ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ І НАУКИ
ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ ДЕРЖАВНОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ
ЧЕРКАСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ІНСТИТУТ ПІСЛЯДИПЛОМНОЇ ОСВІТИ ПЕДАГОГІЧНИХ
ПРАЦІВНИКІВ ЧЕРКАСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ РАДИ

**Шляхи підвищення якості
природничо-математичної освіти**

**Р.Л.Барвінок,
О.М.Козлова**

Готуємося до математичних олімпіад та конкурсів разом

Черкаси
2013

АВТОРИ:

***Барвінок Р.Л.**,* учитель математики Черкаського фізико-математичного ліцею Черкаської міської ради, вища кваліфікаційна категорія, учитель-методист;

Козлова О.М., методист математики ЧОІПОПП

РЕЦЕНЗЕНТИ:

Коломієць О.М., доцент Черкаського національного університету імені Богдана Хмельницького;

Ходоровська С.І., учитель математики Кам'янської загальноосвітньої школи І-ІІІ ступенів № 1 Кам'янської районної ради.

Основна мета посібника – ознайомити учнів 8-9 класів з найбільш поширеними методами розв'язування олімпіадних задач з вибраних тем: «Основи теорії подільності», «Діофантові рівняння», «Доведення нерівностей», «Методи обчислення сум». У посібнику також представлено добірку усіх задач, що пропонувалися на районних (міських) олімпіадах з математики з 1998 по 2012 рік.

Даний матеріал призначений для використання на уроках, факультативах, гуртках, курсах за вибором.

Рекомендовано до друку вченою радою ЧОІПОПП.

Протокол № 1 від 05.03.2013 р.

Зміст

Передмова

«Що означає оволодіти математикою? – писав відомий педагог математик Д. Пойа. – Це насамперед навчитися розв’язувати задачі, причому не тільки стандартні, але й такі, що потребують певної належності мислення, здорового глузду, оригінальності, винахідливості».

У пропонованому посібнику подаються задачі, переважно творчого характеру, які допоможуть підготувати учнів 8-9 класів, які цікавляться математикою, до шкільних, районних(міських) та обласних олімпіад. Посібник містить на п’ять розділів: основи теорії подільності; діофантові рівняння; доведення нерівностей; методи обчислення сум та умови усіх завдань II етапу Всеукраїнських учнівських олімпіад з математики у Черкаській області за період з 1998 по 2012 рік.

Серед різноманітних типів олімпіадних задач практично в кожній олімпіаді є задачі з даних тем. Тому кожний вчитель математики і учень, який готується до олімпіади, мають бути ознайомлені з типами задач, що пропонуються в посібнику.

Виклад теоретичного матеріалу чотирьох запропонованих тем завершується прикладами розв’язування задач з цієї теми, а також вміщено багато задач для самостійного розв’язання. В посібнику подано умови завдань районних (міських) математичних олімпіад для того, щоб учні і вчителі, по-перше, мали ці завдання, а також бачили ступінь їх складності, щоб допомогти учням успішно підготуватися до нових змагань.

Ефективність математичних задач значною мірою залежить від творчої активності учнів у процесі їх розв’язування. Саме тому задачі в запропонованому посібнику дібрано так, щоб створити проблемну ситуацію, збудити творчу думку учнів, змусити її працювати, розвиватися, удосконалюватися.

Посібник покликаний допомогти вчителю в організації позаурочної роботи з учнями, які бажають досконало, поглиблено і всебічно вивчити шкільну математику, розширити їх математичний світогляд, підготуватись до участі у математичних олімпіадах та інших математичних змаганнях. Він буде корисний учням, які захоплюються математикою.

ТЕМА 1. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ПОДІЛЬНОСТІ

В процесі проведення позакласної роботи з математики учнів необхідно ознайомити з основними методами розв’язування олімпіадних задач. Велике місце серед них займають задачі на подільність. Практично в кожній олімпіаді є задачі цього типу.

Взагалі, в олімпіадних задачах, задачі, пов’язані з цілими числами займають чи не найпершу позицію. Задачі на цілі числа надзвичайно різноманітні. Розглянемо основні типи задач на подільність та методи їх розв’язування.

Теоретичний і практичний матеріал, необхідний для розв’язування завдань на подільність

Означення. *Ціле число а ділиться на ціле число в* $(в \neq 0)$, *якщо існує таке ціле с, що а=вс.*

Означення. *Натуральне число* p *називається* ***простим***, *якщо в нього тільки два натуральних дільники – 1 і саме число* p. *Прості числа - 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43, … Загальний вираз простих чисел, більших за 3, є* $6n \pm 1$, *де* $n \in N$.

Означення. Натуральне число називається складеним, якщо воно має більше двох натуральних дільників.

Означення. *Найбільшим спільним дільником НСД двох або декількох натуральних чисел називається найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне з даних чисел.*

Означення. *Найменшим спільним кратним НСК двох або декількох натуральних чисел називається найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з даних чисел.*

Означення. ***Взаємно прості числа*** *— натуральні або цілі числа, які не мають спільних дільників більших за 1, або, інакше кажучи, якщо їх найбільший спільний дільник дорівнює 1. Таким чином, 2 і 3 — взаємно прості, а 2 і 4 — ні (діляться на 2). Будь-яке натуральне число взаємно просте з 1. Якщо р — просте, а n — довільне ціле число, то вони взаємно прості тоді і тільки тоді, коли n не ділиться на р.*

Ознаки подільності

1. *Якщо остання цифра числа ділиться на 2 (парна), то число ділиться на 2.*
2. *Якщо остання цифра числа 0 або 5, то число ділиться на 5.*
3. *Якщо число закінчується на к нулів, то воно ділиться на* $10^к$.
4. *Якщо число, виражене двома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 4 то і число а ділиться на 4.*
5. *Якщо число, виражене трьома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 8 то і число а ділиться на 8.*
6. *Якщо сума цифр числа а ділиться на 3, то число а ділиться на 3.*
7. *Якщо сума цифр числа а ділиться на 9, то число а ділиться на 9.*
8. *Якщо різниця між сумою цифр, що стоять на непарних місцях числа а (рахуючи справа наліво), і сумою цифр, що стоять на парних місцях, ділиться на 11, то число а ділиться на 11.*
9. *Якщо число, виражене двома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 25 то і число а ділиться на 25.*

10. Якщо число, виражене трьома останніми цифрами даного числа а, ділиться на 125 то і число а ділиться на 125.

11. Щоб дізнатися, чи ділиться число а на 7, 11, 13 треба розбити його справа наліво на трицифрові грані, знайти суму Р граней, що стоять на парних місцях, і суму А граней, що стоять на непарних місцях, і якщо (Р-А) ділиться на 7, 11, 13, то і число а ділиться на 7, 11 13.

Властивості подільності цілих чисел

1. Якщо $a \vdots в$ і к – будь яке число, то $ка \vdots в$.

2. Якщо $a \vdots в$ і $в \vdots c$, то $a \vdots c$.

3. Якщо $a \vdots к$ і $в \vdots p$, то $ав \vdots кр$.

4. Якщо $a \vdots к$ і $в \vdots к$, то $(a \pm в) \vdots к$.

5. Якщо $a \vdots к$, $в \vdots к$ і с та р – будь-які числа, то $(ac \pm вр) \vdots к$.

*6. Якщо $a \vdots к$ і $a \vdots p$, причому **к і р – взаємно прості**, то $a \vdots кр$.*

Властивості простих дільників натуральних чисел

1. Будь-яке натуральне число (більше за одиницю) або ділиться на дане просте число р, або є взаємно простим з ним.

2. Якщо добуток кількох співмножників ділиться на просте число р, то принаймні один із співмножників ділиться на р.

3. Найменший простий дільник складеного числа а не перевищує $\sqrt{a}$.

Приклад 1. Найменший простий дільник числа 143 дорівнює 11, причому $11 < \sqrt{143} \approx 11{,}96$.

***Наслідок.** Якщо задане число q не ділиться на жодне з простих чисел 2, 3, 5,..., р , де $p \le \sqrt{q}$, то це число q - просте.*

Приклад. Нехай $q = 113$, тоді $\sqrt{113} \approx 10$. Усі прості числа $p \le \sqrt{113}$ - це 2, 3, 5, 7. Оскільки 113 не ділиться на жодне з цих простих чисел, то воно саме є простим.

Потрібно запам'ятати

1. З k послідовних чисел $m+1$, $m+2$,..., $m+k$ одне і тільки одне ділиться на k.

2. Добуток $(m+1)(m+2)\cdot\ldots\cdot(m+k) \vdots k!$.

3. Загальний вираз простих чисел, більших за 3, є $6n \pm 1$.

4. Остача при діленні квадрата натурального числа на 3 дорівнює 0 або 1.

5. Остача при діленні квадрата натурального числа на 4 дорівнює 0 або 1.

6. Остача при діленні квадрата непарного натурального числа на 8 дорівнює 1.

7. Остача при діленні куба натурального числа на 9 дорівнює 0, 1 та 8.

8. Остача при діленні n^4 на 5, де $n \in Z$ дорівнює 0 або 1.

9. Якщо квадрат цілого числа ділиться на просте число р , то ділиться і на p^2.

10. Якщо, n - просте і $n > 3$, то $(n^2-1)\vdots 24$.

Приклад 2. Доведіть, що значення виразу $10^{2013}+8$ ділиться націло на 9.

Розв'язання. Запис значення виразу 10^{2013} складається з цифри 1 і дві тисячі тринадцяти цифр 0, а запис значення виразу $10^{2013}+8$ - з цифри 1, цифри 8 і дві тисячі дванадцяти цифр 0. За ознакою подільності на 9, початкове число націло ділиться на 9.

Приклад 3. Довести, що $2^{2011}+3^{2011}$ ділиться на 5.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Використаємо наслідок з теореми Безу, що $в^{2n-1}+a^{2n-1}$ ділиться без остачі на в+а. Отже, вираз $2^{2011}+3^{2011}$ ділиться без остачі на 2+3=5.

2 спосіб. Використаємо формулу

$a^n+b^n=(a+в)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...-ab^{n-2}+b^{n-1})$, де n – непарне натуральне число. Маємо: $2^{2011}+3^{2011}=(2+3)(2^{2010}-2^{2009}\cdot 3+2^{2008}\cdot 3^2-...-2\cdot 3^{2009}+3^{2010})=5A$, де А – числове значення другого множника. Отже, вираз $2^{2011}+3^{2011}$ ділиться без остачі на 5.

3 спосіб. Легко дослідити, що останні цифри виразу 2^n повторюються і будуть 2, 4, 8, 6, отже $2^{2011}=2^{4n+3}$ закінчується цифрою 8. Останні цифри виразу 3^n повторюються і будуть 3, 9, 7, 1, отже $3^{2011}=3^{4n+3}$ закінчується цифрою 7. Отже, вираз $2^{2011}+3^{2011}$ закінчується цифрою 5. За ознакою подільності на 5, початковий вираз націло ділиться на 5.

Приклад 4. Відомо, що $(16a+17в)(17a+16в)\vdots 11$ при деяких цілих а і в. Довести, що даний добуток націло ділиться на 121.

Розв'язання. Так як даний добуток ділиться на просте число 11, то один із множників націло ділиться на 11. Розглянемо суму двох виразів $(16a+17в)+(17a+16в)=33a+33в=33(a+в)$, яка націло ділиться на 11. Якщо сума ділиться на 11 і один з доданків ділиться на 11, то і другий доданок ділиться на 11. Отже, вираз $(16a+17в)(17a+16в)\vdots 121$.

Приклад 5. Відомо, що $(3x+7y)\vdots 19$ при умові, що $x, y \in Z$. Довести, що $(43x+75y)\vdots 19$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення $43x+75y=8(3x+7y)+19x+19y$. Вираз $8(3x+7y)\vdots 19$ з умови, $19x$ і $19y$ кратне 19, отже і $(43x+75y)\vdots 19$.

Приклад 6. Довести, що вираз $3^1+3^2+3^3+...+3^{100}$ ділиться націло на 120.

Розв'язання. $3^1+3^2+3^3+...+3^{100}=(3^1+3^2)+(3^3+3^4)+...+(3^{97}+3^{98})+(3^{99}+3^{100})=$

$$=3(1+3)+3^3(1+3)+...+3^{97}(1+3)+3^{99}(1+3)=4(3+3^3+3^5+...+3^{97}+3^{99})=$$

$$=4(3(1+3^2)+3^5(1+3^2)+...+3^{93}(1+3^2)+3^{97}(1+3^2))=$$

$$=4\cdot 10\cdot(3+3^5+...+3^{93}+3^{97})=120\cdot(1+3^4+...+3^{92}+3^{96}).$$

Отже, початковий вираз націло ділиться на 120.

Приклад 7. Знайдіть усі такі p, щоб числа p, $p+10$ та $p+14$ були простими.

Розв'язання. Щоб числа були простими, то p не ділиться на 3. Якщо $p = 3n+1$, то $p+14$ ділиться на 3, якщо $p = 3n+2$, то $p+10$ ділиться на 3. Тому єдине значення, що задовольняє умову задачі – це $p = 3$.

Приклад 8. Чи існують чотири послідовних натуральних числа, кожне з яких можна подати у вигляді суми двох квадратів.

Розв'язання. Розглянемо остачі при діленні на 4. Квадрат натурального числа може давати остачу 0 або 1. Сума квадратів – 0, 1, 2. Серед чотирьох послідовних натуральних чисел знайдеться таке, що має остачу 3. Воно у суму двох квадратів не розкладається. Значить таких чисел не існує.

Приклад 9. Шестидесятизначне число записане за допомогою 30 нулів і 30 одиниць. Чи можна це число представити у вигляді квадрата натурального числа.

Розв'язання. За ознаками подільності дане число ділиться на 3, але не ділиться на $9 = 3^2$. Ми знаємо, що якщо квадрат цілого числа ділиться на p, то ділиться і на p^2. Тому наше число не можна представити у вигляді квадрата натурального числа.

Приклад 10. p - просте число більше 3. Відомо, що при деякому n p^n має 20 цифр. Довести, що серед них є хоча б три однакових.

Розв'язання. Припустимо, що серед 20 цифр числа p^n не має однакових, тоді p^n складається із цифр 0,0,1,1,2,2,…,9,9. Сума цих цифр дорівнює 90, а значить p^n кратне 3 – просте число, тому і p кратне 3. Отримали протиріччя, бо за умовою задачі p - просте число і більше 3.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що сума двох послідовних натуральних чисел не ділиться на 2.
2. Доведіть, що сума трьох послідовних парних чисел ділиться на 6.
3. Доведіть, що сума будь-яких п'яти послідовних цілих чисел ділиться на 5.
4. Доведіть, що сума чотирьох послідовних парних чисел не ділиться на 8.
5. Якою цифрою закінчується число: $24^{23}+3^{23}+10^{23}$, 2^{4n+1}, 3^{4n+1}, 4^{2n+1}.
6. Доведіть, що сума чотирьох послідовних натуральних степенів числа 3 кратна 120.
7. Скільки серед перших десяти тисяч чисел таких, які закінчуються одиницею і можуть бути подані у вигляді 8^n+5^n.
8. Доведіть, що число $3^{2012}+104$ ділиться на 5.
9. Доведіть, що число $2007^{2012}+99$ ділиться на 10.
10. Доведіть, що число $1024^{1024}-1$ ділиться на 5.
11. Доведіть, що число 2009^4-2009^3 ділиться на 2008.
12. Чи ділиться сума натуральних чисел від 1 до 1000 на 143.
13. Що більше: 9^{60} чи 80^{30}; 45^4 чи 4^{12}; 3^{303} чи 2^{454}; 48^{25} чи 344^{17}.
14. Доведіть, що сума $2+2^3+2^5+...+2^{97}+2^{99}$ ділиться на 5.
15. Доведіть, що сума $2+2^2+2^3+...+2^{51}+2^{52}$ ділиться на 30.

16. Якою цифрою закінчується число $2007 + 2007^2 + 2007^3 + ... + 2007^{100}$.

17. Обчисліть $2^{2012} - 2^{2011} - 2^{2010} - ... - 2^2 - 2 - 1$.

18. Відомо, що натуральні числа m і n такі, що значення виразу $10m + n$ ділиться націло на 11. Доведіть, що значення виразу $(10m + n)(10n + m)$ ділиться націло на 121.

19. Відомо, що $(2x + 3y) \vdots 17$, якщо $x, y \in Z$. Доведіть, що $(9x + 5y) \vdots 17$.

20. Знайдіть усі натуральні значення n, при яких значення кожного з виразів n-2, n+24, n+26 є простим числом.

21. Цілі числа x і y такі, що $(6x + 11y) \vdots 31$. Доведіть, що $(x + 7y) \vdots 31$.

22. Числа x і y такі, що $(3x + 10y) \vdots 13$. Доведіть, що $(3x + 10y)(3y + 10x) \vdots 169$.

Перестановки цифр у числах

Приклад 11. У тризначному числі закреслили останню цифру нуль, і воно зменшилось на 405. Яке число отримали?

Розв'язання. Нехай $\overline{ав0}$ дане тризначне число, тоді $\overline{ав}$ двозначне число, що утворилось при закресленні нуля. За умовою задачі отримуємо рівняння:

$$\overline{ав0} = \overline{ав} + 405,$$
$$100а + 10в = 10а + в + 405,$$
$$90а + 9в = 405,$$
$$9(10а + в) = 405,$$
$$9 \cdot \overline{ав} = 405,$$
$$\overline{ав} = 45.$$

Відповідь:45.

Приклад 12. Цифра десятків двозначного числа втричі більше за цифру одиниць. Якщо ці цифри поміняти місцями, то отримане число буде меншим від даного на 54. Знайдіть дане число?

Розв'язання. Нехай $\overline{ав}$ дане двозначне число. За умовою а=3в.

Складаємо рівняння $\overline{ав} = \overline{ва} + 54$,

$$10а + в = 10в + а + 54,$$
$$9а - 9в = 54,$$

Підставимо в останню рівність, що $а = 3в$, маємо:

$$27в - 9в = 54,$$
$$18в = 54,$$
$$в = 3,$$

тоді а=9 і шукане число 93.

Відповідь: 93.

Приклад 13. У шестицифровому числі перша цифра збігається з четвертою, друга - з п'ятою, третя – з шостою. Доведіть, що це число ділиться на 7, 11, 13.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Нехай $\overline{авсавс}$ - шукане шестицифрове число. Виконаємо перетворення

$$\overline{авсавс} = 100000а + 10000в + 1000с + 100а + 10в + с =$$
$$= 100100а + 10010в + 1001с = 1001(100а + 10в + с) = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{авс}.$$

Отже, шестицифрове число ділиться на 7, 11, 13.

2 спосіб. Нехай $\overline{авсавс}$ - шукане шестицифрове число. Застосуємо ознаку подільності на 7, 11, 13. Розбиваємо число справа наліво на трицифрові грані, знаходимо суму Р граней, що стоять на парних місцях – це $\overline{авс}$, і суму А граней, що стоять на непарних місцях – це $\overline{авс}$, тоді $P - A = \overline{авс} - \overline{авс} = 0$ ділиться на 7, 11, 13, то і число $\overline{авсавс}$ ділиться на 7, 11 13.

Приклад 14. Чи може різниця двох трьохзначних чисел, із яких друге записане тими ж цифрами, що й перше, але в оберненому порядку бути квадратом натурального числа.

Розв'язання. За умовою задачі $\overline{авс} - \overline{сва} = x^2$, де $a, c, x \in N$, $b \in Z$ і $0 < a \le 9$, $0 \le b \le 9$, $0 < c \le 9$.

Маємо $100a + 10b + c - 100c - 10b - a = x^2$, $99a - 99c = x^2$, $9 \cdot 11 \cdot (a - c) = x^2$, значить $x^2 \vdots 11$, але x^2 не кратне 121, бо $a - c < a < 11$. Отже, різниця двох трьохзначних чисел, із яких друге записане тими ж цифрами, що й перше, але в оберненому порядку не може бути квадратом натурального числа.

Приклад 15. Скільки послідовних натуральних чисел, починаючи з 1 потрібно додати, щоб отримати трьохзначне число, записане однаковими цифрами.

Розв'язання. За умовою задачі складаємо рівність $1 + 2 + 3 + ... + n = \overline{aaa}$, де $0 < a \le 9$. Тоді $\frac{n(n+1)}{2} = 111a$, $n(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a$. Так як 3 і 37 прості числа, то n або $n+1$ кратне 3 або 37. Якщо n кратне 37, то $n + 1 = 38$, а тоді $n(n+1)$ не кратне 3, тому такий варіант не підходить. Якщо $n+1$ кратне 37, $n = 36$. Маємо $36 \cdot 37 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a$, $a = 6$. Отже послідовних чисел потрібно взяти 36.

Приклад 16. Знайдіть двоцифрове число, квадрат якого записаний цифрами 0, 2, 3, 5.

Розв'язання. Нехай х шукане двозначне число. Квадрат числа х не може закінчуватися на 2 або 3, тому остання цифра 0 або 5. Значить $x^2 \vdots 5$, тоді і $x^2 \vdots 25$. За ознакою подільності на 25 дві останні цифри числа x^2 будуть 25 або 50. Але 50 не може бути, бо тоді $x^2 \vdots 10$, а значить і $x^2 \vdots 100$ і тоді останні дві цифри числа x^2 будуть 00, а це суперечить умові задачі. Отже, цифри числа x^2 можуть бути записані тільки як 3025, шукане число тоді 55.

Приклад 17. Знайдіть трицифрові числа сума яких з числом записаним тими ж цифрами, але в оберненому порядку кратна 68.

Розв'язання. Припустимо, що $\overline{авс}$ - шукане число.

Розглянемо $\overline{авс} + \overline{сва} = 100а + 10в + с + 100с + 10в + а = 101(а + с) + 20в$, вираз $101(а + с) + 20в$ кратний $68 = 17 \cdot 4$. Так, як $20в \vdots 4$, а 101 не кратне 4, то $(а + с) \vdots 4$. Виділимо вираз, який ділиться на 17. $101(а + с) + 20в = 102(а + с) + 17в + 3в - а - с \equiv 3в - а - с (\mathrm{mod} 17)$, тобто $(3в - с - а) \vdots 17$. Так, як а, в, с - цифри, то $0 \le 3в \le 27$, $0 < a \le 9$, $0 < c \le 9$, а значить $-18 \le 3в - а - с \le 27$, $0 < a + c \le 18$. Переберемо всі можливі значення.

1) Якщо $3в - а - с = 3в - (а + с) = 17$, то можливі наступні випадки:

а) $a + c = 4$, тоді $3в - 4 = 17$, $3в = 21$, $в = 7$. Отже, одержуємо такі числа 272, 371, 173.

б) $a + c = 8$, тоді $3в - 8 = 17$, $3в = 25$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв’язків.

в) $a + c = 12$, тоді $3в - 12 = 17$, $3в = 29$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв’язків.

г) $a + c = 16$, тоді $3в - 16 = 17$, $3в = 33$, в=11, але $0 \le в \le 9$. Отже, такий варіант не дає шуканого результату.

2) Якщо $3в - а - с = 3в - (а + с) = 0$, то можливі наступні випадки:

а) $a + c = 4$, тоді $3в - 4 = 0$, $3в = 4$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв’язків.

б) $a + c = 8$, тоді $3в - 8 = 0$, $3в = 8$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв’язків.

в) $a + c = 12$, тоді $3в - 12 = 0$, $в = 4$. Отже, одержуємо такі числа 349, 943, 448, 844, 547, 745, 646.

г) $a + c = 16$, тоді $3в - 16 = 0$, $3в = 16$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв’язків.

3) Якщо $3в - а - с = 3в - (а + с) = -17$, то можливі наступні випадки:

а) $a + c = 4$, тоді $3в - 4 = -17$, $3в = -13$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв’язків.

б) $a + c = 8$, тоді $3в - 8 = -17$, $3в = -9$, в=-3, але $0 \le в \le 9$. Отже, такий варіант не дає шуканого результату.

в) $a + c = 12$, тоді $3в - 12 = -17$, $3в = -5$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв’язків.

г) $a + c = 16$, тоді $3в - 16 = -17$, $3в = -1$. Отже, рівняння в цілих числах не має розв’язків.

Відповідь: 272, 371, 173, 349, 943, 448, 844, 547, 745, 646.

Завдання для самостійного розв’язання

1. Доведіть, що сума чисел $\overline{ав}$ і $\overline{ва}$ кратна 11.

2. Доведіть, що сума чисел $\overline{авс}$, $\overline{вса}$, $\overline{сав}$ кратна 111.

3. Доведіть, що різниця чисел $\overline{авс}$, $\overline{сва}$ кратна 99.

4. Якщо до двозначного числа дописати праворуч нуль, то воно збільшиться на 207. Знайдіть дане число.

5. У трицифровому числі закреслили останню цифру нуль, і воно зменшилося на 405. Яке число отримали.

6. Сума двох чисел дорівнює 353. Одне з чисел закінчується 1. Якщо цю цифру закреслити то отримаємо друге число. Знайдіть ці числа?

7. Цифра десятків двозначного числа втричі більше за цифру одиниць. Якщо ці цифри поміняти місцями, то отримане число буде меншим від даного на 54. Знайдіть дане число.

8. Цифра десятків двозначного числа вдвічі менше за цифру одиниць. Якщо ці цифри поміняти місцями, то отримане число буде більшим від даного на 27. Знайдіть дане число.

9. Сума двох цифр а і в ділиться на 7. Доведіть, що $\overline{ава}$ ділиться на 7.

10. До деякого двоцифрового числа ліворуч і праворуч дописали цифру 1. У результаті отримали число, яке в 21 раз більше за дане. Знайдіть дане двоцифрове число.

11. Цифру 9, із якої починається трицифрове число, написали в кінці числа. Нове число на 216 менше, ніж початкове. Яке було початкове число.

12. Перша цифра шестизначного числа 1. Якщо цю цифру переставити на останнє місце, то число збільшиться в 3 рази. Знайти початкове число.

13. Учень задумав два двозначних числа, які починаються цифрою 6. Якщо переставити в кожному числі цифри місцями, то значення добутків цих чисел будуть рівними. Які числа задумав учень.

14. Учень задумав двозначне число, відняв від нього двозначне число записане цифрами в оберненому порядку і отримав квадрат парного числа. Учень порахував, що різниця ділиться на 36. Знайти всі можливі числа, які відповідають умові задачі.

15. Знайти двозначне число, подвоєна сума цифр якого дорівнює їх добутку.

Ділення з остачею. Метод остач

До цього типу задач будемо відносити ті, в яких ділене є многочленом від цілої або натуральної змінної. При застосуванні методу остач поліном краще розкласти на множники.

Теорема. *Для будь-якого цілого числа а і натурального числа* n *існує єдина пара цілих чисел q і r таких, що* $a = nq + r$, *де* $0 \le r < n$. *Таким чином, остача може набирати значень* $0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1$, *всього* n *випадків. Метод остач полягає у розгляданні кожного випадку окремо. При цьому для цілих змінних будуть відповідно представлення* $x = nk$, $x = nk+1, \ldots,$ $x = nk + (n-1)$. *Розглядання окремо цих випадків часто дає можливість просто розв'язати задачу.*

Теорема. *Якщо а при діленні на* n *має остачу* r_1, *а в – остачу* r_2, *то число а+в при діленні на* n *дає таку саму остачу, як і число* $r_1 + r_2$, *число а-в при діленні на* n *дає таку саму остачу, як і число* $r_1 - r_2$, *ав – таку саму, як* $r_1 r_2$.

Наслідок. *Якщо а при діленні на* n *дає остачу* r, *то* a^m, $m \in N$ *дає при діленні на* n *таку саму остачу, як і число* r^m.

Приклад 18. Запишіть загальну формулу числа, яке при діленні на 6 і 8 дає в остачі 5.

Розв'язання. Нехай є число n. З умови задачі $n = 6m + 5$, $n = 8p + 5$, тоді $n - 5 = 6m$ і $n - 5 = 8p$ - означає, що вираз $n - 5$ ділиться націло на 6 і 8, а значить на 24. Отже, $n = 24c + 5$, де $c \in N$.

Приклад 19. В шафі стоять книги. Якщо їх взяти по 4, по 5 або по 6, то кожного разу залишиться одна книга, а якщо взяти по 7 книг, то зайвих книг не залишиться. Яка кількість книг в шафі, якщо їх не більше 400.

Розв'язання. Нехай в шафі стоїть х книг. З умови задачі робимо висновок, що $x - 1$ кратне 4, 5, 6, а x кратне 7 при умові, що $0 < x \le 400$. Тоді $x - 1 = 60n$, $n \in Z$ і $x = 60n + 1$

кратне 7, де $0 < x \le 400$. Перебираючи значення $n = 0,1,2,3,4,5,6$, знаходимо, що $n = 5$. Шукане число книг 301.

Приклад 20. Знайдіть найменше натуральне число, яке при діленні на 2 дає остачу 1, при діленні на 3 – 2, на 4 – 3, на 5 – 4, на 6 – 5, на 7 – 6, на 8 – 7, на 9 – 8, на 10 – 9.

Розв'язання. Нехай х шукане число. З умови задачі:

1) $x = 2n_1 + 1$, $x + 1 = 2n_1 + 2$, отже $(x+1)\vdots 2$; 2) $x = 3n_2 + 2$, $x + 1 = 3n_2 + 3$, отже $(x+1)\vdots 3$;

3) $x = 4n_3 + 3$, $x + 1 = 4n_3 + 4$, отже $(x+1)\vdots 4$; 4) $x = 5n_4 + 4$, $x + 1 = 5n_4 + 5$, отже $(x+1)\vdots 5$;

5) $x = 6n_5 + 5$, $x + 1 = 6n_5 + 6$, отже $(x+1)\vdots 6$; 6) $x = 7n_6 + 6$, $x + 1 = 7n_6 + 7$, отже $(x+1)\vdots 7$;

7) $x = 8n_7 + 7$, $x + 1 = 8n_7 + 8$, отже $(x+1)\vdots 8$; 8) $x = 9n_8 + 8$, $x + 1 = 9n_8 + 9$, отже $(x+1)\vdots 9$;

9) $x = 10n_9 + 9$, $x + 1 = 10n_9 + 10$, отже $(x+1)\vdots 10$. Таким чином, $x + 1$ кратне числам 2,3,4,5,6,7,8,9,10, отже $x + 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$, а $x = 2519$.

Приклад 21. Доведіть, що при діленні простого числа на 30 в остачі отримаємо просте число або 1.

Розв'язання. Нехай х – просте число, де $x = 30n + r$ і $0 \le r < 30$. Всі складені числа до 30 мають в якості найменшого натурального дільника одне з чисел 2; 3; 5. Тому якщо, r складене, то х ділиться на одне з чисел 2; 3; 5, будучи більше, чим це число. Отримали протиріччя, що х – просте число.

Приклад 22. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні *n* вираз $\left(n^3 + 2n\right)\vdots 3$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Використаємо метод остач. Винесемо спільний множник за дужки $n^3 + 2n = n\left(n^2 + 2\right)$. Розглянемо три випадки:

1) Нехай число *n* кратне 3, тоді зрозуміло, що вираз $n\left(n^2 + 2\right)\vdots 3$.

