифікація трикутників за сторонами

На скільки видів поділяють трикутники за довжинами сторін?

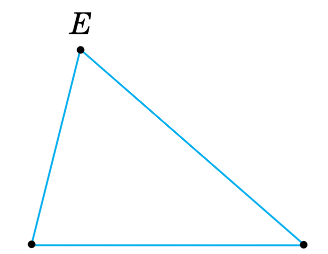


На три види.

qr.orioncentr.com.ua/LxNPr

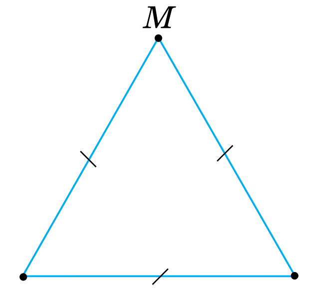
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Залежно від довжин сторін, трикутники поділяють на такі види:
- *різносторонні*, якщо всі сторони мають різну довжину (мал. 275),
- *рівносторонні*, якщо рівні всі сторони (мал. 276),
- *рівнобедрені*, якщо дві сторони рівні (мал. 277).



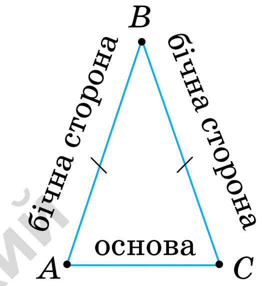
Різносторонній
$KE \neq EF \neq KF$

Мал. 275



Рівносторонній
$DM = MN = DN$

Мал. 276



Рівнобедрений
$AB = BC$

Мал. 277

Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю його сторону — *основою*.

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його *периметром*. Периметр позначають буквою P.

Якщо периметр трикутника ABC дорівнює 50 см, то коротко записують:

$$P_{\Delta ABC} = 50 \text{ см}.$$

Задача Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 23 см. Знайдіть бічну сторону, якщо основа трикутника — 5 см.

Розв'язання Нехай x — довжина бічної сторони трикутника. Бічні сторони рівнобедреного трикутника рівні, тому:

$$P = x + x + 5 = 23.$$

Звідси $x = 9$. Отже, бічна сторона трикутника дорівнює 9 см.

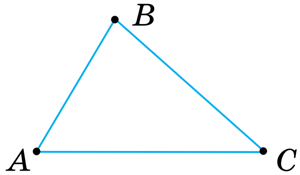
3. Класифікація трикутників за кутами

На скільки видів поділяють трикутники за мірами їх кутів?

На три види.

Залежно від міри кутів, трикутники поділяють на такі види:
- *гострокутні*, якщо всі кути гострі (мал. 278),
- *тупокутні*, якщо один із кутів тупий (мал. 279),
- *прямокутні*, якщо один із кутів прямий (мал. 280).

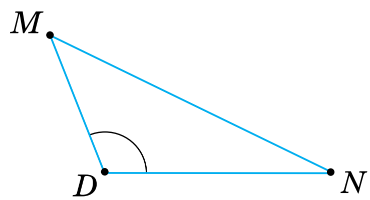
Український освітянський видавничий центр «Оріон»



Гострокутний

$\angle A < 90°$, $\angle B < 90°$, $\angle C < 90°$

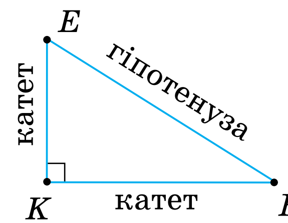
Мал. 278



Тупокутний

$\angle D > 90°$

Мал. 279



Прямокутний

$\angle K = 90°$

Мал. 280

Сторону прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута, називають *гіпотенузою*, а дві інші сторони — *катетами*.

Щоб установити вид трикутника за кутами, можна перевірити, яким є найбільший його кут — тупим, прямим чи гострим.

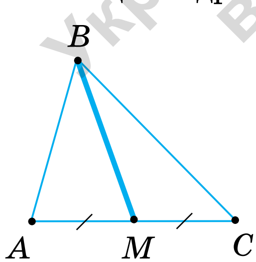
5. Особливі відрізки в трикутнику

Чи можна з вершини трикутника провести відрізок до його сторони?

Так.

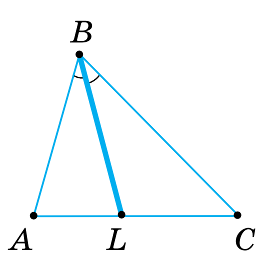
qr.orioncentr.com.ua/spDms

На малюнках 281–283 зображено медіану BM (мал. 281), бісектрису BL (мал. 282) і висоту BH (мал. 283) трикутника ABC. Дайте означення цим відрізкам та порівняйте їх з наведеними в підручнику.



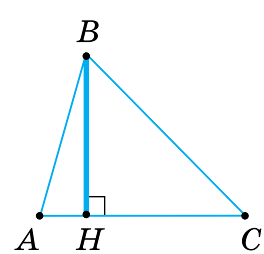
$AM = MC$

Мал. 281



$\angle ABL = \angle CBL$

Мал. 282



$BH \perp AC$

Мал. 283

Запам'ятайте!

Медіаною трикутника **називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.**

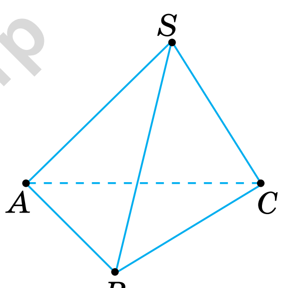
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Бісектрисою трикутника **називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає його вершину з точкою на протилежній стороні трикутника.**
Висотою трикутника **називається перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.**

Кожний трикутник має три медіани, три бісектриси і три висоти.

Позначають: медіану — m, бісектрису — l, висоту — h.
Медіану, бісектрису і висоту трикутника, проведену, наприклад, до сторони a, позначають так:
m_a, l_a, h_a.

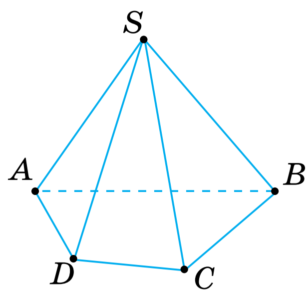
Вершини, сторони і кути трикутника називають його *елементами*. Слово «елемент» означає «складова частина». Медіани, бісектриси і висоти — це *особливі відрізки* в трикутнику.



Мал. 284

6. Трикутники в піраміді

Трикутниками є бічні грані будь-якої піраміди. Бічні сторони цих трикутників мають спільну точку — вершину піраміди. Наприклад, бічними гранями піраміди $SABC$ (мал. 284) є трикутники SAB, SBC, SAC. Залежно від того, який многокутник лежить в основі, піраміду називають трикутною (мал. 284), чотирикутною (мал. 285) чи n-кутною.



Мал. 285

Дізнайтеся більше

1. *Що знали про трикутники в далеку давнину?*

Ще кілька тисяч років тому єгиптяни першими почали вивчати прямокутний і рівносторонній трикутники. Вони знали, що коли сторони трикутника дорівнюють 3, 4 і 5 одиничним відрізкам, то такий трикутник — прямокутний. Землеміри Стародавнього Єгипту для побудови прямого кута ділили мотузок вузлами на 12 рівних частин і кінці зав'язували. Потім мотузок розтягували на землі так, щоб утворився трикутник із сторонами 3, 4 і 5 поділок (мал. 286). Більший з кутів утвореного трикутника — прямий.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Ребра бічних граней єгипетських пірамід утворюють рівнобедрені трикутники (мал. 287).

2. *Які ще властивості мають медіана, бісектриса і висота трикутника?*

Проведіть у довільному трикутнику три його медіани. Вони перетнуться в одній точці. Таку саму властивість мають бісектриси. А висоти?

Якщо трикутник гострокутний, то три його висоти, як і медіани та бісектриси, також перетинаються в одній точні. А якщо трикутник тупокутний? Поміркуємо.

У тупокутному трикутнику одну висоту — з вершини тупого кута, — проводимо до сторони, а дві інші — до продовжень відповідних сторін (мал. 288). Тому в тупокутному трикутнику перетинаються не самі висоти, а прямі, на яких вони лежать. І ця точка перетину лежить зовні трикутника.

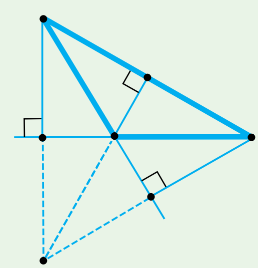
Накресліть довільний трикутник і за допомогою лінійки й транспортира проведіть з однієї вершини медіану, бісектрису і висоту. Яку властивість ви помітили? **Бісектриса трикутника завжди лежить між медіаною і висотою** (мал. 289).

3. Слово «трикутник» античного походження. Знак ∇ для позначення трикутника застосовував ще в І ст. н. е. давньогрецький учений Герон. Знак ∆ почали застосовувати в IV ст. н. е.

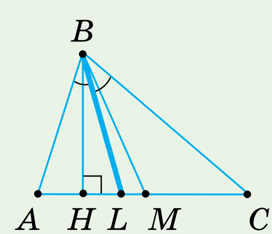
Назва «бісектриса» походить від латинських слів «*bis*» — дві та «*seco*» — січу, що означає «та, що розтинає надвоє». Слово «медіана» походить від латинського *medius* — середній. Слово «катет» — від грецького *kathetos*, що означає «висок», «перпендикуляр». Цей термін поширився лише у XVIII ст. Термін «гіпотенуза» походить від грецького слова, яке означає «та, що тягнеться під чимось», «та, що стягує». У «Началах» Евкліда вона так і називається: «Сторона, яка прямий кут стягує».

Мал. 286

Мал. 287



Мал. 288



Мал. 289

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
трикутник	triangle	Dreieck (n)	triangle

qr.orioncentr.com.ua/U8kRR

Пригадайте головне

1. Що таке трикутник?
2. Сформулюйте нерівність трикутника.
3. Як називають трикутники залежно від довжини їхніх сторін?
4. Які сторони рівнобедреного трикутника називають бічними сторонами? Яку сторону називають основою?
5. Що таке периметр трикутника?
6. Як називають трикутники залежно від міри їх кутів?
7. Як називають сторони прямокутного трикутника?
8. Що таке медіана трикутника; бісектриса; висота?

Усне тренування

Обчисліть:

1) $77 + 103$; $162 + 28$; $104 + 76$; $93 + 87$;

2) $144 + 36$; $90 + 89$; $165 + 15$; $71 + 109$.

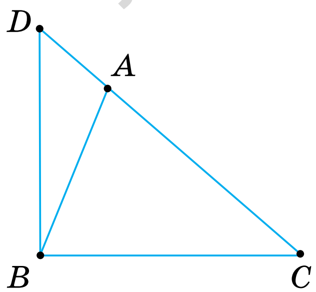
Розв'яжіть задачі

476'. Назвіть трикутники, зображені на малюнку 290. Яка сторона лежить проти кута C? Назвіть сторони, прилеглі до кута C.

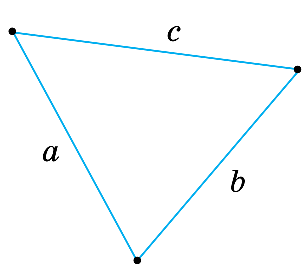
477'. На малюнку 291 сторони трикутника позначено маленькими буквами. Які назви мають вершини трикутника?

478'. Чи правильно, що в трикутнику будь-яка сторона:
1) більша за суму двох інших сторін;
2) менша від суми двох інших сторін?

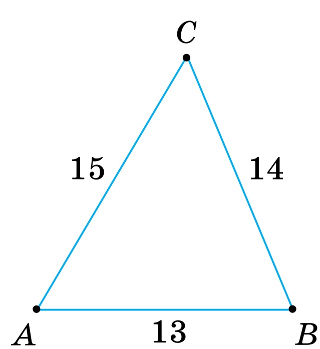
479'. На малюнку 292 указано довжини сторін трикутника. Якого виду цей трикутник?



Мал. 290



Мал. 291

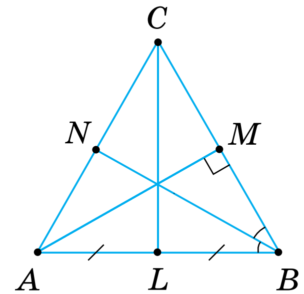


Мал. 292

480'. Чи правильно, що вид трикутника ABC можна встановити:
1) за його найменшим кутом;
2) за його найбільшим кутом?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

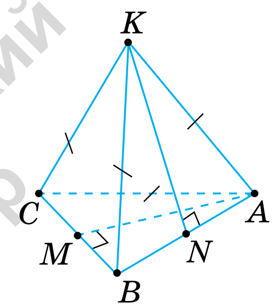
481'. За даними на малюнку 293 назвіть медіану, бісектрису, висоту трикутника.



Мал. 293

482'. Назвіть у піраміді (мал. 294):
1) прямокутні трикутники;
2) рівносторонні трикутники;
3) рівнобедрені трикутники.

483°. Накресліть трикутник ABC. Назвіть:
1) сторони, які лежать проти кутів A і B;
2) кути, які лежать проти сторін AB і BC;
3) кути, прилеглі до сторони AB.



Мал. 294

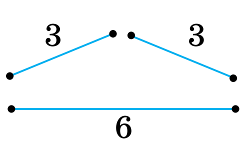
484°. Чи правильно, що в трикутнику PQR:
1) сторона PQ лежить проти кута Q;
2) кут P прилеглий до сторони r;
3) кут Q лежить між сторонами PR і QR?

485°. Накресліть трикутник і позначте його вершини D, E і F. Назвіть сторони й кути трикутника. Позначте сторони трикутника маленькими буквами.

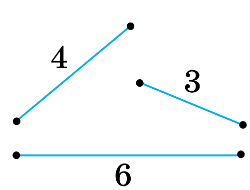
486°. Накресліть трикутник і позначте його вершини B, C і D. Назвіть сторони й кути трикутника. Позначте сторони трикутника маленькими буквами. Випишіть пари: 1) кут і сторона (назвіть її двома буквами), що лежить проти нього; 2) сторона (назвіть її маленькою буквою) і кут, що лежить проти неї.

487°. Чи можна з відрізків, зображених на малюнку 295, утворити трикутник? Відповідь обґрунтуйте.

488°. Чи можна з відрізків, зображених на малюнку 296, утворити трикутник? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 295



Мал. 296

489°. Чи може трикутник мати такі сторони:
1) 2 см, 3 см, 4 см;
2) 2 см, 3 см, 5 см;

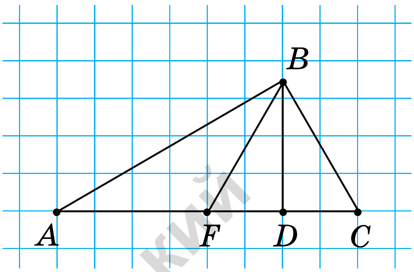
qr.orioncentr.com.ua/vhLcW

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

3) 2 см, 3 см, 6 см; 5) 6 см, 7 см, 8 см;
4) 6 см, 7 см, 13 см; 6) 5 см, 12 см, 13 см?

490°. Чи може трикутник мати такі сторони:
1) 3 см, 4 см, 5 см; 2) 10 см, 10 см, 21 см?

491°. Проведіть необхідні вимірювання та назвіть на малюнку 297 трикутник:
1) рівносторонній;
2) рівнобедрений;
3) різносторонній;
4) гострокутний;
5) прямокутний;
6) тупокутний.



Мал. 297

492°. Побудуйте за клітинками трикутник:
1) рівносторонній; 4) гострокутний;
2) рівнобедрений; 5) прямокутний;
3) різносторонній; 6) тупокутний.

493°. Визначте вид трикутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 3 см, 5 см, 7 см; 3) 0,06 дм, 0,1 см, 6 мм.
2) 0,3 дм, 30 мм, 3 см;

494°. Визначте вид трикутника, якщо його сторони дорівнюють:
1) 6 см, 7 см, 8 см; 3) 0,2 дм, 0,2 дм, 3 см.
2) 0,1 дм, 10 мм, 1 см;

495°. Назвіть основу й бічні сторони рівнобедреного трикутника ABC, якщо:
1) $a = 7$ см, $b = 6$ см, $c = 7$ см;
2) $a = 0{,}6$ дм, $b = 4$ см, $c = 40$ мм;
3) $a = 50$ мм, $b = 0{,}5$ дм, $c = 0{,}6$ дм.

496°. Назвіть основу й бічні сторони рівнобедреного трикутника DEF, якщо $d = 5$ см, $e = 4$ см, $f = 4$ см.

497°. a, b, c — сторони трикутника, P — його периметр. Якими даними треба доповнити таблицю 19?

Таблиця 19

a	12 см		20 см	3 см	8 см	5 см
b	16 см	8 см	21 см	4 см		
c	18 см	14 см		5 см	17 см	8 см
P		31 см	70 см		40 см	20 см

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

498°. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника з основою a та бічною стороною b, якщо:
1) $a = 14$ см, $b = 12$ см;
2) $a = 16$ см, $b = 17$ см;
3) $a = 8$ см, $b = 5$ см.

qr.orioncentr.com.ua/3Le5O

499°. Знайдіть сторони рівностороннього трикутника, якщо його периметр дорівнює: 1) 36 см; 2) 45 см; 3) 72 см.

500°. Визначте вид трикутника ABC, якщо:
1) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$;
2) $\angle A = 89°$, $\angle B = 50°$, $\angle C = 41°$;
3) $\angle A = 120°$, $\angle B = 35°$, $\angle C = 25°$;
4) $\angle A = 91°$, $\angle B = 44°$, $\angle C = 45°$.

501°. Який вид трикутника, якщо один із його кутів дорівнює:
1) 90°; 2) 141°; 3) 91°?

502°. Побудуйте:
1) рівнобедрений прямокутний трикутник;
2) рівнобедрений тупокутний трикутник;
3) рівнобедрений гострокутний трикутник.

503°. Чи можна побудувати рівносторонній трикутник, який не буде рівнобедреним? Відповідь поясніть.

504°. Назвіть катети й гіпотенузу прямокутного трикутника ABC, якщо:
1) $\angle A = 90°$;
2) $\angle B = 90°$;
3) $\angle C \neq 90°$ і $\angle A \neq 90°$;
4) $\angle B \neq 90°$ і $\angle C \neq 90°$.

505°. Назвіть катети й гіпотенузу прямокутного трикутника KLM, якщо:
1) $\angle K = 90°$;
2) $\angle K \neq 90°$ і $\angle M \neq 90°$.

506°. Побудуйте різносторонній трикутник. За допомогою лінійки позначте середини сторін і проведіть медіани трикутника. Позначте точку перетину медіан.

507°. Побудуйте рівнобедрений трикутник. За допомогою лінійки позначте середини сторін і проведіть медіани трикутника. Позначте точку перетину медіан.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

508°. У трикутнику ABC проведено медіани AK, BM і CN. Яка довжина відрізків AN, BN, AM, CM, BK, CK, якщо:
1) $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см;
2) $AB = 20$ см, $BC = AC = 22$ см;
3) $AB = BC = 10$ см, $AC = 16$ см;
4) $AB = BC = AC = 27$ см?

509°. У трикутнику DEF проведено медіани DK, EM і FN. Яка довжина відрізків DN, EN, DM, FM, EK, FK, якщо $DE = 6$ см, $EF = 5$ см, $DF = 6$ см?

510°. Побудуйте різносторонній трикутник. За допомогою транспортира та лінійки проведіть його бісектриси. Позначте точку перетину бісектрис трикутника.

511°. Побудуйте рівнобедрений трикутник. За допомогою транспортира та лінійки проведіть його бісектриси. Позначте точку перетину бісектрис трикутника.

512°. Чим відрізняється бісектриса трикутника від бісектриси кута?

513°. У трикутнику ABC проведено бісектриси AK, BM і CN. Знайдіть кути BAK, CAK, ACN, BCN, ABM, CBM, якщо:
1) $\angle A = 130°$, $\angle B = 20°$, $\angle C = 30°$;
2) $\angle A = 70°$, $\angle B = \angle C = 55°$;
3) $\angle A = 40°$, $\angle B = 90°$, $\angle C = 50°$;
4) $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.

qr.orioncentr.com.ua/gRAJr

514°. У трикутнику DEF проведено бісектриси DK, EM і FN. Знайдіть кути EDK, FDK, DFN, EFN, DEM, FEM, якщо $\angle D = 30°$, $\angle E = 50°$, $\angle F = 100°$.

515°. Побудуйте довільні прямокутний і тупокутний трикутники. За допомогою косинця проведіть висоти в кожному трикутнику. Знайдіть і позначте точку перетину висот трикутника або їх продовжень.

516°. Побудуйте гострокутний трикутник. За допомогою косинця проведіть висоти трикутника. Позначте точку їх перетину.

517°. У трикутнику ABC з вершини A проведено висоту, основа якої лежить: 1) на стороні BC; 2) у вершині C; 3) на продовженні сторони BC. Який вид кута A?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

518°. У трикутнику ABC з вершини B проведено висоту, основа якої лежить: 1) у вершині A; 2) на стороні AC; 3) на продовженні сторони AC. Який вид кута B?

519. Чи існує трикутник з периметром 70 мм і стороною:
1) 36 мм; 2) 35 мм; 3) 34 мм?
Відповідь обґрунтуйте.

520. Чи існує трикутник з периметром 50 см і стороною:
1) 24 см; 2) 25 см; 3) 26 см?
Відповідь обґрунтуйте.

521. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 см і 7 см. Чи може периметр трикутника дорівнювати: 1) 14 см; 2) 21 см; 3) 31 см? Відповідь обґрунтуйте.

522. Дві сторони трикутника дорівнюють 3 см і 4 см. Чи може периметр трикутника дорівнювати: 1) 12 см; 2) 14 см; 3) 16 см? Відповідь обґрунтуйте.

523. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам:
1) 1, 2, 3; 2) 3, 4, 5; 3) 3, 5, 9?
Відповідь обґрунтуйте.

524. Який вид трикутника, якщо його сторони відносяться як:
1) 1 : 1 : 1; 2) 5 : 12 : 13; 3) 5 : 5 : 8?
Відповідь обґрунтуйте.

525. Який вид трикутника, якщо його сторони відносяться як:
1) 3 : 2 : 2; 2) 3 : 4 : 5?
Відповідь обґрунтуйте.

526. Назвіть основу й бічні сторони рівнобедреного трикутника ABC, якщо:
1) $a > c$ і $b > c$; 2) $a < b$ і $c < b$; 3) $a \neq b$ і $a \neq c$.

527. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 23 см. Знайдіть:
1) основу трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 6 см;
2) бічні сторони трикутника, якщо його основа дорівнює 3 см;
3) сторони трикутника, якщо його основа більша від бічної сторони на 2 см.

528. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см. На його основі побудовано рівносторонній трикутник з периметром 30 см. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

529. Одна сторона трикутника дорівнює 10 см, друга — 14 см, а третя — більша за другу на 2 см. Знайдіть периметр трикутника.

530. Одна сторона трикутника удвічі більша за другу, а третя сторона дорівнює 15 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 45 см.

531. У рівнобедреному трикутнику дві сторони дорівнюють a і b. Яка його третя сторона, якщо:
1) $a = 12$ см, $b = 5$ см;
2) $a = 6$ см, $b = 15$ см;
3) $a = 7$ см, $b = 14$ см;
4) $a = 5$ см, $b = 3$ см?

532. У рівнобедреному трикутнику основа в n разів менша від бічної сторони, а периметр дорівнює P. Знайдіть сторони трикутника, якщо:
1) $n = 2$, $P = 50$ см;
2) $n = 3$, $P = 35$ см;
3) $n = 4$, $P = 63$ см;
4) $n = 5$, $P = 33$ см.

533. Одна сторона трикутника дорівнює 7 см, друга — у 2 рази більша за першу, а третя — на 4 см менша від другої. Знайдіть периметр трикутника.

534. Трикутник, периметр якого дорівнює 15 см, поділяється медіаною на два трикутники з периметрами 11 см і 14 см. Знайдіть його медіану.

535. **Доведіть, що медіана, проведена до основи рівнобедреного трикутника, ділить його на два трикутники, периметри яких рівні.**

536. Основа й бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно 10 і 13 см. Знайдіть медіану, проведену до основи трикутника, якщо периметр одного з утворених трикутників дорівнює 30 см.

537. Який вид трикутника, якщо його кути дорівнюють указаним частинам розгорнутого кута:

1) $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}$; 3) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$?

Відповідь обґрунтуйте.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

538. Який вид трикутника, якщо бісектриса його кута утворює зі стороною цього кута кут, що дорівнює:
1) 0,25 розгорнутого кута; 3) 30 % розгорнутого кута;
2) 50 % прямого кута; 4) 0,6 прямого кута?

539*. Сума першої і другої сторін трикутника дорівнює 20 см, сума другої і третьої сторін — 22 см, а сума першої і третьої сторін — 28 см. Знайдіть периметр трикутника.

540*. Накресліть довільний трикутник. Перетніть його двома прямими так, щоб на малюнку утворилося:
1) 3 трикутники; 2) 5 трикутників.

541*. Медіана ділить трикутник на два трикутники, периметри яких рівні. Який вид трикутника?

542*. У прямокутному трикутнику з катетами a і b проведено висоту до гіпотенузи c. Основа висоти ділить гіпотенузу на відрізки, що відносяться як $a^2 : b^2$, починаючи від вершини B. З'ясуйте, на скільки сантиметрів периметр одного з утворених прямокутних трикутників більший за периметр іншого, якщо:
1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 10$ см;
2) $a = 7$ см, $b = 24$ см, $c = 25$ см;
3) $a = 5$ см, $b = 12$ см, $c = 13$ см.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

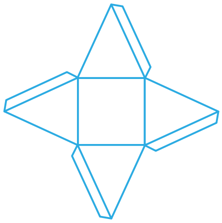
Проявіть компетентність

543. Чи вистачить 12 см дроту, щоб зігнути з нього трикутник, одна зі сторін якого дорівнює:
1) 7 см; 2) 6 см; 3) 5 см?

544. Які сторони трикутної серветки накладатимуться, якщо її перегнути вздовж бісектриси? А вздовж висоти? Проведіть експеримент. Висновки обґрунтуйте.

545. Паковання для цукерок у формі чотирикутної піраміди (мал. 298) можна виготовити за розгорткою (мал. 299). Проведіть вимірювання та з'ясуйте: 1) якого виду трикутники на цій розгортці; 2) які найбільші довжини сторін можуть мати ці трикутники в реальному пакованні, якщо його виготовляють із аркуша формату А4. (Розміри такого аркуша знайдіть у мережі «Інтернет»)?

Мал. 298



Мал. 299

546. У класі парти розміщено в три ряди і біля кожної з них стоять по два стільці. Якого виду трикутник із вершинами в трьох стільцях, якщо:
1) два стільці стоять за однією партою, а третій — у цьому самому ряду за наступною партою, рахуючи від дошки;
2) один стілець стоїть за першою партою в ряду біля вікна, другий — за першою партою в середньому ряду, а третій — за третьою партою в ряду біля дверей.
Скільки випадків треба розглянути? Схематично зобразіть кожний трикутник.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

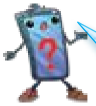
§ 11. ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ ТРИКУТНИКА

1. Сума кутів трикутника

Ситуація. Учні 7-А класу проводили дослід. На синій аркуш вони по-різному накладали аркуші трьох інших кольорів так, щоб усередині утворився синій трикутник (мал. 300). А потім вимірювали транспортиром кути кожного синього трикутника та обчислювали суму цих кутів.

Мал. 300

qr.orioncentr.com.ua/lezae



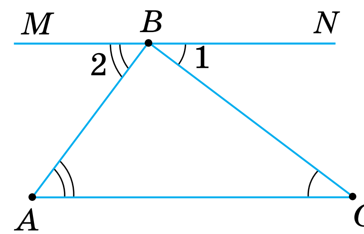
Яку суму кутів отримували учні?

Приблизно 180°.

Запам'ятайте!

Теорема (*про суму кутів трикутника*)
Сума кутів трикутника дорівнює 180°.

Дано: ΔABC.
Довести: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.



Мал. 301

Доведення. Проведемо через вершину B трикутника пряму MN, паралельну AC (мал. 301).

Утворені кути позначимо цифрами: $\angle 1$ і $\angle 2$.

$\angle 1 = \angle C$, $\angle 2 = \angle A$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих MN і AC та січних BC і AB відповідно.

Кути 1, 2 і B утворюють розгорнутий кут, тому $\angle 1 + \angle B + \angle 2 = 180°$.

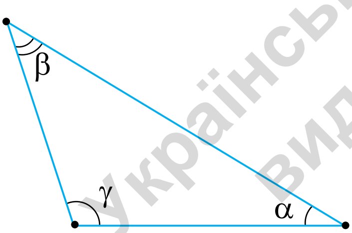
Замінивши в цій рівності кути 1 і 2 рівними їм кутами C і A, отримаємо:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°.$$

Чи може трикутник мати два прямі або два тупі кути?

Не може.

Якби трикутник мав два прямі або два тупі кути, то сума цих двох кутів дорівнювала б 180° або була б більшою за 180°. Тоді сума всіх кутів трикутника перевищувала б 180°.

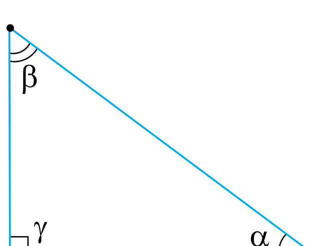


$\gamma \geq 90°$, $\alpha + \beta \leq 90°$

Мал. 302

Наслідок 1. **Трикутник може мати лише один прямий або тупий кут. Якщо один із кутів трикутника прямий або тупий, то два інші кути — гострі.**

Справді, якщо в трикутнику один із кутів прямий або тупий (мал. 302), то сума двох інших кутів не може бути більшою за 90°. Отже, кожний із них є гострим.



$\gamma = 90°$, $\alpha + \beta = 90°$

Мал. 303

Наслідок 2. **Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.**

Справді, у прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює 90° (мал. 303). Тоді сума двох інших кутів дорівнює $180° - 90° = 90°$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

2. Зовнішній кут трикутника

Якщо продовжимо яку-небудь сторону трикутника, то отримаємо кут, суміжний з кутом трикутника. Такий кут називають *зовнішнім кутом* трикутника.

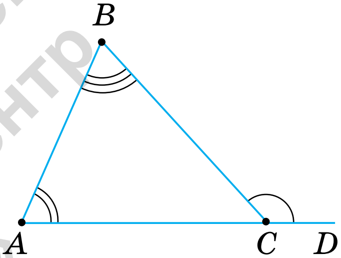
qr.orioncentr.com.ua/ZEGUA

На малюнку 304 $\angle BCD$ — зовнішній кут трикутника ABC.

Запам'ятайте!

Теорема (*властивість зовнішнього кута трикутника*)

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.



Мал. 304

Дано: ΔABC (мал. 304), $\angle BCD$ — зовнішній кут трикутника ABC.

Довести: $\angle BCD = \angle A + \angle B$.

Доведення. За теоремою про суму кутів трикутника, $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Звідси випливає, що $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$.

З іншого боку, зовнішній кут BCD суміжний з кутом C даного трикутника, тому $\angle BCD = 180° - \angle C$. Отже, $\angle BCD = \angle A + \angle B$.

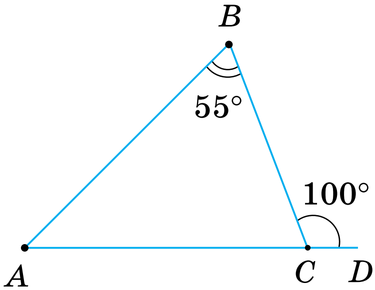
***Наслідок*. Зовнішній кут трикутника більший за кожний кут трикутника, не суміжний з ним.**

Справді, за теоремою про зовнішній кут трикутника, $\angle BCD = \angle A + \angle B$ (мал. 304). Сума додатних чисел більша за кожний із доданків, тому:

$$\angle \boldsymbol{BCD} > \angle \boldsymbol{A}, \ \angle \boldsymbol{BCD} > \angle \boldsymbol{B}.$$

Задача Зовнішній кут трикутника дорівнює 100°, а не суміжний з ним кут — 55°. Знайдіть кути трикутника.

Розв'язання За теоремою про зовнішній кут трикутника, $\angle BCD = \angle A + \angle B$ (мал. 305).



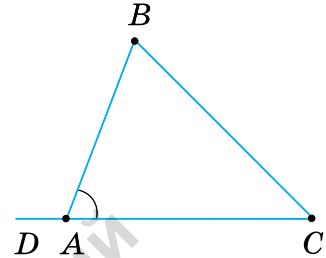
Мал. 305

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Звідси $\angle A = \angle BCD - \angle B = 100° - 55° = 45°$.

За теоремою про суму суміжних кутів, $\angle C = 180° - \angle BCD = 180° - 100° = 80°$.

Щоб знайти кут трикутника, наприклад, $\angle A$ трикутника ABC (мал. 306), **обчисліть:**
1) $180° - (\angle B + \angle C)$, якщо відомі $\angle B$ і $\angle C$;
2) $180° - \angle BAD$, якщо відомий зовнішній кут при вершині A;
3) $90° - \angle B$, якщо ΔABC —прямокутний і $\angle C$ — прямий.

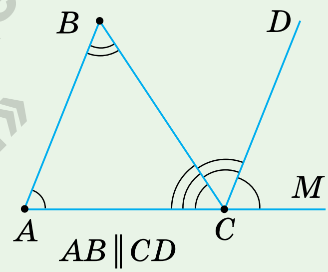


Мал. 306

Дізнайтеся більше

1. *Чи можна знайти інше доведення теореми про суму кутів трикутника, ніж те, що наведено в підручнику?*

Пригадайте, як доводили цю теорему. Два кути трикутника замінили рівними їм кутами. Ці кути, разом з третім кутом трикутника, утворюють розгорнутий кут, який дорівнює 180°. Скориставшись цим способом, доведіть теорему про суму кутів трикутника за малюнком 307.



Мал. 307

Більшість теорем підручника можна довести по-іншому. Пам'ятайте, знаходити різні способи доведення теореми, різні способи розв'язування задачі, порівнювати їх, вибирати найпростіше чи красиве — цікава й корисна робота. Адже при цьому ви берете участь у невеликих математичних дослідженнях.

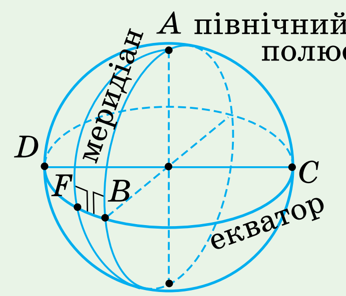
2. *Чи може сума кутів трикутника не дорівнювати* 180°?

Своєрідні «трикутники», у яких сума кутів більша за 180°, існують не на площині, а на сфері (мал. 308). Їх називають *сферичними трикутниками*, а геометрію — *сферичною геометрією*.

Найкоротша лінія між двома точками на сфері — дуга кола. Якщо з таких дуг утворити «трикутники», то сума їх кутів буде більшою за 180°.

У «трикутнику» ABF на малюнку 308 вершина A — на північному полюсі, а вершини B і F — на екваторі, кожний з кутів при вершинах B і F дорівнює 90°, а сума кутів трикутника ABF (180° і ще кут при вершині A) більша за 180°.

Науку, яка займається вимірюванням Землі та способами зображення її поверхні, називають *геодезією*.



Мал. 308

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
кути трикутника	angles of triangle	Winkel eines Dreiecks	angles d'un triangle

qr.orioncentr.com.ua/VtuB7

Пригадайте головне

1. Сформулюйте та доведіть теорему про суму кутів трикутника.
2. Поясніть, чому трикутник може мати лише один прямий або тупий кут.
3. Чому сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°?
4. Що таке зовнішній кут трикутника?
5. Поясніть, чому зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Усне тренування

Обчисліть:

1) $77 + 23 + 80$; $62 + 28 + 90$; $34 + 76 + 65$; $53 + 67 + 44$;

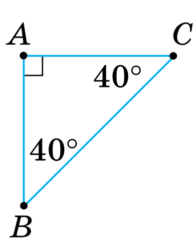
2) $44 + 36 + 120$; $90 + 39 + 51$; $65 + 15 + 110$; $71 + 59 + 41$.

Розв'яжіть задачі

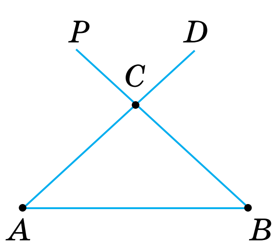
547'. Чи правильно вказано на малюнку 309 градусну міру кутів трикутника ABC? Відповідь поясніть.

548'. Назвіть зображені на малюнку 310 зовнішні кути трикутника ABC.

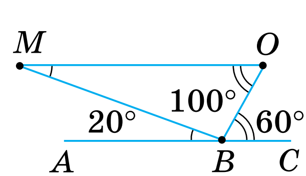
549'. За даними на малюнку 311 назвіть кути, які утворюють розгорнутий кут ABC. Назвіть рівні кути. Чому дорівнює сума кутів MBO, BOM, OMB?



Мал. 309



Мал. 310

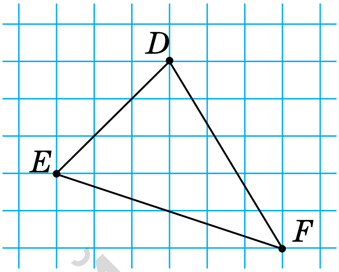


Мал. 311

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

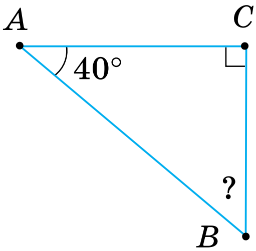
550°. Побудуйте трикутник ABC: 1) гострокутний; 2) прямокутний; 3) тупокутний. Виміряйте кути трикутника. Чому дорівнює їх сума?

551°. Побудуйте за клітинками трикутник, зображений на малюнку 312. Виміряйте кути трикутника. Чому дорівнює їх сума?

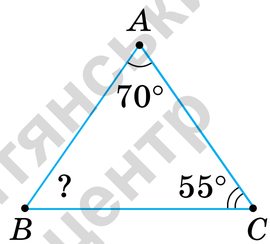


Мал. 312

552°. За даними на малюнках 313, 314, визначте невідомий кут трикутника ABC.



Мал. 313



Мал. 314

553°. Знайдіть невідомий кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють:

1) 20° і 40°; 4) 101° і 19°;
2) 100° і 30°; 5) 122° і 28°;
3) 80° і 60°; 6) 15° і 109°.

qr.orioncentr.com.ua/f3FAQ

554°. Знайдіть невідомий кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють:

1) 45° і 45°; 2) 70° і 50°.

555°. Чи можуть кути трикутника дорівнювати:

1) 70°, 51°, 58°; 2) 42°, 89°, 49°; 3) 65°, 75°, 41°?

556°. Чи можуть кути трикутника дорівнювати:

1) 60°, 61°, 59°; 2) 52°, 79°, 48°?

557°. За даними таблиці 20 знайдіть невідомі кути трикутника ABC.

Таблиця 20

$\angle A$	$30°$	$n°$	$120°$
$\angle B$	$n°$	$2n°$	$n° + 30°$
$\angle C$	$n° + 30°$	72	$n°$

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

558°. Чи може в трикутнику бути:
1) два прямі кути; 2) два тупі кути; 3) тупий і прямий кути? Відповідь поясніть.

559°. Чи може в трикутнику кожний кут бути:
1) меншим від $60°$; 2) більшим за $60°$; 3) дорівнювати $60°$? Відповідь поясніть.

560°. Чи буде гострокутним трикутник, два кути якого дорівнюють:
1) $30°$ і $60°$; 2) $25°$ і $55°$; 3) $43°$ і $52°$?

561°. Чи буде тупокутним трикутник, два кути якого дорівнюють $40°$ і $49°$?

562°. Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює:
1) $20°$; 2) $40°$; 3) $65°$; 4) $52°$; 5) $24°$; 6) $17°$.
Знайдіть інший гострий кут.

563°. Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює:
1) $30°$; 2) $41°$.
Знайдіть інший гострий кут.

564°. Якого виду трикутник, якщо два його кути дорівнюють:
1) $40°$ і $50°$; 2) $25°$ і $35°$; 3) $80°$ і $40°$?

565°. Якого виду трикутник, якщо два його кути дорівнюють $30°$ і $60°$?

566°. **Якщо два трикутники мають по два рівні кути, то й треті їх кути рівні між собою.** Доведіть.

567°. Скільки зовнішніх кутів у трикутнику?

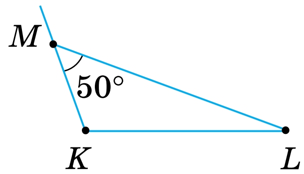
568°. Накресліть трикутник KLM:
1) гострокутний;
2) прямокутний;
3) тупокутний.
Побудуйте по одному зовнішньому куту при кожній його вершині.

569°. Накресліть трикутник ABC: 1) гострокутний; 2) прямокутний; 3) тупокутний. Побудуйте по одному зовнішньому куту при кожній його вершині.

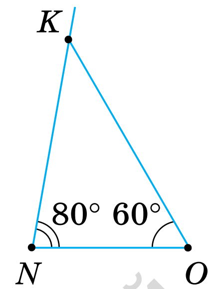
570°. За даними, наведеними на малюнку 315, знайдіть зовнішній кут при вершині M трикутника KLM.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

571°. За даними, наведеними на малюнку 316, знайдіть зовнішній кут при вершині K трикутника NOK.



Мал. 315



Мал. 316

572°. Знайдіть зовнішній кут трикутника ABC при вершині даного кута, якщо:
1) $\angle A = 57°$;
2) $\angle B = 34°$;
3) $\angle C = 76°$.

qr.orioncentr.com.ua/rciOd

573°. $\angle BCD$ — зовнішній кут трикутника ABC. Якими даними треба доповнити таблицю 21?

Таблиця 21

$\angle A$	35°		20°	
$\angle B$	55°	45°		30°
$\angle C$		45°	65°	
$\angle BCD$				60°

574. Знайдіть кути трикутника, якщо вони пропорційні числам:
1) 1, 2, 3; 2) 4, 5, 6; 3) 5, 5, 8.

575. Знайдіть кути трикутника, якщо вони відносяться як 2 : 2 : 5.

576. Якого виду трикутник, якщо один із його кутів:
1) дорівнює сумі двох інших кутів;
2) більший за суму двох інших кутів?

577. Якого виду трикутник, якщо найбільший з його кутів менший від суми двох інших кутів?

578. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
1) один із них удвічі більший за інший;

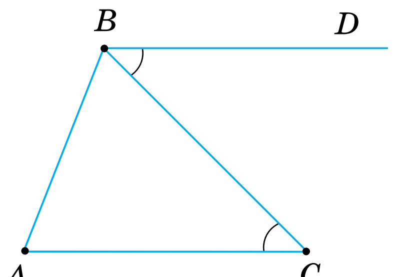
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

2) один із них менший від іншого на 20°;
3) кути пропорційні числам 2 і 3.

579. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо один із них у 5 разів більший за інший.

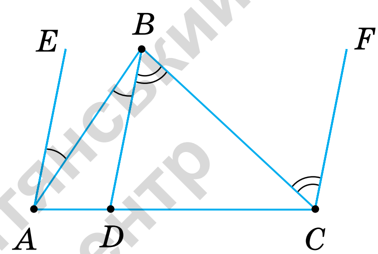
580. Доведіть теорему про суму кутів трикутника, скориставшись малюнком 317.

581. Доведіть теорему про суму кутів трикутника, скориставшись малюнком 318.



$BD \parallel AC$

Мал. 317



$AE \parallel BD \parallel CF$

Мал. 318

582. У трикутнику ABC $\angle A = 70°$, $\angle C = 60°$. Бісектриса BD ділить трикутник на два трикутники ABD і CBD. Знайдіть кути цих трикутників.

583. У трикутнику ABC $\angle A = \angle C = 45°$. Бісектриса BD ділить трикутник на два трикутники ABD і CBD. Знайдіть кути цих трикутників.

584. Знайдіть тупий кут між бісектрисами гострих кутів прямокутного трикутника.

585. Бісектриси кутів A і B трикутника ABC перетинаються в точці O. Знайдіть кут AOB, якщо $\angle A = 64°$, $\angle B = 106°$.

586. Знайдіть кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній.

587. З вершини прямого кута трикутника ABC проведено висоту BD. Знайдіть кут ABD, якщо $\angle C = 40°$.

588. BD — висота, проведена з вершини прямого кута трикутника ABC, $\angle ABD = \angle CBD$. Доведіть, що $\angle ABD = \angle BCD$.

589. Висота трикутника ділить кут, з вершини якого вона проведена, на кути 30° і 40°. Знайдіть кути трикутника.

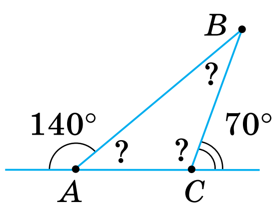
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

590. BD — висота трикутника ABC. Знайдіть кути ABD і CBD, якщо $\angle A = 75°$, $\angle C = 35°$.

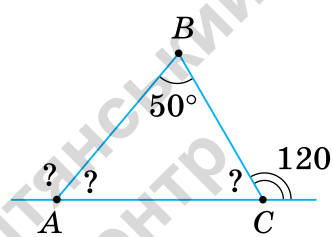
591. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 80°. Знайдіть кут між висотою та бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута.

592. У прямокутному трикутнику кут між висотою та бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює 30°. Знайдіть гострі кути трикутника.

593. Знайдіть кути, позначені знаком «?» на малюнках 319, 320.



Мал. 319



Мал. 320

594. Зовнішній кут трикутника дорівнює 100°. Знайдіть кути трикутника, якщо один із них дорівнює:
1) 40°; 2) 55°; 3) 30°.

595. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо його зовнішній кут дорівнює:
1) 120°;
2) 132°;
3) 144°.

596. Зовнішній кут трикутника дорівнює 80°. Знайдіть кути трикутника, не суміжні з ним, якщо вони пропорційні числам 3 і 5.

597. Якщо один із зовнішніх кутів трикутника гострий, то якими є інші зовнішні його кути? Відповідь поясніть.

598. Який вид трикутника, якщо один із його зовнішніх кутів дорівнює: 1) 90°; 2) 32°; 3) 89°?

599. Зовнішній кут трикутника дорівнює 70°. Чи може кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнювати:
1) 85°;
2) 55°;
3) 69°?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

600. Зовнішній кут прямокутного трикутника дорівнює $128°$. Знайдіть кут між висотою та бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута.

601*. Знайдіть гострий кут між бісектрисами двох кутів трикутника, якщо третій його кут дорівнює $60°$.

602*. У трикутнику ABC бісектриси кутів B і C перетинаються під кутом $128°$. Знайдіть кут A.

603*. У трикутнику ABC $\angle B = 110°$, $\angle C = 50°$, AD — висота. Доведіть, що $\angle CAD = 2\angle BAD$.

