В. А. Ясінський, В. М. Лейфура,
І. М. Мітельман, О. Б. Панасенко, В. М. Радченко

СЕКРЕТИ ПІДГОТОВКИ ШКОЛЯРІВ ДО ВСЕУКРАЇНСЬКИХ ТА МІЖНАРОДНИХ МАТЕМАТИЧНИХ ОЛІМПІАД

ТЕОРІЯ ЧИСЕЛ

Навчально-методичний посібник

Вінниця
ТОВ «Нілан-ЛТД»
2018

УДК 372.851:511(07)
С28

Рекомендовано до видання
Вченою радою Одеського обласного інституту удосконалення вчителів
(протокол від 22 червня 2017 р. №3)
та
Вченою радою Вінницького державного педагогічного університету
імені Михайла Коцюбинського
(протокол від 22 листопада 2017 р. №5)

Рецензенти:

Працьовитий М. В., заслужений діяч науки і техніки України, професор Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова, доктор фізико-математичних наук;

Матяш О. І., професор Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, доктор педагогічних наук;

Задоріна О. М., доцент Одеського обласного інституту удосконалення учителів, кандидат педагогічних наук.

С28 Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Теорія чисел : навч.-метод. посібник / В. А. Ясінський [та ін.] — Вінниця : ТОВ «Нілан-ЛТД», 2018. — 336 с.
ISBN 978-966-924-693-6

У посібнику подаються вибрані методи розв'язування задач олімпіадного характеру з теорії чисел, викладено відповідний теоретичний матеріал, наводяться задачі з докладними розв'язаннями й задачі для самостійної роботи. Посібник стане в пригоді вчителям математики, учням загальноосвітніх шкіл, керівникам математичних гуртків, організаторам олімпіад, студентам математичних та педагогічних спеціальностей тощо.

УДК 372.851:511(07)

ISBN 978-966-924-693-6

Зміст

Передмова

У 2011 р. побачив світ навчально-методичний посібник В. А. Ясінського «Олімпіадні задачі з теорії чисел. Практикум із розв'язування». Автор присвятив його *Валентину Миколайовичу Лейфурі* (1947–2011) — відомому українському вченому та педагогу, одному із засновників математичного олімпіадного й турнірного руху незалежної України.

У 2014–2015 рр. були видані ще дві книжки В'ячеслава Ясінського (у співавторстві із О. Б. Панасенком), об'єднані назвою «Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад» — з геометрії та алгебри. В'ячеслав Андрійович омріював ще декілька книжок цієї ж самої серії, зокрема — працював над матеріалами теоретико-числової тематики, якими мав бути значно розширений зміст згаданого вище посібника з теорії чисел. На жаль, раптова смерть В'ячеслава Андрійовича Ясінського в листопаді 2015 р. завадила своєчасному здійсненню цих планів.

У пам'ять про В'ячеслава Андрійовича Ясінського — неперевершеного українського педагога-математика, заслуженого вчителя України, видатного композитора олімпіадних задач — завершити розпочату роботу було справою честі для його колег і друзів, однодумців, з якими він співпрацював.

Протягом багатьох років нам пощастило разом із В. А. Ясінським та В. М. Лейфурою брати участь в організації та проведенні олімпіад і турнірів, створювати нові задачі, готувати збірні команди України до Міжнародних математичних олімпіад. Як добре відомо, підготовка обдарованих учнів саме з теорії чисел є одним з наріжних каменів, запорукою успіхів на таких авторитетних змаганнях. Тому опрацюванню складних розділів елементарної теорії чисел, методики та практики розв'язування олімпіадних теоретико-числових задач найвищого рівня складності завжди приділялося нами чимало уваги: читалися цікаві ґрунтовні лекції, пропонувалися задачні «ланцюжки», спільно вивчалися й узагальнювалися задачі математичних олімпіад різних країн, робочі матеріали Міжнародних олімпіад тощо. Такі розробки знайшли своє місце в цьому посібнику, у багатьох випадках — з оновленням відповідних задачних матеріалів, що краще відтворює актуальні сучасні тенденції щодо змісту математичних змагань високого рівня. Важко переоцінити вагомий внесок професора В. М. Лейфури — наукового керівника збірної команди України на Міжнародних олімпіадах 2003–2006 рр. — до створення та багаторічного наукового супроводу вітчизняної системи підготовки юних математиків нашої країни до участі в Міжнародних математичних олімпіадах. Його глибокі математичні й методичні ідеї завжди надихали на плідну творчу роботу.