2) Нехай число *n* при діленні на 3 дає в остачі 1, тобто $n = 3m + 1$, де $m \in N$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= n\left(n^2 + 2\right) = (3m+1)\left((3m+1)^2 + 2\right) = \\ &= (3m+1)\left(9m^2 + 6m + 3\right) = 3(3m+1)\left(3m^2 + 2m + 1\right), \end{aligned}$$

останній вираз націло ділиться на 3.

3) Нехай число *n* при діленні на 3 дає в остачі 2, тобто $n = 3m + 2$, де $m \in N$. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} n^3 + 2n &= n\left(n^2 + 2\right) = (3m+2)\left((3m+2)^2 + 2\right) = \\ &= (3m+2)\left(9m^2 + 12m + 6\right) = 3(3m+2)\left(3m^2 + 4m + 2\right), \end{aligned}$$

останній вираз націло ділиться на 3.

Розглянувши всі випадки робимо висновок, що вираз $\left(n^3 + 2n\right)\vdots 3$.

2 спосіб. Виконаємо деякі перетворення

$n^3+2n=n^3-n+3n=n(n^2-1)+3n=n(n-1)(n+1)+3n$. Вираз $n(n-1)(n+1)$ - це добуток трьох послідовних натуральних чисел, одне з яких кратне 3, а вираз $3n$ – кратний 3, тоді і їхня сума націло ділиться на 3. Отже, вираз $(n^3+2n)\vdots 3$.

Приклад 23. Довести, що для $n\in N$ вираз n^3-3n^2+2n ділиться націло на 6.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Розкладемо вираз на множники:

$$n^3-3n^2+2n=n(n^2-3n+2)=n(n^2-2n-n+2)=$$
$$=n(n(n-2)-(n-2))=(n-2)(n-1)n.$$

Ми отримали добуток трьох послідовних натуральних чисел, який кратний 6.

2 спосіб. Застосуємо метод остач. Так, як $6=2\cdot 3$ і $НСД(2;3)=1$, то окремо будемо доводити подільність на 2 і 3. Позначимо $B=n^3-3n^2+2n=n(n^2-3n+2)=(n-2)(n-1)n.$

1) Для того, щоб вираз ділився на 2 розглядаємо два випадки.

а) Якщо $n=2m$, де $m\in Z$, то $B=(2m-2)(2m-1)2m$ і він кратний 2, бо один із множників 2.

б) Якщо $n=2m+1$, де $m\in Z$, то $B=(2m+1-2)(2m+1-1)(2m+1)=(2m-1)2m(2m+1)$ і він кратний 2, бо один із множників 2.

2) Для того, щоб вираз ділився на 3 розглядаємо три випадки.

а) Якщо $n=3m$, де $m\in Z$, то $B=(3m-2)(3m-1)3m$ і він кратний 3, бо один із множників 3.

б) Якщо $n=3m+1$, де $m\in Z$, то $B=(3m+1-2)(3m+1-1)(3m+1)=(3m-1)3m(3m+1)$ і він кратний 3, бо один із множників 3.

в) Якщо $n=3m+2$, де $m\in Z$, то $B=(3m+2-2)(3m+2-1)(3m+2)=3m(3m+1)(3m+2)$ і він кратний 3, бо один із множників 3.

Так, як вираз n^3-3n^2+2n ділиться націло на 2 і 3, то він ділиться і на 6.

3 спосіб. Застосуємо властивості конгруенції.

1) Доведемо, що вираз $B=n^3-3n^2+2n$ ділиться на 2, для цього розглянемо два випадки.

а) Якщо $n\equiv 0(\bmod 2)$, то $B\equiv 0^3-3\cdot 0^2+2\cdot 0\equiv 0(\bmod 2)$, тобто $B\vdots 2$.

б) Якщо $n\equiv 1(\bmod 2)$, то $B\equiv 1^3-3\cdot 1^2+2\cdot 1\equiv 0(\bmod 2)$, тобто $B\vdots 2$.

1) Доведемо, що вираз $B=n^3-3n^2+2n$ ділиться на 3, для цього розглянемо три випадки.

а) Якщо $n\equiv 0(\bmod 3)$, то $B\equiv 0^3-3\cdot 0^2+2\cdot 0\equiv 0(\bmod 3)$, тобто $B\vdots 3$.

б) Якщо $n\equiv 1(\bmod 3)$, то $B\equiv 1^3-3\cdot 1^2+2\cdot 1\equiv 0(\bmod 3)$, тобто $B\vdots 3$.

в) Якщо $n\equiv 2(\bmod 3)$, то $B\equiv 2^3-3\cdot 2^2+2\cdot 2\equiv 0(\bmod 3)$, тобто $B\vdots 3$.

Так, як вираз n^3-3n^2+2n ділиться націло на 2 і 3, то він ділиться і на 6.

Приклад 24. ***(ключова задача).*** Якщо p - просте число і $p>3$, то $(p^2-1)\vdots 24$.

Розв'язання. Розглянемо чотири послідовних числа $p-1$, p, $p+1$, $p+2$. Серед них два парні, хоча б одне кратне 3 і 4. Так, як p - просте число і $p>3$, а $p+2$ - непарне, то $p-1$ і $p+1$ два послідовних парних числа одне з яких ділиться на 2 інше на 4, а значить $\left(p^2-1\right)\vdots 8$. Зрозуміло, що одне з чисел $p-1$ або $p+1$ кратне 3. Отже, $\left(p^2-1\right)\vdots 24$.

Приклад 25. Якщо p і q - різні прості числа, які більші 3, то $\left(p^2-q^2\right)\vdots 24$.

Розв'язання. Вираз $p^2-q^2=\left(p^2-1\right)-\left(q^2-1\right)$, а далі розв'язується, як попередня задача.

Приклад 26. Доведіть, що серед будь-яких 2012 натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 2011.

Розв'язання. При діленні на 2011 можливі 2011 різних остач – 0, 1, 2,…, 2010. А ми маємо 2012 чисел серед яких хоча б у двох остачі будуть рівними, тому їх різниця ділиться на 2011.

Приклад 27. Було 5 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 5 кусків кожен. Таку операцію розрізування повторили кілька разів. Чи можна в результаті таких операцій отримати 2011 кусків?

Розв'язання. Розрізання одного аркуша паперу на 5 частин збільшує кількість кусків на 4. Нехай розрізань було n, тоді після n розрізань буде $4n+5$, де $n\in N$. Припустимо, що $4n+5=2011$, тоді $4n=2006$. Так, як 2006 не ділиться націло на 4, то 2011 кусків отримати не можна.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Остача при діленні натурального числа m на 6 дорівнює 5, а остача при діленні натурального числа n на 4 дорівнює 2. Доведіть, що значення виразу $2m+3n$ ділиться націло на 4 і не ділиться націло на 12.

2. Остача при діленні натурального числа m на 3 дорівнює 1, а остача при діленні натурального числа n на 9 дорівнює 7. Доведіть, що значення виразу $4m+2n$ ділиться націло на 3.

3. Запишіть загальну формулу числа, яке при діленні на 4 і 3 дають в остачі 1.

4. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні n вираз n^5-5n^3+4n кратний 120.

5. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз:

1) n^2+3n кратний 2; 2) n^3+5n кратний 3;

3) n^3+11n кратний 6; 4) n^3+3n^2+2n кратний 6.

6. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні n вираз n^9-n^5 кратний 30.

7. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $n^4-2n^3+11n^2-10n$ кратний 24.

8. Доведіть, що при будь-якому цілому значенні n вираз $2n^6-n^4-n^2$ кратний 6.

9. Доведіть, що серед будь-яких 6 натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 5.

10. Доведіть, що серед будь-яких 12 натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 11.

11. Доведіть, що серед будь-яких 101 натуральних чисел можна вибрати два, різниця яких ділиться на 100.

12. Було 4 аркушів паперу. Деякі з них розрізали на 4 кусків кожен. Таку операцію розрізування

повторили кілька разів. Чи можна в результаті таких операцій отримати 2000 кусків?

13. Маємо листок паперу. Розрізаємо його на 4 частини, а потім деякі з них ще на 4 частини. Таку операцію розрізування повторили кілька разів. Чи можна в результаті таких операцій отримати 50 частин?

Алгоритм Евкліда

Для знаходження НСД пари натуральних чисел (а;в) робимо так:

1. *ділимо а на в і отримуємо остачу* r *;*
2. *ділимо в на* r *і отримуємо остачу* r_1 *;*
3. *ділимо* r *на* r_1 *і отримуємо остачу* r_2 *і так робимо до тих пір, поки деяке число* r_n *не поділиться на* r_{n+1}. *Число* r_{n+1} *- називають НСД(а;в).*

Тобто: $НСД(a;в) = НСД(в;r) = НСД(r;r_1) = ... = НСД(r_n;r_{n+1}) = r_{n+1}$.

Теорема. *Якщо* $a > b$, *то* $НСД(a;в) = НСД(a-в;в)$.

Зв'язок між НСД і НСК двох чисел а і в

$НСД(a;в)\cdot НСК(a;в) = ав$ *- добуток НСД і НСК двох натуральних чисел дорівнює добутку цих чисел.*

З даної рівності можна знайти НСК двох чисел а і в.

Приклад 28. Скоротіть дріб $\frac{2147}{1577}$.

Розв’язання. Знайдемо НСД чисел 2147 і 1577 застосувавши алгоритм Евкліда.

$2147 = 1577\cdot 1 + 570$, $1577 = 570\cdot 2 + 437$, $570 = 437\cdot 1 + 133$,

$437 = 133\cdot 3 + 38$, $133 = 38\cdot 3 + 19$, $38 = 19\cdot 2$.

Отже, $НСД(2147;1577) = 19$, тому $\frac{2147}{1577} = \frac{19\cdot 113}{19\cdot 87} = \frac{113}{87}$.

Приклад 29. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні *n* дріб $\frac{12n+1}{30n+2}$ буде нескоротним.

Розв’язання. Застосуємо відому теорему, якщо $a > b$, то $НСД(a;в) = НСД(a-в;в)$. Маємо:

$$НСД(30n+2;12n+1) = НСД(18n+1;12n+1) = НСД(12n+1;6n) =$$
$$= НСД(6n+1;6n) = НСД(6n;1) = 1,$$

а значить дріб нескоротний, бо найбільший спільний дільник чисельника і знаменника дорівнює 1, тобто числа $12n+1$ і $30n+2$ взаємно прості. *Дане завдання можна зробити за допомогою алгоритму Евкліда.*

Теорема. *Найбільший спільний дільник чисел* a *і* $в$ *можна виразити через числа a і в у вигляді* $ax+by$*, де* $x;y\in Z$.

Приклад 30. Запишемо НСД чисел $a=2147$ і $в=1577$ у вигляді $ax+by$*, де* $x;y\in Z$.

Розв'язання. Використавши алгоритм Евкліда отримаємо рівності:

1) $2147=1577\cdot 1+570$, тоді $570=2147-1577\cdot 1$;

2) $1577=570\cdot 2+437$, тоді $437=1577-570\cdot 2$;

3) $570=437\cdot 1+133$, тоді $133=570-437\cdot 1$;

4) $437=133\cdot 3+38$, тоді $38=437-133\cdot 3$;

5) $133=38\cdot 3+19$, тоді $19=133-38\cdot 3$.

6) $38=19\cdot 2$.

Отже,
$$НСД(2147;1577)=19=133-3\cdot 38=133-3\cdot(437-133\cdot 3)=133-3\cdot 437+9\cdot 133=$$
$$=10\cdot 133-3\cdot 437=10\cdot(570-1\cdot 437)-3\cdot 437=$$
$$=10\cdot 570-10\cdot 437-3\cdot 437=10\cdot 570-13\cdot 437=10\cdot 570-13\cdot(1577-2\cdot 570)=$$
$$=10\cdot 570-13\cdot 1577+26\cdot 570=36\cdot 570-13\cdot 1577=36\cdot(2147-1\cdot 1577)-13\cdot 1577=$$
$$=36\cdot 2147-36\cdot 1577-13\cdot 1577=36\cdot 2147-49\cdot 1577.$$

Таким чином, $НСД(a;в)=НСД(2147;1577)=19=ax+by=2147\cdot 36-1577\cdot 49$, де $x=36$, а $y=-49$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Скоротіть дроби: $\frac{525}{231}, \frac{253}{299}, \frac{2491}{2773}, \frac{899}{1073}, \frac{4757}{5561}$.

2. Знайдіть: $НСД(6n+3,3n)$, $НСД(n+1,n)$, $НСД(8n+4,4n)$, $НСД(2n+13,n+7)$, $НСД(8n+7,2n+1)$.

3. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n дроби будуть нескоротними:

$$\frac{4n+3}{20n+23}, \qquad \frac{3n+1}{15n+14}, \qquad \frac{16n+1}{40n+2}.$$

4. Записати НСД чисел a і $в$ у вигляді $ax+by$*, де* $x;y\in Z$*:*

1) $a=546$ і $в=231$; 2) $a=299$ і $в=253$;

3) $a=899$ і $в=1073$; 4) $a=2773$ і $в=2491$.

Основна теорема теорії подільності

Будь-яке натуральне число, більше за одиницю, можна розкласти в добуток простих чисел, причому цей розклад єдиний з точністю до порядку співмножників $a=p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\ldots\cdot p_n$*, де* $p_1,p_2,p_3,..,p_n$ *- прості числа. Запис* $a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ *-* ***канонічний розклад числа а****, де* $p_1,p_2,p_3,..,p_n$ *- прості числа, а* $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,..,\alpha_n$ *- натуральні числа.*

Обчислення кількості усіх дільників числа а

Якщо $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$ *- канонічний розклад числа а, де* $p_1, p_2, p_3, .., p_n$ *- прості числа, а* $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, .., \alpha_n$ *- натуральні числа, то натуральними дільниками числа а будуть лише числа* $в = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot p_n^{\beta_n}$, *де* $0 \le \beta_1 \le \alpha_1$, $0 \le \beta_2 \le \alpha_2$, $0 \le \beta_3 \le \alpha_3, \ldots,$ $0 \le \beta_n \le \alpha_n$. ***Кількість усіх дільників числа а дорівнює*** $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n + 1)$.

Приклад 31. Скільки натуральних дільників має число 120.

Розв'язання. Канонічний розклад числа $120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3}$, де $0 \le \beta_1 \le 3$, $0 \le \beta_2 \le 1$, $0 \le \beta_3 \le 1$. Кількість дільників числа 120 дорівнює кількості наборів, які можна скласти з чисел β_1, β_2, β_3. Число β_1 можна вибрати 3+1=4 способами, число β_2 - 1+1=2 способами, число β_3 - 1+1=2 способами. Отже, за узагальненим правилом добутку зазначений набір можна вибрати $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ способами. Тому дане число має 16 дільників.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Скільки різних натуральних дільників мають числа: 240, 360, 1080, 1024, $2^4 \cdot 3^6 \cdot 5^3$, $3^5 \cdot 5^8 \cdot 7^2$.

Конгруенції та їхні властивості. Теорема Ейлера і мала теорема Ферма

Теорема. *Якщо цілі числа а і в при діленні на натуральне число т дають однакові остачі, то* $(a - в) \vdots m$.

Теорема. *Якщо цілі числа а і в такі, що* $(a - в) \vdots m$, *де т – натуральне число, то числа а і в дають однакові остачі при діленні на т.*

Означення. *Цілі числа а і в називаються конгруентними за модулем т* $(m \in N)$, *якщо остачі при діленні їх на число т рівні. Пишуть* $a \equiv в$ *(mod т) – читають а конгруентне в за модулем т. Приклад:* $7 \equiv 10$ *(mod 3),* $11 \equiv -1$ *(mod 3),* $12 \equiv 0$ *(mod 6).*

Теорема. *Для того щоб цілі числа а і в були конгруентними за модулем т, де* $m \in N$, *необхідно й достатньо, щоб різниця а-в ділилася націло на т.*

Властивості конгруенцій (а, в, с, d – цілі числа, т і п – натуральні)

1. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m),* $в \equiv c$ *(mod m), то* $a \equiv c$ *(mod m).*
2. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m), то* $a + c \equiv в + c$ *(mod m).*
3. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m), то* $ac \equiv вc$ *(mod m).*
4. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m) і* $c \equiv d$ *(mod m), то* $a \pm c \equiv b \pm d$ *(mod m).*
5. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m) і* $c \equiv d$ *(mod m), то* $ac \equiv bd$ *(mod m).*
6. *Якщо* $a \equiv в$ *(mod m), то* $a^n \equiv b^n$ *(mod m).*

Приклад 32. Довести, що число $3^{105} + 4^{105}$ кратне 13.

Розв'язання. Застосуємо властивості конгруенцій. Число $105 = 3 \cdot 35$, тому $3^3 = 27 \equiv 1(\text{mod}13)$, $(3^3)^{35} = 3^{105} \equiv 1^{35} = 1(\text{mod}13)$; $4^3 = 64 \equiv -1(\text{mod}13)$, $(4^3)^{35} = 4^{105} \equiv (-1)^{35} = -1(\text{mod}13)$. Додаючи конгруенції, маємо: $3^{105} + 4^{105} \equiv 1 - 1 = 0(\text{mod}13)$.

Отже, число $3^{105}+4^{105}$ кратне 13. *Дане завдання можна було б розв'язати іншими способами, за теоремою Безу, за формулою чи дослідити останню цифру степенів.*

Приклад 33. ***(ключова задача)*** Знайти остачу при діленні числа n^4 на 5, де $n \in Z$.

Розв'язання. При діленні n на 5 можливі наступні випадки: $n \equiv 0(\bmod 5)$, $n \equiv 1(\bmod 5)$, $n \equiv 2(\bmod 5)$, $n \equiv 3(\bmod 5)$, $n \equiv 4(\bmod 5)$. Використаємо властивість конгруенції піднісши кожну конгруенцію до четвертого степеня. Маємо: $n^4 \equiv 0^4 \equiv 0(\bmod 5)$, $n^4 \equiv 1^4 \equiv 1(\bmod 5)$, $n^4 \equiv 16(\bmod 5) \equiv 1(\bmod 5)$, $n^4 \equiv 81(\bmod 5) \equiv 1(\bmod 5)$, $n^4 \equiv 256(\bmod 5) \equiv 1(\bmod 5)$. Отже, при діленні n^4 на 5 можливі остачі 0 або 1.

Приклад 34. Знайти остачу від ділення числа 5^{99} на 3.

Розв'язання. Зрозуміло, що $5^{99}=\left(5^3\right)^{33}=125^{33}$. Використовуючи властивості конгруенцій, маємо: $125 \equiv -1(\bmod 3)$, тоді $125^{33} \equiv (-1)^{33} \equiv -1 \equiv 2(\bmod 3)$.

Приклад 35. Доведіть, що при будь-якому $n \in N$ значення виразу $2^{4n+3}+13\cdot 3^{2n}$ кратне 7. Розв'язання. Використаємо властивості степеня: $2^{4n+3}+13\cdot 3^{2n}=2^3\cdot 2^{4n}+13\cdot 9^n=8\cdot 16^n+13\cdot 9^n$. Застосуємо властивості конгруенцій, маємо: $16 \equiv 2(\bmod 7)$, $9 \equiv 2(\bmod 7)$, тоді $16^n \equiv 2^n(\bmod 7)$ і $9^n \equiv 2^n(\bmod 7)$, $8\cdot 16^n+13\cdot 9^n \equiv 8\cdot 2^n+13\cdot 2^n \equiv 21\cdot 2^n \equiv 0(\bmod 7)$. Отже, значення виразу $2^{4n+3}+13\cdot 3^{2n}$ кратне 7.

Приклад 36. Якою цифрою закінчується число $9999^{999^{999}}$.

Розв'язання. Остання цифра числа утворює число, що є остачею при діленні числа $9999^{999^{999}}$ на 10. Використаємо властивості конгруенцій $9 \equiv -1(\bmod 10)$, $9^2=81 \equiv 1(\bmod 10)$, отже $9^{2n} \equiv 81^n \equiv 1^n \equiv 1(\bmod 10)$, $9^{2n+1} \equiv 9^{2n}\cdot 9 \equiv 1\cdot 9 \equiv 9(\bmod 10)$. Так, як показник степеня 999^{999} - це непарне число, то число остання цифра числа $9999^{999^{999}}$ буде 9.

Приклад 37. Якщо a і $в$ цілі числа, а $n \in N$, то $(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1} \vdots 7$.

Розв'язання. Використаємо властивості конгруенцій $7a+3 \equiv 3(\bmod 7)$, то $(7a+3)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1}(\bmod 7)$, відповідно $25 \equiv -3(\bmod 7)$, $7b+25 \equiv -3(\bmod 7)$, то $(7b+3)^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}(\bmod 7)$. Отже, $(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1} \equiv 3^{2n+1}-3^{2n+1} \equiv 0(\bmod 7)$. Значить $(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1} \vdots 7$.

Приклад 38. Довести, що якщо а і в взаємно-прості з 3, то $a^2+в^2$ не ділиться на 3.

Розв'язання. $НСД(a;3)=1$, $НСД(в;3)=1$, значить $a \equiv \pm 1(\bmod 3)$, $a \equiv \pm 1(\bmod 3)$. Тоді $a^2+в^2 \equiv 1+1 \equiv 2(\bmod 3)$, а значить $a^2+в^2$ не ділиться на 3.

Приклад 39. Довести, що $(a^2+в^2) \vdots 7$, тоді і тільки тоді, коли $a \vdots 7$ і $в \vdots 7$.

Розв'язання. 1) Якщо $a \vdots 7$ і $в \vdots 7$, то $(a^2+в^2) \vdots 7$.

2) Нехай $(a^2+в^2) \vdots 7$ і $a=7n+r_1$, $b=7n+r_2$, де $0 \le r_{1,2} < 7$. Тоді $r_{1,2}$ може набирати наступних значень 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. перебираючи всі можливі випадки, бачимо, що $(a^2+в^2) \vdots 7$ при $r_1=r_2=0$, тобто коли $a \vdots 7$ і $в \vdots 7$.

Теорема Ейлера. *Якщо* $a \in Z$ *і* $n \in N$, $n > 1$ *взаємно прості (НСД$(a;n)=1$), то* $a^{\varphi(n)} \equiv 1(\bmod n)$, *де* $\varphi(n)$ *- функція Ейлера (означає кількість натуральних чисел, які не більші за* n *і взаємно-прості з ним).*

Приклад. $\varphi(10)=4$, *бо є числа 1, 3, 7, 9, що не перевищують 10 і взаємно-прості з 10.*

Обчислити значення функції Ейлера можна, взявши канонічний розклад даного числа: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_m^{\alpha_m}$ ***, то*** $\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_m}\right)$.

За допомогою даної теореми можна легко обчислювати модуль великих степенів.

Приклад 40. Обчислити $7^{222}(\bmod 10)$.

Розв'язання. Маємо, що $НСД(7;10)=1$, *тобто 7 і 10 взаємно-прості числа і* $\varphi(10)=4$, *бо є числа 1, 3, 7, 9, що не перевищують 10 і взаємно-прості з 10. За теоремою Ейлера* $7^4 \equiv 1(\bmod 10)$ *і* $222 = 4\cdot 55 + 2$. *Тому використовуючи властивості конгруенцій маємо:* $(7^4)^{55} \equiv 1^{55}(\bmod 10)$, $7^{220}\cdot 7^2 \equiv 1\cdot 7^2 \equiv 49 \equiv 9(\bmod 10)$. *Отже, остача при діленні числа* 7^{222} на 10 дорівнює 9.

Частковим випадком теореми Ейлера при простому n *є мала теорема Ферма.*

Мала Теорема Ферма. *Нехай* n *- просте число, а – ціле число, що не ділиться на* n. *Тоді* $a^{n-1} \equiv 1(\bmod n)$.

Еквівалентне означення. *Нехай* n *- просте число, а – ціле число, що не ділиться на* n. *Тоді* $a^n - a \equiv 0(\bmod n)$.

Приклад 41. Знайти остачу від ділення числа 3^{102} на 101.

Розв'язання. Так, як число 101 – просте, то за малою теоремою Ферма $3^{101-1} = 3^{100} \equiv 1(\bmod 101)$. Використовуючи властивості конгруенцій маємо: $3^{100}\cdot 3^2 = 3^{102} \equiv 1\cdot 3^2 \equiv 9(\bmod 101)$. Отже, остача від ділення числа 3^{102} на 101 дорівнює 9.

Приклад 42. Доведіть, що коли натуральне число n не ділиться націло на 17, то або $(n^8-1)\vdots 17$, або $(n^8+1)\vdots 17$.

Розв'язання. Так, як число 17 – просте, то за малою теоремою Ферма $n^{17-1} = n^{16} \equiv 1(\bmod 17)$. Використовуючи властивості конгруенцій маємо: $n^{16}-1 \equiv 1-1 \equiv 0(\bmod 17)$, тобто $(n^{16}-1)\vdots 17$, $(n^8-1)(n^8+1)\vdots 17$. Отже, або $(n^8-1)\vdots 17$, або $(n^8+1)\vdots 17$.

Приклад 43. Знайти остачу від ділення числа $\left(86^{143}-31^{547}\right)^{62}$ на 21.

Розв'язання. Застосуємо властивості конгруенцій.

1) Число $86 \equiv 2(\bmod 21)$, тому $86^{143} \equiv 2^{143}(\bmod 21)$. Обчислимо $2^{143}(\bmod 21)$: $НСД(2;21)=1$, *тобто 2 і* $21 = 3\cdot 7$ *взаємно-прості числа і* $\varphi(21) = 21\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 21\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7} = 12$. *За теоремою Ейлера* $2^{12} \equiv 1(\bmod 21)$. *Використовуючи*

властивості конгруенцій маємо: $(2^{12})^{12}=2^{144}\equiv 1^{12}=1(\mathrm{mod}\,21)$, $2^{144}\equiv 1+21=22(\mathrm{mod}\,21)$, *тоді* $2^{143}\equiv 11(\mathrm{mod}\,21)$. *Отже, остача при діленні числа* 86^{143} на 21 дорівнює 11.

2) Число $31\equiv 10(\mathrm{mod}\,21)$, тому $31^{547}\equiv 10^{547}(\mathrm{mod}\,21)$. Обчислимо $10^{547}(\mathrm{mod}\,21)$: *НСД*$(10;21)=1$, *тобто 10 і* $21=3\cdot 7$ *взаємно-прості числа і* $\varphi(21)=21\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)=21\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}=12$. *За теоремою Ейлера* $10^{12}\equiv 1(\mathrm{mod}\,21)$, *а* $547=12\cdot 45+7$. *Використовуючи властивості конгруенцій маємо:* $(10^{12})^{45}=10^{540}\equiv 1^{45}=1(\mathrm{mod}\,21)$, $10^{540}\cdot 10^{7}\equiv 1\cdot 10^{7}=10^{7}(\mathrm{mod}\,21)$, *тоді* $10^{2}=100\equiv -5(\mathrm{mod}\,21)$, $(10^{2})^{3}=10^{6}\equiv(-5)^{3}=-125=1(\mathrm{mod}\,21)$, $10^{7}\equiv 10(\mathrm{mod}\,21)$. *Отже,* $31^{547}\equiv 10(\mathrm{mod}\,21)$ *остача при діленні числа* 31^{547} на 21 дорівнює 10.

3) Таким чином, $86^{143}-31^{547}\equiv 11-10=1$, *отже* $\left(86^{143}-31^{547}\right)^{62}\equiv 1^{62}=1(\mathrm{mod}\,21)$. Остача від ділення числа $\left(86^{143}-31^{547}\right)^{62}$ на 21 дорівнює 1.

Приклад 44. Довести, що $\left(3299^{5}+6\right)^{18}-1$ націло ділиться на 112.

Розв'язання. Оскільки дільник 112 є число складене і досить велике, то доцільно його розкласти на взаємно-прості множники, тобто $112=2^{4}\cdot 7$. Число 16 і 7 взаємно-прості, тому доведемо окремо, що число ділиться на 16 і 7.

1) Доведемо, що $\left(3299^{5}+6\right)^{18}-1$ націло ділиться на 16. Число $3299=16\cdot 206+3$, тобто $3299\equiv 3(\mathrm{mod}\,16)$, $3299^{5}\equiv 3^{5}=243\equiv 3(\mathrm{mod}\,16)$, $3299^{5}+6\equiv 9(\mathrm{mod}\,16)$, $(3299^{5}+6)^{18}\equiv 9^{18}(\mathrm{mod}\,16)$. Легко помітити, що $9^{2}\equiv 1(\mathrm{mod}\,16)$, тому $(3299^{5}+6)^{18}\equiv 9^{18}\equiv 1(\mathrm{mod}\,16)$, отже $(3299^{5}+6)^{18}-1\equiv 1-1=0(\mathrm{mod}\,16)$. Число $\left(3299^{5}+6\right)^{18}-1$ ділиться націло на 16.

2) Доведемо, що $\left(3299^{5}+6\right)^{18}-1$ націло ділиться на 7. Число $3299=7\cdot 471+2$, тобто $3299\equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$, $3299^{5}\equiv 2^{5}=32\equiv 4(\mathrm{mod}\,7)$, $3299^{5}+6\equiv 10\equiv 3(\mathrm{mod}\,7)$, $(3299^{5}+6)^{18}\equiv 3^{18}(\mathrm{mod}\,7)$. Оскільки числа 3 і 7 взаємно прості і 7 –просте число, то, за малою теоремою Ферма, $3^{7-1}=3^{6}\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$. Отже, $(3299^{5}+6)^{18}\equiv 3^{18}\equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$ і $(3299^{5}+6)^{18}-1\equiv 1-1=0(\mathrm{mod}\,7)$. Число $\left(3299^{5}+6\right)^{18}-1$ ділиться націло на 7. Висновок: число $\left(3299^{5}+6\right)^{18}-1$ націло ділиться на 112.

Приклад 45. Знайти дві останні цифри числа 3^{100}.

Розв'язання. Дві останні цифри числа утворюють число, що є остачею при діленні числа 3^{100} на 100. Застосуємо властивості числових конгруенцій. Числа 3 і 100 взаємно прості, бо *НСД*$(3;100)=1$. Застосуємо теорему Ейлера , де $100=5^{2}\cdot 2^{2}$, $\varphi(100)=100\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=100\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}=40$, тому $3^{40}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Знаходимо $(3^{40})^{2}=3^{80}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Треба знайти остачу від ділення 3^{20} на 100. $3^{5}=243\equiv 43(\mathrm{mod}\,100)$, тоді $(3^{5})^{2}=3^{10}\equiv 43^{2}=1849\equiv 49(\mathrm{mod}\,100)$, $(3^{10})^{2}=3^{20}\equiv 49^{2}=2401\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Тому $3^{100}=3^{80}\cdot 3^{20}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$. Таким чином, останні дві цифри нашого числа 01.

Приклад 46. Знайти дві останні цифри числа $7^{9^{9^9}}$.

