МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ
II ЕТАПУ
ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ ОЛІМПІАДИ
З МАТЕМАТИКИ — 2014

6 – 11 класи

Рекомендовано вченою радою
ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»
як навчальний посібник
для факультативних занять з математики

Слов'янськ — 2015

УДК 51 (075.3)
ББК 22.1 я 721
О-543

Олімпіадні задачі: розв'язання задач II етапу Всеукраїнської олімпіади з математики — 2014 : навчальний посібник / О. А. Кадубовський, Б. Б. Беседін, В. С. Сьомкін, Н. І. Труш, О. В. Чуйко. — Слов'янськ : видавничий центр «Маторін», 2015. — 64 с. — (Викладачі ДДПУ — учням, студентам, вчителям, вип. 13).

Адресовано вчителям та викладачам математики, як посібник для проведення гурткових і факультативних занять при підготовці до учнівських математичних олімпіад. Буде корисним учням ЗОШ та студентам математичних спеціальностей педагогічних ВНЗ.

РЕКОМЕНДОВАНО
вченою радою Державного вищого навчального закладу
«Донбаський державний педагогічний університет»,
протокол № 6 від 12.02.2015 р.

Рецензенти:

доктор педагогічних наук **Є.О. ЛОДАТКО**,
Черкаський національний університет імені
Богдана Хмельницького, кафедра вищої школи і освітнього менеджменту

кандидат фізико-математичних наук **В.Є. ВЕЛИЧКО**,
Донбаський державний педагогічний університет,
доцент кафедри алгебри.

Відповідальний за випуск:

кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри геометрії та методики викладання математики О.А. Кадубовський

Зміст

Від авторів 4

ЧАСТИНА I. УМОВИ ЗАДАЧ **6**
6 клас 6
7 клас 7
8 клас 7
9 клас 8
10 клас 9
11 клас 9

ЧАСТИНА II. ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ **10**

ЧАСТИНА III. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ **12**
6 клас 12
7 клас 18
8 клас 24
9 клас 30
10 клас 36
11 клас 50

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА **58**

ВІД АВТОРІВ

«Якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо заходьте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'язуйте їх!.»

Д. Пойа[1]

Даний посібник є тринадцятим випуском серії «ВИКЛАДАЧІ ДДПУ – УЧНЯМ, СТУДЕНТАМ, ВЧИТЕЛЯМ» заснованої у 2008 році. Посібник містить розв'язання задач II етапу (районного) Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, який проводився 22 листопада 2014 року відповідно до наказу Міністерства освіти і науки України від 08.08.2014 року № 918 «Про проведення Всеукраїнських учнівських олімпіад і турнірів у 2014/2015 навчальному році».

Як і в попередніх випусках для більшості задач олімпіади пропонується кілька способів розв'язання, обсяг викладок яких інколи суттєво відрізняється. Такий підхід ні в якому разі не передбачає оцінки доцільності або порівняння того чи іншого із запропонованих методів. Навпаки, оскільки кожна олімпіадна задача є, в певному розумінні, унікальною і вимагає особливого ставлення, то головна мета авторів посібника — «донести» до вчителів і учнів якомога більше корисних математичних ідей і принципів та показати їх застосування.

[1] Пойа Д. Математическое открытие. М., 1970. 452 с.

Нагадаємо, що принципами в математиці називають деякі прості, майже очевидні, твердження, аксіоми або методи, які використовуються в доведеннях математичних теорем. Дуже часто учні зустрічаються з ними при розв'язуванні олімпіадних задач з математики. Перш за все учні, які беруть участь в олімпіадах, повинні володіти значною кількістю принципів. Нажаль шкільна програма не передбачає знайомства з більшістю із них. З основними математичними принципами можна ознайомитись у наведеній літературі, зокрема в [13][2].

У посібнику до окремих задач наводяться «доповнення», сенс яких полягає:
у формулюванні двоїстої або схожої задачі,
або ж в узагальненні запропонованої задачі.

На думку авторів такі доповнення повинні активізувати і зацікавити учнів при підготовці до майбутніх олімпіад.

Колектив авторів посібника та керівництво фізико-математичного факультету державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет» висловлює щиру подяку всім вчителям міста Слов'янськ, які беруть участь в організації та проведенні як учнівських олімпіад з математики, так і семінарів, присвячених аналізу їх результатів.

Маємо надію, що представлений посібник буде корисним керівникам математичних гуртків та їх зацікавленим учням, стане для багатьох з них поштовхом до більш змістовних міркувань і буде спонукати до систематичного ознайомлення з тим чи іншим розділом математики.

Вчіться творчому пошуку в процесі розв'язування задач!
Із найщирішими побажаннями, викладачі кафедри геометрії та методики викладання математики фізико-математичного факультету Державного вищого навчального закладу «Донбаський державний педагогічний університет».

14.01.2015

[2]Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. – К.: А.С.К., 2005. – 344с.

ЧАСТИНА I. УМОВИ ЗАДАЧ

6 клас

1. (1 бал) З одного пункту одночасно у протилежних напрямках вирушили два потяги. Через 4 години після виїзду між ними була відстань у 476 км. Знайдіть швидкість кожного потягу, якщо у одного з них вона на 5 км/год більша, ніж у іншого.
2. (1 бал) Великий квадрат розрізали на однакові маленькі квадратики. Потім перелічили усі маленькі квадратики, які дотикаються до контуру великого квадрату. Їх виявилось 44 . На скільки маленьких квадратиків було розрізано великий квадрат?
3. (3 бали) Тридцять три богатиря стали у ряд так, що кожен з тих, хто стоїть на парному місці, на 8 см нижче попереднього, й на 3 см нижче наступного. На скільки сантиметрів перший богатир вище за останнього?
4. (3 бали) Дев'ять однакових тістечок коштують менше, ніж 10 гривень, а десять таких самих тістечок коштують більше, ніж 11 гривень. Скільки коштує одне таке тістечко?
5. (4 бали) На математичній олімпіаді учасникам було запропоновано 10 задач. За кожну правильно розв'язану задачу нараховували 5 балів, а за кожну нерозв'язану чи розв'язану невірно – знімали 3 бали. Один учасник отримав 34 бали. Скільки задач він розв'язав правильно?

7 клас

1. (1 бал) Ціна книги була спочатку знижена на 15%, а потім ще знижена на 4 грн. Після двох знижок книга коштує 30 грн. Скільки коштувала книга спочатку?
2. (1 бал) На рисунку 1 зображена вежа, яка складається з квадрату, прямокутника й рівностороннього трикутника. Відомо, що периметри всіх трьох фігур рівні. Сторона квадрату – 9 см. Знайти ширину прямокутника.

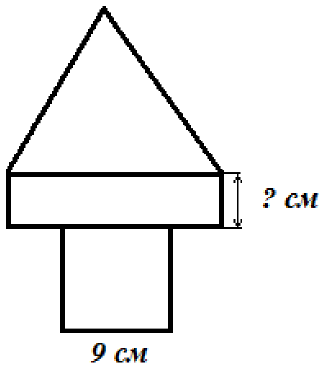


Рис. 1: до задачі 2

3. (3 бали) Середнє арифметичне десяти різних натуральних чисел дорівнює 10. Яке найбільше можливе значення може приймати найбільше з цих чисел?
4. (3 бали) Старший брат йде від дому до школи 12 хвилин, а молодший – 16 хвилин. Скільки хвилин потрібно старшому брату, щоб наздогнати молодшого, якщо той вийшов на одну хвилину раніше?
5. (4 бали) Є три числа. Відомо, що добуток першого числа та другого закінчується нулем, а добуток першого числа та третього й добуток другого числа та третього не закінчуються нулем. Чи може сума всіх трьох чисел закінчуватися на 3?

8 клас

1. (1 бал) Відомо, що $ac+ad+bc+bd=68$ та $c+d=4$. Чому дорівнює $a+b+c+d$?

2. (1 бал) Хлопчик записує на дошці одне за одним числа. Кожне число, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх. Відомо, що четверте число дорівнює 6, а шосте – дорівнює 15. Чому дорівнює сьоме число?
3. (3 бали) Для нумерації сторінок задачника знадобилося 1224 цифри. Скільки сторінок у книзі? Нумерація починається з першої сторінки.
4. (3 бали) У трикутнику ABC $AC = 1$ см, $AB = 2$ см, O — точка перетину бісектрис. Відрізок, який проходить через точку O і є паралельним до сторони BC, перетинає сторони AC і AB у точках K та M відповідно. Знайдіть периметр трикутника AKM.
5. (4 бали) Трицифрове число ділиться на 9 без остачі. Коли це число поділили на 9, у частці одержали нове число, у якому сума цифр на 9 менша за суму цифр даного числа. Скільки трицифрових чисел мають таку властивість?

9 клас

1. (1 бал) Розв'язати рівняння: $|1 - 2x| = 2x - 1$.
2. (1 бал) Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 9 см, більша діагональ — 17 см, а висота — 8 см. Знайти периметр трапеції.
3. (3 бали) Поливальна машина рухається зі сталою швидкістю. Кожну хвилину з неї виливається одна й та сама кількість води. Якщо збільшити швидкість руху вдвічі, а швидкість виливання води збільшити втричі, то води у машині вистачить на те, щоб полити 4 км дороги. Скільки кілометрів дороги вдасться полити, якщо початкову швидкість руху збільшити втричі, а початкову швидкість виливання води збільшити вдвічі?
4. (3 бали) Нехай x_1 та x_2 — корені рівняння $x^2 - 2x - 1 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайти значення виразу $\dfrac{1}{2x_1 + 3x_2} + \dfrac{1}{2x_2 + 3x_1}$.
5. (4 бали) На дошці записали десять послідовних натуральних чисел. Потім одне з них стерли, а ті дев'ять чисел, що залишилися, додали. Їх сума дорівнює 2015. Яке число витерли з дошки?

10 клас

1. (1 бал) Розв'язати нерівність: $\dfrac{x-3}{1-x} \geqslant 1$.
2. (1 бал) Знайдіть усі пари натуральних чисел (x, y), для яких виконується рівність $2x^2 + y^2 = 2xy + 4x$.
3. (3 бали) Точки A, B, C, D — сусідні вершини правильного многокутника (саме у такій послідовності). Відомо, що $\angle ACD = 120^0$. Скільки сторін у цього многокутника?
4. (3 бали) Чи можна числа $1, 2, ..., 20$ розмістити у вершинах та серединах ребер кубу так, щоб кожне число, яке стоїть по середині ребра, дорівнювало середньому арифметичному чисел, які стоять на кінцях цього ребра?
5. (4 бали) Парабола на координатній площині має назву «красива», якщо її вершина та дві точки перетину з віссю абсцис утворюють рівносторонній трикутник. Довести, що дискримінанти квадратних тричленів, у яких графіками є «красиві» параболи, рівні. Знайти значення цих дискримінантів.

11 клас

1. (1 бал) Розв'язати нерівність: $\left(x^2 - x - 6\right) \cdot \sqrt{x-1} \geqslant 0$.
2. (1 бал) Розв'язати рівняння: $\cos(3\pi x) + x^2 - 6x + 10 = 0$.
3. (3 бали) При яких значеннях параметра a рівняння $\dfrac{x-1}{|x-1|}x = a$ має лише один розв'язок?
4. (3 бали) Дана функція $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{якщо } x < 3, \\ 3x-3, & \text{якщо } 3 \leqslant x < 10, \\ 14-x, & \text{якщо } 10 \leqslant x. \end{cases}$

   Знайдіть значення $\underbrace{f(f(...f(2)...))}_{2014}$ (знак функції застосовується 2014 разів).
5. (4 бали) Довжини сторін трикутника утворюють арифметичну прогресію з різницею, яка не дорівнює нулю. Доведіть, що лише один кут цього трикутника більший за 60^0.

ЧАСТИНА II.
ВІДПОВІДІ ДО ЗАДАЧ

6 клас

1. `Відповідь:` 57; 62.
2. `Відповідь:` 144.
3. `Відповідь:` 80.
4. `Відповідь:` 111 (1,11).
5. `Відповідь:` 8.

7 клас

1. `Відповідь:` 40.
2. `Відповідь:` 6.
3. `Відповідь:` 55.
4. `Відповідь:` 3.
5. `Відповідь:` Ні.

8 клас

1. `Відповідь:` 21.
2. `Відповідь:` 24.
3. `Відповідь:` 444.

4. `Відповідь:` 3.

5. `Відповідь:` 5.

9 клас

1. `Відповідь:` $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

2. `Відповідь:` 42.

3. `Відповідь:` 9.

4. `Відповідь:` $\frac{10}{23}$.

5. `Відповідь:` 220.

10 клас

1. `Відповідь:` $x \in (1; 2]$.

2. `Відповідь:` $(2; 4)$, $(4; 4)$.

3. `Відповідь:` 9.

4. `Відповідь:` Ні, не може; задача на доведення.

5. `Відповідь:` 12.

11 клас

1. `Відповідь:` $x \in \{1\} \cup [3; +\infty)$.

2. `Відповідь:` $x = 3$.

3. `Відповідь:` $a \in (-1; 1]$.

4. `Відповідь:` 12.

5. – задача на доведення.

ЧАСТИНА III. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

6 клас

Задача 1.

I спосіб

Нехай швидкість одного з потягів становить x км/год, тоді швидкість другого — $(x+5)$ км/год.

За 4 години руху перший потяг подалав $x \cdot 4$ км, а другий — $(x+5) \cdot 4$ км. Таким чином, через 4 години після одночасного виїзду потягів з одного пункту у протилежних напрямках, відстань між ними становила $x \cdot 4 + (x+5) \cdot 4$ км.

З іншого боку, за умовою сказано, через 4 години після виїзду потягів відстань між ними була 476 км. Звідки маємо рівняння

$$x \cdot 4 + (x+5) \cdot 4 = 476.$$

Звідки

$$8x + 20 = 476, \quad 8x = 476 - 20, \quad 8x = 456, \quad x = 456 : 8, \quad x = 57.$$

Розв'язавши рівняння одержали, що $x = 57$. Тому, згідно введених позначень, швидкість одного з потягів становила 57 км/год, а другого — $57 + 5 = 62$ км/год.

II спосіб

За умовою сказано, що через 4 години після одночасного виїзду потягів відстань між ними була 476 км. Тому «швидкість віддалення» потягів (сума їх швидкостей) дорівнює $476 : 4 = 119$ км/год. Оскільки швидкість одного з них на 5 більша за швидкість іншого, а їх сума дорівнює 119, то, позначивши через x швидкість повільнішого з них, а через $(x+5)$ — швидшого з них, одержимо рівняння $x + x + 5 = 119$, звідки $2x = 114$, $x = 57$.

Таким чином, швидкість швидшого з потягів дорівнює 62 км/год, а повільнішого з них — 57 км/год.

Відповідь: 57; 62.

Задача 2.

I спосіб[3]

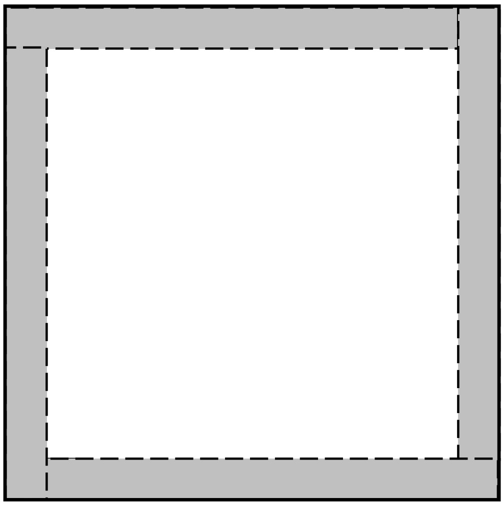


Рис. 2: до першого способу розв'язання задачі 2

Розіб'ємо контур великого квадрата за допомогою 4 однакових смужок — прямокутники шириною в один маленький квадрат так, як показано на рисунку. Тоді в кожній такій смужці міститься точно $44 : 4 = 11$ маленьких квадратів. Тому розміри великого квадрата становлять 12×12 (12 рядків, в кожному з яких по 12 маленьких квадратів, або, що теж саме — 12 стовпчиків, у кожному з яких 12 маленьких квадратів). Таким чином великий квадрат розрізали на $12 \cdot 12 = 144$ маленьких квадратів.