Запропонований навчально-методичний посібник стане в пригоді вчителям математики, керівникам математичних гуртків, методичним працівникам, організаторам олімпіад і турнірів з математики, учням, які готуються до математичних змагань, студентам математичних та педагогічних спеціальностей університетів, усім тим, хто цікавиться розв'язуванням складних задач з математики.

Ігор Мітельман
Олексій Панасенко
Вадим Радченко

Основні позначення

$\mathbb{N}$	множина всіх натуральних чисел
$\mathbb{Z}$	множина всіх цілих чисел
$\mathbb{Z}_+$	множина всіх цілих невід'ємних чисел
$\mathbb{Q}$	множина всіх раціональних чисел
$\mathbb{R}$	множина всіх дійсних чисел
$\tau(n)$	кількість усіх натуральних дільників числа n
$\sigma(n)$	сума всіх натуральних дільників числа n
$\varphi(n)$	кількість усіх натуральних чисел, які менші за n і взаємно прості з n
$[x]$	ціла частина числа x, тобто найбільше ціле число, що не перевищує x
$\{x\}$	дробова частина числа x, $\{x\} = x - [x]$
$n!$	добуток $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, $n > 1$; $1! = 1$, $0! = 1$
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$	$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
$\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$
$a \,\vdots\, b$	ціле число a ділиться без остачі на ціле число $b \neq 0$
$b \mid a$	число b ділить число a (b є дільником числа a)
НСД(a, b) або (a, b)	найбільший спільний дільник чисел a, b
НСК(a, b) або $[a, b]$	найменше спільне кратне чисел a, b
$a \equiv b \pmod{m}$	цілі числа a і b конгруентні за модулем m, $m > 1$
(a_n) або $\{a_n\}$	числова послідовність $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$
$\min\{a_1, \ldots, a_n\}$	найменше з чисел $a_1, \ldots, a_n$
$\max\{a_1, \ldots, a_n\}$	найбільше з чисел $a_1, \ldots, a_n$
$\left(\frac{a}{p}\right)$	символ Лежандра

Розділ 1

Цілочисельні послідовності і функції

1.1. Арифметичні функції в теорії чисел

Будь-яка функція $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ називається *арифметичною*.

Вивчаючи властивості цілих чисел, доводиться розглядати різні арифметичні функції. Прикладами таких функцій є кількість $\tau(n)$ додатних дільників натурального числа n, сума $\sigma(n)$ додатних дільників натурального числа n, добуток $\pi(n)$ додатних дільників натурального числа n, число $\varphi(n)$ додатних дільників натурального числа n, які взаємно прості з n, тощо.

1.1.1. *Мультиплікативні функції та їхні властивості*

Арифметична функція f називається *мультиплікативною*, якщо вона задовольняє наступним двом умовам:

1. Значення функції не дорівнює нулю щонайменше при одному $n > 1$.

2. Для довільних додатних взаємно простих a та b, маємо:

$$f(ab) = f(a) f(b).$$

Легко бачити, що функція $f(n) = n^s$, де s — довільне дійсне число, є мультиплікативною.

Теорема 1.1. *Якщо $f(n)$ є мультиплікативною функцією, то $f(1) = 1$.*

Доведення. Справді, за означенням існує таке n_0, для якого $f(n_0) \neq 0$. Тоді $f(n_0) = f(n_0 \cdot 1) = f(n_0) f(1)$, звідки, після скорочення, знаходимо: $f(1) = 1$. □

Умова 2 із означення мультиплікативної функції $f(n)$ має місце і при $k > 2$ попарно взаємно простих чисел $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$. Справді,

$$f(n_1 n_2 n_3 \ldots n_k) = f(n_1) f(n_2 n_3 \ldots n_k) = f(n_1) f(n_2) f(n_3 \ldots n_k) = \ldots = \\ = f(n_1) f(n_2) f(n_3) \ldots f(n_k).$$

Легко перевірити, що для різних простих чисел $p_1, \ldots, p_k$:

$$f\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_k^{\alpha_k}\right) = f\left(p_1^{\alpha_1}\right) f\left(p_2^{\alpha_2}\right) f\left(p_3^{\alpha_3}\right) \ldots f\left(p_k^{\alpha_k}\right). \qquad (1.1)$$

Навпаки, ми завжди можемо побудувати деяку мультиплікативну функцію $f(n)$, якщо покладемо $f(1) = 1$ і означимо довільно значення для $f(p^\alpha)$, що відповідають додатнім степеням простих чисел, в загальному випадку означивши її рівністю (1.1).