Розв'язання. Дві останні цифри числа утворюють число, що є остачею при діленні числа $7^{9^{9^9}}$ на 100. Але показник степеня сам є степенем і його треба розглянути окремо. Оскільки $9 \equiv 1(\mathrm{mod}\,8)$, то $9^9 \equiv 1^9 = 1(\mathrm{mod}\,8)$, $9^{9^9} \equiv 1^9 = 1(\mathrm{mod}\,8)$, тобто число 9^{9^9} можна представити у вигляді $9^{9^9} = 8m+1$, де $m \in N$. Отже, $7^{9^{9^9}} = 7^{8m+1}$, $m \in N$. Використовуючи властивості конгруенцій маємо: $7^4 = 2401 \equiv 1(\mathrm{mod}\,100)$, $(7^4)^{2m} = 7^{8m} \equiv 1^{2m} = 1(\mathrm{mod}\,100)$, $7^{8m} \cdot 7 = 7^{8m+1} \equiv 1 \cdot 7 = 7(\mathrm{mod}\,100)$. Таким чином, останні дві цифри нашого числа 07.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти остачу від ділення числа a на число $в$, якщо:

а) $a = 7^{36}$, $в = 4$; б) $a = 7^{29}$, $в = 5$; в) $a = 3^{101}$, $в = 7$; а) $a = 3^{70} + 2^{52}$, $в = 4$.

2. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n, значення виразу:

а) $11^n + 14 \cdot 6^n$ кратне 5; б) $21^n + 2^{2n+4}$ кратне 17; в) $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$ кратне 23;

г) $3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$ кратне 19; д) $2^{n+5} \cdot 3^{4n} + 5^{3n+1}$ кратне 37;

е) $17 \cdot 21^{2n+1} + 9 \cdot 43^{2n+1}$ кратне 8.

3. Знайти остачу від ділення числа a на число $в$, якщо:

а) $a = 5^{52}$, $в = 53$; б) $a = 2^{47}$, $в = 41$.

4. Знайти остачу від ділення 383^{175} на 45.
5. Знайти остачу від ділення $(12371^{56} + 145)^{28}$ на 111.
6. Довести, що $222^{333} + 333^{222}$ ділиться націло на 13.
7. Знайти дві останні цифри числа 2^{100}.
8. Знайти три останні цифри числа 243^{402}.
9. Довести, що $15^{60} + 20^{30}$ кратне 13.
10. Довести, що $2222^{5555} - 5555^{2222}$ кратний 7.
11. Знайти останню цифру числа 777^{777}.
12. Доведіть, що число $7^{2012^{2014}} - 3^{2000^{2011}}$ ділиться на 10.

Спосіб знаходження остач при діленні на натуральне число к

1. Переконуємося, що заданий числовий вираз містить лише суми, добутки і степені цілих чисел.

2. Для кожного доданка, співмножника чи основи степеня знаходимо його остачу r при діленні на к (якщо остача більша за $\frac{к}{2}$, то іноді зручно замість остачі r взяти від'ємне число $r - к$, яке дає ту ж саму остачу r при діленні на к).

3. Підставляємо одержані числа в заданий вираз (замість відповідних доданків, співмножників чи основ степенів) і одержуємо число, яке дає ту ж саму остачу при діленні на к, що й заданий вираз.

Приклад 47. Знайти остачу при діленні числа $9^{1999}+1997\cdot1998\cdot1999$ на 8.

Розв'язання. 9 при діленні на 8 дає остачі 1, 1997 при діленні на 8 дає в остачі 5, 1998 при діленні на 8 дає в остачі 6, 1999 при діленні на 8 дає в остачі 7. Тоді початкове число при діленні на 8 дає таку ж остачу, як і число $1^{1999}+5\cdot6\cdot7=211$, тобто 3.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Знайти остачу при діленні числа $1997^{1998}+1999^{2000}$ на 37.
2. Знайти остачу при діленні числа $531^{1002}+742^{2002}$ на 19.
3. Знайти остачу при діленні числа $18^{2012}+480\cdot481\cdot482$ на 17.
4. Знайти остачу при діленні числа $1952^{2n}+1953^{2n}$ на 31.
5. Знайти остачу при діленні числа $12^{2014}+2577\cdot2578$ на 11.
6. Знайти остачу при діленні числа $2005^{2n+1}\cdot2007^{2n}$ на 1003.
7. Знайти остачу при діленні числа $23^{2012}+1434\cdot1435\cdot1436$ на 22.
8. Знайти остачу при діленні числа $2222^{5555}+5555^{2222}$ на 7.

Теорема Безу. Ділення многочлена «куточком»

Теорема Безу. *Остача від ділення многочлена $P(x)$ на двочлен х-а дорівнює значенню цього многочленна при х=а, тобто $r=P(a)$.*

Наслідок: *Якщо х=а – корінь многочлена $P(x)$ (тобто $P(a)=0$), то цей многочлен ділиться без остачі на х-а.*

Приклад 48. Знайти остачу від ділення многочлена $P(x)=x^3-3x+4$ на двочлен х-2.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** За теоремою Безу: R=P(2)=8-6+4=6

2 спосіб.

Виконаємо поділ кутом, маємо:

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x + 4 & x-2 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^3 - 2x^2} & x^2+2x+1 \\
2x^2 - 3x & \\
-\ \underline{2x^2 - 4x} & \\
x + 4 & \\
-\ \underline{x - 2} & \\
6 &
\end{array}
$$

Отже, остача R=6.

Приклад 49. Знайти всі цілі значення x, при яких дріб $\frac{x^3+1}{x-1}$ буде цілим числом.

Розв'язання. Виконаємо поділ кутом, маємо:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^3+1 & x-1 \\
\cline{2-2}
x^3-x^2 & x^2+x+1 \\
\cline{1-1}
-\;x^2+1 & \\
x^2-x & \\
\cline{1-1}
-\;x+1 & \\
x-1 & \\
\cline{1-1}
2 &
\end{array}
$$

Тоді $\frac{x^3+1}{x-1}=x^2+x+1+\frac{2}{x-1}$. Щоб при цілих значеннях x вираз $\frac{x^3+1}{x-1}$ приймав цілі значення, потрібно, щоб дріб $\frac{2}{x-1}$ приймав цілі значення. Підбором це можливо при x=-1; 0; 2; 3.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що многочлен A(x) ділиться націло на многочлен B(x):

а) $A(x)=x^5-3x^4+2x^3+4x-4$, $B(x)=x-1$ б) $A(x)=x^2-7x+6$, $B(x)=x-6$

.

2. Знайдіть остачу при діленні многочлена A(x) на двочлен B(x):

а) $A(x)=2x^4+3x^4-x^3-2x^2+5x+1$, $B(x)=x+3$;

б) $A(x)=5x^3+2x^2-4x-2$, $B(x)=x+2$;

в) $A(x)=2012x^{2012}+2011x^{2011}, B(x)=x+1$; г) $A(x)=x^{2013}-x^{1000}+2012$, $B(x)=x-1$.

3. а) Знайдіть всі натуральні a, при яких дріб $\frac{a^3+2a+3}{a-1}$ буде натуральним числом.

б) Знайдіть всі натуральні a, при яких дріб $\frac{a^2+1}{a+1}$ буде натуральним числом.

4. а) Знайдіть всі цілі a, при яких дріб $\frac{a^3+1}{a-1}$ буде цілим числом.

б) Знайдіть всі цілі a, при яких дріб $\frac{a^3-2a+3}{a-2}$ буде цілим числом.

Наслідки з теореми Безу

1. *Вираз x^n-a^n ділиться без остачі на x-a.*
2. *Вираз $x^{2n}-a^{2n}$ ділиться без остачі на x+a.*
3. *Вираз $x^{2n-1}+a^{2n-1}$ ділиться без остачі на x+a.*

4. *Вираз* $x^{2n-1}-a^{2n-1}$ *не ділиться без остачі на x+a.*

5. *Вираз* $x^{2n}+a^{2n}$ *не ділиться без остачі на x+a.*

Формули для розкладання на множники виразів виду $a^n \pm b^n$

1. $a^n-b^n=(a-в)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$, *де n – будь-яке натуральне число.*

2. $a^n+b^n=(a+в)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...-ab^{n-2}+b^{n-1})$, *де n – непарне натуральне число.*

Приклад 50. Доведіть, що $10000^{1006}-87^{2012}$ ділиться націло на 13.

Розв'язання. ***1 спосіб.***

Виконаємо перетворення $10000^{1006}-87^{2012}=100^{2012}-87^{2012}$. За наслідком з теореми Безу x^n-a^n ділиться без остачі на x-a, тобто початкове число ділиться на 100-87=13.

2 спосіб.

Використаємо формулу $a^n-b^n=(a-в)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+...+ab^{n-2}+b^{n-1})$, де n – будь-яке натуральне число.

Приклад 51. Доведіть, що $2012^{22}-1$ ділиться націло на 2013.

Розв'язання. За наслідком з теореми Безу вираз $x^{2n}-a^{2n}$ ділиться без остачі на x+a, тобто початкове число ділиться на 2012+1=2013.

Приклад 52. Доведіть, що $1+2^{2013}+3^{2013}+...+1000^{2013}$ ділиться націло на 1001.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Згрупуємо доданки наступним чином:

$$1+2^{2013}+3^{2013}+...+1000^{2013}=(1^{1013}+1000^{2013})+(2^{2013}+999^{2013})+$$
$$+(3^{2013}+998^{2013})+...+(500^{2013}+501^{2013})$$

За наслідком з теореми Безу вираз $x^{2n-1}+a^{2n-1}$ ділиться без остачі на x+a. Тобто вирази $(1^{1013}+1000^{2013})$, $(2^{2013}+999^{2013})$, $(3^{2013}+998^{2013}),\ldots,$ $(500^{2013}+501^{2013})$ діляться відповідно на $1+1000=1001$, $2+999=1001$, $3+998=1001,\ldots,$ $500+501=1001$. Отже і початковий вираз ділиться на 1001.

2 спосіб.

Використати формулу $a^n+b^n=(a+в)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-...-ab^{n-2}+b^{n-1})$, де n – непарне натуральне число.

Приклад 53. Довести, що вираз $3^{4n+4}-4^{3n+3}$ ділиться на 17.

Розв'язання. Виконаємо перетворення $3^{4(n+1)}-4^{3(n+1)}=81^{n+1}-64^{n+1}$. За наслідком з теореми Безу x^n-a^n ділиться без остачі на x-a, тобто на 81-64=17.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що $2012^{22}-1$ ділиться на 2011.
2. Доведіть, що $1+2^{1001}+3^{1001}+...+2012^{1001}$ ділиться націло на 2013.

3. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $7^{2^n}+3^{2^n}+30\cdot 21^n$ кратний 16.

4. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $7^n-6\cdot 2^n$ кратний 5.

5. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз 5^n-2^{n+1} кратний 3.

6. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз 21^n+4^{n+2} кратний 17.

7. Доведіть, що при будь-якому непарному натуральному значенні n вираз 5^n+2^n кратний 7.

8. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $7\cdot 5^{2n}+12\cdot 6^n$ кратний 19.

9. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $7^{n+2}+8^{2n+1}$ кратний 57.

10. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $5^n+7^n+9^n+11^n$ кратний 4.

Метод математичної індукції

1. Початок індукції: перевіряємо, чи виконується твердження при n=1 (іноді починають з n=p).

2. Припускаємо, що задане твердження справедливе при n=k, де $k\geq 0$.

3. Доводимо (спираючись на припущення) справедливість нашого твердження і при n=k+1. Робимо висновок.

Приклад 54. Доведіть, що 10^n-9n-1 ділиться на 81 при будь-якому $n\in N$.

Розв'язання. Використаємо метод математичної індукції.

1. Перевіряємо, чи виконується твердження при n=1: 10-9-1=0, тобто ділиться на 81.
2. Припускаємо, що задане твердження справедливе при n=k, тобто $(10^k-9k-1)\vdots 81$.
3. Доведемо, що задане твердження виконується при n=k+1. Маємо:

$$10^{k+1}-9(k+1)-1=10^k\cdot 10-9k-9-1=10\cdot\left(10^k-9k-1\right)+81k.$$

Перший доданок останньої суми ділиться на 81 за припущенням індукції, другий теж ділиться на 81. Отже, вся сума ділиться на 81.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $7^{n+1}+8^{2n-1}$ кратний 19.

2. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $3^{2n+1}+2^{n+2}$ кратний 7.

3. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $4^n+15n-1$ кратний 9.

4. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $5^n - 3^n + 2n$ кратний 4.

5. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $3^{2n+2} - 8n - 9$ кратний 64.

6. Доведіть, що $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ділиться на 7 при будь-якому $n \in N$.

7. Доведіть, що $9^n - 8n - 1$ ділиться на 16 при будь-якому $n \in N$.

8. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n вираз $5^n - 3^n + 2n$ кратний 4.

ТЕМА 2. ДІОФАНТОВІ РІВНЯННЯ

Діофантовими рівняннями називають рівняння з раціональними коефіцієнтами з вимогою визначити розв'язки у цілих або раціональних числах. Так, як діофантове рівняння має кілька змінних то такі рівняння ще називають невизначеними.

Мета роботи ознайомити учнів 7-9 класів зі способами розв'язування діофантових рівнянь. Водночас діофантові рівняння не являються програмною темою шкільного курсу математики, а тому вони зустрічаються в ролі завдань математичних олімпіад. Кожен спосіб супроводжується теоретичним обґрунтуванням, прикладами розв'язаних задач та задачами для самостійного розв'язування.

Розв'язати рівняння з двома змінними в цілих числах означає знайти всі пари цілих чисел, які є розв'язками цього рівняння або показати що їх немає.

Розглянемо рівняння в яких ліву частину можна розкласти на множники, а в правій частині рівняння буде ціле число, тоді замінимо рівняння сукупністю систем простіших рівнянь. Розглянемо також рівняння які розв'язуються методом виділення цілої та дробової частини.

Приклад 1. Розв'язати у цілих числах рівняння $xy = x + y$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Виконаємо перетворення, щоб розкласти ліву частину на множники $xy - x - y = 0$, $x(y-1) - y + 1 = 1$, $x(y-1) - (y-1) = 1$, $(y-1)(x-1) = 1$. Звідси отримуємо, що значення виразів $x-1$ і $y-1$ є дільниками числа 1. Тоді можливі такі випадки:

1) $\begin{cases} x-1=1, \\ y-1=1; \end{cases} \begin{cases} x=2, \\ y=2; \end{cases}$ або 2) $\begin{cases} x-1=-1, \\ y-1=-1; \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$

Відповідь: $(0;0)$, $(2;2)$.

2 спосіб. Розв'яжемо дане рівняння відносно x: $xy - x = y$; $x(y-1) = y$; $x = \dfrac{y}{y-1}$.

Виділимо цілу і дробову частину: $x = \dfrac{y}{y-1} = \dfrac{y-1+1}{y-1} = 1 + \dfrac{1}{y-1}$. Так як $\dfrac{1}{y-1}$ повинно бути цілим числом, то $y-1 = \pm 1$, звідки знаходимо дві пари цілих розв'язків: $(2;2)$; $(0;0)$.

Відповідь: $(2;2)$; $(0;0)$

Приклад 2. Розв'язати у цілих числах рівняння $xy = x + 2y + 1991$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення, щоб розкласти ліву частину на множники $xy - x - 2y = 1991$, $x(y-1) - 2y + 2 = 1991 + 2$, $x(y-1) - 2(y-1) = 1993$, $(y-1)(x-2) = 1993$. Так, як 1993 – просте число, то отримуємо, що значення виразів $x-2$ і $y-1$ є дільниками числа 1993. Тоді можливі такі випадки:

1) $\begin{cases} x-2=1, \\ y-1=1993; \end{cases}$ $\begin{cases} x=3, \\ y=1994; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2=-1, \\ y-1=-1993; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1, \\ y=-1992; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x-2=1993, \\ y-1=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=1995, \\ y=2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-2=-1993, \\ y-1=-1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1991, \\ y=0. \end{cases}$

Відповідь: $(3;1994)$, $(1;-1992)$, $(1995;2)$, $(-1991;0)$.

Приклад 3. Розв'язати у натуральних числах рівняння $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення, щоб розкласти ліву частину на множники $2x^2 - 3xy + 8xy - 12y^2 = 28$, $x(2x-3y) + 4y(2x-3y) = 28$, $(2x-3y)(x+4y) = 2\cdot 2\cdot 7$. З останньої рівності зробимо висновок, що $x + 4y \ge 5$, бо за умовою задачі $x; y \in N$. Звідси отримуємо, що значення виразів $x+4y$ і $2x-3y$ можуть набирати наступних значень:

1) $\begin{cases} x+4y=7, \\ 2x-3y=4; \end{cases}$ $\begin{cases} x=7-4y, \\ 2(7-4y)-3y=4; \end{cases}$ з другого рівняння системи $y = \frac{10}{11}$, отже натуральних розв'язків немає.

2) $\begin{cases} x+4y=14, \\ 2x-3y=2; \end{cases}$ $\begin{cases} x=14-4y, \\ 2(14-4y)-3y=2; \end{cases}$ з другого рівняння системи $y = \frac{26}{11}$, отже натуральних розв'язків немає.

3) $\begin{cases} x+4y=28, \\ 2x-3y=1; \end{cases}$ $\begin{cases} x=28-4y, \\ 2(28-4y)-3y=1; \end{cases}$ з другого рівняння системи $y=5$, тоді $x=8$

Відповідь: $(8;5)$.

Приклад 4. Розв'язати в цілих числах рівняння $2y^2 - 2x^2 + 3xy + x - 2y - 2 = 0$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$(2y^2 + 4xy - 2y) - (2x^2 + xy - x) = 2,$$

$$2y(y + 2x - 1) - x(y + 2x - 1) = 2,$$

$$(2y - x)(y + 2x - 1) = 2.$$

Можливі випадки:

$$\begin{cases} 2y-x=1 \\ y+2x-1=2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2y-x=2 \\ y+2x-1=1 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2y-x=-1 \\ y+2x-1=-2 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2y-x=-2 \\ y+2x-1=-1 \end{cases}$$

Розв'язавши системи рівнянь отримуємо наступні пари $(1;1)$; $(\frac{2}{5};\frac{6}{5})$; $(-\frac{1}{5};-\frac{3}{5})$; $(\frac{2}{5};-\frac{4}{5})$, але за умовою завдання задовольняє лише пара $(1;1)$.

Відповідь: $(1;1)$.

Приклад 5. Розв’язати рівняння у цілих числах $y^2 - 2xy + 2x = 6$.

Розв’язання. Знайдемо з рівняння вираз 2х:

$$y^2 - 6 = 2xy - 2x,$$

$$y^2 - 6 = 2x(y-1),$$

$2x = \dfrac{y^2-6}{y-1}$, якщо $y = 1$, то з початкового рівняння х буде не ціле число, тому $y \neq 1$.

Виділимо цілу і дробову частину в останній рівності, маємо:

$$2x = \frac{y^2-6}{y-1} = \frac{y^2-1-5}{y-1} = y+1-\frac{5}{y-1}.$$

За умовою задачі вираз $\dfrac{5}{y-1}$ повинен набирати цілих значень, а це можливо лише при $y-1=\pm1$ або $y-1=\pm5$.

Звідки знаходимо пари цілих розв’язків. $(-1;2); (3;0); (3;6); (-1;-4)$.

Відповідь: $(-1;2); (3;0); (3;6); (-1;-4)$.

Приклад 6. Розв’язати рівняння в цілих числах $x^3 - x^2 - xy - 17x - 3y + 8 = 0$.

Розв’язання. Розв’яжемо дане рівняння відносно y:

$$x^3 - x^2 - 17x + 8 = xy + 3y,$$

$$x^3 - x^2 - 17x + 8 = y(x+3),$$

$y = \dfrac{x^3 - x^2 - 17x + 8}{x+3}$, якщо $x = -3$, то в початковому рівнянні y буде не ціле число, тому $x \neq -3$.

Виділимо цілу і дробову частину в останній рівності, для цього виконаємо ділення кутом, маємо:

$$\begin{array}{r|l} - \; x^3 - x^2 - 17x + 8 & x+3 \\ \cline{2-2} x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & x^2 - 4x - 5 \\ \cline{1-1} -4x^2 - 17x \quad\; & \\ -\; -4x^2 - 12x \quad\; & \\ \cline{1-1} -5x + 8 & \\ -\; -5x - 15 & \\ \cline{1-1} 23 & \end{array}$$

Отже, маємо $y = x^2 - 4x - 5 + \dfrac{23}{x+3}$.

За умовою задачі вираз $\dfrac{23}{x+3}$ повинен набирати цілих значень, а це можливо лише при $x+3=\pm1$ або $x+3=\pm23$.

Обчислюючи знаходимо, що пари цілих розв'язків: $(-2;30)$; $(-4;4)$; $(20;316)$; $(-26;774)$.

Відповідь: $(-2;30)$; $(-4;4)$; $(20;316)$; $(-26;774)$.

Приклад 7. З квадратного аркуша паперу в клітинку, який містить ціле число клітинок, вирізали квадрат, у якому також виявилося ціле число клітинок. На частині аркуша, що залишилась, рівно 124 клітинки. Скільки клітинок мав аркуш паперу?

Розв'язання. Нехай початковий аркуш паперу мав довжину однієї сторони x клітинок, а довжина тієї частини, що вирізали y клітинок, де $x; y \in N$ і зрозуміло, що $x > 11$, бо якщо залишилося 124 клітинки, то на початку не могло б бути 121 клітинка при x=11. За умовою задачі отримуємо наступне рівняння: $x^2 - y^2 = 124$, $(x-y)(x+y) = 2 \cdot 2 \cdot 31$. Враховуємо також, що $x + y > x - y$, $x + y > 12$. Отримуємо, що значення виразів $x + y$ і $x - y$ можуть набирати наступних значень:

1) $\begin{cases} x + y = 31, \\ x - y = 4; \end{cases}$ додавши два рівняння $2x = 35$, $x = \dfrac{35}{2}$, отже натуральних розв'язків немає.

2) $\begin{cases} x + y = 62, \\ x - y = 2; \end{cases}$ додавши два рівняння $2x = 64$, $x = 32$, тоді $y = 30$.

3) $\begin{cases} x + y = 124, \\ x - y = 1; \end{cases}$ додавши два рівняння $2x = 125$, $x = \dfrac{125}{2}$, отже натуральних розв'язків немає.

Отже, аркуш паперу мав $32 \cdot 32 = 1024$ клітинок.

Відповідь: 1024.

Приклад 8. Розв'яжіть рівняння у цілих числах $x^2 - y^2 = 14$.

Розв'язання. Виконаємо перетворення, щоб розкласти ліву частину на множники $(x-y)(x+y) = 14$.

1 спосіб. Можна розв'язати рівняння, як розв'язували в попередніх прикладах перейшовши розв'язувати системи рівнянь.

2 спосіб. Значення виразів $x + y$ і $x - y$ завжди мають однакову парність. Якщо числа $x + y$ і $x - y$ парні, то ліва частина рівняння ділиться на 4, але 14 на 4 не ділиться. Якщо числа $x + y$ і $x - y$ непарні, то ліва частина рівняння число непарне, але 14 парне число. Отже, рівняння $x^2 - y^2 = 14$ не має розв'язків у цілих числах.

Розглянемо лінійне рівняння з двома змінними. Лінійне рівняння з двома змінними має вид $ax + by = c$, a, b, c - будь-які числа і на множині раціональних чисел має безліч розв'язків. Ми розглянемо лінійні рівняння в яких a, b, c - цілі числа, при умові, що $x; y$ також цілі числа. Розглянемо кілька способів розв'язування таких рівнянь.

Один з найпростіших способів розв'язування лінійного рівняння з двома змінними у цілих числах це використання відомої теореми: якщо a і $в$ взаємно прості числа , тобто $НСД(a;в) = 1$, і $(x_0; y_0)$ - один із розв'язків рівняння $ax + by = c$, тоді усі розв'язки цього рівняння знайдемо за формулами $x = x_0 - bn$; $y = y_0 + an$, де $n \in Z$.

Запам'ятайте: якщо в рівнянні $ax+by=c$ $НСД(a;в)=d$***, а с не ділиться націло на*** d***, то рівняння*** $ax+by=c$ ***не має розв'язків в цілих числах.***

Теорема. Найбільший спільний дільник чисел а і в можна виразити через числа а і в у вигляді $ax+by$***, де*** $x;y\in Z$***.***

Приклад 9. Розв'язати рівняння у цілих числах $15x-7y=13$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Ми бачимо, що числа 15 і 7 взаємно прості, тобто $НСД(15;7)=1$. Легко побачити, пара чисел $(x_0;y_0)=(-1;-4)$ є одним з розв'язків заданого рівняння. Усі розв'язки рівняння знайдемо за формулами $x=x_0-bn$; $y=y_0+an$, де $n\in N$ і а=15, в=-7. Отже, $x=-1+7n$; $y=-4+15n$, де $n\in Z$.

Відповідь: $(7n-1;15n-4)$, $n\in Z$.

Якщо забули теорему, то можна розв'язати рівняння наступним чином, тобто так, як доводиться теорема.

Ми бачимо, що числа 15 і 7 взаємно прості, тобто $НСД(15;7)=1$. Легко побачити, пара чисел $(x_0;y_0)=(-1;-4)$ є одним з розв'язків заданого рівняння. Підставимо в рівняння пару чисел $(x_0;y_0)=(-1;-4)$, яка є розв'язком. Маємо $15\cdot(-1)-7\cdot(-4)=13$. Прирівнюючи ліві частини початкового рівняння і останньої рівності, маємо: $15x-7y=15\cdot(-1)-7\cdot(-4)$, $15(x+1)=7(y+4)$. Оскільки числа 15 і 7 взаємно прості, то $(x+1)=7n$, а $(y+4)=15n$, тоді $x=-1+7n$; $y=-4+15n$, де $n\in Z$.

Відповідь: $(7n-1;15n-4)$, $n\in Z$.

2 спосіб. Знайдемо ту змінну коефіцієнт при якій менший, тобто y: $7y=15x-13$, $y=\frac{15x-13}{7}$, $y=2x-2+\frac{x+1}{7}$. Зрозуміло, що y буде цілим числом, якщо $x+1=7n$, де $n\in Z$. З останньої рівності $x=7n-1$, а $y=2(7n-1)-2+\frac{7n}{7}=15n-4$, де $n\in Z$ усі розв'язки нашого рівняння.

Відповідь: $(7n-1;15n-4)$, $n\in Z$.

Якщо важко підбором знайти розв'язок рівняння запропонуємо наступний алгоритм розв'язування рівняння $ax+by=c$ ***.***

1. ***За допомогою алгоритму Евкліда доведемо, що числа а і в взаємно прості.***
2. ***Знаходимо один із розв'язків рівняння*** $ax+by=1$***, позначимо його*** $(k;l)$***, (як це зробити покажемо на прикладі).***
3. ***Знаходимо один із розв'язків рівняння*** $ax+by=c$ ***за формулами*** $x_0=kc$ ***і*** $y_0=lc$***.***
4. ***Знаходимо усі розв'язки рівняння*** $ax+by=c$ ***за формулами*** $x=x_0-bn$ ***і*** $y=y_0+an$***,*** $n\in Z$***.***

Покажемо приклад, який розв'яжемо алгоритмом записаним вище.

Приклад 10. Розв'язати рівняння у цілих числах $127x+52y=7$.

Розв'язання. Знайти конкретний розв'язок у даному випадку підбором дуже важко. Тому розв'яжемо рівняння наступним чином.

1. Застосуємо алгоритм Евкліда до чисел 127 і 52.

$$127 = 52 \cdot 2 + 23,$$

$$52 = 23 \cdot 2 + 6,$$

$$23 = 6 \cdot 3 + 5,$$

$$6 = 5 \cdot 1 + 1,$$

$$5 = 5 \cdot 1.$$

Отже, числа 127 і 52 взаємно прості, бо $НСД(127;52) = 1$.

2. Знайдемо один із розв'язків рівняння $127x + 52y = 1$, позначимо його $(k;l)$. Запишемо останні рівності наступним чином:

$$23 = 127 - 52 \cdot 2,$$

$$6 = 52 - 23 \cdot 2,$$

$$5 = 23 - 6 \cdot 3,$$

$$1 = 6 - 5 \cdot 1.$$

Тоді: $1 = 6 - 5 \cdot 1 = 6 - 1 \cdot (23 - 6 \cdot 3) = 4 \cdot 6 - 23 = 4 \cdot (52 - 23 \cdot 2) - 23 =$

$$= 4 \cdot 52 - 9 \cdot 23 = 4 \cdot 52 - 9(127 - 52 \cdot 2) = 22 \cdot 52 - 9 \cdot 127 = 127 \cdot (-9) + 52 \cdot 22 = 1.$$

Порівнюючи останній запис $127 \cdot (-9) + 52 \cdot 22 = 1$ з рівнянням $127x + 52y = 1$, бачимо, що пара чисел $(k;l) = (-9;22)$ це один з розв'язків рівняння $127x + 52y = 1$.

3. Знаходимо один із розв'язків рівняння $127x + 52y = 7$ за формулами $x_0 = kc$ і $y_0 = lc$, де с=7. Отже, маємо: $x_0 = kc = -9 \cdot 7 = -63$ і $y_0 = lc = 22 \cdot 7 = 154$.

4. Знаходимо усі розв'язки рівняння $127x + 52y = 7$ за формулами $x = x_0 - bn$**;** $y = y_0 + an$, $n \in Z$. Отже, маємо: $x = x_0 - bn = -63 - 52n$, $y = y_0 + an = 154 + 127n$, $n \in Z$.

Відповідь $(-52n - 63;127n + 154)$, $n \in Z$.

Приклад 11. Для перевезення зерна є мішки по 60 кг і по 80 кг. Скільки потрібно мішків обох видів, щоб перевезти 440 кг зерна?

Розв'язання. Нехай x – кількість мішків, що вміщують по 60 кг, y – кількість мішків, що вміщують по 80 кг. За умовою задачі отримаємо рівняння $60x + 80y = 440$, спростивши яке маємо $3x + 4y = 22$ - це лінійне рівняння з двома змінними. Знайдемо з рівняння x: $x = \frac{22 - 4y}{3} = 7 - y + \frac{1 - y}{3}$, отже $1 - y = 3n$, $y = 1 - 3n$, $n \in Z$. Зрозуміло з умови задачі $x; y \in N$, тому при $n = 0$ $y > 0$, тобто $y = 1$, в іншому випадку $y < 0$, тоді $x = 7 - 1 + \frac{1 - 1}{3} = 6$. Отже, потрібно взяти 6 мішків по 60 кг і 1 мішок по 80 кг, щоб повезти 440 кг зерна.

Приклад 12. Вік студента в 1997 році дорівнює сумі цифр року його народження. Скільки років студенту.

Розв'язання. Нехай студент народився в $\overline{19xy}$ році, де $0 \le x \le 9$, $0 \le y \le 9$, $x; y \in Z$. Його вік буде $1+9+x+y$. За умовою задачі отримаємо рівняння: $\overline{19xy}+1+9+x+y=1997$, $1900+10x+y+10+x+y=1997$, $11x+2y=87$ - це лінійне рівняння з двома змінними. Знайдемо з рівняння y: $y=\frac{87-11x}{2}$, отже $(87-11x)\vdots 2$ і $87-11x>0$. Перебравши цілі непарні значення х – це 1, 3, 5, 7, знаходимо, що х=7, $y=5$. Отже, студент народився у 1975 році і йому було 22 роки.