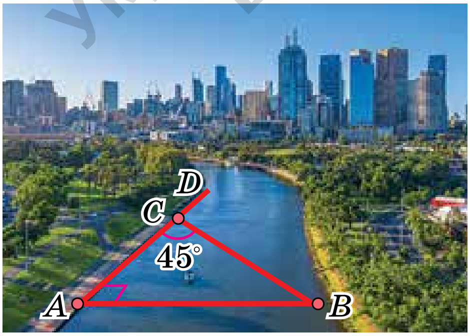
604*. У трикутнику ABC з вершини B проведені висота та бісектриса. Знайдіть кут між висотою та бісектрисою, якщо:
1) $\angle A = 80°$, $\angle C = 56°$;
2) $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$.

605*. Чи може бісектриса кута трикутника бути паралельною бісектрисі його зовнішнього кута? Відповідь обґрунтуйте.

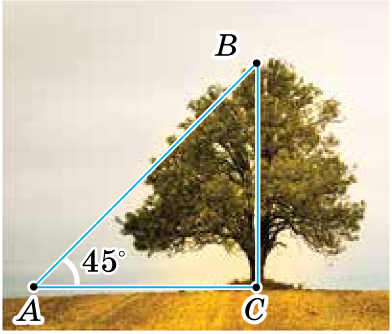
Проявіть компетентність

606. Щоб виміряти на місцевості відстань між двома пунктами A та B, з яких один (пункт B) неприступний, провішують пряму AD, перпендикулярну до AB (мал. 321). На прямій AD знаходять таку точку C, щоб $\angle ACB = 45°$. Шукана відстань AB дорівнює AC. Чому?

607. Поясніть за малюнком 322, як можна знайти висоту дерева.



Мал. 321



Мал. 322

608. За допомогою однієї лінійки побудуйте суму двох кутів даного трикутника.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 12. РІВНІСТЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

1. Що таке рівні фігури

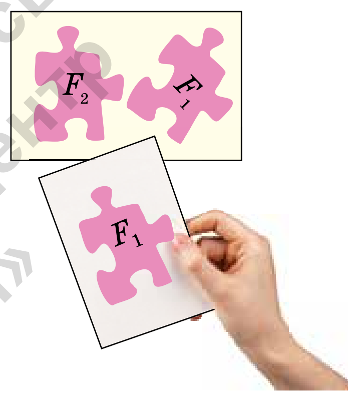
Ситуація. Учні й учениці 7-Б класу проводили дослідження. Вони виявляли, чи є в їхньому рюкзачку рівні предмети серед підручників, зошитів, ручок, олівців, ластиків тощо.

Як діяли учні й учениці?

Прикладали один предмет до іншого.

qr.orioncentr.com.ua/tVbEE

Застосовуючи *спосіб накладання*, можна порівняти будь-які дві геометричні фігури. На малюнку 323 зображені геометричні фігури F_1 і F_2. Щоб порівняти ці фігури — встановити, рівні вони чи ні, — скопіюємо фігуру F_1 на кальку. Переміщуючи кальку, накладемо копію фігури F_1 на фігуру F_2. Якщо вони сумістяться, то фігури F_1 і F_2 рівні.



Мал. 323

Ви можете уявити, що на фігуру F_2 накладаємо не копію фігури F_1, а саму фігуру F_1. Тому в подальшому будемо говорити про накладання самої фігури (а не її копії) на іншу фігуру.

Запам'ятайте!

Дві *геометричні фігури* називаються *рівними*, якщо при накладанні вони суміщаються.

Рівність фігур F_1 і F_2 записують так: $F_1 = F_2$.

Проте накладання не завжди можна здійснити на практиці. Наприклад, не можна накласти одну земельну ділянку на іншу, або шибки великих вітрин, або два краї столу.

Порівнюючи геометричні фігури, також буває незручно або й неможливо їх накласти. Тому в геометрії застосовують й інші способи встановлення рівності фігур.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Як порівняти два відрізки? А два кути?

Виміряти їх.

Рівні відрізки мають рівні довжини, а рівні кути — рівні градусні міри. І навпаки.
Відрізки, що мають рівні довжини, — рівні.
Кути, що мають рівні градусні міри, — рівні.

2. Рівні трикутники

Як дати означення рівним трикутникам?

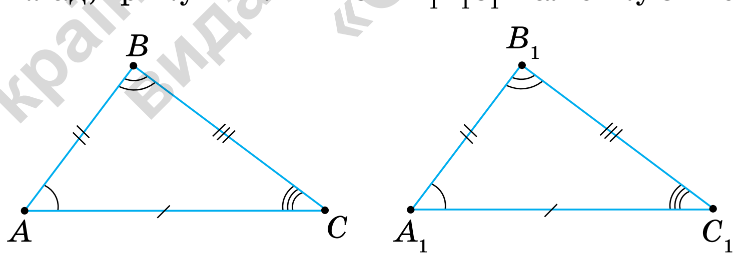
Виходячи із загального означення рівності фігур або через рівність їх відповідних елементів.

Запам'ятайте!

Два *трикутники* називаються *рівними*, якщо:

при накладанні вони суміщаються або **рівні їх відповідні сторони і відповідні кути**

Наприклад, трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ малюнку 324 є рівними.



Мал. 324

Записуємо: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Говоримо: «Трикутник ABC дорівнює трикутнику $A_1B_1C_1$».

Порядок запису вершин рівних трикутників має значення.

Справді, рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ (мал. 324) при накладанні сумістяться, тобто сумістяться їх відповідні сторони: AB з A_1B_1, BC з B_1C_1, AC з A_1C_1 та їх відповідні кути: $\angle A$ з $\angle A_1$, $\angle B$ з $\angle B_1$, $\angle C$ з $\angle C_1$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

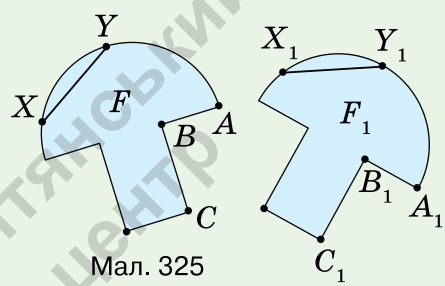
! Для трикутників на малюнку 324 запис «$\Delta ABC = \Delta A_1C_1B_1$» будемо вважати неправильним.

У рівних трикутників:
- **проти рівних сторін лежать рівні кути, і навпаки:**
- **проти рівних кутів лежать рівні сторони.**

Наприклад, на малюнку 324 проти рівних сторін AB і A_1B_1 лежать рівні кути C і C_1.

Дізнайтеся більше

1. Ви знаєте, що коли відрізки при накладанні суміщаються, то відстані між їхніми кінцями рівні. Але в загальному означенні рівності фігур поняття «відстань між точками» не використовувалось. Чи не можна визначити рівність фігур, користуючись цим поняттям? Поміркуємо.



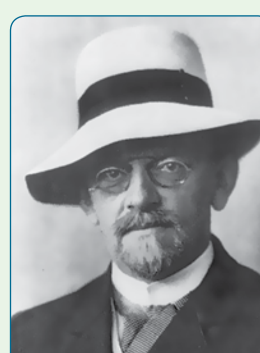
Мал. 325

Нехай фігури F і F_1 рівні, тобто суміщаються накладанням (мал. 325). Фігури складаються з точок. Тоді точка A фігури F суміститься з відповідною точкою A_1 фігури F_1, точка B — з точкою B_1, C — з C_1. При такому накладанні, які б дві точки X і Y фігури F ми не взяли, відстань між ними дорівнює відстані між відповідними їм точками X_1 і Y_1 фігури F_1. На малюнку $XY = X_1Y_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.

Спробуйте дати означення рівних фігур, скориставшись поняттям «відстань між точками». Порівняйте ваше означення з наведеним нижче.

Дві фігури F і F_1 називають рівними, якщо при накладанні однієї фігури на іншу відстань між будь-якими точками фігури F дорівнює відстані між відповідними їм точками фігури F_1.

2. У 1899 році видатний німецький математик **Давид Гілберт** (1862–1943) опублікував фундаментальну працю «Основи геометрії». У цій роботі замість терміна «рівні фігури» введено термін «конгруентні фігури». Назва «конгруентний» походить від латинського слова *congruentis* — той, що збігається. Автора змусило використовувати цей термін те, що розуміння рівності в геометрії за смислом відрізняється від його розуміння в арифметиці й алгебрі. Наприклад, $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$. Тут знак рівності означає, що праворуч і ліворуч від нього стоїть те саме число, але по-різному записане. Про фігури F і F_1 на малюнку 325 не можна сказати, що це одна фігура. Навпаки, тут дві різні фігури. Тому й названо їх не рівними, а конгруентними.



Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
рівні фігури	equal figures	gleiche Figuren	figures égales

qr.orioncentr.com.ua/lzofs

Пригадайте головне

1. Які дві геометричні фігури називають рівними?
2. Які трикутники називають рівними?
3. Назвіть рівні елементи в рівних трикутниках.
4. Яка залежність між сторонами і кутами в рівних трикутниках?

Усне тренування

Обчисліть:

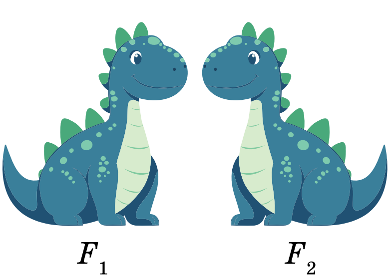
$(75 + 25) : 10 \cdot 3$; $(62 + 28) - 90 + 8$; $(34 - 74 + 55) : 5 \cdot 11$.

Розв’яжіть задачі

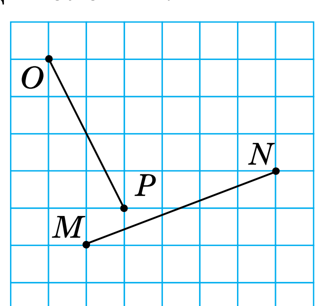
609'. На малюнку 326 зображено рівні фігури F_1 і F_2. Поясніть, як їх можна сумістити накладанням.

610'. Чи можна сумістити накладанням відрізки OP і MN (мал. 327)? Відповідь поясніть.

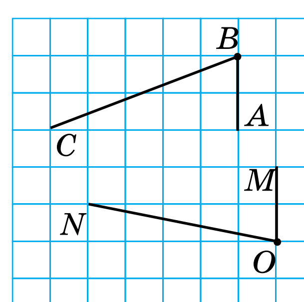
611'. Чи можна сумістити накладанням кути ABC і MON (мал. 328)? Відповідь поясніть.



Мал. 326



Мал. 327

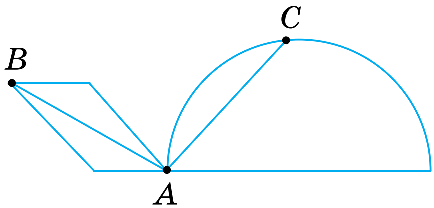


Мал. 328

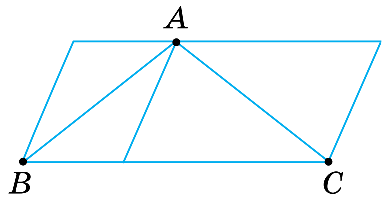
612°. Порівняйте на око відрізки AB і AC (мал. 329). Перевірте свій висновок вимірюванням.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

613°. Порівняйте на око відрізки AB і AC (мал. 330). Перевірте свій висновок вимірюванням.



Мал. 329



Мал. 330

614°. Точка O — середина відрізка AB. Чи можна сумістити відрізки:

1) AO і OB; 2) AO і AB; 3) AB і OB?

615°. Промінь OC — бісектриса кута AOB. Чи можна сумістити кути:

1) $\angle AOC$ і $\angle COB$;
2) $\angle AOC$ і $\angle AOB$;
3) $\angle AOB$ і $\angle COB$?

616°. Чи можна сумістити кути, градусні міри яких:

1) $60°$ і $61°$;
2) $73°$ і $73°$;
3) $107°58'$ і $107°59'$?

617°. Чи можна сумістити відрізки AB і CD, якщо:

1) $AB = 3{,}4$ см, $CD = 3{,}4$ см;
2) $AB = 5$ см, $CD = 6$ см;
3) $AB = 15$ см, $CD = 15$ мм?

618°. Чи можна сумістити:

1) дві прямі;
2) два промені;
3) вертикальні кути;
4) суміжні кути?

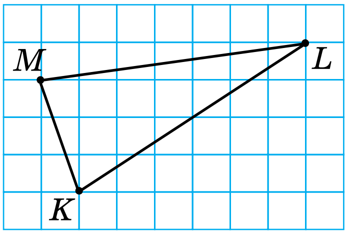
qr.orioncentr.com.ua/2u824

619°. Побудуйте за клітинками спочатку ΔKLM (мал. 331), а потім ΔAKL, що дорівнює трикутнику KLM.

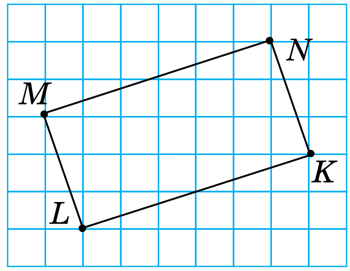
620°. Побудуйте за клітинками прямокутник $ABCD$, що дорівнює прямокутнику $KLMN$ (мал. 332).

621°. Відомо, що деякий трикутник XYZ дорівнює трикутнику ABC, зображеному на малюнку 333. Визначте довжини сторін трикутника XYZ. Назвіть рівні кути цих трикутників.

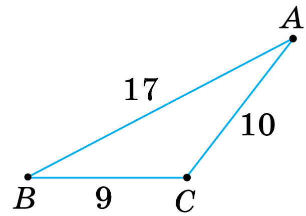
Український освітянський видавничий центр «Оріон»



Мал. 331



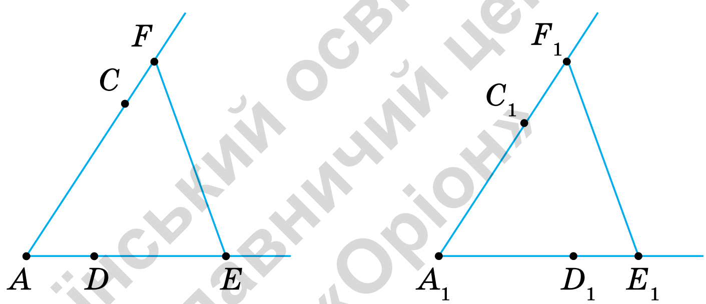
Мал. 332



Мал. 333

622°. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ при накладанні сумістилися вершини: A з A_1, B з B_1, C із C_1. Назвіть:
1) рівні сторони трикутників; 2) рівні кути трикутників.

623°. Кути A і A_1 суміщаються при накладанні (мал. 334). Чи сумістяться:
1) точки C і C_1; 2) точки D і D_1; 3) відрізки EF і E_1F_1?
Перевірте вимірюванням.



Мал. 334

624°. Чи можуть бути рівними трикутники:
1) гострокутний і тупокутний; 2) прямокутний і тупокутний?
Відповідь поясніть.

625°. Чи можуть бути рівними трикутники:
1) рівнобедрений і рівносторонній;
2) різносторонній і рівнобедрений?
Відповідь поясніть.

626°. Радіуси двох кіл рівні. При накладанні кіл їхні центри сумістилися. Чи сумістяться кола?

627°. Сторони квадратів $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ рівні. Чи сумістяться при накладанні квадрати? Відповідь поясніть.

628°. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть кути трикутника $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $\angle A = 42°$, $\angle B = 80°$; 2) $\angle B = 65°$, $\angle C = 45°$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

629°. Запишіть назви рівних трикутників, у яких відповідні сторони AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, AC і A_1C_1. Знайдіть:
1) сторони трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см;
2) кути трикутника ABC, якщо $\angle A_1 = 65°$, $\angle B_1 = 80°$, $\angle C_1 = 35°$.

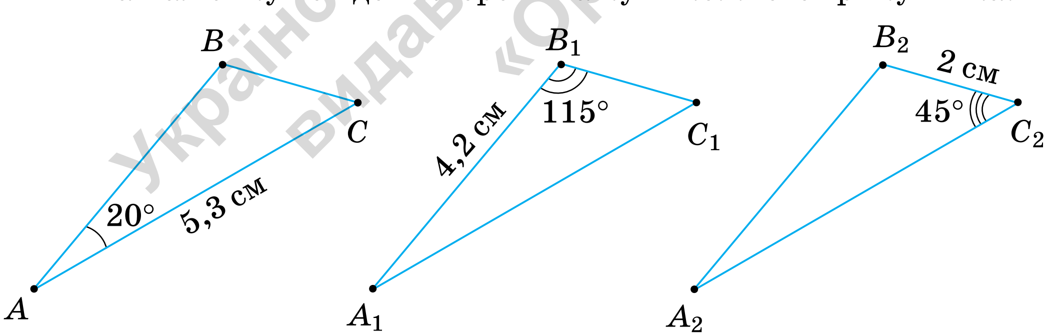
630. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть периметр трикутника $A_1B_1C_1$, якщо:
1) $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, $AC = 11$ см;
2) $AB = 14$ см, $BC = 15$ см, $AC = 17$ см.

631. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Знайдіть периметр трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $AB = 1{,}3$ дм, $BC = 2{,}1$ дм, $AC = 20$ см.

632. Периметри двох трикутників рівні. Чи є рівними трикутники?

633. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ при накладанні сумістилися сторони AB і A_1B_1, BC і B_1C_1, AC і A_1C_1. Знайдіть:
1) невідомі сторони трикутників, якщо $AB = 11$ см, $A_1C_1 = 16$ см, $BC = 14$ см;
2) невідомі кути трикутників, якщо $\angle B = 60°$, $\angle A_1 = 50°$, $\angle C_1 = 70°$.

634. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2B_2C_2$ (мал. 335). Знайдіть за даними на малюнку невідомі сторони та кути кожного трикутника.



Мал. 335

635. Викладіть сірники так, як показано на малюнку 336. Маємо три рівні трикутники. Перекладіть два сірники так, щоб дістати чотири рівні трикутники.

Мал. 336

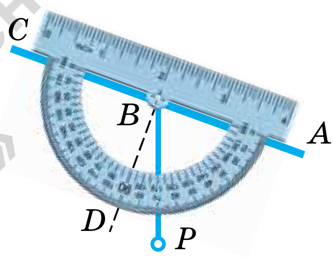
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

636*. На аркуші зображено рівнобедрений прямокутний ΔABC і рівний йому трикутник. Трикутники сумістилися після того, як аркуш зігнули двічі:
1) спочатку за катетом AC, а потім за катетом BC;
2) спочатку за катетом BC, а потім за катетом AC;
3) спочатку за гіпотенузою AB, а потім за катетом AC;
4) спочатку за гіпотенузою AB, а потім за катетом BC.
Побудуйте початкове розміщення даних трикутників.

637*. У трикутнику ABC: $AC = BC$, $\angle A = \angle B = 45°$. Рівний йому трикутник KLM суміщається з ним, якщо аркуш послідовно зігнути вздовж прямих:
1) AC, BC, AB; 2) AC, AB, BC; 3) AB, AC, BC.
Побудуйте початкове розміщення трикутників ABC і KLM.

Проявіть компетентність

638. На малюнку 337 показано, як можна знайти кут нахилу лінії зору до горизонтального напрямку. Для цього дивляться на предмет уздовж лінійки транспортира AC і відмічають, на яку поділку показує висок BP. Поясніть, чому так можна знаходити шуканий кут.



Мал. 337

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 13. ПЕРША І ДРУГА ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

1. Навіщо потрібні ознаки рівності

Ситуація. Денис і Вікторія з'ясовували, чи рівні два трикутники, і пригадали означення рівних трикутників: **Два трикутники називаються рівними, якщо рівні їх відповідні сторони і відповідні кути.**

qr.orioncentr.com.ua/jwDz2

Як за означенням встановити, чи рівні два трикутники?

Довести рівність їх відповідних елементів.

! Це не раціонально, бо відповідних елементів — шість пар!

Тому користуються *ознаками рівності трикутників*. У цих теоремах стверджується, що для висновку про рівність трикутників достатньо встановити рівність лише трьох їх відповідних елементів.

2. Перша ознака рівності трикутників

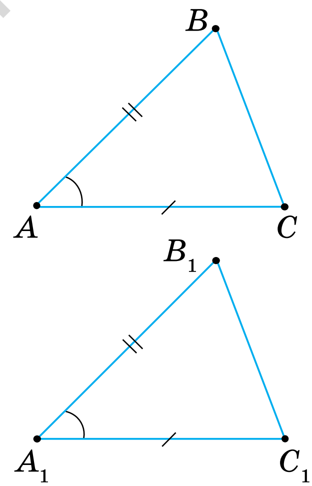
Запам'ятайте!

Теорема (*ознака рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними*)

Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника відповідно дорівнюють двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ (мал. 338),
$AB = A_1B_1$,
$AC = A_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$.

Довести: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

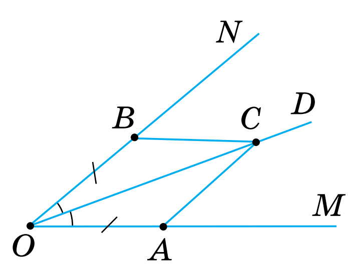


Мал. 338

Доведення. Накладемо ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з A_1, а сторони AC і AB лежали на променях A_1C_1 і A_1B_1 відповідно. Це можна зробити, оскільки $\angle A = \angle A_1$. Так як $AC = A_1C_1$ і $AB = A_1B_1$, то вершина C суміститься з вершиною C_1, а вершина B — з B_1. Якщо вершини C і C_1, B і B_1 сумістилися, то сумістяться і сторони BC і B_1C_1.

Трикутники ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ сумістилися, отже, вони рівні.

Задача 1 На сторонах кута MON відкладено рівні відрізки OA і OB. Довільну точку C бісектриси OD цього кута сполучено з точками A і B. Доведіть, що $\Delta AOC = \Delta BOC$.



Мал. 339

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Розв'язання Розглянемо утворені трикутники AOC і BOC (мал. 339). У них:

$OA = OB$ за умовою;

OC — спільна сторона;

$\angle AOC = \angle BOC$, оскільки OD — бісектриса кута MON.

Отже, $\Delta AOC = \Delta BOC$ за першою ознакою рівності трикутників.

Щоб довести рівність двох трикутників:

1) виділіть їх на малюнку;

2) доведіть, що дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника;

3) зробіть висновок: трикутники рівні за першою ознакою.

qr.orioncentr.com.ua/6lHez

3. Друга ознака рівності трикутників

Запам'ятайте!

Теорема (*ознака рівності трикутників за стороною і прилеглими до неї кутами*)

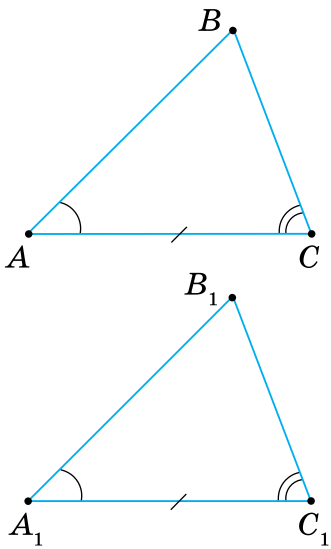
Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника відповідно дорівнюють стороні й прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ (мал. 340),
$AC = A_1C_1$,
$\angle A = \angle A_1$,
$\angle C = \angle C_1$.

Довести: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Доведення. Накладемо ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з A_1, а сторона AC сумістилася з рівною їй стороною A_1C_1. Тоді вершина C суміститься з C_1. Вершини B і B_1 розмістимо з одного боку від прямої A_1C_1. Оскільки $\angle A = \angle A_1$ і $\angle C = \angle C_1$, то сторона AB лежатиме на промені A_1B_1, а сторона CB — на промені C_1B_1. Вершина B лежатиме як на промені A_1B_1, так і на промені C_1B_1. Дві прямі

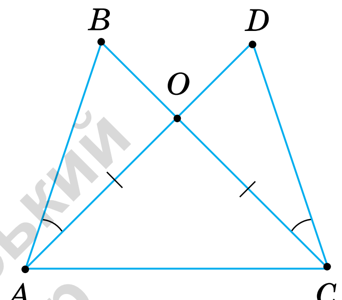


Мал. 340

можуть перетинатися тільки в одній точці, тому вершина B суміститься з вершиною B_1.

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ сумістилися, отже, вони рівні.

Задача 2 Трикутники ABC і CDA розміщені так, як показано на малюнку 341. $AO = CO$, $\angle BCD = \angle DAB$. Доведіть, що $AB = CD$ і $\angle B = \angle D$.



Мал. 341

Розв'язання Відрізки AB і CD, кути B і D є сторонами і кутами трикутників AOB і COD. У них:

$AO = CO$ за умовою;

$\angle BCD = \angle DAB$ за умовою;

$\angle AOB = \angle COD$ як вертикальні.

Отже, $\Delta AOB = \Delta COD$ за стороною і прилеглими кутами.

Тоді $AB = CD$ і $\angle B = \angle D$ як відповідні сторони і кути рівних трикутників AOB і COD.

Щоб довести рівність двох відрізків (кутів):
1) виділіть на малюнку два трикутники, сторонами яких є ці відрізки (кути);
2) доведіть, що трикутники рівні;
3) зробіть висновок: відрізки (кути) рівні як відповідні сторони (кути) рівних трикутників.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Дізнайтеся більше

Виникає запитання: *Як відшукати ознаки рівності трикутників?* Побудувавши трикутник, рівний даному. Якщо за деякими елементами даного трикутника можна побудувати лише один трикутник, рівний даному, то рівність цих елементів буде ознакою рівності трикутників.

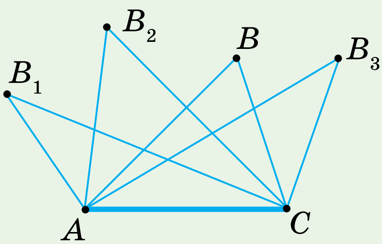
Проведемо невелике дослідження. З'ясуємо, які саме сторони й кути трикутника ABC потрібно знати, щоб побудувати лише один трикутник, що дорівнює трикутнику ABC.

Нехай у трикутнику ABC відома сторона AC. Тоді можна побудувати скільки завгодно різних трикутників, у яких одна сторона дорівнюватиме AC (мал. 342).

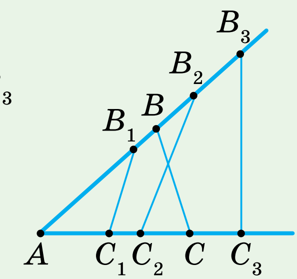
Якщо у трикутнику ABC відомий кут A, то також можна побудувати безліч трикутників, які не дорівнюють трикутнику ABC (мал. 343).

Так само можна побудувати безліч різних трикутників за двома елементами ΔABC: двома сторонами, двома кутами або стороною та кутом. Наприклад, на малюнку 344 побудовано різні трикутники за сторонами AC і AB ΔABC.

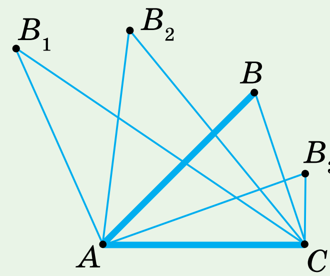
Таким чином, за одним або двома елементами трикутника ABC можна побудувати безліч нерівних йому трикутників.



Мал. 342

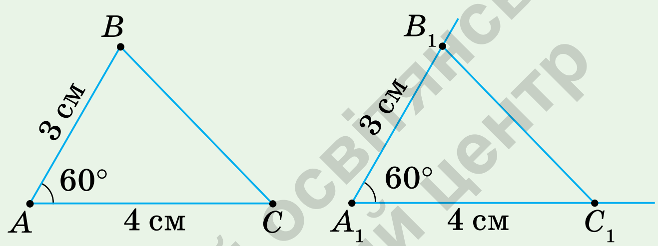


Мал. 343



Мал. 344

Нехай тепер у ΔABC відомі три елементи: AB = 3 см, AC = 4 см, $\angle A$ = 60°. Побудуємо за допомогою транспортира $\angle A_1$ = 60° і на його сторонах відкладемо відрізки A_1B_1 = 3 см, A_1C_1= 4 см (мал. 345). Сполучивши точки B_1 і C_1, отримаємо $\Delta A_1B_1C_1$.



Мал. 345

Обираючи різні положення кута A_1, отримаємо різні трикутники. Порівнюючи ці трикутники, можна припустити, що всі вони дорівнюють ΔABC. Довівши цю ознаку, переконуємося в її істинності.

Так само можна дійти і до другої ознаки рівності трикутників.

Український освітній видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
ознаки рівності трикутників	signs of equality of triangles	Zeichen der Gleichheit von Dreiecken	signes d'isométrie de triangles

qr.orioncentr.com.ua/h0Fdw

Пригадайте головне

1. Сформулюйте і доведіть ознаку рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними.
2. Сформулюйте і доведіть ознаку рівності трикутників за стороною і прилеглими до неї кутами.
3. Поясніть, як довести рівність двох відрізків; кутів.

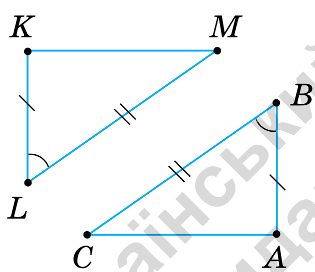
Усне тренування

1) Чи існує трикутник, у якого сторони дорівнюють:
   4,56, 5,44 і 10; 2,39, 3,61 і 5; 7,65, 1,35 і 6,3?
2) Чи існує трикутник, у якого кути дорівнюють:
   $20°$, $80°$, $90°$; $55°$, $35°$, $80°$; $18°$, $62°$, $100°$?
3) Обчисліть:
   $370 \cdot 3 + 30 \cdot 3$; $490 \cdot 2 + 10 \cdot 2$; $257 \cdot 4 - 7 \cdot 4$.

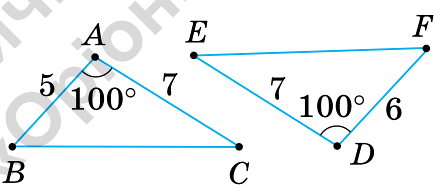
Розв’яжіть задачі

639'. За даними на малюнку 346 назвіть відповідно рівні елементи трикутників. Чи рівні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.

640'. На малюнку 347 задано елементи трикутників ABC і DFE. Чи рівні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.



Мал. 346

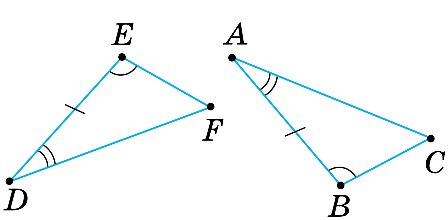


Мал. 347

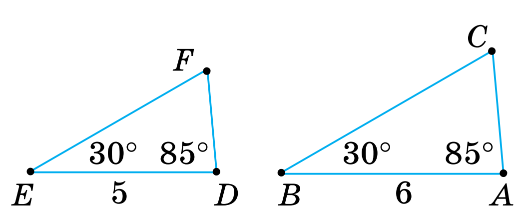
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

641'. За даними, наведеними на малюнку 348, назвіть відповідно рівні елементи трикутників. Чи рівні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.

642'. На малюнку 349 задано елементи трикутників DEF і ABC. Чи рівні дані трикутники?



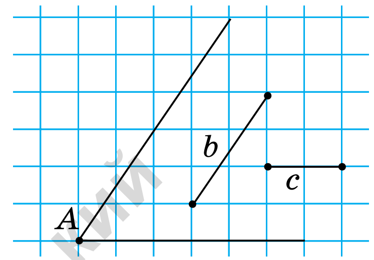
Мал. 348



Мал. 349

643°. Побудуйте за клітинками кут A (мал. 350). Відкладіть від точки A на його сторонах задані відрізки b і c. Позначте буквами B і C кінці відкладених відрізків та сполучіть ці точки відрізком. Побудуйте за клітинками трикутник, що дорівнює трикутнику ABC.

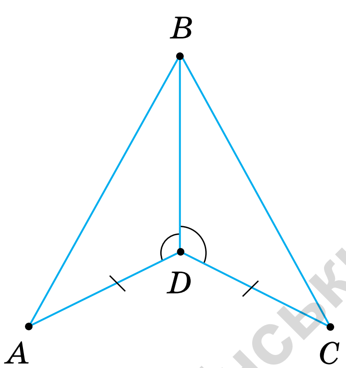
qr.orioncentr.com.ua/EWsSR



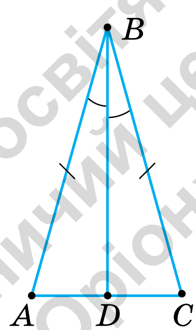
Мал. 350

644°. Знайдіть на малюнках 351–352 рівні трикутники. Поясніть, чому вони рівні.

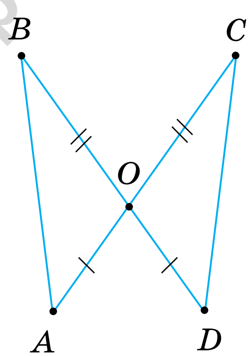
645°. Знайдіть на малюнку 353 рівні трикутники. Поясніть, чому вони рівні.



Мал. 351



Мал. 352



Мал. 353

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

646°. $\Delta ABC = \Delta KLM = \Delta DEF$. Заповніть таблицю 22.

Таблиця 22

ΔABC	$AB = 5$ см, $BC = 16$ см, $\angle B = 120°$	$AB = 16$ см, $AC = 19$ см, $\angle A = 13°$
ΔKLM		
ΔDEF		

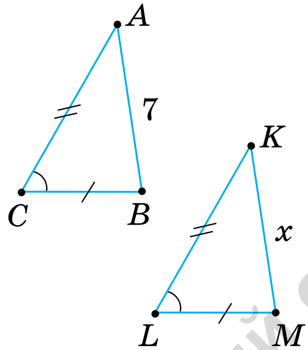
647°. У трикутників ABC і DEF: $\angle A = \angle E$, $AB = 20$ см, $AC = 18$ см, $DE = 18$ см, $EF = 20$ см. Який кут трикутника DEF дорівнює куту B?

648°. Визначте невідомий елемент x трикутника (мал. 354).

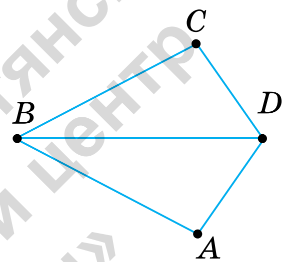
649°. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, яка є серединою кожного з них. Доведіть: 1) $\Delta AOC = \Delta BOD$; 2) $\Delta AOD = \Delta BOC$.

650°. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AB і A_1B_1 позначено точки D і D_1 так, що $AD = A_1D_1$. Доведіть, що $\Delta ACD = \Delta A_1C_1D_1$.

651°. На малюнку 355 $BA = BC$, BD — бісектриса кута ABC.
1. Доведіть, що $AD = CD$.
2. Знайдіть кут BCD, якщо $\angle BAD = 130°$.

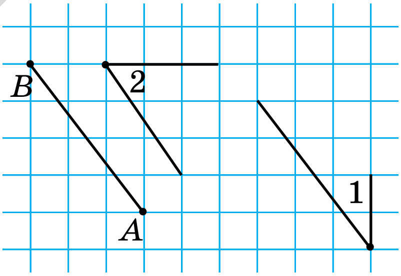


Мал. 354



Мал. 355

652°. Побудуйте за клітинками відрізок AB (мал. 356). Відкладіть від променя AB кут 1, а від променя BA — кут 2 так, щоб утворився трикутник ABC. Побудуйте за клітинками трикутник, що дорівнює трикутнику ABC.

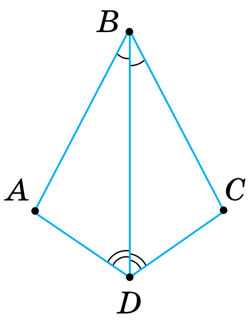


Мал. 356

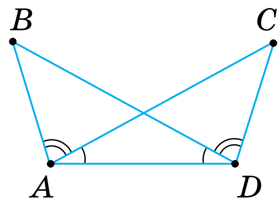
653°. Знайдіть на малюнках 357, 358 рівні трикутники. Поясніть, чому вони рівні.

654°. Знайдіть на малюнку 359 рівні трикутники. Поясніть, чому вони рівні.

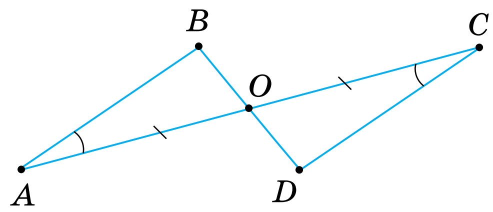
Український освітянський видавничий центр «Оріон»



Мал. 357



Мал. 358



Мал. 359

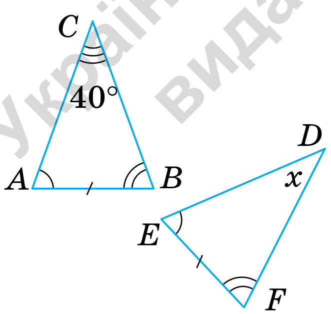
655°. $\Delta ABC = \Delta DEF = \Delta PMN$. Заповніть таблицю 23.

Таблиця 23

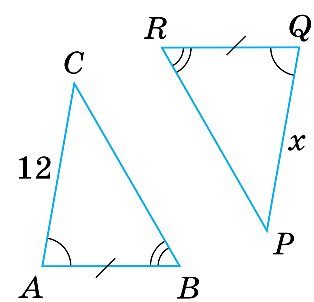
ΔABC	$AB = 7$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 41°$	$AC = 13$ см, $\angle A = 27° 48'$, $\angle C = 92°$
ΔDEF		
ΔPMN		

656°. Визначте невідомий елемент x трикутника (мал. 360).

657°. Визначте невідомий елемент x трикутника (мал. 361).



Мал. 360



Мал. 361

658°. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = OB$, $CO = OD$. Знайдіть:
1) відрізок BC, якщо $AD = 5$ см; 2) $\angle ABC$, якщо $\angle BAD = 65°$.

659°. У трикутників ABC і DEF $AB = EF$, $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$. Чи рівні ці трикутники? Який кут трикутника ABC дорівнює куту D?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

660°. Трикутники ABC і DPM — рівні. Знайдіть:
1) AB, якщо $DP = 6{,}2$ см;
2) $\angle D$, якщо $\angle A = 54°$;
3) $\angle B$, якщо $\angle P = 46°39'$;
4) PM, якщо $BC = 85$ мм.

qr.orioncentr.com.ua/GrFel

qr.orioncentr.com.ua/bL7bp

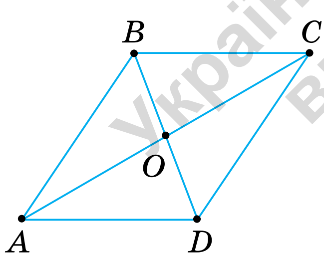
661°. Дано: $AO = OC$, $BO = OD$, $\angle OCB = \angle OAD$, $AB \parallel CD$ (мал. 362). Доведіть:
1) $\Delta COB = \Delta AOD$;
2) $\Delta AOB = \Delta COD$.

662°. Дано: AD — бісектриса кута CAB, $\angle ADB = \angle ADC$ (мал. 363). Доведіть: $\Delta ABD = \Delta ACD$.

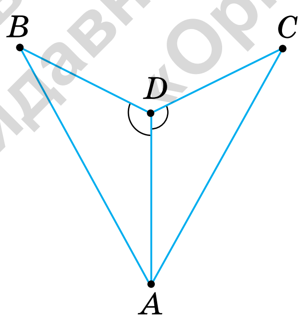
663°. На бісектрисі кута A позначено точку D, а на його сторонах — точки B і C так, що $\angle ADB = \angle ADC$. Доведіть, що $\Delta ABD = \Delta ACD$.

664. Відрізки AC і BD діляться точкою перетину O навпіл. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

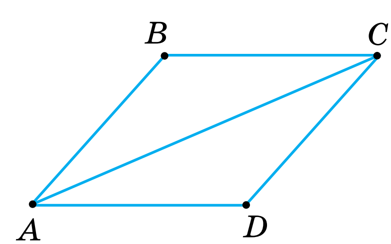
665. Дано: $BC = DA$, $\angle BCA = \angle DAC$ (мал. 364). Доведіть:
1) $\Delta ABC = \Delta CDA$; 2) $AB = CD$; 3) $AB \parallel CD$.



Мал. 362



Мал. 363



Мал. 364

666. На малюнку 364 $BC \parallel AD$, $BC = AD$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta CDA$.

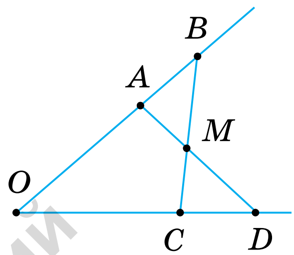
667. Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = OC$.
Доведіть: 1) $\Delta BOC = \Delta AOD$; 2) $\angle ABC = \angle ADC$.

668. На сторонах кута AOB відкладено рівні відрізки OM і ON. Довільну точку D бісектриси OC цього кута сполучено з точками M і N. Доведіть, що $DM = DN$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

669. Від вершини B рівнобедреного трикутника ABC з основою AC відкладено рівні відрізки: BD — на стороні BA, BE — на стороні BC.
Доведіть: 1) $AE = CD$; 2) $\angle AEC = \angle CDA$.

670. Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (мал. 365).
Доведіть:
1) $AD = BC$; 2) $\angle BCD = \angle DAB$.

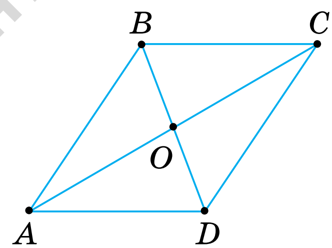


Мал. 365

671. **Доведіть, що рівнобедрені трикутники рівні, якщо бічна сторона і кут, протилежний основі, одного трикутника дорівнюють бічній стороні та куту, протилежному основі, іншого трикутника.**

672. **BD — бісектриса рівнобедреного трикутника ABC з основою AC. Доведіть, що BD є медіаною цього трикутника.**

673. Дано: $BO = OD$, $AB \parallel DC$ (мал. 366).
Доведіть: $\Delta AOB = \Delta COD$.



Мал. 366

674. На малюнку 366 $AO = OC$, $\angle OCD = \angle OAB$. Знайдіть:
1) AB, якщо $CD = 10$ см;
2) BD, якщо $OD = 3$ см.

675. На сторонах кута позначено дві точки, однаково віддалені від його вершини, і з кожної з них проведено перпендикуляр до іншої сторони. Доведіть, що перпендикуляри рівні. (Розгляньте гострий, прямий і тупий кути.)

676. Пряма, перпендикулярна до бісектриси кута A, перетинає сторони кута в точках B і C. Доведіть, що трикутник ABC — рівнобедрений.

677. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до бісектриси кута, відтинає на його сторонах рівні відрізки.

678. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AC і A_1C_1 позначено точки D і D_1 так, що $\angle CBD = \angle C_1B_1D_1$. Доведіть, що $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$.

679. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: AD і A_1D_1 — медіани, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. Доведіть:
1) $\Delta ACD = \Delta A_1C_1D_1$; 2) $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

680. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Бісектриси кутів B і C перетинаються в точці O, а бісектриси кутів B_1 і C_1 — у точці O_1. Доведіть, що $\Delta OBC = \Delta O_1B_1C_1$.

681*. Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (мал. 365). Доведіть, що $\Delta ABM = \Delta CDM$.

682*. Доведіть, що в рівних трикутників медіани, проведені до рівних сторін, — рівні.

683*. Медіану BD трикутника ABC продовжено за основу AC на відрізок $DE = BD$, і точку E сполучено з точкою A. Знайдіть кут BAE, якщо $\angle BAD = 56°$, $\angle BCD = 40°$.

684*. Доведіть рівність двох трикутників за стороною, медіаною, проведеною до неї, і кутом між медіаною й цією стороною.

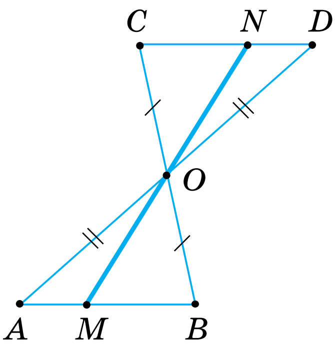
685*. Доведіть рівність двох трикутників:
1) за кутом, бісектрисою цього кута і кутом, який бісектриса утворює з протилежною стороною;
2) за двома кутами й бісектрисою третього кута;
3) за висотою й кутами, прилеглими до сторони, до якої (або до її продовження) проведено висоту.

686*. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = OB$, $\angle CBO = \angle DAO$. Доведіть, що $\Delta AOC = \Delta BOD$.

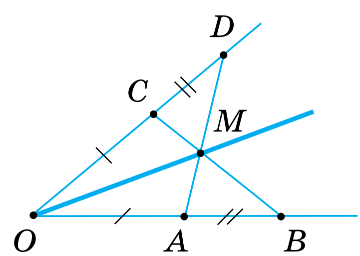
687*. На малюнку 367 $AO = OD$, $BO = OC$. Доведіть, що $MO = ON$.

688*. BD — висота трикутника ABC, $\angle ABD = \angle CBD$. Довільну точку M відрізка BD сполучено з точками A і C. Доведіть, що $AM = MC$.

689*. На малюнку 368 $OC = OA$, $CD = AB$. Відрізки AD і BC перетинаються в точці M. Доведіть, що OM — бісектриса кута O.



Мал. 367



Мал. 368

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

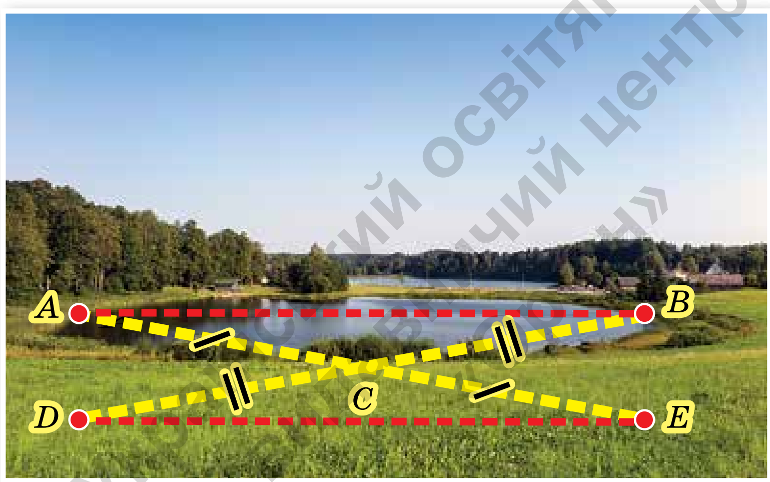
690*. Доведіть рівність трикутників за кутом, бісектрисою цього кута і стороною, прилеглою до нього.