[3]заснований на ідеї, запропонованій укладачами-авторами — відповідальними за добір задач до олімпіади

II спосіб

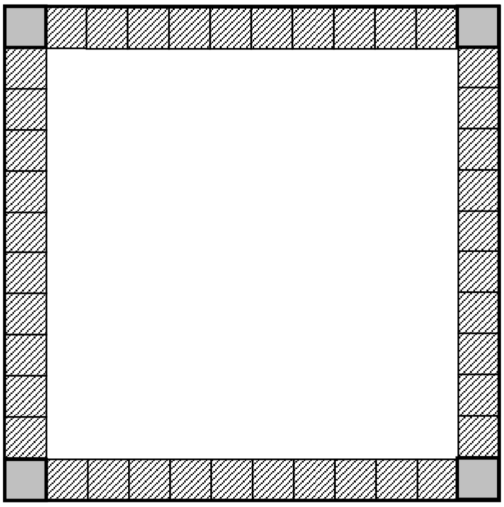


Рис. 3: до другого способу розв'язання задачі 2

Серед 44 маленьких квадратів (що дотикаються до контуру великого квадрата) є 4 «кутові» квадрати, які дотикаються до контуру великого квадрата двома своїми сторонами. Решта $40 = 44 - 4$ квадратів дотикаються до контуру великого квадрата лише однією стороною. Причому до кожної з 4 сторін великого квадрата дотикається однакове число $10 = 40 : 4$ «не кутових» маленьких квадратів. Таким чином, кожна зі сторін великого квадрата містить 10 сторін «не кутових» та 2 сторони «кутових» маленьких квадратів. І тому розміри великого квадрата становлять 12×12 (12 рядків, в кожному з яких по 12 маленьких квадратів, або, що теж саме, — 12 стовпчиків, у кожному з яких 12 маленьких квадратів). Отже, великий квадрат розрізали на $12 \cdot 12 = 144$ маленьких квадратів.

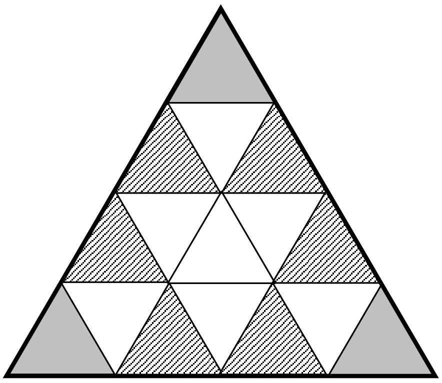
Відповідь: 144.

ДОПОВНЕННЯ 1 до задачі 2.

Великий квадрат розрізали на однакові маленькі квадрати. Потім перерахували усі маленькі квадрати, які дотикаються до контуру великого квадрату. Їх виявилось $4 \cdot n + 4$ (n — будь-яке натуральне число). Доведіть, що великий квадрат було розрізано на $(n+2) \cdot (n+2)$ маленьких квадратів.

ДОПОВНЕННЯ 2 до задачі 2.

?! Великий правильний трикутник[4] розрізали на однакові маленькі правильні трикутники. Потім перелічили усі маленькі правильні трикутники, які дотикаються до контуру великого трикутника. Їх виявилось 36. На скільки маленьких правильних трикутників було розрізано великий правильний трикутник?



Задача 3.

За умовою тридцять три богатиря стали у ряд так, що кожен з тих, хто стоїть на парному місці, на 8 см нижче попереднього, та на 3 см нижче наступного. Тому різниця у зрості між сусідніми богатирями, які стоять на місцях з непарними номерами становить 5 см.

Серед 33 богатирів 16 стоять на місцях з парними номерами та 17 — на місцях з непарними номерами. Причому серед зазначених 17-ти з непарними номерами: найвищий — на першому, найнижчій — останній, на 33 місці.

Оскільки 17 богатирів, що стоять на місцях з непарними номерами, утворюють 16 «пар сусідів», а різниця у зрості між кожною парою «сусідів» становить 5 см, то різниця у зрості між першим і останнім (33-ім) богатирями становить $16 \cdot 5 = 80$ см.

Таким чином, перший богатир вищий за останнього на 80 см.

Відповідь: 80.

[4] якщо у трикутника довжини сторін є рівними, то такий трикутник називають правильним; у правильного трикутника всі кути є рівними

Задача 4.

Нехай x — вартість одного тістечка в копійках.

Оскільки дев'ять однакових тістечок коштують менше, ніж 10 гривень ($10 \cdot 100 = 1000$ копійок), то має місце нерівність
$9x < 1000$, звідки $x < (999 + 1) : 9$, $x < 111 + \frac{1}{9}$.

Оскільки десять таких самих тістечок коштують більше, ніж 11 гривень ($11 \cdot 100 = 1100$ копійок), то має місце нерівність
$10x > 1100$, звідки $x > 110$.

Оскільки між числами 110 і $111 + \frac{1}{9}$ міститься лише одне натуральне число 111, то вартість одного такого тістечка становить 111 копійок або, що теж саме, 1 гривня 11 копійок.

Відповідь: 1,11.

Задача 5.

I спосіб

Нехай учасник правильно розв'язав x із 10 запропонованих задач. Тоді загальне число нерозв'язаних або неправильно розв'язаних ним задач становить $10 - x$.

За кожну з x (правильно) розв'язаних задач учаснику було нараховано по 5 балів. Тому учаснику всього було нараховано $5 \cdot x$ балів.

За кожну з $(10 - x)$ нерозв'язаних або неправильно розв'язаних задач учаснику бали не нараховувалися, а навпаки — знімали по 3 бали за кожну з них. Отже, за всі такі задачі з учасника було знято $3 \cdot (10 - x) = 30 - 3x$ балів. За умовою учасник отримав 34 бали, і тому має місце рівняння

$$5x - (30 - 3x) = 34, \text{ звідки}$$

$5x - 30 + 3x = 34$, $8x - 30 = 34$, $8x = 64$, $x = 64 : 8$, $x = 8$.

Розв'язавши рівняння одержали, що $x = 8$. Тому, згідно введених позначень, учасник правильно розв'язав точно 8 задач.

?! Яку найменшу кількість балів може бути нараховано учаснику за результатами перевірки (саме такого оцінювання) його роботи?

II спосіб

З урахуванням умови задачі, нарахування балів за виконання задач олімпіади відбувається за наступними правилами:

якщо учасник правильно розв'яже всі 10 із запропонованих задач, то йому нарахують точно $10 \cdot 5 = 50$ балів;

якщо учасник правильно розв'яже лише 9 із запропонованих задач, то йому нарахують точно $9 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 45 - 3 = 42$ бали;

якщо учасник правильно розв'яже лише **8** із запропонованих задач, то йому нарахують точно $8 \cdot 5 - 2 \cdot 3 = 40 - 6 = \mathbf{34}$ бали;

якщо учасник правильно розв'яже лише 7 із запропонованих задач, то йому нарахують точно $7 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 35 - 9 = 26$ балів;

якщо учасник правильно розв'яже лише 6 із запропонованих задач, то йому нарахують точно $6 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 30 - 12 = 18$ балів;

якщо учасник правильно розв'яже лише 5 із запропонованих задач, то йому нарахують точно $5 \cdot 5 - 5 \cdot 3 = 25 - 15 = 10$ балів,

і так далі.

Таким чином, учасник правильно розв'язав точно 8 задач.

III спосіб[5]

Якби учасник розв'язав правильно всі 10 задач, то він одержав би 50 (максимально можливих) балів.

Якщо в роботі учасника є нерозв'язані (відсутні у роботі) або неправильно розв'язані задачі, то за кожну таку задачу не нараховуються (знімаються за замовчуванням передбачені) 5 балів та ще знімаються («штрафні») 3 бали. Тобто, на кожній нерозв'язаній або неправильно розв'язаній задачі втрата становить 8 балів.

Оскільки учасник недобрав до максимального результату $50-34 = 16$ балів, то точно дві ($16 : 8 = 2$) задачі йому не зарахували.

Отже, учасник правильно розв'язав точно 8 задач.

Відповідь: 8.

[5]заснований на ідеї, запропонованій укладачами-авторами — відповідальними за добір задач до олімпіади

7 клас

Задача 1.

I спосіб

Нехай x — початкова вартість книги (у гривнях). Тоді після (першого) зниження її вартості на 15% ціна книги складала $x - 0,15x = 0,85x$ гривень, а після (другої) знижки на 4 гривні остаточна ціна книги становила $(0,85x - 4)$ гривень або ж (за умовою) 30 гривень. Тому маємо рівняння

$$0,85x - 4 = 30,$$

звідки:

$0,85x = 30 + 4\,;\ 0,85x = 34\,;\ 85x = 3400\,;\ x = 3400 : 85\,;\ x = 40\,.$

Розв'язавши рівняння одержали, що $x = 40$. Тому, згідно введених позначень, початкова ціна книги становила 40 гривень.

Отже, спочатку книга коштувала 40 гривень.

II спосіб

За умовою — після другої знижки на 4 гривні книга стала коштувати 30 гривень. Але ж тоді, перед другою знижкою (після першої знижки) вартість книжки становила 34 гривні.

Оскільки знижка початкової вартості книги відбулась на 15%, то 34 гривні становить 85% початкової вартості книги. Тому початкову ціну книги можна знайти наслідуючи «правило знаходження числа за його відсотком». А саме

$$34 \cdot \frac{100}{85} = 2 \cdot 17 \cdot \frac{5 \cdot 20}{17 \cdot 5} = 40.$$

Отже, початкова ціна книги становила 40 гривень.

Відповідь: 40.

?! На скільки відсотків кінцева вартість книжки менша за її початкову вартість?

?! На скільки відсотків початкова вартість книжки більша за її кінцеву вартість?

А чи звертали Ви увагу?

1) Для збільшення величини a на $p\%$ достатньо a помножити на «відповідний коефіцієнт» – число $\left(1+\frac{p}{100}\right)$.

2) Для зменшення величини b на $q\%$ достатньо b помножити на «відповідний коефіцієнт» – число $\left(1-\frac{q}{100}\right)$.

Задача 2.

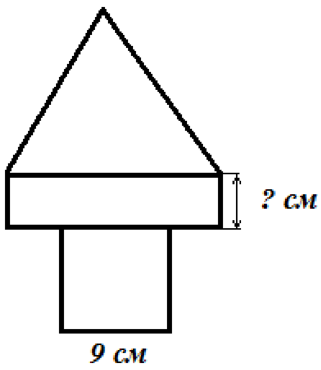


Рис. 4: до задачі 2

За умовою сторона квадрата дорівнює 9 см, тому його периметр дорівнює $9 \cdot 4 = 36$ см. Оскільки периметри всіх трьох фігур є рівними, то периметр трикутника також дорівнює 36 см, і тому сторона трикутника дорівнює $36 : 3 = 12$ см.

Але ж тоді довжина прямокутника також дорівнює 12 см. Оскільки периметр прямокутника дорівнює 36 см а його довжина — 12 см, то ширину x прямокутника можна знайти за допомогою співвідношення

$$x = (36 - 2 \cdot 12) : 2,$$

звідки $x = (36 - 24) : 2 = 12 : 2 = 6$.

Таким чином, невідома сторона прямокутника дорівнює 6 см.

Відповідь: 6.

?! Чому дорівнює периметр фігури («неопуклого дев'ятикутника»), яка обмежує (є границею) три дані фігури (трикутник, прямокутник і квадрат)?

Задача 3.

Оскільки середнє арифметичне десяти натуральних чисел дорівнює 10, то (як наслідок з визначення «середнього арифметичного»[6]) їх сума становить $10 \cdot 10 = 100$.

За умовою відомо, що ці числа є різними. Тому їх можна впорядкувати за зростанням: від найменшого – «першого» до найбільшого – «останнього» (десятого).

Найбільше (десяте) з цих натуральних чисел буде приймати максимально можливе значення лише за умов, коли сума інших дев'яти чисел буде найменшою.

Сума різних натуральних чисел прийматиме своє мінімальне значення лише за умов, коли ці числа є першими дев'ятьма натуральними числами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Не важко перевірити, що їх сума (сума перших дев'яти натуральних чисел) дорівнює 45.

Таким чином, максимально можливе значення найбільшого з таких натуральних чисел дорівнює $100 - 45 = 55$.

Відповідь: 55.

Задача 4.

I спосіб

Нехай S — відстань від школи до дому (в метрах). Тоді:

1) оскільки старший брат долає відстань від школи до дому за 12 хвилин, то його швидкість дорівнює $v_1 = \frac{S}{12}$ м/хв;

2) оскільки молодший брат долає відстань від школи до дому за 16 хвилин, то його швидкість дорівнює $v_2 = \frac{S}{16}$ м/хв.

Нехай далі t_0 — час (у хвилинах), який потрібно старшому брату, щоб наздогнати молодшого. Тоді очевидно, що за цей час старший з братів подолає відстань $S_0 = v_1 \cdot t_0 = \frac{S}{12} \cdot t_0$. Але ж таку саму відстань S_0 подолає і молодший брат (у момент, коли старший його наздожене).

[6] середнім арифметичним декількох чисел називають відношення їх суми до числа доданків

Проте, оскільки менший брат вийшов на 1 хвилину раніше за старшого, то він був у дорозі (до моменту, коли старший його наздожене) точно (t_0+1) хвилин, за які він подолав відстань $S_0 = v_2 \cdot (t_0+1) = \frac{S}{16} \cdot (t_0+1)$. Таким чином, маємо рівняння з невідомим t_0

$$\frac{S}{12} \cdot t_0 = \frac{S}{16} \cdot (t_0+1) \Leftrightarrow \frac{1}{12} \cdot t_0 = \frac{1}{16} \cdot (t_0+1),$$

звідки

$16 \cdot t_0 = 12 \cdot (t_0+1)$, $4 \cdot t_0 = 3 \cdot (t_0+1)$, $4t_0 = 3t_0 + 3$, $t_0 = 3$.

Розв'язавши рівняння одержали, що $t_0 = 3$. Тому, згідно введених позначень, старшому брату, щоб наздогнати молодшого, знадобиться точно 3 хвилини.

II спосіб[7]

Оскільки старший брат долає відстань від дому до школи за 12 хвилин, а молодший — за 16 хвилин, то за 1 хвилину старший брат проходить $\frac{1}{12}$ частину відстані від дому до школи, а молодший брат — $\frac{1}{16}$ частину.

Через 1 хвилину молодший брат був від дому на відстані $\frac{1}{16}$ частини всього шляху, після чого (за умовою) його почав наздоганяти старший брат.

За кожну хвилину (до моменту коли старший наздожене молодшого) відстань між братами скорочується на $\frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1 \cdot 4 - 1 \cdot 3}{48} = \frac{1}{48}$ частину шляху. А оскільки початкова відстань між ними (в момент, коли старший брат почав наздоганяти молодшого) становила $\frac{1}{16}$ частини всього шляху, то старший брат наздожене молодшого через $\frac{1}{16} : \frac{1}{48} = \frac{1}{16} \cdot \frac{48}{1} = 3$ хвилини.

Відповідь: 3.

?! 1) Наскільки хвилин раніше повинен вийти з дому молодший брат, щоб старший наздогнав його на чверть-дорозі від дому?

2) Наскільки хвилин раніше повинен вийти з дому молодший брат, щоб старший наздогнав його на півдорозі до школи?

3) Наскільки хвилин раніше повинен вийти з дому молодший брат, щоб старший наздогнав його на чверть-дорозі до школи?

[7]заснований на ідеї, запропонованій укладачами-авторами — відповідальними за добір задач до олімпіади

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

1) Якщо з одного пункту в протилежних напрямках (вздовж прямої) одночасно вирушили два об'єкти руху зі швидкостями v_1 і v_2, то:
1.1) через час t_0 відстань між ними буде становити $S_0 = t_0 \cdot (v_1 + v_2)$;
1.2) відстань S_0 між ними буде становити саме через час $t_0 = \frac{S_0}{v_1+v_2}$.
В цьому випадку величину $(v_1 + v_2)$ називають «швидкістю віддалення» об'єктів руху.