Приклад 10. Чи можна виплатити 1000 гривень 40 купюрами вартістю 1, 10, 100 гривень?

Розв'язання. Нехай 1000 гривень можна виплатити, x купюрами по 1 гривні, y купюрами по 10 гривень, та z купюрами по 100 гривень, де $x; y; z > 0$ і належать цілим числам. З умови задачі отримаємо систему рівнянь:

$\begin{cases} x+y+z=40, \\ x+10y+100z=1000; \end{cases}$ помножимо перше рівняння на -1 і додамо до другого маємо,

$9y+99z=960$, тоді ліва частина рівняння ділиться на 9, а права частина 960 не ділиться націло на 9, отже в цілих числах рівняння не має розв'язків. Тому не можна виплатити 1000 гривень 40 купюрами вартістю 1, 10, 100 гривень.

Приклад 13. Авіалінію, яка зв'язує міста А і В, обслуговують літаки трьох типів. Кожний літак першого, другого і третього типів може прийняти відповідно 230, 100 і 40 пасажирів. Усі літаки лінії можуть одночасно перевезти 760 пасажирів. Скільки літаків кожного типу обслуговують цю авіалінію?

Розв'язання. Нехай літаків першого типу була x, другого - y, третього - z, де $x, y, z \in N$. З умови за дачі отримаємо рівняння $230x+100y+40z=760$, звідки отримаємо, що $23x+10y+4z=76$. З останнього рівняння робимо висновок, що х – парне число, тоді $23x=76-(10y+4z)\le 62$ (врахували мінімальні значення $y=z=1$), звідки $x \le \frac{62}{23}=2\frac{19}{23}$, а отже, х=2. Враховуючи, що х=2, отримаємо рівняння $10y+4z=30$, $5y+2z=15$, з останньої рівності зрозуміло, що $z\vdots 5$. Крім того, $2z=15-5y$, $z=\frac{15-5y}{2}\le 5$ (врахували мінімальні значення $y=1$), а отже, $z=5$, $y=1$.

Відповідь: 2; 1; 5.

Розглянемо лінійне рівняння з трьома змінними. Лінійне рівняння з трьома змінними має вид $ax+by+cz=d$ ***, де*** a,b,c,d ***- числа,*** `x, y, z ***- змінні і на множині раціональних чисел має безліч розв'язків.***

Теорема. Лінійне діофантове рівняння $ax+by+cz=d$ ***має розв'язки в цілих числах тоді і тільки тоді, коли*** d ***ділиться на НСД(***a,b,c***).***

Розв'язки знаходять за формулами $x=u_0-mt+b_1k; y=v_0-nt-a_1k; z=t$ ***, де*** (u_0,v_0) ***- частинний розв'язок.***

Приклад 14. Розв'язати рівняння в цілих числах $5x=3y+7z$.

Розв'язання. Перепишемо початкове рівняння у вигляді $5x-3y-7z=0$, де *НСД(5;-3;-7)=1*, тому рівняння має розв'язки в цілих числах.

Так як *НСД(3;7)=1* , то можна представити $5=3m+7n$ де m,n - деякі цілі числа. Підбором знаходимо, що $m=4; n=-1$. Після підстановки маємо:

$$(3m+7n)x=3y+7z,$$

$$12x-7x=3y+7z,$$

$$12x-7x-3y-7z=0,$$

$$3(4x-y)-7(x+z)=0,$$

$$3(y-4x)+7(z+x)=0.$$

Введемо заміну, що $y-4x=u;\ z+x=v$, тоді маємо рівняння $3u+7v=0$, частинний розв'язок якого $u_0=0;\ v_0=0$. Отже, загальний його розв'язок $u=7k;\ v=3k;\ k\in Z.$ Тоді $y-4x=7k;\ z+x=3k.$ Знаходимо загальний розв'язок даного рівняння: $x=t;\ y=7k+4t;\ z=3k-t;\ k,t\in Z$.

Відповідь: $x=t;\ y=7k+4t;\ z=3k-t;\ k,t\in Z$.

Приклад 15. Розв'язати рівняння в цілих числах $7x-3y+9z=5$.

Розв'язання. Так як *НСД(7,-3,9)=1* і 5 ділиться на 1 то рівняння має розв'язки в цілих числах.

Так як *НСД(7;-3)=1,* то можна представити $9=7m-3n$ де m,n - деякі цілі числа. Підбором знаходимо, що $m=3;\ n=4$. Після підстановки маємо:

$$7x-3y+z(7m-3n)=5,$$

$$7x-3y+z(21-12)=5,$$

$$7x-3y+21z-12z=5,$$

$$7(x+3z)-3(y+4z)=5.$$

Введемо заміну, що $x+3z=u;\ y+4z=v;$, тоді маємо рівняння $7u-3v=5$, частинний розв'язок якого $u_0=2;\ v_0=3$. Отже, загальний його розв'язок $u=2-3k;\ v=3-7k;\ k\in Z$. Тоді $x+3z=2-3k;\ y+4z=3-7k;\ k\in Z.$ Знаходимо загальний розв'язок початкового рівняння: $x=2-3k-3t;\quad y=3-7k-4t;\ z=t;\ k,t\in Z.$

Відповідь: $x=2-3k-3t;\ y=3-7k-4t;\ z=t;\ k,t\in Z.$

Розглянемо приклад невизначеного рівняння при розв'язуванні якого використовують ланцюгові дроби: $a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots}}}$***, де*** a_0 ***- будь-яке число,*** $a_1,a_2,\ldots,a_n\in N$***. Кожне раціональне число можна подати у вигляді скінченого, а ірраціональне число – у вигляді нескінченного ланцюгового дробу.***

Приклад 16. Розв'язати рівняння у цілих числах $7(x+z+xyz)=10(1+yz)$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння $\frac{x+z+xyz}{1+yz}=\frac{10}{7}$. Запишемо ліву частину рівняння у вигляді ланцюгового дробу: $\frac{x+z+xyz}{1+yz}=\frac{x(1+yz)+z}{1+yz}=x+\frac{z}{1+yz}=x+\frac{1}{\frac{1+yz}{z}}=x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}$.

Розпишемо праву частину рівняння у вигляді ланцюгового дробу, що можна зробити так:

1) $\frac{10}{7}=1+\frac{3}{7}=1+\frac{1}{\frac{7}{3}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{3}}$, бачимо, що $x=1$, $y=2$, $z=3$.

2) $\frac{10}{7}=2-\frac{4}{7}=2+\frac{1}{-\frac{7}{4}}=2+\frac{1}{-2+\frac{1}{4}}$, бачимо, що $x=2$, $y=-2$, $z=4$.

Перевіркою переконуємося, що розв'язки рівняння дві трійки чисел $(1;2;3)$, $(2;-2;4)$.

Велика теорема Ферма. Для довільного натурального значення $n\geq 3$ ***рівняння*** $x^n+y^n=z^n$ ***не має розв'язків на множині цілих чисел*** $x,y,z\in Z$ ***відмінних від нуля. Тому в цілих числах можна розв'язати тільки рівняння*** $x^2+y^2=z^2$***, цілі додатні розв'язки якого являють собою довжини катетів та гіпотенузи прямокутних трикутників з цілочисловими довжинами сторін і називаються піфагорововими числами. Усі трійки взаємно простих піфагорових чисел можна дістати за формулами:*** $x=m^2-n^2$***,*** $y=2mn$***,*** $z=m^2+n^2$***, де*** m ***і*** n ***- цілі взаємно прості числа,*** $m>n>0$.

Розглянемо приклад розв'язування рівняння виду $x^2-dy^2=1$***,*** $d\in N$ ***у цілих числах.***

Приклад 17. Розв'яжіть рівняння у цілих числах $x^2-2y^2=1$.

Розв'язання. Відразу можна побачити, що розв'язками будуть пари $(1;0)$ і $(-1;0)$. Якщо пара чисел $(x;y)$ є розв'язком рівняння, то в силу симетрії будуть розв'язками і $(-x;y)$, $(x;-y)$, $(-x;-y)$, тому знайдемо спочатку розв'язки $(x;y)$.

Підбором знаходимо пару чисел $(x;y)=(3;2)$, яка є розв'язком нашого рівняння. Розкладемо ліву частину рівняння на множники, маємо: $(x+\sqrt{2}y)(x-\sqrt{2}y)=1$ і підставимо розв'язок $(x;y)=(3;2)$, $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1$. Піднесемо до квадрата числа $3\pm 2\sqrt{2}$, маємо: $(3\pm 2\sqrt{2})^2=9\pm 12\sqrt{2}+8=17\pm 12\sqrt{2}$, тоді пара чисел $(x;y)=(17;12)$ є другим розв'язком рівняння, перевірка $(17+12\sqrt{2})(17-12\sqrt{2})=1$, тобто $289-288=1$. Наступну пару розв'язків можна дістати, якщо піднести число $(3+2\sqrt{2})^3$ до куба:

$$(3+2\sqrt{2})^3=(3+2\sqrt{2})^2(3+2\sqrt{2})=(17+12\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})=99+70\sqrt{2},$$

аналогічно $(3-2\sqrt{2})^3=99-70\sqrt{2}$. Переконуємося, що пара чисел $(x;y)=(99;70)$ є розв'язком рівняння. За аналогією знаходимо всі інші розв'язки рівняння, тобто вони матимуть вид $(3+2\sqrt{2})^n=x_n+y_n\sqrt{2}$, де x_n і y_n - натуральні числа, то пара $(x_n;y_n)$ є розв'язком рівняння $x^2-2y^2=1$.

Виявляється, що й всі розв'язки рівняння $x^2 - dy^2 = 1$ також можна дістати, користуючись тим самим методом. Потрібно лише підібрати найменший його розв'язок $(x_0; y_0)$ і послідовно виконувати піднесення до степеня числа $x_0 + y_0\sqrt{d}$, тобто $(x_0 + y_0\sqrt{d})^n = x_n + y_n\sqrt{d}$. (Найменшим розв'язком будемо називати такий розв'язок $(x_0; y_0)$, що для будь-якого іншого розв'язку $(x; y)$ справджується нерівність $x_0 + y_0\sqrt{d} < x + y\sqrt{d}$).

Розглянемо приклади рівнянь, що розв'язуються методом остач. Метод розгляду остач при діленні на деяке число можна використовувати лише для доведення того, що дане рівняння не має розв'язків у цілих числах. При розв'язуванні таких рівнянь часто використовують властивості конгруенцій.

Приклад 18. Розв'язати у цілих числах рівняння $x^2 - 7y = 10$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння $x^2 + 4 = 7y + 14$, $x^2 + 4 = 7(y+2)$. З останньої рівності зрозуміло, що $x^2 + 4$ повинно ділитися на 7, бо права частина рівняння ділиться на 7, значить x^2 приділенні на 7 повинно давати 3. Розглянемо, які остачі будуть при діленні x^2 на 7: $1^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$, $2^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\,7)$, $3^2 = 9 \equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$, $4^2 = 16 \equiv 2(\mathrm{mod}\,7)$, $5^2 = 25 \equiv 4(\mathrm{mod}\,7)$, $6^2 = 36 \equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$, $7^2 = 49 \equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$, $8^2 = 64 \equiv 1(\mathrm{mod}\,7)$, отже при діленні x^2 на 7 остачі 0, 1, 2, 4. Значить рівняння не має цілих розв'язків.

Приклад 14. Розв'язати у цілих числах рівняння $x^3 - x = 3y^2 + 1$.

Розв'язання. Перетворимо рівняння $x(x-1)(x+1) = 3y^2 + 1$. Ліва частина рівняння – це добуток трьох послідовних чисел, який ділиться на 3, отже і права частина рівняння число $3y^2 + 1$ повинно ділитися на 3. Але $3y^2 + 1$ при діленні на 3 дає остачу 1. Отже, рівняння не має цілих розв'язків.

Розглянемо приклади рівнянь, які розв'язуються іншими методами.

Приклад 20. Розв'яжіть рівняння $(2x^2 - 8x + 11)(y^2 + 2y + 8) = 21$ на множині цілих чисел.

Розв'язання. Виділимо повні квадрати у кожному множнику: $(2x^2 - 8x + 8 + 3)(y^2 + 2y + 1 + 7) = 21$, $(2(x-2)^2 + 3)((y+1)^2 + 7) = 21$. Оцінимо кожний множник: $(x-2)^2 \geq 0$, $(y+1)^2 \geq 0$, тоді $2(x-2)^2 + 3 \geq 3$ і $(y+1)^2 + 7 \geq 7$, отже, добуток двох множників дорівнюватиме 21, коли:

$$\begin{cases} 2(x-2)^2 + 3 = 3, \\ (y+1)^2 + 7 = 7; \end{cases} \begin{cases} (x-2)^2 = 0, \\ (y+1)^2 = 0; \end{cases} \begin{cases} x = 2, \\ y = -1; \end{cases}$$

Відповідь: $(2;-1)$.

Приклад 21. Розв'язати у цілих числах рівняння $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Розв'язання. Серед чисел $x, y, z \neq 0$ буде хоча б одне натуральне число, бо тоді ліва частина буде від'ємною. Нехай це число х. Розглянемо такі випадки:

1) Якщо $x=1$, то $1+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, $\frac{1}{y}=-\frac{1}{z}$, $y=-z=n$, де $n\in N$. Тоді, маємо наступні розв'язки: $(1;n;-n)$, $(1;-n;n)$, $(n;1;-n)$, $(n;-n;1)$, $(-n;n;1)$, $(-n;1;n)$.

2) Якщо $x=2$, то $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{z}=\frac{1}{2}-\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}=\frac{y-2}{2y}$, $z=\frac{2y}{y-2}=2+\frac{4}{y-2}$, оскільки $z\in Z$, то можна перебрати всі значення y: якщо $y=6$, то $z=3$; якщо $y=4$, то $z=4$; якщо $y=3$, то $z=6$; якщо $y=1$, то $z=-2$; якщо $y=-2$, то $z=1$. Отже, отримали наступні розв'язки: $(2;6;3)$, $(2;4;4)$, $(2;3;6)$, $(2;1;-2)$, $(2;-2;1)$.

3) Якщо $x\ge 3$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1-\frac{1}{x}\ge 1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, тому серед чисел y і z є хоча б одне натуральне число, нехай це буде y. Випадки, коли серед чисел x,y,z були 1 чи 2, вже розглянуто, тому розглядатимемо, що $y\ge 3$. Тоді $\frac{1}{z}\ge\frac{2}{3}-\frac{1}{y}\ge\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$, отже $1\le z\le 3$, а значить $z=3$. Якщо $x\ge 3$ і $y\ge 3$, то $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, аналогічно $y=3$. Отримали один розв'язок $(3;3;3)$.

Відповідь: $(1;n;-n)$, $(1;-n;n)$, $(n;1;-n)$, $(n;-n;1)$, $(-n;n;1)$, $(-n;1;n)$, $(2;6;3)$, $(2;4;4)$, $(2;3;6)$, $(2;1;-2)$, $(2;-2;1)$, $(3;3;3)$, $n\in N$.

Завдання для самостійного розв'язання

1. Розв'яжіть рівняння у цілих числах:

а) $x^2+xy-x-y=5$; б) $x^2+2xy-x-2y=4$; в) $xy-x-2y=5$; г) $2xy+2x-3y=4$;

д) $9x^2-y^2=6$; е) $x^2-4y^2=5$; є) $xy+3x-y=20$; ж) $x^2-xy-2y^2=7$.

2. Розв'язати рівняння у натуральних числах:

а) $x^2-y^2=105$; б) $x^2-y^2=69$.

3. Знайти всі прямокутники, сторони яких вимірюються цілими числами, а площа чисельно дорівнює периметру.

4. З квадратного аркуша паперу в клітинку, який містить ціле число клітинок, вирізали квадрат, у якому також виявилося ціле число клітинок. На частині аркуша, що залишилась, рівно 71 клітинки. Скільки клітинок мав аркуш паперу?

5. Знайдіть цілі розв'язки рівняння:

а) $17x+19y=3$; б) $5x+7y=19$; в) $3x+5y=7$; г) $3x-12y=7$; д) $201x-1999y=12$;

е) $13x-16y=7$; є) $37x+23y=15$; ж) $64x-39y=15$; з) $61x+92y=4$; і) $65x-22y=3$.

6. Скільки квитків у кіно по 30 копійок і 40 копійок можна купити за 14 гривень 90 копійок.

7. Скільки поштових марок по 3 копійки і 4 копійки можна купити за 65 копійок.

8. Потрібно розмістити настил довжиною 90 м із залізобетонних плит. Плити є двох сортів по 30 дм і 45 дм. Скільки тих і других потрібно взяти щоб зробити настил потрібної довжини?

9. Один майстер робить на довгій стрічці позначки синім олівцем через кожні 25 см, а другий – червоним через кожні 36 см, починаючи з одного й того самого місця. Чи може яка-небудь синя позначка виявитися на відстані 1 см від якої-небудь червоно?

10. Знайти всі додатні трицифрові числа, які від ділення на 37 дають остачу 2, а від ділення на 11 дають остачу 5.

11. Ви повинні заплатити за куплений у магазині светр 19 гривень. У вас є лиши купюри в 3 гривні, а у касира п'ятірки. Чи можете ви за наявності таких грошей розплатитися з касиром і як саме?

12. Вік людини в 1977 році дорівнює сумі цифр року його народження. Скільки років людині.

13. Скількома способами можна скласти відрізок довжиною 1 м із відрізків довжинами 7 і 12 см?

14. На складі є цвяхи в ящиках по 16, 17 і 40 кг. Чи можна взяти 140 кг цвяхів, не відкриваючи ні одного ящика?

15. Привезли 420 т вугілля у вагонах по16, 20 і 25 т. Скільки яких вагонів було використано, якщо відомо, що всього було 27 вагонів?

16. Хімічний завод має цехи трьох типів. У кожному цеху першого, другого і третього типу працює відповідно 350, 80 і 60 робітників. Разом у цехах заводу працює 980 робітників. Знайдіть кількість цехів кожного типу.

17. Розв'язати рівняння на множині цілих чисел $17(xyzt + xy + xt + zt + 1) = 54(yzt + y + t)$.

18. Розв'яжіть рівняння у цілих числах $x^2 - 3y^2 = 1$.

19. Чи має рівняння $x^2 + y^3 = z^4$ розв'язки на множині простих чисел?

20. Довести, що рівняння $x^2 - 3y^2 = -1$ не має розв'язків в цілих числах.

21. Довести, що рівняння $x^2 - 3y^3 = -5$ не має розв'язків в цілих числах.

22. Довести, що рівняння $x^3 + y^3 = 9z + 4$ не має розв'язків в цілих числах.

ТЕМА 3. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ

Розглянемо приклад доведення нерівностей в яких виділяють повний квадрат.

Приклад 1. Доведіть, що $x^2 + 5y^2 + 4xy - 4y + 4 \geq 0$ при всіх дійсних значеннях x і y.

Розв'язання. Виділимо в лівій частині нерівності повні квадрати, маємо:

$$(x^2 + 4xy + 4y^2) + (y^2 - 4y + 4) =$$

$$= (x + 2y)^2 + (y - 2)^2,$$

зрозуміло, що $(x+2y)^2 \geq 0$, $(y-2)^2 \geq 0$, а значить $(x+2y)^2+(y-2)^2 \geq 0$. Отже, при всіх дійсних значеннях x і y $x^2+5y^2+4xy-4y+4 \geq 0$.

Розглянемо приклади доведення нерівностей в яких використовується метод різниці, який полягає у розгляданні лівої і правої частини (якщо різниця додатна, то ліва частина більша за праву).

Приклад 2. Довести нерівність $x^3+y^3 \geq xy(x+y)$, якщо $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Розв'язання. Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$x^3+y^3-x^2y-xy^2 = x^2(x-y)-y^2(x-y)=(x-y)(x^2-y^2)=$$

$$=(x-y)(x-y)(x+y)=(x+y)(x-y)^2,$$

за умовою $x \geq 0$, $y \geq 0$, тому $x+y \geq 0$, $(x-y)^2 \geq 0$, значить $(x+y)(x-y)^2 \geq 0$. Отже, $x^3+y^3 \geq xy(x+y)$.

Назвемо нерівність $x^3+y^3 \geq xy(x+y)$, якщо $x \geq 0$, $y \geq 0$ нерівність двох кубів, а нерівність виду $x^3+y^3+z^3 \geq 3xyz$ нерівність трьох кубів, якщо $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$. Рівність має місце якщо $x=y=z$.

Приклад 3. Довести нерівність $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ при будь-яких значеннях a,b,c.

Розв'язання. Помножимо ліву і праву частину нерівності на 2, маємо $2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2bc+2ac$.

Розглянемо різницю лівої і правої частин нерівності:

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac=(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ac+a^2)=$$

$$=(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0, \text{ оскільки } (a-b)^2 \geq 0,\ (b-c)^2 \geq 0,\ (c-a)^2 \geq 0.$$

Отже, $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$.

Надалі нерівність $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ будемо називати оцінка квадратів трьох чисел, а нерівність виду $a^2+b^2 \geq 2ab$ нерівність двох квадратів. Рівність має місце якщо $a=b=c$.

Приклад 4. Дійсні числа x і y задовольняють умову $x+y=4$. Доведіть, що $x^2+y^2 \geq 8$.

Розв'язання. Піднесемо ліву і праву частину рівності $x+y=4$ до квадрату, маємо: $x^2+2xy+y^2=16$. Використаємо відому нерівність, що $x^2+y^2 \geq 2xy$, тоді $x^2+y^2+x^2+y^2 \geq x^2+2xy+y^2$, $2(x^2+y^2) \geq 16$, отже $x^2+y^2 \geq 8$.

Приклад 5. Довести, що при $a \geq 0$, $в \geq 0$ і $c \geq 0$ виконується нерівність

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geq 6abc.$$

Розв'язання. Розкриємо дужки: $a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2 \geq 6abc$, тоді згрупувавши, маємо

$$c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2) \geq 6abc.$$

Використаємо відому нерівність, що $x^2+y^2\ge 2xy$, маємо:

$$c(a^2+b^2)\ge 2abc,\ a(b^2+c^2)\ge 2abc,\ b(a^2+c^2)\ge 2abc\ .$$

Додамо останні три нерівності $c(a^2+b^2)+a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)\ge 6abc$, отже $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\ge 6abc$.

Приклад 6. Довести, що при $a\ge 0$, $в\ge 0$ і $c\ge 0$ виконується нерівність

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\le 2(a^3+b^3+c^3).$$

Розв'язання. Використаємо відому нерівність, що $x^3+y^3\ge xy(x+y)$, якщо $x\ge 0$, $y\ge 0$. Тоді застосувавши її тричі маємо: $a^3+b^3\ge ab(a+b)$, $a^3+c^3\ge ac(a+c)$, $c^3+b^3\ge bc(c+b)$. Додамо всі три нерівності, маємо: $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\le 2(a^3+b^3+c^3)$.

Приклад 7. Довести, що при $a>0$, $в>0$ і $c>0$ виконується нерівність $\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b}\ge 3$.

Розв'язання. Помножимо ліву і праву частину нерівності на $(в+c)(c+a)(a+b)$, маємо:

$$2a(c+a)(a+b)+2b(b+c)(a+b)+2c(b+c)(c+a)\ge 3(b+c)(c+a)(a+b),$$

$$2a(ca+bc+a^2+ab)+2b(ba+b^2+ca+cb)+2c(bc+ba+c^2+ca)\ge$$
$$\ge 3(bc+ba+c^2+ca)(a+b),$$

$$2ca^2+2abc+2a^3+2ba^2+2ab^2+2b^3+2abc+2cb^2+2bc^2+2abc+2c^3+2ac^2\ge$$
$$\ge 3(abc+ba^2+ac^2+ca^2+cb^2+ab^2+bc^2+abc),$$

$$2ca^2+6abc+2a^3+2ba^2+2ab^2+2b^3+2cb^2+2bc^2+2c^3+2ac^2\ge$$
$$\ge 6abc+3(ba^2+ac^2+ca^2+cb^2+ab^2+bc^2),$$

$2a^3+2b^3+2c^3\ge ba^2+ac^2+ca^2+cb^2+ab^2+bc^2$, тоді

$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\le 2(a^3+b^3+c^3)$, таку нерівність доводили в попередньому завданні.

Приклад 8. Доведіть нерівність $\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4\ge\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ при будь-яких значеннях a,b,c.

Розв'язання. Маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4=\left((\frac{a}{b})^2\right)^2+\left((\frac{b}{c})^2\right)^2+\left((\frac{c}{a})^2\right)^2\ge\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{a}{b}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2\cdot\left(\frac{c}{a}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\ge\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{b}+\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{a}=\frac{a}{b}+\frac{c}{a}+\frac{b}{c},$$ що і треба було довести.

Розглянемо нерівність Коші: середнє арифметичне кількох невід'ємних чисел не менше від їхнього середнього геометричного, тобто $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$***. Рівність досягається тільки тоді, коли всі числа рівні між собою. Нерівність Коші для двох чисел: при будь-яких невід'ємних*** a ***і*** b ***виконується нерівність*** $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$***.***

Приклад 9. Довести нерівність $(a+b)(a+c)(b+c) \ge 8abc$, якщо $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$.

Розв'язання. Запишемо нерівність Коші для трьох пар чисел, при умові $a \ge 0$, $b \ge 0$, $c \ge 0$, маємо:

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}, \ \frac{a+c}{2} \ge \sqrt{ac}, \ \frac{b+c}{2} \ge \sqrt{bc} \ .$$

Використаємо властивість числових нерівностей перемножимо останні три, маємо:

$$\frac{(a+b)(a+c)(b+c)}{8} \ge \sqrt{a^2 b^2 c^2}, \text{ тоді } (a+b)(a+c)(b+c) \ge 8abc.$$

Приклад 10. Знайдіть найбільше значення виразу xy, якщо $x > 0$, $y > 0$ і $3x + y = 10$.

Розв'язання. Застосуємо нерівність Коші для пари чисел $3x$ і y при умові , $x > 0$, $y > 0$ маємо:

$\frac{3x+y}{2} \ge \sqrt{3xy}$, тоді $\frac{10}{2} \ge \sqrt{3xy}$, $\sqrt{3xy} \le 5$, $3xy \le 25$, $xy \le \frac{25}{3}$. З останньої нерівності можна зробити висновок, що найбільше значення виразу xy буде дорівнювати $\frac{25}{3}$, якщо існують такі значення x і y.

У записаній нерівності Коші рівність досягається якщо $3x = y$, тоді отримаємо систему рівнянь:

$\begin{cases} y = 3x, \\ 3x + y = 10; \end{cases}$ тоді $6x = 10$, $x = \frac{5}{3}$, а $y = 5$. Отже, найбільше значення виразу $xy = \frac{25}{3}$.

Приклад 11. Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{x^2}{25 + x^4}$.

Розв'язання. Запишемо дріб $\frac{x^2}{25 + x^4}$ щоб чисельником було число, тобто $\frac{1}{\frac{25 + x^4}{x^2}}$.

Найбільше значення виразу буде тоді коли $\frac{25 + x^4}{x^2} = x^2 + \frac{25}{x^2}$ буде набирати найменшого значення. Застосуємо нерівність Коші до пари чисел x^2 і $\frac{25}{x^2}$, маємо: $\frac{x^2 + \frac{25}{x^2}}{2} \ge \sqrt{x^2 \cdot \frac{25}{x^2}}$, тоді $x^2 + \frac{25}{x^2} \ge 10$. З останньої нерівності можна зробити висновок, що найменше значення виразу $x^2 + \frac{25}{x^2}$ буде 10 , якщо існують такі значення x і y. У записаній нерівності Коші рівність досягається якщо $x^2 = \frac{25}{x^2}$, тобто при $x = \pm\sqrt{5}$. Отже, $\frac{x^2}{25+x^4} \le \frac{1}{10}$ і найбільше значення виразу $\frac{x^2}{25+x^4} = \frac{1}{10}$.

Розглянемо середні величини:

1) $A_n = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ ***- середнє арифметичне, де*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***- будь-які числа, тоді середнє арифметичне для двох чисел -*** $\frac{a+b}{2}$.

2) $B_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ ***- середнє геометричне, де*** $a_1 \ge 0$, $a_2 \ge 0, \ldots, a_n \ge 0$, ***тоді середнє геометричне для двох чисел -*** $\sqrt{ab}$.

3) $C_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$ ***- середнє гармонійне, а для двох чисел -*** $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ ***при умові, що знаменники не дорівнюють нулю.***

4) $D_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}}$ ***- середнє квадратичне, де*** $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ***- будь-які числа, тоді середнє квадратичне для двох чисел*** $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Загальне співвідношення між середніми $D_n \ge A_n \ge B_n \ge C_n$, ***причому рівність досягається при*** $a_1 = a_2 = ... = a_n$, ***а для двох чисел справедливий такий ланцюжок нерівностей*** $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, ***де*** $a > 0$ ***і*** $b > 0$.

Приклад 12. Доведіть, що коли $a > 0$ і $b > 0$, то $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \ge 4$.

Розв’язання. Використаємо двічі відому нерівність Коші:

1) $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$, то $a + b \ge 2\sqrt{ab}$.

2) $\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \ge \sqrt{\frac{1}{ab}}$, то $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \ge 2\sqrt{\frac{1}{ab}}$.

Використовуючи властивості числових нерівностей помножимо останні дві, маємо:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \ge 4 \cdot \sqrt{ab} \cdot \sqrt{\frac{1}{ab}}, \text{ тоді}$$

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \ge 4.$$

Приклад 13. Доведіть нерівність $\sqrt{x^2+(2013-y)^2}+\sqrt{(2013-x)^2+y^2}\ge\sqrt{2}\cdot 2013$.

Розв'язання. Використаємо двічі відому нерівність, що $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\ge\dfrac{a+b}{2}$.

1) $\sqrt{\dfrac{x^2+(2013-y)^2}{2}}\ge\dfrac{x+2013-y}{2}$, тоді $\sqrt{x^2+(2013-y)^2}\ge\sqrt{2}\cdot\dfrac{x+2013-y}{2}$.

2) $\sqrt{\dfrac{(2013-x)^2+y^2}{2}}\ge\dfrac{2013-x+y}{2}$, тоді $\sqrt{(2013-x)^2+y^2}\ge\sqrt{2}\cdot\dfrac{2013-x+y}{2}$.

Використовуючи властивості числових нерівностей додамо останні дві, маємо:

$$\sqrt{x^2+(2013-y)^2}+\sqrt{(2013-x)^2+y^2}\ge\sqrt{2}\cdot\left(\frac{x+2013-y}{2}+\frac{2013-x+y}{2}\right),$$

$$\sqrt{x^2+(2013-y)^2}+\sqrt{(2013-x)^2+y^2}\ge\sqrt{2}\cdot\frac{4026}{2}, \text{ остаточно}$$

$$\sqrt{x^2+(2013-y)^2}+\sqrt{(2013-x)^2+y^2}\ge\sqrt{2}\cdot 2013.$$

Потрібно знати такі правила:

1) Якщо сума додатних чисел постійна, то їхній добуток буде найбільшим, коли числа рівні між собою.