Проявіть компетентність

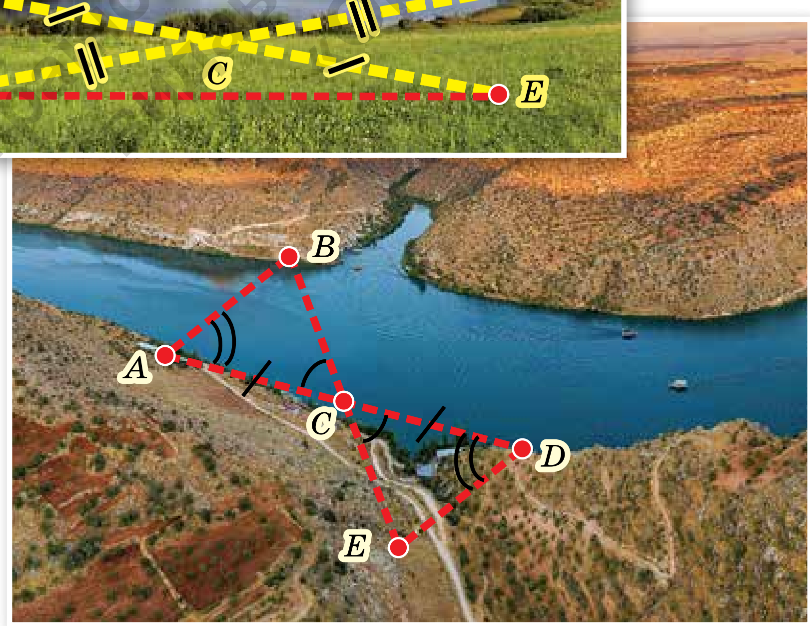
691. Накресліть довільний кут. Поділіть його на два рівні кути за допомогою лінійки з поділками. Поясніть, як поділити кут на два рівні кути на місцевості.

692. На малюнку 369 показано, як виміряти відстань між пунктами A і B, між якими не можна пройти по прямій. Поясніть вимірювання.

693. На малюнку 370 показано, як виміряти відстань між пунктами A і B, якщо до пункту B підійти не можна (наприклад, ширину річки). Поясніть вимірювання.



Мал. 369



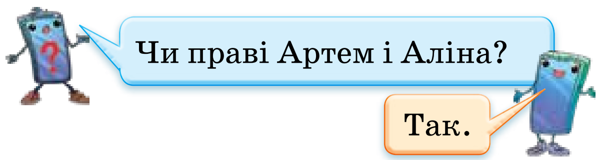
Мал. 370

§ 14. ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКА РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА

1. Властивості рівнобедреного трикутника

Ситуація. Артем і Аліна на фото будинку виявили рівнобедрений трикутник, а для підтвердження такого висновку пригадали його означення: **Рівнобедреним називається трикутник, у якого дві сторони рівні.**

qr.orioncentr.com.ua/yKIZU



Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю його сторону — *основою*.

Запам'ятайте!

Теорема (*властивості рівнобедреного трикутника*)

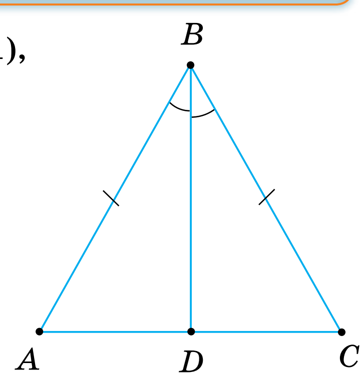
У рівнобедреному трикутнику:

1) бісектриса, проведена до основи, є медіаною і висотою;

2) кути при основі рівні.

Дано: ΔABC — рівнобедрений (мал. 371),
$AB = BC$,
BD — бісектриса.

Довести: 1) $AD = DC$,
$BD \perp AC$;
2) $\angle A = \angle C$.



Мал. 371

Доведення. Нехай ΔABC — рівнобедрений, у якому проведено бісектрису BD.

Розглянемо ΔABD і ΔCBD. У них: $AB = BC$ за умовою, BD — спільна сторона, $\angle ABD = \angle CBD$, бо BD — бісектриса ΔABC. Отже, $\Delta ABD = \Delta CBD$ за двома сторонами і кутом між ними.

З рівності трикутників ABD і CBD випливає:

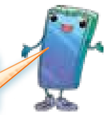
1) $AD = DC$, тобто BD — медіана трикутника ABC.

$\angle ADB = \angle CDB$. Оскільки ці кути суміжні й рівні, то вони прямі. Отже, $BD \perp AC$, тому BD — висота трикутника ABC.

2) $\angle A = \angle C$ як відповідні кути рівних трикутників ABD і CBD.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

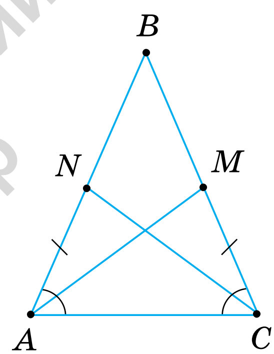
Чи правильно, що в рівнобедреному трикутнику бісектриса, медіана і висота, проведені до основи, збігаються?



Так.

У рівнобедреному трикутнику:
- **бісектриса кута проти основи, є медіаною і висотою;**
- **висота, проведена до основи, є медіаною і бісектрисою;**
- **медіана, проведена до основи, є висотою і бісектрисою.**

Задача 1 Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, — рівні.



Мал. 372

Розв'язання Нехай у трикутнику ABC $AB = BC$, AM і CN — медіани, проведені до цих сторін (мал. 372). У трикутниках ACM і CAN сторона AC — спільна, $AN = CM$, бо N і M — середини рівних сторін, $\angle A = \angle C$ за властивістю рівнобедреного трикутника. Отже, $\Delta ACM = \Delta CAN$ за двома сторонами й кутом між ними. З рівності трикутників ACM і CAN випливає, що $AM = CN$.

Розв'яжіть задачу іншим способом, розглянувши трикутники ABM і CBN.

2. Ознака рівнобедреного трикутника

Як установити, що трикутник є рівнобедреним?

Або за означенням, або за ознакою.

Запам'ятайте!

Теорема (*ознака рівнобедреного трикутника*)

Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

Дано: ΔABC (мал. 373), $\angle A = \angle C$.
Довести: $AB = BC$.

qr.orioncentr.com.ua/4rV0O

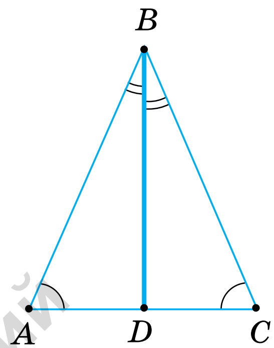
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Доведення. У трикутнику ABC проведемо бісектрису BD (мал. 373). Тоді $\angle ABD = \angle CBD$.

Розглянемо ΔABD і ΔCBD. У них BD — спільна сторона. Оскільки $\angle A = \angle C$ за умовою, $\angle ABD = \angle CBD$ за побудовою, то рівні й треті кути: $\angle ADB = \angle CDB$.

Отже, $\Delta ABD = \Delta CBD$ за стороною і прилеглими до неї кутами.

З рівності цих трикутників випливає, що $AB = BC$.

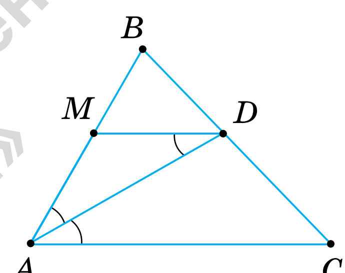


Мал. 373

***Наслідок.* У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути і, навпаки, проти рівних кутів — рівні сторони.**

Твердження випливає з доведених властивості й ознаки рівнобедреного трикутника.

Задача 2 AD — бісектриса трикутника ABC, $DM \parallel AC$ (мал. 374). Доведіть, що ΔADM — рівнобедрений.



Мал. 374

Розв'язання $\angle ADM = \angle DAC$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AC і DM та січній AD, $\angle DAC = \angle DAM$, бо AD — бісектриса. Отже, $\angle ADM = \angle DAM$. За ознакою рівнобедреного трикутника ΔADM — рівнобедрений.

Дізнайтеся більше

1. Якщо правильні пряма теорема й обернена до неї теорема, то для стислості обидві формулюють у вигляді одного твердження. При цьому умову і вимогу поєднують словами «тоді і тільки тоді». Наприклад, доведену ознаку рівнобедреного трикутника і одну з доведених його властивостей разом можна сформулювати так: «Трикутник рівнобедрений тоді і тільки тоді, коли два його кути рівні».

2. У XX ст. більше уваги стали приділяти наочності й доступності в навчанні геометрії школярів. Одним із головних провідників цієї ідеї був український освітянин, професор **Астряб Олександр Матвійович** (1879–1962), який народився в м. Лубни на Полтавщині. Його підручник «Наочна геометрія», задачник до цього підручника, «Курс дослідної геометрії» та інші праці — яскраве тому підтвердження. Загалом є автором понад 100 наукових праць.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
рівнобедре-ний трикутник	isosceles triangle	gleich-schenkliges Dreieck	triangle isocèle

qr.orioncentr.com.ua/Fa9dN

Пригадайте головне

1. Сформулюйте і доведіть властивості рівнобедреного трикутника.
2. Сформулюйте і доведіть ознаку рівнобедреного трикутника.
3. Як обґрунтувати, що в трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути і, навпаки, проти рівних кутів — рівні сторони?

Усне тренування

Обчисліть:

1) $5,86 + 4,14$; $\quad 0,79 + 9,21$; $\quad 8,62 + 1,38$;

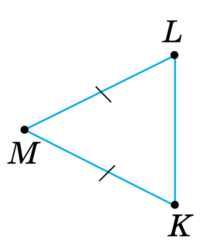
2) $3,56 + 6,44$; $\quad 4,25 + 5,75$; $\quad 1,13 + 8,87$.

Розв'яжіть задачі

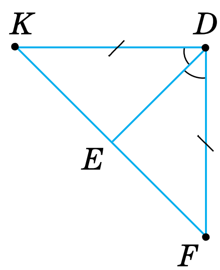
694'. На малюнку 375 зображено рівнобедрений трикутник. Назвіть його основу та бічні сторони. Які кути в цьому трикутнику рівні?

695'. У рівнобедреному трикутнику (мал. 376) проведено бісектрису до основи. Назвіть рівні відрізки та рівні кути на цьому малюнку.

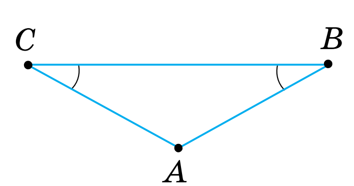
696'. Чи є рівнобедреним трикутник ABC на малюнку 377? Назвіть його основу та бічні сторони.



Мал. 375



Мал. 376

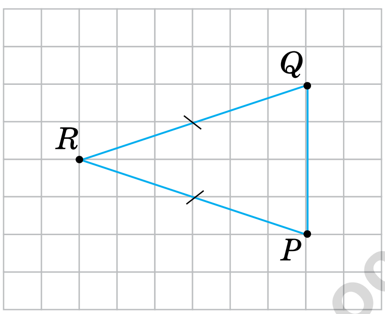


Мал. 377

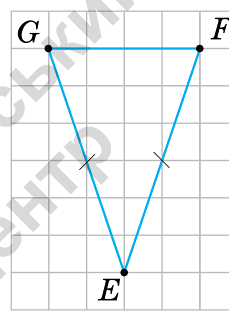
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

697°. Побудуйте за клітинками рівнобедрений трикутник, що дорівнює трикутнику, зображеному на малюнку 378. Як за клітинками провести бісектрису до основи цього трикутника? А медіану? А висоту?
Виконайте відповідні побудови.

698°. Побудуйте за клітинками рівнобедрений трикутник, що дорівнює трикутнику, зображеному на малюнку 379. Як за клітинками провести бісектрису до основи цього трикутника? А медіану? А висоту?
Виконайте відповідні побудови.



Мал. 378



Мал. 379

699°. У рівнобедреному трикутнику KLM проведено бісектрису MN до основи KL. Знайдіть довжину відрізків KN і NL, якщо KL дорівнює: 1) 6 см; 2) 7 см; 3) 8 см.

qr.orioncentr.com.ua/2jpGO

700°. У трикутнику ABC ($AC = BC$) проведено бісектрису CO. Чому дорівнює AB, якщо:
1) $AO = 0,7$ дм; 2) $BO = 25$ мм?

701°. У трикутнику DEF відрізок сполучає вершину F із точкою A на протилежній стороні, причому $\angle DFA = \angle EFA$. Чи є відрізок FA медіаною трикутника DEF, якщо:
1) $DF = DE \neq FE$;
2) $EF = ED \neq DF$;
3) $FD = FE \neq DE$?

702°. Пряма a проходить через вершину, протилежну основі рівнобедреного трикутника MON, і ділить кут при цій вершині навпіл. До якої прямої перпендикулярна пряма a, що проходить через вершину: 1) M; 2) O; 3) N?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

703°. У рівнобедреному трикутнику ABC проведено бісектрису до основи. Назвіть прямі кути, які при цьому утворилися, якщо основою трикутника є сторона:
1) AB; 3) AC.
2) BC;

704°. У рівнобедреному трикутнику ABC проведено висоту до його основи. Точка H — кінець висоти, який лежить на основі трикутника. Зробіть малюнок і запишіть рівні відрізки та рівні кути, якщо основою трикутника є сторона:
1) AB; 3) AC.
2) BC;

705°. У рівнобедреному трикутнику DEF проведено медіану до його основи. Точка M — кінець медіани, який лежить на основі трикутника. Зробіть малюнок і запишіть рівні відрізки та рівні кути, якщо основою трикутника є сторона:
1) DE; 3) DF.
2) EF;

706°. Знайдіть кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює:
1) 40°; 2) 65°; 3) 80°.

707°. Знайдіть кути при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут між бічними сторонами дорівнює:
1) 72°; 2) 90°; 3) 120°.

708°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює:
1) 20°; 2) 40°; 3) 80°.
Скільки розв'язків має задача?

709°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює:
1) 90°; 2) 120°; 3) 140°.

710°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює:
1) 80°; 2) 100°.

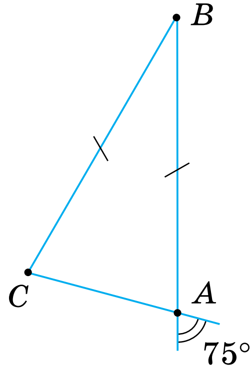
711°. **Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.**

712°. **Знайдіть кути: 1) прямокутного рівнобедреного трикутника; 2) рівносторонього трикутника.**

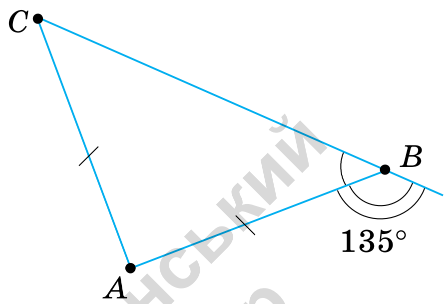
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

713°. За даними, наведеними на малюнку 380, визначте кути рівнобедреного трикутника ABC.

714°. За даними, наведеними на малюнку 381, визначте кути рівнобедреного трикутника ABC.



Мал. 380



Мал. 381

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

715°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо:
1) зовнішній кут, прилеглий до кута при основі, дорівнює $110°$;
2) зовнішній кут, прилеглий до кута при вершині, дорівнює $60°$.

716°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо зовнішній кут, прилеглий до кута при основі, дорівнює $108°$.

717°. Чи може кут при основі рівнобедреного трикутника бути: прямим; гострим; тупим?

718°. Чи може зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника бути: прямим; гострим; тупим?

719°. Чи є рівнобедреним трикутник ABC, якщо:
1) $\angle A = 70°$, $\angle B = 80°$;
2) $\angle B = 36°$, $\angle C = 36°$;
3) $\angle A = 45°$, $\angle C = 45°$?
Відповідь обґрунтуйте.

720°. Чи є рівнобедреним трикутник KLM, якщо $\angle K = 30°$, $\angle M = 30°$? Відповідь обґрунтуйте.

721°. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений, якщо:
1) $\angle A = 90°$, $\angle B = 45°$;
2) $\angle B = 36°$, $\angle C = 72°$;
3) $\angle A = 80°$, $\angle C = 50°$.

qr.orioncentr.com.ua/5X746

722°. Доведіть, що трикутник KLM рівнобедрений, якщо $\angle K = 40°$, $\angle L = 70°$.

723°. Чи є рівні сторони в трикутнику ABC, у якого:
1) $\angle A = 55°$, $\angle B = 70°$;
2) $\angle B = 108°$, $\angle C = 36°$;
3) $\angle A = 15°$, $\angle C = 135°$?
Накресліть цей трикутник і позначте на малюнку його рівні елементи, якщо вони є, та зробіть відповідний запис.

724°. Чи є рівні сторони в трикутнику KLM, у якого $\angle K = 90°$, $\angle M = 45°$?
Накресліть цей трикутник і позначте на малюнку його рівні елементи, якщо вони є, та зробіть відповідний запис.

725°. **Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений, якщо в нього:**
1) медіана BD є висотою;
2) висота BD є бісектрисою;
3) бісектриса BD є медіаною.

726°. **Якщо один із кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60°, то трикутник рівносторонній.** Доведіть.

727. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси кутів при основі — рівні.

728. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до бічних сторін, — рівні.

729. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при його вершині:
1) утричі більший за кут при основі;
2) удвічі менший від кута при основі.

730. Кут при основі рівнобедреного трикутника на $n°$ більший за кут при вершині. Знайдіть кути трикутника, якщо:
1) $n° = 30°$;
2) $n° = 60°$.

731. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо:
1) один із них на 15° більший за інший;
2) один із них удвічі більший за інший.
Розгляньте два випадки.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

732. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо:
1) його зовнішній кут дорівнює $110°$;
2) його зовнішній кут у три рази більший за суміжний з ним кут.
Скільки розв'язків має задача?

733. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює α. Знайдіть кут між основою та висотою, проведеною до бічної сторони, якщо: 1) $\alpha = 40°$; 2) $\alpha = 50°$; 3) $\alpha = 120°$.

734. У рівнобедреному трикутнику кут між основою та висотою, проведеною до бічної сторони, дорівнює β. Знайдіть кути трикутника, якщо:
1) $\beta = 25°$;
2) $\beta = 30°$;
3) $\beta = 60°$.

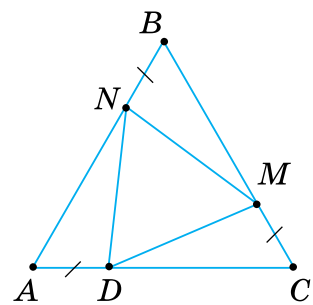
735. **Доведіть, що зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника вдвічі більший за кут при його основі.**

736. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC з основою AC. Проведіть висоту BD і позначте на ній довільну точку O. Доведіть, що $AO = CO$.

737. Доведіть, що коли в трикутнику ABC медіана BD дорівнює половині сторони AC, то кут B дорівнює сумі кутів A і C.

738. Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами також рівнобедреного трикутника.

739. На сторонах рівностороннього трикутника ABC відкладено рівні відрізки AD, CM, BN (мал. 382). Точки D, M і N сполучено. Доведіть, що ΔDMN — рівносторонній.



Мал. 382

740. Пряма, проведена через вершину кута C трикутника ABC паралельно стороні AB, утворює зі стороною BC кут, що дорівнює куту C. Доведіть, що ΔABC — рівнобедрений.

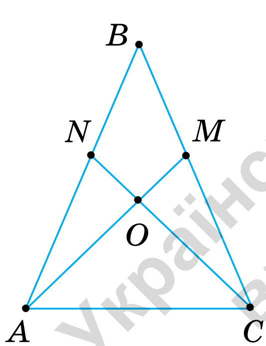
741. Доведіть, що пряма, яка перетинає рівнобедрений трикутник і паралельна одній з його сторін, відтинає від нього рівнобедрений трикутник.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

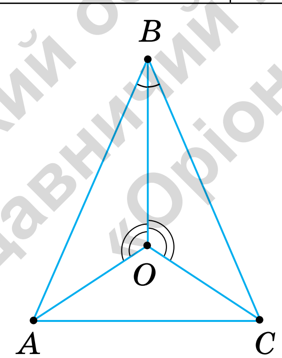
742. Доведіть твердження, наведені в таблиці 24.

Таблиця 24

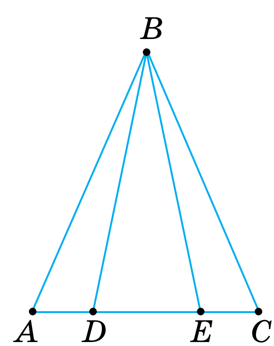
Відомо, що у ΔABC:			Доведіть:
1	Мал. 383	$AB = BC$, $BN = BM$	1) $AM = CN$; 2) $\Delta AON = \Delta COM$
2	Мал. 383	$AM = CN$, $\angle ACO = \angle CAO$	1) ΔAOC — рівнобедрений; 2) ΔABC — рівнобедрений
3	Мал. 384	$\angle ABO = \angle CBO$, $\angle AOB = \angle COB$	1) ΔAOC — рівнобедрений; 2) $\angle CAO = \angle ACO$
4	Мал. 385	$AB = BC$, $AD = CE$	$\angle ABD = \angle CBE$
5	Мал. 385	$AB = BC$, $\angle ABD = \angle CBE$	$\angle BDE = \angle BED$
6	Мал. 385	$AB = BC$, $\angle ABE = \angle CBD$	$AD = CE$



Мал. 383



Мал. 384



Мал. 385

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

743. Два зовнішні кути трикутника при різних його вершинах рівні. Який вид трикутника? Відповідь поясніть.

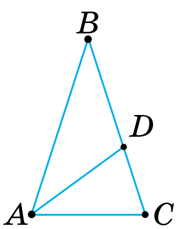
744*. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, удвічі менша від основи. Знайдіть кути трикутника.

745*. **Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.**

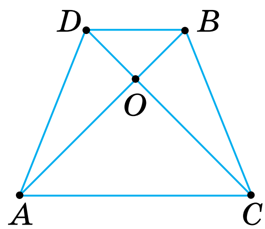
746*. У рівнобедреному трикутнику з кутом 36° при його вершині проведено бісектрису кута при основі. Скільки нових рівнобедрених трикутників утворилося? Які кути вони мають?

747*. У трикутнику ABC $AB = BC$, $\angle BAC = 2\angle ABC$, AD — бісектриса (мал. 386). Доведіть, що $BD = AC$.

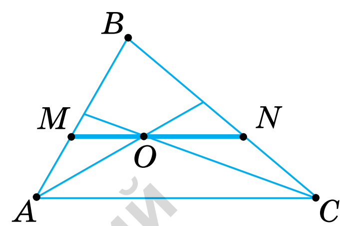
748*. На малюнку 387 $AB = CD$, ΔAOC — рівнобедрений. Доведіть, що $\Delta ABD = \Delta CDB$.



Мал. 386



Мал. 387



Мал. 388

749*. У трикутнику ABC проведено бісектрису BD. З вершини C проведено пряму паралельно BD до перетину з продовженням сторони AB в точці E. Який вид трикутника BCE?

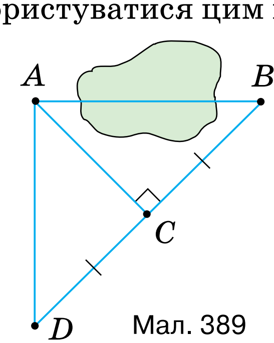
750*. Через точку O перетину бісектрис кутів A і C трикутника ABC проведено пряму MN, паралельну стороні AC (мал. 388). Доведіть, що $MN = AM + CN$.

751*. **Доведіть, що проти більшого кута трикутника лежить більша сторона, а проти більшої сторони — більший кут.**

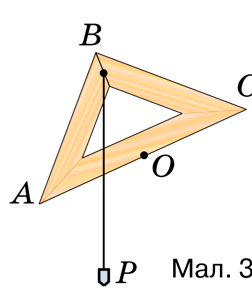
Проявіть компетентність

752. Щоб виміряти на місцевості відстань між пунктами A і B, між якими не можна пройти, виконали таку побудову: $AC \perp BD$, $CD = BC$ (мал. 389). Тоді шукана відстань AB дорівнює AD. Чому?

753. На малюнку 390 зображено найпростіший прилад для проведення горизонтальних ліній. У трикутнику ABC $AB = BC$, O — середина сторони AC, BP — висок. Як користуватися цим приладом? Поясніть.



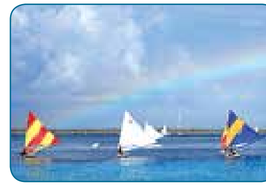
Мал. 389



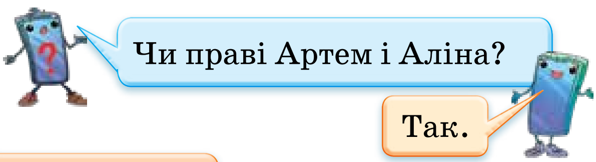
Мал. 390

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 15. ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ



Ситуація. Максим і Наталка, пригадавши дві ознаки рівності трикутників, дійшли висновку, що в обох ознаках використовуються три пари відповідних елементів даних трикутників: дві сторони і кут між ними (перша ознака); сторона і два прилеглі кути (друга ознака). Вони припустили, що можуть бути й інші ознаки рівності трикутників.



qr.orioncentr.com.ua/d7l5X

Запам'ятайте!

Теорема (*ознака рівності трикутників за трьома сторонами*)

Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

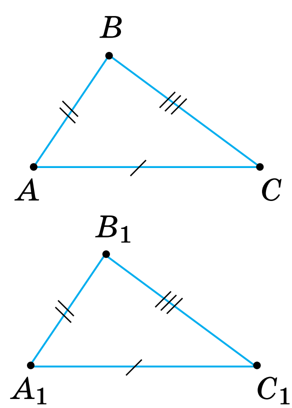
Дано: ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ (мал. 391),

$AB = A_1B_1$,

$AC = A_1C_1$,

$BC = B_1C_1$.

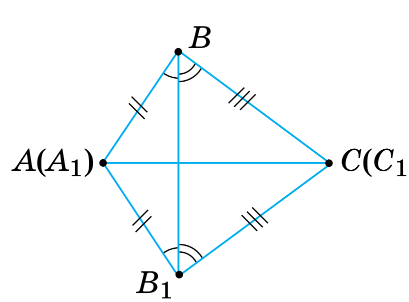
Довести: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.



Мал. 391

Доведення (мал. 392). Прикладемо $\Delta A_1B_1C_1$ до ΔABC так, щоб їх рівні сторони AC і A_1C_1 сумістилися, причому вершина A_1 сумістилася з вершиною A, вершина C_1 — з C, а вершини B і B_1 лежали з різних боків від прямої AC.

Проведемо відрізок BB_1. Утворилися трикутники ABB_1 і CBB_1. Вони рівнобедрені, оскільки, за умовою теореми, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Тоді в цих трикутників кути при основах рівні: $\angle ABB_1 = \angle AB_1B$, $\angle CBB_1 = \angle CB_1B$. Суми рівних кутів також рівні, тому $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.



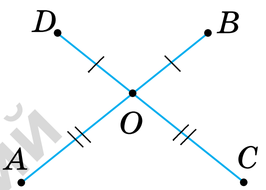
Мал. 392

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Ми довели, що у ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ між рівними сторонами ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$) лежать рівні кути ($\angle ABC$ і $\angle A_1B_1C_1$). Отже, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ за двома сторонами і кутом між ними.

Доведіть теорему самостійно для випадків, коли трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ — прямокутні; тупокутні.

Задача Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $DO = OB$ (мал. 393). Доведіть, що $\Delta ADC = \Delta CBA$.



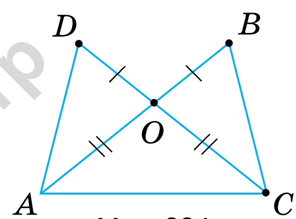
Мал. 393

Розв'язання Щоб утворити на малюнку потрібні трикутники, проведемо відрізки AD, BC і AC (мал. 394). Розглянемо трикутники AOD і COB. У них:

$DO = OB$ за умовою,

$AO = OC$ як різниці рівних відрізків,

$\angle AOD = \angle COB$ як вертикальні.



Мал. 394

З рівності трикутників AOD і COB випливає, що $AD = CB$. Тоді $\Delta ADC = \Delta CBA$ за трьома сторонами. У них:

AC — спільна сторона,

$AB = CD$ за умовою,

$AD = CB$ за доведеним.

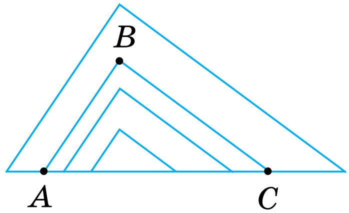
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Розв'язуючи задачі, пам'ятайте:
- **якщо на малюнку немає потрібної пари трикутників, то проведіть допоміжні відрізки, щоб її утворити;**
- **інколи потрібно довести рівність кількох пар трикутників.**

Чи існує ознака рівності трикутників за трьома кутами?

Ні.

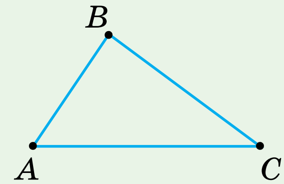
За трьома кутами можна побудувати безліч трикутників, не рівних даному (мал. 395). Тому три кути не визначають трикутник.



Мал. 395

Дізнайтеся більше

1. Ви з'ясували, які елементи трикутника треба знати, щоб стверджувати: усі трикутники з відповідно рівними даними елементами рівні між собою. Про такі елементи говорять, що вони *визначають трикутник*. Ви знаєте три трійки елементів трикутника, які його визначають (мал. 396):



Мал. 396

AB, AC, $\angle A$ (перша ознака рівності),

AC, $\angle A$, $\angle C$ (друга ознака рівності),

AB, AC, BC (третя ознака рівності).

Із другої ознаки рівності трикутників випливає ознака їх рівності за такими елементами: AC, $\angle A$, $\angle B$. Спробуйте її довести самостійно.

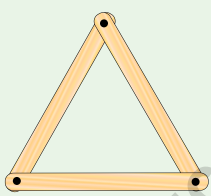
Трійку елементів AC, AB, $\angle B$ розглянемо пізніше.

Отже, **трикутник визначають три його елементи, серед яких має бути принаймні одна з його сторін.**

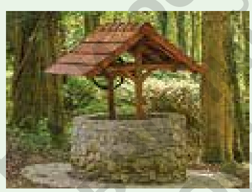
2. Візьмемо три дерев'яні планки і закріпимо їх кінці шпильками або цвяшками так, щоб утворився трикутник (мал. 397). Його форму змінити не можна.

Трикутник — фігура жорстка. Це випливає з ознаки рівності трикутників за трьома сторонами.

Жорсткість трикутника часто застосовують на практиці (мал. 398–400).



Мал. 397



Мал. 398

Мал. 399

Мал. 400

Український освітній видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
жорстка фігура	rigid figure	starre Figur	figure rigide

qr.orioncentr.com.ua/oVcUE

Пригадайте головне

1. Сформулюйте і доведіть ознаку рівності трикутників за трьома сторонами.
2. Поясніть, чому не існує ознаки рівності трикутників за трьома кутами.

Усне тренування

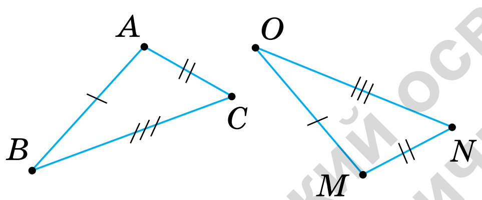
Обчисліть:

$2{,}82 + 7{,}18$; $1{,}63 + 8{,}37$; $5{,}74 + 4{,}26$.

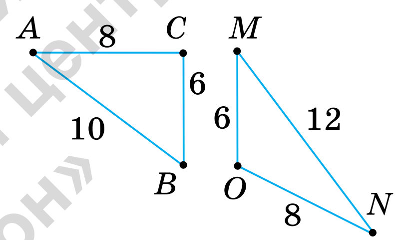
Розв'яжіть задачі

754'. За даними на малюнку 401 назвіть відповідно рівні елементи трикутників. Чи рівні ці трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.

755'. На малюнку 402 задано елементи трикутників ABC і MON. Чи рівні ці трикутники?



Мал. 401



Мал. 402

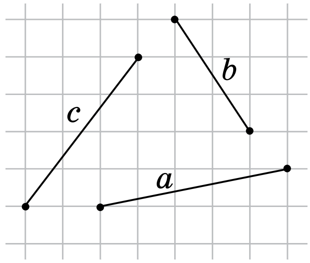
756°. Дані відрізки a, b, c (мал. 403) розмістіть у зошиті так, щоб утворився трикутник ABC. Побудуйте за клітинками трикутник DBC, що дорівнює трикутнику ABC.

757°. Знайдіть рівні трикутники на малюнках 404–406. Відповідь поясніть.

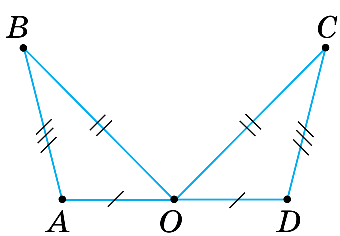
758°. Знайдіть на малюнках 407, 408 рівні трикутники. Поясніть, чому вони рівні.

759°. Доведіть, що рівні трикутники мають рівні периметри.

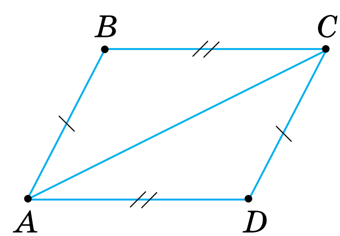
Український освітянський видавничий центр «Оріон»



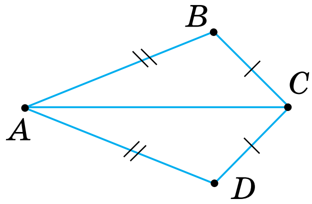
Мал. 403



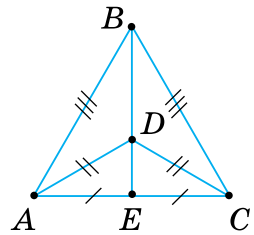
Мал. 404



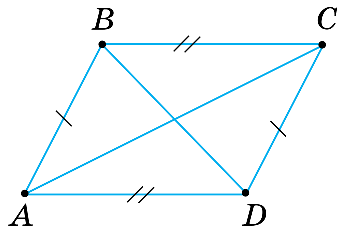
Мал. 405



Мал. 406



Мал. 407



Мал. 408

760°. У трикутнику ABC: $AB = 10$ см, $BC = 9$ см, $AC = 7$ см; у трикутнику DEF: $DE = 7$ см, $EF = 10$ см, $DF = 9$ см. Назвіть рівні кути цих трикутників.

qr.orioncentr.com.ua/EGSue

761°. $\Delta ABC = \Delta KPM = \Delta DEF$. Заповніть таблицю 25.

Таблиця 25

ΔABC	$AB = 7$ см, $AC = 12$ см, $BC = 15$ см		
ΔKPM		$MK = 8$ см, $KP = 3$ см, $PM = 6$ см	
ΔDEF			$EF = 15$ см, $DF = 18$ см, $DE = 15$ см

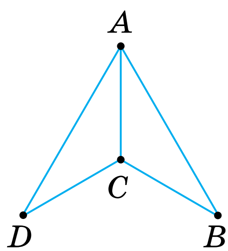
762°. Доведіть, що коли сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні іншого рівностороннього трикутника, то такі трикутники рівні.

763. На малюнку 409 $AD = AB$, $DC = CB$. Доведіть, що AC — бісектриса кута BAD.

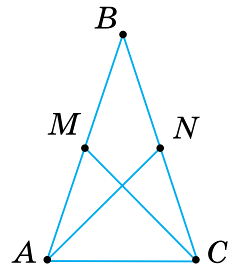
764. На малюнку 410 $AN = CM$, $AM = CN$. Доведіть, що $AB = CB$.

765. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC (мал. 411) мають спільну основу AC. Пряма BD перетинає відрізок AC в точці O. Доведіть:
1) $\angle BAD = \angle BCD$; 2) $AO = CO$.

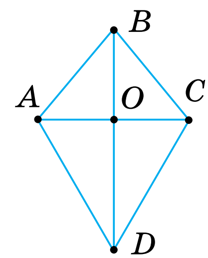
Український освітянський видавничий центр «Оріон»



Мал. 409

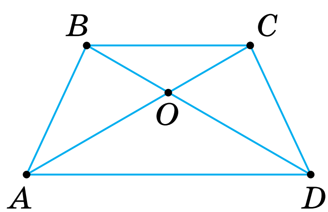


Мал. 410

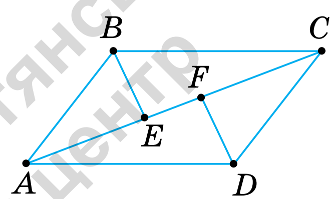


Мал. 411

766. На малюнку 412: $AB = CD$, $AC = BD$.
1. Знайдіть кут ABD, якщо $\angle ACD = 85°$.
2. Доведіть, що $AO = DO$.



Мал. 412



Мал. 413

767. На малюнку 413: $AB = CD$, $AD = BC$, BE і DF — бісектриси кутів B і D.
1. Знайдіть кут BAC, якщо $\angle DCA = 35°$.
2. Знайдіть AE, якщо $CF = 3$ см.
3. Доведіть, що $\Delta BCE = \Delta DAF$.

768. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: AD і A_1D_1 — бісектриси, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ і $AD = A_1D_1$. Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

769*. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з них.

Якщо в умові задачі дано медіану, то іноді доцільно продовжити медіану на відрізок, що дорівнює їй, сполучити його кінець із кінцем сторони трикутника, до якого проведено медіану, та розглянути утворені трикутники.

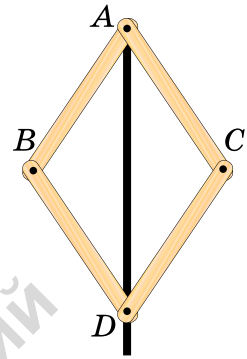
770*. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами та медіаною, проведеною до третьої сторони.

771*. Доведіть, що медіана трикутника ABC, проведена з вершини A, менша за півсуму сторін AB і AC.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Проявіть компетентність

772. На малюнку 414 зображено найпростіший шарнірний прилад для поділу кута навпіл. У ньому всі ланки мають однакову довжину: $AB = BD = DC = AC$. Як користуватися цим приладом? Поясніть.

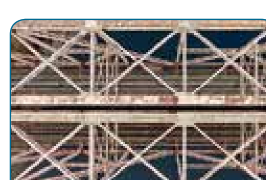


Мал. 414

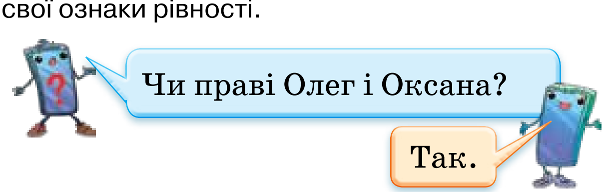
773. На малюнку 415 зображено садову хвіртку, яку скоро перекосить. Як прибити планку (дошку), щоб надати міцності хвіртці? Поясніть.


Мал. 415

§ 16. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ



Ситуація. Олег і Оксана пригадали, що в прямокутних трикутниках один кут прямий, а прямі кути рівні. Діти зробили висновок: для прямокутних трикутників можна сформулювати свої ознаки рівності.



qr.orioncentr.com.ua/Q8YX3

Три ознаки рівності прямокутних трикутників випливають із першої і другої ознак рівності трикутників.

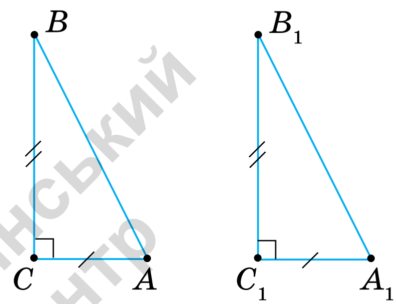
Запам'ятайте!

Ознаки рівності прямокутних трикутників

1. *За двома катетами:*

Якщо катети одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катетам іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (мал. 416).

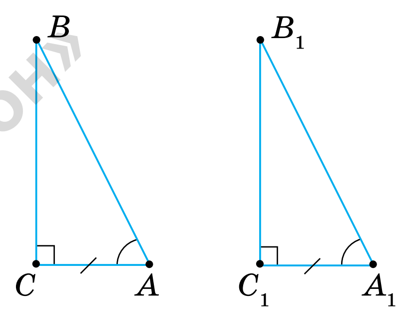
Справді, кути між катетами рівні як прямі кути, тому такі трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників.



Мал. 416

2. *За катетом і гострим кутом:*

Якщо катет і гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (мал. 417).

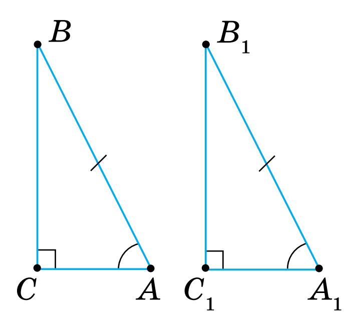


Мал. 417

Справді, такі трикутники рівні за другою ознакою рівності трикутників. Якщо ж у двох прямокутних трикутників рівні гострі кути лежать проти даних катетів, то інші їх гострі кути також рівні між собою.

3. *За гіпотенузою і гострим кутом:*

Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й гострому куту іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (мал. 418).



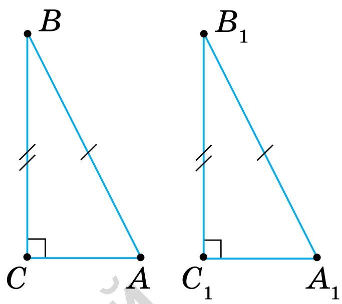
Мал. 418

Справді, якщо два прямокутні трикутники мають по рівному гострому куту, то рівні між собою й інші їх гострі кути. Тому прямокутні трикутники рівні за другою ознакою рівності.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

4. *За гіпотенузою і катетом:*

Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й катету іншого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні (мал. 419).

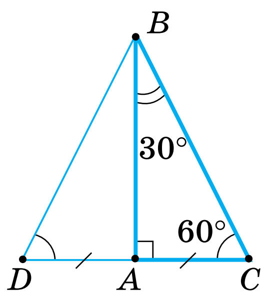


Мал. 419

Твердження можна довести, приклавши ΔABC до $\Delta A_1B_1C_1$ так, щоб катети CB і C_1B_1 сумістилися, а вершини A і A_1 лежали з різних боків від прямої BC. Проведіть доведення самостійно.

Задача **Доведіть, що катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.**

Розв'язання Нехай у трикутнику ABC $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$ і, отже, $\angle C = 60°$ (мал. 420). Доведемо, що $AC = \frac{1}{2}BC$.



Мал. 420

На продовженні катета AC відкладемо відрізок $AD = AC$ і сполучимо точки B і D. $\Delta ABC = \Delta ABD$ за двома катетами ($AC = AD$ за побудовою, AB — спільний катет). З рівності трикутників випливає:

$\angle C = \angle D = \angle CBD = 60°$.

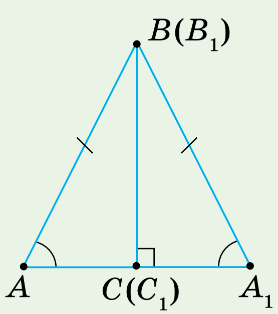
Тобто ΔBCD — рівносторонній. Оскільки $AC = \frac{1}{2}CD$, а $CD = BC$, то $AC = \frac{1}{2}BC$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Дізнайтеся більше

1. *Як довести ознаку рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом?* Поміркуємо.

Прикладемо ΔABC до $\Delta A_1B_1C_1$ так, щоб вершина C сумістилась з C_1, вершина B — з B_1, а вершини A і A_1 лежали з різних боків від прямої BC (мал. 421).



Мал. 421

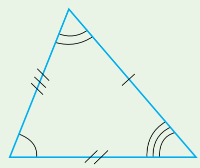
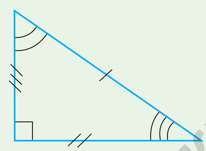
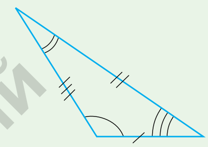
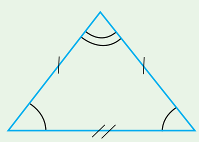
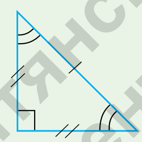
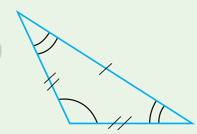
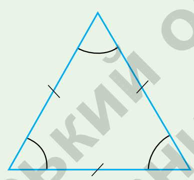
Оскільки $\angle C = \angle C_1 = 90°$, то сторони AC і A_1C_1 лежатимуть на одній прямій. Утворився трикутник ABA_1. Він рівнобедрений, оскільки за умовою $AB = A_1B_1$. За властивістю рівнобедреного трикутника $\angle A = \angle A_1$.

Повернемося до трикутників ABC і $A_1B_1C_1$. У них: $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$. Отже, $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ за гіпотенузою та гострим кутом.

2. Розгляньте таблицю 26 класифікації трикутників.

Подивіться на горизонтальні рядки таблиці. У першому рядку є всі види різносторонніх трикутників: гострокутні, прямокутні, тупокутні; у другому — рівнобедрених (також трьох видів стосовно кутів). Із третього рядка видно, що рівносторонніми можуть бути лише гострокутні трикутники.

Таблиця 26

ТРИКУТНИКИ	Гострокутні	Прямокутні	Тупокутні
Різносторонні			
Рівнобедрені			
Рівносторонні			

Розглядаючи стовпці таблиці, бачимо, що гострокутні трикутники можуть бути трьох видів стосовно сторін: різносторонні, рівнобедрені й рівносторонні, а прямокутні й тупокутні трикутники — лише двох видів: різносторонні та рівнобедрені.

У рівнобедреному прямокутному трикутнику кожний гострий кут дорівнює 45°. Такі два рівні трикутники отримаємо, якщо сполучимо відрізком протилежні вершини квадрата або в рівнобедреному прямокутному трикутнику проведемо висоту до гіпотенузи.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
прямокутний трикутник	right triangle	rechtwinkliges Dreieck	triangle rectangle

qr.orioncentr.com.ua/4juZB

Пригадайте головне

1. Сформулюйте ознаку рівності прямокутних трикутників:
1) за двома катетами;
2) за катетом і гострим кутом;
3) за гіпотенузою і гострим кутом;
4) за гіпотенузою і катетом.

2. Доведіть, що катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Усне тренування

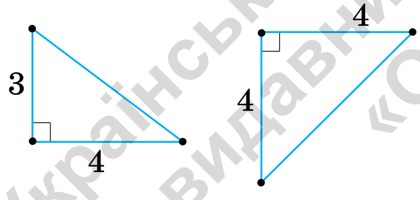
Чи існує прямокутний трикутник, у якого гострі кути дорівнюють:

1) 20°, 80°;	55°, 35°;	18°, 72°;
2) 60°, 30°;	15°, 65°;	51°, 39°?

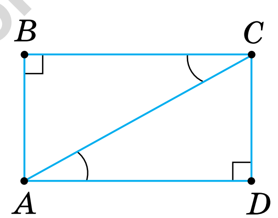
Розв’яжіть задачі

774'. На малюнку 422 задано елементи двох трикутників. Чи рівні ці трикутники?