2) Якщо з пунктів P_1 і P_2, відстань між якими дорівнює S, назустріч один одному (вздовж прямої) одночасно вирушили два об'єкти руху зі швидкостями v_1 і v_2 відповідно, то:
2.1) їх зустріч відбудеться через час $t_0 = \frac{S}{v_1+v_2}$;
В цьому випадку величину $(v_1 + v_2)$ називають «швидкістю зближення» об'єктів руху.
2.2) їх зустріч відбудеться на відстані $S_1 = \frac{S \cdot v_1}{v_1+v_2}$ від пункту P_1 або, що теж саме, на відстані $S_2 = \frac{S \cdot v_2}{v_1+v_2}$ від пункту P_2;
2.3) через час $t' = \frac{2S}{v_1+v_2}$ відстань між ними знов буде дорівнювати S.

3) Якщо з пункту A (вздовж прямої) вирушив перший об'єкт руху зі швидкістю v_1, а через певний проміжок часу T_0 слід за ним вирушив другий об'єкт руху зі швидкістю $v_2 > v_1$, то:
3.1) другому, щоб наздогнати першого, знадобиться час $t_0 = \frac{T_0 \cdot v_1}{v_2 - v_1}$;
3.2) їх «зустріч» (в момент коли другий наздожене першого) відбудеться на відстані $S_0 = \frac{T_0 \cdot v_1 \cdot v_2}{v_2 - v_1}$ від пункту A.
В цьому випадку величину $(v_2 - v_1)$ називають «швидкістю наздогнання» швидшим об'єктом руху повільнішого.

4) Якщо з пунктів P_1 і P_2, відстань між якими дорівнює S, в одному напрямку (вздовж прямої від P_2 до P_1) одночасно вирушили два об'єкти руху зі швидкостями v_1 і v_2 $(v_2 > v_1)$, то:
4.1) швидший (який вирушив з пункту P_2) наздожене повільнішого (який вирушив з пункту P_1) через час $t_0 = \frac{S}{v_2 - v_1}$;
4.2) їх «зустріч» (в момент коли швидший наздожене повільнішого) відбудеться на відстані $S_1 = \frac{S \cdot v_1}{v_2 - v_1}$ від пункту P_1 або, що теж саме, на відстані $S_2 = \frac{S \cdot v_2}{v_2 - v_1} = S + S_1$ від пункту P_2.

Задача 5.

Заради визначеності, позначимо перше, друге та третє число, як a, b і c відповідно. Оскільки добуток $(a \cdot b)$ закінчується нулем, то можливими є лише наступні три випадки:

1) хоча б одне з чисел a, b закінчується цифрою 0,

2) число b закінчується цифрою 5, а число a – парною цифрою, відмінною від 0,

3) число a закінчується цифрою 5, а число b – парною цифрою, відмінною від 0.

Якщо припустити, що хоча б одне з чисел a або b закінчується цифрою 0, то хоча б один з добутків $a \cdot c$ або $b \cdot c$ буде закінчуватися цифрою 0, що є протиріччям до умови задачі.

Якщо припустити, що число b закінчується цифрою 5, а число a – парною цифрою (відмінною від 0), то, з урахуванням умови про те, що жоден з добутків $a \cdot c$ і $b \cdot c$ не закінчуються нулем, число c не може закінчуватися цифрою 5 або парною цифрою; тобто, число c може закінчуватися лише 1, 3, 7 або 9. Але ж тоді сума $(b + c)$ буде закінчуватися парною цифрою (як сума непарних чисел), і тому сума $a + b + c = a + (b + c)$ буде закінчуватися парною цифрою (як сума двох парних чисел). Отже, сума $(a + b + c)$ не може закінчуватися непарною цифрою, зокрема цифрою 3.

Якщо припустити, що число a закінчується цифрою 5, а число b – парною цифрою (відмінною від 0), то, з урахуванням умови про те, що жоден з добутків $a \cdot c$ і $b \cdot c$ не закінчуються нулем, число c не може закінчуватися парною цифрою або цифрою 5; тобто, число c може закінчуватися лише 1, 3, 7 або 9. Але ж тоді сума $(a + c)$ буде закінчуватися парною цифрою (як сума непарних чисел), і тому сума $a + b + c = b + (a + c)$ буде закінчуватися парною цифрою (як сума двох парних чисел). Отже, сума $(a + b + c)$ не може закінчуватися непарною цифрою, зокрема цифрою 3.

Отже, сума трьох даних чисел не може закінчуватися цифрою 3.

Відповідь: Ні.

8 клас

Задача 1.

I спосіб — *«за допомогою групування»*

Перетворимо ліву частину даної рівності $ac + ad + bc + bd = 68$:

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b).$$

Отже, дану за умовою рівність можна подати у вигляді

$$(c + d)(a + b) = 68.$$

За умовою $c + d = 4$, тому останню рівність можна подати у вигляді

$$4 \cdot (a + b) = 68,$$

звідки

$$a + b = 68 : 4 = 17.$$

Таким чином $a + b + c + d = (a + b) + (c + d) = 17 + 4 = 21$.

II спосіб — *«за допомогою підстановки»*

За умовою $c + d = 4$, звідки $c = 4 - d$. Тому ліву частину даної рівності $ac + ad + bc + bd = 68$ можна подати у вигляді

$$ac + ad + bc + bd = a(4 - d) + ad + b(4 - d) + bd =$$

$$= 4a - ad + ad + 4b - bd + bd = 4a + 4b = 4(a + b).$$

Звідки $4 \cdot (a + b) = 68$, $a + b = 68 : 4 = 17$.

І тому $a + b + c + d = (a + b) + (c + d) = 17 + 4 = 21$.

Відповідь: 21.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

?! Чому дорівнює $ab + cd$?

Задача 2.

За умовою маємо числову послідовність c_j $(j = 1, 2, ...)$, в якій кожен член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх. Нехай перший член дорівнює a, а другий — b. Тоді члени c_j такої послідовності чисел можна подати у вигляді:

$c_1 = a$,

$c_2 = b$,

$c_3 = c_1 + c_2 = 1a + 1b$,

$c_4 = c_2 + c_3 = 1a + 2b$,

$c_5 = c_3 + c_4 = 2a + 3b$,

$c_6 = c_4 + c_5 = 3a + 5b$,

$c_7 = c_5 + c_6 = 5a + 8b$.

...

За умовою $c_4 = 6$, $c_6 = 15$. Тому невідомі a і b можна знайти як розв'язок системи

$$\begin{cases} a + 2b = 6 \\ 3a + 5b = 15. \end{cases}$$

Звідки

$$\begin{cases} 3a + 6b = 18 \\ 3a + 5b = 15, \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 3. \end{cases}$$

Таким чином $\quad c_7 = 5a + 8b = 5 \cdot 0 + 8 \cdot 3 = 24.$

Відповідь: 24.

А чи звернули Ви увагу?

Кожна така послідовність має наступні властивості:

1^0 $\quad c_n = c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_{n-3} + c_{n-2} + b$;

2^0 $\quad c_1 + c_3 + c_5 + ... + c_{2n-1} = c_{2n} + a - b$;

3^0 $\quad c_2 + c_4 + c_6 + ... + c_{2n} = c_{2n+1} - a$.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 2.

?! Перевірте та доведіть справедливість зазначених властивостей.

Задача 3.

I спосіб

Очевидно, що для нумерації перших 9 сторінок задачника (починаючи з 1-ої) знадобиться 9 цифр.

Кожна наступна сторінка — з 10-ої по 99-ту включно — буде нумеруватися 2-ма цифрами. Загальне число таких сторінок становить $9 \cdot 10 = 90$. Тому для їх нумерації знадобиться ще $2 \cdot 90 = 180$ цифри.

Кожна наступна сторінка — з 100-ої по 999-ту — буде нумеруватися 3-ма цифрами. Оскільки загальна кількість тризначних чисел становить $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$, то для нумерації 900 таких сторінок знадобилося би $3 \cdot 900 = 2\,700$ цифри.

Проте, за умовою, для нумерації всіх сторінок задачника знадобилося лише $1\,224$ цифри. Це означає, що остання сторінка книги має тризначний номер, значно менший за 999. Більше того, для нумерації сторінок з тризначними номерами було використано точно $1224 - 9 - 180 = 1035$ цифри.

Останнє, в свою чергу означає, що за допомогою 1035 цифр було занумеровано точно $1035 : 3 = 345$ сторінок з тризначними номерами.

Таким чином, книга, для нумерації сторінок якої було використано $1\,224$ цифри, містить точно $9 + 90 + 345 = 444$ сторінки.

II спосіб

Очевидно, що кількість сторінок, номери яких позначено однозначними числами (від 1 до 9 сторінки) дорівнює 9, а двозначними числами (від 9 до 99 сторінки) дорівнює 90. Нехай кількість сторінок, які позначено тризначними числами дорівнює x, тоді загальна кількість цифр, використаних для нумерації сторінок складає $9 + 180 + 3x$, що за умовою задачі дорівнює 1224. Тому має місце рівність $9+180+3x = 1224$, звідки $x = 345$.

Таким чином, книга, для нумерації сторінок якої було використано $1\,224$ цифри, містить точно $9 + 90 + 345 = 444$ сторінки.

Відповідь: 444.

Задача 4.

Дано: $\triangle ABC$, $AC = 1$ см, $AB = 2$ см, O — точка перетину бісектрис, $K \in AC$, $M \in AB$, $O \in KM$, $KM || BC$.

Знайти: периметр $\triangle AKM$.

I спосіб[8]

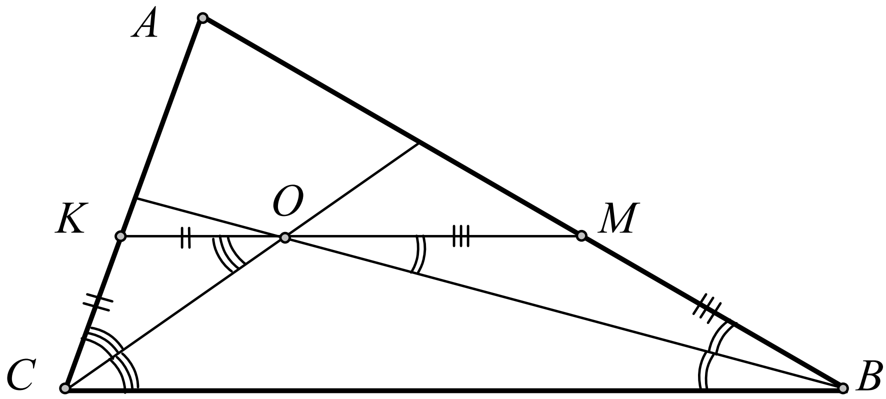


Рис. 5: до першого способу розв'язання задачі 4

1) За умовою $KM||BC$. Тому за властивістю паралельних KM, BC та січної CO кути KOC і OCB є рівними, як «внутрішні різносторонні». Оскільки CO — бісектриса кута ACB, то за визначенням $\angle KCO = \angle BCO$. І тому $\angle KCO = \angle KOC$. Отже (за ознакою рівнобедреного трикутника) $\triangle$ CKO є рівнобедреним з основою CO. Звідки $KO = KC$.

2) Аналогічно $\angle CBO = \angle MOB$ як «внутрішні різносторонні» при паралельних KM, BC та січній CO. Оскільки BO — бісектриса кута ABC, то $\angle MBO = \angle CBO$. І тому $\angle MBO = \angle MOB$. Отже $\triangle$ BMO є рівнобедреним з основою BO. Звідки $MO = MB$.

3) Таким чином $P_{\triangle AKM} = AK + KM + AM =$

$$= AK + (KO + OM) + AM = AK + (KC + MB) + AM =$$

$$= (AK + KC) + (MB + AM) = AC + AB = 1 + 2 = 3.$$

Отже $P_{\triangle AKM} = 3$ см.

[8] заснований на ідеї, запропонованій укладачами-авторами — відповідальними за добір задач до олімпіади

II спосіб

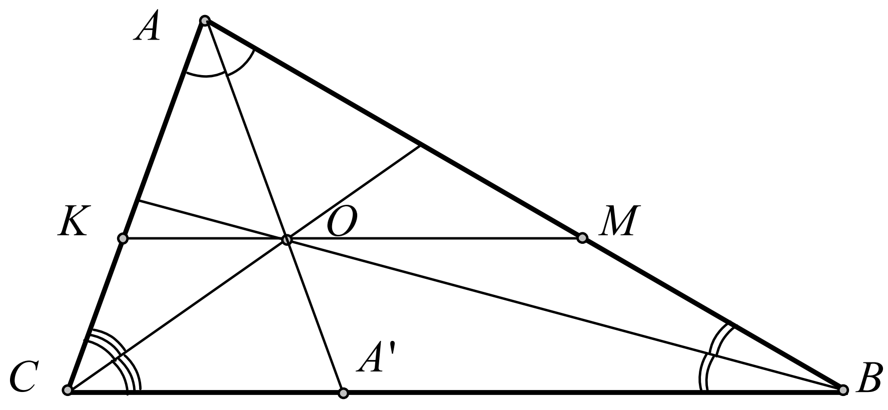


Рис. 6: до другого способу розв'язання задачі 4

Нехай AA' — бісектриса кута A трикутника ABC. Оскільки бісектриси кутів трикутника перетинаються в одній точці, то $O \in AA'$.

За умовою $KM||BC$. Тому трикутники AKM і ACB є подібними за третьою ознакою подібності трикутників. Оскільки AO і AA' — відповідні лінійні елементи (бісектриси відповідних кутів трикутників) подібних трикутників AKM і ACB, то в якості коефіцієнта подібності цих трикутників можна обрати величину $k = \frac{AO}{AA'}$ (або ж $k' = \frac{1}{k} = \frac{AA'}{AO}$).

За **властивістю точки перетину бісектрис трикутника** має місце рівність

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AC + AB}{BC},$$

звідки $\frac{OA'}{AO} = \frac{BC}{AC+AB}$, $\frac{OA'}{AO} + 1 = \frac{BC}{AC+AB} + 1$, $\frac{AA'}{AO} = \frac{AC+AB+BC}{AC+AB} = \frac{P_{\triangle ABC}}{AC+AB}$.

І тому коефіцієнт подібності $k = \dfrac{AO}{AA'} = \dfrac{AC + AB}{P_{\triangle ABC}}$.

Але ж тоді

$$P_{\triangle AKM} = k \cdot P_{\triangle ABC} = \frac{AC + AB}{P_{\triangle ABC}} \cdot P_{\triangle ABC} = AC + AB.$$

Отже периметр $\triangle AKM$ дорівнює $AC + AB = 1 + 2 = 3$ см.

Відповідь: 3.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 4.

З огляду на те, що **властивість точки перетину бісектрис трикутника** є недостатньо відомою, наведемо доведення цього твердження.

За властивістю основи бісектриси кута трикутника («основа бісектриси кута трикутника ділить сторону на відрізки, довжини яких пропорційні довжинам прилеглих сторін») з трикутників ACA' і ABA' маємо наступні (відповідні) пропорції: $\frac{AO}{OA'} = \frac{AC}{CA'}$, $\frac{AO}{OA'} = \frac{AB}{BA'}$, звідки

$$\frac{AO}{OA'} = \frac{AC}{CA'} = \frac{AB}{BA'} = \frac{AC + AB}{CA' + A'B} = \frac{AC + AB}{CB}.$$

! Слід взяти на «озброєння» наступний факт арифметики, який часто застосовують в геометрії: якщо $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, то $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{a+c}{b+d}$.

Задача 5.

I спосіб[9]

Заради визначеності позначимо шукане число як x, а частку від його ділення на 9 — y.