2) Якщо добуток додатних чисел постійний, то їхня сума буде найменшою, коли числа рівні між собою.

Приклад 14. Знайти найменше значення виразу $\dfrac{x^4+x^2+4}{x^2+1}$.

Розв'язання.

Виконаємо перетворення $\dfrac{x^4+x^2+4}{x^2+1}=\dfrac{x^2(x^2+1)+4}{x^2+1}=x^2+\dfrac{4}{x^2+1}=x^2+1+\dfrac{4}{x^2+1}-1$. Оскільки при будь-якому значенні x добуток виразів x^2+1 і $\dfrac{4}{x^2+1}$ завжди дорівнює 4, то найменше значення виразу $x^2+1+\dfrac{4}{x^2+1}$ досягається коли $x^2+1=\dfrac{4}{x^2+1}$, тоді $(x^2+1)^2=4$, $x^2+1=2$, а значить $\dfrac{x^4+x^2+4}{x^2+1}=x^2+1+\dfrac{4}{x^2+1}-1=2+\dfrac{2}{2}-1=3$.

Відповідь: 3.

Приклад 15. Знайти найбільше значення виразу $x(5-x)$, якщо $0<x<5$.

Розв'язання. Якщо $0<x<5$, то вирази x і $5-x$ - додатні, а їхня сума є сталим числом 5, а значить найбільше значення виразу буде коли $x=(5-x)$, тоді $x=2{,}5$. Отже, найбільше значення виразу $x(5-x)=2{,}5\cdot 2{,}5=6{,}25$.

Відповідь: 6,25.

Відомі також нерівності оцінки суми двох взаємно обернених чисел:

1) Якщо $b<0$, то сума двох взаємно обернених від'ємних чисел не більша за -2, тобто $b+\frac{1}{b}\le -2$.

2) Якщо $a>0$, то сума двох взаємно обернених додатних чисел не менша за 2, тобто $a+\frac{1}{a}\ge 2$.

Приклад 16. Довести, що $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9$, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Розв'язання. Розкриємо дужки в лівій частині нерівності, маємо:

$$1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1\ge 9,$$

$$(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})\ge 6.$$

Використаємо відомі нерівності, що $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$, $\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\ge 2$, $\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\ge 2$, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$. Використаємо властивості числових нерівностей додамо останні три, маємо:

$$(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{b}{c}+\frac{c}{b})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})\ge 6, \text{ отже } (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9.$$

Запишемо відомі нерівності з модулями:

1) Модуль суми не перевищує суми модулів доданків, тобто: $|a_1+a_2+...+a_n|\le|a_1|+|a_2|+...+|a_n|$, а для двох чисел $|a+b|\le|a|+|b|$.

2) $||a|-|b||\le|a\pm b|\le|a|+|b|$.

Приклад 17. Для довільного дійсного x доведіть нерівність $|x-1|+|x-5|\ge 4$. Знайдіть значення x, при яких виконується рівність.

Розв'язання. Використаємо відому нерівність для двох чисел, що $|a+b|\le|a|+|b|$ та властивість модулів $|-x|=|x|$. Тоді маємо: $|x-1|+|x-5|=|x-1|+|5-x|\ge|x-1+5-x|=|4|=4$. Рівність досягається, якщо $x\in[1;5]$.

Нерівність Коші-Буняковського: для будь-яких дійсних чисел $a_1,a_2,...,a_n$ і $b_1,b_2,...,b_n$ виконується нерівність $(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)$. Рівність досягається тоді і тільки тоді, коли числа a_m і b_m пропорційні (якщо ці числа не дорівнюють нулю, то це значить, що $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=...=\frac{a_n}{b_n}$, а якщо якісь із цих чисел дорівнюють нулю, то пропорційність означає, що існує таке число $\lambda\ne 0$, що $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, ..., $a_n=\lambda b_n$. Нерівність Коші-Буняковського для двох наборів чисел $(a_1;a_2)$ і $(b_1;b_2)$ буде $(a_1b_1+a_2b_2)^2\le(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$.

Приклад 18. Довести, що $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$.

Розв'язання. Розглянемо два набори чисел $\left(\sqrt{a};\sqrt{b};\sqrt{c}\right)$ і $\left(\sqrt{\frac{1}{a}};\sqrt{\frac{1}{b}};\sqrt{\frac{1}{c}}\right)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$\left(\left(\sqrt{a}\right)^2+\left(\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{c}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\sqrt{\frac{1}{a}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{b}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2\right)\geq\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{\frac{1}{b}}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{\frac{1}{c}}\right)^2,$$

$$\text{отже, } (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.$$

Приклад 19. Знайдіть найбільше і найменше значення виразу $3x+4y$, якщо $x^2+y^2=25$.

Розв'язання. Розглянемо два набори чисел $(x;y)$ і $(3;4)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського: $(3x+4y)^2\leq\left(x^2+y^2\right)\left(3^2+4^2\right)$. Використовуючи, що $x^2+y^2=25$, маємо $(3x+4y)^2\leq 25\cdot 25$, $(3x+4y)^2\leq 625$, значить $-25\leq 33x+4y\leq 25$. Отже, найбільше значення виразу $3x+4y$ дорівнює 25, а найменше -25.

Приклад 20. Знайдіть найбільше значення виразу $3x-y+z$, якщо $x^2+y^2+z^2=44$.

Розв'язання. Розглянемо два набори чисел $(x;y;z)$ і $(3;-1;1)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського, маємо: $(3x-y+z)^2\leq\left(x^2+y^2+z^2\right)(9+1+1)=44\cdot 11=22^2$, тоді $|3x-y+z|\leq 22$. Найбільше значення виразу $3x-y+z$ дорівнює 22.

Приклад 21. Довести нерівність $\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\leq 9$ при умові, що $a+b+c=2$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Розглянемо два набори чисел $\left(\sqrt{6a+1};\sqrt{6b+1};\sqrt{6c+1}\right)$ і $(1;1;1)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського, маємо:

$$\left(1\cdot\sqrt{6a+1}+1\cdot\sqrt{6b+1}+1\cdot\sqrt{6c+1}\right)^2\leq\left(\left(\sqrt{6a+1}\right)^2+\left(\sqrt{6b+1}\right)^2+\left(\sqrt{6c+1}\right)^2\right)\left(1^2+1^2+1^2\right),$$

$$\left(\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\right)^2\leq(6a+1+6b+1+6c+1)\cdot 3,$$

$$\left(\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\right)^2\leq(6(a+b+c)+3)\cdot 3,$$

$$\left(\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\right)^2\leq(6\cdot 2+3)\cdot 3,$$

$$\left(\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\right)^2\leq 45,$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\leq\sqrt{45}, \text{ значить}$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\leq 9.$$

2 спосіб. Нехай $\sqrt{6a+1}=x$, $\sqrt{6b+1}=y$, $\sqrt{6c+1}=z$. Тоді $6a+1=x^2$, $6b+1=y^2$, $6c+1=z^2$, додавши останні три рівності маємо: $x^2+y^2+z^2=6(a+b+c)+3$, $x^2+y^2+z^2=6\cdot 2+3$, $x^2+y^2+z^2=15$. Використаємо відому нерівність трьох квадратів $xy+xz+yz\le x^2+y^2+z^2$, запишемо її так:

$$x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)\le 3(x^2+y^2+z^2)\text{, тоді}$$

$$(x+y+z)^2\le 3\cdot 15=45,$$

$$\left(\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\right)^2\le 45,$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le\sqrt{45}\text{, значить}$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le 9.$$

3 спосіб. Використаємо нерівність Коші для пар чисел $(1;6a+1)$, $(1;6b+1)$, $(1;6c+1)$, маємо:

$\dfrac{1+6a+1}{2}\ge 1\cdot\sqrt{6a+1}$, $\dfrac{1+6b+1}{2}\ge 1\cdot\sqrt{6b+1}$, $\dfrac{1+6c+1}{2}\ge 1\cdot\sqrt{6c+1}$. Додамо отримані нерівності, маємо:

$$\frac{2+6a}{2}+\frac{2+6b}{2}+\frac{2+6c}{2}\ge\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1},$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le 3+3(a+b+c),$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le 3+3\cdot 2,$$

$$\sqrt{6a+1}+\sqrt{6b+1}+\sqrt{6c+1}\le 9.$$

Розглянемо ключові нерівності за допомогою яких можна розв'язати ряд нерівностей.

1) $\dfrac{a^2}{b}\ge 2a-b$***, де*** $b>0$***;*** $\dfrac{a^3}{b^2}\ge 3a-2b$***, де*** $a>0$***,*** $b>0$***. Загальний запис такого виду нерівностей*** $\dfrac{a^{n+1}}{b^n}\ge(n+1)a-nb$***, де*** $a>0$***,*** $b>0$ ***і*** $n\in N$***.***

2) $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}\ge\dfrac{(a+b)^2}{x+y}$***, де*** $x>0$***,*** $y>0$***;*** $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}+\dfrac{c^2}{z}\ge\dfrac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$***, де*** $x>0$***,*** $y>0$***,*** $z>0$***. Загальний запис такого виду нерівностей*** $\dfrac{a_1^2}{x_1}+\dfrac{a_2^2}{x_2}+\ldots+\dfrac{a_n^2}{x_n}\ge\dfrac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2}{x_1+x_2+\ldots+x_n}$***.***

Приклад 22. Довести, що коли $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^4}{a^3}\ge 2(b+c)-a$.

Застосуємо відому нерівність для кожного доданка, що $\dfrac{a^{n+1}}{b^n}\ge(n+1)a-nb$, де $a>0$, $b>0$ і $n\in N$, маємо: $\dfrac{a^2}{b}\ge 2a-b$, $\dfrac{b^3}{c^2}\ge 3b-2c$, $\dfrac{c^4}{a^3}\ge 4c-3a$. Додамо нерівності, маємо:

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^4}{a^3}\ge 2a-b+3b-2c+4c-3a\,,$$

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^4}{a^3}\ge 2(b+c)-a\,.$$

Приклад 23. Відомо, що $a>0$, $b>0$, $c>0$. Доведіть нерівність $\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c}\ge\frac{9}{a+b+c}$.

Розв'язання.

$\frac{2}{a+b}+\frac{2}{b+c}+\frac{2}{a+c}=2\cdot\left(\frac{1^2}{a+b}+\frac{1^2}{b+c}+\frac{1^2}{a+c}\right)\ge 2\cdot\frac{(1+1+1)}{a+b+b+c+a+c}=\frac{9}{a+b+c}$, тобто застосували ключову нерівність, що $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, де $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Приклад 24. Відомо, що $a>0$, $b>0$, $c>0$. Доведіть нерівність $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{1}{2}(a+b+c)$.

Розв'язання. ***1 спосіб.*** Застосуємо ключову нерівність, що $\frac{a^2}{x}+\frac{b^2}{y}+\frac{c^2}{z}\ge\frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, де $x>0$, $y>0$, $z>0$, маємо:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge\frac{(a+b+c)^2}{b+c+a+c+a+b}=$$
$$=\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}=\frac{1}{2}(a+b+c)$$

2 спосіб. Використаємо тричі відому нерівність, що $\frac{a^2}{b}\ge 2a-b$, маємо:

$$\frac{a^2}{b+c}\ge 2a-(b+c)=2a-b-c\,,$$

$$\frac{b^2}{a+c}\ge 2b-(a+c)=2b-a-c\,,$$

$$\frac{c^2}{a+b}\ge 2c-(a+b)=2c-a-b\,.$$

Додамо отримані нерівності, маємо:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge 2a-b-c+2b-a-c+2c-a-b=0\,,$$

таким чином початкову нерівність не довели, зробимо так:

$$\frac{a^2}{b+c}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2a)^2}{b+c}\ge\frac{1}{4}\cdot(4a-b-c),$$

$$\frac{b^2}{a+c}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2b)^2}{a+c}\geq\frac{1}{4}\cdot(4b-a-c),$$

$\frac{c^2}{a+b}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2c)^2}{a+b}\geq\frac{1}{4}\cdot(4c-a-b)$, додамо останні три нерівності, маємо:

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{4}(4a-b-c+4b-a-c+4c-a-b),\text{ отже}$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}(a+b+c).$$

3 спосіб. Розглянемо два набори чисел $\left(\sqrt{b+c};\sqrt{a+c};\sqrt{a+b}\right)$ і $\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}};\frac{b}{\sqrt{a+c}};\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)$ та застосуємо нерівність Коші-Буняковського:

$$\left(\left(\sqrt{b+c}\right)^2+\left(\sqrt{a+c}\right)^2+\left(\sqrt{a+b}\right)^2\right)\cdot\left(\left(\frac{a}{\sqrt{b+c}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a+c}}\right)^2+\left(\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2\right)\geq$$

$$\left(\sqrt{b+c}\cdot\frac{a}{\sqrt{b+c}}+\sqrt{a+c}\cdot\frac{b}{\sqrt{a+c}}+\sqrt{a+b}\cdot\frac{c}{\sqrt{a+b}}\right)^2,\text{ тоді}$$

$$(b+c+a+c+a+b)\cdot\left(\left(\frac{a^2}{b+c}\right)+\left(\frac{b^2}{a+c}\right)+\left(\frac{c^2}{a+b}\right)\right)\geq(a+b+c)^2,$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2x+2y+2z},\text{ отже}$$

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{1}{2}(a+b+c).$$

Приклад 25. Відомо, що $a>0$, $b>0$, $c>0$. Доведіть нерівність $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}$.

Розв’язання. Помножимо праву і ліву частину нерівності на вираз $a^3b^3c^3$, маємо:

$$a^8+b^8+c^8\geq a^2b^3c^3+a^3b^2c^3+a^3b^3c^2.$$

Поділимо нерівність на $a^2b^2c^2$, маємо: $\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\geq ab+ac+bc$. Застосуємо відому нерівність до кожного доданку останньої нерівності, що $\frac{a^3}{b^2}\geq 3a-2b$, де $a>0$, $b>0$, маємо:

$\frac{a^6}{b^2c^2}=\frac{(a^2)^3}{(bc)^2}\geq 3a^2-2bc$, $\frac{b^6}{a^2c^2}=\frac{(b^2)^3}{(ac)^2}\geq 3b^2-2ac$, $\frac{c^6}{a^2b^2}=\frac{(c^2)^3}{(ab)^2}\geq 3c^2-2ab$. Додамо отримані нерівності

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\ge 3\left(a^2+b^2+c^2\right)-2ab-2ac-2bc\text{, тоді}$$

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right)-2ab-2ac-2bc=2\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)+a^2+b^2+c^2.$$

Застосуємо ключову нерівність, що $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$ або $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\ge 0$, маємо:

$$\begin{aligned}&3\left(a^2+b^2+c^2\right)-2ab-2ac-2bc=\\&=2\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)+a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac\end{aligned}\text{, отже}$$

$$\frac{a^6}{b^2c^2}+\frac{b^6}{a^2c^2}+\frac{c^6}{a^2b^2}\ge ab+ac+bc\text{, а значить}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\le\frac{a^8+b^8+c^8}{a^3b^3c^3}.$$

Розглянемо приклади доведення нерівностей в яких використовуються метод математичної індукції.

Приклад 26. Доведіть, що $2^n>2n+1$, якщо $n\ge 3$, при будь-якому $n\in N$.

Розв’язання

Використаємо метод математичної індукції.

1. При n=3 нерівність виконується:

$$2^3>2\cdot 3+1,$$
$$8>7.$$

2. Припускаємо, що задана нерівність справедлива при n=k, де $k\ge 3$, тобто: $2^k>2k+1\Rightarrow 2^k-2k-1>0$. (1)

3. Доведемо, що задана нерівність виконується при n=k+1, тобто:

$$2^{k+1}>2(k+1)+1.$$

Розглянемо різницю $2^{k+1}-2(k+1)-1=2^k\cdot 2-2k-3=2\left(2^k-2k-1\right)+2k-1>0$ (оскільки вираз у дужках за нерівністю (1) додатний і при $k\ge 3$ вираз $2k-1$ теж додатний), що потрібно було довести.

Розглянемо приклади доведення нерівностей в яких використовуються різні методи.

Приклад 27. Доведіть нерівність $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

Розв’язання. Скористаємося відомим твердженням, що $\frac{a}{b}<\frac{a+m}{b+m}$, де $m>0$ і $b>a>0$, маємо: $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}<\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$, …, $\frac{99}{100}<\frac{100}{101}$. Перемноживши ці нерівності, дістанемо $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{100}{101}$. Помножимо ліву і праву частину останньої нерівності на $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}>0$, маємо:

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)^2<\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\frac{99}{100}\cdot\frac{100}{101},$$

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}\right)^2<\frac{1}{101},$$

$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{\sqrt{101}}<\frac{1}{\sqrt{100}}<\frac{1}{10}$, що й потрібно було довести.

Приклад 28. Довести нерівність $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2012^2}<1$.

Розв'язання. Порівняємо наступні дроби: $\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}$, $\frac{1}{4^2}<\frac{1}{3\cdot 4}$, …, $\frac{1}{2012^2}<\frac{1}{2011\cdot 2012}$.

Додамо нерівності, маємо: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2012^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{2011\cdot 2012}$,

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2012^2}<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2011}-\frac{1}{2012}\right),$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2012^2}<1-\frac{1}{2012}, \text{ отже}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{2012^2}<1.$$

Приклад 29. Доведіть, що для будь-якого $n\in N$, $n\geq 2$ виконується нерівність $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2}$.

Розв'язання. Порівняємо наступні дроби: $\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{n+2}>\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}$, …, $\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+n}=\frac{1}{2n}$. Додамо нерівності, маємо: $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$, що й потрібно було довести.

Приклад 30. Довести нерівність $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots+\frac{1}{2013^2}<\frac{1}{4}$.

Розв'язання. Загальний член суми має вигляд $\frac{1}{(2n+1)^2}$. Перетворимо його

$$\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{1}{4n^2+4n+1}<\frac{1}{4n^2+4n}, \text{ тоді}$$

$$\frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4n(n+1)},$$

$$\frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Порівняємо кожний доданок початково нерівності використовуючи нерівність $\frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, маємо: $\frac{1}{3^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right)$, $\frac{1}{5^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)$, $\frac{1}{7^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$, …, $\frac{1}{2013^2} < \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1006} - \frac{1}{1007}\right)$. Додамо всі нерівності:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + ... + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1006} - \frac{1}{1007}\right),$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + + ... + \frac{1}{1006} - \frac{1}{1007}\right),$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{1007}\right), \text{ отже}$$

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{2013^2} < \frac{1}{4}.$$

Приклад 31. Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1$.

Розв'язання. Порівняємо наступні дроби: $\frac{a}{a+b} > \frac{a}{a+b+c}$, $\frac{b}{b+c} > \frac{b}{a+b+c}$, $\frac{c}{a+c} > \frac{c}{a+b+c}$. Додамо отримані три нерівності:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c},$$

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a+b+c}{a+b+c},$$

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > 1.$$

Приклад 32. Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$.

Розв'язання. Введемо заміну: $b + c = 2x$, $a + c = 2y$, $b + a = 2z$. Додамо рівності:

$$b + c + a + c + b + a = 2x + 2y + 2z,$$

$$a + b + c = x + y + z, \text{ тоді}$$

$$a = x + y + z - (b + c) = y + z - x,$$

$$b = x + y + z - (a + c) = x + z - y,$$

$$c = x + y + z - (a + b) = x + y - z.$$

Розглянемо ліву частину початкової нерівності, маємо:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{z}{x} - 1 + \frac{x}{y} + \frac{z}{y} - 1 + \frac{x}{z} + \frac{y}{z} - 1\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) - \frac{3}{2}.$$

Використаємо, що сума двох взаємно обернених додатних чисел a і b не менша за 2, тобто $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Тоді: $\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z}\right) - \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$. Отже,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Доведіть, що $x^2 - 4x + y^2 + 2y + 5 \geq 0$ при всіх дійсних значеннях x і y.
2. Доведіть, що $x^2 + 6x + y^2 - 2y + 10 \geq 0$ при всіх дійсних значеннях x і y.
3. Доведіть, що $10x^2 - 6x + 2xy + y^2 + 2 > 0$ при всіх дійсних значеннях x і y.
4. Доведіть, що $3x^2 - 4xy + 4y^2 \geq 0$ при всіх дійсних значеннях x і y.
5. Доведіть, що $9x^2 - 6xy + 4y^2 \geq 0$ при всіх дійсних значеннях x і y.
6. Доведіть, що $x^6 + y^6 \geq x^5 y + xy^5$ при всіх дійсних значеннях x і y.
7. Доведіть, що $a^8 + b^8 \geq a^7 b + ab^7$ при всіх дійсних значеннях a і b.
8. Доведіть, що при $a \geq -2$ виконується нерівність $a^3 + 8 \geq 2a^2 + 4a$.
9. Доведіть, що $(a+4)(a-8) > 4(2a - 19)$ при всіх дійсних значеннях a.
10. Доведіть, що $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$ при всіх дійсних значеннях x і y.
11. Доведіть, що $a^2 + b^2 + 4 \geq ab + 2a + 2b$ при всіх дійсних значеннях a і b.
12. Доведіть нерівність $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$ при будь-яких значеннях a, b, c.
13. Доведіть нерівність $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}}$, якщо $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.
14. Доведіть, що $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$ при всіх дійсних значеннях a, b, c.
15. Довести нерівність $(a+2)(b+6)(c+3) \geq 48\sqrt{abc}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$.

16. Довести нерівність $(a+2)(b+5)(c+10)\ge 80\sqrt{abc}$, якщо $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$.

17. Довести нерівність $(a+4)(b+1)(c+4)\ge 32\sqrt{abc}$, якщо $a\ge 0$, $b\ge 0$, $c\ge 0$.

18. Знайдіть найбільше значення виразу xy, якщо $x>0$, $y>0$ і $x+2y=6$.

19. Знайдіть найбільше значення виразу xy, якщо $x>0$, $y>0$ і $3x+4y=24$.

20. Знайдіть найменше значення виразу $x+2y$, якщо $x>0$, $y>0$ і $xy=2$.

21. Знайдіть найменше значення виразу $3x+y$, якщо $x>0$, $y>0$ і $xy=3$.

22. Доведіть, що коли $a>0$ і $b>0$, то $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)\ge 4$.

23. Доведіть нерівність $(x^2+9)(y^4+16)\ge 48xy^2$, якщо $x\ge 0$, $y\ge 0$.

24. Доведіть, що коли $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $\frac{c+a}{b}+\frac{c+b}{a}+\frac{a+b}{c}\ge 6$.

25. Доведіть нерівність $\sqrt{x^2+(1-y)^2}+\sqrt{(1-x)^2+y^2}\ge\sqrt{2}$.

26. Знайдіть найбільше значення виразу $\frac{x^2}{9+x^4}$.

27. Знайти найбільше значення виразу $x(4-x)$, якщо $0<x<4$.

28. Дійсні числа x і y задовольняють умову $x+y=2$. Доведіть, що $x^2+y^2\ge 2$.

29. Для довільного дійсного x доведіть нерівність $|x-2|+|x-6|\ge 4$. Знайдіть значення x, при яких виконується рівність.

30. Для довільного дійсного x доведіть нерівність $|x-1|+|x-2|+|x-3|\ge 2$.

31. Довести, що $(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge (a+b+c)^2$, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$.

32. Довести, що $(a^4+b^4+c^4)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge (a+b+c)^2$, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$.

33. Знайдіть найменше значення виразу x^2+y^2, якщо $5x-12y=13$.

34. Довести нерівність $\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}\le 5$ при умові, що $a+b+c=\frac{8}{3}$.

35. Довести нерівність $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}\le 9$ при умові, що $a+b+c=6$.

36. Довести нерівність $\sqrt{3a+5}+\sqrt{3b+6}+\sqrt{3c+7}\le 12$ при умові, що $a+b+c=10$.

37. Доведіть, що $4^n>7n-5$, якщо $n\in N$.

38. Доведіть, що $3^n>4n+1$, якщо $n\in N$ і $n\ge 3$.

39. Довести, що коли $a>0$, $b>0$, $c>0$, то $\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3}\ge a+b+c$.

40. Доведіть, що коли $a > b > c$, то $\frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-c} > a + 2b + c$.

41. Довести, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a^4}{bc} + \frac{b^4}{ca} + \frac{c^4}{ab} \ge a^2 + b^2 + c^2$.

42. Довести, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a^2}{b+2c} + \frac{b^2}{c+2a} + \frac{c^2}{a+2b} \ge \frac{a+b+c}{3}$.

43. Довести, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a^3}{b+c} + \frac{b^3}{c+a} + \frac{c^3}{a+b} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$.

44. Доведіть нерівність $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{79}{80} < \frac{1}{9}$.

45. Доведіть нерівність $\frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot ... \cdot \frac{122}{121} < 11$.

46. Доведіть нерівність $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, при $n \in N$.

47. Доведіть нерівність $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{11}{13} \cdot ... \cdot \frac{4n-1}{4n+1} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4n+3}}$, при $n \in N$.

48. Довести нерівність $\frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} \cdot ... \cdot \frac{1}{n(n+1)} < 1$, при $n \in N$.

49. Довести нерівність $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{n^2} < 1$, де $n \in N$, $n \ge 2$.

50. Довести нерівність $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}$, $n \in N$.

51. Порівняйте числа $\frac{10^{2011}-1}{10^{2012}-1}$ і $\frac{10^{2012}-1}{10^{2013}-1}$.

52. Доведіть, що $(100!)^2 > 100^{50}$.

53. Доведіть, що коли $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, то $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

54. Довести, що при будь-яких дійсних значеннях a, $в$ і c виконується нерівність

$$a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \ge 6abc.$$

55. Довести, що $ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ac(a+c-2b) \ge 0$, якщо $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

56. Довести, що при будь-яких a і b виконується нерівність $a^2(1+b^4) + b^2(1+a^4) \le (1+a^4)(1+b^4)$.

57. Довести, що якщо $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ і $ac>0$, то виконується нерівність $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\geq 4$.

58. Довести, що $ab+bc+ca+a+b+c-6\geq 0$, якщо $a>0$, $b>0$, $c>0$ і $abc=1$.

59. Довести нерівність $a^3+b^3+c^3\geq a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}$, якщо $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$.

60. Довести нерівність $(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)\geq 9abc$, якщо $a\geq 0$, $b\geq 0$, $c\geq 0$.

61. Довести нерівність $\frac{a^3+b^6}{2}\geq 3ab^2-4$, якщо $a\geq 0$.

ТЕМА 4. МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ СУМ

Розглянемо суму послідовних натуральних чисел $S_1=1+2+3+...+n$, яка обчислюється за формулою $S_1=\frac{n(n+1)}{2}$.

Приклад 1. Обчислити суму послідовних натуральних чисел від 1 до 100.

Розв'язання. $S=1+2+3+...+100=(1+100)+(2+99)+...+(50+51)=101\cdot 50=5050$.

Можна було б обчислити за формулою.

Розглянемо суму квадратів послідовних натуральних чисел $S_2=1^2+2^2+3^2+...+n^2$, яка обчислюється за формулою $S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Доведення

Для обчислення даної суми розглянемо формулу:

$(m+1)^3=m^3+3m^2+3m+1$, запишемо цю формулу по іншому

$(m+1)^3-m^3=3m^2+3m+1$.

Підставимо в останню рівність числа від 1 до n, маємо:

m=1, $2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$,

m=2, $3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$,

m=3, $4^3-3^3=3\cdot 3^2+3\cdot 3+1$,

..............................,

m=n, $(n+1)^3-n^3=3n^2+3n+1$.

Додавши n рівностей отримаємо, що $(n+1)^3-1^3=3S_2+3S_1+n$. Тоді,

$$3S_2=(n+1)^3-1^3-3\frac{n(n+1)}{2}-n,$$

$$3S_2=(n+1)^3-(n+1)-3\frac{n(n+1)}{2},$$

$$3S_2=(n+1)\left[(n+1)^2-1-\frac{3n}{2}\right],$$

$$3S_2=(n+1)\,(n^2+2n+1-1-\frac{3n}{2}),$$

$$3S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2},$$

$$S_2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Розглянемо суму кубів послідовних натуральних чисел $S_3=1^3+2^3+3^3+...+n^3$**, яка обчислюється за формулою** $S_2=S_1^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$**.**

Доведення

1спосіб

Аналогічно попередньому доведенню потрібно розглянути формулу:

$(m+1)^4=m^4+4m^3+6m^2+4m+1$.

2 *спосіб*

Це досить цікавий і оригінальний спосіб.

$1^3=1^2$,

$1^3+2^3=(1+2)^2=9$,

$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2=36$,

$1^3+2^3+3^3+4^3=(1+2+3+4)^2=100$,

і т.д.

Ми бачимо, що $S_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2=S_1^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (1).

Далі використаємо доведення методом математичної індукції.

1) Припустимо, що при n=к дана рівність справджується, тобто:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\kappa^3=\frac{\kappa^2(\kappa+1)^2}{4} \qquad (2).$$

2) Доведемо, що при n=к+1 рівність (1) виконується. Додамо до обох частин рівності (2) вираз $(\kappa+1)^3$, маємо :

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\kappa^3+(\kappa+1)^3=\frac{\kappa^2(\kappa+1)^2}{4}+(\kappa+1)^3=\frac{(\kappa+1)^2(\kappa+2)^2}{4}.$$

Таким чином формула (1) справедлива для будь-якого n.

Для знаходження $S_\kappa=1^\kappa+2^\kappa+3^\kappa+\ldots+n^\kappa$ потрібно розглядати формулу для $(m+1)^{\kappa+1}$, а далі аналогічно, як і в другому типі.

Розглянемо приклади в яких розглядається загальний член суми.

Приклад 2. Обчислити $1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1)$.

Розв'язання. Розглянемо загальний член суми $n(n+1)=n^2+n$. *Подамо кожний доданок суми по іншому, підставивши в загальний член суми замість n натуральні числа від 1 до n.*

Маємо: $S=1\cdot 2+2\cdot 3+3\cdot 4+...+n(n+1)=(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+...+(n^2+n)=$

$$=(1^2+2^2+3^2+...+n^2)+(1+2+3+...+n)=S_2+S_1=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Приклад 3. Знайдіть суму $3+6+11+20+37+...+(2^n+n)$.

Розв'язання. Розглянемо загальний член суми 2^n+n. *Щоб знайти перший доданок число 3, потрібно замість n підставити 1, щоб знайти другий доданок число 6, потрібно замість n підставити 2 і т.д.*

Таким чином маємо:

$$S=3+6+11+20+37+...+(2^n+n)=(2^1+1)+(2^2+2)+(2^3+3)+...+(2^n+n)=$$

$$=(2^1+2^2+2^3+...+2^n)+(1+2+3+...+n)=$$

$$=\frac{2(2^n-1)}{2-1}+S_1=2^{n+1}-2+\frac{n(n+1)}{2}=2^{n+1}+\frac{n^2+n-4}{2}$$

Розглянемо завдання в яких потрібно побачити, що один із множників кожного доданку домножається на одне й те ж число.

Приклад 4. Знайдіть суму $S=1\cdot 3+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+...+(2n-1)\cdot 3^n$.