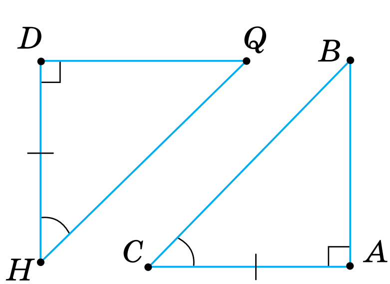
775'. За даними, зображеними на малюнках 423–425, назвіть рівні елементи трикутників. Чи рівні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.



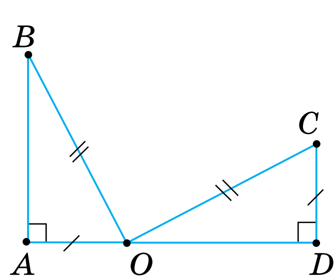
Мал. 422



Мал. 423



Мал. 424



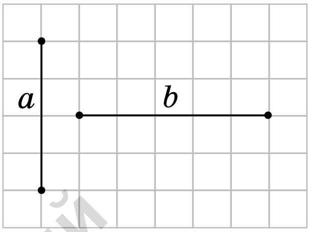
Мал. 425

776°. Побудуйте за клітинками прямокутний трикутник ABC так, щоб:
1) його катет лежав на горизонтальній прямій;

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

2) його гіпотенуза лежала на горизонтальній прямій;
3) його гіпотенуза лежала на вертикальній прямій;
4) вершина його прямого кута лежала у вузлі сітки.

777°. Даний відрізок a (мал. 426) розмістіть у зошиті на горизонтальній прямій, а відрізок b — так, щоб утворився прямокутний трикутник ABC із катетами a і b.
Побудуйте за клітинками трикутник DOC, що дорівнює трикутнику ABC.



Мал. 426

778°. Накресліть два рівні прямокутні трикутники. Дайте назви цим трикутникам, якщо:
1) $\angle A = \angle E = 90°$, $AB = DE$, $AC = EF$;
2) $\angle C = \angle F = 90°$, $\angle A = \angle D$, $AC = DF$;
3) $\angle B = \angle E = 90°$, $\angle C = \angle F$, $AC = DF$;
4) $\angle C = \angle D = 90°$, $AC = DF$, $AB = EF$.
Запишіть відповідно рівні елементи цих трикутників.

779°. Накресліть два рівні прямокутні трикутники. Дайте назви цим трикутникам, якщо:
1) $\angle D = \angle A = 90°$, $DE = AB$, $DF = AC$;
2) $\angle D = \angle C = 90°$, $\angle F = \angle A$, $DF = AC$;
3) $\angle F = \angle B = 90°$, $\angle E = \angle C$, $DE = AC$;
4) $\angle F = \angle C = 90°$, $DF = AC$, $DE = AB$.
Запишіть відповідно рівні елементи цих трикутників.

780°. Точки A і B розміщені на однаковій відстані від прямої CD по різні боки від неї, причому $AC \perp CD$ і $BD \perp CD$. Знайдіть довжину відрізка AD, якщо відстань між точками B і C дорівнює:
1) 5 см;
2) 0,15 дм;
3) 100 мм.

qr.orioncentr.com.ua/Qpq8l

781°. Два рівні перпендикуляри AB і CD проведено до прямої BD з одного боку від неї. Знайдіть відстань між точками A і D, якщо довжина відрізка BC дорівнює:
1) 2,5 см; 2) 50 мм; 3) 0,4 дм.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

782°. Відрізки AB, KO і BO розміщені так, що $AB \perp BO$, $OK \perp BO$ і $AB = KO$. Відрізок AK перетинає BO в точці P. Знайдіть відстань від точки P до прямої OK, якщо відрізок BP дорівнює: 1) 12 мм; 2) 2,25 см; 3) 10 дм.

783°. Паралельні прямі a і b перетинає перпендикулярна до них пряма c відповідно в точках A і B. Через середину O відрізка AB проведено пряму d, яка перетинає прямі a і b відповідно в точках M і N. Знайдіть OM, якщо відрізок ON дорівнює: 1) 9,12 см; 2) 0,112 дм; 3) 39 мм.

784°. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до бічних сторін, — рівні.

785°. У рівнобедреному трикутнику ABC точка M — середина основи AC, $MF \perp BC$, $ME \perp AB$. Доведіть, що $ME = MF$.

786°. Пряма a перетинає відрізок AB в його середині. Доведіть, що відстані від точок A і B до прямої a рівні.

787°. Пряма a перетинає відрізок AB в його середині. Знайдіть відстань від точки A до прямої a, якщо відстань від точки B до прямої a дорівнює 5 см.

788°. Доведіть, що точка, яка лежить на бісектрисі кута, рівновіддалена від його сторін.

789°. **Доведіть, що будь-яка точка внутрішньої області кута, яка рівновіддалена від його сторін, лежить на бісектрисі цього кута.**

790°. Перпендикулярні відрізки AB і CD перетинаються в точці K, що є серединою відрізка AB; $AC = BD$. Знайдіть $\angle KAC$, якщо $\angle KBD$ дорівнює:
1) 30°; 2) 60°; 3) 27°.

791°. Перпендикулярні відрізки MN і OP перетинаються в точці T, що є серединою відрізка MN; $MO = PN$. Знайдіть $\angle TMO$, якщо $\angle TNP$ дорівнює 45°.

792°. З точки A проведено перпендикуляр AB до прямої a. Два промені з початком A перетинають пряму a в точках C і D, причому $AC = AD$. Знайдіть $\angle CAB$, $\angle ACB$ і $\angle ADB$, якщо $\angle DAB$ дорівнює:
1) 10°; 2) 20°; 3) 30°.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

793°. З точки M проведено перпендикуляр MO до прямої a. Два промені з початком M перетинають пряму a в точках K і N, причому $MK = MN$. Знайдіть $\angle KMO$, $\angle MKO$ і $\angle MNO$, якщо $\angle NMO$ дорівнює $45°$.

794. Доведіть рівність прямокутних трикутників:
1) за катетом і медіаною, проведеною до нього;
2) за катетом і медіаною, проведеною до іншого катета;
3) за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи;
4) за гострим кутом і бісектрисою цього кута.

795. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за основою та висотою, проведеною до неї.

796. Доведіть рівність трикутників:
1) за висотою та кутами, які вона утворює з прилеглими сторонами;
2)* за стороною, висотою та медіаною, проведеними до цієї сторони.

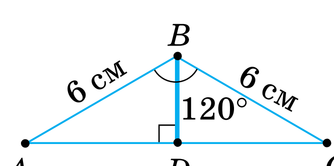
797. Доведіть рівність гострокутних трикутників:
1) за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони;
2)* за стороною та висотами, проведеними з кінців цієї сторони.

798. За даними на малюнках 427–429 знайдіть довжину відрізка BD.

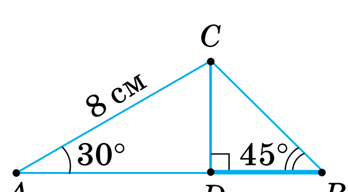
799. Доведіть, що коли кут між гіпотенузою й катетом прямокутного трикутника дорівнює $60°$, то гіпотенуза вдвічі більша за цей катет.

800. Катет, протилежний куту $60°$, дорівнює 14 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до гіпотенузи.

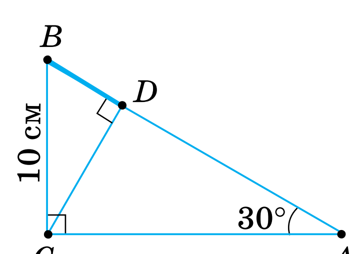
801. У прямокутному трикутнику до гіпотенузи AB проведено висоту CD; кут B дорівнює $60°$, відрізок $BD = 1$ см. Знайдіть гіпотенузу AB.



Мал. 427



Мал. 428

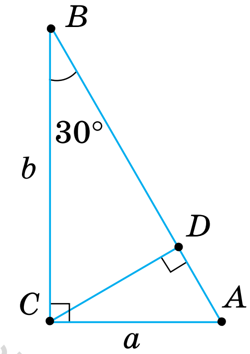


Мал. 429

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

802. Кут B прямокутного трикутника ABC дорівнює $60°$, катет $BC = 6$ см. Знайдіть відрізки, на які висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу.

803. Знайдіть AB, AD, CD і BD, якщо $AC = a$, $BC = b$, $\angle ABC = 30°$ (мал. 430).



Мал. 430

804. **Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить проти цього катета, дорівнює 30°.** Доведіть.

805. У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 4 см, а один із катетів — 8 см. Знайдіть кути трикутника.

806. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 6 см, її кінець віддалений від іншої бічної сторони на 3 см. Знайдіть кути трикутника.

807. Із середини D сторони BC рівностороннього трикутника ABC проведено перпендикуляр DM до сторони AC. Знайдіть AM, якщо $AB = 12$ см.

808*. Кут, протилежний основі рівнобедреного трикутника, дорівнює $120°$. Висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 9 см. Знайдіть основу трикутника.

809*. У прямокутному трикутнику проведено бісектрису кута, що дорівнює $60°$. Знайдіть бісектрису, якщо вона менша від більшого катета на 1 см.

810*. У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює $60°$, сума гіпотенузи і меншого катета становить 45 см. Знайдіть гіпотенузу.

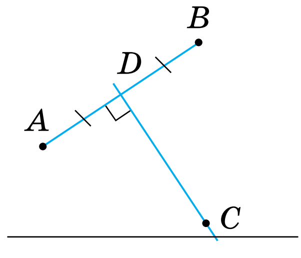
811*. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює $15°$. Знайдіть висоту, проведену з вершини прямого кута, якщо медіана, проведена з цієї вершини, дорівнює 8 см.

812*. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює $30°$. Знайдіть відстань між основами медіани та висоти, проведеними з вершини прямого кута, якщо медіана дорівнює 10 см.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

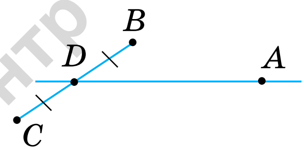
Проявіть компетентність

813. Недалеко від населених пунктів A і B проходить шосе. Потрібно побудувати автобусну зупинку так, щоб відстані від неї до населених пунктів були однакові. Місце зупинки визначили так (мал. 431): знайшли середину D відстані між населеними пунктами. Провісили пряму $DC \perp AB$ і позначили на цій прямій точку C біля шосе — місце зупинки. Чи правильно визначили місце для автобусної зупинки? Поясніть.



Мал. 431

814. Через місто A має проходити автомагістраль так, щоб два населені пункти B і C розташовувались по різні боки від неї на однаковій відстані. На малюнку 432 показано план будівництва магістралі. Поясніть, чому населені пункти будуть рівновідданими від автомагістралі.



Мал. 432

815. Як скористатися властивістю катета, що лежить проти кута 30°, для вимірювання відстаней між двома пунктами на місцевості, якщо між ними є перешкода, але до кожного з них можна підійти?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 4

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які є види трикутників залежно від довжини їх сторін та міри їх кутів?
2. Як називають сторони рівнобедреного трикутника; прямокутного трикутника?
3. Що таке медіана трикутника; бісектриса; висота?
4. Сформулюйте та доведіть теорему про суму кутів трикутника; про властивість зовнішнього кута трикутника.
5. Які властивості має прямокутний трикутник?
6. Сформулюйте та доведіть теореми про властивості й ознаку рівнобедреного трикутника.
7. Які дві геометричні фігури називаються рівними?
8. Сформулюйте ознаки рівності трикутників за двома сторонами й кутом між ними; за стороною і прилеглими до неї кутами; за трьома сторонами.
9. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1°. Два кути трикутника дорівнюють $80°$ і $25°$. Чому дорівнює третій кут?

А. $95°$. **В.** $85°$.
Б. $90°$. **Г.** $75°$.

2°. Зовнішній кут трикутника, не суміжний з кутами α і β, дорівнює $120°$. Яке із співвідношень правильне?

А. $\alpha + \beta = 60°$. **В.** $\alpha + \beta = 120°$.
Б. $\alpha - \beta = 60°$. **Г.** $\alpha + \beta = 180°$.

3°. У трикутників PQR і KLM: $PR = KM$, $\angle P = \angle K$, $\angle R = \angle M$. Чому дорівнює LM, якщо $PQ = 3$ см, $QR = 5$ см, $PR = 7$ см?

А. 3 см. **Б.** 5 см. **В.** 7 см. **Г.** 4 см.

4. Рівнобедрені трикутники ABC і KLM мають рівні основи та рівні периметри. Чому дорівнює $\angle A$, якщо $\angle M$ на $15°$ менший від $\angle L$?

А. $15°$. **Б.** $65°$. **В.** $50°$. **Г.** $55°$.

5*. У трикутнику DEF медіани DK і FM рівні, причому $KE = ME$. Яке із співвідношень правильне?

А. $\angle DMF = \angle DKF$. **В.** $DM = 2KF$.
Б. $\angle D < \angle F$. **Г.** $\angle KDF = \angle MFE$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Розділ 5.
КОЛО І КРУГ

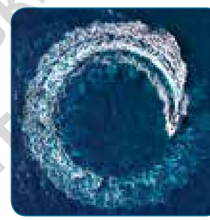
У розділі дізнаєтесь:

- про коло, його елементи та їх властивості;
- про взаємне розміщення двох кіл, прямої та кола;
- які властивості кола, вписаного в трикутник, і кола, описаного навколо нього;
- про геометричні фігури, всі точки яких мають одну й ту саму властивість;
- що таке задача на побудову та як її розв’язувати

§ 17. КОЛО І КРУГ

1. Що таке коло і що таке круг

Ситуація. Ігор і Юлія дивились пригодницький фільм про морські подорожі. Один із кадрів (мал. 433) їх заворожив. Вони пригадали, що слід від човна має форму кола, а частина поверхні моря всередині цього кола є кругом.



Мал. 433

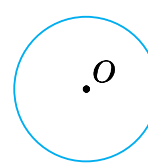
qr.orioncentr.com.ua/saHac

Чи праві Ігор і Юлія?

Так.

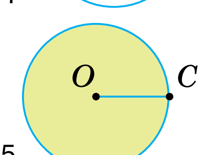
Запам’ятайте!

Колом **називається геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки (мал. 434).**
Ця точка називається *центром кола*.



Мал. 434

Кругом **називається частина площини, обмежена колом (мал. 435).**
Центр кола є *центром круга*.



Мал. 435

Коло будують за допомогою циркуля (мал. 436).

Мал. 436

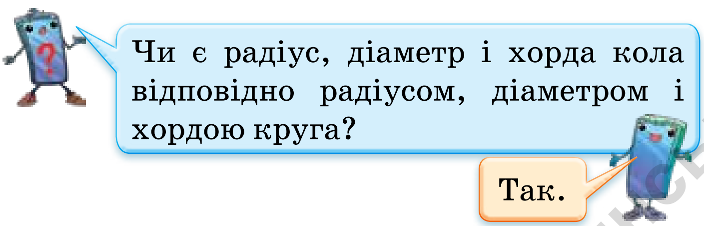
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

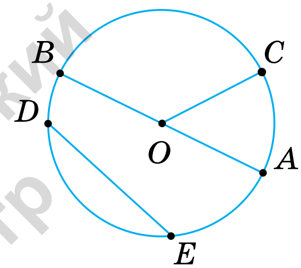
З колом пов’язують три відрізки, які мають спеціальні назви: *радіус*, *хорда* і *діаметр*.

Будь-які дві точки кола ділять його на частини, які називаються *дугами кола*.

На малюнку 437: OC — радіус кола; AB — діаметр; DE — хорда; частина кола між радіусами, наприклад, OA і OC — це дуга.

Радіус позначають буквою R або r, діаметр — буквою D або d.





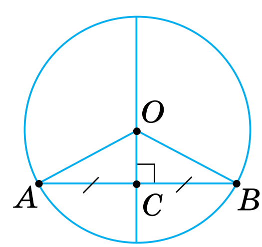
Мал. 437

Усі радіуси кола/круга рівні між собою. Діаметр дорівнює двом радіусам: $D = 2R$.

Задача **Діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.** Доведіть.

Розв’язання Нехай AB — хорда, $OC \perp AB$ (мал. 438). Доведемо, що $AC = CB$.

ΔAOB — рівнобедрений, оскільки $OA = OB$ як радіуси кола. У рівнобедреному трикутнику AOB висота OC, проведена до основи, є медіаною. Отже, $AC = CB$.

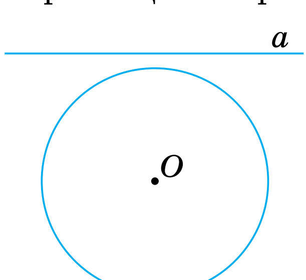


Мал. 438

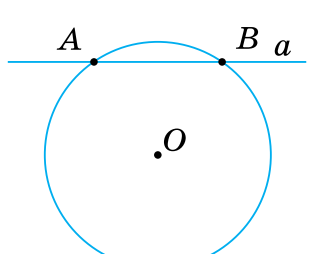
2. Взаємне розміщення кола й прямої

Подивіться на малюнки 439–441. На них зображено три випадки взаємного розміщення прямої та кола.

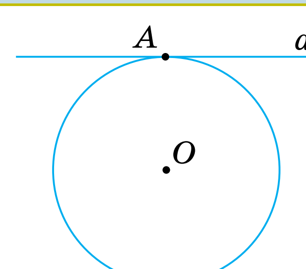
qr.orioncentr.com.ua/2eOtT



Мал. 439



Мал. 440



Мал. 441

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

1. Пряма й коло не мають спільних точок (мал. 439).

2. Пряма й коло мають дві спільні точки (мал. 440). Така пряма називається *січною*.

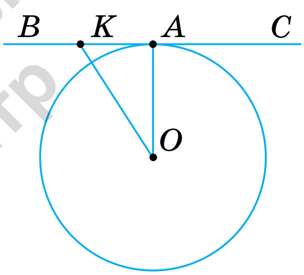
3. Пряма й коло мають одну спільну точку (мал. 441). Така пряма називається *дотичною*, а її спільна точка з колом — *точкою дотику*.

Запам'ятайте!

Властивість дотичної

Дотична до кола перпендикулярна до радіуса цього кола, проведеного в точку дотику.

Справді, якщо пряма BC дотикається до кола в точці A (мал. 442), то будь-яка інша точка K цієї прямої лежатиме поза колом і $OK > OA$. Тому радіус OA — найменший з відрізків, які сполучають точку O з точками прямої BC. Таким відрізком є перпендикуляр, проведений з точки O до прямої BC, тобто $BC \perp OA$.



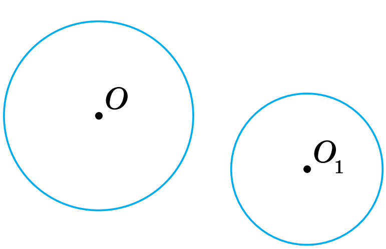
Мал. 442

Обернене твердження є ознакою дотичної.

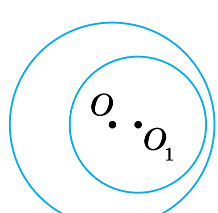
3. Взаємне розміщення двох кіл

Розглянемо різні випадки взаємного розміщення двох кіл.

1. Кола не мають спільної точки. Такі кола лежать одне поза одним (мал. 443) або одне коло лежить всередині іншого (мал. 444).



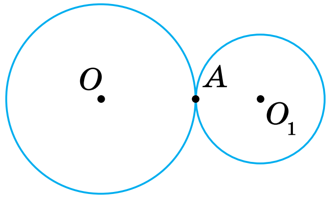
Мал. 443



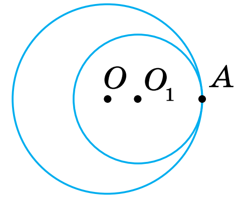
Мал. 444

2. Кола мають одну спільну точку. Такі кола називаються *дотичними*. Дотик двох кіл може бути зовнішнім (мал. 445) або внутрішнім (мал. 446). **Точка дотику лежить на прямій, яка проходить через центри даних кіл.** Ця пряма називається *лінією центрів*.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

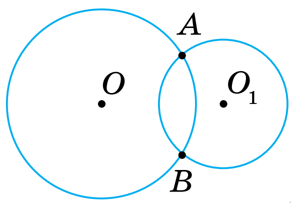


Мал. 445



Мал. 446

3. Кола мають дві спільні точки (мал. 447). Тоді вони перетинаються в цих точках.



Мал. 447

4. Круг і коло як елементи кулі і сфери

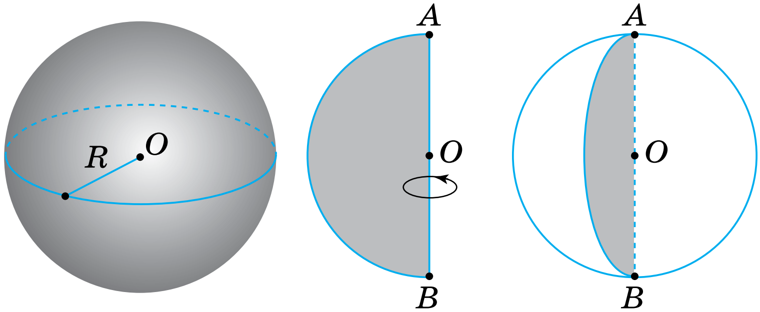
На малюнках ви бачите предмети, що мають форму *кулі* (мал. 448) та сфери (мал. 449).

Мал. 448

Мал. 449

Куля є тілом, а сфера — поверхнею.

Кулю/сферу можна утворити, якщо обертати півкруг/півколо навколо його діаметра AB (мал. 450). Цей діаметр вважають *віссю кулі/сфери*. Куля/сфера має лише одну характеристику — радіус R, який дорівнює половині діаметра півкруга/півкола.

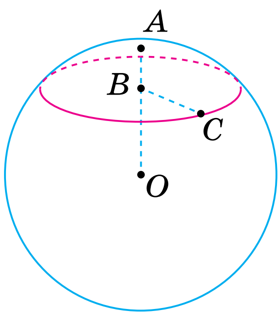


Мал. 450

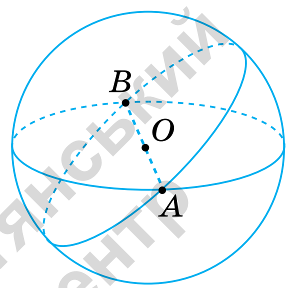
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Оскільки кулю/сферу отримано внаслідок обертання півкруга/півкола, то ці просторові фігури називають *тілами обертання*. Більш детально ви ознайомитеся з цими фігурами пізніше.

Будь-який переріз кулі площиною — круг (мал. 451). Переріз кулі площиною, що проходить через її центр, називається *великим кругом кулі*, а переріз сфери — *великим колом кулі* (мал. 452). Горизонтально розміщене велике коло сфери має спеціальну назву — *екватор*.



Мал. 451

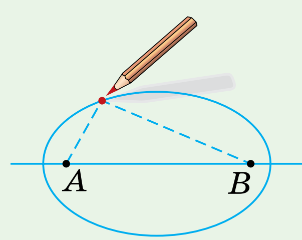


Мал. 452

Дізнайтеся більше

1. Найближчий «родич» кола — еліпс.

На аркуші цупкого паперу закріпіть шпильками кінці нитки у двох точках A і B (довжина нитки має бути більшою за довжину відрізка AB). Проведіть лінію, рухаючи олівець так, щоб він натягував нитку (мал. 453).



Мал. 453

Накреслена крива лінія буде еліпсом.

Усі точки еліпса мають властивість: Сума відстаней від будь-якої точки еліпса до точок A і B є величиною сталою.

Точки A і B називаються фокусами еліпса.

Еліпси ми часто спостерігаємо в житті. Якщо, наприклад, нахилити склянку з водою, то обрис верхнього шару набуде вигляду еліпса (мал. 454).


Мал. 454

Ще німецький вчений **Йоганн Кеплер** (1571–1630) виявив, що планети рухаються навколо Сонця не за колами, як вважали раніше, а за еліпсами, причому Сонце перебуває у фокусі кожного еліпса.

2. Слово «коло» було відоме ще за часів Київської Русі. Воно означало круг, колесо і збереглося до наших днів в українській, польській і чеській мовах. У південних слов’ян поширений народний танок «коло». У сучасній українській мові є багато слів, похідних від іменника «коло»: кільце, колесо, одноколка, двоколка, кружний

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

(шлях, дорога). Корінь «коло» (круг) знаходимо в словах «колобродити» (безцільно ходити, бродити де-небудь), «коловорот» (ручне свердло), «полярні кола», «зачаровані кола», «колобок» (невеликий круглий хлібець) тощо.

Слово «радіус» походить від латинського *radius* — промінь, спиця в колесі, а позначення радіуса R або r є першою буквою цього слова. Вавилоняни і давні індуси вважали радіус найважливішим елементом кола. Проте вони не вживали цей термін. Евклід називав радіус «прямою з центра». Лише в XVI ст. термін «радіус» почали вживати французькі вчені.

Слово «діаметр» походить від грецького *diametros* — поперечник. Звідси й позначення діаметра буквою d. Слово «хорда» походить від грецького *chorde* — струна.

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
коло	circle	Kreis (m)	cercle
круг	circle, disc	Kreis (m), Kreisscheibe (f)	rond

qr.orioncentr.com.ua/193dH

Пригадайте головне

1. Що таке коло; центр кола; радіус?
2. Що таке круг? Чим відрізняється круг від кола?
3. Що таке хорда кола? Яка хорда називається діаметром?
4. Назвіть випадки взаємного розміщення прямої та кола.
5. Яка пряма називається дотичною до кола?
6. Сформулюйте властивість дотичної до кола.
7. Назвіть випадки взаємного розміщення двох кіл.
8. Які кола називаються дотичними?

Усне тренування

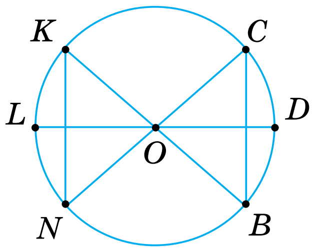
Обчисліть:

1) $5{,}86 \cdot 10 + 1{,}4$; $0{,}128 \cdot 100 - 2{,}8$; $8{,}62 \cdot 1000 - 120$;
2) $3{,}14 \cdot 1000 - 140$; $0{,}79 \cdot 100 + 11$; $5{,}71 \cdot 10 + 2{,}9$.

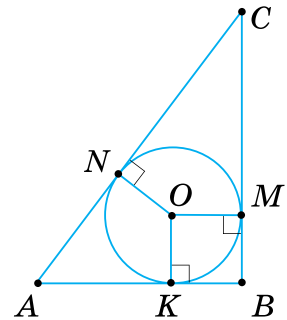
Розв'яжіть задачі

816'. Які з відрізків, зображених на малюнку 455, є:
1) хордами; 3) радіусами кола?
2) діаметрами;

Український освітянський видавничий центр «Оріон»



Мал. 455



Мал. 456

817'. Круг із центром O має радіус 1,5 см. Точки A, B, і C розміщені так, що відстань від кожної з них до центра:
1) менша від радіуса;
2) дорівнює радіусу;
3) більша за радіус.
Зробіть малюнки.

818'. Назвіть дотичні до кола на малюнку 456. До якого з радіусів перпендикулярна кожна дотична?

819'. Побудуйте два дотичні кола з радіусами, що дорівнюють двом і трьом клітинкам зошита. Скільки випадків потрібно розглянути?

820°. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює:
1) 6,5 см; 3) m см;
2) 2,6 см; 4) $2n$ см.

821°. Знайдіть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює:
1) 4,2 см; 3) a см;
2) 8,2 см; 4) $2a$ см.

822°. Скільки з однієї точки кола можна провести:
1) хорд; 3) радіусів?
2) діаметрів;

823°. Круг із центром O має радіус завдовжки 2 см. Як розміщена точка A відносно цього круга, якщо відрізок OA дорівнює:
1) 0,1 дм;
2) 20 мм;
3) 0,9 см;
4) 3 см?
Відповідь поясніть.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

824°. Як розміщена точка B відносно круга з центром O і радіусом 3 см, якщо:
1) $OB = 2$ см; 2) $OB = 3$ см; 3) $OB = 4$ см?
Відповідь поясніть.

825°. Радіус кола дорівнює 4 см. Чи може хорда цього кола дорівнювати:
1) 7 см;
2) 8 см;
3) 9 см;
4) 4 см?
Відповідь поясніть.

826°. Діаметр кола дорівнює 6 см. Чи може хорда цього кола дорівнювати:
1) 8 см;
2) 5 см?
Відповідь поясніть.

827°. Діаметр AB перетинає хорду CD під прямим кутом, M — точка їх перетину. Чи завжди правильна рівність:
1) $AM = BM$;
2) $CM = DM$?
Відповідь поясніть.

828°. Діаметр CD перетинає хорду AB під прямим кутом, P — точка їх перетину. Чи завжди правильна рівність:
1) $AP = BP$;
2) $CP = DP$?
Відповідь поясніть.

829°. Знайдіть довжину хорди кола, якщо перпендикулярний до неї діаметр відтинає від неї відрізок:
1) 0,5 дм; 3) 4,5 см;
2) 30 мм; 4) 0,07 дм.
Відповідь поясніть.

qr.orioncentr.com.ua/n1jWa

830°. Діаметр кола, перпендикулярний до хорди, відтинає від неї відрізок завдовжки 10 см. Знайдіть довжину хорди. Відповідь поясніть.

831°. **Діаметр, що проходить через середину хорди, перпендикулярний до цієї хорди.** Доведіть.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

832°. Діаметр AB ділить хорду CD на відрізки:
1) 2 см і 0,2 дм; 3) 40 см і 4 дм;
2) 30 мм і 0,3 см; 4) 26 см і 0,26 дм.
Чи можна стверджувати, що $AB \perp CD$? Відповідь поясніть.

833°. Діаметр CD ділить хорду AB на відрізки 0,5 дм і 5 см. Чи можна стверджувати, що $AB \perp CD$? Відповідь поясніть.

834°. Скільки різних дотичних до даного кола можна провести через дану точку, що лежить:
1) поза колом; 2) на колі; 3) всередині кола?

835°. Яке взаємне розміщення прямої та кола, якщо радіус кола становить 5 см, а відстань від центра до прямої дорівнює:
1) 4 см; 3) 6 см;
2) 5 см; 4) 0,5 дм?

836°. Побудуйте коло радіуса 2 см і пряму, якщо відстань від центра кола до цієї прямої дорівнює:
1) 1,5 см; 2) 2 см; 3) 2,5 см.
Яке взаємне розміщення прямої та кола?

837°. **Чому дорівнює відстань O_1O_2 між центрами двох дотичних кіл із радіусами r і R ($r < R$) у випадку:**
1) зовнішнього дотику; 2) внутрішнього дотику?

838°. Як розміщені два кола, якщо:
1) їх радіуси дорівнюють 5 см і 10 см, а відстань між їхніми центрами становить 16 см;
2) їх радіуси дорівнюють 6 см і 8 см, а відстань між їхніми центрами становить 14 см;
3) їх радіуси дорівнюють 12 см і 16 см, а відстань між їхніми центрами становить 4 см?

qr.orioncentr.com.ua/xhLDL

839°. Знайдіть відстань між центрами кіл у випадках їх зовнішнього та внутрішнього дотиків, якщо радіуси цих кіл дорівнюють:
1) 4 см і 6 см; 3) 5 см і 4 см;
2) 1 см і 6 см; 4) 9 см і 5 см.

840°. Кола з радіусами 3 см і 5 см дотикаються. Знайдіть відстань між їхніми центрами у випадках зовнішнього та внутрішнього дотиків.

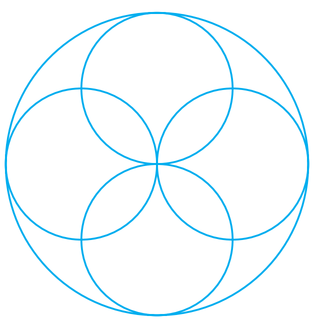
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

841°. Знайдіть відстань між центрами кіл у випадках їх зовнішнього та внутрішнього дотиків, якщо діаметри цих кіл дорівнюють:

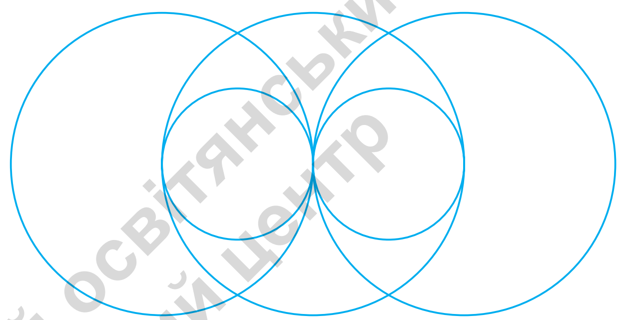
1) 4 см і 6 см; 2) 1 см і 6 см; 3) 5 см і 4 см; 4) 9 см і 5 см.

842°. Кола з діаметрами 3 см і 5 см дотикаються. Знайдіть відстань між їхніми центрами у випадках зовнішнього та внутрішнього дотиків.

843°. Побудуйте фігури, зображені на малюнку 457. Позначте номерами кола на кожному з малюнків. Як взаємно розміщені ці кола?



Мал. 457



Мал. 458

844°. Побудуйте фігури, зображені на малюнку 458. Позначте номерами кола на кожному з малюнків. Як взаємно розміщені ці кола?

845. Чи можуть дві хорди кола, що не проходять через центр, точкою перетину ділитися навпіл?

846. Хорда CD ділить навпіл перпендикулярну їй хорду AB. Порівняйте ці хорди.

847. Хорда віддалена від центра кола на a. Знайдіть відстань від цієї хорди до паралельної й рівної їй хорди, якщо:

1) $a = 10$ см; 2) $a = 0{,}5$ дм; 3) $a = 15$ мм; 4) $a = 2{,}9$ см.

848. Хорда віддалена від центра кола на 6 см. Знайдіть відстань від цієї хорди до паралельної й рівної їй хорди.

849. У колі проведено три рівні хорди. Одна з них віддалена від центра на 6 см. Знайдіть відстань від центра до двох інших хорд.

850. У колі проведено діаметри AB і CD. Доведіть, що хорди AC і BD рівні й паралельні.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

851. AB і CD — діаметри кола з центром O. Знайдіть периметр трикутника BOC, якщо:
1) $AD = 2$ см, $CD = 6$ см;
2) $AD = 1$ см, $CD = 4$ см;
3) $AD = 3$ см, $CD = 5$ см.
Яку закономірність помітили?

852. AB і CD — діаметри кола з центром O. Знайдіть периметр трикутника BOC, якщо $AD = 3$ см, $CD = 8$ см.

853. Із точки A кола з центром O проведено діаметр AB і хорду AC. Знайдіть $\angle BAC$, якщо:
1) $\angle BOC = 100°$;
2) $\angle BOC = 120°$;
3) $\angle BOC = 90°$;
4) $\angle BOC = 80°$.

854. Із точки B кола з центром O проведено діаметр BA і хорду BC. Знайдіть $\angle ABC$, якщо $\angle AOC = 110°$.

855. Хорда кола перетинає діаметр під кутом $30°$ і ділиться ним на відрізки 6 см і 12 см. Знайдіть відстань від кінців хорди до діаметра.

856. У колі з центром O через середину радіуса проведено хорду AB, перпендикулярну до нього. Знайдіть $\angle AOB$.

857. Чи може коло дотикатися до прямої у двох точках? Відповідь поясніть.

858. У колі з центром O проведено хорду AB й дотичну в точці A. Знайдіть кути між хордою та дотичною, якщо:
1) $\angle AOB = 70°$;
2) хорда дорівнює радіусу кола.

859. Пряма AB дотикається до кола з центром O в точці B. Знайдіть радіус кола, якщо $\angle BAO = 30°$, $AO = 8$ см.

860. **Через точку A до кола проведені дотичні AB і AC, де B і C — точки дотику. Доведіть, що $AB = AC$.**

861. Кут між двома радіусами кола дорівнює $150°$. Знайдіть кут між дотичними, проведеними через кінці цих радіусів.

862. Дотичні до кола в точках A і B перетинаються в точці C. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $AB = AC$.

863. Дотичні до кола в точках B і C перетинаються в точці A. Знайдіть AB і AC, якщо $\angle BAC = 90°$, а радіус кола — R.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

864. **Дотичні до кола утворюють кут 60°. Доведіть, що:**
1) відрізок, який сполучає точки дотику, дорівнює довжині дотичної від точки перетину дотичних до точки її дотику;
2) відрізок, який сполучає точку перетину дотичних із центром кола, дорівнює діаметру кола.

865. Кут BAC, утворений дотичними AB і AC до даного кола, дорівнює 60°. Знайдіть відстань між точками дотику B і C, якщо:
1) $AB = 4$ см; 2) $AB + AC = 10$ см.

866. **Кола з центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B. Доведіть:**
1) $\angle AOO_1 = \angle BOO_1$; 2) $\angle OAB = \angle OBA$; 3) $AB \perp OO_1$.

867. Кола з центрами O і O_1 дотикаються в точці A. Відстань між їхніми центрами дорівнює 18 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо вони відносяться як:
1) 1 : 2; 2) 4 : 5; 3) 7 : 2; 4) 5 : 1.
Скільки випадків треба розглянути?

868. Кола з центрами O і O_1 дотикаються в точці B. Відстань між їхніми центрами дорівнює 10 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо вони відносяться як 3 : 2. Розгляньте всі можливі випадки.

869*. З точки кола проведено діаметр і хорду, що дорівнює радіусу. Знайдіть кут між ними.

870*. З точки кола проведено дві хорди, що дорівнюють радіусу. Знайдіть кут між ними.

871*. З точки кола проведено дві рівні хорди й діаметр. Доведіть, що цей діаметр ділить кут між хордами навпіл.

872*. Доведіть, що рівні хорди рівновіддалені від центра кола.

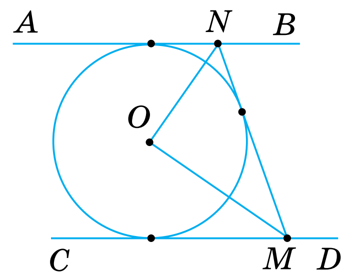
873*. Сформулюйте твердження, обернене до сформульованого в задачі 872. Доведіть його.

874*. Із даної точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, з яких перша віддалена від центра на 30 см, а друга — на 10 см. Знайдіть їх довжини.

875*. Точка на бісектрисі кута є центром кола, яке перетинає сторони кута. Чи рівні відрізки відтинає коло від сторін кута? Відповідь поясніть.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

876*. На малюнку 459: AB, CD, MN — дотичні до кола, причому $AB \parallel CD$. Доведіть, що $\angle MON = 90°$.



Мал. 459

877*. Кут між дотичними до кола дорівнює куту між радіусами, проведеними в точки дотику. Знайдіть цей кут.

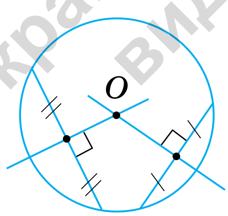
878*. Через точку A до кола з центром O проведено дотичні AB і AC, де B і C — точки дотику. Знайдіть $\angle BAC$, якщо середина відрізка AO лежить на колі.

879*. Доведіть, що центри трьох кіл є вершинами рівностороннього трикутника, якщо кожне із цих кіл проходить через центри двох інших даних кіл.

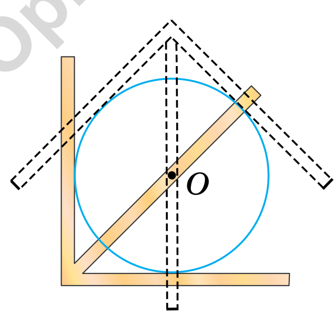
Проявіть компетентність

880°. Потрібно розбити клумбу, що має форму кола. Як це зробити, якщо є кілочки й мотузка?

881. На малюнку 460 показано, як відшукати центр кола за допомогою лінійки та косинця. Поясніть, на основі якої властивості можна це зробити.



Мал. 460



Мал. 461

882. Щоб знайти центр деталі, що має форму круга, використовують прилад, який називається центрошукачем. Це довільний кут, виготовлений із двох металевих або дерев'яних планок, у якому прикріплена ще одна планка — бісектриса цього кута. На малюнку 461 показано, як знаходять центр круга. Поясніть, як користуватися цим приладом.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 18. ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК

1. Що таке ГМТ

Ситуація. Батько попросив Інну знайти відстані від усіх точок на рульовому колесі автомобіля до кнопки подання звукового сигналу. Інна обрала одну точку на колесі й виміряла відстань. Вона стверджує, що всі інші точки колеса розміщуються на такій самій відстані від його центра.

qr.orioncentr.com.ua/jybMs

Чи права Інна?

Так.

Запам’ятайте!

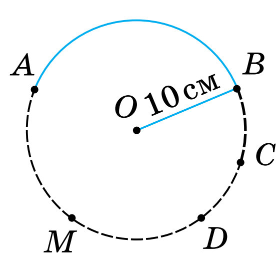
Фігура, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість, називається *геометричним місцем точок* (ГМТ).

Дайте означення колу, використавши поняття «геометричне місце точок».

Що означає вимога «фігура складається з усіх точок площини, які мають певну властивість»?

Розберемося на прикладі.

Розглянемо малюнок 462. Чи можна вважати дугу AB кола з центром O і радіусом 10 см геометричним місцем точок, рівновіддалених від центра O на 10 см? Не можна. Справді, кожна точка дуги AB віддалена від точки O на 10 см. Але на площині є точки, що віддалені від точки O на 10 см і не лежать на дузі AB. Наприклад, точки C, D, M та інші.



Мал. 462

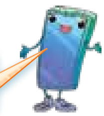
***Фігура складається з усіх точок площини, які мають певну властивість* — означає:** по-перше, що кожна точка фігури має цю властивість; по-друге, кожна точка площини, яка має цю властивість, належить даній фігурі.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

2. Задачі на ГМТ

Скільки є різновидів задач, пов'язаних з ГМТ?

Два (мал. 463).



Задачі на ГМТ

на доведення, що певна фігура є ГМТ

на знаходження фігури, яка є певним ГМТ

Мал. 463

Задача 1 **Бісектриса кута є геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута.** Доведіть.

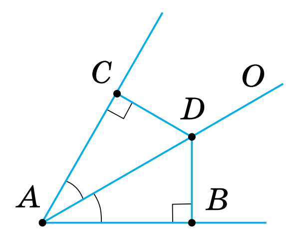
Розв'язання Доведемо два взаємнообернені твердження.

1. Кожна точка бісектриси рівновіддалена від сторін кута.

Якщо D — точка бісектриси кута A, то $DC = DB$ (мал. 464).

Трикутники ACD і ABD рівні за гіпотенузою і гострим кутом (гіпотенуза AD — спільна, $\angle CAD = \angle BAD$, бо AO — бісектриса кута A).

Тому $DC = DB$.



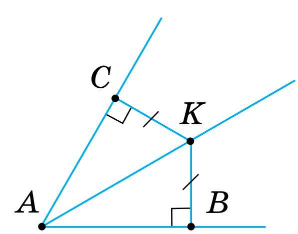
Мал. 464

2. Кожна точка, яка є рівновіддаленою від сторін кута, лежить на бісектрисі.

Якщо $KC = KB$, *то* AK *— бісектриса кута* A (мал. 465).

Трикутники ACK і ABK рівні за гіпотенузою і катетом (гіпотенуза AK — спільна, $KC = KB$ за умовою).

Звідси випливає: $\angle CAK = \angle BAK$, тобто точка K лежить на бісектрисі кута A.



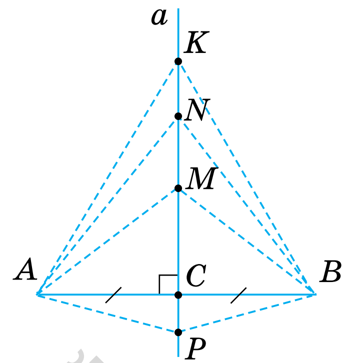
Мал. 465

Щоб переконатися, що фігура F є геометричним місцем точок, доведіть два взаємно обернені твердження:

1) кожна точка, що належить фігурі F, має дану властивість;

2) кожна точка площини, що має дану властивість, належить фігурі F.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

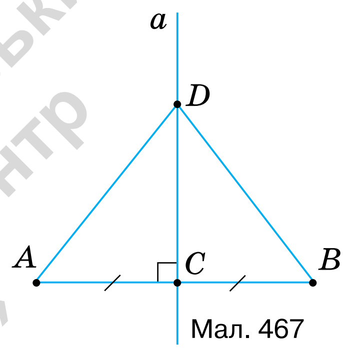


Мал. 466

Задача 2 Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців даного відрізка.

Розв'язання *Створюємо основу для гіпотези*: Позначимо кілька точок, рівновіддалених від точок A і B. Наприклад, C — середину відрізка AB, M, N, K, P (мал. 466).

Робимо припущення: шуканим геометричним місцем точок є пряма a, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину.



Мал. 467

Доводимо правильність припущення, довівши два взаємнообернені твердження.

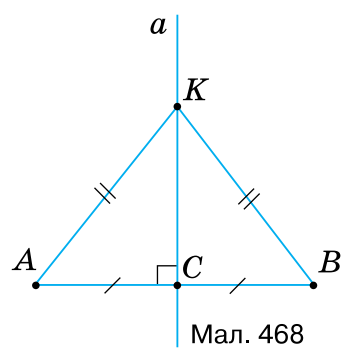
1. Кожна точка D прямої a рівновіддалена від точок A і B.

Якщо $a \perp AB$, $AC = CB$, *то* $AD = BD$.

Довільну точку D прямої a сполучимо з точками A і B (мал. 467).

$\Delta ACD = \Delta BCD$ за двома катетами ($AC = CB$ за умовою, CD — спільний катет).

Тому $AD = BD$.



Мал. 468

2. Кожна точка K, яка є рівновіддаленою від точок A і B, лежить на прямій a.

Якщо $AK = BK$, *то* $KC \perp AB$, $AC = CB$.

Нехай довільна точка K рівновіддалена від точок A і B, тобто $AK = BK$ (мал. 468).

Через середину C відрізка AB проведемо пряму KC.

ΔABK — рівнобедрений, бо $AK = BK$ за умовою. У ньому KC — медіана, а, значить, і висота. Отже, точка K лежить на прямій a.

Робимо висновок: **геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є пряма, яка перпендикулярна до відрізка і проходить через його середину.**

Запам'ятайте!

Пряма, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього, називається *серединним перпендикуляром*.

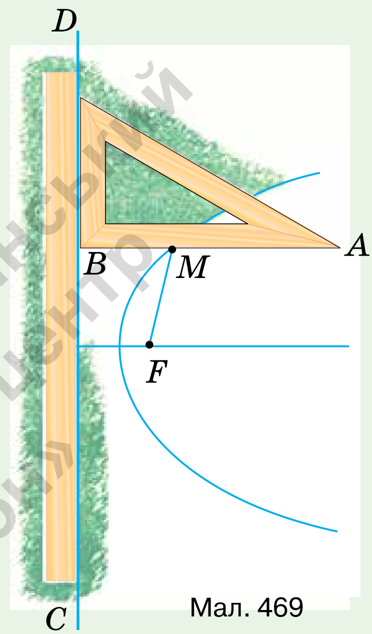
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Щоб знайти геометричне місце точок:
1) позначте кілька точок з даною властивістю;
2) зробіть припущення про вид і розміщення на площині шуканої фігури;
3) доведіть правильність припущення.