За умовою число x ділиться на 9 без остачі. І тому (за ознакою подільності натуральних чисел на число 9) сума $S(x)$ його цифр також ділиться на 9. Оскільки (за умовою) сума $S(y)$ цифр числа y менше від $S(x)$ на 9, то $S(y)$ також ділиться на 9. І тому (за ознакою подільності натуральних чисел на число 9) число y також ділиться на 9. Але ж тоді число x ділиться на 81 без остачі.

Запишемо всі тризначні числа x (разом із сумою їх цифр $S(x)$), що діляться на 81

x	162	243	324	405	**486**	**567**	**648**	**729**	810	891	**972**
$S(x)$	9	9	9	9	*18*	*18*	*18*	*18*	9	18	*18*

та частки y (разом із сумою їх цифр $S(y)$) від їх ділення на 9:

y	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108
$S(y)$	9	9	9	9	*9*	*9*	*9*	*9*	9	18	*9*

Порівнюючи суми цифр $S(x) = S(9y)$ та $S(y)$ не важко бачити, що умову задачі задовольняють лише п'ять чисел: 486, 567, 648, 729 і 972.

Відповідь: 5.

[9]заснований на ідеї, запропонованій укладачами-авторами — відповідальними за добір задач до олімпіади

9 клас

Задача 1.

Для довільного дійсного a справджується рівність $|-a| = |a|$, тому дане рівняння $|1-2x| = 2x-1$ можна подати у вигляді $|2x-1| = 2x-1$. Розв'яжемо це рівняння.

I спосіб

Оскільки для довільного дійсного a справджується критерій $|a| = a \Leftrightarrow a \geqslant 0$, то

$$|2x-1| = 2x-1 \Leftrightarrow 2x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}.$$

II спосіб

$$|2x-1| = 2x-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-1 = 2x-1 \\ 2x-1 \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -(2x-1) = 2x-1 \\ 2x-1 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in R \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} 2(2x-1) = 0 \\ 2x-1 < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant \frac{1}{2} \\ \emptyset \end{array} \right. \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}.$$

III спосіб

Оскільки для довільного дійсного a справджуються умови $|a| \geqslant 0$ і $|a|^2 = a^2$, то мають місце наступні рівносильні «переходи»

$$|2x-1| = 2x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} |2x-1|^2 = (2x-1)^2 \\ 2x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)^2 = (2x-1)^2 \\ 2x-1 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in R \\ x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Відповідь: $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Задача 2.

Нехай $ABCD$ — дана трапеція, в якій: $BC||AD$, $BC < AD$, $BC = 9$ см; $\angle A = \angle B = 90^0$, $AB = 8$ см. Знайдемо периметр трапеції.

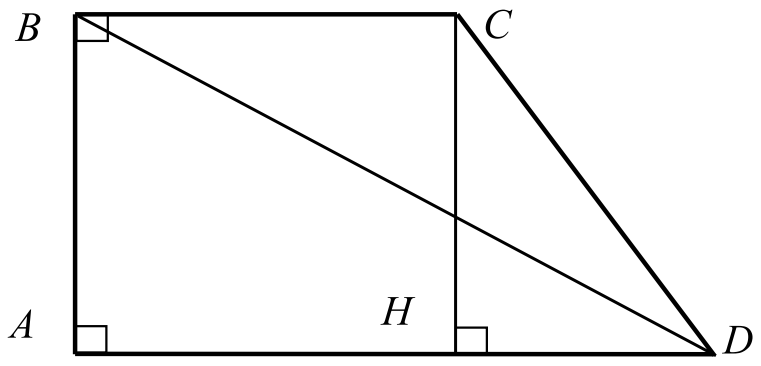


Рис. 7: до задачі 2

1. Нехай далі $CH \perp AD$, $H \in AD$. Оскільки $BA \perp AD$, то за ознакою паралельних $BA||CH$. За умовою $BC||AH$ і тому (за визначенням) чотирикутник $ABCH$ є паралелограмом. Звідки $CH = BA = 8$ см. Більше того, оскільки кути цього паралелограма є прямими, то він є прямокутником. І тому (за властивістю прямокутника) $AC = BH$.

2. За умовою $BA \perp AD$, тому AH і AD є проекціями похилих BH і BD відповідно. Оскільки $AH < AD$, то (за властивістю похилих) $BH < BD$. А так як $AC = BH$, то $AC < BD$ і тому саме $BD = 17$ см.

3. Розглянемо $\triangle\ BAD$. В ньому: $\angle B = 90^0$, $BA = 8$, $BD = 17$. Тоді за теоремою Піфагора
$AD = \sqrt{BD^2 - BA^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15.$

4. Оскільки $AH = BC = 9$, то, як наслідок із аксіоми вимірювання відрізків, має місце рівність $HD = AD - AH = 15 - 9 = 6$.

5. Розглянемо $\triangle\ CHD$. В ньому: $\angle H = 90^0$, $CH = 8$, $HD = 6$. Тому за теоремою Піфагора
$CD = \sqrt{CH^2 + HD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$

6. Таким чином, периметр трапеції $ABCD$ становить

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + AD = 9 + 8 + 10 + 15 = 42.$$

Відповідь: 42.

Задача 3.

1. Введемо в розгляд основні величини та їх позначення, що «фігурують» в умові задачі:

V — об'єм води, яка міститься в резервуарі, що передбачений конструкцією поливальної машини;

u — швидкість, з якою вода виливається з резервуару;

v — швидкість, з якою рухається машина під час поливання дороги;

T — «робочий» час руху машини, тобто з моменту початку поливання дороги до моменту закінчення води в резервуарі;

іншими словами: T — час, за який вода (загального об'єму V) повністю виливається з резервуару;

S — довжина «робочого» шляху машини, тобто довжина шляху, який долає машина за «робочий» час T.

2. Перш ніж приступити до *безпосереднього розв'язання задачі*, **з'ясуємо залежності**, що існують між зазначеними вище величинами.

Слід взяти до уваги, що **час, швидкості, шлях** необхідно розглядати виключно в контексті «робочого часу» — з моменту початку поливання дороги до моменту закінчення води в резервуарі машини. Тобто рух поливальної машини без поливання дороги водою взагалі не розглядається.

Але ж тоді («робочий») час руху поливальної машини співпадає із часом, за який вода об'єму V виливається із резервуару. Тому має місце рівність

$$T = \frac{V}{u} = \frac{S}{v}, \tag{9.3.1}$$

звідки довжину шляху S (политої водою дороги) можна визначити за формулами

$$S = T \cdot v = V \cdot \frac{v}{u}, \tag{9.3.2}$$

а початковий об'єм V води в резервуарі — за формулами

$$V = T \cdot u = S \cdot \frac{u}{v}. \tag{9.3.3}$$

3. Тепер перейдемо до *безпосереднього* **розв'язання задачі**.

моделі роботи поливальної машини	основні величини	**Об'єм** води в резервуарі поливальної машини	**Швидкість** виливання води із резервуара машини	**Час (у хв)** руху машини з одночасним поливанням дороги	**Швидкість** руху поливальної машини	**Довжина шляху** (у км), який долає машина поливаючи дорогу водою
«базовий режим»	відповідні позначення та залежності	V	u	$T = \frac{V}{u} = \frac{S}{v}$	v	$S = T \cdot v = \frac{V}{u} \cdot v$
в 1-му режимі		$V = \frac{S_1}{v_1} \cdot u_1$	$u_1 = 3u$	$T_1 = \frac{S_1}{v_1}$	$v_1 = 2v$	$S_1 = 4$
в 2-му режимі		$\frac{4}{2v} \cdot 3u = V$	$u_2 = 2u$	$T_2 = \frac{V}{2u}$	$v_2 = 3v$	?

Рис. 8: «табличне представлення» змісту задачі 3

3.1. За умовою задачі відомо (описано 1-ий режим роботи), що якщо «базову» швидкість v руху машини збільшити вдвічі ($v_1 = 2v$), а «базову» швидкість u виливання води збільшити втричі ($u_1 = 3u$), то води у машині вистачить на те, щоб полити 4 км дороги. Тому за формулою (9.3.3) можна визначити загальний об'єм V вилитої води

$$V = S_1 \cdot \frac{u_1}{v_1} = 4 \cdot \frac{3u}{2v} = 6 \cdot \frac{u}{v}. \tag{9.3.4}$$

3.2. Основна вимога задачі полягає у «дослідженні-моделюванні» випадку (2-го режиму роботи), коли «базову» швидкість v руху машини буде збільшено втричі ($v_2 = 3v$), а «базову» швидкість u виливання води — збільшено вдвічі ($u_2 = 2u$). Оскільки умовою задачі передбачається витратити такий самий об'єм води V (який можна визначити за допомогою (9.3.4)), то довжину шляху S_2, який подолає машина поливаючи дорогу із зазначеними швидкостями v_2 і u_2, можна визначити за формулою (9.3.2)

$$S_2 = V \cdot \frac{v_2}{u_2} = 6\frac{u}{v} \cdot \frac{3v}{2u} = 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{u} = 9. \tag{9.3.5}$$

Таким чином, якщо початкову («базову») швидкість v руху машини збільшити втричі, а початкову («базову») швидкість u виливання води збільшити вдвічі, то вдасться полити 9 км дороги.

Відповідь: 9.

Задача 4.

Знайдемо дискримінант D даного квадратного рівняння $x^2-2x-1=0$. Оскільки $D=(-2)^2-4\cdot(-1)=4+4=8>0$, то це рівняння має два дійсні корені x_1 та x_2.

Знайдемо значення виразу $f(x_1;x_2)=\dfrac{1}{2x_1+3x_2}+\dfrac{1}{2x_2+3x_1}$.

I спосіб

За теоремою Вієта мають місце рівності $(x_1+x_2)=2, \quad x_1\cdot x_2=-1.$

Тому $f(x_1;x_2)=\dfrac{1}{2x_1+3x_2}+\dfrac{1}{2x_2+3x_1}=\dfrac{2x_2+3x_1+2x_1+3x_2}{(2x_1+3x_2)(2x_2+3x_1)}=$

$$=\frac{5(x_1+x_2)}{6(x_1^2+x_2^2)+13x_1x_2}=\frac{5(x_1+x_2)}{6(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+x_1x_2}=$$

$$=\frac{5(x_1+x_2)}{6(x_1+x_2)^2+x_1x_2}=\frac{5\cdot 2}{6\cdot 4-1}=\frac{10}{23}.$$

II спосіб — *через узагальнення задачі 4*

Нехай x_1, x_2 — дійсні корені квадратного рівняння $ax^2+bx+c=0$. Знайдемо значення виразу

$$F(a;b;c;m;n)=\frac{1}{mx_1+nx_2}+\frac{1}{mx_2+nx_1}, \quad m^2+n^2\neq 0.$$

Оскільки за умовою існують дійсні корені цього квадратного рівняння, то за теоремою Вієта мають місце рівності $(x_1+x_2)=-\dfrac{b}{a}, \quad x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}.$

Тому $F(a,b,c,m,n)=\dfrac{1}{mx_1+nx_2}+\dfrac{1}{mx_2+nx_1}=$

$$=\frac{mx_2+nx_1+mx_1+nx_2}{(mx_1+nx_2)(mx_2+nx_1)}=\frac{(m+n)\cdot(x_1+x_2)}{mn\cdot(x_1^2+x_2^2)+(m^2+n^2)\cdot x_1x_2}=$$

$$=\frac{(m+n)\cdot(x_1+x_2)}{mn\cdot(x_1+x_2)^2+(m-n)^2\cdot x_1x_2}=\frac{-(m+n)\cdot\frac{b}{a}}{mn\cdot\frac{b^2}{a^2}+(m-n)^2\cdot\frac{c}{a}}=$$

$$=\frac{-ab(m+n)}{b^2\cdot mn+ac\cdot(m-n)^2}.$$

Таким чином,

$$f(x_1,x_2)=F(1;-2;-1;2;3)=\frac{-1\cdot(-2)\cdot(2+3)}{(-2)^2\cdot 2\cdot 3+1\cdot(-1)\cdot(3-2)^2}=\frac{10}{23}.$$

Відповідь: $\dfrac{10}{23}$.

Задача 5.

1. Нехай n — найменше (перше) з десяти натуральних чисел, які були записані на дошці. Тоді, очевидно, що найбільше (десяте), з написаних на дошці чисел, дорівнює $n+9$. Очевидно, що ці числа утворюють арифметичну прогресію з першим членом $a_1 = n$, різницею $d = 1$ та останнім членом $a_{10} = n+9$. І тому їх сума S_{10} (за формулою для обчислення суми перших членів арифметичної прогресії) становить

$$S_{10} = \frac{a_1 + a_{10}}{2} \cdot 10 = \frac{n+n+9}{2} \cdot 10 = (2n+9) \cdot 5 = 10n + 45.$$

2. Нехай x — число, яке витерли з дошки. Оскільки (за умовою) сума дев'яти чисел, які залишилися на дошці, дорівнює 2015, то має місце рівність

$$S_{10} - x = 2015 \quad \Leftrightarrow \quad 10n + 45 - x = 2015,$$

звідки $10n - x = 1970$, $x = 10(n-197)$. І тому шукане число x закінчується нулем.

3. Очевидно, що для величини $(S_{10} - x)$ виконується подвійна нерівність

$$S_{10} - a_{10} \leqslant S_{10} - x \leqslant S_{10} - a_1 \Leftrightarrow 9n + 36 \leqslant S_{10} - x \leqslant 9n + 45,$$

звідки

$$n + 4 \leqslant \frac{S_{10} - x}{9} \leqslant n + 5.$$

Оскільки $\dfrac{S_{10} - x}{9} = \dfrac{2015}{9} = 223 + \dfrac{8}{9}$, то $n + 4 \leqslant 223 + \dfrac{8}{9} \leqslant n + 5$. Звідки

$$n \leqslant 219 + \frac{8}{9} \leqslant n + 1.$$

Останню умову задовольняє лише одне натуральне число — $n = 219$.

4. Вище було з'ясовано, що число x закінчується нулем. А з того, що серед десяти послідовних натуральних чисел (в нашому випадку — починаючи з 219) є лише одне, яке закінчується нулем, то шуканим числом x («яке витерли з дошки») є число 220.

Відповідь: 220.

10 клас

Задача 1.

I спосіб *— за «методом інтервалів»*

$$\frac{x-3}{1-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} \leqslant -1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} + 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3+x-1}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{x-1} \leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x-1} \leqslant 0 \Rightarrow x \in (1;2]$$

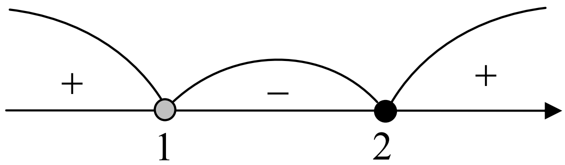


Рис. 9: до першого способу розв'язання задачі 1

II спосіб

$$\frac{x-3}{1-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 \geqslant 1-x, \\ 1-x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-3 \leqslant 1-x, \\ 1-x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x \geqslant 4, \\ x < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x \leqslant 4, \\ x > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \emptyset \\ 1 < x \leqslant 2 \end{array}\right. \Rightarrow x \in (1;2]$$

III спосіб

$$\frac{x-3}{1-x} \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-3}{1-x} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x-3-1+x}{1-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{2(x-2)}{1-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{1-x} \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 \geqslant 0, \\ 1-x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 \leqslant 0, \\ 1-x < 0 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 2, \\ x < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leqslant 2, \\ x > 1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \emptyset \\ 1 < x \leqslant 2 \end{array} \right. \Rightarrow x \in (1; 2]$$

Відповідь: $x \in (1; 2]$.

Задача 4.

Чи можна числа $1, 2, ..., 20$ розмістити у вершинах та серединах ребер кубу так, щоб кожне число, яке стоїть по середині ребра, дорівнювало середньому арифметичному чисел, які стоять на кінцях цього ребра?

Розв'язання[10]

Оскільки будь-яке число, що стоїть в середині ребра, є натуральним і дорівнює середньому арифметичному чисел, що стоять у вершинах куба, то в вершинах повинні стояти числа виключно однієї парності (або всі парні, або ж всі непарні).