Розв'язання. Позначимо початкову рівність (1). Щоб обчислити дану суму потрібно помножити рівність (1) на 3, маємо:

$$3S=1\cdot 3^2+3\cdot 3^3+5\cdot 3^4+...+(2n-1)\cdot 3^{n+1} \qquad (2)$$

Віднімемо від першої рівності другу :

$$S-3S=1\cdot 3+2\cdot 3^2+2\cdot 3^3+...+2\cdot 3^n-(2n-1)\cdot 3^{n+1},$$

$$-2S=3+2\cdot\left(\underbrace{3^2+3^3+...+3^n}_{\text{геометрична прогресія}}\right)-(2n-1)\cdot 3^{n+1},$$

$$-2S=3+2\,\frac{3^2(3^{n-1}-1)}{3-1}-(2n-1)3^{n+1},$$

$$-2S=3+3^{n+1}-9-(2n-1)3^{n+1},$$

$$2S=(2n-1-1)3^{n+1}+6,$$

$$S=(n-1)3^{n+1}+3.$$

Приклад 5. Обчислити суму послідовності загальний член якої виражається формулою а $_n = \frac{n}{2^n}$.

Розв'язання. Запишемо а $_n$ у вигляді: а $_n = \frac{n}{2^n} = n \cdot \frac{1}{2^n}$.

Складаємо суму, підставляючи замість n числа від 1 до n, маємо:

$$S = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2^2} + 3 \cdot \frac{1}{2^3} + ... + n \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Щоб обрахувати дану суму, помножимо на $\frac{1}{2}$, маємо:

$$\frac{1}{2} S = 1 \cdot \frac{1}{2^2} + 2 \cdot \frac{1}{2^3} + 3 \cdot \frac{1}{2^4} + ... + n \cdot \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Віднявши від першої рівності другу, отримуємо:

$$S - \frac{1}{2} S = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... + \frac{1}{2^n}}_{геометрична\ прогресія} - n \cdot \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2} S = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^n} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} - n \cdot \frac{1}{2^{n+1}},$$

$$\frac{1}{2} \text{S=1-} \frac{1}{2^n} \text{-} \frac{n}{2^{n+1}},$$

$$\text{S=2-} \frac{2}{2^n} \text{-} \frac{n}{2^n}, \text{ остаточна відповідь } \text{S= 2-} \frac{2+n}{2^n}.$$

Розглянемо приклад іншого методу.

Приклад 6. Обчисліть суму $S = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{11}_{n\ раз}...1$.

Розв'язання. Для того, щоб обчислити дану суму ми повинні знати слідуючі перетворення:

$$1 = \frac{10-1}{9},\ 11 = \frac{10^2 - 1}{9},\ 111 = \frac{10^3 - 1}{9}, ...,\ \underbrace{11}_{n\ раз}...1 = \frac{10^n - 1}{9}$$

Підставивши в початкову рівність, маємо :

$$S = 1 + 11 + 111 + ... + \underbrace{11}_{n\ раз}...1 = \frac{10-1}{9} + \frac{10^2 - 1}{9} + \frac{10^3 - 1}{9} + ... + \frac{10^n - 1}{9} =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\left(10 + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n\right) - \left(\underbrace{1 + 1 + 1 + ... + 1}_{n\ раз} \right) \right) =$$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{10\left(10^{n}-1\right)}{10-1}-n\right)=\frac{1}{81}\left(10^{n+1}-9n-10\right).$$

Розглянемо метод «залишаються крайні».

Приклад 7. Обчисліть $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{49\cdot 50}$.

Розв'язання. Щоб обрахувати цю суму представимо кожний дріб, як різницю двох дробів, маємо:

$$S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{49\cdot 50}=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{49}-\frac{1}{50}\right)=\frac{1}{1}-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}.$$

Приклад 8. Обчисліть $\frac{4}{5\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 11}+\ldots+\frac{4}{(2n+3)(2n+5)}$.

Розв'язання. Щоб обрахувати дану суму представимо кожний дріб, як різницю двох дробів, помножену на 2, маємо :

$$S=\frac{4}{5\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 11}+\ldots+\frac{4}{(2n+3)(2n+5)}=2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+2\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+$$

$$+2\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\right)+\ldots+2\left(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)=2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+5}\right)=2\cdot\frac{2n+5-5}{5(2n+5)}=\frac{4n}{5(2n+5)}.$$

Завдання для самостійного розв'язання

1. Обчислити:

а) 2+4+6+8+...+1000; *г) 3+6+9+12+...+3n;*

б) 5+10+15+...+100; *д) 2+4+6+...+2n;*

в) 11+21+31+...+991+1001; *е) 1+3+5+...+(2n-1).*

2. Обчислити:

а) $1^2+2^2+3^2+\ldots+2003^2$; б) $1^3+2^3+3^3+\ldots+2003^3$;

в) $S_n=2^3+4^3+6^3+\ldots+(2n)^3$; г) $S_n=1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3$;

д) $2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2$; е) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$.

3. Обчислити:

а) $1\cdot 4+2\cdot 7+3\cdot 10+\ldots+n(3n+1)$; б) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 5+3\cdot 4\cdot 7+\ldots+n(n+1)(2n+1)$;

в) $13+31+85+\ldots+(3^{\kappa+1}+4)$; г) $2+14+62+\ldots+(4^{\kappa}-2)$;

д) $1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+3\cdot 4^2+\ldots+(n-1)\cdot n^2$; е) $\frac{1}{1}+\frac{3}{2}+\frac{7}{4}+\frac{15}{8}+\ldots+\frac{2^{\kappa}-1}{2^{\kappa-1}}$;

4. Обчислити:

а) $1\cdot 4+2\cdot 4^2+3\cdot 4^3+\ldots+n\cdot 4^n$;

б) обчисліть суму послідовності загальний член якої виражається формулою $\frac{n}{3^n}$.

в) $1\cdot 5+3\cdot 5^2+5\cdot 5^3+...+(2n-1)\cdot 5^n$; г) $x+2x^2+3x^3+...+n\cdot x^n$;

д) $x+5x^2+9x^3+...+(4n-3)x^n$; е) $x+4x^2+9x^3+16x^4+...+n^2\cdot x^n$

5. Обчислити:

а) $9+99+999+...+\underbrace{99...9}_{n\ раз}$; б) $7+77+777+...+\underbrace{77...7}_{n\ раз}$; в) $2+22+222+...+\underbrace{22...2}_{2n\ раз}$;

г) Розв’яжіть рівняння $0,(6)x=3+33+333+...+\underbrace{33...3}_{n\ раз}$;

д) Доведіть рівність $\left(\underbrace{66...6}_{n\ раз}\right)^2+\underbrace{88...8}_{n\ раз}=\underbrace{44...4}_{2n\ раз}$;

е) Обчисліть при n ≥ 3, $\sqrt{\underbrace{44...4}_{2n\ раз}+\underbrace{11}_{n+1\ раз}...1-\underbrace{66...6}_{n\ раз}}$.

6. Обчислити:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}$; б) $\frac{49}{2\cdot 9}+\frac{49}{9\cdot 16}+\frac{49}{16\cdot 23}+...+\frac{49}{65\cdot 72}$;

в) $\frac{1}{3\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 15}+...+\frac{1}{201\cdot 205}$; г) $\frac{1}{2\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 17}+...+\frac{1}{(5n-3)(5n+2)}$;

д) $\frac{3}{1\cdot 5}+\frac{3}{5\cdot 9}+\frac{3}{9\cdot 13}+...+\frac{3}{(4n-3)(4n+1)}$;

е) Розв’яжіть рівняння: 1) $0,(2)x=\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{2}{4\cdot 6}+\frac{2}{6\cdot 8}+...+\frac{2}{48\cdot 50}$;

2) $0,(38)x=\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 12}+...+\frac{1}{60\cdot 63}$.

ЗАВДАННЯ II ЕТАПУ ВСЕУКРАЇНСЬКИХ УЧНІВСЬКИХ ОЛІМПІАД З МАТЕМАТИКИ ЗА 1998-2012 РОКИ

6 КЛАС

1998-1999 навчальний рік

Завдання 1. На дошці в ряд виписано сто сімок. Чи можна між деякими з них поставити знаки «+» чи «-» так, щоб значення одержаного виразу дорівнювало 1999?

Завдання 2. Петрик задумав натуральне число, помножив його на 13, закреслив останню цифру результату, одержане число помножив на 8, знову закреслив останню цифру результату і одержав число20. Яке число задумав Петрик?

Завдання 3. Знайти суму 100 дробів:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}+\frac{1}{100\cdot 101}.$$

Завдання 4. Виберемо серед всіх натуральних чисел з непарною сумою цифр ті, які не більші 1998, і додамо їх. Скільки одержимо?

Завдання 5. В таксі їдуть 5 пасажирів. Доведіть, що серед них знайдуться два пасажири, які мають однакову кількість знайомих серед 5-ти пасажирів.

1999-2000 навчальний рік

Завдання 1. На скільки частин можуть ділити площину чотири прямі?

Завдання 2. Бригада косарів за перший день скосила 50% луки і ще 2 га, за другий день - 25‰ частини, що залишилася і решту 6 га. Знайти площу луки.

Завдання 3. В книзі всі сторінки занумеровані числами від 1 до 326. Андрійко вибирає довільні 43 листки цієї книги і додає всі 86 чисел, якими занумеровано вибрані сторінки. Чи може сума цих чисел дорівнювати 2000?

Завдання 4. Всі натуральні числа виписані підряд. Яка цифра стоїть на 1999 місці?

2000-2001 навчальний рік

Завдання 1. Тигра пройшов на день народження до Крихітки Ру на 5 хвилин раніше, ніж ослик Іа, але на 3 хвилини пізніше, ніж Вінні-Пух. Коли всі поїли, то почали розходитися. Вінні-Пух пішов першим на 2 хвилини раніше, ніж ослик Іа, і на 5 хвилин раніше, ніж Тигра. На скільки хвилин тигра був довше на вечірці від ослика Іа?

Завдання 2. Розмістіть шість точок на чотирьох прямих так, щоб на кожній прямій було по три точки.

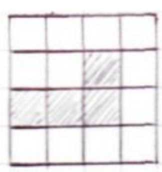
Завдання 3. Летів табун із триголових драконів і сороканіжок. У них разом 26 голів і 298 ніг. Скільки ніг у дракона, якщо у сороканіжки одна голова?

Завдання 4. Назвемо день «нещасливим», якщо це п’ятниця, 13-те число. Яка найбільша кількість «нещасливих» днів у році?

2001-2002 навчальний рік

Завдання 1. Розважте 900 кг картоплі у мішки двох видів – по 30 кг і 50 кг – так, щоб маса усіх мішків одного виду дорівнювала масі усіх мішків другого виду.

Завдання 2. Розріжте квадрат на рисунку на 4 частини однакової форми і розміру так,



щоб у кожну частину попало рівно по одному заштрихованому квадратику.

Завдання 3. Чи можна розлити 50 літрів бензину по трьох баках так, щоб у першому баку було на 10 літрів більше, ніж у другому, а після переливання 26 літрів з першого бака у третій у третьому баку стало стільки ж, скільки у другому?

Завдання 4. 9 шоколадок коштують дешевше за 10 гривень, а 10 штук тих самих шоколадок дорожчі за 11 гривень. Яка ціна однієї шоколадки?

2002-2003 навчальний рік

Завдання 1. З числа 12345123451234512345 викресліть 10 цифр таким чином, щоб число, яке залишилось, було найбільшим з можливих

Завдання 2. В одному з під'їздів восьмиповерхового будинку на першому поверсі розміщено квартири від № 97 до № 102. На якому поверсі і в якому під'їзді розміщена квартира № 222, якщо всі під'їзди побудовано однаково і на кожному поверсі однакова кількість квартир.

Завдання 3. Чи правильно, що коли натуральне число ділиться на 4 та на 6, то воно ділиться на 24? Пояснити відповідь.

Завдання 4. Назвемо натуральне число «симпатичним», якщо в його записі зустрічаються тільки непарні цифри. Скільки існує 4-цифрових «симпатичних» чисел? Пояснити відповідь.

Завдання 5. За 9 однакових посібників заплатили більше 11 грн., але менше 12 грн. За 13 таких посібників заплатили 15 грн. і кілька копійок, але не більше ніж 16 грн. Скільки коштує один посібник?

2003-2004 навчальний рік

Завдання 1. Лисиця Аліса і кіт Базиліо ділять 10 золотих монет за таким правилом: спочатку Базиліо ділить усі золоті на дві купки, у кожній з яких не менше двох золотих. Потім Аліса ділить кожну з цих купок ще на дві купки. З отриманих чотирьох купок найбільша і найменша дістаються Алісі а дві середні – Базилю. Кому скільки золотих дістанеться?

Завдання 2. У грі діти рахують від 1 до 100 і сплескують у долоні у той момент, коли слід називати число, яке ділиться на 3 або на 7, чи закінчується на 3 або на 7. Скільки разів дітям довелося плескати в долоні?

Завдання 3. Під час опитування 100 учнів з'ясувалося, що 48 із них передплачують журнал «Барвінок», 34 – «Соняшник», а 27 передплачують обидва ці журнали. «Юний технік» передплачують 20 учнів, і усі вони не передплатили жодного іншого журналу. Скільки з опитаних учнів взагалі не передплатили журналів?

Завдання 4. Побудуйте замкнену ламану, кожна ланка якої перетиналася б лише з однією ланкою цієї ж ламаної.

2004-2005 навчальний рік

Завдання 1. Знайдіть цифри сотень та одиниць числа52*2*, якщо відомо, що воно ділиться на 36.

Завдання 2. Скільки вийде гострих кутів, якщо всередині даного гострого кута з його вершини провести три промені?

Завдання 3. Андрій купив загальний зошит об'ємом 96 аркушів і пронумерував всі його сторінки по порядку числами від 1 до 192. Сашко вирвав з цього зошита 25 аркушів і додав усі 50 чисел, які на них написані. Чи могло у нього вийти 2004?

Завдання 4. Як розрізати квадрат на 5 прямокутників, щоб ніякі два з них не мали спільної сторони?

2005-2006 навчальний рік

Завдання 1. Товарний поїзд завдовжки 1 км їде зі швидкістю 50 км/год. За який час він проїде тунель завдовжки 1 км?

Завдання 2. Сума двох чисел 913. Одне з них закінчується на нуль. Якщо цей нуль закреслити, то вийде друге число. Знайдіть ці числа.

Завдання 3. Знайдіть такі 2004 натуральних числа, щоб їх сума дорівнювала їх добутку. Достатньо навести відповідь.

Завдання 4. Прямокутник розрізали на два многокутники. Потім один з них знову розрізали на дві частини і т.д. Операція розрізування многокутників повторювалася 670 разів. Після останнього розрізування підрахунок показав, що одержані многокутники містять всього 2005 вершин (вершина кожного многокутника рахується окремо). Чи правильно зроблено підрахунок?

Завдання 5. На дошці записують послідовність чисел: 1, 2, 4, 8, 16, 23, 28 і т.д. (кожне наступне число одержують із попереднього, збільшуючи його на його суму цифр). Чи буде записаним на дошці число 200120022003? Відповідь поясніть.

2006-2007 навчальний рік

Завдання 1. Скільки є трицифрових чисел, записаних різними способами?

Завдання 2. Розшифруйте додавання:

$$\begin{array}{r} \text{ОЦЕ} \\ +\ \text{ВЖЕ} \\ \text{ДУЖЕ} \\ \hline \text{ВАЖКО} \end{array}$$

Завдання 3. Для перегляду кінофільму в залі для глядачів зібрались учні кількох шкіл. Виявилось, Що учні однієї із шкіл становлять 47% кількості глядачів. Скільки всього глядачів було в залі, якщо в ньому 280 місць і понад половину місць було зайнято?

Завдання 4. На дошці записано число 10. Грають двоє, роблячи ходи почергово. За один хід дозволяється дописати справа від числа, записаного останнім, число 10 або 1010. Виграє той, хто першим одержить число, що ділиться на 2992. У котрого з гравців є виграшна стратегія?

2007-2008 навчальний рік

Завдання 1. Знайди всі натуральні числа в межах від 500 до 550 включно, при діленні яких на 25 неповна частка дорівнює остачі.

Завдання 2. Андрій ходить до бібліотеки раз на 3 дні, Борис - раз на 4 дні, Вадим – раз на 5 днів. Утрьох вони зустрілися в бібліотеці у суботу. Коли наступного разу всі вони знову зустрінуться в бібліотеці?

Завдання 3. Наталка і Сергій мають 18 грн., Сергій І Максим - 12 грн., а Максим і Марійка - 10 грн. Скільки гривень мають Наталка і Марійка?

Завдання 4. На столі лежить 24 цукерки. Два учні по черзі беруть одну, дві або три цукерки. Як повинен грати перший учень, щоб примусити свого супротивника взяти останню цукерку?

Завдання 5. З 80 однакових на вигляд монет одна фальшива (легша). Як за допомогою 4 зважувань на терезах визначити фальшиву монету?

2008-2009 навчальний рік

Завдання 1. У тризначному числі закреслили останню цифру нуль, і воно зменшилось на 405. Яке число отримали?

Завдання 2. Вздовж парку ростуть 8 кущів малини. Число ягід на сусідніх кущах відрізняється на 1. Чи може на всіх кущах разом бути 225 ягід?

Завдання 3. У класі 30 учнів. Вони сидять по двоє за 15 партами так, що рівно половина всіх дівчаток сидить з хлопчиками. Доведіть, що їх не можна пересадити (за ті ж 15 парт) так, щоб рівно половина всіх хлопчиків класу сиділи з дівчатками.

Завдання 4. Серед чисел 1, 2, 3, …, 1997 відмітили ті числа, які не можна подати у вигляді суми двох або декількох послідовних натуральних чисел. Знайдіть суму всіх відмічених чисел.

Завдання 5. Петрик задумав натуральне число, помножив його на 13, закреслив останню цифру результату, одержане число помножив на 8, знову закреслив останню цифру результату і одержав число 20. Яке число задумав Петрик?

2009-2010 навчальний рік

Завдання 1. Відомо з історії, що 12 квітня 1961 року Юрій Гагарін вперше здійснив політ у космос. У квітні місяці деякого року випало рівно п’ять субот та рівно чотири неділі. Яким днем тижня був День космонавтики у тому році?

Завдання 2. Скільки коштує килим? – запитав покупець у продавця.

- Вартість його у гривнях – найбільше число першої сотні, яке ділиться на 2, 3 і 5.
- А за скільки віддаси його? – продовжував покупець.
- Спочатку заплати $\frac{1}{2}$, потім $\frac{1}{3}$ і ще $\frac{1}{6}$ вартості килима, та й вистачить з тебе.

Покупець погодився. Яка вартість килима і скільки за нього вторговано?

Завдання 3. Усі цілі числа, починаючи з одиниці, виписані підряд, тобто записано такий ряд чисел

123456789101112131 4…9899100101102…Визначте, яка цифра стоїть на 190-му місці?

Завдання 4. На столі лежать трикутники та прямокутники, які не торкаються один одного. У сумі вони мають 17 вершин. Скільки трикутників лежить на цьому столі?

Завдання 5. У даному прикладі множення більше половини цифр замінено зірочками.

$$\begin{array}{cccccc} & & \times & * & 1 & * \\ & & & 3 & * & 2 \\ \hline & & & * & 3 & * \\ + & 3 & * & 2 & * & \\ * & 2 & * & 5 & & \\ \hline 1 & * & 8 & * & 3 & 0 \end{array}$$

Чи можете ви відновити цифри, яких не вистачає?

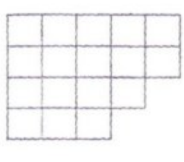
2010-2011 навчальний рік

Завдання 1. Учень прочитав книгу за три дні. У перший день він прочитав 0,2 всієї книги і ще 16 сторінок, на другий день 0,3 залишку і ще 20 сторінок. У третій день 0,75 залишку і останні 30 сторінок книги. Скільки сторінок було в книзі?

Завдання 2. Чотиризначне число починається з цифри 6. Цю цифру переставили у кінець числа. Отримане число на * 152 (* позначено розряд тисяч) менше початкового. Знайдіть початкове число.

Завдання 3. Миколка та його сестра Марійка пішли в гості. Коли вони пройшли чверть шляху, Миколка згадав, що вони забули вдома подарунок і повернув назад, а Марійка пішла далі. Марійка прийшла в гості через 20 хвилин після виходу з дому. На скільки хвилин пізніше, ніж Марійка, прийшов в гості Миколка, якщо відомо, що вони йшли з однаковою швидкістю?

Завдання 4. На столі у рядок лежать чотири монети. Серед них обов'язково є справжні і фальшиві (які легше від справжніх). Відомо, що будь-яка справжня монета лежить лівіше від будь-якої фальшивої. Як за одне зважування на талькових терезах без важелів визначити тип кожної монети, що лежать на столі?



Завдання 5. Виріжте з фігури, зображеної на рисунку, одну клітинку і розріжте решту частину фігури на чотири рівні частини.

2011-2012 навчальний рік

Завдання 1. У парку росли липи та клени. Кленів серед них було 60 %. Весною в парку посадили липи, після чого кленів стало 20 %. А восени посадили клени і кленів стало знову 60 %. У скільки разів збільшилась кількість дерев у парку за рік?

Завдання 2. В одному місяці три середи випали на парні числа. Якого числа в цьому місяці була друга неділя?

Завдання 3. Розшифрувати рівність $A \times C \times AC = CCC$.

Завдання 4. Знайти два числа, якщо їх сума дорівнює 432, а найбільший спільний дільник дорівнює 36.

Завдання 5. Довжина ребра куба 1 метр. Цей куб розрізали на кубики, довжина ребра кожного з них дорівнює 2 мм. Потім їх розклали в один ряд. Знайти довжину цього ряду.

2012-2013 навчальний рік

Завдання 1. Використовуючи не більше шести цифр із 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а також знаки арифметичних дій та дужки, отримайте число 2012. Кожну цифру можна використовувати не більше одного разу, а також з цифр можна складати числа.

Завдання 2. Іван, Петро і Сидір їли цукерки. Їх прізвища – Іванов, Петров і Сидоров. Іванов з'їв на 2 цукерки менше Івана, Петров – на 2 цукерки менше Петра, а Петро з'їв більше за всіх. Які прізвища кожного з них? Відповідь обґрунтуйте.

Завдання 3. Незнайка записує у рядок натуральні числа: 123456789101112131415…. На яких місцях, починаючи від початку, вперше будуть стояти три цифри 5 підряд?

Завдання 4. Дано круг з центром в точці *O* і точка *A* в середині цього круга, відмінна від точки *O*. Розріжте цей круг на:

а) три частини так, щоб з них можна було скласти круг, але з центром в точці *A*; б) дві частини так, щоб з них можна було скласти круг, але з центром в точці *A*.

7 КЛАС

1998-1999 навчальний рік

Завдання 1. У вершинах трикутника записані три числа. Відомо, що суми сусідніх чисел дорівнюють 1998, 1999, 2000. Знайдіть ці числа.

Завдання 2. Знайти кількість способів розміну десяти гривневої купюри на купюри меншої вартості.

Завдання 3. Розташуйте числа від 1 до 50 в рядок так, щоб різниця між будь-якими двома сусідніми числами була рівною 2 або 3.

Завдання 4. чи можна число 1998 подати у вигляді $\frac{mn+1}{m+n}$, де m і n - натуральні числа?

Завдання 5. В країні будь-які два міста з'єднані між собою або залізницею або авіалінією. Доведіть, що один з видів транспорту дозволяє попасти з будь-якого міста у будь-яке інше.

1999-2000 навчальний рік

Завдання 1. Сума двох цифр a і $в$ ділиться на 7. Доведіть, що число $\overline{abc}$ також ділиться на 7.

Завдання 2. У класі число відсутніх учнів складає $\frac{1}{5}$ частину від числа присутніх. Після того, як з'явився ще один учень, який запізнився, число відсутніх стало дорівнювати $\frac{1}{6}$ числа присутніх. Скільки всього учнів у класі?

Завдання 3. Шестикласник Сашко говорить другу: «Позавчора мені було 10 років, а в наступному році мені виповниться 13 років». Чи можливо це? І якщо да, то назвіть день народження Сашка. (При визначенні віку вказується тільки ціле число років).

Завдання 4. Король хоче перейти з лівого нижнього у правий верхній куток дошки 4×4. Йому дозволяється ходити на 1 клітинку вправо, вгору або по діагоналі вправо-вгору. Скільки існує маршрутів у короля для такого переходу?

2000-2001 навчальний рік

Завдання 1. Скількома нулями закінчується добуток всіх натуральних чисел від 1 до 100?

Завдання 2. Відомо, що $2x+3y$ при деяких натуральних значеннях x і y ділиться на 17. Доведіть, що при цих значеннях x і y вираз $9x+5y$ ділиться на 17.

Завдання 3. Кожну точку площини зафарбували в один з двох кольорів. Доведіть, що існує відрізок довжиною 2000 м, кінці якого мають однаковий колір.

Завдання 4. Алфавіт племені Мумбо-Юмбо складається з трьох букв: А, Б, В. Словом є будь-яка послідовність, яка складається не більше, ніж з чотирьох букв. Скільки слів у мові племені Мумбо-Юмбо?

2001-2002 навчальний рік

Завдання 1. У кожній клітинці прямокутної таблиці розміром $m \times n$ написано число. Сума чисел у кожному рядку і в кожному стовпчику дорівнює 1. Доведіть, що $m = n$.

Завдання 2. Розлийте пополам 12-відерну діжку води, використовуючи для цього дві інших порожніх діжки на 9 відер та 5 відер відповідно.

Завдання 3. Підряд написали числа 1, 2, 3, 4,…, 1996, 1997. Яких цифр при запису було використано більше – одиниць чи двійок? На скільки?

Завдання 4. Андрій запізнився до школи на 35 хвилин. Тоді він вирішив збігати до кіосу за морозивом. Але коли він повернувся, другий урок уже почався. Він тут же побіг за морозивом другий раз і був відсутній такий же час. Коли він повернувся, то виявилося, що він знову спізнився, і до початку четвертого уроку треба чекати 50 хвилин. За який час можна збігати зі школи до кіоску з морозивом і назад, якщо кожен урок з перервою після нього продовжується 55 хвилин?

2002-2003 навчальний рік

Завдання 1. Знайти всі пари натуральних чисел, які мають таку властивість: Якщо до будь-якого з них додати одиницю, то воно ділитиметься на друге.

Завдання 2. Один майстер робить на довгому ланцюгу позначки синім олівцем через кожні 36 см, а червоним – через кожні 25 см. Чи може статися так, що відстань між позначками буде дорівнювати 1 см?

Завдання 3. Не виконуючи вказаних дій, встановити, яким дробом (правильним чи неправильним) є число $\dfrac{244 \cdot 395 - 151}{244 - 395 \cdot 243}$.

Завдання 4. На шкільній вікторині за 30 відповідей учасник набрав 77 балів. За правильну відповідь зараховується 7 балів, а за неправильну списувалося 12 балів. Скільки правильних відповідей дав учасник?

Завдання 5. Розділити торт вишнями на 4 рівних частини так, щоб на кожній частині

було по вишні:

2003-2004 навчальний рік

Завдання 1. Три стрибки розлюченого пса рівні п'яти стрибкам кота. Коли пес робить три своїх стрибки, то кіт встигає зробити чотири своїх стрибки. Хто рухається швидше: кіт чи пес? У скільки разів?

Завдання 2. У грі діти рахують від 1 до 200 і сплескують у долоні у той момент, коли слід називати число, яке ділиться на 3 або на 7, чи закінчується на 3 або на 7. Скільки разів дітям довелося плескати в долоні?

Завдання 3. Як перевезти в човні з одного берега на інший козу, капусту, двох вовків і собаку, якщо відомо, що вовка не можна залишати без нагляду з козою і собакою, собака « посвариться» з козою, а коза «небайдужа» до капусти? В човні тільки три місця, тому можна брати з собою одночасно не більше двох тварин чи одну тварину і капусту.

Завдання 4. Побудуйте замкнену ламану, кожна ланка якої перетиналася б лише з однією ланкою цієї ж ламаної.

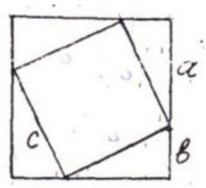
2004-2005 навчальний рік

Завдання 1. У парусній регаті брало участь 86 чоловік на одно- та двопарусних яхтах. Екіпаж однопарусної яхти складається з 5 членів, екіпаж двопарусної – з семи членів. Скільки яхт брало участь у регаті?

Завдання 2. На яку найбільшу кількість нулів може закінчуватись добуток трьох натуральних чисел, якщо їх сума рівна 407?

Завдання 3. У Чіпа, Дейла і Роккі було 12, 14 і 22 горіхи. Коли Чіп віддав Дейлу стільки горіхів, скільки було у Дейла, потім Дейл віддав Роккі стільки горіхів, скільки було у Роккі, а Роккі віддав Чіпу стільки горіхів, скільки залишилось у Чіпа, то у всіх героїв-рятівників горіхів виявилось порівну. Скільки горіхів було у кожного спочатку?

Завдання 4. Квадрат зі стороною c вписано в більший квадрат (див. рисунок). Доведіть, використовуючи рисунок, що $a^2 + b^2 = c^2$.



2005-2006 навчальний рік

Завдання 1. Денис хотів купити 2 яблука, 3 апельсини і 5 бананів. Однак він переплутав і купив 2 банани, 3 яблука і 5 апельсинів, витративши точно заплановану суму. Визначити, що дорожче – апельсин чи банан, якщо відомо, що яблуко дорожче за банан.

Завдання 2. Із класу, в якому 20 учнів, потрібно сформувати команду із трьох осіб. Скількома способами можна це зробити?

Завдання 3. Знайдіть значення a, при якому половина суми дробів $\frac{3+4a}{4}$ і $\frac{5-a}{5}$ є числом, протилежним до подвоєної різниці цих дробів.

Завдання 4. До суми двох натуральних чисел додати їх НСД і НСК. Чи може результат дорівнювати 2005?

Завдання 5. Довести, що $2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{52}$ ділиться на 30.

2006-2007 навчальний рік

Завдання 1. Знайдіть найменше натуральне число, сума цифр якого дорівнює 2006.

Завдання 2. В вершинах куба розставлено різні числа. Доведіть, що хоча б

одне із них менше середнього арифметичного своїх сусідів.

Завдання 3. В готелі зупинився мандрівник. Грошей він не мав, а мав лише срібний ланцюжок з 6 ланок. За кожен день перебування в готелі він розраховувався однією ланкою ланцюга, при цьому господар попередив, що згоден взяти не більше однієї розпиляної ланки. Як мандрівникові слід розпиляти ланцюг, щоб мати можливість щоденно розраховуватись з господарем?

Завдання 4. Одна людина кожен місяць записує прибутки і видатки. Чи може бути так, що за довільні 5 місяців, що йдуть підряд загальні видатки перевищують прибуток, а за рік його прибутки перевищують видатки?

2007-2008 навчальний рік

Завдання 1. Вік дідуся - між 50 і 70 роками. У кожного з його синів стільки ж дітей, скільки і братів. Загальна кількість синів та внуків дідуся дорівнює його віку. Скільки йому років?