Наприклад, мультиплікативну функцію можна побудувати, взявши $f(1) = 1$ і $f(p^\alpha) = 2$, якщо $\alpha > 0$. Тоді для будь-якого натурального k будемо мати $f\left(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}\right) = 2^k$. Зокрема знаходимо:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 2, \quad f(4) = 2,$$
$$f(5) = 2, \quad f(6) = 4, \quad f(7) = 2, \quad f(8) = 2,$$
$$f(9) = 2, \quad f(10) = 4, \quad f(11) = 2, \quad f(12) = 4, \ldots$$

Теорема 1.2. *Добуток $f_1(n) f_2(n) \ldots f_k(n)$ мультиплікативних функцій $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_k(n)$ є мультиплікативною функцією.*

Доведення. Розглянемо випадок коли $k = 2$. Покажемо, що добуток $f(n) = f_1(n) f_2(n)$ є мультиплікативною функцією. Дійсно, $f(1) = f_1(1) f_2(1) = 1$. Крім того, при взаємно простих n_1 і n_2, одержимо:

$$f(n_1 n_2) = f_1(n_1 n_2) f_2(n_1 n_2) = f_1(n_1) f_1(n_2) f_2(n_1) f_2(n_2) =$$
$$= f_1(n_1) f_2(n_1) f_1(n_2) f_2(n_2) = f(n_1) f(n_2).$$

Для $k > 2$, використовуючи попереднє твердження, індуктивно знаходимо:

$$f_1(n) f_2(n) f_3(n) = (f_1(n) f_2(n)) f_3(n),$$
$$f_1(n) f_2(n) f_3(n) f_4(n) = (f_1(n) f_2(n) f_3(n)) f_4(n),$$
$$\vdots$$
$$f_1(n) f_2(n) \ldots f_{k-1}(n) f_k(n) = (f_1(n) f_2(n) \ldots f_{k-1}(n)) f_k(n).$$

□

Теорема 1.3. *Нехай $f(n)$ — мультиплікативна функція і $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад числа n. Тоді, позначивши символом $\sum\limits_{d|a}$ суму, що поширюється на всі дільники d числа a, одержимо:*

$$\sum_{d|n} f(d) = \left(1 + f(p_1) + f\left(p_1^2\right) + \ldots + f\left(p_1^{\alpha_1}\right)\right) \cdot \ldots \times$$
$$\times \left(1 + f(p_k) + f\left(p_k^2\right) + \ldots + f\left(p_k^{\alpha_k}\right)\right).$$

(У випадку $n = 1$ права частина вважається рівною 1.)

Зауваження. Як бачимо, права частина цієї формули є добутком k множників у дужках. А тому цю формулу записують у вигляді:

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + f(p_i) + f\left(p_i^2\right) + \ldots + f\left(p_i^{\alpha_i}\right)\right).$$

Доведення. Для доведення цього твердження, розкриємо дужки в її правій частині. Тоді одержимо суму всіх доданків виду

$$f\left(p_1^{\beta_1}\right) f\left(p_2^{\beta_2}\right) \ldots f\left(p_k^{\beta_k}\right) = f\left(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}\right),$$

де $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1, 0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2, \ldots, 0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$. А це і будуть всі дільники числа n, тобто рівність виконується. □

1.1.2. *Кількість дільників $\tau(n)$ натурального числа.*

Розглянемо мультиплікативну функцію $f(n) = 1$, де $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад числа n. Тоді формула теореми 1.3 буде мати вигляд:

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + f(p_i) + f\left(p_i^2\right) + \ldots + f\left(p_i^{\alpha_i}\right)\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^{k} \left(1 + \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{\alpha_i}\right) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1) = \tau(n).$$

Отже, $\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_k + 1)$ — це кількість дільників натурального числа n.

Зрозуміло, що $\tau(n)$ є непарним числом тоді і тільки тоді, коли n є точним квадратом, бо усі $\alpha_1 + 1, \ldots, \alpha_k + 1$ — непарні, а тому усі $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — парні.

Очевидно, що $\tau(n) \leqslant n$, причому рівність досягається лише при $n = 1$ і $n = 2$.

Теорема 1.4. $\tau(n)$ — *мультиплікативна функція.*

Доведення. Умова 1 означення мультиплікативної функції $\tau(1) = 1$ є очевидною. Розглянемо доведення умови 2. Дійсно, розглянемо два взаємно простих числа m і n, а $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — всі дільники числа m і $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — всі дільники числа n. Тоді довільний дільник числа mn є $a_i b_j$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l$, тобто $\tau(m) = k, \tau(n) = l, \tau(mn) = kl$, тобто $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$.