Це означає, що або число 1, або число 20 стоїть в середині певного ребра. Проте це неможливо, бо:

якщо число 1 стоїть в середині ребра, то на одному з кінців цього ребра знаходиться число, що є меншим за 1.

якщо ж число 20 стоїть в середині ребра, то на одному з кінців цього ребра знаходиться число, що є більшим за 20.

Відповідь: Ні, не можна.

[10] засноване на ідеї, запропонованій укладачами-авторами — відповідальними за добір задач до олімпіади

ДОПОВНЕННЯ до задачі 1.

Нагадаємо, що дробово-раціональними нерівностями називають нерівності, які можна привести до однієї з нерівностей виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \gtreqless 0,$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени з дійсними коефіцієнтами. Многочлен виду $P_n(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ... + a_1 \cdot x^1 + a_0$, де $a_i \in R$, $a_n \neq 0$, $n \in N$ називають многочленом n-го степеня, а числовий множник a_n — коефіцієнтом при старшому члені x^n многочлена $P_n(x)$.

Алгоритмічний підхід до розв'язування
дробово-раціональних нерівностей методом «інтервалів»

1. **Знайти «ОДЗ» дробово-раціональної нерівності**.

По суті — вилучити із множини дійсних чисел R (з інтервалу $(-\infty;+\infty)$) усі «нулі знаменників», тобто всі ті значення $h_1, h_2, ..., h_t$ змінної x, при яких обертається в нуль хоча б один із знаменників.

! Звернемо увагу, що пріоритетність саме цього кроку є більш ніж виправданою. Для переконання в останньому достатньо розглянути приклад нерівності $x + \dfrac{1}{x-1} \leqslant 2 + \dfrac{1}{x-1}$, розв'язком якої є $x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2]$.

2. **Звести вихідну нерівність до її «канонічного» виду**.

2.1. «Перенести» (з дотриманням відповідного правила) всі члени з правої частини нерівності у ліву її частину. Тобто, привести нерівність до виду

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + ... + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)} \gtreqless 0. \tag{10.4.1}$$

2.2. Звести всі доданки у лівій частині нерівності до спільного знаменника. Тобто, привести нерівність до нерівності виду

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \gtreqless 0. \tag{10.4.2}$$

2.3. Розкласти чисельник $P(x)$ на незвідні множники (подати $P(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів).

! Многочлен з дійсними коефіцієнтами називають незвідним, якщо його не можна розкласти у добуток многочленів менших степенів з дійсними коефіцієнтами. **Незвідними многочленами з дійними коефіцієнтами** можуть бути лише: **лінійні** (1-го степеня) многочлени $ax + b$ та **квадратичні** (2-го степеня) многочлени $ax^2 + bx + c$ **з від'ємним дискримінантом** $D = b^2 - 4ac$, зокрема виду $ax^2 + c$, для яких $a \cdot c > 0$.

2.4. Розкласти знаменник $Q(x)$ на незвідні множники.

2.5. Шляхом множення на число (-1)

або обох частин нерівності (не забуваючи при цьому знак нерівності змінювати на протилежний)

або ж чисельника і знаменника лівої частини нерівності

досягнути того, щоб коефіцієнт при старшому члені в кожному з незвідних множників-многочленів був додатнім.

! Слід взяти до уваги, що, наприклад:
незвідні множники виду $(\alpha - x)^{2n} = (x - \alpha)^{2n}$, $(-3 + 2x) = (2x - 3)$, $(2x^2 - x + 3)$ не вимагають застосування до них зазначених процедур,

тоді як

незвідні множники виду $(\alpha - x)^{2n+1} = -(x - \alpha)^{2n+1}$, $(-2x + 3) = -(2x - 3)$, $(-2x^2 + x - 3) = -(2x^2 - x + 3)$ вимагають обов'язкове застосування до них зазначених процедур.

2.6. Кожен з незвідних множників виду $(ax + b)^n$ (після кроку 2.5. $a > 0$) привести до стандартного виду $a^n \cdot (x + \frac{b}{a})^n$.

! Слід взяти до уваги, що остаточний розклад на незвідні множники передбачає добуток степенів двочленів саме з різними основами.

2.7. «Позбутися» (від додатних та від'ємних) числових множників в чисельнику і знаменнику лівої частини нерівності (наприклад, шляхом ділення або множення обох частин нерівності на такі числові множники).

Таким чином, результатом виконання кроків 2.1.–2.7. буде зведення вихідної нерівності до нерівності виду

$$\frac{(x-\alpha_1)^{m_1} \cdot (x-\alpha_2)^{m_2} \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_k)^{m_k} \cdot \widetilde{P}(x)}{(x-\beta_1)^{n_1} \cdot (x-\beta_2)^{n_2} \cdot \ldots \cdot (x-\beta_l)^{n_l} \cdot \widetilde{Q}(x)} \gtreqless 0, \qquad (10.4.3)$$

де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ — різні нулі чисельника;
$\beta_1, \beta_2, ..., \beta_l$ — різні нулі знаменника;
$\widetilde{P}(x)$ ($\widetilde{Q}(x)$) — позначення для добутку (зокрема однократного) незвідних множників 2-го степеня (за умов наявності таких в розкладах $P(x)$ і $Q(x)$ відповідно).

Більше того, завдяки виконанню кроку 2.5., кожен з добутків $\widetilde{P}(x)$ і $\widetilde{Q}(x)$ при будь-яких дійсних x (зокрема з ОДЗ вихідної нерівності) приймає виключно додатні значення (а тому взагалі не впливає на знак лівої частини нерівності). Таким чином нерівність (10.4.3) є рівносильною нерівності

$$f(x) \gtreqless 0, \quad \text{де} \tag{10.4.4}$$

$$f(x) = \frac{(x-\alpha_1)^{m_1} \cdot (x-\alpha_2)^{m_2} \cdot ... \cdot (x-\alpha_k)^{m_k}}{(x-\beta_1)^{n_1} \cdot (x-\beta_2)^{n_2} \cdot ... \cdot (x-\beta_l)^{n_l}}, \tag{10.4.5}$$

яку і будемо називати «канонічним» видом вихідної нерівності.

! В загальному випадку множина $B = \{\beta_1, ..., \beta_l\}$ є підмножиною множини $H = \{h_1, ..., h_t\}$. Якщо ж множини B і H співпадають, то нерівність (10.4.4) є рівносильною вихідній нерівності.

!! Вихідна нерівність є рівносильною системі

$$\begin{cases} f(x) \gtreqless 0, \\ x \in R \setminus \{h_i\}_{i=1}^{t}. \end{cases}$$

3. **Виокремлення «подвійних точок»**.

! Під «подвійною точкою» слід розуміти таке значення змінної x, для якого виконується одна з трьох умов:

воно є нулем лише чисельника або лише знаменника, а показник степеня відповідного двочлена є парним числом,

воно є нулем і чисельника і знаменника, а сума (або різниця) показників степенів відповідних двочленів є парним числом,

воно належить множині H, але не належить множині B.

!! Кожна «подвійна точка» p_0 характеризується тим, що вона є одночасно кінцевою та початковою точкою двох «сусідніх» інтервалів знакосталості функції $f(x)$.

4. **Визначення знаків $f(x)$ на інтервалах координатної осі**.

4.1. На координатній прямій незалежно від знаку нерівності «виколюємо» точки з координатами $h_1, h_2, ..., h_t$ — нулі знаменників вихідної нерівності.

4.2. На тій самій координатній прямій залежно від знаку нерівності «виколюємо» (якщо знак нерівності строгий) або «замальовуємо» (у випадку не строгого знаку нерівності) точки з координатами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ — нулі чисельника. Причому, якщо нуль чисельника співпадає із вже виколотим на кроці 4.1. нулем, то такий нуль не може бути замальованим.

4.3. Серед точок, відмічених на координатній прямій, помітити ті, які є «подвійними точками».

4.4. Завдяки крокам 2.5.−2.7. функція $f(x)$ на крайньому правому проміжку числової осі завжди приймає додатні значення. Тому цей інтервал завжди помічаємо позначкою «$+$».

На інших інтервалах координатної осі розстановку позначок «$+$» або «$-$» доцільно здійснити рухаючись від правого крайнього інтервалу ліворуч (до $-\infty$) змінюючи позначки на альтернативні за винятком випадків переходу через подвійні точки. При переході через кожну з подвійних точок (рухаючись справа-наліво) позначка не змінюється.

5. **Запис шуканого розв'язку вихідної нерівності**.

Якщо знак нерівності (10.4.4) «$>$», то у відповідь слід записати об'єднання відкритих інтервалів, на яких стоїть позначка «$+$»;

якщо знак нерівності (10.4.4) «$\geqslant$», то у відповідь слід записати об'єднання інтервалів, на яких стоїть позначка «$+$» включивши кінці, яким відповідають замальовані точки та замальовані точки, що не увійшли у відмічені проміжки;

якщо знак нерівності (10.4.4) «$<$», то у відповідь слід записати об'єднання відкритих інтервалів, на яких стоїть позначка «$-$»;

якщо знак нерівності (10.4.4) «$\leqslant$», то у відповідь слід записати об'єднання інтервалів, на яких стоїть позначка «$-$» включивши кінці, яким відповідають замальовані точки та замальовані точки, що не увійшли у відмічені проміжки.

Задача 2.

I спосіб[11]

Перетворимо дане рівняння до рівносильного рівняння виду

$$2x^2 + y^2 = 2xy + 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2xy + y^2\right) + x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 2xy + y^2\right) + x^2 - 4x + 4 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-2)^2 = 4.$$

За умовою шуканими x та y є натуральні числа. Оскільки права частина останнього рівняння є точним квадратом натурального числа 2, а ліва його частина — сума квадратів двох натуральних чисел, то ліва частина останнього рівняння є сумою двох точних квадратів (натуральних чисел), які можуть бути рівними лише 0 і 4.

При цьому можливими є лише наступні два випадки

1) $x - y = 0$, $x - 2 = \pm 2$;

2) $x - y = \pm 2$, $x - 2 = 0$.

Розглянемо кожен із зазначених випадків.

$$1)\quad \begin{cases} x-y=0, \\ x-2=\pm 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0, \\ x-2=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=0, \\ x-2=+2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=y, \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=y, \\ x=4 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (0;0) \\ (4;4)\,. \end{array}\right.$$

$$2)\quad \begin{cases} x-y=\pm 2, \\ x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=-2, \\ x-2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=+2, \\ x-2=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=x+2, \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=x-2, \\ x=2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (2;4) \\ (2;0)\,. \end{array}\right.$$

Таким чином, дане рівняння має лише два розв'язки в натуральних числах — $(2,4)$ і $(4,4)$.

[11] заснований на ідеї, запропонованій укладачами-авторами — відповідальними за добір задач до олімпіади

II спосіб

Перетворимо дане рівняння до рівносильного рівняння виду

$$2x^2 + y^2 = 2xy + 4x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2x \cdot y + (2x^2 - 4x) = 0. \qquad (10.2.1)$$

Розв'яжемо останнє рівняння (в натуральних x та y) як квадратне рівняння відносно змінної y.

$$D = (2x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2x^2 - 4x) = 4x^2 - 8x^2 + 16x = 4x(4 - x).$$

Добре відомо, що квадратне рівняння $(10.2.1)$ буде мати дійсні корені (зокрема натуральні) тоді і лише тоді, коли $D = 4x(4 - x) \geqslant 0$, звідки

$$x \in [0; 4]. \qquad (10.2.2)$$

Таким чином, при $x \in [0; 4]$ коренями квадратного рівняння $(10.2.1)$ будуть

$$y_{1,2} = \frac{2x \mp \sqrt{4x(4 - x)}}{2} = x \mp \sqrt{x(4 - x)}. \qquad (10.2.3)$$

Оскільки $x \in N$, то, з урахуванням $(10.2.2)$, x може бути лише 1, 2, 3 або 4. Проте:

1) якщо $x = 1$, то $y = 1 \mp \sqrt{1 \cdot 3} \notin N$;

2) якщо $x = 3$, то $y = 3 \mp \sqrt{3 \cdot 1} \notin N$.

У двох інших можливих випадках маємо наступні результати:

3) якщо $x = 4$, то $y = 4 \mp \sqrt{4 \cdot 0} = 4$, звідки $(4; 4)$ — розв'язок рівняння $(10.2.1)$ в натуральних числах;

4) якщо $x = 2$, то $y = 2 \mp \sqrt{2 \cdot 2} = 2 \mp 2$, звідки $(2; 4)$ — розв'язок рівняння $(10.2.1)$ в натуральних числах.

Отже, $(2; 4)$ і $(4; 4)$ — всі розв'язки даного рівняння в натуральних числах.

Відповідь: $(2; 4)$, $(4; 4)$.

Задача 3.

I спосіб *— «на застосування формули для обчислення внутрішнього кута правильного многокутника»*

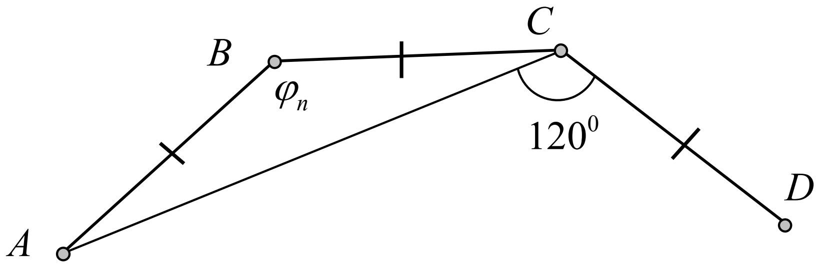


Рис. 10: до 1-го способу розв'язання задачі 3

1) Нехай φ_n — градусна міра внутрішнього кута правильного n-кутника. Тоді, як відомо, має місце рівність.

$$\varphi_n = \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n},$$

звідки $\angle ABC = \angle BCD = \varphi_n = \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$.

2) Розглянемо трикутник ABC. В ньому: $\angle ABC = \varphi_n$; $AB = BC$ (як довжини сторін правильного n-кутника). Звідки (за визначенням) $\triangle\ ABC$ є рівнобедреним. І тому (за властивістю кутів при основі рівнобедреного трикутника та, як наслідок із теореми про суму градусних мір внутрішніх кутів трикутника) справджуються рівності

$$\angle BAC = \angle BCA = \frac{180^0 - \varphi_n}{2} = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi_n.$$

3) За аксіомою вимірювання кутів має місце рівність

$$\angle BCD = \angle BCA + \angle ACD = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi_n + 120^0 = 210^0 - \frac{1}{2}\varphi_n.$$

З іншого боку — $\angle BCD = \varphi_n$. Тому справджується рівність

$$210^0 - \frac{1}{2}\varphi_n = \varphi_n \Rightarrow \frac{3}{2}\cdot\varphi_n = 210^0 \Rightarrow \varphi_n = 140^0,$$

звідки $\frac{(n-2)\cdot 180}{n} = 140 \Rightarrow (n-2)\cdot 9 = n\cdot 7 \Rightarrow 2n = 18 \Rightarrow n = 9.$

Отже, правильний многокутник, який задовольняє умову задачі, є **9**-кутником (має 9 сторін).

II спосіб *— «за допомогою вписаних кутів описаного кола»-1*

Нехай O — центр кола, описаного навколо даного правильного многокутника (для якого пари точок A, B; B, C; C, D є послідовними сусідніми вершинами), а n — число його сторін.