Завдання 2. У лісосмузі ростуть 18 дубів. На них порівну жолудів. Подув вітер і з дубів посипались жолуді: з деяких рівно половина, з деяких - рівно третина, а з усіх інших - жодного жолудя. При цьому з дубів разом упало рівно $\frac{1}{9}$ частина всіх жолудів. Із скількох дубів жолуді не падали?

Завдання 3. Для натуральних чисел m і n, що не дорівнюють 1, має місце рівність $m*n=2005$. Знайдіть суму $m+n$.

Завдання 4. Воду з трьох заповнених рівних посудин висотою m і з квадратною основою із стороною a, перелили в посудину з квадратною основою із стороною $2a$. Якою буде висота рівня води в останній посудині?

Завдання 5. Чи можна всі натуральні числа від 1 до 65 розбити на кілька груп так, щоб у кожній групі найбільше число дорівнювало сумі інших?

2008-2009 навчальний рік

Завдання 1. Цифра десятків двозначного числа втричі більше за цифру одиниць. Якщо ці цифри поміняти місцями, то отримане число буде меншим від даного на 54. Знайдіть дане число.

Завдання 2. На дошці написана послідовність чисел 3, 8, 15, 24, 35,… За яким правилом утворені ці числа? Яке число стоїть на 92 місці?

Завдання 3. З квадратного аркуша паперу в клітинку, який містить ціле число клітинок, вирізали квадрат, у якому також виявилось ціле число клітинок. На частині аркуша, що залишилась, рівно 124 клітинки. Скільки клітинок мав аркуш паперу?

Завдання 4. У записаному рядку 1*1*1*1*…*1*1 вміщено 1993 одиниці. Замість кожної * можна поставити плюс або мінус. Виконавши дії, отримаємо деяке число. Чому дорівнює сума усіх чисел, отриманих таким чином?

Завдання 5. Знайти двоцифрове число, яке при діленні на суму своїх цифр дає в частці третину суми своїх цифр.

2009-2010 навчальний рік

Завдання 1. Квадратний аркуш паперу розміром 10 дм $\times$ 10 дм розрізали на квадратики площею 25 $см^2$. Кожен з утворених квадратиків розрізали на два трикутники. Скільки отримали трикутників?

Завдання 2. Коля і Саша, граючись у розвідників, вели між собою шифровану переписку. Коля пише Саші: «Зустрінемося найбільшого числа, квадрат «післязавтра» якого поміститься в кількості дні місяця, в будинку з номером, рівним квадрату суми «післязавтра» і «завтра» від дня зустрічі. Час зустрічі – квадрат різниці між «післязавтра» і «вчора». Як ви зрозуміли шифровку?

Завдання 3. Число 1 ділять у стовпчик на 1998. Яка цифра буде розташована у частці на 2008-му місці після коми?

Завдання 4. В усіх клітинках таблиці 3×3 спочатку записали нулі. За один хід дозволяється додавати до всіх чисел будь-якого квадрату 2×2 по одиниці. Чи можна після декількох ходів отримати таку таблицю

2	5	3
6	18	8
4	9	5

Завдання 5. Розв'язати рівняння $0{,}5x + 2010 = |x|$.

2010-2011 навчальний рік

Завдання 1. Чи існує таке просте число *p,* що число p^{18} утворює десятицифрове число, усі 10 цифр якого різні? Відповідь обгрунтувати.

Завдання 2. „Автомат по відрізанню" за одне включення з прямокутником m×n, де *m, n* цілі і *m*<*n* проводить такі операції — він відрізає від прямокутника максимально можливу кількість квадратів m×n. Після цього знову включаємо „автомат" для прямокутника, що залишився. І так далі, поки залишаться лише відрізані квадрати. Наприклад, для прямокутника 3×16 автомат за перше включення відрізає 5 квадратів 3×3, залишився прямокутник 3×1. Наступне включення автомату відріже 3 квадрати 1×1 , після чого робота автомату закінчена. Відомо, що для остаточного розрізання заданого прямокутника знадобилось 3 включення автомату і при цьому залишилось 5 квадратів, найменший з яких має розмір 1×1. Які розміри міг мати початковий прямокутник? Вказати усі можливі відповіді.

Завдання 3. Розмістити 6 точок на чотирьох прямих так, щоб на кожній з них було по три точки.

Завдання 4. Знайти всі трійки простих чисел *a, b, c* таких, що $7a - bc = 105$.

Завдання 5. Шестицифрове число ділиться на 8. Яку найменшу суму цифр воно може мати? Яку найбільшу суму цифр може мати таке число?

2011-2012 навчальний рік

Завдання 1. У підводного царя служать восьминоги у яких шість, сім або вісім ніг. Ті, що мають сім ніг, завжди брешуть, а ті, що мають 6 або 8 ніг, завжди говорять правду. Зустрілися чотири восьминога. Синій сказав: «Разом у нас 28 ніг», зелений: «Разом у нас 27 ніг», жовтий: «Разом у нас 26 ніг», червоний: «Разом у нас 25 ніг». У кого скільки ніг.

Завдання 2. Велосипедист, рухаючись із пункту А в пункт В, збільшив свою швидкість на 30 % і повертаючись назад, зменшив швидкість на 20 %. На скільки відсотків зросла початкова швидкість?

Завдання 3. Цифру 9, із якої починається трицифрове число, написали в кінці числа. Нове число на 216 менше, ніж початкове. Яке було початкове число?

Завдання 4. Довести, що $2^{2011}+3^{2011}$ ділиться на 5.

Завдання 5. Є 9 монет, одна з них фальшива (легша від справжньої). За два зважування на шалькових терезах без гир знайдіть фальшиву монету.

2012-2013 навчальний рік

Завдання 1. Довести, що число $A=2010^{2011}+2011^{2012}+1$ є складеним.

Завдання 2. Знайти трицифрове число $\overline{abc}$, таке, що чотирицифрові числа $\overline{abc1}$, $\overline{2abc}$ задовольняють рівняння $\overline{abc1}=3\cdot\overline{2abc}$.

Завдання 3. Всередині кута *AOB*, рівного 120°, проведені промені *OC* і *OD* так, що кожен з них є бісектрисою якогось із кутів, що утворилися при цьому. Знайдіть величину кута *AOC*. Укажіть всі можливі варіанти.

Завдання 4. Декілька учнів ходили по гриби. Учень, який зібрав найбільшу кількість грибів, зібрав $\frac{1}{5}$ від загальної кількості грибів, зібраних учнями, а учень, який зібрав найменшу кількість грибів, зібрав $\frac{1}{7}$ від загальної кількості. Скільки учнів ходило по гриби? Відповідь обґрунтуйте.

Завдання 5. У гральному кубику грані пронумеровані числами від 1 до 6. З п'яти таких кубиків склали башту (поставили один на інший) та підрахували суму чисел на усіх зовнішніх гранях. Після того, як зняли верхній кубик, ця сума зменшилась на 19. Яке число могло б бути на верхній грані нового верхнього кубика?

8 КЛАС

1998-1999 навчальний рік

Завдання 1. Розташуйте числа від 1 до 100 в рядок так, щоб різниця між будь-якими двома сусідніми числами була рівною 2 або 3.

Завдання 2. Про трапецію $ABCD$ відомо, що AD та BC її основи і $AB=BC=\frac{1}{2}AD$, $\angle ADC=19^{\circ}$. Знайдіть $\angle BAD$.

Завдання 3. Доведіть, що число $1994\cdot1995\cdot1996\cdot1998\cdot1999\cdot2000+36$ є квадратом натурального числа.

Завдання 4. Чи можуть відрізки довжиною 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15 бути сторонами та діагоналями опуклого п'ятикутника?

Завдання 5. На папері в клітинку намалювали квадрат 12×12. Яку найменшу кількість його клітинок потрібно зафарбувати, щоб в не зафарбовану частину неможна було б помістити фігуру, зображену на рисунку?

1999-2000 навчальний рік

Завдання 1. Учень задумав число, приписав до нього справа 2 і до отриманого числа додав 14. До знову отриманого числа приписав справа 3, а тоді додав 52. Розділивши отримане таким чином число на 60, він у частці одержав число, на 6 більше від задуманого числа, а в залишку двозначне число, написане однаковими цифрами і причому такими, що число десятків дорівнює якраз задуманому числу. Знайдіть задумане число.

Завдання 2. На продовженні основи рівнобедреного трикутника взята точка (довільно). Доведіть, що різниця відстаней цієї точки до бічних сторін дорівнює висоті трикутника, опущеної на бічну сторону.

Завдання 3. Побудуйте $|y| = ||x| - 3|$.

Завдання 4. Обчисліть $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.

2000-2001 навчальний рік

Завдання 1. Знайдіть найменше число, при діленні якого на 2 одержимо точний квадрат, а при діленні на 3 – точний куб.

Завдання 2. Аркуш паперу можна розрізати на 8 або 12 частин. Кожну з частин знову можна розрізати на 8 або 12 частин, або ж залишити без змін. Чи можна розрізати таким способом аркуш паперу на 60 частин?

Завдання 3. Вписати коло у трикутник, вершини якого розміщені поза рисунком.

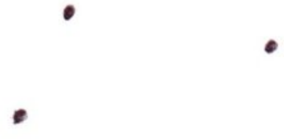
Завдання 4. Зобразіть на координатній площині множину точок $(x; y)$ таких, що

$$\begin{cases} |x-y| = x+y, \\ |x+y| = x-y. \end{cases}$$

2001-2002 навчальний рік

Завдання 1. Наведіть приклад натурального числа, яке ділиться на 6 і має рівно 15 різних натуральних дільників (враховуючи 1 і саме число).

Завдання 2. Аркуш паперу зігнули вдвоє по прямій і прокололи голкою у двох місцях, а потім розгорнули й отримали 4 отвори. Положення трьох із них відмічені на рисунку. Де може знаходитися четвертий отвір?



Завдання 3. Підряд написані числа 1, 2, 3, 4, 5,…, 2000. Перше, третє, п’яте і т.д. по порядку викреслюють. Із 1000 чисел, які залишилися, знову викреслюють перше, третє, п’яте і т.д. Так роблять, поки не залишилося одне число. Яке це число?

2002-2003 навчальний рік

Завдання 1. Розкласти на множники $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$.

Завдання 2. Побудувати трикутник за кутом і двома висотами, які опущені на сторони цього кута.

Завдання 3. Військова колона має довжину 5 км. Зв'язківець виїхав з ар'єргарду колони, передав пакет в її початок і повернувся назад. Колона за цей час пройшла шлях 12 км. Який шлях проїхав зв'язківець?

Завдання 4. Розв'язати в цілих числах рівняння $xy = x + y + 6$.

Завдання 5. Довести нерівність $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\ldots\cdot\frac{223}{224} < \frac{1}{15}$.

2003-2004 навчальний рік

Завдання 1. Три стрибки розлюченого пса рівні п'яти стрибкам кота. Коли пес робить три своїх стрибки, то кіт встигає зробити чотири своїх стрибки. Кіт помітив розлюченого пса, коли тому залишалося до кота 15 стрибків, і відразу ж кинувся до дерева, яке знаходилось в протилежну сторону від пса. Кіт встиг стрибнути на дерево саме в той момент, коли там опинився пес. Скільки собачих стрибків було від кота до дерева спочатку?

Завдання 2. У грі діти рахують від 1 до 300 і сплескують у долоні у той момент, коли слід називати число, яке ділиться на 3 або на 7, чи закінчується на 3 або на 7. Скільки разів дітям довелося плескати в долоні?

Завдання 3. Матч Аргентина – Ямайка закінчився з рахунком 8:5. Доведіть, що в ході матчу був момент, коли Аргентині залишилося забити стільки ж голів, скільки забила команда Ямайки.

Завдання 4. Довести, що круги, побудовані на сторонах чотирикутника як на діаметрах, цілком його покривають.

2004-2005 навчальний рік

Завдання 1. У турнірі кожний шахіст набрав половину очок у партіях з учасниками, які посіли три останніх місця. Скільки було учасників турніру?

Завдання 2. Знайти всі натуральні розв'язки рівняння $x^2 + xy + y^2 = 9 + x + y$.

Завдання 3. Знайти геометричне місце основ перпендикулярів, проведених з даної точки A на прямі, що проходять через дану точку B.

Завдання 4. При яких натуральних значеннях n значення дробу $\frac{n^3 - n + 2}{n - 1}$ є цілим числом?

Завдання 5. Розв'язати математичний ребус $ГОЛ^2 = ФУТБОЛ$. Відомо, що однаковим літерам відповідають однакові цифри, а різним – різні.

2005-2006 навчальний рік

Завдання 1. Побудуйте графік функції $y=\left|\sqrt{(x+2)^2}-\sqrt{(x-1)^2}\right|$.

Завдання 2. Четверо друзів купили разом човен. Перший вніс половину тієї суми, що внесли інші, другий – третину суми, що внесли інші, третій – чверть суми, що внесли інші, а четвертий вніс 130 гривень. Скільки коштує човен і скільки грошей вніс кожен?

Завдання 3. Яке число стоїть на 2005-му місці в послідовності

1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6…?

Завдання 4. Паралелограм розбивається діагоналлю на два рівнобедрені прямокутні трикутники. Більша сторона паралелограма дорівнює a. Виразіть через a висоту паралелограма, проведену до цієї сторони.

Завдання 5. Скільки різних пар натуральних чисел $x \le y$ задовольняють рівняння $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{70}$?

2006-2007 навчальний рік

Завдання 1. Маємо дві посудини. В першій посудині 1 л води, а інша – порожня. Послідовно вода переливається з першої посудини в другу, з другої в першу і т.д. таким чином, що вода, яка відливається становить послідовно $\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4}$ і т.д. від тієї кількості води, яка є у посудині, з якої відливають воду. Скільки води буде у кожній із посудин після 2005 переливань?

Завдання 2. Побудуйте трикутник АВС, в якому вершина кута знаходиться у заданій точці, а бісектриси двох інших кутів лежать на двох заданих прямих, які перетинаються.

Завдання 3. М – множина натуральних чисел виду x^2+5y^2, де $x, y \in Z$. Довести, що добуток таких чисел теж належить М.

Завдання 4. При яких значеннях $n \in N$ дріб $\frac{n-1}{n^2-8n+8}$ є скоротним?

2007-2008 навчальний рік

Завдання 1. Відомо, що p, p+10, p+14- прості числа. Знайдіть p.

Завдання 2. В класі кількість відсутніх учнів складає $\frac{1}{6}$ кількості присутніх. Коли з класу вийшов один учень, то кількість відсутніх склала $\frac{1}{5}$ кількості присутніх. Скільки учнів навчається в класі?

Завдання 3. Трикутник АВС - рівнобедрений. АВ=АС=5 см і $\angle BAC=60^\circ$. Периметр цього трикутника виражається цілим числом сантиметрів. Скільки різних таких трикутників існує?

Завдання 4. Стріляючи по мішені, спортсмен кілька разів потрапив у десятку, стільки ж разів вибив 8 очок, інші постріли потрапили у п'ятірку. Усього він набрав 99 очок. Скільки пострілів зробив спортсмен?

Завдання 5. Двоє гравців по черзі ставлять на клітинки шахової дошки 25×25 фішки, один - білого, а другий - чорного кольорів. Кожна нова фішка ставиться на вільну клітинку, забороняється лише ставити фішку на таку клітинку, де на всіх сусідніх із нею клітинках уже стоять фішки цього кольору (сусідніми вважають клітинки, які мають спільну сторону). Програє той, хто не може зробити свій черговий хід. Хто виграє за умови правильної гри — перший чи другий?

2008-2009 навчальний рік

Завдання 1. Обчислити: $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{2008^2}\right)$.

Завдання 2. Вік мого брата в 1977 році дорівнює сумі цифр року його народження. Скільки років моєму брату?

Завдання 3. Знайти три послідовні непарні числа, сума квадратів яких виражається чотирицифровим числом, запис якого містить всі однакові цифри.

Завдання 4. Виразити через b дріб $\frac{a+1}{a-1}$, якщо $\frac{(1-b)^2}{1-ab}=\frac{(1+b)^2}{1+ab}$.

Завдання 5. Побудувати трикутник за серединами двох його сторін і основою висоти, проведеної до третьої сторони.

2009-2010 навчальний рік

Завдання 1. Довести, що число n^9-n^3 ділиться на 504 при кожному натуральному n.

Завдання 2. Знайти три послідовні непарні числа, сума квадратів яких виражається чотирицифровим числом, запис якого містить всі однакові цифри.

Завдання 3. Знайти всі натуральні числа n, при яких число

$a=\frac{19n+381}{n+17}$ також натуральне.

Завдання 4. Записати многочлен $x^4-2x^3+6x^2+2x+1$ у вигляді суми квадратів трьох виразів.

Завдання 5. Побудувати трикутник за серединами двох його сторін і основою висоти, проведеної до третьої сторони.

2010-2011 навчальний рік

Завдання 1. Після піднесення до квадрату виразу $(a+2b+3)$ учень отримав $(a+2b+3)^2 = a^2 + 4b^2 + 9$. При яких цілих *a, b* ця рівність є правильною? Відповідь обґрунтуйте.

Завдання 2. Із цифр 0,1,2,3 скласти таке чотирицифрове число з усіма різними цифрами, яке при множенні на чотирицифрове число, що записано тими самими цифрами у зворотному порядку, мало б найменший можливий добуток.

Завдання 3. На площині розташовані два трикутники ABC і BKL таким чином, що відрізок AK ділиться на три рівні частини точкою перетину медіан ΔABC та точкою перетину висот ΔBKL *(AK* - медіана ΔABC, *KA* - бісектриса ΔBKL) і чотирикутник $KALC$ - трапеція. Знайти кути трикутника BKL.

Завдання 4. На дошці записано число 12345678910111213…Яка цифра буде стояти на 2010 місці?

Завдання 5. Люди заходять з вулиці в метро рівномірно. Проходячи турнікети, вони заходять до невеликої зали перед ескалаторами. Двері на вхід тільки що відкрились, і спочатку зала перед ескалаторами була порожньою, а на спуск працював лише один ескалатор. Один ескалатор не справлявся з натовпом і за 6 хвилин зала наполовину заповнилась. Тоді увімкнули на спуск другий ескалатор, але кількість людей у залі продовжувала збільшуватись. За 15 хвилин зала була заповнена. Через який час у залі не буде людей, якщо запрацює третій ескалатор?

2011-2012 навчальний рік

Завдання 1. Довести, що вираз $(x-1)(x-3)(x-5)(x-6)+10$ набуває додатних значень при всіх значеннях x.

Завдання 2. На гіпотенузі АВ прямокутного трикутника АВС вибрана точка К, для якої СК=ВС. Відрізок СК перетинає бісектрису АМ в її середині. Знайти кути трикутника АВС.

Завдання 3. З квадратного аркуша паперу в клітинку, який містить ціле число клітинок, вирізали квадрат, у якому також виявилося ціле число клітинок. На частині аркуша, що залишилась, рівно 124 клітинки. Скільки клітинок мав аркуш паперу?

Завдання 4. Коли автомобіль проїхав частину шляху від А до В, виявилось, що він проїхав стільки кілометрів, скільки хвилин йому прийдеться їхати частину шляху, що залишилась. Але, коли він проїхав і цю частину шляху, то виявилось, що знову він проїхав стільки кілометрів, скільки хвилин він витратив на першу частину шляху. Скільки кілометрів за годину проїжджав автомобіль?

Завдання 5. Побудуйте графік функції $y = |x+1| - \frac{x}{|x|}$.

2012-2013 навчальний рік

Завдання 1. Яке з чисел більше: $1-2+3-4+5-...+2009-2010+2011$ чи $1+2-3+4-5+6-...-2009+2010-2011$?

Завдання 2. Знайдіть усі трійки a, b, c натуральних чисел, які задовольняють умові: $ab + c = 13,\ a + bc = 23.$

Завдання 3. Відрізки AM і BH - відповідно медіана і висота гострокутного трикутника ABC. Відомо, що AH=1, а $\angle MCA = 2\angle MAC$. Знайдіть довжину сторони BC.

Завдання 4. По кругу записані n цілих чисел, сума яких дорівнює 14. Відомо, що будь-яке з записаних чисел дорівнює модулю різниці двох чисел, які слідують за ним. Знайдіть всі можливі значення n.

Завдання 5. До кожної грані кубика приклеїли по такому ж кубику. До кожної грані поверхні одержаної фігури приклеїли ще раз по такому ж кубику (можливо, деякі кубики закрили дві грані). З якої кількості квадратиків складається поверхня одержаного тіла?

9 КЛАС

1998-1999 навчальний рік

Завдання 1. Про дійсні числа a та b відомо, що $(a+b)^2 + 1 = (a+1)(b+1)$. Доведіть, що $a^3 - a^2 = b^3 - b^2$.

Завдання 2. Знайдіть таке натуральне число n, що сума цифр числа n ділиться на 1998, а сума цифр числа $n+1$ ділиться на 1999.

Завдання 3. Про опуклий чотирикутник $ABCD$ відомо, що $\angle ABC = 102^\circ$, $\angle ADC = 129^\circ$ та AB=BC=1. Обчисліть довжину діагоналі BD.

Завдання 4. Доведіть, що коли $a > 0, b > 0$ та $a + b = 2$, то $a^6 + b^6 + \dfrac{a^4 + b^4}{a^4 b^4} \geq 4.$

Завдання 5. З паперу в клітинку (по сторонах клітинок) вирізали квадрат 101×101. З цього квадрату вирізали квадрат 99×99, центр якого співпадає з центром квадрату 101×101. На яку найменшу кількість шматків потрібно розрізати (по сторонах клітинок) утворений залишок так, щоб з них можна було б утворити квадрат 20×20?

1999-2000 навчальний рік

Завдання 1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185, \\ (x^2 - xy + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 65. \end{cases}$$

Завдання 2. У трикутнику ABC висота h_a дорівнює половині бісектриси зовнішнього кута цього трикутника при вершині A. Знайдіть різницю кутів B і C.

Завдання 3. Доведіть, що $\sqrt{\underbrace{11...1}_{2n\ цифр} - \underbrace{22...2}_{n\ цифр}} = \underbrace{33...3}_{n\ цифр}.$

Завдання 4. Телефонний номер Івана Івановича – деяке шестицифрове число. Петро Петрович має узнати цей номер, задаючи Івану Івановичу запитання, на які отримуватиме тільки відповіді «так» або «ні». Скільки необхідно мінімально задати запитань, якщо:

А) Іван Іванович завжди відповідає правильно;

Б) на одне запитання Іван Іванович відповість неправильно?

2000-2001 навчальний рік

Завдання 1. Довести, що дріб $\frac{a^3+2a}{a^4+a^2+1}$ є нескоротним при будь-яких цілих значеннях *а*.

Завдання 2. Чи має рівняння $b^2x^2+\left(b^2+c^2-a^2\right)x+c^2=0$ дійсні розв'язки, де a,b,c - довжини сторін деякого трикутника?

Завдання 3. З рухомої точки К, взятої на продовженні даного діаметра даного кола з центром у точці О, проведено дотичну до цього кола. Знайти геометричне місце таких точок М на цих дотичних, для яких МК=КО.

Завдання 4. На зустрічі зібралися усі учасники двох туристичних походів (деякі з них були в обох походах, деякі тільки в одному з них). У першому поході брало участь 60‰ хлопців, у другому - 75‰. Доведіть, що на зустріч прийшло не менше хлопців, ніж дівчат.

2001-2002 навчальний рік

Завдання 1. Доведіть, що $a^2+b^2+ab+a-b+3>0$ прибудь-яких дійсних значеннях a і b.

Завдання 2. У трикутнику АВС кут А більший за кут В. Доведіть, що довжина сторони ВС більша половини довжини сторони АВ.

Завдання 3. Для яких значень a модуль різниці коренів рівняння $ax^2+x-2=0$ дорівнює 3.

Завдання 4. У площині відмічена 101 точка, не всі вони лежать на одній прямій. Через кожну пару відмічених точок червоним олівцем проводиться пряма. Доведіть, що на площині існує точка, через яку проходить не менше 11 червоних прямих.

2002-2003 навчальний рік

Завдання 1. Доведіть, що серед довільних 39 послідовних натуральних чисел обов'язково знайдеться таке, у якого сума цифр ділиться на 11.

Завдання 2. Скільки разів потрібно взяти доданком число *а,* щоб отримати a^n?

Завдання 3. Учень йде тротуаром вздовж тролейбусної лінії. Через кожні 4 хвилини він зустрічає тролейбус і через кожні 8 хвилин його наздоганяє тролейбус. Через які проміжки часу тролейбуси рушають із зупинки?

Завдання 4. Дві бічні сторони трикутника дорівнюють 26 см. і 30 см., а висота, проведена на третю сторону – 24 см. Обчислити медіану, проведену до третьої сторони.

Завдання 5. В квадрат $ABCD$ вписано коло одиничного радіуса. Довести, що для будь-якої точки M цього кола має місце рівність $MA^2\cdot MC^2+MB^2\cdot MD^2=10$.

2003-2004 навчальний рік

Завдання 1. Три стрибки розлюченого пса рівні п'яти стрибкам кота. Коли пес робить три своїх стрибки, то кіт встигає зробити чотири своїх стрибки. Кіт помітив розлюченого пса, коли тому залишалося до кота 15 стрибків, і відразу ж кинувся до дерева, яке знаходилось в протилежну сторону від пса. Кіт встиг стрибнути на дерево саме в той момент, коли там опинився пес. Скільки собачих стрибків було від кота до дерева спочатку?

Завдання 2. Знайдіть всередині опуклого чотирикутника таку точку, що сума відстаней від неї до вершин є найменшою.

Завдання 3. Чи можна знайти такий натуральний степінь числа 3, який би закінчувався цифрами 001?

Завдання 4. Побудуйте ромб, три вершини якого належать трьом даним прямим, а центр його симетрії лежить в заданій точці.

2004-2005 навчальний рік

Завдання 1. Знайти передостанню цифру числа 11^{2005}.

Завдання 2. a, b - корені рівняння $x^2 + x - 2005 = 0$. Обчисліть $a^3 + b^3$.

Завдання 3. а) У ромашки 12 пелюсток. За хід дозволяється відірвати або одну пелюстку, або дві пелюстки, що ростуть поруч. В грі беруть участь дві особи. Програє той, хто не зможе зробити хід. Хто з гравців зможе забезпечити собі виграш: той, хто починає, чи той, ходить другим? Вкажіть виграшну стратегію.

б) та ж сама задача, але у ромашки 2005 пелюсток.

Завдання 4. побудувати графік функції $y = x + \{x\} + [x] + |x|$, де $[x]$ - ціла частина числа x, тобто найбільше ціле число, яке не перевищує x, а $\{x\}$ - дробова частина числа x, $\{x\} = x - [x]$.

Завдання 5. Через вершини A, B, C паралелограма $ABCD$ (AB=3, BC=5) проведено коло, що перетинає BD в точці E (BE=9). Знайти BD.

2005-2006 навчальний рік

Завдання 1. Знайти найближчий після 12 годин момент часу, при якому стрілки годинника взаємно перпендикулярні.

Завдання 2. Довести, що будь-яке ціле число можна представити у вигляді суми кубів п'яти цілих чисел. Наприклад, $13 = 3^3 + (-2)^3 + (-2)^3 + 1^3 + 1^3$.

Завдання 3. На столі стоїть 11 порожніх тарілок. Два гравці ходять по черзі, викладаючи в тарілки по 1 копійці в будь-які 10 тарілок. Виграє той, після ходу якого в якійсь тарілці виявиться 21 копійка. Чи може гравець, що розпочинає гру, забезпечити собі виграш?

Завдання 4. Розв’язати рівняння $\{x^2 - x\} = \frac{1}{2}$, де $\{a\}$- дробова частина числа a. Вказівка: $\{a\} = a - [a]$, де $[a]$- найбільше ціле число, що не перевищує a.

Завдання 5. Побудувати циркулем та лінійкою трикутник за двома сторонами a і b $(b > a)$, якщо відомо, що кут напроти однієї з них в 3 рази більший кута напроти іншої сторони.

2006-2007 навчальний рік

Завдання 1. Чи правда, що із 100 довільних чисел завжди можна вибрати

А) 15

Б) 16

таких, в яких різниця довільних двох ділиться на 7?

Завдання 2. В ΔABC проведені ВМ – медіана, AN – висота. BM= AN. Знайти $\angle MBC$.

Завдання 3. Нехай x, y, z - додатні числа, сума яких дорівнює 1. Довести, що $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) \geq 64$.

Завдання 4. Знайдіть всі пари цілих невід’ємних чисел x, y, які задовольняють рівняння $xy - 3x + 5y = 25$.

2007-2008 навчальний рік

Завдання 1. Побудуйте графік функції $y = \frac{x^2 - 3x}{|x-3|}$.

Завдання 2. Через який найменший проміжок часу між стрілками годинника буде прямий кут, якщо зараз 12.00 година.

Завдання 3. Знайдіть найменше значення виразу $2x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x + 2y$.

Завдання 4. Провести до кола дотичну в даній точці, якщо центр кола недоступний.

Завдання 5. Знайти суму $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 9 + ... + 2007 \cdot 2009$.

2008-2009 навчальний рік

Завдання 1. Вологість повітря до полудня знизилась на 12‰ порівняно з ранком, а до вечора ще на 5‰ порівняно з полуднем. Скільки процентів від ранкової вологості складає вологість повітря ввечері і на скільки процентів вона знизилась?

Завдання 2. Обчисліть значення виразу: $\frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{2008^3-1}{2008^3+1}$.

Завдання 3. Висота до основи рівнобедреного трикутника дорівнює різниці радіусів описаного та вписаного кіл. Знайти (в градусах) найбільший кут трикутника.

Завдання 4. а) Доведіть, що коли $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=a$, де $a>0$, то $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{a}$.

б) Розв'яжіть рівняння $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}=2$.

Завдання 5. На координатній площині хОу зобразити множину точок, координати яких задовольняють нерівність $(|x|-1)^2 \le (y+2)^2$.

2009-2010 навчальний рік

Завдання 1. Вологість повітря до полудня знизилась на 12‰ порівняно з ранком, а до вечора ще на 5‰ порівняно з полуднем. Скільки процентів від ранкової вологості складає вологість повітря вечері і на скільки процентів вона знизилась?

Завдання 2. Трикутник АВС і ACD прямокутні та рівнобедрені. Катет АВ=ВС=1. Знайти добуток всіх можливих значень довжини відрізку BD (точки В і D не можуть співпадати).

Завдання 3. Розв'язати рівняння: $\frac{x^2}{3}+\frac{48}{x^2}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.

Завдання 4. На координатній площині хОу зобразити множину точок, координати яких задовольняють нерівність $(|x|-1)^2 \le (y+2)^2$.

Завдання 5. На дошці записано *n (n-непарне)* наступних виразів $*x^2+*x+*=0$. Грають двоє. Вони ходять по черзі. За один хід дозволяється замінити одну зірочку числом, відмінним від нуля. Після 3*n* ходів утвориться *n* квадратних рівнянь. Перший гравець прагне, щоб якомога більше рівнянь не мали дійсних розв'язків, а другий намагається заважати йому. Яке найбільше число рівнянь, які не мають коренів, зможе отримати перший гравець, незалежно від гри суперника?