Дізнайтеся більше

Розглянемо особливе геометричне місце точок.

Проведемо на аркуші паперу будь-яку пряму CD, візьмемо точку F поза нею й рухатимемо вістря олівця M так, щоб відстань від нього до прямої в будь-який момент була такою самою, як і відстань до точки F (мал. 469). Для цього достатньо до вершини A косинця прикріпити кнопкою нитку, довжина якої дорівнює катету AB, а вільний кінець нитки прив'язати до шпильки, увіткнутої в точку F. Якщо тепер другий катет трикутника ковзатиме по лінійці, прикладеній до CD, то вістря олівця M, яке натягує нитку й притискує її до вільного катета трикутника, буде на однаковій відстані від лінійки і від шпильки: $BM = MF$.

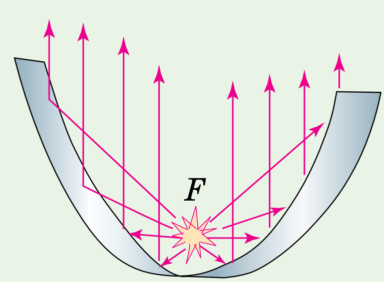


Мал. 469

Це вістря опише на папері частину лінії, яка називається *параболою*. Парабола — геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки і даної прямої, яка не проходить через цю точку.

Точка F називається *фокусом* параболи; перпендикуляр, проведений із фокуса до прямої CD і продовжений, є *віссю* параболи.

Якщо вузьку пластинку добре відполірованого металу зігнути за дугою параболи, то промені точкового джерела світла, уміщеного у фокусі, відбившись від пластинки, підуть паралельно осі (мал. 470). І навпаки, якщо на таку пластинку падатиме пучок променів, паралельний осі параболи, то після відбиття промені зберуться в її фокусі.



Мал. 470

На цій властивості параболи ґрунтується будова параболічних дзеркал, які застосовуються в автомобільних фарах, і, загалом, прожекторах.

Камінь, кинутий не точно вертикально, летить за параболою; те саме можна сказати і про футбольний м'яч. Хоча опір повітря в обох випадках дещо спотворює форму параболи.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
серединний перпендикуляр	mid-perpendicular	Mittelsenkrechte (*f*)	bissectrice perpendiculaire

qr.orioncentr.com.ua/5m4Nr

Пригадайте головне

1. Що таке геометричне місце точок?
2. Наведіть приклади геометричних місць точок.
3. Що таке серединний перпендикуляр?
4. Як переконатися, що фігура є геометричним місцем точок?
5. Якою фігурою є геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута?
6. Як знайти геометричне місце точок?
7. Якою фігурою є геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців даного відрізка?

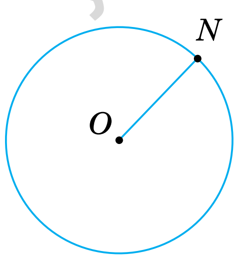
Усне тренування

Обчисліть:

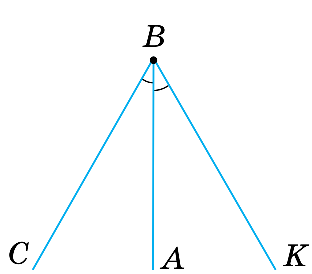
$580 \cdot 2 + 20 \cdot 2$; $790 \cdot 5 + 10 \cdot 5$; $85 \cdot 7 - 5 \cdot 7$.

Розв'яжіть задачі

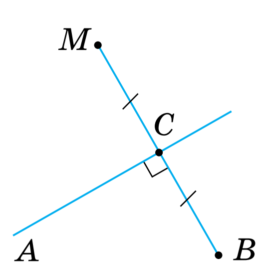
883'. Назвіть геометричні місця точок, зображених на малюнках 471–473.



Мал. 471



Мал. 472



Мал. 473

884°. Позначте точку P та побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від цієї точки на три клітинки зошита.

885°. Позначте точку O та побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від цієї точки на дві клітинки зошита.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

886°. Чи можна круг радіуса 10 см вважати геометричним місцем точок, віддалених від його центра на відстань:
1) що дорівнює 10 см;
2) більшу за 10 см;
3) меншу від 10 см;
4) не більшу за 10 см;
5) не меншу від 10 см?

qr.orioncentr.com.ua/ZBTxS

887°. Чи можна вважати частину круга з радіусом 5 см геометричним місцем точок, віддалених від центра круга на відстань, не більшу за 5 см?

888°. Зобразіть прямий і тупий кути та геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кожного кута.

889°. Зобразіть гострий кут та геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін цього кута.

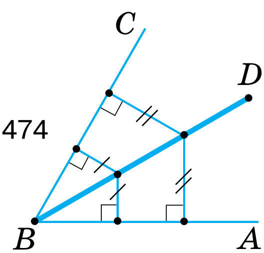
890°. На малюнку 474 кожна точка відрізка BD рівновіддалена від сторін кута ABC. Чи є відрізок BD геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута? Відповідь поясніть.

891°. Яке з висловлень правильне: 1) будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін кута; 2) існують точки бісектриси кута, не рівновіддалені від сторін кута?

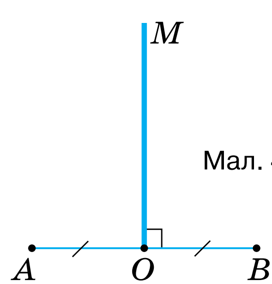
892°. Побудуйте довільний трикутник ABC. За допомогою транспортира та лінійки проведіть бісектриси кутів A і B. Яку властивість має точка їх перетину?

893°. Чи можна вважати промінь OM геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка AB (мал. 475)?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»



Мал. 474

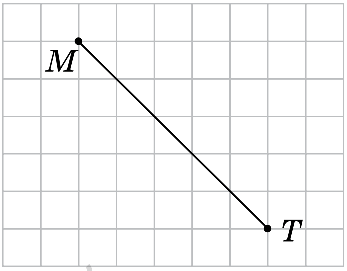


Мал. 475

894°. Яке з висловлень правильне: 1) будь-яка точка серединного перпендикуляра до відрізка AB рівновіддалена від точок A і B; 2) існують точки серединного перпендикуляра до відрізка AB, не рівновіддалені від точок A і B?

895°. Дано дві точки A і B. За допомогою лінійки та косинця побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від точок A і B.

896°. Накресліть за клітинками відрізок MT, зображений на малюнку 476. За допомогою лінійки й косинця побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.



Мал. 476

897°. Побудуйте довільний трикутник ABC. За допомогою лінійки й косинця проведіть серединні перпендикуляри до його сторін AB і BC. Яку властивість має точка їх перетину?

898. Знайдіть геометричне місце центрів кіл з радіусом R, що дотикаються до даного кола з радіусом r.

899. Побудуйте геометричне місце центрів кіл з радіусом R, що проходять через дану точку A.

900. **Доведіть, що геометричним місцем центрів кіл, що дотикаються до сторін кута, є бісектриса цього кута.**

901. Якою фігурою є геометричне місце точок, рівновіддалених від усіх сторін трикутника?

902. Якою фігурою є геометричне місце точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються?

903. Якою фігурою є геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до двох прямих, які перетинаються? Зробіть малюнок.

904. **Доведіть, що геометричним місцем центрів кіл, які проходять через дві дані точки A і B, є серединний перпендикуляр до відрізка AB.**

905. Якою фігурою є геометричне місце вершин рівнобедрених трикутників, що мають спільну основу AB?

906. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від усіх вершин трикутника.

Щоб знайти відстань між двома паралельними прямими, треба провести перпендикуляр з якої-небудь точки однієї прямої до іншої прямої.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

907. **Якою фігурою є геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих?**

908. **Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від прямої a на відстань m.**

909. Усі точки відрізка AB віддалені від прямої a на 2 см. Чи є відрізок AB геометричним місцем точок, віддалених від прямої a на 2 см?

910. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса R, що дотикаються до даної прямої.

911*. Побудуйте геометричне місце вершин трикутників зі спільною основою AB і бічною стороною, що дорівнює a.

912*. Два рівні кола лежать одне поза одним. Побудуйте геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до цих кіл.

913*. Якою фігурою є геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до прямої a в точці A?

914*. Дано кут ABC і дві точки M і N у його внутрішній області. На сторонах кута знайдіть точки, рівновіддалені від точок M і N. Скільки розв'язків має задача?

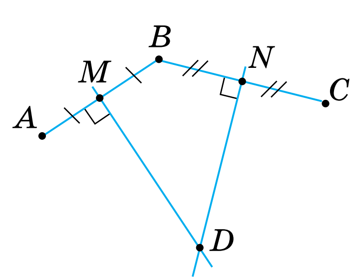
915*. Якою фігурою є геометричне місце вершин трикутників, що мають спільну сторону AB й однакову висоту h, проведену до цієї сторони?

916*. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса R, які відтинають на даній прямій хорду даної довжини.

Проявіть компетентність

917. Недалеко від залізниці розташовані два села. Знайдіть на лінії залізниці місце для станції, яка була б рівновіддаленою від цих сіл. Зробіть малюнок.

918. Мешканці трьох дачних будинків A, B і C вирішили знайти таке місце для криниці, щоб відстань від неї до будинків була однаковою. На малюнку 477 показано, як обрали місце D для криниці. Поясніть, чому $CD = BD = AD$.



Мал. 477

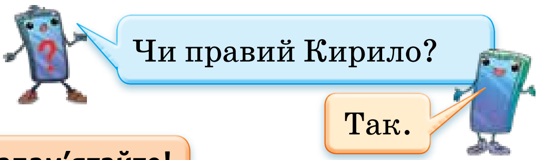
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 19. ОПИСАНІ ТА ВПИСАНІ КОЛА

1. Комбінації кола й трикутника

Ситуація. Бабуся попросила онука Кирила розмітити на п'яльцях місце для ялинки, яку зібралась вишити. Кирило сказав: «Так це ж буде трикутник у колі, а його вершини лежатимуть на колі». Бабуся запитала: «А якби я вирішила вишити сонце всередині ялинки?». Кирило відповів: «Тоді б коло лежало всередині трикутника, а його сторони були б дотичними до кола».

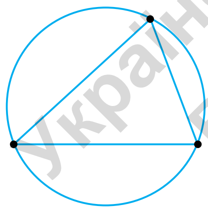
qr.orioncentr.com.ua/CUx4q



Запам'ятайте!

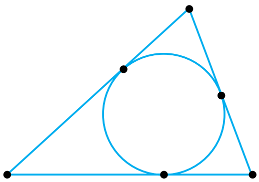
Коло називається

описаним **навколо трикутника,** **якщо воно** **проходить через усі його вершини (мал. 478).**

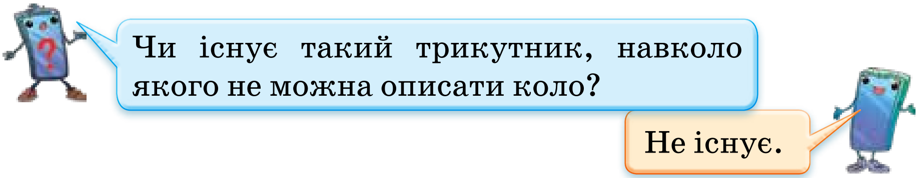


Мал. 478

вписаним **у трикутник,** **якщо воно** **дотикається до всіх його сторін (мал. 479).**



Мал. 479



2. Властивості описаного та вписаного кола

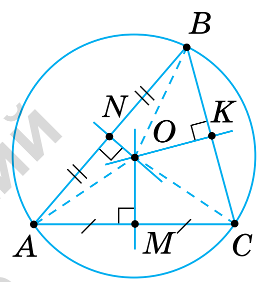
Сформулюємо без доведення основні властивості описаного та вписаного кола.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Запам'ятайте!

Теорема (*про описане коло*)
Навколо будь-якого трикутника можна описати коло і до того ж тільки одне.

Дано: ΔABC (мал. 480).
Довести:
1) для трикутника ABC описане коло існує;
2) описане коло єдине.

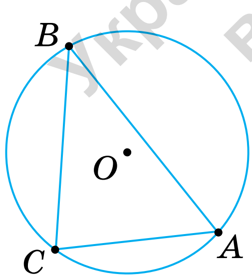


Мал. 480

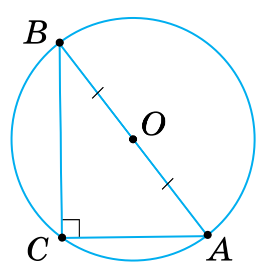
Наслідок
Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці.

Точка перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника є центром описаного кола.

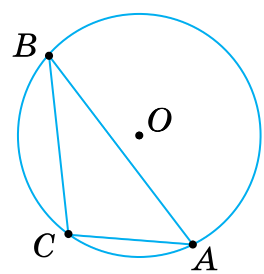
Центр кола, описаного навколо:
- **гострокутного** трикутника, лежить **усередині трикутника** (мал. 481);
- **прямокутного трикутника, лежить на середині гіпотенузи** (мал. 482);
- **тупокутного** трикутника, лежить **поза трикутником** (мал. 483).



Мал. 481



Мал. 482



Мал. 483

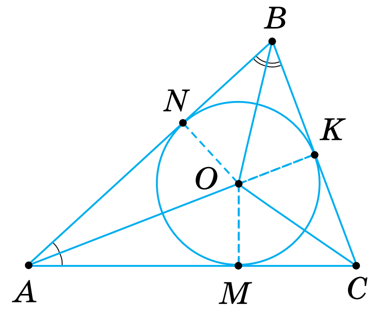
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Запам'ятайте!

Теорема (*про вписане коло*)
У будь-який трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне.

Дано: ΔABC (мал. 484).
Довести:
1) для трикутника ABC вписане коло існує;
2) вписане коло єдине.

Наслідок.
Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці.

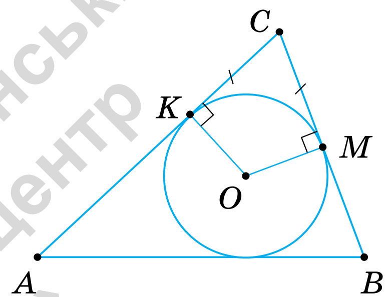


Мал. 484

Точка перетину бісектрис трикутника є центром вписаного кола.

Радіус описаного кола позначають R, а вписаного — r.

Якщо в трикутник вписано коло, то відрізки сусідніх сторін з кінцями у вершині й відповідних точках дотику — рівні (мал. 485).



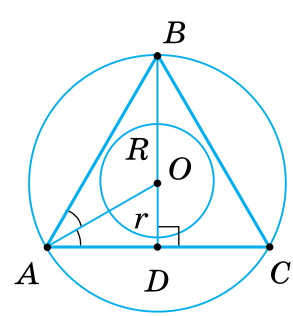
Мал. 485

3. Радіуси вписаного та описаного кіл у рівносторонньому трикутнику

qr.orioncentr.com.ua/ikDdj

Задача **Доведіть, що радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, дорівнює половині радіуса кола, описаного навколо нього.**

Розв'язання У рівносторонньому трикутнику бісектриси є висотами та медіанами, тому вони перетинаються в одній точці. Ця точка є центром вписаного й описаного кіл. Отже, відрізок AO — радіус описаного кола (мал. 486), а відрізок OD — радіус вписаного кола. У прямокутному трикутнику AOD $\angle OAD = 30°$, оскільки AO — бісектриса кута A. За властивістю катета, що лежить проти кута $30°$, маємо: $OD = \dfrac{OA}{2}$.

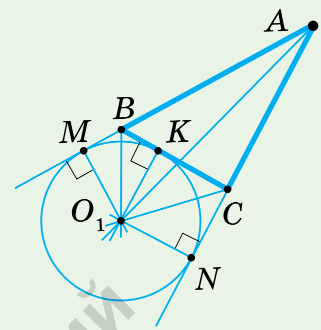


Мал. 486

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Дізнайтеся більше

1. Раніше вписані в коло й описані навколо кола трикутники називали по-іншому. Для вписаного трикутника використовували назву «хордіальний», оскільки всі сторони такого трикутника є хордами кола, у яке він вписаний. В описаного трикутника всі сторони — це відрізки дотичних до кола, тому його й називали «дотичним» трикутником.



Мал. 487

2. Крім вписаного в трикутник кола й описаного навколо нього, є ще *зовнівписане* коло.

Проведемо в трикутнику ABC бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C (мал. 487). Точка O_1 їх перетину рівновіддалена від прямих AB, BC, AC ($O_1M = O_1K = O_1N$). Тому вона є центром кола, яке дотикається до сторони BC трикутника і продовжень двох інших його сторін. Таке коло називають *зовнівписаним*. Центр O_1 кола рівновіддалений від продовжень сторін AB і AC, тому він лежить на бісектрисі кута A.

Для будь-якого трикутника можна побудувати три зовнівписані кола.

На малюнку 487 $AM = AB + BK$, бо $BK = BM$, $AN = AC + CK$, оскільки $CK = CN$. Додавши ліві й праві частини цих рівностей, отримаємо:

$$AM + AN = AB + AC + BK + CK = AB + AC + BC.$$

Оскільки $AM = AN$, то $AM = AN = \frac{AB + AC + BC}{2} = p$, де p — півпериметр ΔABC.

Маємо властивість: **відстані від точок дотику зовнівписаного кола, які належать продовженню двох сторін трикутника, до їх спільної вершини, дорівнюють півпериметру p трикутника.**

Оскільки $AM = AB + BK = p$, $AN = AC + CK = p$ і $AM = AN$, то $AB + BK = AC + CK = p$.

Отримали ще одну властивість: **пряма, що проходить через точку дотику зовнівписаного кола до сторони трикутника і протилежну цій стороні вершину, поділяє його периметр навпіл.**

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
описане коло	circum-scribed circle	umschriebener Kreis	cercle circonscrit
вписане коло	inscribed circle	Inkreis (m), ein-beschriebener Kreis	cercle inscrit

qr.orioncentr.com.ua/dYfb5

Пригадайте головне

1. Яке коло називається описаним навколо трикутника?
2. Яке коло називається вписаним у трикутник?
3. Сформулюйте властивості описаного кола.
4. Де лежить центр описаного кола?
5. Сформулюйте властивості вписаного кола.
6. Де лежить центр вписаного кола?

Усне тренування

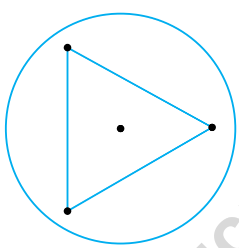
Обчисліть:

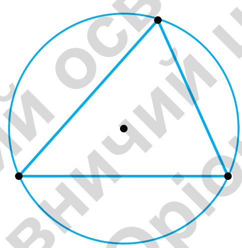
1) $580 \cdot 0{,}1 + 12$; $\quad 85\,000 \cdot 0{,}001 - 25$;

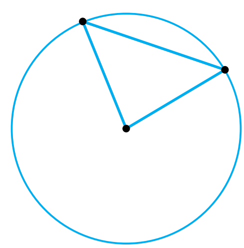
2) $7900 \cdot 0{,}01 + 21$; $\quad 1350 \cdot 0{,}1 - 45$.

Розв'яжіть задачі

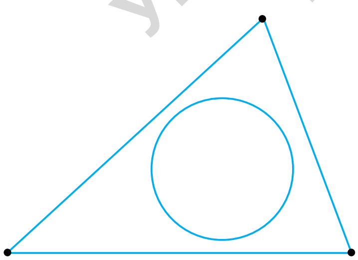
919'. На якому з малюнків 488–490 зображено коло, описане навколо трикутника?

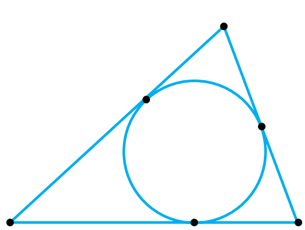

Мал. 488

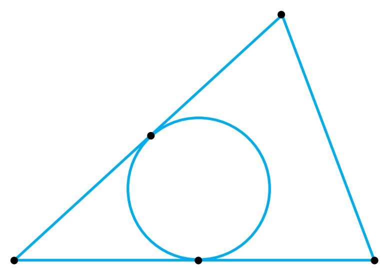

Мал. 489


Мал. 490

920'. На якому з малюнків 491–493 зображено коло, вписане в трикутник?


Мал. 491


Мал. 492


Мал. 493

921'. Де розміщується центр кола, яке проходить через вершини трикутника ABC, якщо він:

1) гострокутний;
2) прямокутний;
3) тупокутний?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

922'. Чи правильно, що відстані від вершини трикутника до точок його дотику із вписаним колом:
1) рівні;
2) не рівні?

923°. Накресліть трикутники: прямокутний; тупокутний. Для кожного з них знайдіть за допомогою косинця та лінійки центр описаного кола і побудуйте це коло. Як розміщені центри побудованих кіл?

924°. Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою косинця та лінійки знайдіть центр описаного кола і побудуйте це коло. Як розміщений його центр?

925°. Скільки кіл можна провести через:
1) одну точку;
2) дві точки;
3) три точки?

926°. Якщо коло описане навколо трикутника, то говорять також, що *трикутник вписаний у коло*. Зобразіть на малюнках різні випадки розміщення центра O кола відносно сторони AC трикутника ABC, вписаного в коло.

qr.orioncentr.com.ua/UjliC

927°. У трикутнику проведено дві медіани. Чи можна вважати точку перетину медіан центром описаного кола, якщо трикутник:
1) різносторонній;
2) рівнобедрений?

928°. У рівносторонньому трикутнику проведено дві медіани. Чи можна вважати точку перетину медіан центром описаного кола?

929°. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює a. Знайдіть радіус описаного кола, якщо:
1) $a = 2$ см;
2) $a = 36$ мм;
3) $a = 9$ дм.

930°. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 5 см. Знайдіть радіус описаного кола.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

931°. Навколо прямокутного трикутника ABC із прямим кутом C описане коло. Знайдіть радіус кола, якщо:
1) $AC = 8$ см, $\angle B = 30°$;
2) $BC = 12$ см, $\angle B = 60°$.

932°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника ABC із прямим кутом C, якщо $BC = 10$ см, $\angle A = 30°$.

933°. Накресліть трикутники: прямокутний; тупокутний. Для кожного з них за допомогою транспортира та лінійки знайдіть центр вписаного кола і побудуйте це коло. Проведіть радіуси кола в точки дотику. Позначте прямі кути, рівні відрізки й рівні кути на малюнку.

934°. Накресліть гострокутний трикутник. За допомогою транспортира та лінійки знайдіть центр вписаного кола і побудуйте це коло. Проведіть радіуси кола в точки дотику. Позначте прямі кути, рівні відрізки і рівні кути на малюнку.

935°. Скільки вписаних кіл можна провести в трикутнику?

936°. Якщо коло вписане в трикутник, то говорять також, що *трикутник описаний навколо кола*. Зобразіть на малюнку коло з центром O та трикутник ABC, описаний навколо цього кола, якщо трикутник:
1) гострокутний;
2) прямокутний;
3) тупокутний.
Проведіть радіуси кола в точки дотику. Позначте прямі кути та рівні відрізки на малюнку.

937°. Зобразіть на малюнку коло з центром O та прямокутний трикутник MKN, описаний навколо цього кола. Проведіть радіуси кола в точки дотику. Позначте прямі кути та рівні відрізки на малюнку.

938°. Точка O — центр кола, вписаного у ΔABC. Знайдіть $\angle ABO$, $\angle CBO$, $\angle CAO$, $\angle BAO$, якщо:
1) $\angle A = 50°$, $\angle B = 70°$;
2) $\angle A = \angle B = 40°$;
3) $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$;
4) $\angle A = 120°$, $\angle B = \angle C$.

939°. Точка O — центр кола, вписаного у ΔKMN. Знайдіть $\angle KMO$, $\angle NMO$, $\angle NKO$, $\angle MKO$, якщо $\angle K = 90°$, $\angle M = 30°$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

940°. Трикутник KLM описано навколо кола з центром O. Знайдіть кути даного трикутника, якщо:
1) $\angle OKL = 25°$, $\angle OLM = 30°$;
2) $\angle KMO = \angle MKO = 20°$;
3) $\angle MLO = 2\angle OMK = 30°$;
4) $\angle OLK = \angle OKM = 15°$.

941°. Трикутник ABC описано навколо кола з центром O. Знайдіть кути даного трикутника, якщо $\angle OAC = 30°$, $\angle OCB = 40°$.

942°. Коло з центром O дотикається до сторін трикутника ABC відповідно в точках K, L, M. Знайдіть:
1) AK, якщо $AM = 2$ см;
2) BK, якщо $BL = 3$ см;
3) CM, якщо $CL = 1$ см.

943°. Коло з центром O дотикається до сторін трикутника DEF відповідно в точках K, L, M. Знайдіть DK, якщо $DM = 7$ см.

944°. Рівнобедрений трикутник DEF описано навколо кола з центром O, точки A, B, C — точки дотику. Знайдіть:
1) CF, якщо $BF = 5$ см;
2) CD, якщо $AD = 5$ см;
3) AE, якщо $BE = 4$ см.

945°. Рівносторонній трикутник ABC описано навколо кола з центром O, точки D, E, F — точки дотику. Знайдіть DB, якщо $BE = 4$ см.

946°. **Доведіть, що сума радіусів кіл, описаного навколо рівностороннього трикутника і вписаного в нього, дорівнює його висоті.**

947°. Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо радіуси вписаного та описаного кіл відповідно дорівнюють:
1) 5 см і 10 см;
2) 7 см і 14 см;
3) 9 см і 18 см;
4) r і R.

948°. Знайдіть висоту рівностороннього трикутника, якщо радіуси вписаного та описаного кіл відповідно дорівнюють:
1) 2 см і 4 см;
2) 11 см і 22 см.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

949°. Знайдіть відношення радіуса вписаного в рівносторонній трикутник кола до радіуса описаного кола.

950°. Для рівностороннього трикутника знайдіть радіуси вписанного та описаного кіл, якщо висота трикутника дорівнює:
1) 12 см; 3) 36 см;
2) 24 см; 4) h.

qr.orioncentr.com.ua/tQDfM

951°. Для рівностороннього трикутника знайдіть радіуси вписанного та описаного кіл, якщо висота трикутника дорівнює:
1) 9 см; 2) 18 см.

952. За якої умови точка перетину серединних перпендикулярів двох сторін трикутника лежить на його третій стороні?

953. Чи може один із катетів прямокутного трикутника дорівнювати радіусу описаного кола? Відповідь поясніть.

954. У прямокутному трикутнику кут між медіаною та бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює $10°$. Знайдіть кути трикутника.

955. **Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника *ABC* з основою *AC*, лежить на бісектрисі, проведеній з вершини *B*.**

956. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює $120°$, бічна сторона — 4 см. Знайдіть радіус описаного кола.

957. На сторонах кута ABC, що дорівнює $120°$, відкладено відрізки $BA = BC = 6$ см. Знайдіть радіус кола, що проходить через точки A, B і C.

958. Доведіть, що центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, лежить на одній з його медіан.

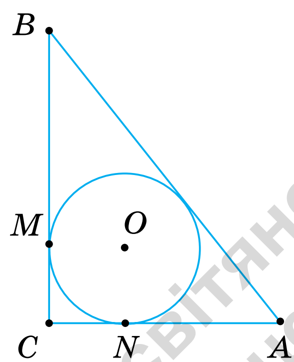
959. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 8 см і 4 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника.

960. Точки дотику кола, вписаного в трикутник, ділять його сторони на відрізки, три з яких дорівнюють 4 см, 5 см і 6 см. Знайдіть сторони трикутника.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

961. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона ділиться точкою дотику вписаного кола у відношенні 5 : 7, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника, якщо його основа дорівнює 10 см.

962. **У прямокутний трикутник *ABC* із прямим кутом *C* вписане коло, яке дотикається до катетів у точках *M* і *N*. Доведіть, що відрізки *CM* і *CN* дорівнюють радіусу кола (мал. 494).**



Мал. 494

963. У прямокутному трикутнику гіпотенуза ділиться точкою дотику вписаного кола радіуса r на відрізки завдовжки m і n. Знайдіть периметр трикутника, якщо:
1) $m = 4$ см, $n = 6$ см, $r = 2$ см;
2) $m = 3$ см, $n = 10$ см, $r = 2$ см;
3) $m = 5$ см, $n = 12$ см, $r = 3$ см;
4) $m = 4$ см, $n = 21$ см, $r = 3$ см.

964. У прямокутний трикутник з катетами 6 см і 8 см вписано коло радіуса 2 см. У якому відношенні точка дотику ділить гіпотенузу?

965*. **У прямокутний трикутник із катетами *a*, *b* та гіпотенузою *c* вписано коло радіуса *r*. Доведіть, що** $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

966*. Знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник із катетами m і n та гіпотенузою k, якщо:
1) $m : n : k = 3 : 4 : 5$, $P = 24$ см;
2) $m : n : k = 8 : 15 : 17$, $P = 12$ дм;
3) $m : n : k = 5 : 12 : 13$, $P = 0,6$ м,
де P — периметр даного трикутника.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

967*. Із вершини прямого кута трикутника проведено промені через центри вписаного й описаного кіл. Кут між цими променями дорівнює $7°$. Знайдіть гострі кути трикутника.

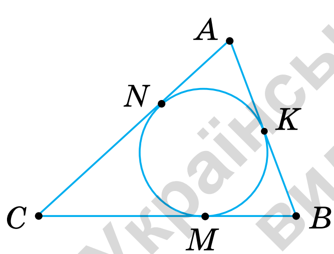
968*. Вписане у трикутник ABC коло дотикається до сторін AB, BC і AC відповідно в точках K, M і N. Доведіть, що

$$AK + BM + CN = BK + CM + AN.$$

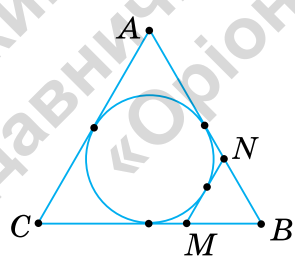
969*. У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається до сторін трикутника в точках M, N і K (мал. 495). Доведіть, що $AN = AK = p - BC$, $BM = BK = p - AC$, $CM = CN = p - AB$, де p — півпериметр трикутника.

970*. До кола, вписаного в рівносторонній трикутник ABC зі стороною a, проведено дотичну, яка перетинає сторони трикутника в точках M і N (мал. 496). Знайдіть периметр трикутника BMN.

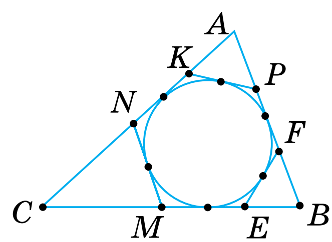
971*. До кола, вписаного в трикутник ABC, проведено три дотичні (мал. 497). Периметри утворених трикутників AKP, BEF і CMN відповідно дорівнюють P_1, P_2, P_3. Знайдіть периметр трикутника ABC.



Мал. 495



Мал. 496



Мал. 497

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Проявіть компетентність

972*. Три заводи розміщені у вершинах A, B і C різностороннього трикутника і сполучені між собою магістралями. Усередині цього трикутника на однаковій відстані від магістралей розташований населений пункт O, який сполучено дорогами з кожним заводом. Яким має бути найкоротший замкнений маршрут автобуса, призначеного для розвезення жителів населеного пункту до всіх трьох заводів?

§ 20. ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

1. Що таке задача на побудову

qr.orioncentr.com.ua/Jp0GT

Ситуація. На уроці учні 7-Б класу будували бісектрису кута і використали для цього транспортир. Юрій Петрович сказав, що таку побудову можна виконати за допомогою лише циркуля та лінійки. Таких задач на побудову є безліч. Вони утворюють окремий розділ геометрії, який так і називається — *задачі на побудову*.

У задачах на побудову потрібно побудувати геометричну фігуру циркулем і лінійкою.

Чи будь-які побудови можна виконувати циркулем й лінійкою?

Ні.

Запам'ятайте!

За допомогою лінійки можна провести:
довільну пряму;
пряму, що проходить через дану точку;
пряму, що проходить через дві дані точки.
За допомогою циркуля можна:
провести коло з даного центра даним радіусом;
відкласти даний відрізок на прямій.

У задачах на побудову інших операцій виконувати циркулем і лінійкою не можна.

Розв'язуючи задачі на побудову, будемо виділяти три *етапи* — аналіз, побудову, доведення.

Аналіз — це міркування, під час якого знаходимо план побудови. Припускаємо, що шукану фігуру побудовано. Зображаємо її на малюнку, який можна виконати «від руки». Це — малюнок-ескіз. Аналізуємо властивості шуканої фігури і зв'язок її з даними задачі. Встановлюємо послідовність побудов, яка приведе до розв'язку задачі.

Побудова. Стисло записуємо план побудови та будуємо шукану фігуру.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

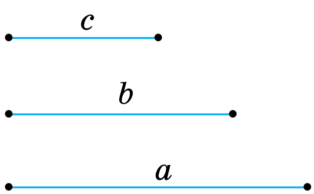
Доведення. Обґрунтовуємо, що побудована фігура відповідає вимогам задачі.

Розглянемо найпростіші задачі на побудову.

2. Побудова трикутника за трьома сторонами

Задача 1 Побудуйте трикутник за даними сторонами a, b, c (мал. 498).

Дано:

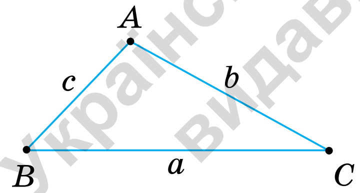


Мал. 498

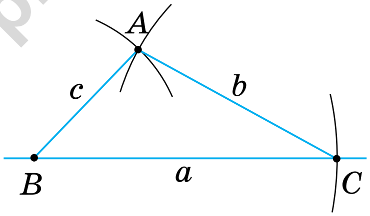
Побудувати: ΔABC, у якого $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

Розв'язання

Аналіз. Припустивши, що ΔABC побудовано, зобразимо його на малюнку-ескізі (мал. 499). Бачимо, що відклавши відрізок $BC = a$, побудуємо вершини B і C трикутника ABC. Вершина A — шукана. Вона лежить на відстані b від точки C, тобто на колі з центром у точці C і радіусом b. Так само встановлюємо, що вершина A лежить на колі з центром B і радіусом c. Отже, вершина A є точкою перетину цих кіл.



Мал. 499



Мал. 500

Побудова (мал. 500).

1. За допомогою лінійки проводимо довільну пряму і позначаємо на ній довільну точку B.

2. На промені з початком B циркулем відкладаємо відрізок $BC = a$.

3. Розхилом циркуля, що дорівнює b, описуємо коло з центром у точці C (на малюнку проводимо лише дугу кола).

4. Розхилом циркуля, що дорівнює c, описуємо коло з центром у точці B.

5. Точку A перетину цих кіл сполучаємо відрізками з точками B і C.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Доведення. У побудованого трикутника ABC: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Отже, ΔABC — шуканий.

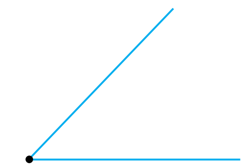
Щоб побудувати трикутник, достатньо побудувати його вершини. Дві вершини можна вважати відомими, їх знайдете, відклавши даний відрізок. Третя вершина — шукана. Розв'язування задачі зводиться до побудови третьої вершини.

3. Побудова кута, що дорівнює даному

Задача 2 Побудуйте кут, що дорівнює даному куту (мал. 501).

qr.orioncentr.com.ua/rPKjX

Дано:

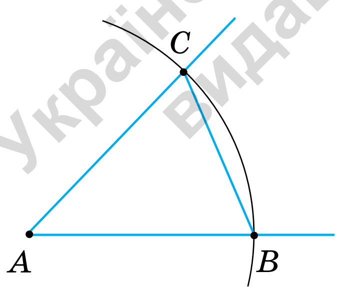


Мал. 501

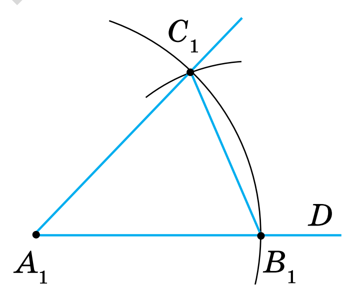
Побудувати: $\angle A_1 = \angle A$.

Розв'язання

Аналіз. У рівних трикутників проти рівних сторін лежать рівні кути. Тому спочатку утворимо ΔABC із даним $\angle A$ (мал. 502). Для цього позначимо на сторонах кута A точки B і C і сполучимо їх відрізком. Потім побудуємо $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ за трьома сторонами AC, AB і BC (задача 1). Побудова спрощується, якщо позначати точки B і C на сторонах кута A одним розхилом циркуля.



Мал. 502



Мал. 503

Побудова (мал. 502, 503).

1. Проводимо промінь A_1D.

2. Описуємо кола рівних радіусів із центрами A і A_1. Нехай одне коло перетинає сторони кута BAC в точках B і C, а інше — промінь A_1D в точці B_1.

3. Описуємо коло з центром B_1 і радіусом BC. C_1 — точка перетину побудованих кіл.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

4. Проводимо промінь A_1C_1.

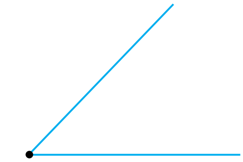
Доведення. За побудовою, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$ (за трьома сторонами). Тоді $\angle A_1 = \angle A$ як кути рівних трикутників, що лежать проти рівних сторін. Отже, $\angle B_1A_1C_1$ — шуканий.

Щоб побудувати кут, що дорівнює даному, достатньо побудувати два кола.

4. Побудова бісектриси кута

Задача 3 Побудуйте бісектрису даного кута (мал. 504).

Дано:



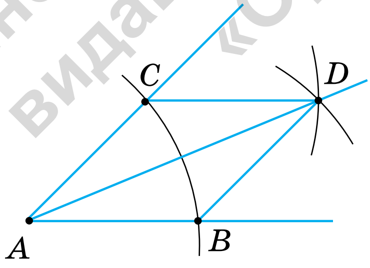
Мал. 504

Побудувати: бісектрису AD кута A.

Розв'язання

Аналіз. Для побудови бісектриси кута A достатньо утворити два трикутники ACD і ABD з рівними сторонами (мал. 505). Для цього описуємо кола одним і тим самим радіусом із центрами в точках A, C і B.

Побудова (мал. 505).



Мал. 505

1. Описуємо коло довільного радіуса з центром у вершині A даного кута A. Точки B і C — точки перетину кола зі сторонами кута.

2. Описуємо кола тим самим радіусом із центрів B і C. Точка D — точка перетину побудованих кіл.

3. Проводимо промінь AD.

Доведення. $\Delta ACD = \Delta ABD$ за трьома сторонами. Тому $\angle CAD = \angle BAD$. Отже, промінь AD — шукана бісектриса кута A.

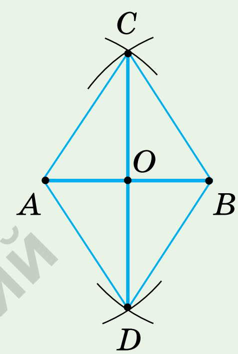
Щоб побудувати бісектрису кута, достатньо побудувати три кола.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Дізнайтеся більше

1. У вас могло виникнути запитання: *Чи будь-яку задачу на побудову можна розв'язати циркулем і лінійкою?*

Виявляється, що ні. Одна з таких задач — поділити даний кут на три рівні кути. Цю задачу називають *задачею про трисекцію кута*. Протягом багатьох століть математики намагалися її розв'язати. Лише в XIX столітті було доведено, що для довільного кута така побудова неможлива.



Мал. 506

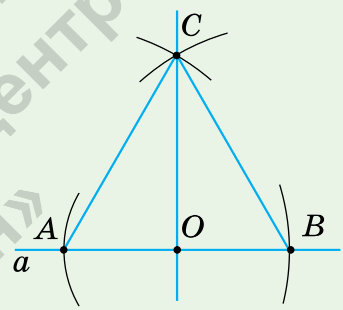
2. До простіших задач на побудову відносять ще дві задачі — поділ відрізка навпіл та побудову прямої, перпендикулярної до даної прямої. Розглянемо їх.

Задача 4 Поділіть навпіл даний відрізок AB.

Побудова (мал. 506).

1. З точок A і B радіусом AB проводимо кола. Точки C і D — точки перетину цих кіл.
2. Проводимо відрізок CD.

Точка O (точка перетину відрізків CD і AB) — середина відрізка AB.



Мал. 507

Задача 5 Через дану точку O проведіть пряму, перпендикулярну до даної прямої a.

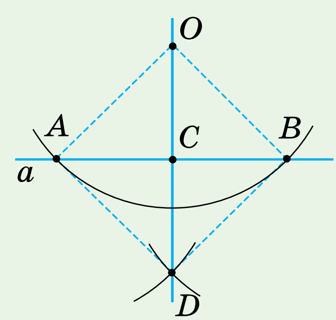
Випадок 1 — точка O лежить на прямій a.

Побудова (мал. 507).

1. З даної точки O довільним радіусом проводимо коло. Точки A і B — точки перетину кола і прямої a.
2. З точок A і B проводимо кола радіусом AB. Точка C — точка їх перетину.
3. Проводимо пряму CO. Тоді $CO \perp a$.

Випадок 2 — точка O не лежить на прямій a.

Побудова (мал. 508).



Мал. 508

1. З даної точки O довільним радіусом проводимо коло, що перетинає пряму a. Точки A і B — точки перетину кола і прямої.
2. З точок A і B тим самим радіусом проводимо кола. Точка D — точка їх перетину, що лежить з іншого боку від прямої a, ніж точка O.
3. Проводимо пряму OD. Тоді $OD \perp a$.

3. Ви будували геометричні фігури циркулем і лінійкою. Проте побудови можна виконувати лише циркулем, лише лінійкою або двосторонньою лінійкою, лише прямим кутом косинця. Для розв'язання такої задачі спочатку виділяють операції, які можна виконувати тим чи іншим інструментом так, як було це зроблено для циркуля і лінійки, потім шукають план побудови та виконують її, а насамкінець доводять, що побудували саме ту фігуру, яку вимагалося.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Словничок

Українська	Англійська/ English	Німецька/ Deutsch	Французька/ Français
побудова циркулем та лінійкою	construction with compass and ruler	Konstruktion mit Zirkel und Lineal	construction au compas et à la règle

qr.orioncentr.com.ua/l7U4b

Пригадайте головне

1. Які етапи розв’язування задачі на побудову?
2. Як побудувати трикутник з даними сторонами?
3. Як побудувати кут, що дорівнює даному куту?
4. Як побудувати бісектрису даного кута?

Усне тренування

Обчисліть:

1) $480 : 2 + 20 : 2$; $35 \cdot 7 - 15 \cdot 7$; $248 : 5 + 52 : 5$;
2) $560 : 4 + 40 : 4$; $42 \cdot 6 - 32 \cdot 6$; $85 \cdot 8 - 25 \cdot 8$.

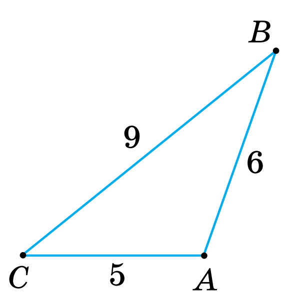
Розв’яжіть задачі

973'. Якими радіусами потрібно провести три кола, щоб побудувати трикутник, що дорівнює трикутнику ABC на малюнку 509?

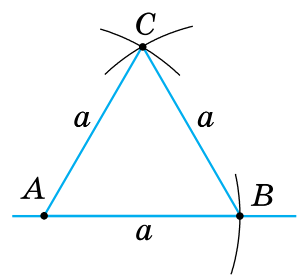
974'. Як побудувати кут, що дорівнює куту A трикутника ABC на малюнку 509?

975'. Як побудувати бісектрису кута A трикутника ABC на малюнку 509?

976°. На малюнку 510 побудовано рівносторонній трикутник зі стороною a. Складіть план побудови.



Мал. 509



Мал. 510

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

977°. Побудуйте трикутник за сторонами:
1) 2 см, 3 см, 4 см;
2) 3 см, 3 см, 3 см;
3) 2,5 см, 6 см, 6,5 см;
4) 3 см, 5 см, 7 см.

978°. Побудуйте трикутник за сторонами:
1) 2 см, 3 см, 3 см;
2) 3 см, 4 см, 5 см.

979°. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою a та бічною стороною b.

qr.orioncentr.com.ua/anY5a

980°. Побудуйте рівнобедрений трикутник, у якого основа і бічна сторона відповідно дорівнюють:
1) 2 см і 2,5 см;
2) 3 см і 4 см;
3) 5 см і 3,5 см.

981°. Побудуйте рівнобедрений трикутник з основою 4 см і бічною стороною 2,5 см.

982°. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте кут, що дорівнює даному:
1) гострому куту;
2) тупому куту.

983°. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте кут, що дорівнює даному прямому куту.

984°. **Побудуйте трикутник за двома сторонами та кутом між ними.**

985°. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічними сторонами та кутом між ними.

986°. **Побудуйте трикутник за стороною і прилеглими до неї кутами.**

987°. Складіть план побудови рівнобедреного трикутника за основою a і прилеглим кутом A.

988°. Накресліть гострий і тупий кути. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте бісектрису кожного з кутів.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

989°. Накресліть прямий кут. За допомогою циркуля та лінійки побудуйте бісектрису цього кута.

990°. Дано тупокутний трикутник. Побудуйте бісектрису зовнішнього гострого кута.

991°. Дано прямокутний трикутник. Побудуйте бісектрису зовнішнього прямого кута.

992°. Побудуйте точку перетину двох бісектрис:
1) гострокутного трикутника;
2) тупокутного трикутника.

qr.orioncentr.com.ua/G1nF9

993°. Дано рівнобедрений трикутник. Побудуйте точку перетину бісектриси кута при основі з бічною стороною.

994. Побудуйте трикутник, сторони якого відносяться як:
1) 2 : 3 : 4;
2) 5 : 12 : 13;
3) 3 : 5 : 7.

995. Побудуйте трикутник, сторони якого відносяться як 3 : 4 : 5.

996. Побудуйте кут, удвічі більший за даний кут.

997. Побудуйте прямокутний трикутник:
1) за двома катетами;
2) за катетом і гіпотенузою;
3) за катетом і гострим кутом.

998. Побудуйте рівнобедрений прямокутний трикутник за його катетом.

999. Побудуйте кут: 1) 30°; 2) 60°; 3) 120°.

1000. Побудуйте кут: 1) 75°; 2) 135°.

1001*. На стороні AB рівностороннього трикутника ABC задано точку C_1. На сторонах AC і BC побудуйте точки B_1 і A_1 відповідно так, щоб трикутник $A_1B_1C_1$ був рівностороннім.

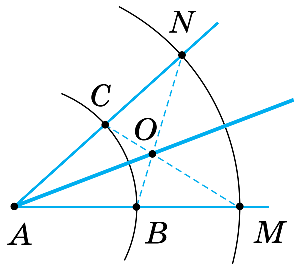
1002*. Побудуйте кут так, щоб дана точка лежала на бісектрисі цього кута.