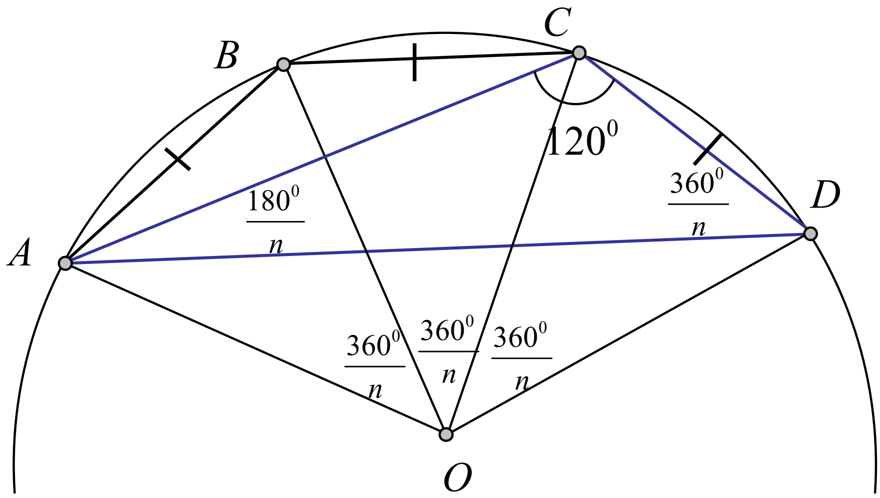


Рис. 11: до 2-го способу розв'язання задачі 3

1) Оскільки (за «III ознакою рівності трикутників») n трикутників AOB, BOC, COD, ... є рівними, а сума їх рівних (відповідних) кутів при спільній вершині C становить 360^0, то

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \frac{360^0}{n}.$$

2) За властивістю вписаних кутів кола («міра вписаного у коло кута вдвічі менша за міру відповідного центрального кута») справедливими є наступні твердження:

оскільки $\angle COD = \frac{360^0}{n}$, то $\angle CAD = \frac{180^0}{n}$;

оскільки $\angle AOC = 2 \cdot \frac{360^0}{n}$, то $\angle ADC = \frac{360^0}{n}$.

3) Розглянемо Δ ACD. В ньому: $\angle ACD = 120^0$ (за умовою); $\angle CAD = \frac{180^0}{n}$; $\angle CDA = \frac{360^0}{n}$. Тому за теоремою про суму градусних мір внутрішніх кутів трикутника має місце рівність

$$\angle ACD + \angle CAD + \angle CDA = 180^0, \text{ звідки}$$

$$120 + \frac{180}{n} + \frac{360}{n} = 180 \Rightarrow 2 + \frac{3}{n} + \frac{6}{n} = 3 \Rightarrow \frac{9}{n} = 1 \Rightarrow n = 9.$$

Отже, правильний многокутник, який задовольняє умову задачі, є **9**-кутником (має 9 сторін).

III спосіб *— «за допомогою вписаних кутів описаного кола»-2*

1) Нехай O — центр кола, описаного навколо даного правильного многокутника, а n — число його сторін. Тоді (за визначенням) кут DCO є вписаним кутом цього кола, який спирається на дугу $\overset{\frown}{AD}$.

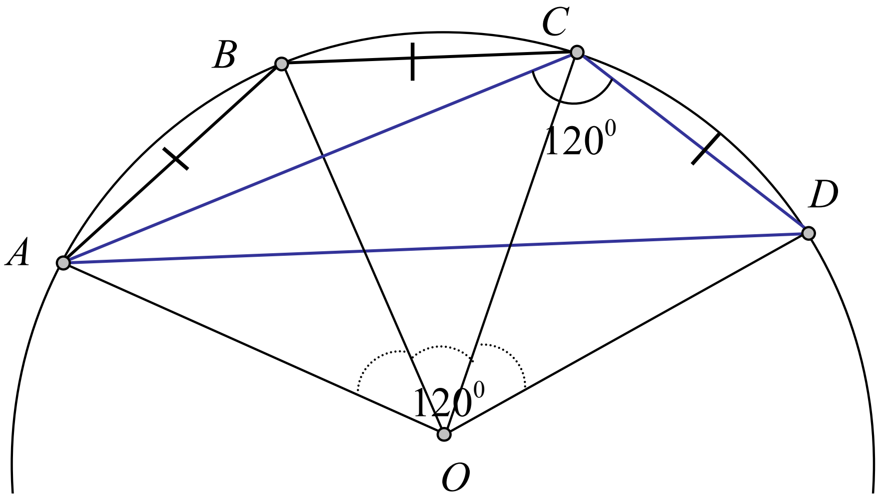


Рис. 12: до 3-го способу розв'язання задачі 3

2) За умовою міра кута DCA, який спирається на дугу $\overset{\frown}{AD}$, дорівнює 120^0. Тому градусну міру центрального кута AOD, який спирається на дугу $\overset{\frown}{DA}$, можна знайти за формулою

$$\angle AOD = 2 \cdot (180^0 - \angle DCA),$$

звідки $\angle AOD = 2 \cdot (180^0 - 120^0) = 120^0$.

3) Оскільки центральний кут $\angle AOD = 120^0$ «спирається» на дугу $\overset{\frown}{DA}$, яка «вміщує» **три** послідовні сторони правильного многокутника, то центральний кут, що «спирається» на будь-яку з n дуг, яку «стягує» **одна** сторона правильного многокутника становить $\dfrac{120^0}{3} = 40^0$.

Але ж тоді число n кутів такого правильного n-кутника становить

$$n = \frac{360}{40} = 9.$$

Отже, правильний многокутник, який задовольняє умову задачі, є **9**-кутником (має 9 сторін).

***IV спосіб** — «за допомогою вписаних кутів описаного кола»-3*

1) Нехай O — центр кола, описаного навколо даного правильного n-кутника $M_1 \equiv A, M_2 \equiv B, M_3 \equiv C, M_4 \equiv D, ..., M_n$, а φ_n — градусна міра його внутрішнього кута.

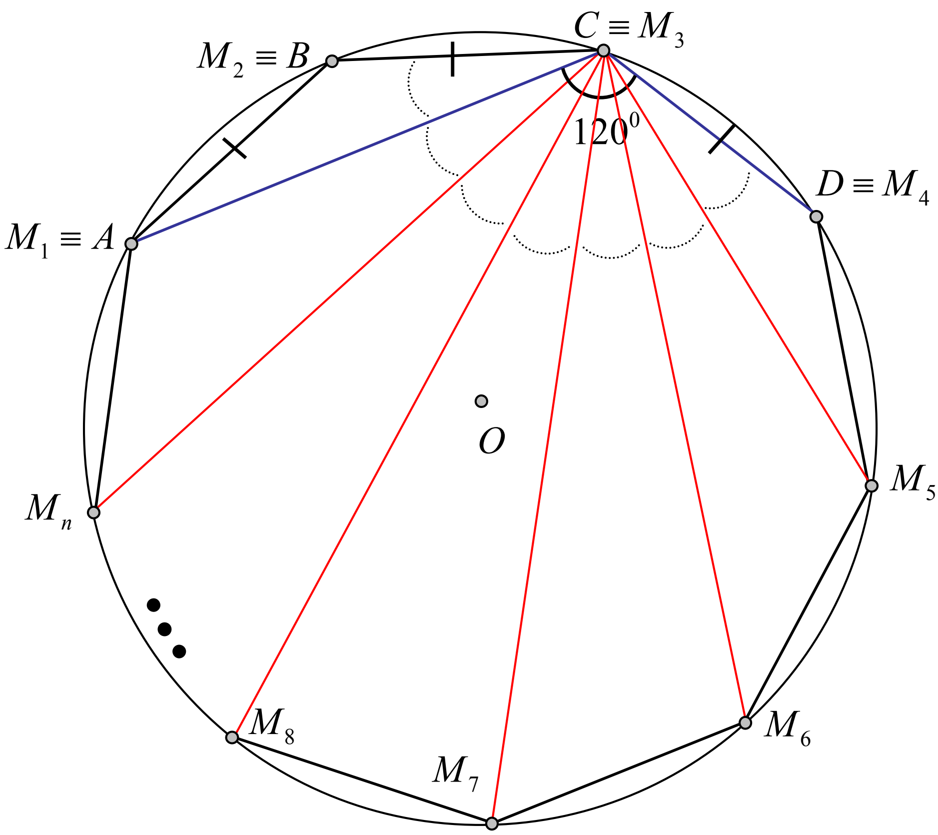


Рис. 13: до 4-го способу розв'язання задачі 3

2) Оскільки центральні кути, що «спираються» на сторони правильного многокутника, є рівними, то вписані кути зі спільною вершиною $C \equiv M_3$, які спираються на $n-2$ сторони цього n-кутника, також є рівними. Але ж тоді $\angle ACD = 120^0$ (кут $M_1M_3M_4$) хордами $CM_5, CM_6, ..., CM_n$ розбито на $n-3$ рівних кути, кожен з яких дорівнює $\angle BCA = \varphi_n - 120^0$. Тому маємо рівняння $\dfrac{120^0}{n-3} = \varphi_n - 120^0$, звідки

$$120 \cdot \frac{n-2}{n-3} = \varphi_n \Rightarrow 120 \cdot \frac{n-2}{n-3} = 180 \cdot \frac{n-2}{n} \Rightarrow \frac{2}{n-3} = \frac{3}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2n = 3(n-3) \Rightarrow 2n = 3n - 9 \Rightarrow n = 9.$$

Відповідь: 9.

Задача 5.

1) Нехай графіком квадратичного тричлена $y = ax^2 + bx + c = f(x)$ є «красива» парабола. Тоді (за «умовою-визначенням») її вершина P та дві точки M і N її перетину з віссю абсцис (OX) утворюють рівносторонній $\triangle\, MNP$.

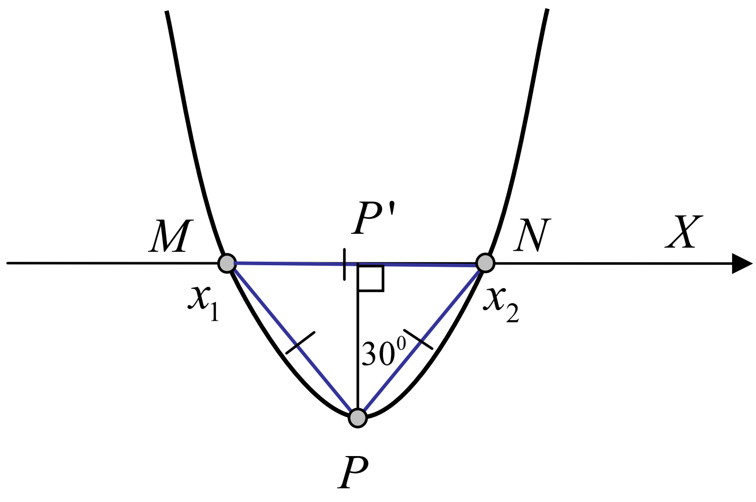


Рис. 14: ескіз «красивої» параболи для випадку $a > 0$ до задачі 5

2) Нехай x_1 та x_2 — менший та більший корені (абсциси точок M і N відповідно) квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. Тоді очевидно, що довжина MN сторони правильного $\triangle\, MNP$ становить

$$MN = x_2 - x_1 = \left| \left(\frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \right) - \left(\frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right) \right| = \frac{\sqrt{D}}{|a|},$$

де $D = b^2 - 4ac$ — дискримінант квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

3) Нехай далі PP' — висота $\triangle\, MNP$.

3.1) Оскільки $\triangle\, MNP$ — правильний, то PP' — бісектриса $\angle MPN = 60^0$. Тому гострий кут $P'PN$ прямокутного трикутника $PP'N$ дорівнює 30^0. Тоді з прямокутного $\triangle\, PP'N$ (як наслідок із визначення косинуса гострого кута прямокутного трикутника) довжина висоти PP' становить

$$PP' = PN \cdot \cos 30^0 = MN \cdot \cos 30^0 = \frac{\sqrt{D}}{|a|} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad (10.5.1)$$

3.2) З іншого боку — довжину висоти PP' можна знайти як модуль ординати вершини параболи. А саме: добре відомо, що абсцису x_v вершини параболи можна знайти за формулою $x_v = \dfrac{-b}{2a}$; тоді ординату y_v вершини параболи можна знайти як значення квадратичного тричлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $x = x_v$, тобто:

$$y_v = f(x_v) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} - b \cdot \frac{b}{2a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-D}{4a}$$

Отже, довжина висоти PP' становить

$$PP' = \frac{D}{4|a|}. \qquad (10.5.2)$$

3.3) З урахуванням (10.5.1) і (10.5.2) має місце рівність

$$\frac{\sqrt{D}}{|a|} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{D}{4|a|}, \quad a \neq 0, \qquad (10.5.3)$$

звідки $2\sqrt{3}\sqrt{D} = D$, $12 \cdot D = D^2$, $D(D - 12) = 0$.

Оскільки умову задачі $D = 0$ не задовольняє, то $D = 12$.

4) Таким чином, кожен квадратичний тричлен, графіком якого є «красива» парабола, має дискримінант, рівний 12.

Останнє й доводить, що дискримінанти всіх таких квадратичних тричленів є рівними.

Відповідь: 12.

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

Зауважимо що справедливим є більш загальне (більш «сильне») твердження. А саме:

Графіком квадратичного тричлена $y = ax^2 + bx + c$ є «красива» парабола ***тоді і лише тоді****, коли його дискримінант дорівнює 12.*

?! Доведіть, що якщо дискримінант квадратичного тричлена $y = ax^2 + bx + c$ дорівнює 12, то його графіком є саме «красива» парабола!

11 клас

Задача 1.

I спосіб

Розв'яжемо нерівність, використавши узагальнений метод інтервалів.

Знайдемо область визначення функції, що стоїть у лівій частині нерівності і відмітимо проміжок $[1;+\infty)$ на числовій осі, інші точки розглядати не будемо.

Знайдемо нулі функції, розв'язавши рівняння $(x^2-x-6)\sqrt{x-1}=0$. Використавши теорему Вієта отримаємо три корені $\{-2;1;3\}$, два з яких, що належать області визначення, відмічаємо на числовій осі. Нестрога нерівність визначає той факт, що всі нулі функції з області її визначення є розв'язками нерівності. Отримуємо два проміжки, вибравши довільні числа з кожного з них, визначаємо знак функції.

Отже, нерівність виконується при всіх x з проміжку $[3;+\infty)$ та при $x=1$.

Відповідь: $x\in\{1\}\cup[3;+\infty)$.

II спосіб

При $x=1$ нерівність виконується, тобто $x=1$ є її розв'язком.

При $x\neq 1$ задана нерівність рівносильна системі нерівностей

$$\begin{cases} x>1, \\ x^2-x-6>0, \end{cases}$$

розв'язками якої є проміжок $[3;+\infty)$.

Врахувавши обидва випадки, отримуємо, що $x\in\{1\}\cup[3;+\infty)$.

Відповідь: $x\in\{1\}\cup[3;+\infty)$.

Задача 2.

I спосіб

Перетворимо задане рівняння наступним чином

$$\Big(1+\cos(3\pi x)\Big)+(x-3)^2=0.$$

Ліва частина рівняння представляє собою суму двох невід'ємних на множині дійсних чисел виразів, а отже дорівнювати нулю вона може лише за умови одночасної рівності нулю доданків. Отже, задане рівняння рівносильне системі двох рівнянь

$$\begin{cases} 1+\cos(3\pi x)=0, \\ (x-3)^2=0, \end{cases}$$

яка має єдиний розв'язок $x=3$.

Відповідь: $x=3$.

II спосіб

Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$x^2-6x+\cos(3\pi x)+10=0.$$

Розглядаючи $\cos(3\pi x)+10$ як параметр будемо розв'язувати квадратне рівняння. Його «половинний» дискримінант

$$D'=9-\cos(3\pi x)-10=-\cos(3\pi x)-1.$$

Оскільки отриманий вираз при всіх дійсних значеннях x є недодатним, то рівняння має розв'язки лише за умови, що $-\cos(3\pi x)-1=0$. За цієї умови розв'язком квадратного рівняння є число 3. Легко впевнитись, що при $x=3$ умова рівності дискримінанта нулю виконується. Отже задане рівняння має єдиний корінь $x=3$.

Відповідь: $x=3$.

Задача 3.

I спосіб

Задане рівняння рівносильне наступній сукупності двох систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1, \\ x = a \end{cases} \\ \begin{cases} x < 1, \\ x = -a \end{cases} \end{array}\right.$$

Легко бачити, що при $a = 1$ розв'язків немає, а от при $a = 1$ умова задачі виконується. Крім того отримана сукупність буде мати єдиний розв'язок за умови, що $|a| < 1$. Таким чином, умова задачі виконується при $a \in (-1; 1]$.