Доведемо, що $\tau(n)$ — мультиплікативна функція, іншим способом, використовуючи формулу (1.1).

Справді, нехай $m = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ і $n = q_1^{\beta_1} \ldots q_s^{\beta_s}$ — два взаємно простих числа, тоді числа $p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_s$ є різними. Тоді канонічний розклад числа

$$mn = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} q_1^{\beta_1} \ldots q_s^{\beta_s}.$$

Звідси слідує, що

$$\tau(mn) = (\alpha_1 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)(\beta_1 + 1) \ldots (\beta_s + 1) = \tau(m)\tau(n).$$

□

Із знайденої для $\tau(n)$ формули безпосередньо слідує, що при простому p і натуральному α: $\tau(p^\alpha) = \alpha + 1$.

1.1.3. *Сума дільників $\sigma(n)$ натурального числа.*

Функцію $\sigma(n)$ означимо як суму усіх натуральних дільників числа n.

Теорема 1.5. *Функція $\sigma(n)$ є мультиплікативною, і якщо $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — канонічний розклад числа n, то*

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{\alpha_k-1} - 1}{p_k - 1}.$$

Доведення. Умова 1 означення мультиплікативної функції $\sigma(1) = 1$ є очевидною. Розглянемо доведення умови 2. Дійсно, розглянемо два взаємно простих числа m і n, а $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — всі дільники числа m і $b_1, b_2, \ldots, b_l$ — всі дільники числа n. Тому довільний дільник числа mn буде мати вигляд $a_i b_j$, $1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant l$, тобто, що і треба було довести.

Функція $f(n) = n$ задовольняє умовам мультиплікативної функції. Тому розглянемо для неї формулу теореми 1.3. Для $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, одержуємо:

$$\sigma(n) = \sum_{d|a} d = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + p_i + p_i^2 + \ldots + p_i^k\right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{k+1} - 1}{p_i - 1},$$

що і треба було довести. □

Натуральне число a називається *досконалим*, якщо $\sigma(a) = 2a$. Деякі властивості досконалих чисел детальніше розглядатимуться в п. 2.11.3.

1.1.4. *Добуток дільників $\pi(n)$ натурального числа.*

Через $\pi(n)$ позначимо добуток усіх натуральних дільників натурального числа n. Передусім зазначимо, що функція $\pi(n)$ не є мультиплікативною функцією, оскільки, наприклад, $\pi(2)\pi(3) = 6 \neq \pi(2 \cdot 3) = 36$.

Теорема 1.6. *Для функції $\pi(n)$ має місце наступна формула:*

$$\pi(n) = n^{\frac{1}{2}\tau(n)}.$$

Доведення. Справді, якщо $d_1, d_2, \ldots, d_s$ — всі різні дільники числа n, то $s = \tau(n)$ і $d_1 d_2 \ldots d_s = \frac{n}{d_1}\frac{n}{d_2}\ldots\frac{n}{d_s}$, звідки $\pi(n)^2 = n^{\tau(n)}$. □

Теорема 1.7. *Функція $\pi(n)$ є ін'єктивною, тобто якщо $\pi(m) = \pi(n)$, то $m = n$.*

Доведення. Оскільки $\pi(m) = \pi(n)$, то $n^{\tau(n)/2} = m^{\tau(m)/2}$, тобто $n^{\tau(n)} = m^{\tau(m)}$. Звідси випливає, що m і n мають однакові прості дільники. Нехай деяке просте число p входить до розкладу числа n з показником α, а до m з показником β, тоді $\alpha \cdot \tau(n) = \beta \cdot \tau(m)$, тобто дріб $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\tau(m)}{\tau(n)}$ не залежить від α і β. Якщо припустити, що цей дріб відмінний від 1, то одержимо протиріччя. Тому $\alpha = \beta$ для всіх простих дільників p, тобто $m = n$. □

Наприклад, знайдемо усі такі n, що $\pi(n) = 5832$. Оскільки $5832 = 18^3$, то $n^{\tau(n)} = 18^6$. Помічаючи, що $\tau(18) = 6$, і використовуючи ін'єктивність функції $\pi(n)$, знаходимо, що єдине таке число n — 18.

1.1.5. *Функція Ейлера* $\varphi(n)$.