1003*. На малюнку 511 побудовано бісектрису AO кута A іншим способом, ніж той, що розглядався в підручнику. Складіть

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

план побудови та доведіть, що промінь AO — бісектриса кута A.

1004*. Промені OA і OB перпендикулярні. Побудуйте суміжні кути, для яких ці промені будуть бісектрисами.



Мал. 511

Проявіть компетентність

1005. Для забезпечення водою двох населених пунктів, що розташовані з одного боку від каналу, потрібно на його березі побудувати водонапірну башту так, щоб сумарна довжина труб від неї до кожного з пунктів була найменшою. Як це зробити? Поясніть.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 5

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке коло; центр кола; радіус, хорда, діаметр кола?
2. Чим відрізняється круг від кола?
3. Назвіть випадки взаємного розміщення прямої та кола; двох кіл.
4. Що таке геометричне місце точок?
5. Як переконатися, що фігура є геометричним місцем точок?
6. Яке коло називається описаним навколо трикутника; вписаним у трикутник?
7. Які властивості кола, описаного навколо трикутника; вписаного в трикутник?
8. Як побудувати трикутник за трьома сторонами?
9. Як побудувати кут, що дорівнює даному?
10. Як побудувати бісектрису кута?

ТЕСТОВІ ЗАВДАННЯ

Уважно прочитайте задачі та знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10–15 хв.

1°. Навколо трикутника ABC описано коло з центром O і радіусом R. Яке із співвідношень правильне?
А. $\angle OAB = \angle OAC$. **Б.** $\angle A = \angle B$. **В.** $BC = R$. **Г.** $OC = R$.

2°. У трикутник KLM вписано коло з центром O і радіусом r, яке дотикається до сторони KL у точці A, сторони LM — у точці B і сторони KM — у точці C. Яке із співвідношень правильне?
А. $KL = r$. **Б.** $\angle KCO < \angle MCO$. **В.** $MB = BL$. **Г.** $\angle OAK = 90°$.

3°. У колі з центром O і радіусом 5 см проведено діаметри AN і CM та хорду AM так, що утворився рівносторонній трикутник AOM. Яке із співвідношень правильне?
А. $AC = 10$ см. **Б.** $CN = 2{,}5$ см. **В.** $\angle NAM = 90°$. **Г.** $\angle CON = 60°$.

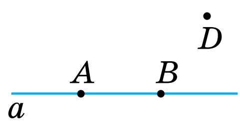
4. Рівнобедрений трикутник ABC описаний навколо кола, центр O якого лежить на медіані BD. Чому дорівнює кут CBD, якщо $\angle DAO = 25°$?
А. 25°. **Б.** 40°. **В.** 50°. **Г.** 80°.

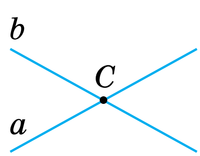
5*. Прямокутний трикутник ABC вписаний у коло із центром O і радіусом R. До гіпотенузи AC проведено медіану та висоту, кут між якими дорівнює меншому з кутів даного трикутника — куту A. Чому дорівнює відстань від основи висоти до вершини A?
А. $0{,}5R$. **Б.** R. **В.** $1{,}5R$. **Г.** $2R$.

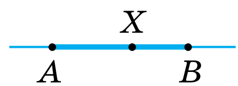
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ПОВТОРЕННЯ ВИВЧЕНОГО

ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

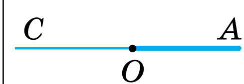
<table>
<tr><th colspan="4">ЕЛЕМЕНТАРНІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ</th></tr>
<tr><th>Точки і прямі</th><th>Відрізки</th><th>Промені</th><th>Кути</th></tr>
<tr>
<td>

Пряма a або AB
$A \in a,\ B \in a,\ D \notin a$


$C \in a,\ C \in b$
Прямі a і b перетинаються в точці C</td>
<td>

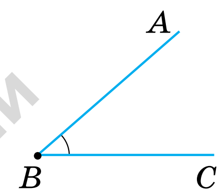
Відрізок AB — частина прямої

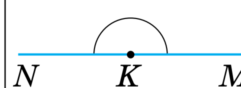
Точки A і B — кінці відрізка

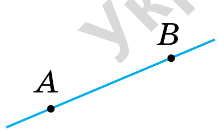
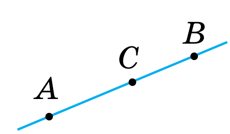
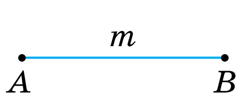
Точка X — внутрішня точка відрізка AB</td>
<td>

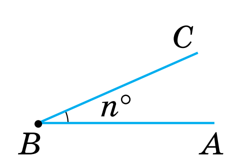
Промінь OA — частина прямої

Точка O — початок променя

Промені OA і OC — доповняльні</td>
<td>

$\angle ABC$ утворюють промені BA і BC


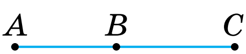
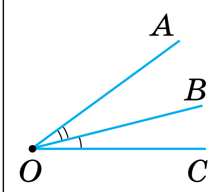
$\angle NKM$ — розгорнутий, утворюють доповняльні промені KM і KN</td>
</tr>
<tr><th colspan="4">ВЛАСТИВОСТІ</th></tr>
<tr><th colspan="2">прямої</th><th colspan="2">розміщення точок на прямій</th></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну</td>
<td>Із трьох точок прямої одна і тільки одна точка лежить між двома іншими</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr><th colspan="4">ВЛАСТИВОСТІ ВИМІРЮВАННЯ</th></tr>
<tr><th colspan="2">відрізків</th><th colspan="2">кутів</th></tr>
<tr>
<td>

$AB = m > 0$</td>
<td colspan="2">$\dfrac{\text{Довжина}}{\text{Градусна міра}}$ кожного $\dfrac{\text{відрізка}}{\text{кута}}$
більша за нуль</td>
<td>

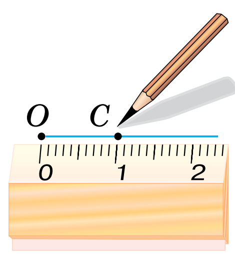
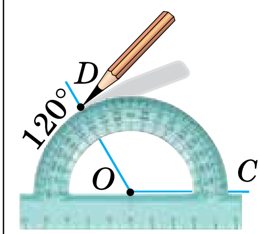
$\angle ABC = n^\circ > 0$</td>
</tr>
</table>

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

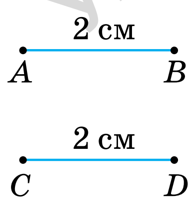
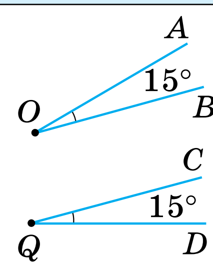
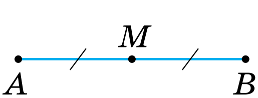
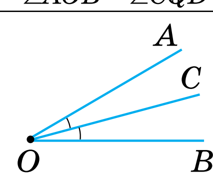
ВЛАСТИВОСТІ ВИМІРЮВАННЯ

відрізків		кутів
 $AC = AB + BC$	Довжина відрізка / Градусна міра кута дорівнює сумі довжин відрізків / градусних мір кутів, на які він розбивається будь-якою його точкою / будь-яким променем, що проходить між сторонами кута	 $\angle AOC =$ $= \angle AOB + \angle BOC$

ВЛАСТИВОСТІ ВІДКЛАДАННЯ

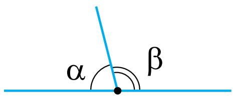
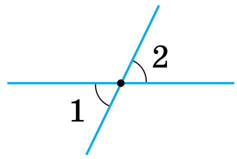
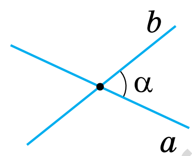
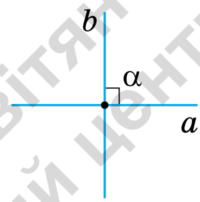
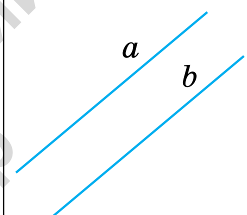
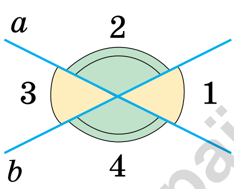
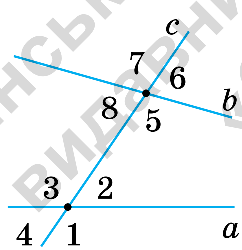
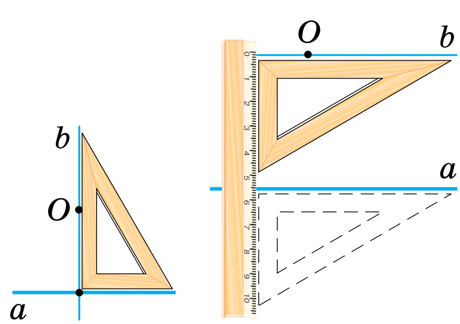
відрізків		кутів
 $OC = m$ — єдиний	На промені від його початку / Від променя по один бік від нього можна відкласти *тільки один* відрізок даної довжини / кут даної градусної міри	 $\angle COD = n°$ — єдиний

РІВНІСТЬ

відрізків			кутів
 $AB = CD$	Відрізки / Кути називають *рівними*, якщо рівні їх довжини / градусні міри		 $\angle AOB = \angle CQD$
 $AM = BM$	Точка M — *середина* AB	Промінь OC — *бісектриса* кута AOB	 $\angle AOC = \angle BOC$

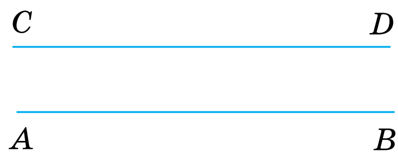
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

<table>
<tr><th colspan="2">КУТИ</th><th colspan="2">ПРЯМІ</th></tr>
<tr><th>суміжні</th><th>вертикальні</th><th>перетинаються</th><th>не перетинаються</th></tr>
<tr>
<td>
$\alpha + \beta = 180°$</td>
<td>
$\angle 1 = \angle 2$</td>
<td rowspan="3">під кутом $\alpha < 90°$

під кутом $\alpha = 90°$ (перпендикулярні)

$a \perp b$</td>
<td rowspan="3">(паралельні)

$a \parallel b$</td>
</tr>
<tr><th>між двома прямими</th><th>при двох прямих і січній</th></tr>
<tr>
<td rowspan="2">вертикальні:
$\angle 1$ і $\angle 3$,
$\angle 2$ і $\angle 4$

суміжні:
$\angle 1$ і $\angle 2$,
$\angle 2$ і $\angle 3$,
$\angle 3$ і $\angle 4$,
$\angle 4$ і $\angle 1$</td>
<td rowspan="2">внутрішні:
а) односторонні
$\angle 2$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 8$;
б) різносторонні
$\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 3$ і $\angle 5$

відповідні:
$\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 2$ і $\angle 6$,
$\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 8$,
зовнішні:
а) односторонні
$\angle 1$ і $\angle 6$, $\angle 4$ і $\angle 7$;
б) різносторонні
$\angle 1$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 6$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Через точку $\frac{\text{поза прямою або на прямій}}{\text{поза прямою}}$
можна провести
єдину пряму, $\frac{\text{перпендикулярну}}{\text{паралельну}}$ даній
</td>
</tr>
</table>

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Дві прямі на площині називаються ***паралельними***, якщо вони не перетинаються.



Записують: $AB \parallel CD$

Говорять: «Пряма AB паралельна прямій CD».

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

ОЗНАКИ

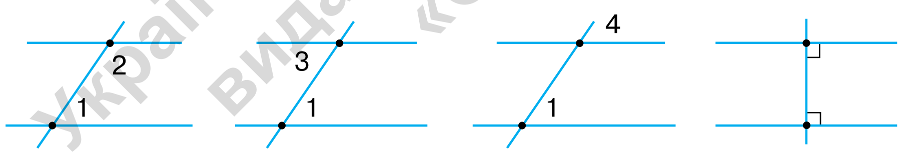
ЯКЩО

при двох прямих і січній:
- сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°
- внутрішні різносторонні кути рівні
- відповідні кути рівні

дві прямі:
- перпендикулярні до третьої прямої

ТО

дані прямі паралельні



ВЛАСТИВОСТІ

ЯКЩО

- дві прямі паралельні і їх перетинає третя пряма (січна)
- пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих

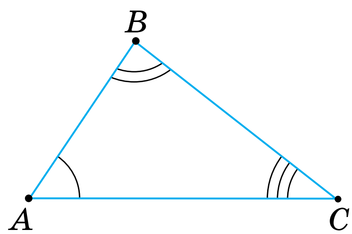
ТО

- сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°
- внутрішні різносторонні кути рівні
- відповідні кути рівні
- вона перпендикулярна і до другої прямої

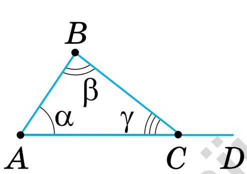
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

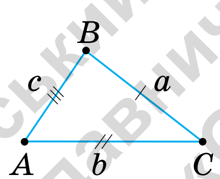
ТРИКУТНИКИ

Трикутником називається геометрична фігура, яка складається з трьох відрізків, які попарно сполучають три точки, що не лежать на одній прямій.

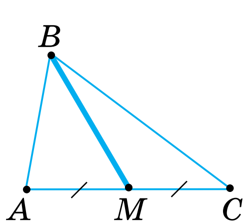
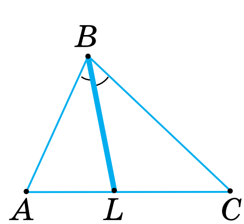
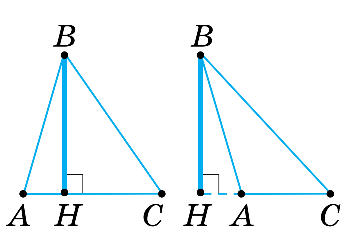


A, B, C — *вершини* трикутника
AB, BC, AB — *сторони* трикутника

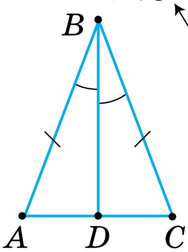
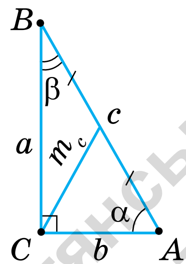
<table>
<tr><th colspan="2">ВЛАСТИВОСТІ</th><th colspan="2">ВИДИ</th></tr>
<tr><th>кутів</th><th>сторін</th><th>за сторонами</th><th>за кутами</th></tr>
<tr><td rowspan="3">

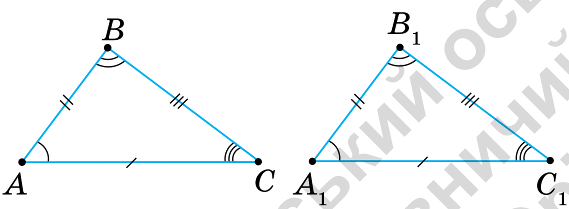
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$
$\angle BCD = \alpha + \beta$
$\angle BCD > \alpha$
$\angle BCD > \beta$</td><td rowspan="3">

$a + b + c = P$
$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$</td><td>різносторонні
$a \neq b \neq c$</td><td>гострокутні
$\alpha < 90°$
$\beta < 90°$
$\gamma < 90°$</td></tr>
<tr><td>рівнобедрені
$a = b$ або $a = c$
або $b = c$</td><td>прямокутні
$\alpha = 90°$
або $\beta = 90°$
або $\gamma = 90°$</td></tr>
<tr><td>рівносторонні
$a = b = c$</td><td>тупокутні
$\alpha > 90°$
або $\beta > 90°$
або $\gamma > 90°$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">ВАЖЛИВІ ВІДРІЗКИ</th></tr>
<tr><td>медіана

</td><td>бісектриса

</td><td>висота

</td></tr>
</table>

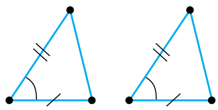
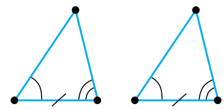
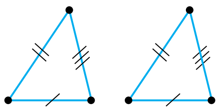
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

РІВНОБЕДРЕНИЙ ТРИКУТНИК	ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК
ЯКЩО ΔABC — рівнобедрений ($AB = BC$) **ТО** $\angle A = \angle C$; бісектриса BD є медіаною; бісектриса BD є висотою **ВЛАСТИВОСТІ** **ЯКЩО** **ОЗНАКИ**	**ЯКЩО** ΔABC — прямокутний ($\angle C = 90°$) **ТО** $\alpha + \beta = 90°$; $m_c = 0{,}5c$ **ВЛАСТИВОСТІ** **ЯКЩО** **ОЗНАКИ**
	

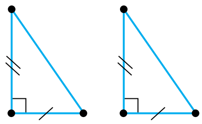
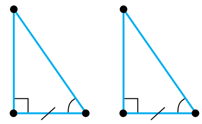
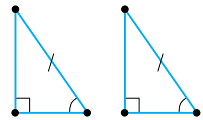
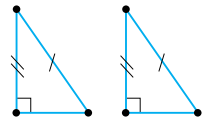


$$\left.\begin{aligned} \angle A &= \angle A_1 \\ \angle B &= \angle B_1 \\ \angle C &= \angle C_1 \\ AB &= A_1B_1 \\ BC &= B_1C_1 \\ AC &= A_1C_1 \end{aligned}\right\} \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

за двома сторонами і кутом між ними	за стороною і двома прилеглими кутами	за трьома сторонами
		

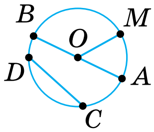
ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

за двома катетами	за катетом і гострим кутом	за гіпотенузою і гострим кутом	за гіпотенузою і катетом
			

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

КОЛО

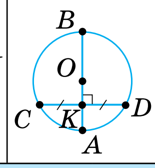
ВАЖЛИВІ ВІДРІЗКИ



AB — діаметр,
CD — хорда,
OM — радіус

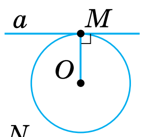
$AB = 2OM$
$CD \le AB$

ВЛАСТИВОСТІ

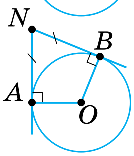


Якщо $\dfrac{AB \perp CD}{CK = KD}$, то $\dfrac{CK = KD}{AB \perp CD}$

ДОТИЧНА ДО КОЛА

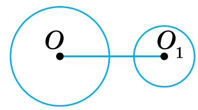


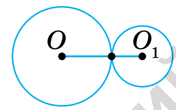
a — дотична,
$a \perp OM$

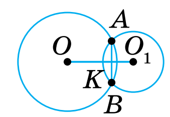


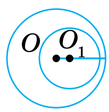
$AN = BN$

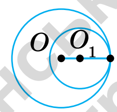
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ КІЛ







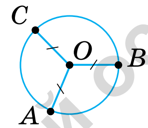




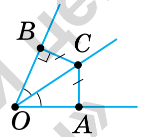
$AB \perp OO_1$,
$AK = KB$

ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК

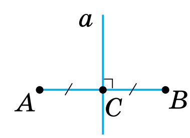
Фігура F є геометричним місцем точок (ГМТ) *площини, якщо*:
1) кожна точка фігури має ту саму властивість;
2) кожна точка площини, яка має цю властивість, належить даній фігурі



Коло є ГМТ, рівновіддалених від даної точки



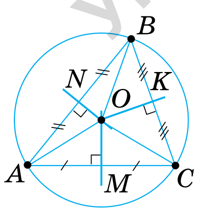
Бісектриса кута є ГМТ, рівновіддалених від сторін кута



Серединний перпендикуляр до відрізка є ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА

КОЛО, ВПИСАНЕ У ТРИКУТНИК



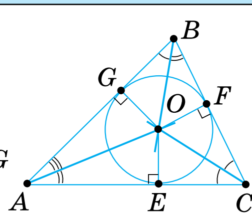
Центр O кола — точка перетину

серединних перпендикулярів

$R = OA = OB = OC$

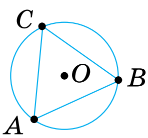
бісектрис кутів

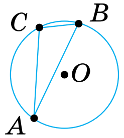
$r = OE = OF = OG$

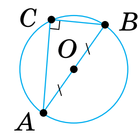


$\dfrac{\text{Навколо будь-якого трикутника}}{\text{У будь-який трикутник}}$ можна $\dfrac{\text{описати}}{\text{вписати}}$ коло і до того ж тільки одне

РОЗМІЩЕННЯ ЦЕНТРА ОПИСАНОГО КОЛА ВІДНОСНО СТОРІН ТРИКУТНИКА







$R = \dfrac{AB}{2}$

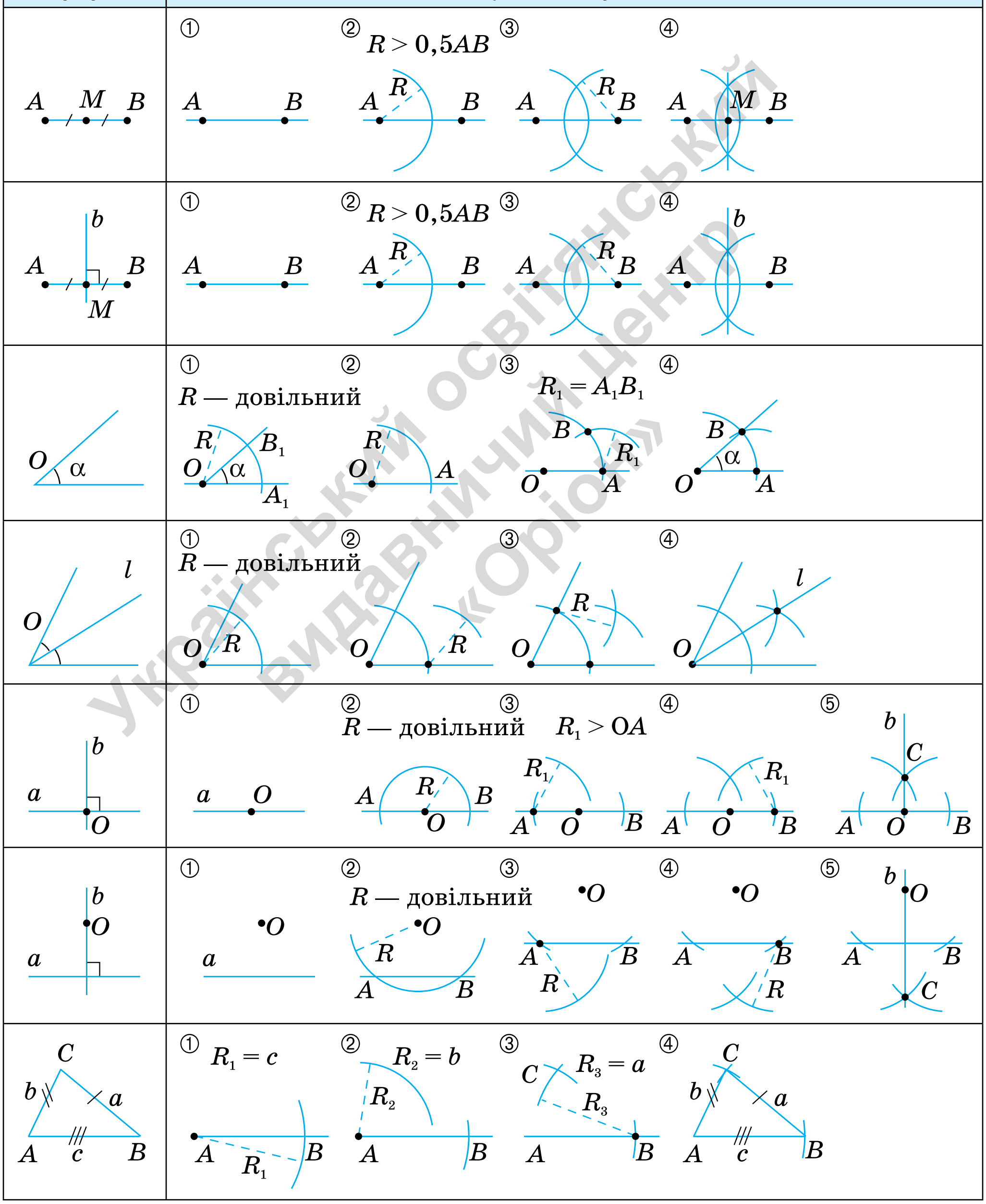
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

За допомогою лінійки можна провести:	*За допомогою циркуля можна*:
• довільну пряму; • пряму, що проходить через дану точку; • пряму, що проходить через дві дані точки	• провести коло з даного центра даним радіусом; • відкласти відрізок на промені від його початку

Ніяких інших операцій виконувати циркулем і лінійкою не можна

Побудувати	Кроки побудови



Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Розв'яжіть задачі

qr.orioncentr.com.ua/2phiL

Елементарні геометричні фігури та їх властивості

1. Як за допомогою шнура, натертого крейдою, відмітити на класній дошці пряму? Як користуються шнуром для проведення прямої муляри й теслі?

2. Як, не користуючись лінійкою, перевірити, чи по прямій відрізано аркуш; картон; фанеру?

3. Поясніть зміст таких речень: 1) затемнення Сонця відбувається тоді, коли Місяць займає положення між Сонцем і Землею; 2) затемнення Місяця відбувається тоді, коли Земля займає положення між Сонцем і Місяцем.

qr.orioncentr.com.ua/tSskA

4. Чи лежить точка C на відрізку AB, якщо:
1) $AB = 10$ см, $AC = 45$ мм, $BC = 0{,}55$ дм;
2) $BC = 41$ мм, $AC = 0{,}5$ дм, $AB = 9{,}6$ см?

5. Чи можуть точки A, B, C лежати на одній прямій, якщо:
1) $AB = 3{,}7$ см, $BC = 42$ мм, $AC = 0{,}8$ дм;
2) $AC = 90$ мм, $BC = 3{,}8$ см, $AB = 0{,}52$ дм?

6. Точки A, B, C і D послідовно розміщені на прямій, причому $AB = CD$. Доведіть, що відрізки AD і BC мають спільну середину.

7. Точки A, B і C лежать на прямій, точки M і N — середини відрізків AB і AC. Доведіть, що $BC = 2MN$.

8. Точки A, B і C лежать на прямій, $AB = 6$ см, $BC = 10$ см. Якою може бути довжина відрізка AC? Для кожного з можливих випадків зробіть малюнок.

9. На прямій дано два відрізки $OA = 8$ см і $OB = 4$ см. Знайдіть:
1) відстань між точками A і B;
2) відстань між точкою O і серединою M відрізка AB.

10. Три школи розміщено по прямій лінії. Відстань між школами № 1 і № 2 — 5 км, а між школами № 1 і № 3 — 4 км. Якою може бути відстань між школами № 2 і № 3?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

11. Від центра агрофірми до центра її відділення прокладають телефонну лінію. Для цього через кожні 50 м слід поставити стовп. Скільки стовпів потрібно заготовити, якщо довжина лінії становить 4 км?

12. Через кожний метр 20-метрового прямого паркану закопано стовп. Визначте: 1) скільки стовпів закопано? 2) яка відстань між першим стовпом від початку і п’ятим — від кінця? 3) яка відстань між десятим стовпом від початку і десятим — від кінця?

13. На карті Києва, виконаній у масштабі 1 : 30 000, довжина кварталу: 1) між вулицями Хрещатик і Євгена Чикаленка дорівнює 2 см; 2) між вулицями Липською та Шовковичною дорівнює 1,5 см. Яка довжина цих кварталів?

14. Майстерня має довжину 44 м і ширину — 24 м. Посередині коротшої стіни розташовано двері завширшки 4 м, а довша стіна має п’ять вікон з рівними простінками між ними. Ширина кожного вікна дорівнює 4 м. Накресліть план майстерні в масштабі 1 : 400.

15. Вимірявши два відрізки в деяких одиницях довжини, ви одержали, що один із них довший за інший удвічі. Потім вирішили порівняти їх довжини точніше і для цього зменшили одиницю довжини в 10 разів (наприклад, замість 1 см взяли 1 мм). Чи досягли ви мети?

16. На аркуші паперу позначено дві точки A і B. Як треба зігнути цей аркуш, щоб поділити відрізок AB навпіл?

17. Із 3-метрових і 4-метрових колод однакової товщини потрібно заготовити машину дров, розпилявши колоди на шматки завдовжки 1 м. Які колоди вигідніше розпилювати?

18. Як можна швидко визначити приблизну кількість аркушів паперу, складеного у великий стос?

19. Потрібно виміряти лінійкою діаметр дуже тонкого дроту. Запропонуйте спосіб вимірювання.

20. Вам потрібно виміряти діагональ цеглини (відстань між найбільш віддаленими її вершинами). Запропонуйте спосіб вимірювання діагоналі лінійкою.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

21. Виріжте із цупкого паперу смужку. Згинанням поділіть її на 3; 4; 6 рівних частин.

22. Як від шматка тканини завдовжки 8 м відрізати, не відмірюючи, 5 м?

23. Чи проходить промінь OC між сторонами кута AOB, якщо:
1) $\angle AOC = 90°$, $\angle BOC = 43°$, $\angle AOB = 49°$;
2) $\angle AOC = 30°$, $\angle BOC = 65°$, $\angle AOB = 95°$?

qr.orioncentr.com.ua/M1jo5

24. Як перевірити, чи є даний кут розгорнутим?

25. Якщо розгорнутий кут поділити на три рівні кути, то бісектриса середнього кута перпендикулярна до сторін розгорнутого кута. Доведіть.

26. Вася й Ваня провели в зошитах відрізок AB, позначили на ньому точку O і побудували прямий кут KOM. Вася з'ясував, що сума кутів AOK і BOM дорівнює 90°. Ваня ж наполягає на тому, що їх різниця дорівнює 90°. Хто з них правий?

27. На скільки градусів повернеться хвилинна стрілка за:
1) 20 хв; 2) 10 хв?

28. (Задача-жарт) Від аркуша паперу відрізали один із кутів. Скільки кутів матиме аркуш?

Взаємне розміщення прямих на площині

qr.orioncentr.com.ua/riZx6

29. Розгорнутий кут поділено на 3 рівні кути. Як за допомогою косинця провести бісектрису середнього із цих кутів?

30. Один із суміжних кутів збільшується від 0° до 180°. Як змінюватиметься інший кут?

qr.orioncentr.com.ua/Hy9rW

31. Чи можуть на паралельних прямих лежати:
1) вершини трикутника;
2) сторони трикутника?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

32. Чи можуть на перпендикулярних прямих лежати:
1) вершини трикутника; 2) сторони трикутника?

33. Дві прямі перетинаються. Чи можна провести третю пряму, паралельну кожній із них? Відповідь поясніть.

34. Прямі a і b паралельні прямій c. Доведіть, що пряма, яка перетинає пряму a, перетинає також і пряму b.

35. Дві паралельні прямі перетинає третя. Скільки при цьому може бути кутів:
1) гострих; 2) тупих; 3) прямих?

qr.orioncentr.com.ua/DF75n

36. За якої умови рівні всі кути, що утворені при перетині двох паралельних прямих третьою?

37. Чи правильне твердження: якщо при перетині двох прямих третьою утворилося рівно два кути по 91°, то прямі не паралельні?

38. Дві паралельні прямі перетинає третя пряма так, що один з утворених кутів становить $1\frac{1}{3}$ прямого кута. Під яким кутом його бісектриса перетинає іншу паралельну пряму?

39. Доведіть, що бісектриси двох кутів з паралельними сторонами паралельні або перпендикулярні між собою.

40. З точки A виходять три промені. На одному з крайніх променів взято точку K, через яку проведено пряму, що перетинає середній промінь у точці M. Відомо, що $KM = AK$. За якої умови пряма KM буде паралельною іншому з крайніх променів?

41. На одній стороні кута O відкладено відрізки OA_1 і A_1A_2, а на другій — відрізки $OB_1 = OA_1$ і $B_1B_2 = A_1A_2$. Доведіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

42. Як виміряти кут, вершина якого лежить за межами аркуша паперу?

43. На аркуші паперу проведіть пряму й позначте точку, яка не лежить на прямій. Зігнувши аркуш, проведіть через дану точку пряму, перпендикулярну до даної прямої.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

44. Як треба зігнути аркуш паперу, щоб провести через дану точку пряму, паралельну даній прямій?

45. Як треба зігнути шматок тканини, щоб переконатися в тому, що два його краї паралельні?

qr.orioncentr.com.ua/AdQaK

Трикутники

46. Які з наведених тверджень є аксіомами?

1. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і тільки одну.
2. Сума суміжних кутів дорівнює 180°.
3. Із трьох будь-яких точок прямої одна і тільки одна точка лежить між двома іншими.
4. Вертикальні кути рівні.
5. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою його точкою.

47. Які з наведених тверджень є властивостями геометричних фігур, а які — їх ознаками?

1. Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.
2. У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.
3. Якщо при перетині двох прямих третьою внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.
4. Якщо дві паралельні прямі перетинає третя пряма, то відповідні кути рівні.
5. Якщо медіана трикутника дорівнює половині його сторони, до якої вона проведена, то такий трикутник прямокутний.
6. У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

48. Накресліть трикутник. Проведіть три прямі, які перетинають дві його сторони й паралельні третій. Скільки трикутників утворилося? Дайте відповідь на це саме запитання, якщо прямих проведено: 1) 4; 2) 5; 3) n.

49. Як зміниться периметр трикутника, якщо його сторони:

1) збільшити на 3 см;
2) збільшити у 3 рази;
3) зменшити в 1,5 раза;
4) зменшити на 1,5 см?

qr.orioncentr.com.ua/DNvDU

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

50. Як зміниться довжина сторони рівностороннього трикутника, якщо його периметр:
1) збільшити на 6 см;
2) збільшити у 2 рази;
3) зменшити в 4 рази;
4) зменшити на 2,7 см?

51. Довжини сторін трикутника виражаються цілими числами. Знайдіть сторону трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють 1 см і 2 см.

52. Сума двох будь-яких сторін трикутника дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трикутника.

53. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см. Доведіть, що його периметр більший, ніж 40 см.

54. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см. Доведіть, що його периметр менший, ніж 40 см.

55. Виріжте з паперу трикутник. За допомогою перегинання трикутника проілюструйте, що сума його кутів дорівнює 180°.

56. Доведіть, що серед кутів трикутника принаймні один не менший, ніж 60°.

57. Чи існує трикутник, у якого один з кутів дорівнює різниці двох інших кутів?

58. Чи можна який-небудь трикутник розрізати на два гострокутні трикутники?

59. Визначте вид трикутника, у якого сума двох кутів:
1) менша від третього;
2) дорівнює третьому;
3) більша за третій.

60. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle A + \angle B = 103°$, $\angle A - \angle B = 63°$.

61. Чи існує трикутник, у якого перпендикулярні:
1) бісектриси двох його кутів;
2) висоти, проведені з двох його вершин?

62. У якому трикутнику кожний зовнішній кут удвічі більший за кут трикутника:
1) суміжного з ним;
2) не суміжного з ним?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

63. Які кути утворюються при перетині двох бісектрис рівностороннього трикутника?

64. Паперовий трикутник ABC перегнули так, що вершина C опинилася на стороні AB, а з непокритих частин утворилися два рівнобедрені трикутники з вершинами A і B. Знайдіть кут C.

65. Крокви даху будинку утворюють між собою кут 130°. Під яким кутом нахилені крокви до горизонту?

66. Знайдіть висоту даху, крокви якого мають форму рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його основа дорівнює 7 м.

67. Плоский напилок має перехресну насічку. Одна насічка утворює з ребром напилка кут 35°, а інша — 74°. Знайдіть кут між насічками, якщо сторони цих кутів — доповняльні промені.

68. Для вимірювання висоти AB пагорба відійшли від нього по прямій і відмітили точку D так, щоб пагорб було видно під кутом 30°. Потім відійшли ще раз і відмітили точку C, з якої пагорб видно під кутом 15°. Яку відстань треба виміряти, щоб знайти висоту пагорба? Зробіть малюнок.

69. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 40 см і 18 см. Яка з них є основою?

70. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, у якого одна сторона дорівнює 10 см, а один із кутів — 60°.

71. Якого виду трикутник утворюють бісектриси кутів при основі рівнобедреного трикутника з основою цього трикутника?

72. У рівнобедреному трикутнику точка перетину бісектрис кутів при основі рівновіддалена від кінців основи. Доведіть.

73. Доведіть, що коли медіана трикутника ділить його на два трикутники з рівними периметрами, то даний трикутник рівнобедрений або рівносторонній.

74. Яким має бути кут при основі рівнобедреного трикутника, щоб трикутник був:
1) гострокутним;
2) прямокутним;
3) тупокутним?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

75. Вам потрібно відпиляти кінець дошки з паралельними краями під кутом 45°. Як ви це зробите?

76. Шматок тканини має форму трикутника. Як, перегинаючи тканину, встановити, чи є цей трикутник рівностороннім або хоча б рівнобедреним?

77. Як за допомогою перегинання аркуша паперу дістати:
1) рівнобедрений трикутник;
2) рівносторонній трикутник?

78. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC, на його основі AC позначте точку X і проведіть відрізок BX.
1. Доведіть, що коли відрізок AX більший за відрізок CX, то периметр трикутника ABX більший за периметр трикутника BCX. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.
2. Знайдіть різницю периметрів трикутників ABX і BCX, якщо $AX - CX = 2$.
3. Знайдіть різницю відрізків AX і CX, якщо різниця периметрів трикутників ABX і BCX дорівнює m.

79. У рівносторонньому трикутнику проведено всі медіани, бісектриси та висоти. Які висновки можна зробити?

80. Якщо в трикутнику ABC медіана m_a дорівнює половині сторони a, то кут A дорівнює сумі кутів B і C. Доведіть.

81. Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 28 см. Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.

82. На гіпотенузі рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle B = 90°$) відклали відрізок $AM = AB$. Через точку M провели пряму, перпендикулярну до AC. Вона перетнула катет BC в точці T. Доведіть, що:
1) ΔBMT — рівнобедрений; 2) $BT = MC$.

83. Кут BAC дорівнює 30°. З точки D на стороні AB проведено перпендикуляр DE до сторони AC. З точки E проведено перпендикуляр EF до сторони AB, а з точки F — перпендикуляр FM до сторони AC. Знайдіть довжину відрізка FM, якщо $DE = 10$ см.

84. Бісектриси двох внутрішніх або зовнішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих та січній перпендикулярні між собою. Доведіть.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

qr.orioncentr.com.ua/OS8xk

85. У прямокутному трикутнику з вершини прямого кута проведено висоту, бісектрису та медіану. Знайдіть гострі кути трикутника, якщо:
1) кут між висотою та бісектрисою дорівнює $10°$;
2) кут між бісектрисою та медіаною дорівнює $15°$;
3) кут між висотою та медіаною дорівнює $20°$.

86. У прямокутному трикутнику з вершини прямого кута проведено висоту, бісектрису та медіану. Один із гострих кутів трикутника дорівнює $40°$. Знайдіть:
1) кут між висотою та бісектрисою;
2) кут між бісектрисою та медіаною;
3) кут між висотою та медіаною.
Порівняйте кути між висотою й бісектрисою та бісектрисою й медіаною. Зробіть висновок.

87. Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α. Знайдіть зовнішній кут при його вершині. Як використати цей результат:
1) для поділу кута навпіл;
2) для подвоєння кута?

88. Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює α. При яких значеннях α трикутник буде:
1) рівностороннім;
2) прямокутним?

89. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює $40°$.
1. Знайдіть зовнішній кут при основі трикутника.
2. Знайдіть кут між бісектрисами зовнішнього кута при основі та зовнішнього кута при вершині.
3. Розв'яжіть цю задачу, якщо кут при вершині дорівнює α.

90. Доведіть, що коли бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то трикутник рівнобедрений.

91. Доведіть, що кут A трикутника ABC дорівнює $(\angle B_1 + \angle C_1 - \angle A_1) : 2$, де $\angle A_1$, $\angle B_1$, $\angle C_1$ — зовнішні кути при відповідних вершинах.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

92. Чи може бісектриса зовнішнього кута трикутника бути паралельною:
1) одній із його сторін;
2) одній із його висот;
3) одній із бісектрис кутів трикутника?
Відповідь поясніть.

93. Доведіть, що бісектриса кута трикутника перпендикулярна до бісектриси зовнішнього кута, який має ту саму вершину.

94. Накресліть два рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.
1. Позначте точки K і K_1 на сторонах AB і A_1B_1 так, щоб $AK = A_1K_1$; точки L і L_1 — на сторонах BC і B_1C_1 так, щоб $BL = B_1L_1$; точки M і M_1 — на сторонах CA і C_1A_1 так, щоб $CM = C_1M_1$. Утворіть трикутники KLM і $K_1L_1M_1$. Які трикутники на малюнку рівні? Чому?
2. Дайте відповідь на це саме запитання, якщо точки K, K_1, L, L_1, M, M_1 позначити на продовженнях сторін трикутника за відповідні вершини.

95. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено медіану BD. На сторонах AB і CB позначено відповідно точки M і N так, що $AM = CN$. Доведіть, що: 1) $\Delta BDM = \Delta BDN$; 2) $\Delta ADM = \Delta CDN$.

96. Скільки пар рівних трикутників одержимо, якщо в рівносторонньому трикутнику проведемо: 1) одну медіану; 2) дві медіани; 3) три медіани? Як зміниться одержаний результат, якщо даний трикутник буде рівнобедреним?

97. Дано трикутник ABC і точки E і F такі, що середина відрізка BE збігається із серединою сторони AC, а середина відрізка CF — із серединою сторони AB. Доведіть, що точки E, F і A лежать на одній прямій.

98. У рівнобедреному трикутнику ABC проведено медіани AM і CN до бічних сторін AB і BC. Доведіть, що $MN \parallel AC$. Чи зміниться результат, якщо замість медіан провести бісектриси; висоти?

99. Через точку перетину бісектрис зовнішніх кутів при вершинах A і B трикутника ABC проведено пряму, паралельну стороні AB. Ця пряма перетинає продовження сторін AC і BC відповідно в точках D і E. Доведіть, що $DE = AD + BE$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

100. Доведіть, що в рівних трикутників бісектриси, які проведено з вершин рівних кутів, — рівні. Чи зміниться результат, якщо замість бісектрис провести медіани; висоти?

101. Доведіть, що коли в трикутнику дві висоти рівні, то трикутник рівнобедрений.

102. Якщо в трикутнику проведено дві висоти, а відрізки від точки їх перетину до вершин рівні, то трикутник рівнобедрений. Доведіть.

Коло і круг

qr.orioncentr.com.ua/vnlrP

103. Учень накреслив коло, але забув позначити його центр. Чи зможе він знайти центр, якщо пам'ятає, що радіус дорівнює 30 мм?

104. Діаметр кола більший за його радіус на:
1) 10 см;
2) 15 мм;
3) 3,8 дм.
Знайдіть діаметр кола.

105. Діаметр круглої заготовки деталі дорівнює 60 мм, а діаметр виробу — 54 мм. Якої товщини шар металу було знято під час виготовлення деталі?

106. Найбільша відстань від точки A до точок кола дорівнює m, а найменша — n. Знайдіть радіус кола (у сантиметрах), якщо:
1) $m = 0{,}3$ дм, $n = 10$ мм;
2) $m = 50$ мм, $n = 0{,}2$ дм.

107. Дано коло з центром O та діаметром $AB = 4$ см.
1. На діаметрі позначено точку C так, що $OC = 1$ см. Знайдіть відстань від точки C до кінців діаметра.
2. На прямій AB позначено точку D так, що $AD = 1$ см. Знайдіть довжину відрізка BD.

108. На озері правильної круглої форми розташований маленький острів. Знайдіть найкоротший прямий маршрут катера, який сполучатиме дві точки берега й матиме проміжну пристань біля острова.

109. Скільки кіл можна провести через дві точки A і B? Чи є серед них коло з найбільшим радіусом? А з найменшим?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

110. Дано коло з центром O та радіусом R.
1. Яку фігуру утворюють середини всіх його радіусів?
2. Яку фігуру утворюють усі точки X такі, що $OX = 2R$?

qr.orioncentr.com.ua/QyKxd

111. Проведіть відрізок AB і позначте на ньому точки A_1, B_1, X так, щоб $AA_1 = BB_1$, $XA = XB$.
1. Доведіть, що $XA_1 = XB_1$.
2. Доведіть обернене: якщо $XA_1 = XB_1$, то $XA = XB$.
3. Розв'яжіть задачу для випадку, коли точка X не лежить на відрізку AB.

112. Як поділити навпіл кут на місцевості, не вимірюючи його?

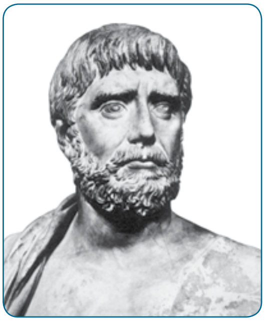
113. Як на місцевості провести пряму, перпендикулярну до даної прямої, користуючись лише кілками та мотузкою?

114. Доведіть, що серединні перпендикуляри до двох сторін трикутника перетинаються.

115. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює a. Знайдіть відстань між точкою перетину висот трикутника та центром описаного кола.

116. Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $35°$. Під яким кутом видно кожний з його катетів із центра описаного кола?

117. З історії стародавнього світу до нас дійшла легенда про давньогрецького математика Фалеса з Мілету (625–548 рр. до н. е.): учений приніс у жертву бика, відкривши спосіб побудови кола, описаного навколо прямокутного трикутника. У чому полягає цей спосіб?



118. Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, є діаметром кола. Як розміщене коло відносно сторін трикутника?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

СКЛАДНІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

Розв'язування складніших задач на побудову полягає не стільки в побудові фігури циркулем і лінійкою, скільки у знаходженні плану побудови на основі проведеного аналізу, а також у доведенні, що в результаті виконання зазначених побудов одержимо фігуру, яка відповідає вимогам задачі.

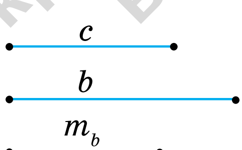
У записі плану побудови посилаємося на найпростіші задачі на побудову. Це задачі параграфа 20, розв'язані в тексті, та задачі, які пропонувалося розв'язати.

Розв'язуючи складніші задачі на побудову, будемо використовувати два методи. Розглянемо їх.

Метод допоміжного трикутника. Спочатку знаходимо на малюнку-ескізі трикутник, який є частиною шуканого трикутника і побудова якого відома. Такий трикутник назвемо *допоміжним*. Потім з'ясовуємо, як добудувати допоміжний трикутник до шуканого.

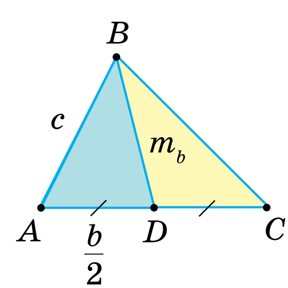
Задача 1 Побудуйте трикутник за двома сторонами та медіаною, проведеною до однієї з них.

Дано:



Побудувати: ΔABC, у якого $AB = c$, $AC = b$, $BD = m_b$.