Відповідь: $a \in (-1; 1]$.

II спосіб

Розв'яжемо задане рівняння графічним методом.

Побудуємо графік функції

$$y = \frac{x-1}{|x-1|} \cdot x,$$

розглянувши цю функцію на різних проміжках

$$y = \begin{cases} x, & x > 1 \\ -x, & x < 1 \end{cases}$$

Побудуємо графік функції $y = a$. Це рівняння задає сукупність прямих, паралельних до осі Ox.

Очевидно, що побудовані графіки функцій мають одну точку перетину при $a \in (-1; 1]$.

Відповідь: $a \in (-1; 1]$.

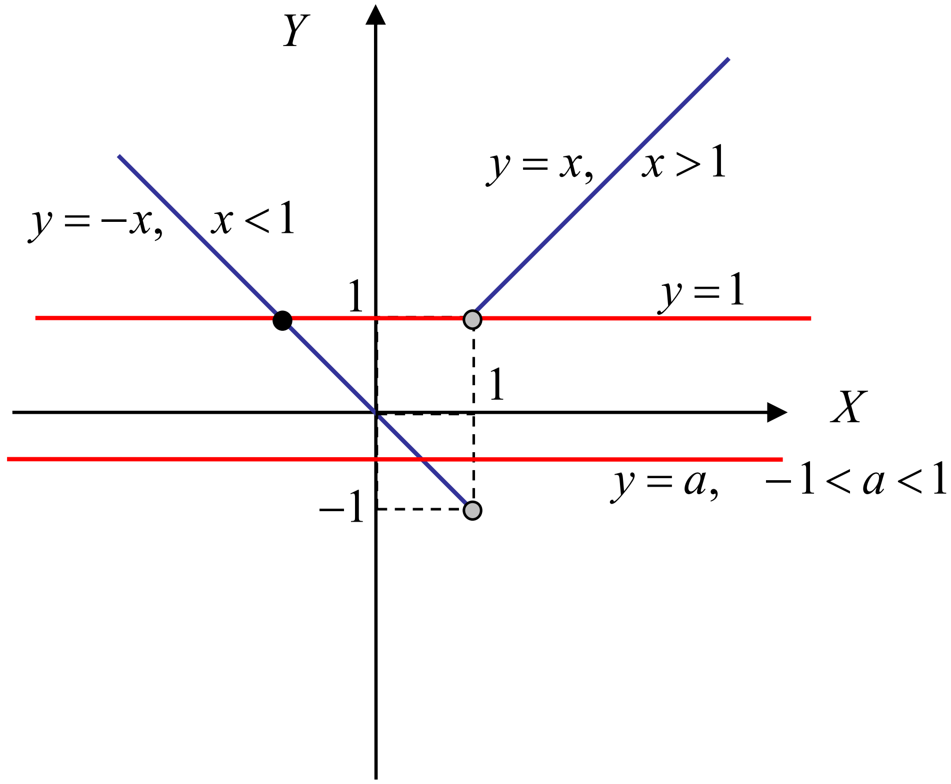


Рис. 15: до задачі 3

Задача 4.

Розглянемо кілька складених функцій, утворених функцією f при $x = 2$.

$f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$;

$f(f(2)) = f(5) = 3 \cdot 5 - 3 = 12$;

$f(f(f(2))) = f(f(5)) = f(12) = 14 - 12 = 2$.

Отриманий результат свідчить про те, що значення функції циклічно повторюються через кожні три знаки функції. Оскільки при діленні на 3 числа 2014 отримується остача 1, то значення заданої функції буде таке ж саме як $f(5) = 12$.

Відповідь: 12.

Задача 5.

I спосіб – *«за допомогою теореми косинусів»*

Легко бачити, що заданий трикутник буде різностороннім, а отже у ньому всі кути різні. Усі кути бути меншими або рівними 60^0 бути не можуть, бо тоді сума всіх кутів трикутника виявиться меншою за 180^0. Отже міра хоча б одного кута такого трикутника буде більшою, ніж 60^0.
Доведемо, що такий кут буде лише один.

Оскільки сторони трикутника утворюють арифметичну прогресію, то виразимо його сторони наступним чином $a; a+d; a+2d$. Тоді кут більший за 60^0 буде лежати навпроти найбільшої сторони, тобто навпроти сторони $a+2d$. Для доведення твердження задачі досить довести, що кут α, що лежить навпроти сторони $a+d$ буде меншим, ніж 60^0. Для цього запишемо теорему косинусів для сторони $a+d$. Отримуємо

$$(a+d)^2 = a^2 + (a+2d)^2 - 2a(a+2d)\cos\alpha.$$

Звідси отримуємо, що

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + a^2 + 4ad + 4d^2 - a^2 - 2ad - d^2}{2a(a+2d)} = \frac{a^2 + 2ad + 3d^2}{2a(a+2d)}.$$

Порівняємо отриманий вираз з косинусом 60^0 визначивши знак різниці

$$\frac{a^2 + 2ad + 3d^2}{2a(a+2d)} - \frac{1}{2} = \frac{a^2 + 2ad + 3d^2 - a^2 - 2ad}{2a(a+2d)} = \frac{3d^2}{2a(a+2d)}.$$

Очевидно, що отриманий вираз є додатнім, а це означає, що $\cos\alpha > \frac{1}{2}$ а отже $\alpha < 60^0$ що й треба було довести.

II спосіб

1. Нехай ABC — даний трикутник, в якому: $BC = a$, $AC = a + d$, $AB = a + 2d$ ($a > 0, d > 0$); β — градусна міра кута B, а BL — бісектриса кута ABC (L — її основа). Тоді (за визначенням бісектриси кута) $\angle ABL = \angle LBC = \dfrac{\beta}{2}$.

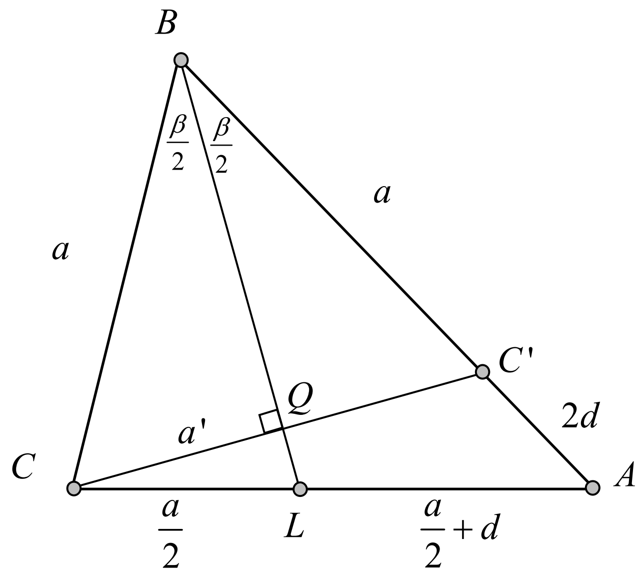


Рис. 16: до II способу розв'язання задачі 5

2. За припущенням L — основа бісектриси кута ABC. Тому (за властивістю основи бісектриси кута трикутника) має місце відношення

$$\frac{CL}{LA} = \frac{CB}{AB} = \frac{a}{a+2d}, \quad \text{звідки} \quad \frac{CL}{CA} = \frac{a}{2(a+d)}.$$

Згідно введених позначень $AC = a + d$. Тому, з урахуванням останнього відношення, мають місце рівності $CL = \frac{a}{2}, \quad LA = \frac{a}{2} + d$.

3. Нехай далі $CC' \perp BL$, $C' \in AB$, $Q = BL \cap CC'$. Оскільки BQ є бісектрисою і висотою $\triangle\ BCC'$, то $\triangle\ BCC'$ є рівнобедреним з основою CC'. Звідки $BC' = a$. Згідно введених позначень $BA = a + 2d$. Тому (як наслідок з аксіоми вимірювання відрізків) $C'A = 2d$. Крім того, оскільки C' — внутрішня точка відрізка BA, то Q — внутрішня точка відрізка BL.

4. З прямокутного $\triangle\ CQL$ (за наслідком з теореми Піфагора) маємо, що $CQ = a' < \frac{a}{2}$. З прямокутного $\triangle\ CQB$ (за визначенням синуса гострого кута прямокутного трикутника) маємо, що

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{CQ}{CB} = \frac{a'}{a} < \frac{1}{2},$$

звідки $\frac{\beta}{2} < 30^0$, і тому $\angle ABC = 2\beta < 60^0$. Крім того, оскільки $\angle CBQ < 30^0$, то $\angle BCQ > 60^0$. І тому $\angle BCA = \angle BCQ + \angle QCA > 60^0$.

Більше того, оскільки $BC = a < a + d = CA$, то за наслідком з теореми синусів маємо, що $\angle CAB < \angle CBA < 60^0$. □

ДОПОВНЕННЯ до задачі 5.

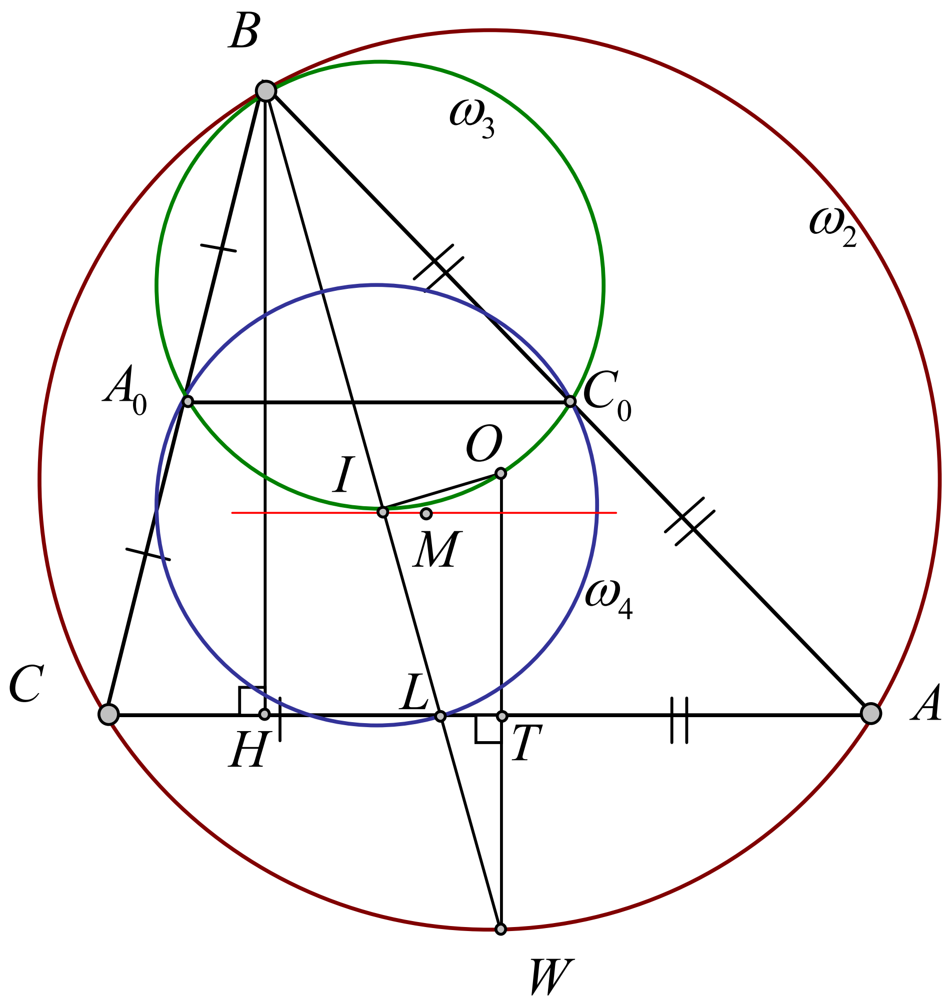


Рис. 17: до властивостей різницевих трикутників

Введемо наступні **позначення**:

I — центр кола ω_1, вписаного у трикутник ABC;

r — радіус кола ω_1;

O — центр кола ω_2, описаного навколо трикутника ABC;

A_0, C_0 — середини сторін BC і AB відповідно;

M — центр тяжіння трикутника (точка перетину медіан);

BL — бісектриса кута B трикутника ABC, L — її основа;

W — точка перетину променя BI та кола ω_2;

BH — висота трикутника ABC, H — її основа;

h_b — довжина висоти BH;

T — основа перпендикуляра, опущеного з точки W на сторону AC.

1. Властивості різницевих трикутників

Доведіть, що в різницевому трикутнику ABC:

1.1) $BT = AC$;

1.2) $AL = \frac{1}{2}AB$, $CL = \frac{1}{2}CB$;

1.3) вершина B, центри O, I та точки C_0 і A_0 належать колу ω_3;

1.4) пряма MI є дотичною до кола ω_3;

1.5) точка I є центром кола ω_4, описаного навколо трикутника A_0LC_0;

1.6) синуси внутрішніх його кутів утворюють арифметичну прогресію;

1.7) котангенси половинних кутів утворюють арифметичну прогресію;

1.8) добуток котангенсів половинних більшого і меншого кутів дорівнює 3;

1.9) різницею арифметичної прогресії, члени якої виражають довжини сторін **прямокутного** трикутника, є радіус r його вписаного кола;

1.10) в «**египетському**» трикутнику ABC (з прямим кутом C та меншим катетом BC) кут $\angle BOI = 45^0$.

2. Критерії «різницевості» трикутника

Трикутник ABC є різницевим ($2AC = AB + BC$) тоді і лише тоді, коли виконується одна з наступних умов:

2.1) $\frac{BI}{IL} = \frac{2}{1}$;

2.2) $BI = IW$;

2.3) $r = \frac{1}{3} \cdot h_b$;

2.4) пряма IM є паралельною до сторони AC;

2.5) сторона AC перетинає відрізок IW в його середині;

2.6) бісектриса середнього за величиною кута є перпендикулярною до лінії центрів OI;

2.7) середина сторони та основа висоти, проведеної до цієї сторони, є симетричними відносно точки дотику цієї ж сторони і вписаного кола;

2.8) висота трикутника дорівнює радіусу зовнівписаного кола, що дотикається сторони, до якої проведено висоту;

2.9) точка дотику зовнівписаного кола зі стороною трикутника та основа висоти, проведеної до цієї сторони, є симетричними відносно основи бісектриси, проведеної до цієї сторони.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. Апостолова Г. В. Перші зустрічі з параметрами / Г. В. Апостолова. – К. : Факт, 2004. – 328 с.
2. Апостолова Г. В. Хитромудрий модуль / Г. В. Апостолова. – К. : Факт, 2006. – 256 с.
3. Апостолова Г. В. Антьє і мантиса числа / Г.В. Апостолова, В.В. Ясінський. – К. : Факт, 2006. – 128 с.
4. Основы теории делимости чисел. Решение уравнений в целых числах. Факультативный курс /[В. В. Бардушкин, И. Б. Кожухов, А. А. Прокофьев, Т. П. Фадеичева.] – Москва : МГИЭТ (ТУ), 2003. – 224 с.
5. Березина Л. Ю. Графы и их применение : [пособие для учителей] / Л. Ю. Березина. – М. : Просвещение, 1979. – 143 с.
6. Бродский Я. С. Функциональные уравнения / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. – К. : Вища школа. Головное изд-во, 1983. – 96 с.
7. Виленкин Н. Я. Индукция. Комбинаторика : [пособие для учителей] / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1976. – 48 с.
8. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами : [учебное пособие для учащихся 7-11 кл.] / Е. В. Галкин. – Челябинск : Взгляд, 2005. – 271 с.
9. Германович П. Ю. Сборник задач по математике на сообразительность : [пособие для учителей] / П. Ю. Германович. – М. : Учпедгиз, 1960. – 224 с.
10. Голубев В. И. Решение сложных и нестандартных задач по математике / В. И. Голубев. – М : ИЛЕКСА, 2007. – 252 с.
11. Головина Л. И. Индукция в геометрии / Л. И. Головина, И. М. Яглом. – М. : Физматгиз, 1961. – 101 с.
12. Гончарова І. В. Евристики в геометрії [факультативний курс: книга для вчителя] / І. В. Гончарова, О.І. Скафа. – Х. : Основа, 2004. – 112 с.
13. Горнштейн П. И. Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – К. : Текст; ОКО, 1992. – 290 с.
14. Дзигіна Л. Б. Програма підготовки учнів до участі в математичних олімпіадах / Л. Б. Дзигіна. // Математика в школах України: Науково-методичний журнал, – Харків : Основа, 2009. – № 16/18. – 89 с.
15. Екимова М. А. Задачи на разрезание / М. А. Екимова, Г. П. Кукин. – М. : МЦНМО, 2002. – 122 с.