Функція Ейлера $\varphi(n)$ визначена для всіх натуральних n і представляє собою кількість чисел ряду $1, 2, \ldots, n-1$, взаємно простих з n. Наприклад:

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(2) = 1, \quad \varphi(3) = 2,$$
$$\varphi(4) = 2, \quad \varphi(5) = 4, \quad \varphi(6) = 2.$$

Теорема 1.8. *Нехай p — просте число, k — натуральне. Тоді*

$$\varphi\left(p^k\right) = p^k - p^{k-1}.$$

Доведення. Зрозуміло, що взаємно прості числа з числом p^k, це числа, які не діляться на p. Числа, які кратні p і менші p^k, це числа: $p, 2p, \ldots, (p-1)p, p^2, \ldots, p^{k-1}$. Їх кількість дорівнює $\left[\frac{p^k}{p}\right] - 1 = p^{k-1} - 1$. А тому кількість чисел, які менші p^k і не діляться на p, буде дорівнювати

$$\varphi\left(p^k\right) = \left(p^k - 1\right) - \left(p^{k-1} - 1\right) = p^k - p^{k-1},$$

що і завершує доведення. □

Обчислювати значення функції Ейлера для натуральних чисел іншого виду просто в силу її мультиплікативності.

Теорема 1.9. *Функція φ мультиплікативна, тобто для будь-яких натуральних взаємно простих чисел a і b має місце рівність*

$$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Доведення. *Перший спосіб.* Розглянемо числа $T(x, y) = ax + by$, де a і b — взаємно прості, $x = 1, 2, \ldots, b-1, b$, $y = 1, 2, \ldots, a-1, a$. Всі такі числа дають різні остачі від їх ділення на ab. Дійсно, якщо існують такі x_1, y_1 та x_2, y_2 із своїх наборів, що $ax_1 + by_1 \equiv ax_2 + by_2 \pmod{ab}$, тоді за цим модулем $a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) \equiv 0$, тобто $(a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2)) \vdots ab$. Перший доданок ділиться на a, тоді і другий доданок ділитиметься на a. А в силу взаємної простоти чисел a і b, одержуємо, що $(y_1 - y_2) \vdots a$, що можливо лише при $y_1 = y_2$, бо $y_1, y_2 \in \{1, 2, \ldots, a-1, a\}$. Тоді $(x_1 - x_2) \vdots b$, що також можливо лише при $x_1 = x_2$, бо $x_1, x_2 \in \{1, 2, \ldots, b-1, b\}$.

Далі, доведемо, що $T(x, y)$ взаємно просте з ab тоді і тільки тоді, коли x взаємно просте з b, а y взаємно просте з a. Дійсно, нехай $T(x, y)$ взаємно просте з ab, але (не порушуючи загальності) x і b мають спільний дільник $d > 1$. Але тоді $T(x, y) \vdots d$, що суперечить припущенню, бо $ab \vdots d$. Навпаки, нехай x взаємно просте з b і y взаємно просте з a, але $T(x, y)$ і ab мають спільний дільник $d > 1$. Нехай p — довільний простий дільник числа $d > 1$, тоді $p \mid ab$. Не порушуючи загальності, будемо вважати, що $p \mid a$, тоді p не ділить y (в силу їхньої взаємної простоти). Тому з того, що $p \mid (ax + by)$ випливає, що $p \mid by$. Звідси слідує, що $p \mid b$, а це суперечить тому, що числа a і b є взаємно простими.

Таким чином, кількість різних остач при діленні $T(x, y)$ на ab буде рівною $\varphi(ab)$, чисел x, взаємно простих b, буде рівно $\varphi(b)$, чисел y, взаємно простих з a, буде рівно $\varphi(a)$. Тому, $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, бо для кожного x (а їх $\varphi(b)$) буде $\varphi(a)$ чисел y.

Другий спосіб. Розташуємо усі натуральні числа від 1 до $a \cdot b$ в такий спосіб: в 1-му рядку від 1 до b, в 2-му — від $b+1$ до $2 \cdot b, \ldots$, в a-му — від $(a-1)n$ до $a \cdot b$. Тоді в кожному рядку $\varphi(b)$ чисел, взаємно простих з b, а в кожному стовпчику $\varphi(a)$ чисел, взаємно простих a (справді, числа у кожному стовпчику дають попарно різні остачі при діленні на a). Оскільки a і b взаємно прості, то число буде взаємно просте з $a \cdot b$ тоді і тільки тоді, коли воно стоїть на перетині стовпчика з номером, який взаємно простий з b, і рядка з номером, який взаємно простий з a. Оскільки в цій таблиці $\varphi(a \cdot b)$ чисел взаємно простих з $a \cdot b$, то за правилом добутку їх буде $\varphi(a) \cdot \varphi(b)$. Отже, $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, де a і b взаємно прості. $\square$