Розв'язання



Мал. 1

Аналіз (мал. 1). Припустимо, що побудовано ΔABC, у якого $AB = c$, $AC = b$, $BD = m_b$. Бачимо, що ΔABD є частиною ΔABC і його можна побудувати за трьома сторонами $\left(AB = c,\ BD = m,\ AD = \dfrac{b}{2}\right)$. Побудувавши ΔABD,

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

знайдемо вершини A і B. Щоб знайти вершину C, відкладаємо на промені AD відрізок $AC = b$.

Побудова.

1. Будуємо ΔABD за трьома сторонами: $AB = c$, $BD = m_b$, $AD = \dfrac{b}{2}$.
2. Відкладаємо на промені AD відрізок $AC = b$.
3. Проводимо відрізок BC.

Доведення. За побудовою, у трикутнику ABC $AB = c$, $AC = b$. Оскільки $AD = \dfrac{b}{2}$, а отже, $DC = AD = \dfrac{b}{2} = \dfrac{1}{2} AC$, то BD — медіана. За побудовою, $BD = m_b$. Отже, ΔABC — шуканий.

Щоб знайти план побудови трикутника:
1) відшукайте на малюнку-ескізі допоміжний трикутник, побудова якого відома;
2) установіть, скільки побудовано вершин шуканого трикутника внаслідок побудови допоміжного;
3) з'ясуйте, як побудувати решту вершин шуканого трикутника.

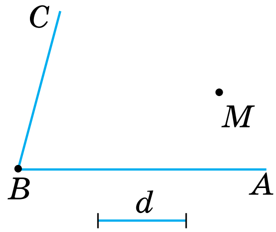
Метод геометричних місць. Під час побудови трикутника з даними сторонами (с. 225, задача 1) побудова зводиться до знаходження вершини A трикутника ABC (мал. 499 на с. 225). Вершина A задовольняє дві вимоги: 1) розміщується на відстані b від точки C; 2) розміщується на відстані c від точки B. Геометричним місцем точок, що задовольняють першу вимогу, є коло з центром C і радіусом b. Геометричним місцем точок, що задовольняють другу вимогу, є коло з центром B і радіусом c. Вершина A належить обом колам, тобто є точкою їх перетину. Провівши ці кола, знайшли вершину A трикутника ABC.

Ми розв'язали цю задачу методом геометричних місць. Його суть полягає ось у чому. Задача на побудову часто зводиться до знаходження деякої точки X, яка задовольняє дві вимоги. Геометричне місце точок, що задовольняють першу вимогу, — це деяка фігура F_1, а геометричне місце точок, що задовольняють другу вимогу, — це деяка фігура F_2. Шукана точка X належить F_1 і F_2, тобто є їх точкою перетину. Побудувавши ці геометричні місця, знайдемо точку X.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Задача 2 Побудуйте точку, яка рівновіддалена від сторін кута ABC і розміщується на відстані d від точки M.

Дано:

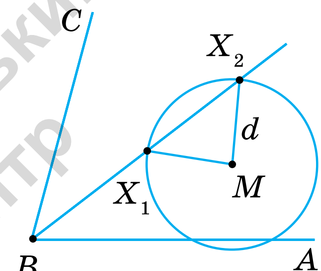


Побудувати: точку X, щоб відстані від неї до сторін кута були рівними і $MX = d$.

Розв'язання

Аналіз (мал. 2). Шукана точка X має задовольняти дві вимоги:

1) бути рівновіддаленою від сторін $\angle ABC$;
2) лежати на відстані d від точки M.

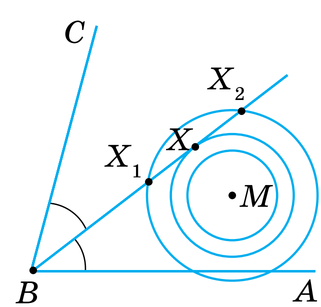


Мал. 2

Геометричним місцем точок, що задовольняють першу вимогу, є бісектриса кута ABC, а геометричним місцем точок, що задовольняють другу вимогу, є коло з центром у точці M і радіусом d. Шукана точка X лежить на перетині цих геометричних місць. Таких точок дві — X_1 і X_2.

Запишіть план побудови й обґрунтуйте, що точки X_1 і X_2 задовольняють вимоги задачі.

Розв'язуючи задачі методом геометричних місць:
1) проаналізуйте умову задачі та виділіть шукану точку;
2) з'ясуйте, які дві вимоги вона задовольняє;
3) знайдіть геометричне місце точок, що задовольняють: першу вимогу; другу вимогу;
4) зробіть висновок: шукана точка — точка перетину знайдених геометричних місць.



Мал. 3

Поміркуємо над останньою розв'язаною задачею. Розгляньте малюнок 3. Геометричні місця точок — бісектриса і коло — можуть не мати спільних точок, мати одну або дві спільні точки. Залежно від взаємного розміщення цих геометричних місць, задача може не мати розв'язків, мати один розв'язок (точка X) або два (точки X_1 і X_2).

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

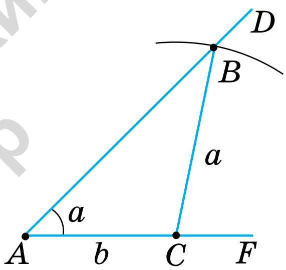
З’ясування питання, скільки розв’язків має задача на побудову, — важлива складова розв’язування. Її називають *дослідженням*.

Досліджуючи кількість розв’язків задачі:
1) виділіть ГМТ (дві прямі, пряму і коло, два кола), на перетині яких лежить шукана точка;
2) зобразіть усі випадки взаємного розміщення цих ГМТ;
3) з’ясуйте, скільки точок перетину можуть мати ГМТ; вони визначають кількість розв’язків задачі.

Задача 3 Побудуйте трикутник за сторонами a, b і кутом α, протилежним одній з них.

Розв’язання

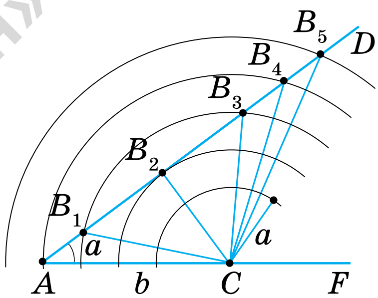
План побудови (мал. 4):
1) будуємо $\angle FAD = \alpha$;
2) на промені AF відкладаємо $AC = b$;
3) знаходимо вершину B;
4) проводимо відрізок BC.



Мал. 4

Дослідження (мал. 5).

Змінюючи довжину відрізка a, зображаємо всі випадки взаємного розміщення променя AD і кола радіуса a з центром C (кут α не змінюємо).



Мал. 5

Дістанемо:

1) $a > b$. Коло перетинає промінь AD в точці B_5. Задача має один розв’язок — тупокутний ΔAB_5C;

2) $a = b$. Коло перетинає промінь AD в точці B_4. Задача має один розв’язок — рівнобедрений ΔAB_4C.

3) $a < b$: а) коло може перетинати промінь AD у двох точках B_1 і B_3. Матимемо два розв’язки — гострокутний ΔAB_3C і тупокутний ΔAB_1C;

б) коло може дотикатися до променя AD в точці B_2.
Задача має один розв’язок — прямокутний ΔAB_2C;

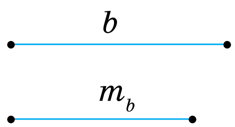
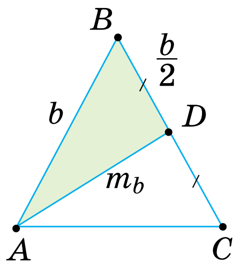
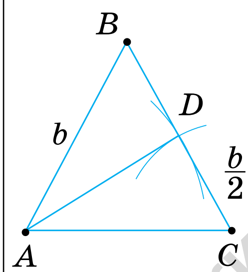
в) коло і промінь AD не мають спільних точок.
Задача розв’язку не має.

Таким чином, задача може мати один розв’язок (ΔAB_5C, або ΔAB_4C, або ΔAB_2C), два розв’язки (ΔAB_3C і ΔAB_1C) або не мати розв’язків.

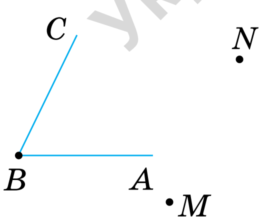
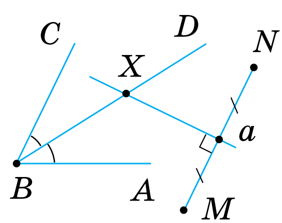
Український освітянський видавничий центр «Оріон»

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА ПОБУДОВУ

МЕТОД ДОПОМІЖНОГО ТРИКУТНИКА

Задача	Аналіз	Побудова	Доведення
Дано  **Побудувати** ΔABC так, щоб $AB = BC = b$, $AD = m_b$, (D — середина BC)	 1) виконуємо малюнок-ескіз 2) ΔABD — допоміжний ($AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$); 3) $BC = b$	 Будуємо: 1) ΔABD за трьома сторонами $AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$; 2) відрізок $BC = b$ на промені BD; 3) відрізок AC. ΔABC — шуканий	У ΔABC $AB = BC = b$, $AD = m_b$, (D — середина BC) за побудовою

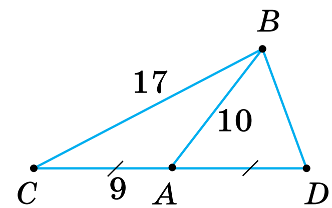
МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ

Задача	Аналіз	Побудова	Доведення
Дано $\angle ABC$ і точки M і N  **Побудувати** точку X, рівновіддалену від сторін $\angle ABC$ і точок M, N	Точка X: 1) рівновіддалена від сторін $\angle ABC$; 2) рівновіддалена від M і N. ГМТ, що задовольняє: • умову 1 — бісектриса $\angle ABC$; • умову 2 — серединний перпендикуляр до відрізка MN. X — точка перетину цих ГМТ	 Будуємо: 1) бісектрису BD $\angle ABC$; 2) серединний перпендикуляр a до відрізка MN; 3) X — точку перетину BD і a	$X \in BD$, тому X рівновіддалена від сторін $\angle ABC$. $X \in a$, тому $MX = NX$

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

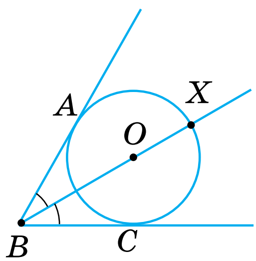
Розв'яжіть задачі

1'. Чи можна вважати ΔABC допоміжним у побудові трикутника CDB (мал. 6)?

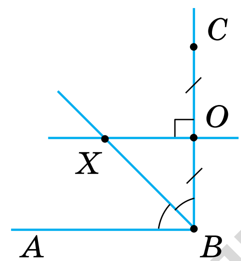


Мал. 6

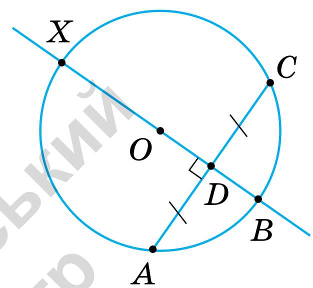
2'. Назвіть два геометричні місця точок, яким належить точка X на малюнках 7–9.



Мал. 7



Мал. 8

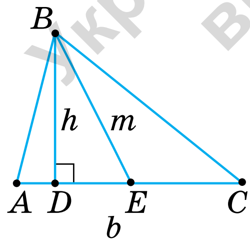


Мал. 9

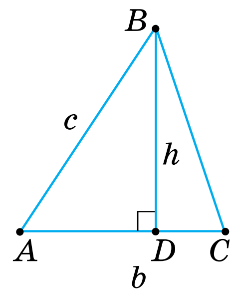
У задачах 3–6 виділіть штриховкою на відповідному малюнку-ескізі допоміжний трикутник та запишіть план побудови шуканого трикутника.

3°. Побудуйте трикутник за стороною b і проведеними до неї медіаною m та висотою h (мал. 10).

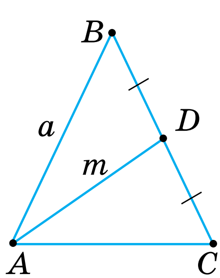
4°. Побудуйте трикутник за сторонами b і c та висотою h, проведеною до однієї з них (мал. 11).



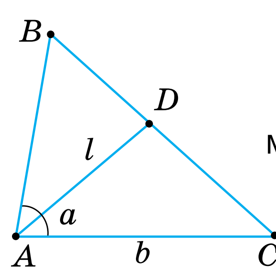
Мал. 10



Мал. 11



Мал. 12



Мал. 13

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

5°. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною a та медіаною m, проведеною до бічної сторони (мал. 12).

6°. Побудуйте трикутник за стороною b, прилеглим кутом α та бісектрисою l, проведеною з вершини цього кута (мал. 13).

У задачах 7–13 побудуйте малюнок-ескіз та виділіть на ньому допоміжний трикутник, запишіть план побудови шуканого трикутника та доведіть, що цей трикутник відповідає вимогам задачі.

7. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою a і висотою h, проведеною до основи.

8. Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом α при вершині та висотою h, проведеною з цієї вершини.

9. Побудуйте трикутник за двома сторонами a і b та висотою h, проведеною до третьої сторони.

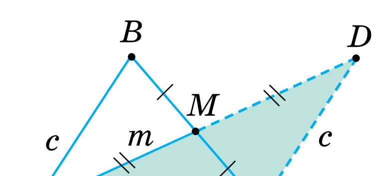
10. Побудуйте трикутник за стороною a, медіаною m, проведеною до однієї з двох інших сторін, і кутом α між даними стороною і медіаною.

11. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною b та висотою h, проведеною до основи.

12. Побудуйте трикутник за кутом α, висотою h і бісектрисою l, проведеними з вершини цього кута.

13*. Побудуйте трикутник за сторонами b і c та медіаною m, проведеною до третьої сторони.

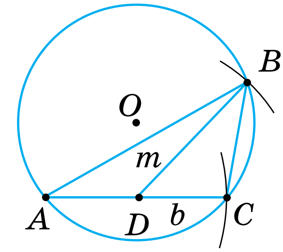
Аналіз (мал. 14). Нехай побудовано ΔABC, у якого $AB = c$, $AC = b$, $AM = m$. Відклавши на продовженні медіани AM відрізок $MD = AM$ і сполучивши точки D і C, одержимо допоміжний ΔADC, у якого відомі сторони AC і AD. Крім того, $DC = AB = c$, оскільки $\Delta ABM = \Delta DCM$ за двома сторонами і кутом між ними. Отже, ΔADC можна побудувати за трьома сторонами ($DC = c$, $AC = b$, $AD = 2m$). Побудувавши ΔADC, знайдемо вершини A і C шуканого трикутника ABC. Урахувавши, що $BM = MC$ і $MD = AM$, знайдемо третю вершину B. Запишіть план побудови.



Мал. 14

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

У задачах 14–19 потрібно побудувати трикутник за його елементами та радіусом описаного кола.
Спочатку побудуйте коло даного радіуса, а потім на колі — інші елементи, дані в умові задачі.



Мал. 15

14. Побудуйте трикутник за стороною b, медіаною m, проведеною до цієї сторони, і радіусом R описаного кола. За малюнком 15 складіть план побудови.

15. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою a і радіусом R описаного кола.

16. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною b і радіусом R описаного кола.

17. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом a і радіусом R описаного кола.

18. Побудуйте трикутник за стороною a, прилеглим кутом α і радіусом R описаного кола.

19. Побудуйте трикутник за двома сторонами a і b та радіусом R описаного кола.

У задачах 20–26 знайдіть лише одне геометричне місце точок. Шукану точку X визначте як точку перетину знайденого геометричного місця точок і даної в умові задачі фігури.

20. На прямій a знайдіть точку, рівновіддалену від точок A і B.

21. На даному колі знайдіть точку, рівновіддалену від точок A і B. Скільки розв'язків має задача?

22. На прямій, яка перетинає сторони даного кута, знайдіть точку, рівновіддалену від його сторін.

23. На даному колі побудуйте точку, рівновіддалену від сторін даного кута. Скільки може бути таких точок?

24. Знайдіть на прямій a точку, рівновіддалену від прямих b і c, що перетинаються.

25. На прямій a побудуйте точку, яка розміщується на відстані m від точки A. Скільки таких точок може бути?

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

26. На даному колі знайдіть точку, яка розміщується на відстані d від точки B.

У задачах 27–31 шукану точку визначте як точку перетину двох геометричних місць точок.

27. Побудуйте точку, рівновіддалену від сторін кута ABC і точок M і K.

28. Прямі a і b перетинаються. Знайдіть точку, що лежить на відстані n від прямої a і на відстані m від прямої b. Скільки таких точок може бути?

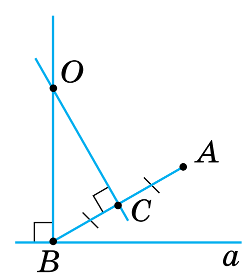
29. Знайдіть точку, що рівновіддалена від точок A і B та розміщується на відстані d від прямої a.

30. Побудуйте точку, що розміщується на відстані d від прямої a і рівновіддалена від прямих b і c, які перетинаються.

31. Знайдіть точку, що розміщується на відстані n від прямої a і на відстані m від точки M. Скільки таких точок може бути?

Розв'язування задач 32–36 на побудову кола зводиться до побудови шуканої точки — центра кола.

32. Побудуйте коло, що проходить через точку A та дотикається до прямої a в точці B. За малюнком 16 складіть план побудови.



Мал. 16

33. Побудуйте коло радіуса R, що проходить через точку A та дотикається до даної прямої a.

34. Побудуйте коло, яке дотикається до сторін кута ABC, причому до однієї з них — у точці D.

35. Побудуйте коло з центром на прямій a, що проходить через точки A і B.

36*. Точка M лежить між двома паралельними прямими a і b. Побудуйте коло, що проходить через точку M і дотикається до даних прямих.

У задачах 37–42, щоб побудувати трикутник методом геометричних місць, спочатку виділіть шукану точку.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

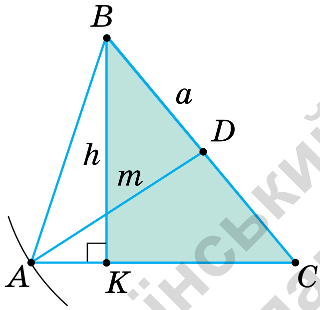
37. Побудуйте трикутник за стороною a, проведеною до неї медіаною m та висотою h, проведеною до іншої сторони.

Аналіз (мал. 17). Нехай ΔABC — шуканий і $BC = a$, $AD = m$, $BK = h$. Побудувавши допоміжний ΔBKC ($BK = h$, $BC = a$, $\angle BKC = 90°$), знайдемо вершини B і C трикутника ABC. Вершина A — шукана. Вона задовольняє дві вимоги: лежить на промені CK; розміщується на відстані m від точки D.

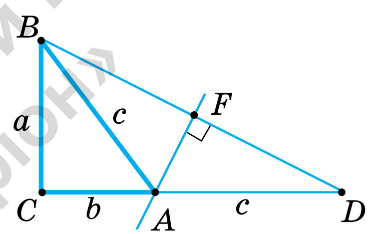
Запишіть план побудови.

38*. Побудуйте трикутник за стороною a, протилежним кутом α і висотою h, проведеною до однієї з двох інших сторін.

39*. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом a та сумою $b + c$ іншого катета й гіпотенузи. За малюнком 18 складіть план побудови та доведіть, що ΔABC відповідає вимогам задачі.



Мал. 17



Мал. 18

40*. Побудуйте трикутник за стороною c, прилеглим до неї кутом α і сумою $a + b$ двох інших сторін.

41*. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою c і сумою катетів $a + b$.

42*. Побудуйте трикутник за стороною a, прилеглим до неї кутом α і різниею $b - c$ двох інших сторін.

43. Побудуйте трикутник за стороною, яка дорівнює 5 см, і прилеглими до неї кутами 40° і 70°. На більшій стороні знайдіть точку, рівновіддалену від кінців меншої сторони.

44. Побудуйте трикутник за двома сторонами 3 см і 4 см і кутом між ними 100°. На більшій стороні побудуйте точку, рівновіддалену від двох інших сторін.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

45. *Задача Н. Тартальї* (італійський математик, 1500–1557). На даному відрізку AB за допомогою лінійки та циркуля, розхил якого заданий і не дорівнює AB, побудуйте рівносторонній трикутник.

46. У «Началах» Евкліда запропоновано такий спосіб побудови дотичної до кола з даної поза колом точки M: сполучивши точку M із центром O кола, одержимо на колі точку A. Перпендикулярна пряма до відрізка OM у точці A і коло із центром O і радіусом OM перетинаються в точці B. Перетин даного кола з відрізком OB — точка C. Пряма MC дотикається до кола. Доведіть, що пряма MC — шукана.

47. *Задача Евкліда.* Поділіть навпіл кут, вершина якого недоступна.

Проявіть компетентність

48. Дві автомагістралі перетинають річку в різних місцях. Де потрібно розмістити базу відпочинку, щоб відстані від неї до річки й до кожної магістралі були однаковими? Укажіть місце для бази відпочинку, де ці відстані мінімальні.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

Геометричні фігури

2. 1) 2; 2) 6; 3) 10. **3.** 1) 2; 2) 6. **4.** Відрізок MN, промені MN і NM та доповняльні до них промені. **16.** *Вказівка:* опишіть розміщення третьої вершини трикутника. **18.** *Вказівка:* опишіть розміщення третьої вершини трикутника. **19.** Мал. 11. 1) Коло; 2) центр кола; 3) радіус кола. Так. **21.** Мал. 14. Прямокутний паралелепіпед. 1) 8 вершин, 12 ребер і 6 граней; 2) 3; 3) 6; 4) 0; 5) 0.

Геометричні величини

23. 13 см або 3 см. **24.** 1) 2 см і 4 см; 2) 6 см і 9 см; 3) 9 см і 15 см; 4) 16 см і 12 см. **25.** 12 см. **26.** 1) 65°; 2) 90°; 3) 42° і 84°; 4) 40° і 50°. **27.** 158°. **28.** 1,2 дм. **29.** 52 см. **31.** 72°. **34.** На 50 %. **35.** На 25 %. **36.** 1) 8π см; 2) 5π см; 3) 6π см; 4) 7π см. **37.** 1) 25π см^2; 2) 16π см^2; 3) 9π см^2; 4) 4π см^2. **38.** 1) 36π см^2; 2) 12π см. **39.** 320°. **40.** 200°. **41.** 1) 36 дм^3. **42.** 8000 см^3.

§ 1. Точки, прямі, промені

47. AB або BA. **51.** 1) Ні; 2) ні. **52.** Безліч. **56.** 1) Пряму a можна позначити AB, пряму b по-іншому позначити не можна. **58.** B, A, C або C, A, B. **63.** 1) Точка A; 2) точки A, C, M. **64.** 1) 6 променів. **65.** 4 промені. **68.** 2) Так, якщо точка Q лежить між точками P і R. **69.** Так, якщо точка O лежить між точками B і A. **71.** Доповняльні промені з початком відповідно в точках A, C, M, N. **72.** 1) 1 або 3; 2) 1, 4 або 6. **75.** Ні. **77.** Три випадки. **78.** Так. **79.** 6 променів; $2n$ променів. **81.** Кожну пряму перетинають 4 інші прямі, при цьому утворилося 10 точок перетину; точок, через які б не проходила жодна пряма, немає. **82.** 2 промені; 4 промені; $2n$ променів. **83.** 4) Київ. **84.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю прямої. **85.** Якщо треба провісити пряму лінію між двома точками A і C, положення яких задано, то спочатку в цих точках ставлять віхи, потім між ними встановлюють проміжну віху B так, щоб віхи A і C закривали віху B. Якщо від точки A до точки C далеко, то доводиться ставити ще віхи між точками A і B та B і C. Іноді доводиться провішувати пряму лінію, напрямок якої задано двома віхами, поставленими в точках A і B. У цьому випадку ставлять у потрібному напрямку третю віху C так, щоб її закривали віхи

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

A і B. Потім ставлять наступні віхи, щоб їх закривали дві раніше встановлені віхи.

§ 2. Відрізки та їх вимірювання

102. 1) $KN = 1{,}5$ см; 2) $KN = 1$ см; 3) $KN = 2{,}5$ см. **103.** 6 см. **104.** 1) $AC = 10$ см; 2) $AB = 4{,}3$ см; 3) $BC = 6$ см. **105.** 1) Ні; 2) так. **106.** Так. **107.** 1) Так; 2) ні. **108.** Ні. **111.** AB. **112.** BC. **113.** 1) $AC > BD$, $AC = KL$, $BD < KL$; 2) $AC < BD$, $AC = KL$, $BD > KL$; 3) $AC = BD = KL$. **114.** $AC = KL$, $AC < BD$, $BD > KL$. **115.** 1) $AO = OB = 4{,}5$ см, $AC = CO = 2{,}25$ см, $CB = 6{,}75$ см; 2) $AB = 86$ мм, $OB = 43$ мм; 3) $AB = 16{,}6$ мм, $AO = 8{,}3$ мм. **116.** $AC = CB = 4$ см, $AO = 2$ см, $OB = 6$ см. **117.** 3 см. **118.** 5 см. **119.** 1) 12 км, 12 км, 6 км, 6 км, 18 км; 2) 16 км, 8 км, 4 км, 4 км, 12 км; 3) 12 км, 6 км, 3 км, 3 км, 9 км. **120.** 0,25 км, 0,25 км, 0,5 км, 0,5 км, 0,75 км. **121.** 1) 12; 2) 6. **122.** 12. **123.** 1) 48 см; 2) 36 см. **124.** 120 см. **127.** 1) 6 см, 2 см. **128.** $BC = BD$. **129.** 1) A; 2) B; 3) A; 4) A. **130.** M — середина відрізка AB. **131.** 30 см або 2 см. **132.** 1) 11 см; 2) 1 см. **133.** 1) 10 мм; 2) 5 мм. **134.** 9 см. **135.** $\frac{m}{2}$. **136.** $2n$. **137.** 12 см. **138.** 4 см. **139.** 7 см. **140.** 5 см. **141.** 35 пар відрізків. **142.** $k = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) = n(n - 1) : 3$, n — кількість точок ($n \geq 3$). **143.** *Вказівка*: через точки B і C можна провести єдину пряму. **144.** 8 см. **145.** 1) якщо X — шукана точка, то або $AX = 3$ см і $BX = 6$ см, або $AX = 9$ см і $BX = 18$ см; 2) будь-яка внутрішня точка відрізка AB; 3) якщо X — шукана точка, то $AX = 8$ см і $BX = 6$ см. **146.** 340 км. **148.** 1) Від 4 до 5 км; 2) від 3 до 4 км.

§ 3. Кути та їх вимірювання

158. *Вказівка*: використайте зразок, наприклад, $\angle AOC = 35°$, $\alpha = 35°$, $\angle 1 = 35°$. **159.** *Вказівка*: використайте зразок, наприклад, $\angle AOC = 35°$, $\alpha = 35°$, $\angle 1 = 35°$. **164.** Не обов'язково. **165.** Так. **167.** 3) 8°; 4) 90°. **168.** 120°. **169.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) ні. **170.** Так. **171.** $\angle ABC$, $\angle ABM$, $\angle ABN$, $\angle MBC$, $\angle NBC$, $\angle MBN$. **172.** 1) 150°; 2) 30°. **173.** 60°. **174.** 1) $\alpha < \beta$; 2) $\alpha < \beta$; 3) $\alpha = \beta$; 4) $\alpha > \beta$. **175.** $\alpha > \beta$. **176** . 1) $\alpha < \beta$; 2) $\alpha < \beta$; 3) $\alpha = \beta$; 4) $\alpha > \beta$. **177.** $\alpha > \beta$. **178.** 1) 72°; 2) 87°; 3) 130°; 4) 41°. **179.** 144°. **182.** 1) $\beta = 60°$, $\gamma = 30°$; 2) $\alpha = 100°$, $\gamma = 50°$; 3) $\beta = 40°$, $\gamma = 80°$; 4) $\alpha = 180°$, $\beta = 60°$. **183.** 10° або 90°. **184.** 15° або 105°. **185.** 1) $\angle BOC = 41°$; 2) $\angle BOC = 15°$, $\angle AOC = 65°$.

Український освітній видавничий центр «Оріон»

186. $\angle NOK = 10°$, $\angle MOK = 50°$. **187.** 2) Кут AOC дорівнює або 70°, або 152°. **188.** 1) 39°; 2) 54°; 3) 15°. **189.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **190.** *Розв'язання* (мал. 103). за умовою, $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, $\angle BOD = \angle COD + \angle BOC$. Отже, $\angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle BOC$. Звідси $\angle AOB = \angle COD$. **191.** *Вказівка:* доведіть рівність кутів DOC і FOC. **192.** *Вказівка:* доведіть рівність кутів AOC і BOC. **193.** 1) 60°; 2) 120°. **194.** 30° і 60°. **195.** 73°. **196.** 360°. **197.** 180°. **198.** $\angle AOC = 58°$. **199.** 1) *Вказівка:* розгляньте три випадки розміщення на прямій точок A, B, O; 2) 100°. **200.** 20°. **201.** 1) $90° : n$; 2) $45° : n$; 3) $60° : n$; 4) $30° : n$. **202.** 45°. **203.** 1) Один — до Києва, інший — до Одеси; 2) обидва до Києва або обидва до Одеси. **205.** 1) 90°; 2) 180°.

§ 4. Суміжні кути

214. 139° (мал. 123), 75° (мал. 124). **215.** 100°. **216.** 1) 43°; 2) 126°; 3) 18°; 4) 157°. **217.** 1) 143°; 2) 26°. **219.** 80°, 100° (мал. 126); 129°, 51° (мал. 127). **220.** 63°, 117° (мал. 128). **221.** 1) 105°; 75°; 2) 62°; 118°; 3) 111°; 69°. **222.** 78°; 102°. **223.** 45°, 135° (мал. 129); 120°, 60° (мал. 130). **224.** 30°, 150°. **225.** 1) 36°, 144°; 2) 120°, 60°; 3) 160°, 20°. **226.** 45°, 135°. **230.** $\angle ACD$ і $\angle DCB$; $\angle ACL$ і $\angle LCB$. **231.** 1) 60°, 120°; 2) 90°, 90°; 3) 30°, 150°. **232.** 45°, 135°. **235.** Ні. **236.** *Доведення.* Позначимо дані суміжні кути α і β. Нехай $\alpha < 90°$, тоді $\alpha = 90° - n°$. З теореми про суму суміжних кутів випливає, що $\beta = 180° - \alpha$. Отже, $\beta = 180° - (90° - n°) = 90° + n° > 90°$. Тому, за означенням, кут β — тупий. **237.** *Вказівка:* див. задачу 236. **238.** *Вказівка:* див. задачу 236. **241.** 1) 105°, 75°; 2) 142°30′, 37°30′; 3) 123°30′, 56°30′; 4) 90°, 90°. **242.** 120°, 60°. **243.** 1) 162°, 18°; 2) 165°, 15°; 3) 90°, 90°; 4) 170°, 10°. **244.** 120°, 60°. **245.** 1) 18°, 162°; 2) 165°, 15°; 3) 90°, 90°; 4) 10°, 170°. **246.** 60°, 120°. **247.** 1) 45°, 135°; 2) 108°, 72°; 3) 80°, 100°; 4) 84°, 96°. **248.** 60°, 120°. **249.** 1) 30°, 150°; 2) 112°30′, 67°30′; 3) 80°, 100°; 4) 36°, 144°. **250.** 60°, 120°. **251.** *Вказівка:* позначте дані суміжні кути, наприклад, α і β. Скористайтеся означенням бісектриси кута і теоремою про суму суміжних кутів. **252.** 1) 30°, 150°; 2) 150°, 30°; 3) 120°, 60°; 4) 90°, 90°. **253.** 60°, 120°. **255.** 1) α — гострий; 2) β — гострий; 3) β — гострий; 4) α — гострий. **256.** 1) $150° \le \beta \le 160°$; 2) $50° \le \beta \le 60°$; 3) $135° \le \beta \le 142°$; 4) $1° \le \beta \le 5°$. **257.** 1) 10°, 170°; 2) 52°30′, 127°30′; 3) 24°30′, 155°30′; 4) 61°30′, 118°30′. **258.** 1) 30°, 150°; 2) 22°30′, 157°30′; 3) 18°, 162°; 4) 15°, 165°. **259.** 1) 150°, 30°;

Український освітній видавничий центр «Оріон»

2) 120°, 60°; 3) 105°, 75°; 4) 75°, 105° або 120° і 60°. **260.** 1) 140°; 2) 70°; 3) 120°; 4) 30°. **261.** Ні. **262.** *Вказівка*: обґрунтуйте, що $\angle AOM = 90° - \angle CON$, $\angle BOM = 90° - \angle BON$ і врахуйте рівність кутів CON і BON. **263.** Так. **264.** *Вказівка:* додайте до 180° градусну міру кута між напрямком на південь і даним напрямком.

§ 5. Вертикальні кути

270. $\angle AOB = 41°$, $\angle MON = 149°$. **271.** $\angle DTK = 105°$. **273.** 1) Так; 2) так; 3) так. **274.** $\alpha = 50°$, $\beta = 110°$. **275.** $\gamma = 90°$. **276.** 1) 15°; 2) 105°30′; 3) 33°30′; 4) 95°. **277.** 1) 20°; 2) 104°. **282.** 120°, 60° і 120° (мал. 159); 50°, 130° і 50° (мал. 160). **283.** 108°, 72° і 108°. **284.** 1) 40°, 140°, 140°; 2) 12°, 168°, 168°; 3) 25°, 155°, 155°; 4) 17°, 163°, 163°. **285.** 32°, 148°, 148°. **286.** 1) 83°, 83°, 97°, 97°; 2) 62°, 62°, 118°, 118°; 3) 71°, 71°, 109°, 109°; 4) 55°, 55°, 125°, 125°. **287.** 70°, 70°, 110°, 110°. **288.** 1) 45°, 45°, 135°, 135°; 2) 36°, 36°, 144°, 144°; 3) 30°, 30°, 150°, 150°; 4) 20°, 20°, 160°, 160°. **289.** 60°, 60°, 120°, 120°. **294.** 1) 45°; 2) 90°; 3) 109°; 4) 130°. **295.** 115°. **296.** Так. **297.** Так. **298.** *Вказівка:* позначте дані рівні кути, наприклад, α_1 і α_2, а вертикальні з ними кути відповідно β_1 і β_2. Скористайтеся теоремою про вертикальні кути. **299.** *Вказівка:* скористайтеся теоремою про суму суміжних кутів. **300.** *Вказівка:* скористайтеся теоремою про суму суміжних кутів. **301.** 1) 51°, 51°, 129°, 129°; 2) 160°, 160°, 20°, 20°; 3) 119°, 119°, 61°, 61°; 4) 91°, 91°, 89°, 89°. **302.** 61°, 61°, 119°, 119°. **303.** 1) 104°30′, 104°30′, 75°30′, 75°30′; 2) 147°30′, 147°30′, 32°30′, 32°30′; 3) 143°30′, 143°30′, 36°30′, 36°30′; 4) 116°30′, 116°30′, 63°30′, 63°30′. **304.** 114°30′, 114°30′, 65°30′, 65°30′. **305.** 1) 162°, 162°, 18°, 18°; 2) 165°, 165°, 15°, 15°; 3) 150°, 150°, 30°, 30°; 4) 170°, 170°, 10°, 10°. **306.** 160°, 160°, 20°, 20°. **307.** *Вказівка:* нехай промені OM і ON — бісектриси даних вертикальних кутів. Доведіть, що $\angle MON = 180°$. **308.** 1) 31°30′; 2) 58°30′; 3) 121°30′. **309.** *Вказівка:* скористайтеся тим, що третя пряма утворює з кожною із двох даних прямих по 2 пари вертикальних і по 4 пари суміжних кутів. **310.** 1) 30°; 2) 40°; 3) 45°; 4) 80°. **311.** *Вказівка:* скористайтеся тим, що бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут. **312.** *Вказівка:* див. задачу 311. **313.** *Вказівка:* скористайтеся властивістю рівних суміжних кутів; бісектриси прямого кута. **314.** 1) 45°; 2) 45°; 3) 180°. **315.** *Вказівка:* див. задачу 307.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 6. Перпендикулярні прямі

323. 49° (мал. 189); 30° (мал. 190). **324.** 18°. **325.** 1) 60°; 2) 37°; 3) 46°; 4) 11°. **326.** 30°. **327.** 1) 100°, ні; 2) 90°, так; 3) 70°, ні; 4) 90°, так. **328.** 1) $PA = 4$; 2) $BA = 8$. **329.** 1) $PA = 5$; 2) $BA = 12$. **330.** 1) $AC = 3$, $OB = 8$, $OC = 5$; 2) $AB = 3$, $OA = 3$, $OB = 6$; 3) $BC = 4$, $OA = 3$, $OC = 4$. **333.** 1) Так, $\alpha = 60°$, $\beta = 30°$; 2) так, $\alpha = 50°$, $\beta = 40°$. **334.** Так, $\alpha = 75°$, $\beta = 15°$. **335.** Ні. **340.** Для кожної точки відстані до сторін кута рівні. **341.** 1) 1,5 і 5,5 см; 2) 5,5 см і 1,5 см. **342.** 1) 3 см або 15 см; 2) 7,5 см або 1,5 см. **343.** Треба розглянути 3 випадки. **344.** *Вказівка:* доведіть, що $\angle ABD$ — розгорнутий. **345.** *Вказівка:* розгляньте всі можливі випадки розміщення прямих c і d відносно прямих a і b та покажіть, що серед них є той, що вимагається. **347.** *Вказівка:* скористайтеся твердженням про єдиність перпендикулярної прямої.

§ 7. Паралельні прямі

355. 1) Внутрішні односторонні; 2) внутрішні різносторонні; 3) внутрішні односторонні; 4) внутрішні різносторонні. **358.** *Вказівка*: скористайтеся аксіомою паралельних прямих. **359.** Одну. **360.** 1) m не перетинає k, n перетинає k; 2) c не перетинає k, d перетинає k. **362.** 1) p перетинає n; 2) p перетинає n. **363.** a перетинає c. **364.** 1) AB і BA; 2) CD, DE, CE. **365.** 1) MN і NM; 2) AB, BC, AC. **368.** 1) внутрішні односторонні; 3) внутрішні різносторонні. **369.** 1) внутрішні різносторонні; 3) внутрішні односторонні (мал. 220). **371.** 36° і 134° та 46° і 144° (мал. 226); 90° і 90° (мал. 227). **372.** 114° і 76° та 104° і 66°. **373.** 1) 50° і 135° та 45° і 130°; 2) 60° і 120°; 3) 110° і 70°; 4) 80° і 135° та 100° і 45°; 5) по 90°; 6) по 90°. **374.** 1) 120° і 90° та 60° і 90°; 2) 120° і 90° та 60° і 90°. **375.** *Вказівка*: скористайтеся способом доведення від супротивного. **379.** 1) 8 способами; 2) 8 способами. **380.** 4 способами. **381.** 1) 127°, 43°, 53°, 137°, 53°, 137°; 2) 15°, 165°, 15°, 15°, 165°, 165°; 3) 95°, 95°, 85°, 85°, 85°, 85°. **382.** 75°, 105°, 75°, 85°, 95°, 85°. **383.** 1) 2 кути по 30° і 4 кути по 150°; 2) 2 кути по 150° і 4 кути по 30°; 3) 2 кути по 80°30′ і 4 кути по 99°30′. **384.** 2 кути по 99°30′ і 4 кути по 80°30′. **385.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про суму суміжних кутів. **386.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про суму суміжних кутів. **387.** 1) 2 способами; 2) 2 способами. **388.** *Вказівка*: скористайтеся способом доведення від супротивного і теоремою про суму суміжних кутів. **389.** 90°, 90°, 90°, 90°, 45°, 135°, 45°, 135°. **390.** 1) $180° - \beta$, β, $180° - \beta$, $180° - \alpha$, α, $180° - \alpha$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

391. *Вказівка*: доведіть, що один із даних відповідних кутів дорівнює суміжному з ним куту. **392.** З північного сходу на південний захід (або навпаки); з північного заходу на південний схід (або навпаки).

§ 8. Ознаки паралельності прямих

394. 1) a і b (мал. 239); 2) AP і BO (мал. 240). **396.** 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. **397.** Так. **398.** 1) $18° + 118° \neq 180°$; 2) $130° + 102° \neq 180°$; 3) $37° + 87° \neq 180°$. **399.** $81° + 81° \neq 180°$. **400.** 1) Так, якщо $\alpha = 90°$; ні в інших випадках; 2) так, якщо $\alpha = 60°$; ні в інших випадках; 3) ні; 4) так, якщо $\alpha = 60°$; ні в інших випадках. **401.** 1) Так, якщо $\beta = 30°$; ні в інших випадках; 2) ні. **402.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих за внутрішніми різносторонніми кутами. **403.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **404.** 1) Ні; 2) так. **405.** 1) $18° \neq 19°$; 2) $130° \neq 120°$; 3) $37° \neq 73°$. **406.** $81° \neq 91°$. **407.** *Вказівка*: розгляньте кути при прямих a і b та січній c. **408.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **409.** Так. **410.** 1) $81° \neq 91°$; 2) $103° \neq 102°$; 3) $73° \neq 37°$. **411.** $81° \neq 91°$. **412.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих за відповідними кутами. **413.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих за їх перпендикулярністю до третьої прямої. **414.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих за їх перпендикулярністю до третьої прямої. **415.** $a \parallel b$. **417.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні. **418.** Так. **419.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. **420.** Так. **421.** 1) Ні; 2) так; 3) так, якщо $\alpha = \beta = 90°$; 4) так. **422.** Так, якщо $\beta - \alpha = 0°$; ні в інших випадках. **423.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) ні. **424.** Ні. **425.** *Вказівка*: позначте кути, які утворюють бісектриси із січною, через α і β. Доведіть, що $2\alpha + 2\beta = 180°$. **426.** 1) 20°; 2) 90°. **427.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих за внутрішніми різносторонніми кутами та доведіть, що бісектриси лежать на паралельних прямих. **428.** 1) Ні; 2) так. **429.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою паралельності прямих за відповідними кутами. **431.** Так.

§ 9. Властивості паралельних прямих

432. Так (мал. 257), ні (мал. 258). **433.** Ні (мал. 259), так (мал. 260). **434.** Так (мал. 261), ні (мал. 262). **435.** 1) 150°; 2) 45°; 3) 30°; 4) 120°. **436.** 130°. **437.** 1) 43°; 2) 126°; 3) 18°; 4) 157°. **438.** 151°. **439.** 80° і 100°; 45° і 135° (мал. 263). **440.** 30° і 150°. **441.** 1) 105° і 75°; 2) 45° і 135°; 3) 60° і 120°. **442.** 30° і 150°. **443.** 1) 53°30′; 2) 47°; 3) 66°; 4) 21°30′. **444.** 1) 60°; 2) 45°. **445.** 1) Так; 2) так; 3) так. **446.** 1) 68°30′; 2) 27°; 3) 81°; 4) 11°30′.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

447. 1) 54°; 2) 15°. **448.** 1) Так; 2) так; 3) так. **449.** 55°; 125°; 55°. **450.** 45°; 135°; 45°. **451.** 1) $p \perp n$; 2) $p \perp n$. **452.** $b \perp c$. **455.** 1) 105° і 75°; 2) 37°30′ і 142°30′; 3) 56°30′ і 123°30′; 4) 90° і 90°. **456.** 1) 162° і 18°; 2) 90° і 90°. **457.** 1) 162° і 18°; 2) 15° і 165°; 3) 90° і 90°; 4) 170° і 10°. **458.** 1) 45° і 135°; 2) 108° і 72°. **459.** 1) 30° і 150°; 2) 67°30′ і 112°30′; 3) 80° і 100°; 4) 36° і 144°. **460.** 60° і 120°. **461.** 36°, 72°, 72°. **462.** Ні. **463.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про властивість паралельних прямих. **465.** *Вказівка*: позначте внутрішні односторонні кути α і β. Доведіть, що $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\neq 180°$. **466.** 1) α; 2) β; 3) β; 4) α. **467.** 1) 170° і 10°; 2) 52°30′ і 127°30′; 3) 24°30′ і 155°30′; 4) 61°30′ і 118°30′. **468.** 1) 150° і 30°; 2) 157°30′ і 22°30′; 3) 162° і 18°; 4) 165° і 15°. **469.** 1) 150° і 30°; 2) 120° і 60°; 3) 105° і 75°; 4) 120° і 60°. **470.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком 1 з теореми про ознаку паралельності прямих. **471.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком 2 з теореми про ознаку паралельності прямих. **472.** 1) *Вказівка*: див. задачу 470; 2) *вказівка*: див. задачу 471. **473.** *Вказівка*: доведіть, що пряма, яка проходить через точку перетину двох перпендикулярних прямих, перетинає кожну з них під гострим кутом. **474.** *Вказівка*: якщо предмет P_3 урівноважує предмети P_1 і P_2, то $AP_1 \parallel CP_3 \parallel BP_2$.

§ 10. Трикутник і його елементи

476. ΔBCD, ΔBCA, ΔBAD. **478.** 1) Ні; 2) так. **480.** 1) Ні; 2) так. **481.** Медіана CL, бісектриса BN, висота AM. **483.** 1) BC, AC; 2) $\angle C$, $\angle A$; 3) $\angle A$, $\angle B$. **484.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **485.** Сторона DE — f, сторона EF — d, сторона DF — e. **486.** Сторона BC — d, сторона CD — b, сторона BD — c. **487.** Ні. **488.** Так. **489.** 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) ні; 5) так; 6) так. **490.** 1) Так; 2) ні. **491.** 1) ΔFBC; 2) ΔAFB, ΔFBC; 3) ΔABC, ΔABD, ΔFBD, ΔCBD; 4) ΔFBC; 5) ΔABC, ΔABD, ΔFBD, ΔCBD; 6) ΔAFB. **493.** 1) Різносторонній; 2) рівносторонній; 3) рівнобедрений. **494.** 1) Різносторонній; 2) рівносторонній; 3) рівнобедрений. **495.** 1) Основа b; 2) основа a; 3) основа c. **496.** Основа d. **498.** 1) 38 см; 2) 50 см; 3) 18 см. **499.** 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 24 см. **500.** 1) Прямокутний; 2) гострокутний; 3) тупокутний. **501.** 1) Прямокутний; 2) тупокутний; 3) тупокутний. **503.** Ні. **504.** 1) Гіпотенуза BC; 2) гіпотенуза AC; 3) гіпотенуза AC; 4) гіпотенуза BC. **505.** 1) Гіпотенуза LM; 2) гіпотенуза KM. **508.** 1) 2,5 см; 2,5 см; 4 см; 4 см; 3,5 см; 3,5 см; 2) 10 см; 10 см; 11 см; 11 см; 11 см; 11 см; 3) 5 см; 5 см; 8 см; 8 см; 5 см; 5 см; 4) усі по 13,5 см. **509.** 1) 3 см; 3 см; 2,5 см; 2,5 см; 3 см; 3 см. **512.** *Вказів-*

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ка: скористайтеся означенням бісектриси кута і бісектриси трикутника. **513.** 1) 65°, 65°, 15°, 15°, 10°, 10°; 2) 35°, 35°, 27°30′, 27°30′, 27°30′, 27°30′; 3) 20°, 20°, 25°, 25°, 45°, 45°; 4) усі по 30°. **514.** 15°, 15°, 25°, 25°, 50°, 50°. **517.** 1) Гострий; 2) прямий; 3) тупий. **518.** 1) Прямий; 2) гострий; 3) тупий. **519.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **520.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **521.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **522.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **523.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **524.** 1) Рівносторонній; 2) різносторонній; 3) рівнобедрений. **525.** 1) Рівнобедрений; 2) різносторонній. **526.** 1) Основа AB; 2) основа AC; 3) основа BC. **527.** 1) 11 см; 2) 10 см; 3) 9 см, 7 см, 7 см. **528.** 10 см, 13 см, 13 см. **529.** 40 см. **530.** 10 см, 20 см. **531.** 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 14 см. **532.** 1) 20 см, 20 см, 10 см; 2) 15 см, 15 см, 5 см; 3) 28 см, 28 см, 7 см. **533.** 31 см. **534.** 5 см. **535.** *Вказівка*: скористайтеся означенням медіани трикутника. **536.** 12 см. **537.** 1) Прямокутний; 2) тупокутний; 3) гострокутний. **538.** 1) Прямокутний; 2) прямокутний; 3) тупокутний; 4) тупокутний. **539.** 35 см. **541.** Рівнобедрений. **542.** 1) На 4,8 см; 2) на 38,08 см; 3) на $16\frac{2}{3}$ см. **544.** *Вказівка*: розгляньте всі можливі види трикутників. **546.** *Вказівка*: розгляньте всі можливі варіанти розміщення стільців за партами для кожної їх комбінації.