16. Канель-Белов А. Я. Как решают нестандартные задачи / А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи. ; под ред. В. О. Бугаенко. – [4-е изд.] – испр. М. : МЦНМО, 2008. – 96 с.
17. Козко А. И. Задачи с параметром и другие сложные задачи / А. И. Козко, В. Г. Чирский. – М. : МЦНМО, 2007. – 296с.
18. Линдгрен Г. Занимательные задачи на разрезание : пер. с англ. / Ю. Н. Сударева. под ред. и с послесл. И. М. Яглома. – М. : Мир, 1977. – 256 с.
19. Летчиков А. В. Принцип Дирихле. Задачи с указаниями и решениями / А. В. Летчиков. – Ижевск : Удмуртский университет, 1992. – 108 с.
20. Ліпчевський Л. В. Розв'язування нерівностей. Нестандартні способи доведення нерівностей [навчально-методичний посібник] / Л. В. Ліпчевський, У. В. Остапчук. – Біла Церква : КОІПОПК, 2004. – 76 с.
21. Мельников О. И. Занимательные задачи по теории графов / О. И. Мельников. – Минск: ТетраСистемс, 2001. – 144 с.
22. Алгебра : [підручник для 8-х класів з поглибленим вивченням математики] / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2008. – 368 с.
23. Мерзляк А. Г. Геометрія : [підручник для 8-х класів з поглибленим вивченням математики] / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. – Х. : Гімназія, 2008. – 240 с.
24. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии: в 2 ч. / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1991.
25. Задачі з параметрами / В. К. Репета, Н. О. Клешня, М. В. Коробова, Л. А. Репета. – К. : Вища школа, 2006. – 302 с.
26. Седракян Н. М. Неравенства. Методы доказательства / Н. М. Седракян, А. М. Авоян; [пер. с арм. Г. В. Григоряна] – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.
27. Шаповалов А. В. Принцип узких мест / А. В. Шаповалов. – М. : МЦНМО, 2006. – 24 с.
28. Шень А. Игры и стратегии с точки зрения математики / А. Шень. – М. : МЦНМО, 2007. – 40 с.
29. Шень А. Математическая индукция / А. Шень. – 3-е изд., дополн. – М. : МЦНМО, 2007. – 32 с.
30. Ясінський В. Теорія лишків та її застосування до розв'язування олімпіадних задач / В. Ясінський. – Математика в школі: Науково-методичний журнал. – 2009. – № 1/2. – 40, [35] с.
31. Ясінський В. Принцип Штурма та його використання під час розв'язування олімпіадних екстремальних задач / В. Ясінський, Л. Наконечна. – Математика в школі: Науково-методичний журнал. – 2009. – № 9. – 40, [33] с.
32. Ясінський В. А. Олімпіадна математика: функціональні рівняння, метод математичної індукції / В. А. Ясінський. – Х. : Основа, 2005. – 69 с.

Математичні олімпіади і турніри в Україні

33. Вышенский В. А. Сборник задач киевских математических олимпиад / В. А. Вышенский, Н. В. Карташев, В. И. Михайловский, М. И. Ядренко. – К. : Вища школа, 1984. – 240 с.
34. Вишенський В. А. Київські математичні олімпіади 1984-1993 рр. : [збірник задач] / В. А. Вишенський, М. В. Карташов. – К. : Либідь, 1993. – 144 с.
35. Вишенський В. А. Українські математичні олімпіади : [довідник] / В. А. Вишенський, О. Г. Ганюшкін. – К. : Вища школа, 1993. – 415 с.
36. Лейфура В. М. Математичні олімпіади школярів України. 1991-2000 / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман. – К. : Техніка, 2003. – 541 с.
37. Федак І. В. Готуємося до олімпіади з математики : [посібник для ЗНЗ] / І. В. Федак. – Чернівці, 2003.
38. Басанько А. М. За лаштунками підручника з математики : [збірник розвиваючих задач для учнів 5 – 7 класів] / А. М. Басанько, А. О. Романенко. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004.
39. Коваль Т. В. 400 задач з математичних олімпіад. 8-11 класи / Т. В. Коваль. – Тернопіль : Мандрівець, 2004. – 80 с.
40. Лейфура В. М. Змагання юних математиків України. 2003 рік / В. М. Лейфура. – Х. : Основа, 2004. – 80 с.
41. Ясінський В. А. Олімпіадні задачі [випуск 1: навчальний посібник] / В. А. Ясінський. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2004. – 40 с.
42. Сборник материалов математических олимпиад: 906 самых интересных задач и примеров с решениями / [Р. И. Довбыш, Л. Л. Потемкина, Н. Л. Трегуб и др.] – Донецк: ООО ПКФ «БАО», 2005. – 336 с.
43. Лось В. М. Математика: навчаємо міркувати. Розв'язування нестандартних задач : [навч. посібник] / В. М. Лось, В. П. Тихієнко. – К. : Кондор, 2005 – 312 с.
44. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч : [навчальний посібник] / О. А. Сарана – К. : А.С.К., 2005. – 344 с.
45. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання / В. А. Ясінський. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2005. – 208 с.
46. Ясінський В. А. Практикум з розв'язування задач математичних олімпіад : [методический материал] / В. А. Ясінський. // Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2006. – 128 с.
47. Готуємось до олімпіади з математики / упорядн. А. Б. Веліховська, О. В. Гримайло. // Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2007. – Вип. 2 (50) – 160 с.
48. Вороний О. М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 1] / О. М. Вороний. – Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 5 (65). – 128 с.

49. Вороний О. М. Готуємось до олімпіади з математики [книга 2] / О. М. Вороний.– Бібліотека журналу «Математика в школах України» – Х. : Основа, 2008. – Вип. 6 (66). – 141, [3] с.
50. Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2006-2007 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман. – К. : Літера, 2008. – 135 с.
51. Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів. 2006-2007 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман. – К. : Літера, 2008. – 224 с.
52. Анікушин А. В. Всеукраїнські математичні бої – 2009 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман; за ред. Б. В. Рубльова. – Дніпропетровськ: Інновація, 2010. – 96 с.
53. Анікушин А. В. Математичні олімпіадні змагання школярів України. 2007-2008 та 2008 – 2009 / А. В. Анікушин, А. Р. Арман; за ред. Б. В. Рубльова. – Львів: Каменяр, 2010. – 552 с.

Математичні олімпіади і турніри в Росії

54. Агаханов Н. Х. Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006. Окружной и финальный этапы / Н. Х. Агаханов. – М. : МЦНМО, 2007. – 468 с.
55. Агаханов Н. Х. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 1 / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.; под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М. : Просвещение, 2008. – 192 с.
56. Математика. Областные олимпиады. 8-11 классы / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.]. – М. : Просвещение, 2010. – 239с.
57. Агаханов Н. Х. Математика. Всероссийские олимпиады. Вып. 2 / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский; [под общ. ред. С. И. Демидовой, И. И. Колисниченко]. – М. : Просвещение, 2009. – 159 с.
58. Агаханов Н. Х. Математика. Районные олимпиады. 6-11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. – М. : Просвещение, 2010. – 192 с.
59. Агаханов Н. Х. Математика. Международные олимпиады / Н.Х. Агаханов, П. А. Кожевников, Д. А. Терешин. – М. : Просвещение, 2010. – 127 с.
60. Балаян Э. Н. 1001 олимпиадная и занимательная задачи по математике / Э. Н. Балаян. – 3-е изд. – Ростов н/Д: Феникс, 2008. – 364 с.
61. Весенний Турнир Архимеда. Олимпиада для 5-6 классов. Задания с решениями, технология проведения / [Баранова Т. А., Блинков А. Д., Кочетков К. П. и др.]. – М. : МЦНМО, 2003. – 128 с.
62. Болтянский В. Г. Сборник задач московских математических олимпиад / В. Г. Болтянский, А. А. Леман. – М. : Просвещение, 1965. – 384 с.
63. Бончковский Р. Н. Московские математические олимпиады 1935 и 1936 годов / Р. Н. Бончковский. – ОНТИ НКТП СССР, 1936. – 82 с.
64. Вавилов В. В. Задачи отборочных математических олимпиад / В. В. Вавилов. – М. : МГУ, 1992. – 61 с.
65. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Алгебра: [учебное пособие для учащихся 7-11 кл] / Е. В. Галкин. – Челябинск: Взгляд, 2004. – 448 с.

66. Гальперин Г. А. Московские математические олимпиады / Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго. – М. : Просвещение, 1986. – 303с.
67. Генкин С. А. Ленинградские математические кружки / С. А. Генкин, И. В. Итенберг, Д. В. Фомин. – Киров: Аса, 1994. – 272 с.
68. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике / Н. В. Горбачев. – М. : МЦНМО, 2005. – 560 с.
69. Егоров А. А. Олимпиады «Интеллектуальный марафон». Математика / А. А. Егоров, Ж. М. Раббот . – М. : Бюро Квантум, 2006. – (Библиотечка «Квант»)
70. Зубелевич Г. И. Сборник задач московских математических олимпиад (с решениями): [Пособие для учителей 5-8 классов.] // под редакцией К. П. Сикорского, изд. 2-е, переработ. / Г. И. Зубелевич. – М. : Просвещение, 1971. – 304 с.
71. Математика в задачах: Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / [под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова]. – М. : МЦНМО, 2009. – 488 с.
72. Московские математические регаты / [сост. А. Д. Блинков, Е. С. Горская, В. М. Гуровиц]. – М. : МЦНМО, 2007. – 360 с.
73. Олимпиада «Ломоносов» по математике (2005-2008). – М. : Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008. – 48 с.
74. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. / [Федоров Р. М., Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К., Ященко И. В.] / [под ред. В. М. Тихомирова]. – М. : МЦНМО, 2006. – 456 с.
75. Севрюков П. Ф. Подготовка к решению олимпиадных задач по математике / П. Ф. Севрюков. – Изд. 2-е. – М. : Илекса; Народное образование; Ставрополь : Сервисшкола, 2009. – 112 с.
76. Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике / А. В. Спивак. – М. : Просвещение, 2002. – 208 с.
77. Фомин А. А. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. – М. : Дрофа, 2006. – 159 с.
78. Фомин Д. В. Санкт-Петербургские математические олимпиады / Д. В. Фомин. – СПб. : Политехника, 1994. – 309 с.
79. Ященко И. В. Приглашение на математический праздник / И. В. Ященко. – М. : МЦНМО, 2005. – 104 с.
80. Олимпиадные задания по математике. 9-11 классы: решение олимпиадных задач повышенной сложности / [сост. В. А. Шеховцов]. – Волгоград: Учитель, 2009. – 99 с.

Математичні олімпіади за часів СРСР

81. Агаханов Н. Х. Математические олимпиады школьников / Н. Х. Агаханов, Л. П. Купцов, Ю. В. Нестеренок. – М. : Просвещение: Учеб. лит., 1997. – 208 с.
82. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад / И. Л. Бабинская. – М. : Наука, 1975. – 112 с.
83. Бугулов Е. А. Сборник задач для подготовки к математическим олимпиадам / Е. А. Бугулов, Б. А. Толасов. – Орджоникидзе, 1962. – 226 с.
84. Васильев Н. Б. Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М. : Учпедгиз, 1963. – 53 с.
85. Васильев Н. Б. Заочные математические олимпиады / Н. Б. Васильев, В. Л. Гуттенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. Тоом. – [2-е изд.]. – М. : Наука, 1987. – 176 с.
86. Васильев Н. Б. Задачи всесоюзных математических олимпиад / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М. : Наука, 1988. – 288 с.
87. Петраков И. С. Математические олимпиады школьников: [пособие для учителей] / И. С. Петраков. – М. : Просвещение, 1982. – 96 с.
88. Рябухин Ю. М. Кишиневские математические олимпиады / Ю. М. Рябухин, В. П. Солтан, Б. И. Чиник. – Кишинев: Штиинца, 1983. – 76 с.
89. Савин А. П. Физико-математические олимпиады: [сборник] / А. П. Савин. – М. : Знание, 1977. – 160 с.
90. Шустеф Ф. М. Сборник олимпиадных задач по математике / [под ред. Ф. М. Шустеф] / Ф. М. Шустеф, А. М. Фельдман, В. Ю. Гуревич. – Минск: Государственное учебно-педагогическое издательство Министерства просвещения БССР, 1962. – 84 с.

Міжнародні та закордонні математичні олімпіади

91. Берник В. И. Сборник олимпиадных задач по математике / В. И. Берник, И. К. Жук, О. В. Мельников. – М. : Нар. асвета, 1980. – 144 с.
92. Васильев Н. Б. Задачи Всесоюзных математических олимпиад / Н. Б. Васильев, А. А. Егоров. – М. : Наука, 1988. – 288 с.
93. Конягин С. В. Зарубежные математические олимпиады / [под ред. И. Н. Сергеева] / С. В. Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – (Б-ка мат. кружка). – 416 с.
94. Венгерские математические олимпиады. [пер. с венг. Ю. А. Данилова. под ред. и с предисл. В. М. Алексеева] / Й. Кюршак, Д. Нейкомм, Д. Хайош, Я. Шурани. – М. : Мир, 1976. – 543 с.
95. Лейфура В. М. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман. – Львів: Євро світ, 1999. – 128 с.
96. Морозова Е. А. Международные математические олимпиады. Задачи, решения, итоги : пособие для учащихся / Е. А. Морозова, И. С. Петраков, В. А. Скворцов. – [4-е изд., испр. и доп]. – М. : Просвещение, 1976. – 288 с.

97. Страшевич С. Польские математические олимпиады / С. Страшевич, Е. Бровкин; предисл, А. Пелчинского и А. Шинцеля; пер. с польск. Ю. А. Данилова; под ред. В.М. Алексеева. – М. : Мир, 1978. – 338 с.
98. Школьные олимпиады. Международные математические олимпиады / [сост. А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова]. – М. : Дрофа, 1998. – 160 с.

Internet ресурси

1. Київські олімпіади з математики (сайт київських та всеукраїнських олімпіад та турнірів з математики, де можна знайти тексти завдань, результати та умови проведення математичних змагань, що проходили в Україні протягом останніх років) [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://matholymp.org.ua/
2. Фізико-математичний журнал «Квант» (завдання різних математичних олімпіад за 1971-2002рр) [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://kvant.mirror1.mccme.ru/
3. Сайт міжнародних олімпіад з математики [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.imo-official.org/
4. Олимпиады для школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://olimpiada.ru/
5. Всероссийская олимпиада по математике [Електронний ресурс]. – Режим доступа: math.rusolymp.ru/
6. Российская страница международного математического конкурса «Кенгуру» [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://mathkang.ru/
7. Українська сторінка міжнародного конкурсу «Кенгуру» [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.kangaroo.com.ua/index.php
8. Московская математическая олимпиада школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://olympiads.mccme.ru/mmo/
9. Санкт-Петербургские математические олимпиады [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.pdmi.ras.ru/ olymp/
10. Турнир городов Международная математическая олимпиада для школьников [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.turgor.ru/
11. Сайт Московского Центра Непрерывного Математического Образования [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://www.mccme.ru/
12. Задачная база олимпиадных задач (декілька тисяч олімпіадних задач російських і міжнародних математичних змагань). [Електронний ресурс]. – Режим доступа: http://zaba.ru/, http://problems.ru/