§ 11. Властивості кутів трикутника

547. Ні. **548.** $\angle ACP$, $\angle BCD$. **549.** $\angle ABM$, $\angle MBO$, $\angle OBC$; $\angle ABM = \angle OMB$, $\angle OBC = \angle BOM$; 180°. **552.** $\angle B = 50°$ (мал. 313); $\angle B = 55°$ (мал. 314). **553.** 1) 120°; 2) 50°; 3) 40°; 4) 60°. **554.** 1) 90°; 2) 60°. **555.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **556.** 1) Так; 2) ні. **558.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні. **559.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **560.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **561.** Так. **562.** 1) 70°; 2) 50°; 3) 25°; 4) 38°; 5) 66°; 6) 73°. **563.** 1) 60°; 2) 49°. **564.** 1) Прямокутний; 2) тупокутний; 3) гострокутний. **565.** Прямокутний. **566.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника. **567.** 6. **570.** 130°. **571.** 140°. **572.** 1) 123°; 2) 146°; 3) 104°. **574.** 1) 30°, 60°, 90°; 2) 48°, 72°, 60°; 3) 50°, 50°, 80°. **575.** 40°, 40°, 100°. **576.** 1) Прямокутний; 2) тупокутний. **577.** Гострокутний. **578.** 1) 30°, 60°; 2) 55°, 35°; 3) 36°, 54°. **579.** 15°, 75°. **580.** *Вказівка*: доведіть, що $\angle CAB + \angle ABD = 180°$. **581.** *Вказівка*: доведіть, що $\angle CAE + \angle ACF = 180°$. **582.** $\angle ABD = 25°$, $\angle ADB = 85°$, $\angle DBC = 25°$, $\angle CDB = 95°$. **583.** $\angle ABD = 45°$, $\angle ADB = 90°$, $\angle DBC = 45°$, $\angle CDB = 90°$. **584.** 135°. **585.** 95°. **586.** 90°. **587.** 40°. **588.** *Вказівка*: доведіть, що ΔABC — рівнобедрений.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

589. $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 50°$. **590.** $\angle ABD = 15°$, $\angle CBD = 55°$. **591.** 35°. **592.** 15°, 75°. **593.** 40°, 110°, 30° (мал. 319); 60°, 70°, 110° (мал. 320). **594.** 1) 40°, 60°, 80°; 2) 55°, 80°, 45°; 3) 30°, 80°, 70°. **595.** 1) 60°, 30°; 2) 48°, 42°; 3) 36°, 54°. **596.** 30°, 50°. **597.** Тупими. **598.** 1) Прямокутний; 2) тупокутний; 3) тупокутний. **599.** 1) Ні; 2) так; 3) так. **600.** 7°. **601.** 60°. **602.** 76°. **603.** *Вказівка*: точка D лежить на продовженні сторони BC. **604.** 1) 12°; 2) 20°. **605.** Ні. **606.** ΔABC — прямокутний рівнобедрений. **607.** *Вказівка*: ΔACB — прямокутний рівнобедрений.

§ 12. Рівність геометричних фігур

610. Ні. **611.** Так. **614.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **615.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **616.** 1) Ні; 2) так; 3) ні. **617.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **618.** 1) Так; 2) так; 3) так; 4) не завжди. **621.** $XY = 17$, $YZ = 9$, $XZ = 10$, $\angle X = \angle A$, $\angle Y = \angle B$, $\angle Z = \angle C$. **622.** 1) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$; 2) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. **623.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **624.** 1) Ні; 2) ні. **625.** 1) Ні; 2) ні. **626.** Так. **627.** Так. **628.** 1) $\angle A_1 = 42°$, $\angle B_1 = 80°$, $\angle C_1 = 58°$; 2) $\angle A_1 = 70°$, $\angle B_1 = 65°$, $\angle C_1 = 45°$. **629.** $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 7$ см, $A_1C_1 = 8$ см; 2) $\angle A = 65°$, $\angle B = 80°$, $\angle C = 35°$. **630.** 1) 27 см; 2) 46 см. **631.** 5,4 дм. **632.** Не завжди. **633.** 1) $A_1B_1 = 11$ см, $AC = 16$ см, $B_1C_1 = 14$ см; 2) $\angle B = 60°$, $\angle A = 50°$, $\angle C = 70°$. **634.** $AB = 4{,}2$ см, $BC = 2$ см, $\angle B = 115°$, $\angle C = 45°$; $B_1C_1 = 2$ см, $A_1C_1 = 5{,}3$ см, $\angle C_1 = 45°$, $\angle A_1 = 20°$; $A_2B_2 = 4{,}2$ см, $A_2C_2 = 5{,}3$ см, $\angle A_2 = 20°$, $\angle B_2 = 115°$. **636.** *Вказівка*: для зручності виконуйте побудови за клітинками. **637.** *Вказівка*: для зручності виконуйте побудови за клітинками. **638.** *Вказівка*: кути з відповідно перпендикулярними сторонами рівні.

§ 13. Перша і друга ознаки рівності трикутників

640. Ні ($AB \neq DF$). **642.** Ні ($DE \neq AB$). **644.** $\Delta ADB = \Delta CDB$ (за першою ознакою рівності трикутників) (мал. 351); $\Delta ABD = \Delta CBD$ (за першою ознакою рівності трикутників) (мал. 352). **645.** $\Delta AOB = \Delta DOC$ (за першою ознакою рівності трикутників). **647.** $\Delta ABC = \Delta EFD$ (за першою ознакою рівності трикутників), $\angle B = \angle F$. **648.** $x = 7$. **650.** *Вказівка*: скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **651.** 2) 130°. **653.** *Вказівка*: скористайтеся другою ознакою рівності трикутників. **654.** *Вказівка*: скористайтеся другою ознакою рівності трикутників. **656.** $x = 40°$. **657.** $x = 12$. **658.** 1) $BC = 5$ см; 2) $\angle ABC = 65°$. **659.** $\Delta ABC =$

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

$= \Delta EFD$, $\angle D = \angle C$. **660.** 1) $AB = 6{,}2$ см; 2) $\angle D = 54°$; 3) $\angle B = 46°39'$; 4) $PM = 85$ мм. **661. 1)** *Вказівка*: скористайтеся тим, що $\angle BOC = \angle AOD$ як вертикальні. **662.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю бісектриси кута. **663.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю бісектриси кута. **664.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta AOB = \Delta COD$. **665.** *Вказівка*: скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **666.** *Вказівка*: скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **667.** *Вказівка*: скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **668.** *Вказівка*: доведіть рівність утворених трикутників. **669.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta AEC = \Delta CDA$. **670.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta ADO = \Delta CBO$. **671.** *Вказівка*: скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **672.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta BAD = \Delta BCD$. **673.** *Вказівка*: $\angle ABO = \angle CDO$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих і січній, $\Delta AOB = \Delta COD$ за другою ознакою рівності трикутників. **674.** 1) 10 см; 2) 6 см. **675.** *Вказівка*: у випадку тупого кута основи перпендикулярів лежать на продовженнях сторін кута. **676.** *Вказівка*: нехай D — точка перетину даної прямої та бісектриси, тоді $\Delta ACD = \Delta ABD$ за другою ознакою рівності трикутників. **677.** *Вказівка*: скористайтеся другою ознакою рівності трикутників. **678.** *Вказівка*: доведіть рівність кутів A і A_1, ABD і $A_1B_1D_1$ та скористайтеся другою ознакою рівності трикутників. **679.** *Вказівка*: доведіть, що $AC = AC$ і $\angle C = \angle C$. **680.** *Вказівка*: доведіть рівності $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. **681.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta BOC = \Delta DOA$ (за першою ознакою рівності трикутників), $\Delta ABM = \Delta CDM$ (за другою ознакою рівності трикутників). **682.** *Вказівка*: скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **683.** 96°. **684.** *Вказівка*: скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **685.** *Вказівка*: скористайтеся другою ознакою рівності трикутників. **686.** *Вказівка*: доведіть рівність $OC = OD$. **687.** *Вказівка*: $\Delta AOB = \Delta DOC$ за першою ознакою рівності трикутників, $\Delta BOM = \Delta CON$ за другою ознакою рівності трикутників. **688.** *Вказівка*: $\Delta ABD = \Delta CBD$ за другою ознакою рівності трикутників, $\Delta ABM = \Delta CBM$ за першою ознакою рівності трикутників. **689.** *Вказівка*: розгляньте трикутники OCB і OAD. **690.** *Вказівка*: скористайтеся спочатку першою ознакою рівності трикутників, а потім другою ознакою рівності трикутників. **691.** *Вказівка:* див. задачу 689. **692.** *Вказівка*: скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **693.** *Вказівка*: скористайтеся другою ознакою рівності трикутників.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 14. Властивості й ознака рівнобедреного трикутника

694. $\angle K = \angle L$. **695.** $KD = DF$, $KE = EF$, $\angle DKF = \angle DFK$, $\angle KDE = \angle FDE$, $\angle KED = \angle FED$. **696.** Так. **698.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника. **699.** 1) 3 см, 3 см; 2) 3,5 см, 3,5 см; 3) 4 см, 4 см. **700.** 1) 1,4 дм; 2) 50 мм. **701.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **702.** 1) ON; 2) MN; 3) OM. **703.** 1) $\angle AOC$, $\angle BOC$; 2) $\angle AOB$, $\angle AOC$; 3) $\angle AOB$, $\angle COB$. **704.** 1) $AC = BC$, $AH = BH$, $\angle CAB = \angle CBA$, $\angle ACH = \angle BCH$, $\angle AHC = \angle BHC$. **705.** 2) $DE = DF$, $ME = MF$, $\angle DEF = \angle DFE$, $\angle EDM = \angle FDM$, $\angle EMD = \angle FMD$. **706.** 1) 100°; 2) 50°; 3) 20°. **707.** 1) 54°; 2) 45°; 3) 30°. **708.** 1) 20°, 80°, 80° або 20°, 20°, 140°; 2) 40°, 40°, 100° або 40°, 70°, 70°; 3) 80°, 80°, 20° або 80°, 50°, 50°. **709.** 1) 90°, 45°, 45°; 2) 120°, 30°, 30°; 3) 140°, 20°, 20°. **711.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника. **712.** 1) 90°, 45°, 45°; 2) 60°, 60°, 60°. **713.** 75°, 75°, 30°. **714.** 45°, 45°, 90°. **715.** 1) 40°, 70°, 70°; 2) 120°, 30°, 30°. **716.** 72°, 72°, 36°. **717.** Тільки гострим. **718.** Тільки тупим. **719. 1)** Ні; 2) так; 3) так. **720.** Так. **721.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника та ознакою рівнобедреного трикутника. **722.** *Вказівка*: скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника та ознакою рівнобедреного трикутника. **723. 1)** Так; 2) так; 3) ні. **724.** Так. **725.** *Вказівка*: доведіть рівність утворених трикутників. **726.** *Вказівка*: розгляньте два випадки: 1) дано кут при основі; 2) дано кут, що лежить проти основи. Обчисліть кути трикутника. **727.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника та другою ознакою рівності трикутників. **728.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника та ознакою рівності прямокутних трикутників. **729.** 1) 36°, 36°, 108°; 2) 36°, 72°, 72°. **730.** 1) 40°, 70°, 70°; 2) 20°, 80°, 80°. **731.** 1) 50°, 65°, 65° або 55°, 55°, 70°; 2) 36°, 72°, 72° або 45°, 45°, 90°. **732.** 1) 70°, 55°, 55° або 70°, 70°, 40°; 2) 45°, 45°, 90° або 45°, 67°30’, 67°30’. **733.** 1) 20°; 2) 25°; 3) 60°. **734.** 1) 50°, 65°, 65°; 2) 60°, 60°, 60°; 3) 30°, 30°, 120°. **735.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю зовнішнього кута трикутника. **736.** *Вказівка*: доведіть, що ΔAOC — рівнобедрений. **737.** *Вказівка*: доведіть, що трикутники ADB і CDB — рівнобедрені. **738.** *Вказівка*: доведіть рівність двох трикутників, що утворилися при основі даного трикутника. **739.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta NBM = \Delta DAN = \Delta MCD$. **740.** *Вказівка*: скористайтеся наслідком 1 з теореми про властивість паралельних прямих. **741.** *Вказівка*: використайте

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

відповідні кути при паралельних прямих і січній. **742.** 1) *Вказівка*: доведіть, що $\Delta ABM = \Delta CBN$; 2) *вказівка*: доведіть, що $\Delta ABO = \Delta CBO$; 5) *вказівка*: доведіть, що ΔDBE — рівнобедрений. **743.** Рівнобедрений. **744.** 45°, 45°, 90°. **745.** *Вказівка*: доведіть, що кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює половині зовнішнього кута при його вершині. **746.** Утворилося 2 трикутники з кутами 36°, 72°, 72° і 36°, 36°, 108°. **747.** *Вказівка*: покажіть, що в ΔBAD $BD = AD$, а в ΔADC $AD = AC$. **748.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta ADC = \Delta CBA$. **749.** Рівнобедрений. **750.** *Вказівка*: доведіть, що ΔAMO і ΔONC — рівнобедрені (використайте ознаку паралельності прямих). **751.** *Вказівка*: доведіть, що ΔDAB — рівнобедрений. **752.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника.

§ 15. Третя ознака рівності трикутників

754. Так. **755.** Ні ($AB \neq MN$). **757.** 1) $\Delta BOA = \Delta COD$ (мал. 404); 2) $\Delta ABC = \Delta CDA$ (мал. 405); 3) $\Delta ABC = \Delta ADC$ (мал. 406). **758.** 1) $\Delta ADE = \Delta CDE$; $\Delta ADB = \Delta CDB$; $\Delta AEB = \Delta CEB$; 2) $\Delta ABC = \Delta CDA$; $\Delta BCD = \Delta DAB$. **759.** *Вказівка*: скористайтеся означенням периметра трикутника. **760.** $\Delta ABC = \Delta EFD$ (за третьою ознакою). $\angle A = \angle E$, $\angle C = \angle D$, $\angle B = \angle F$. **762.** *Вказівка*: скористайтеся означенням рівностороннього трикутника та третьою ознакою рівності трикутників. **763.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta ADC = \Delta ABC$. **764.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta AMC = \Delta CNA$, а ΔABC — рівнобедрений. **765.** 1) *Вказівка*: доведіть, що $\Delta BAD = \Delta BCD$. **766.** 1) $\angle ABD = 85°$; 2) *вказівка*: доведіть, що $\Delta DBA = \Delta ACD$ та $\Delta BOA = \Delta COD$. **767.** 1) 35°; 2) 3 см. **768.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$. **769.** *Вказівка*: доведіть рівність трикутників, у яких сторони відповідно дорівнюють одній із даних сторін, даній медіані та половині другої даної сторони. **770.** *Вказівка*: скористайтеся вказівкою на ст.180. **771.** *Вказівка*: продовжіть медіану AM на відрізок MA_1, що дорівнює їй ($2AM = AA_1$); доведіть, що $\Delta ABM = \Delta A_1CM$; застосуйте нерівність трикутника у ΔACA_1. **772.** *Вказівка*: скористайтеся третьою ознакою. **773.** *Вказівка*: потрібно, щоб утворився трикутник.

§ 16. Ознаки рівності прямокутних трикутників

774. Ні. **775.** Так (мал. 423), так (мал. 424), так (мал. 425). **778.** 1) $AB = ED$, $AC = EF$, $BC = DF$, $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle D$, $\angle C = \angle F$.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

779. 1) $DE = AB$, $EF = BC$, $DF = AC$, $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle B$, $\angle F = \angle C$; 3) $DE = AC$, $EF = CB$, $DF = AC$, $\angle F = \angle B$, $\angle D = \angle A$, $\angle E = \angle C$. **780.** 1) 5 см; 2) 0,15 дм; 3) 100 мм. **781.** 1) 2,5 см; 2) 50 мм; 3) 0,4 дм. **782.** 1) 12 мм; 2) 2,25 см; 3) 10 дм. **783.** 1) 9,12 см; 2) 0,112 дм; 3) 39 мм. **784.** *Вказівка*: розгляньте трикутники, сторонами яких є висоти і основа даного трикутника. **785.** *Вказівка*: розгляньте ΔAEM і ΔCFM. **786.** *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом. **787.** 5 см. **788.** *Вказівка*: нехай точка M лежить на бісектрисі CE кута ACB. Проведіть з точки M перпендикуляри MP і MF до сторін AC і CB. Доведіть, що $\Delta PCM = \Delta FCM$. **789.** *Вказівка*: нехай точка M рівновіддалена від сторін кута ACB. Точки P і F — основи перпендикулярів, проведених з точки M до сторін AC і CB. Доведіть, що $\Delta PCM = \Delta FCM$. **790.** 1) 30°; 2) 60°; 3) 27°. **791.** 45°. **792.** 1) $\angle CAB = 10°$, $\angle ACB = \angle ADB = 80°$; 2) $\angle CAB = 20°$, $\angle ACB = \angle ADB = 70°$; 3) $\angle CAB = 30°$, $\angle ACB = \angle ADB = 60°$. **793.** $\angle KMO = \angle MKO = \angle MNO = 45°$. **794.** *Вказівка*: доведіть рівність інших катетів. **795.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника та однією з ознак рівності прямокутних трикутників. **796.** 2) *Вказівка*: нехай у ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ BM і B_1M_1 — медіани, BH і B_1H_1 висоти. $AC = A_1C_1$, $BM = B_1M_1$, $BH = B_1H_1$. Доведіть, що $\Delta BMH = \Delta B_1M_1H_1$, $\Delta BHA = \Delta B_1H_1A_1$, $\Delta BHC = \Delta B_1H_1C_1$. **797.** 2) Нехай у ΔABC і $\Delta A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, висоти $AH = A_1H_1$, $BK = B_1K_1$. Доведіть, що $\Delta ACH = \Delta A_1C_1H_1$, $\Delta ABK = \Delta A_1B_1K_1$. Тоді $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ за другою ознакою. **798.** 3 см; 4 см; 5 см. **799.** *Вказівка*: скористайтеся властивістю катета, що лежить проти кута 30°. **800.** 7 см. **801.** 4 см. **802.** 3 см і 9 см. **803.** $AB = 2a$, $AD = 0{,}5a$, $CD = 0{,}5b$, $BD = 1{,}5a$. **804.** *Доведення*. Нехай у ΔABC кут C — прямий, $2BC = AB$. Добудуємо до ΔABC трикутник ADC так, щоб точка D належала променю BC і $CD = CB$. $\Delta ABC = \Delta ADC$. Тоді у ΔABD: $AB = BD = AD$. Кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60°. AC — висота і бісектриса. Отже, $\angle CAB = 30°$. **805.** 30°, 60°, 90°. **806.** 30°, 75°, 75°. **807.** 9 см. **808.** 18 см. **809.** 2 см. **810.** 30 см. **811.** 4 см. **812.** 5 см. **813.** *Вказівка*: доведіть, що $\Delta ADC = \Delta BDC$. **814.** *Вказівка*: з точок B і C проведіть перпендикуляри до прямої AD та доведіть рівність утворених прямокутних трикутників. **815.** *Вказівка:* відрізок між пунктами візьміть за гіпотенузу.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 17. Коло і круг

816. 2) *NC, LD, KB*. **818.** Прямі *AB, BC, AC*. **819.** Два. **820.** 1) 13 см; 2) 5,2 см; 3) $2m$ см; 4) $4n$ см. **821.** 1) 2,1 см; 2) 4,1 см; 3) $\frac{a}{2}$ см; 4) a см. **822.** 1) Безліч; 2) один; 3) один. **823.** 1) Всередині круга; 2) на колі; 3) всередині круга; 4) поза кругом. **824.** 1) Всередині круга; 2) на колі; 3) поза кругом. **825.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так. **826.** 1) Ні; 2) так. **827.** 1) Ні; 2) так. **828.** 1) Ні; 2) так. **829.** 1) 1 дм; 2) 60 мм; 3) 9 см; 4) 0,14 дм. **830.** 20 см. **831.** *Вказівка:* проведіть радіуси з кінців хорди та скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника. **832.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. **833.** Так. **834.** 1) Дві; 2) одну; 3) жодної. **835.** 1) Пряма перетинає коло; 2) пряма дотикається до кола; 3) пряма не перетинається з колом; 4) пряма дотикається до кола. **836.** 1) Пряма перетинає коло; 2) пряма дотикається до кола; 3) пряма не перетинається з колом. **837.** 1) $O_1O_2 = R + r$; 2) $O_1O_2 = R - r$. **838.** 1) Не перетинаються; 2) дотикаються зовні; 3) дотикаються внутрішньо. **839.** 1) 10 см і 2 см; 2) 7 см і 5 см; 3) 9 см і 1 см; 4) 14 см і 4 см. **840.** 8 см і 2 см. **841.** 1) 5 см і 1 см; 2) 3,5 см і 2,5 см; 3) 4,5 см і 0,5 см; 4) 7 см і 2 см. **842.** 4 см і 1 см. **845.** Ні. **846.** Якщо AB — діаметр, то $CD = AB$; в інших випадках $CD > AB$. **847.** 1) 20 см; 2) 1 дм; 3) 30 мм; 4) 5,8 см. **848.** 12 см. **849.** 6 см. **850.** *Вказівка:* скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **851.** 1) 8 см; 2) 5 см; 3) 8 см. **852.** 11 см. **853.** 1) 50°; 2) 60°; 3) 45°; 4) 40°. **854.** 55°. **855.** 3 см і 6 см. **856.** 120°. **857.** Ні. **858.** 1) 35°; 2) 30°. **859.** 4 см. **860.** *Вказівка:* проведіть радіуси в точки дотику та відрізок, що сполучає точку A з центром кола. **861.** 30°. **862.** 60°. **863.** $AB = AC = R$. **864.** *Вказівка:* див. задачу 860. **865.** 1) 4 см; 2) 5 см. **866.** *Вказівка:* доведіть, що ΔAOB — рівнобедрений. **867.** 1) 6 см і 12 см або 18 см і 36 см; 2) 8 см і 10 см або 72 см і 90 см; 3) 14 см і 4 см або 25,2 см і 7,2 см; 4) 15 см і 3 см або 22,5 см і 4,5 см. **868.** 6 см і 4 см або 30 см і 20 см. **869.** 60°. **870.** 120°. **871.** *Вказівка*: сполучіть інші кінці хорд із центром і розгляньте утворений трикутник. **972.** *Вказівка:* проведіть радіуси в кінці хорд та доведіть рівність утворених трикутників. **874.** 20 см і 60 см. **875.** Так. **876.** *Вказівка*: доведіть, що MO і NO — бісектриси внутрішніх односторонніх кутів. **877.** 90°. **878.** 60°. **879.** *Вказівка*: покажіть, що лінії центрів попарно є радіусами певного кола. **880.** *Вказівка*: скористайтеся означенням кола. **881.** *Вказівка*: пряма, що перпендикулярна до хорди кола і ділить її навпіл, проходить через центр кола. **882.** *Вказівка:* доведіть, що центр кола лежить на бісектрисі кута між дотичними.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

§ 18. Геометричне місце точок

883. Коло (мал. 471), бісектриса кута (мал. 472), серединний перпендикуляр (мал. 473). **886.** 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) ні. **887.** Ні. **890.** Ні. **891.** Перше. **892.** Така точка рівновіддалена від сторін трикутника. **893.** Ні. **894.** Перше. **897.** Така точка рівновіддалена від вершин трикутника. **898.** Коло радіуса $R + r$, центр якого міститься в центрі даного кола. **899.** Коло з радіусом R. **900.** *Вказівка:* проведіть радіуси в точки дотику та доведіть рівність утворення трикутників. **901.** Це — точка перетину бісектрис трикутника. **902.** Дві прямі, що містять бісектриси кутів між даними прямими. **903.** Дві прямі, що містять бісектриси кутів між даними прямими. **904.** *Вказівка:* скористайтеся розв'язанням задачі 2 на с. 207. **905.** Серединний перпендикуляр до відрізка AB без точки, що є серединою відрізка AB. **906.** Точка перетину серединних перпендикулярів. **907.** Пряма, паралельна даним прямим. **908.** Дві прямі, паралельні даній прямій і віддалені від неї на m. **909.** Ні. **910.** Дві прямі, які паралельні даній прямій і розміщуються від неї на відстані R. **911.** Коло радіуса a з центром B без двох точок, що лежать на прямій AB на відстані a від точки B. **912.** Серединний перпендикуляр до відрізка, що сполучає центри даних кіл. **913.** Пряма, яка перпендикулярна до прямої a і перетинає її в точці A. **914.** Один розв'язок, якщо серединний перпендикуляр до MN паралельний одній із сторін кута або збігається з бісектрисою кута ABC. Два розв'язки — в усіх інших випадках. **915.** Дві паралельні прямі, які розміщуються на відстані h від даної прямої. **916.** Дві прямі, паралельні даній прямій, якщо довжина хорди менша від $2R$; дана пряма, якщо довжина хорди дорівнює $2R$; такого геометричного місця точок не існує, якщо довжина хорди більша за $2R$. **917.** *Вказівка:* скористайтеся властивістю серединного перпендикуляра до відрізка. **918.** *Вказівка:* скористайтеся властивістю серединного перпендикуляра до відрізка.

§ 19. Описані та вписані кола

919. Мал. 489. **920.** Мал. 492. **921.** 1) Усередині трикутника ABC; 2) на середині гіпотенузи трикутника ABC; 3) поза трикутником ABC. **922.** 1) так; 2) ні. **923.** У прямокутному трикутнику — на середині гіпотенузи, у тупокутному — зовні трикутника. **924.** У гострокутному трикутнику центр описаного кола розміщено всередині трикутника. **925.** 1) Безліч; 2) безліч; 3) одне. **927.** 1) Ні; 2) ні. **928.** Так. **929.** 1) 1 см; 2) 18 мм; 3) 4,5 дм.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

930. 2,5 см. **931.** 1) 8 см; 2) 12 см. **932.** 10 см. **933.** *Вказівка*: проведіть бісектриси двох кутів трикутника. **934.** *Вказівка*: проведіть бісектриси двох кутів трикутника. **935.** Одне. **938.** 1) 35°, 35°, 25°, 25°; 2) 20°, 20°, 20°, 20°; 3) 30°, 30°, 15°, 15°; 4) 15°, 15°, 60°, 60°. **939.** 15°, 15°, 45°, 45°. **940.** 1) 50°, 60°, 70°; 2) 40°, 40°, 100°; 3) 60°, 30°, 90°; 4) 30°, 30°, 120°. **941.** 60°, 80°, 40°. **942.** 1) 2 см; 2) 3 см; 3) 1 см. **943. 7 см. 944.** 1) 5 см; 2) 5 см; 3) 4 см. **945. 4 см. 946.** *Вказівка:* див. задачу в параграфі. **947.** 1) 15 см; 2) 21 см; 3) 27 см; 4) $r + R$. **948.** 1) 6 см; 2) 33 см. **949.** 1 : 2. **950.** 1) 4 см і 8 см; 2) 8 см і 16 см; 3) 12 см і 24 см; 4) $\frac{1}{3}h$ см і $\frac{2}{3}h$ см. **951.** 1) 3 см і 6 см; 2) 6 см і 12 см. **952.** Якщо трикутник прямокутний. **953.** Так, якщо один із кутів дорівнює 60°. **954.** 35°, 55°, 90°. **956.** 4 см. **957.** 6 см. **958.** *Вказівка:* див. задачу 955. **959.** 40 см. **960.** 11 см, 10 см, 9 см. **961.** 34 см. **962.** *Вказівка:* доведіть, що $\Delta CMO = \Delta CNO$ і вони є рівнобедреними. **963.** 1) 24 см; 2) 30 см; 3) 40 см; 4) 56 см. **964.** 3 : 4. **965.** *Вказівка:* див. задачу 962. **966.** 1) 2 см; 2) 0,9 дм; 3) 0,04 м. **967.** 38°, 52°. **970.** a. **971.** $P_1 + P_2 + P_3$. **972.** *Вказівка:* найменшу довжину буде мати маршрут, який не проходить за найбільшою стороною ΔABC.

§ 20. Задачі на побудову

973. 5, 6, 9. **974.** *Вказівка:* див. задачу 2 у параграфі. **975.** *Вказівка:* див. задачу 3 у параграфі. **976.** *Вказівка:* див. задачу 1 у параграфі. **977.** *Вказівка:* див. задачу 1 у параграфі. **978.** *Вказівка:* див. задачу 1 у параграфі. **979.** *Вказівка*: побудуйте трикутник за трьома сторонами a, b, b. **980.** *Вказівка:* див. задачу 979. **981.** *Вказівка:* див. задачу 979. **982.** *Вказівка:* див. задачу 2 у параграфі. **983.** *Вказівка:* див. задачу 2 у параграфі. **984.** *Вказівка*: спочатку побудуйте кут, що дорівнює даному. **986.** *Вказівка:* спочатку побудуйте кут, рівний одному з даних кутів. **990.** *Вказівка:* гострим є зовнішній кут при вершині тупого кута трикутника. **991.** *Вказівка:* прямим є зовнішній кут при вершині прямого кута трикутника. **994.** *Вказівка*: спочатку розкрийте відношення, для чого введіть спільний коефіцієнт, наприклад, 1 см. Тоді сторони трикутника дорівнюватимуть 2 см, 3 см, 4 см. Побудуйте трикутник за цими сторонами. **995.** *Вказівка:* див. задачу 994. **996.** *Вказівка*: від сторони даного кута відкладіть кут, що дорівнює даному. **997.** 1) *Вказівка*: див. задачу 984. **997.** *Вказівка*: див. задачу 984. **999.** 1) *Вказівка*: скористайтеся рівностороннім трикутником.

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

1000. 1) *Вказівка*: скористайтеся рівностороннім трикутником. **1002.** *Вказівка:* через дану точку проведіть пряму й оберіть на ній іншу довільну точку. У цій точці міститиметься вершина шуканого кута. **1003.** *Вказівка:* доведіть, що $\Delta ABN = \Delta ACM$, $\Delta CON = \Delta BOM$, $\Delta ACO = \Delta ABO$. **1004.** *Вказівка*: побудуйте бісектрису кута AOB, а потім пряму, яка перпендикулярна до цієї бісектриси і проходить через точку O. **1005.** *Вказівка*: нехай точки A і B — населені пункти, пряма l — берег каналу, точка O — основа перпендикуляра, проведеного з точки A до прямої l. Відкладіть на продовженні відрізка AO відрізок $AO_1 = AO$ і знайдіть точку перетину прямих A_1B і l.

Повторення вивченого

2. Подивитись уздовж зрізу. **4.** 1) Так; 2) ні. **5.** 1) Ні; 2) так. **8.** 4 см або 16 см. **9.** 1) 4 см або 12 см; 2) 2 см або 6 см. **10.** 1 км або 9 км. **11.** 81. **12.** 1) 21 м; 2) 16 м; 3) 2 м. **13.** 1) 600 м; 2) 450 м. **15.** Не досягли. **17.** Колоди завдовжки 3 м. **18.** *Вказівка:* спочатку виміряйте невеликий стос аркушів (наприклад, заввишки 1 см) і підрахуйте кількість аркушів у ньому. Потім виміряйте висоту даного стосу і знайдіть кількість аркушів у ньому. **19.** Намотайте дріт на лінійку так, щоб сусідні витки дроту були щільно притиснуті один до одного. Тоді, поділивши ширину отриманого шару на кількість витків, одержите товщину одного витка, яка і буде діаметром дроту. **22.** *Вказівка:* перегніть шматок тканини навпіл, потім одну з половинок перегніть навпіл ще раз і, нарешті, ту четвертинку, яка ближче до середини, знову перегніть навпіл. **23.** 1) Ні; 2) так. **24.** Прикладіть до кута лінійку. **26.** Обидва. **27.** 1) 120°; 2) 60°. **28.** 5. **29.** *Вказівка:* з вершини кута проведіть перпендикулярний промінь з того боку, де відкладено рівні кути. **30.** Зменшуватиметься від 180° до 0°. **31.** 1) Так; 2) ні. **32.** 1) Так; 2) так, зокрема дві з трьох сторін. **33.** Ні. *Вказівка:* скористайтеся аксіомою паралельних прямих. **34.** *Вказівка:* спочатку обґрунтуйте, що $a \parallel b$. Потім скористайтеся методом доведення від супротивного. **35.** 1) 4; 2) 4; 3) 8. **36.** Січна перпендикулярна до паралельних прямих. **37.** Так. **38.** 60°. **40.** Якщо AM — бісектриса кута A. **41.** *Вказівка:* скористайтеся ознакою паралельності прямих. **42.** *Вказівка:* проведіть на однакових відстанях (що дорівнюють ширині лінійки) від сторін кута паралельні їм прямі та знайдіть точку їх перетину. **46.** 1), 3), 5). **47.** Властивості: 2), 4), 6); ознаки: 1), 3), 5). **48.** 4; 5; 6; $n + 1$. **49.** 1) Збільшиться на 9 см; 2) збільшиться у 3 рази; 3) зменшиться в 1,5 рази; 4) зменшиться на 4,5 см. **50.** 1) Збільшиться на

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

2 см; 2) збільшиться у 2 рази; 3) зменшиться в 4 рази; 4) зменшиться на 0,9 см. **51.** 2 см. **52.** 15 см. **53.** *Вказівка:* скористайтеся нерівністю трикутника. **57.** Так, прямокутний трикутник. **58.** Не можна. **59.** 1) Тупокутний; 2) прямокутний; 3) гострокутний. **60.** 83°, 77°, 20°. **61.** 1) Ні; 2) ні. **62.** У рівносторонньому. **63.** 60°, 60°, 120°, 120°. **64.** 60°. **65.** 25°. **66.** 3,5 см. **67.** 71°. **68.** CD. **69.** 18 см. **70.** 10 см, 10 см, 10 см. **71.** Рівнобедрений. **72.** *Вказівка:* скористайтеся ознакою рівнобедреного трикутника. **74.** 1) Більший за 45°, але менший від 90°; 2) 45°; 3) менший від 45°. **75.** *Вказівка:* від вершини прямого кута відкладіть уздовж дошки відстань, що дорівнює її ширині. Одержану точку сполучіть із вершиною протилежного прямого кута дошки. **78.** 2) 2; 3) m. **81.** 14 см. **83.** 7,5 см. **85.** 1) 55°, 35°; 2) 60°, 30°; 3) 55°, 35°. **86.** 1) 5°; 2) 5°; 3) 10°. **87.** 2α. **88.** 1) 60°; 2) 90°. **89.** 1) 110°; 2) 55°; 3) $90° + \frac{\alpha}{2}$, $45° + \frac{\alpha}{4}$. **92.** 1) Так; 2) ні; 3) ні. **94.** 1) $\Delta AKM = \Delta A_1K_1M_1$, $\Delta BKL = \Delta B_1K_1L_1$, $\Delta CML = \Delta C_1M_1L_1$, $\Delta MKL = \Delta M_1K_1L_1$. **95.** *Вказівка:* скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. **96.** 1) Одна; 2) три; 3) п'ятнадцять. **97.** *Вказівка:* спочатку доведіть, що $AE \parallel BC$ і $AF \parallel BC$. **99.** *Вказівка:* скористайтеся властивістю паралельних прямих. **100.** *Вказівка:* скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. Не зміниться. **102.** *Вказівка:* скористайтеся ознакою рівнобедреного трикутника. **103.** *Вказівка:* позначте на колі будь-які дві точки і за допомогою циркуля побудуйте точку, віддалену від кожної з цих двох точок на відстань 30 мм. **104.** 1) 20 см; 2) 30 мм; 3) 7,6 дм. **105.** 3 мм. **106.** 1) 1 см або 2 см; 2) 1,5 см або 3,5 см. **107.** 1) 1 см, 3 см; 2) 3 см або 5 см. **108.** Найкоротший маршрут катера співпадає з хордою, перпендикулярною до радіуса, що проходить через острів. Якщо ж острів знаходиться в центрі кола, то всі маршрути матимуть однакову довжину. **109.** Безліч. Немає. Найменший радіус тоді, коли центром кола є середина відрізка AB. **110.** 1) Коло з радіусом $\frac{R}{2}$; 2) коло з радіусом $2R$. **112.** За допомогою мотузки треба відкласти на сторонах кута від його вершини рівні відрізки; закріпити в кінцях відрізків кінці мотузки та натягнути її, тримаючи за середину. Тоді одержана точка лежатиме на бісектрисі кута. **113.** Треба позначити кілками три точки на даній прямій так, щоб одна з точок була серединою відрізка з кінцями у двох інших точках; закріпити кінці мотузки у кінцях цього відрізка та натягнути мотузку, тримаючи її за середину; отримана точка та середина відрізка ви-

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

значатимуть перпендикулярну пряму. **114.** *Вказівка:* скористайтеся методом доведення від супротивного. **115.** $0{,}5a$. **116.** $110°$, $70°$. **117.** Центр кола лежить на середині гіпотенузи, а його радіус дорівнює половині гіпотенузи. **118.** Дотикається до гіпотенузи й перетинає катети.

ДЛЯ ТИХ, ХТО ХОЧЕ ЗНАТИ БІЛЬШЕ

1. Так. **2.** Бісектриса кута і коло (мал. 7); бісектриса кута і серединний перпендикуляр (мал. 8); коло і серединний перпендикуляр (мал. 9). **3.** *Вказівка*: трикутник BDE — допоміжний. Вершини A і C одержимо, відклавши з обох боків від точки E відрізки завдовжки $\frac{1}{2}b$. **4.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний прямокутний трикутник з гіпотенузою c і катетом h. **5.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний трикутник ABD за трьома сторонами: a, m, $\frac{1}{2}a$. **6.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний прямокутний трикутник ADC за кутом $\frac{1}{2}\alpha$ і сторонами l і b. **7.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетами h і $\frac{1}{2}a$. **8.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетом h і прилеглим гострим кутом $\frac{1}{2}\alpha$. **9.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетом h і гіпотенузою b. **10.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний трикутник за двома сторонами a і m та кутом між ними α. **11.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетом h і гіпотенузою b. **12.** *Вказівка*: побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетом h і гіпотенузою l. **14.** *Вказівка:* спочатку побудуйте коло радіуса R і його хорду b. **15.** *Вказівка*: побудуйте коло радіуса R і його хорду a. Серединний перпендикуляр до цієї хорди перетинає коло у вершині шуканого трикутника. **16.** *Вказівка*: побудуйте коло радіуса R і проведіть коло радіуса b з центром у деякій точці даного кола. **17.** *Вказівка*: побудуйте коло радіуса R і його хорду a. Діаметр, що має спільний кінець із побудованою хордою, є гіпотенузою шуканого трикутника. **18.** *Вказівка*: побудуйте коло радіуса R і його хорду a. Відкладіть кут α від даної хорди. Сторона кута перетинає коло у вершині трикутника. **19.** *Вказівка*: побудуйте коло радіуса R та дві хорди a і b, що мають спільну точку на побудованому колі. **20.** *Вказівка*:

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

шукана точка є точкою перетину прямої a із серединним перпендикуляром до відрізка AB. **21.** Задача може мати або 1, або 2 розв'язки, або не мати розв'язків. **22.** *Вказівка*: шукана точка є точкою перетину даної прямої з бісектрисою даного кута. **23.** *Вказівка*: шукана точка є точкою перетину даного кола з бісектрисою даного кута. Задача може мати або 1, або 2 розв'язки, або не мати розв'язків. **24.** *Вказівка:* задача може мати або 1, або 2, або безліч розв'язків. **25.** 0, 1, 2. **26.** *Вказівка*: шукана точка є точкою перетину кола радіуса d із центром у точці B із заданим колом. **27.** *Вказівка*: шукана точка є точкою перетину серединного перпендикуляра до відрізка MK з бісектрисою кута ABC. **28.** *Вказівка:* геометричним місцем точок, які лежать на даній відстані від даної прямої, є дві прямі, паралельні даній прямій і розміщені на даній відстані від неї. **29.** *Вказівка*: шукана точка є точкою перетину серединного перпендикуляра до відрізка AB з прямими, які паралельні прямій a і розміщені на відстані d від неї. **31.** 0, 1, 2, 3, 4. **32.** *Вказівка*: центр кола є точкою перетину серединного перпендикуляра до відрізка AB із прямою, що проходить через точку A перпендикулярно до прямої a. **33.** *Вказівка*: центр кола є точкою перетину прямих, які паралельні прямій a і знаходяться на відстані R від неї, та кола з центром A і радіусом R. **34.** *Вказівка*: центр кола є точкою перетину бісектриси кута ABC з перпендикуляром, проведеним з точки D до сторони кута. **35.** *Вказівка*: центр кола є точкою перетину прямої a із серединним перпендикуляром до відрізка AB. **36.** *Вказівка*: центр кола є точкою перетину кола радіуса d з центром у точці M і прямої, яка паралельна даним прямим і віддалена від них на відстань, що дорівнює половині відстані між даними паралельними прямими. **38.** *Вказівка:* вершина трикутника, з якої проведено висоту h, є точкою перетину однієї зі сторін даного кута α і геометричного місця точок, розміщених на відстані h від прямої, що містить другу сторону цього кута. **39.** *Вказівка*: точка A є точкою перетину серединного перпендикуляра до сторони BD трикутника BDC та сторони CD. **40.** *Вказівка:* побудувати допоміжний трикутник за двома сторонами c і $a + b$ та кутом між ними α. Шукана вершина лежить на перетині сторони $a + b$ допоміжного трикутника із середнім перпендикуляром до його третьої сторони. **41.** *Вказівка:* побудуйте допоміжний трикутник за двома сторонами c і $a + b$ та кутом 45°, який лежить проти сторони c. **42.** *Вказівка:* див. задачу 40. **48.** *Вказівка:* врахуйте, що автомагістралі перетинають умовну пряму річки (обидві під прямим кутом).

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ЗМІСТ

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Навчальне видання

БУРДА Михайло Іванович
ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Головна редакторка *І. В. Красуцька*
Редакторка *І. В. Луценко*
Головна художниця *І. П. Медведовська*
Художня редакторка *К. В. Берсенєва*
Технічний редактор *Е. А. Авраменко*
Коректорка *О. В. Должикова*
Комп'ютерна графіка *О. І. Дядика*
Презентації та інтерактивні вправи *Л. М. Шабанової*

В оформленні підручника використано фото з вільних джерел мережі «Інтернет»,
фотобанку *Shatterstock*

Бренди та ресурси зображуються лише з освітньою метою
та не є закликом до їх купівлі/відвідування

Формат 70×100 $^{1}/_{16}$. Ум. друк. арк. 23,4 + 0,324 форзац.
Обл.-вид. арк. 21,2 + 0,55 форзац.
Зам. №
Тираж 33 585 пр.

ТОВ «Український освітянський видавничий центр "Оріон"»
Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 4918 від 17.06.2015 р.

Адреса видавництва: 03061, м. Київ, вул. Миколи Шепелєва, 2

Віддруковано у ТОВ «КОНВІ ПРІНТ».
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців,
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції серія ДК № 6115, від 29.03.2018 р.
03680, м. Київ, вул. Антона Цедіка, 12

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Букви	Назви букв
Α α	А́льфа
Β β	Бе́та
Γ γ	Га́мма
Δ δ	Де́льта
Ε ε	Е́псилон
Ζ ζ	Дзе́та
Η η	Е́та
Θ θ	Те́та
Ι ι	Йо́та
Κ κ	Ка́ппа
Λ λ	Ля́мбда
Μ μ	Мі (мю)
Ν ν	Ні (ню)
Ξ ξ	Ксі
Ο ο	О́мікрон
Π π	Пі
Ρ ρ	Ро
Σ σ	Си́гма
Τ τ	Та́у
Υ υ	І́псилон
Φ ϕ	Фі
Χ χ	Хі
Ψ ψ	Псі
Ω ω	Оме́га

ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Букви	Назви букв
A a	а
B b	бе
C c	це
D d	де
E e	е
F f	еф
G g	же
H h	аш
I i	і
J j	йот (жі)
K k	ка
L l	ель
M m	ем
N n	ен
O o	о
P p	пе
Q q	ку
R r	ер
S s	ес
T t	те
U u	у
V v	ве
W w	дубль-ве
X x	ікс
Y y	ігрек
Z z	зет

СУЧАСНІ МІРИ ДОВЖИНИ

1 см = 10 мм
1 дм = 10 см = 100 мм
1 м = 10 дм = 100 см = 1000 мм
1 км = 1000 м

СТАРОВИННІ МІРИ ДОВЖИНИ

1 дюйм ≈ 2,5 см
1 вершок ≈ 4,4 см
1 п’ядь ≈ 18 см
1 фут ≈ 30 см
1 аршин ≈ 71 см
1 верста ≈ 1 км 67 м
1 миля морська ≈ 1 км 852 м
1 миля географічна ≈ 7 км 420 м

ПЕРЕЛІК ПОЗНАЧЕНЬ У ПІДРУЧНИКУ

a — пряма a
AB — пряма AB
AB — відрізок AB
AB — промінь AB з початком A
$A \in a$ — точка A належить прямій a
$A \notin a$ — точка A не належить прямій a
$a \parallel b$ — прямі a і b паралельні
$a \perp b$ — прямі a і b перпендикулярні
$\angle A$ — кут A
ΔABC — трикутник ABC
m_a — медіана, проведена до сторони a трикутника
l_a — бісектриса, проведена до сторони a трикутника
h_a — висота, проведена до сторони a трикутника
$F_1 = F_2$ — фігури F_1 і F_2 рівні
P — периметр
ГМТ — геометричне місце точок

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

Український освітянський видавничий центр «Оріон»

ISBN 978-966-991-292-3

9 789669 912923