2010-2011 навчальний рік

Завдання 1. Розкласти на множники x^5+x+1.

Завдання 2. Юрко так пише цифри, що 0,1,8 виглядають абсолютно однаково, якщо на них дивитись при природному запису, і якщо листок перегорнути зверху донизу. При такому перегортанні листка цифри 6 і 9 перетворюються одна в іншу. Він прагне написати таке число з усіма різними цифрами, щоб його добуток на перегорнуте число (яке також повинно мати зміст) було максимально можливим. Знайдіть усі такі числа.

Завдання 3. Довести, що рівняння $a^3+b^3+c^3=a^2+b^2+c^2$ має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах, якщо найбільший спільний дільник чисел *a, b, c* дорівнює 1.

Завдання 4. В таблиці $n\times n$ два гравці по черзі заповнюють рядки числами „+1'' та „-1''. Спочатку перший гравець заповнює перший рядок. Потім другий гравець - другий рядок, потім перший заповнює третій рядок. Далі другий - четвертий тощо. По закінченні заповнення перший гравець одержує по 1 балу за кожний рядок чи стовпчик, добуток чисел в якому додатний, інакше цей бал одержує другий гравець. Кожний прагне набрати якомога більше балів. Хто скільки балів може набрати при правильній грі кожного?

Завдання 5. У трикутнику ABC на стороні AC вибрані точки P і L таким чином, що $AF = LC < 0{,}5AC$. Знайти кут FBL якщо $AB^2 + BC^2 = AL^2 + LC^2$.

2011-2012 навчальний рік

Завдання 1. Знайдіть квадратний тричлен з цілими коефіцієнтами такий, щоб один з його коренів дорівнював $1-\sqrt{3}$.

Завдання 2. У якому випадку катер витратив більше часу: якщо проїде 30 км за течією річки і 30 км проти течії річки, чи якщо проїде 60 км у стоячій воді?

Завдання 3. Основи рівнобічної трапеції 3 см і 12 см, середина більшої основи з'єднана з кінцями меншої основи відрізками, що перетинають діагоналі трапеції в двох точках. Знайдіть відстань між цими точками.

Завдання 3. Побудувати графік функції $y = \dfrac{|x+2|}{4-x^2}$.

Завдання 5. При яких значеннях а рівняння $\left(a + 4x - x^2 - 1\right)\left(a + 1 - |x-2|\right) = 0$ має рівно три корені.

2012-2013 навчальний рік

Завдання 1. Знайдіть суму: $\left\lfloor\sqrt{1000}\right\rfloor + \left\lfloor\sqrt{1001}\right\rfloor + \left\lfloor\sqrt{1002}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\sqrt{2010}\right\rfloor + \left\lfloor\sqrt{2011}\right\rfloor$, де $[x]$ – ціла частина числа x.

Завдання 2. Знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності: $x > \dfrac{2012}{x}$.

Завдання 3. Графік функції $f(x) = x^2 + bx + c$ перетинає вісь абсцис у точках *A* і *C*, а вісь ординат у точці *B*. Відомо, що $A(1,0)$. Знайдіть $\angle CBO,$ де *O* – початок координат.

Завдання 4. В прямокутному трикутнику висота, яка опущена на гіпотенузу, ділить її на відрізки, різниця яких дорівнює одному з катетів трикутника. Знайдіть кути трикутника.

Завдання 5. По кругу записані *n* цілих чисел, сума яких дорівнює 4022. Відомо, що будь-яке із записаних чисел дорівнює модулю різниці двох чисел, які слідують за ним. Знайдіть всі можливі значення *n*.

10 КЛАС

1998-1999 навчальний рік

Завдання 1. Розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} x^2y^2 + xy^2 + x^2y + xy + x + y + 3 = 0, \\ x^2y + xy + 1 = 0. \end{cases}$

Завдання 2. Знайти всі таі натуральні числа x та y, для яких число $x + y$ є простим дільником числа $x^{1998} + y^{1998}$.

Завдання 3. Всередині правильного шестикутника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ відмітили точку B так, що $\angle A_2A_1B = \angle A_4A_3B = 50^\circ$. Знайти величину кута $\angle A_1A_2B$.

Завдання 4. Сума невід'ємних чисел x_1, x_2, x_3 дорівнює 1. Доведіть, що $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 \le \frac{1}{3}$.

Завдання 5. В таблиці дозволяється переставляти місцями будь-які два рядки чи будь-які два стовпці. Чи можна з верхньої таблиці, виконуючи вказані дії, одержати нижню таблицю?

0 1 2

2 1

0

1999-2000 навчальний рік

Завдання 1. Обчисліть без калькулятора і таблиць: $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}$.

Завдання 2. (Задача Ньютона) Трава на лузі росте однаково густо і швидко. Відомо, що 70 корів з'їдають її за 24 дні, а 30 корів – за 60 днів. Скільки корів з'їли б всю траву за 96 днів?

Завдання 3. Усередині рівнобедреного трикутника ABC (BC – основа) взято точку M так, що $\angle MBC = 30^\circ$, $\angle MCB = 10^\circ$. Знайдіть кут AMC, якщо $\angle BAC = 80^\circ$.

Завдання 1. Розв'яжіть рівняння $\left(2\sqrt{a - x^2} - 1\right)^2 = 4x^2 - 4x + 1$.

2000-2001 навчальний рік

Завдання 1. Довести, що $tg^2 36^\circ \cdot tg^2 72^\circ = 5$.

Завдання 2. Нехай $\max\{a;b\} = \begin{cases} a, & якщо \quad a \ge b, \\ b, & якщо \quad b \ge a. \end{cases}$

Побудуйте графік функції $y = \max\left\{x^2 - 3x - 16,\ \ 5 - 2x - x^2\right\}$.

Завдання 3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} + \sqrt{x^2 - 2xy + y^2} = 4, \\ \sqrt{x^2 + y^2} = a. \end{cases}$$

Завдання 4. Якщо дві бісектриси трикутника рівні, то трикутник рівнобедрений. Довести це.

2001-2002 навчальний рік

Завдання 1. Квадрат поділений на чотири частини двома взаємно перпендикулярними прямими, які проходять через центр квадрата. Знайти площу кожної частини, якщо сторона квадрата дорівнює *a*.

Завдання 2. Відомо, що $m^2 + n^2 = 1$, $p^2 + q^2 = 1$, $mp + nq = 0$. Обчислити $mn + pq$.

Завдання 3. Довести, що для додатних a, b, c виконується нерівність:

$$\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{a^2 + ac + c^2}.$$

Завдання 4. Розв'язати рівняння $4\sin \pi x = 4x^2 - 4x + 5$.

2002-2003 навчальний рік

Завдання 1. Знайти необхідну і достатню умову, при якій $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy$ є квадратом лінійної однорідної функції відносно x, y, z.

Завдання 2. Довести нерівність $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} \leq \frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

Завдання 3. Після ділення деякого двозначного числа на суму його цифр в частці одержуємо 7, а в остачі 6. Після ділення цього ж числа двозначного числа на добуток його цифр в частці одержуємо 3, а в остачі 11. Знайти це двозначне число.

Завдання 4. Довести, що з медіан трикутника можна побудувати трикутник. Як відносяться площі цих двох трикутників?

Завдання 5. З однієї вершини правильного п'ятикутника проведені всі діагоналі. Знайти відношення площ утворених трикутників.

2003-2004 навчальний рік

Завдання 1. Що більше 2004! Чи 1002^{2004}? $\quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)$

Завдання 2. Три кола радіуса R перетинаються в одній точці. Доведіть, що три інші точки перетину кіл лежать на колі радіуса R.

Завдання 3. Довести, що для довільного натурального *n* виконується рівність:

$$2^{2n+2}\left(1-\sin^{2n}\alpha\right)\left(1-\cos^{2n}\alpha\right)\geq n^2(n+1)^2\sin^{2n}2\alpha.$$

Завдання 4. Назвемо число вдалим, якщо його цифри можна розбити на дві групи, суми яких рівні. Знайдіть найменше число a таке, що числа a і a+1 – вдалі.

2004-2005 навчальний рік

Завдання 1. Обчислити $\cos^8 75^\circ - \sin^8 75^\circ$.

Завдання 2. Куб поділили на 27 кубиків і відкинули центральний куб. Кожен з 26 кубів, що залишились, знову поділили на 27 кубів і відкинули центральні куби. Процедуру повторили нескінченну кількість разів. Знайти об’єм тіла, що залишилось після відкидань.

Завдання 3. Побудуйте графік функції $y=\left|\frac{x^3-1}{x-1}-3x\right|$.

Завдання 4. Довести, що площа прямокутного трикутника дорівнює добутку довжин відрізків, на які точка дотику вписаного кола ділить гіпотенузу.

Завдання 5. В реченні ***«В цьому реченні …слів, …склади, …літери»*** вставити замість трьох крапок числа, записані літерами української мови, так, щоб отримати істинне висловлення.

2005-2006 навчальний рік

Завдання 1. Знайти найбільше значення виразу $|x|+|y|$, якщо $|3x+2y|\leq 6$, $|7x-3y|\leq 4$.

Завдання 2. Знайти всі цілі розв’язки рівняння $x^2-3y^3-9z^3=0$.

Завдання 3. Нехай $H_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$. Чи може ця сума бути більшою за число 10^{10}? Відповідь обґрунтувати.

Завдання 4. Виразити кут між медіаною та бісектрисою трикутника, що виходять з однієї вершини, через кути трикутника.

Завдання 5. Доведіть нерівність $\sin(\sin x)\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2006-2007 навчальний рік

Завдання 1. Знайдіть множину точок площини, координати яких задовольняють умову: $|x+1|+|x-1|+|y-1|+|y+1|=4$.

Завдання 2. Знайдіть суму всіх тризначних чисел, кратних 5.

Завдання 3. Розв’яжіть рівняння $\frac{4\sin x}{(x-3)^2}+|\sin x|=0$.

Завдання 4. Через вершину A опуклого чотирикутника ABCD проведіть пряму, яка поділить його площу навпіл.

2007-2008 навчальний рік

Завдання 1. Нехай x і y числа з інтервалу $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Доведіть нерівність:

$$x\cos x + y\cos y \le y\cos x + x\cos y.$$

Завдання 2. Знайдіть суму чотирьох натуральних чисел *a, b, c, d,* якщо множина можливих сум трьох з цих чисел дорівнює множині $\{2004,2005,2006\}$.

Завдання 3. В чотирикутнику ABCD діагональ BD є бісектрисою кута ABC і AC=BC. Відомо, що $\angle BDC = 60^\circ$ і $\angle ACB = 20^\circ$. Знайдіть значення кута BAD.

Завдання 4. Усередині квадрата зі стороною 1 розташовано декілька кіл, сума довжин яких дорівнює 10. Доведіть, що існує пряма, яка перетинає принаймні чотири із цих кіл.

Завдання 5. Побудуйте графік функції $y = \frac{|x|-1}{3-|x|}$.

2008-2009 навчальний рік

Завдання 1. Доведіть тотожність $\left(\underbrace{66\ldots6}_{2008\,раз}\right)^2 + \underbrace{88\ldots8}_{2008\,раз} = \underbrace{44\ldots4}_{4016\,раз}$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $1+\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x$.

Завдання 3. На двох клітинках шахової дошки стоять чорна і біла фішка. За один хід можна перемістити будь-яку з них на сусідню по вертикалі або горизонталі клітинку (дві фішки не можуть стояти на одній клітинці). Чи можуть у результаті таких ходів зустрітися усі можливі варіанти розташування цих двох фішок, причому рівно по одному разу?

Завдання 4. У квадраті ABCD внутрішня точка N знаходиться на однаковій відстані від точок A і B. Кут BAN дорівнює 15°. Обчислити кут NCD.

Завдання 5. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} y+z+yz=a, \\ z+x+zx=b, \\ x+y+xy=c. \end{cases}$$

2009-2010 навчальний рік

Завдання 1. В квадратній таблиці 2009×2009 деякі клітини пофарбовані. Кожна зафарбована клітина є єдиною зафарбованою клітиною або в стовпчику, або в рядку таблиці. Яку найбільшу кількість клітинок можна зафарбувати? Відповідь обґрунтуйте.

Завдання 2. Доведіть, що $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a} \le 12$ виконується при всіх значеннях a, для яких визначена її ліва частина.

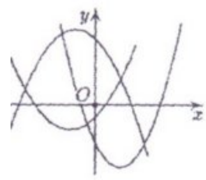
Завдання 3. Для будь-яких чисел a, b, c знайти найменше значення виразу $|2006-a|+|a-b|+|b-c|+|c-6002|$.

Завдання 4. На сторонах квадрата ABCD позначено точки M, N і K так, що M - середина AB, $N \in BC$, причому NC=2BN, $K \in AD$, причому AK=2DK. Знайдіть синус кута між прямими MC і NK.

Завдання 5. Знайдіть всі пари цілих чисел x та y, які задовольняють рівняння $x^2+x=y^4+y^3+y^2+y$.

2010-2011 навчальний рік

Завдання 1. На рисунку



зображено графіки квадратичних функцій. Чи можливо підібрати такі числа *a, b, c, що це* будуть графіки функцій $y=ax^2+bx+c$, $y=bx^2+cx+a$, $y=cx^2+ax+b$? Відповідь обґрунтуйте.

Завдання 2. Розв'яжіть нерівність $\left|\frac{x-5}{x}\right|\left(x^2-x-12\right)\le 0$.

Завдання 3. Розглянемо годинник, який має дві стрілки – годинну та хвилинну, які рухаються неперервною. За ту годину, що пройде від 12-00 до 13-00, якого часу буде більше – коли між цими стрілками буде гострий кут чи тупий?

Завдання 4. Для додатних чисел *a, b, c* таких, що $abc=1$, довести нерівність

$$\frac{a^2+b^2}{c^2+a+b}+\frac{b^2+c^2}{a^2+b+c}+\frac{c^2+a^2}{b^2+c+a}\ge 2.$$

Завдання 5. В опуклому п'ятикутнику ABCDE $\angle A=\angle B=\angle D=90^\circ$. Знайдіть $\angle ADB$, якщо відомо, що даний п'ятикутник можна вписати коло.

2011-2012 навчальний рік

Завдання 1. Довести нерівність $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{2011^2}<1$.

Завдання 2. Два кола перетинаються у точках A і B. У точці A до кіл проведені дві дотичні, які перетинають кола у точках M і N. Знайти суму кутів $\angle ABN+\angle MAN$.

Завдання 3. Розв'язати рівняння $\sqrt{x}+\sqrt{x+5}+2\sqrt{x^2+5x}=25-2x$.

Завдання 4. Побудувати графік функції $\frac{y^2-1}{|y|-1}=\frac{1}{|x|}$.

Завдання 5. Знайти найменше значення виразу $x+y+z$, якщо $\begin{cases} xy+yz=8; \\ yz+xz=9; \\ xz+xy=5. \end{cases}$

2012-2013 навчальний рік

Завдання 1. Скількома нулями закінчується число, що дорівнює значенню виразу:

$$\underbrace{2010^{2012}+2010^{2012}+\ldots+2010^{2012}}_{2012}?$$

Завдання 2. Про функцію $y=f(x)$ відомо, що: $f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$ для всіх додатних x та y; $f(2011)=2012$. Знайдіть: $f(\frac{1}{2011})$.

Завдання 3. Нехай *O* – внутрішня точка квадрата *ABCD* зі стороною *AB*=1, для якої виконується рівність $AO^2+BO^2+CO^2+DO^2=2.$. Доведіть, що *O* – центр квадрата.

Завдання 4. Нехай (a_n) — арифметична прогресія з різницею 1. Відомо, що S_{2011} – найменша серед усіх S_n (менше суми перших *n* членів для будь-якого іншого значення *n*). Яких значень може приймати перший член прогресії?

Завдання 5. Для даного натурального $n \le 8$ розглянемо на шаховій дошці квадрати розміру $n \times n$ клітинок. Для кожного такого квадрата порахуємо кількість чорних клітинок на ньому, а потім додамо отриману кількість для всіх квадратів $n \times n$. При якому *n* ця сума досягає найбільшого значення?

11 клас

1998-1999 навчальний рік

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\sin^{1999}x+\cos^{1999}x+2\sin^{1999}y=3$.

Завдання 2. Доведіть, що рівняння $x^2+y^2+z^2=1999$ не має розв'язків в цілих числах.

Завдання 3. Нехай M - середина сторони AB, а N - середина сторони CD опуклого чотирикутника ABCD. Пряма MN перетинає діагоналі AC та BD відповідно в точках E та F. Доведіть, що $\frac{AE}{EC}=\frac{BF}{FD}$.

Завдання 4. Доведіть, що для будь-яких додатних чисел a та b виконується нерівність $\frac{\sqrt{a^2+2}-1}{b}+\frac{\sqrt{b^2+2}-1}{a}\ge 2$.

Завдання 5. Прямокутник в клітинку зі сторонами більше однієї клітинки розбили на доміношки (прямокутники 1×2). Нехай a – кількість квадратів 2×2, які утворені двома доміношками, b - кількість квадратів 2×2, які утворені з клітинок чотирьох різних доміношок. Доведіть, що $a > b$.

1999-2000 навчальний рік

Завдання 1. Квадрат зі стороною 1 розбили на 9 квадратів і викинули центральний (див. рис.). Кожен із решти квадратів знову поділили на 9 і викинули центральний. Після нескінченного повторення процедури поділу і викидання центральних квадратів одержимо

фігуру, яка носить назву килима Сер пінського. Знайдіть площу килима Сер пінського.

Завдання 2. Функція $f(x)$ визначена для натуральних значень n і задовольняє умовам $f(n)=f(n-1)+a^n$, $f(1)=1$. Знайдіть $f(n)$.

Завдання 3. Знайдіть кут між ребром OA та бісектрисою протилежної грані BOC трьохгранного кута, якщо $\angle AOB=\alpha$, $\angle BOC=\gamma$, $\angle COA=\beta$.

Завдання 4. Знайдіть $\arccos\left(\sin\pi\left(x^2+x-3\right)\right)$, якщо $0\le x\le \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}$.

2000-2001 навчальний рік

Завдання 1. Розв'яжіть рівняння $\left|\left|\left|x\right|-1\right|-2\right|-3\right|=2{,}5$.

Завдання 2. Обчисліть суму $1^3+2^3+3^3+...+n^3$.

Завдання 3. Побудуйте на площині точки, які задовольняють умову $\max\left(x,y^2\right)=\min\left(y,x^2\right)$.

Завдання 4. Куб поділили на 27 рівних кубиків і викинули центральний куб та 6 кубів, що мають спільну з центральним грань. З кожним із 20 кубиків, що залишились провели таку ж процедуру, тобто поділили на 27 кубиків і викинули центральний куб та 6 сусідніх. Після повторення процедури поділу та викидання кубів нескінченну кількість разів отримали фігуру, яка називається губкою або кубом Серпінського. Знайдіть:

А) площу поверхні губки Серпінського;

Б) об'єм губки Серпінського.

2001-2002 навчальний рік

Завдання 1. Розв'язати рівняння:

$$\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1+4x}+\sqrt{x^2+y^2-2y-3}=\sqrt[4]{x^4-16}-y+5.$$

Завдання 2. Числа a, b, c, d задовольняють умовам $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. Довести, що $|ac - bd| \le 1$.

Завдання 3. Дано паралелограм ОАСВ. Проведемо пряму, яка відтинає від сторони ОА одну третю, від сторони ОВ – одну четверту, рахуючи від вершини О. Яку частину ця пряма відтинає від діагоналі ОС?

Завдання 4. Знайти $S = xy + yz$, якщо $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ і $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y^2 + z^2 = 48, \\ y^2 = xz. \end{cases}$

2002-2003 навчальний рік

Завдання 1. Знайти коефіцієнти квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, якщо відомо, що його найбільше значення дорівнює $\frac{1}{4}$ при $x = \frac{3}{2}$, а сума кубів його коренів дорівнює 9.

Завдання 2. Довести, що коли $\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta} + tg\alpha tg\beta = tg\gamma$, то $\cos 2\gamma \le 0$.

Завдання 3. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ протилежні кути A і C - прямі. До діагоналі AC опущено перпендикуляри BE і DF. Довести, що $CE = FA$.

Завдання 4. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведені січна площина BDC_1 та діагональ CD_1 бічної грані CC_1D_1D. Знайти кут між CD_1 та січною площиною.

Завдання 5. В алфавіті дикого племені бургазів всього шість літер А, Б, Г, З, Р, У, розташованих у приведеному вище порядку. Словами у цьому племені є всі можливі шестибуквені перестановки всіх літер алфавіту. Який порядковий номер має у великому бургазському словнику слово «гарбуз»?

2003-2004 навчальний рік

Завдання 1. Доведіть, що число $1^{2003} + 2^{2003} + 3^{2003} + ... + 2002^{2003}$ ділиться на 2003.

Завдання 2. Зобразіть на площині множину точок $M(x; y)$, для яких $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 4x, \\ |y| \ge |2 - x| \end{cases}$ та обчисліть площу відповідної фігури.

Завдання 3. Розв'яжіть рівняння $\sqrt{a - \sqrt{a - ... - \sqrt{a - x}}} = x$, якщо кількість радикалів дорівнює 2003.

Завдання 4. Із всіх трикутників з основою a і протилежним кутом α знайти трикутник з найбільшою бісектрисою, проведеної до основи.

2004-2005 навчальний рік

Завдання 1. Розв'язати рівняння $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$.

Завдання 2. Знайти суму $tg\frac{\alpha}{2}\sec\frac{\alpha}{2}+tg\frac{\alpha}{4}\sec\frac{\alpha}{4}+tg\frac{\alpha}{8}\sec\frac{\alpha}{8}+...+tg\frac{\alpha}{2^n}\sec\frac{\alpha}{2^n}.$

Завдання 3. Розглянемо послідовність: 1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4; … . Яке число стоїть на 2005-му місці? На *n*-му місці?

Завдання 4. В правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ кут між AC_1 і A_1B дорівнює α $\left(\alpha=60^\circ\right)$, $AA_1=2.$ Знайти AB.

Завдання 5. В реченні ***«В цьому реченні …слів, …склади, …літери»*** вставити замість трьох крапок числа, записані літерами української мови, так, щоб отримати істинне висловлення.

2005-2006 навчальний рік

Завдання 1. Довести, що кожне натуральне число рівне різниці двох натуральних чисел, які мають однакову кількість простих дільників.

Завдання 2. Знайти $f(4)$, якщо $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=\sqrt{x}.$

Завдання 3. Дослідити на екстремум функцію $y=\max\{2x+3;x^2-1\}.$ Примітка:
$$\max\{a,b\}=\begin{cases}a, & \text{якщо } a\ge b\\ b, & \text{якщо } b>a.\end{cases}$$

Завдання 4. Сторони двох кутів перетинаються в точках A, B, C, D. Відомо, що бісектриси цих кутів взаємно перпендикулярні. Довести, що точки A, B, C, D лежать на одному колі.

Завдання 5. Кожен плоский кут тригранного кута дорівнює 60°. На одному з його ребер від вершини відкладено відрізок, довжиною a, і з його кінця опущено перпендикуляр на протилежну грань. Знайдіть довжину перпендикуляра.

2006-2007 навчальний рік

Завдання 1. Знайдіть суму кутових коефіцієнтів дотичних до кривої $y=x^2-4x+3,$ проведених з точки (2;-5).

Завдання 2. Доведіть, що остача від ділення простого числа на 30 буде або простим числом, або одиницею.

Завдання 3. Знайдіть всі функції $f:R\to R,$ для яких при будь-яких x виконується рівність $x\left(f(x)+f(-x)+2\right)+2f(-x)=0.$

Завдання 4. Точки M, N, K позначено відповідно на сторонах AB, BC, CA гострокутного трикутника ABC так, що $\angle AMK=\angle BMN=\angle ACB.$ Точку перетину відрізків AN та BK позначено через L. Доведіть, що точки C, K, L, N лежать на одному колі.

2007-2008 навчальний рік

Завдання 1. Під час повороту аркуша паперу в його площині на 180° запис цифр 0, 1, 8, не змінюється, запис цифр 6 і 9 переходить один у другий, а запис усіх а запис усіх інших втрачає зміст. Скільки існує семизначних чисел, запис яких не змінюється під час повороту аркуша паперу на 180°. Чому дорівнює сума всіх таких чисел? Скільки серед них таких, що діляться на 4?

Завдання 2. В півкруг радіуса **R** вписана рівнобічна трапеція, основа якої є діаметр півкруга. Знайдіть кут при основі трапеції такий, щоб площа трапеції була найбільшою?

Завдання 3. Знайдіть найбільше значення параметра *a,* при якому нерівність $x^2 \ge a[x]\cdot\{x\}$ виконується для всіх дійсних чисел, де $[u]$ - ціла частина числа, $\{u\}$ - дробова частина числа.

Завдання 4. У правильній трикутній піраміді SABC довжини бічних ребер 4 см. Плоскі кути при вершині рівні 30°. На ребрах SA і SC вибрані точки M і N відповідно. Знайти найменше значення суми. BM+MN+NB.

Завдання 5. Скільки розв'язків має система рівнянь: $\begin{cases} \cos\pi x = \cos\pi y, \\ x^2 + y^2 = 3. \end{cases}$

2008-2009 навчальний рік

Завдання 1. Доведіть тотожність $\left(\underbrace{66\ldots6}_{2008\,раз}\right)^2 + \underbrace{88\ldots8}_{2008\,раз} = \underbrace{44\ldots4}_{4016\,раз}.$

Завдання 2. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 6x\cdot\sin(xy) + 9 = 0.$

Завдання 3. При яких значеннях a нерівність $\sin^5 x + \cos^3 x \ge a$ не має розв'язків?

Завдання 4. Побудувати графік функції $y = arctg\left(4 - 2|x|\right).$

Завдання 5. У правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бічна грань і переріз AB_1C – рівновеликі. Знайти кут між площиною цього перерізу і бічним ребром призми.

2009-2010 навчальний рік

Завдання 1. Знайти всі тризначні числа, які дорівнюють сумі факторіалів своїх цифр.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $x + x^3 + \sin x = x^2 + x^6 + \sin x^2.$

Завдання 3. У правильній чотирикутній призмі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ бічна грань і переріз AB_1C – рівновеликі. Знайти кут між площиною цього перерізу і бічним ребром призми.

Завдання 4. Чи існує функція $f:\ R \to R$, яка не набуває жодного свого значення більше, ніж в одній точці, і при всіх дійсних x задовольняє нерівність $f\left(x^2\right) - f^2(x) \ge 0{,}25$?

Завдання 5. Знайти всі значення параметра a, при яких рівняння з трьома невідомими $3\left(x^2 + y^2 + \sin^2 z\right) + a^2 = 6a\cdot\sqrt[3]{xy}\sin z$ має принаймні один розв'язок.

2010-2011 навчальний рік

Завдання 1. Нехай $\tau(n)$ - кількість дільників числа *n*. Довести, що існує нескінченно багато натуральних *N* таких, що $(\tau(N)+\tau(N+1)+1)\vdots 3$.

Завдання 2. Розв'яжіть рівняння $x^4+1=2x^2\sin y$.

Завдання 3. Петро може розташувати три рівних відрізка у просторі довільним чином. Після того як Петро розташує ці відрізки, Андрій намагається знайти площину і спроектувати на неї відрізки так, щоб проекції всіх трьох були рівні. Чи завжди це можливо зробити? Відповідь обгрунтуйте.

Завдання 4. Чому дорівнює сума дійсних коренів рівняння $f(x)=0$, якщо всі дійсні значення *x* задовольняють рівність $f(2x+1)=4x^2+14x$?

Завдання 5. Доведіть, що на координатній площині не існує правильного трикутника, всі вершини якого мають цілі координати.

2011-2012 навчальний рік

Завдання 1. Розв'язати рівняння $2\cos x=2^x+2^{-x}$.

Завдання 2. Побудувати графік функції $y=\left(\sqrt{1+tg^2x}\cdot\cos x\right)\cdot\sqrt{|x|}$.

Завдання 3. Потужність цеху складає 100 виробів А або 300 виробів В за добу. Відділ технічного контролю може перевірити не більше 150 виробів. Вибір А коштує вдвічі дорожче виробу В. Скільки виробів обох типів має випускати цех за добу, щоб загальна вартість продукції була максимальною?

Завдання 4. Знайти всі функції $f\colon\ R\to R$, що задовольняють рівняння $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2-x^2}{x}$.

Завдання 5. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a, а бічне ребро b. У перерізі цієї піраміди деякою площиною, паралельною бічному ребру і мимобіжній з ним стороні основи, утворився квадрат. Знайдіть його сторону.

2012-2013 навчальний рік

Завдання 1. Порівняйте числа $A=\cos\{\frac{\pi}{2}+2011\}$ та $B=\sin 1$, де $\{x\}$ – дробова частина числа x, $[x]$ – ціла частина числа і $x=[x]+\{x\}$.

Завдання 2. Доведіть, що, якщо a,b,c - додатні дійсні числа і $a+b=c$, то $a^{\frac{2011}{2012}}+b^{\frac{2011}{2012}}>c^{\frac{2011}{2012}}$.

Завдання 3. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Порівняйте відстані від вершини A до площин A_1BD і C_1BD.

Завдання 4. Про многочлени з цілими коефіцієнтами $P(x),\ Q(x), R(x)$ відомо, що многочлен $P(x^5)+xQ(x^5)+x^2R(x^5)$ ділиться без остачі на $x^4+x^3+x^2+x+1$. Знайдіть $P(1)$.

Завдання 5. До кола R_1=4 будується коло R_2=2, яке дотикається його зовнішнім чином, потім будується коло R_3=1, що дотикається цих двох зовнішнім чином. На кожному наступному кроці будується коло радіуса вдвічі менше попереднього, що дотикається зовнішнім чином двох кіл, побудованих на двох попередніх кроках. Доведіть, що:

a) всі побудовані кола вміщаються у квадрат зі стороною $10(1+\frac{1}{\sqrt{2}})$;

b) всі побудовані кола вміщаються у круг радіуса $\frac{22}{3}$.

Поради учаснику олімпіади

1. Уважно прочитайте умови задач і визначте порядок, у якому будете їх розв'язувати (краще починати з легших задач, які, як правило, розміщені на початку).
2. Якщо умову задачі можна зрозуміти різними способами, то не вибирайте найзручніший для себе, а зверніться за консультацією до членів журі.
3. Якщо незрозуміло, чи правильне деяке твердження, то спробуйте його довести або спростувати.
4. Не зациклюйтесь на одній задачі. Якщо немає ідеї розв'язання, то задачу краще (хоча б на деякий час) облишити.
5. Розв'язавши задачу, зразу ж оформляйте розв'язання. Це допоможе перевірити його правильність і звільнить увагу для інших задач.
6. Кожен, навіть очевидний, крок розв'язання треба записувати. Громіздкі розв'язки краще записувати у вигляді кількох тверджень (лем).
7. Перед тим як здати роботу, уважно перечитайте її "очима членів журі" - чи зможуть вони в ній розібратись.

Використана література

1. Вишенський В.А., Перестук М.О., Самійленко А.М. Задачі з математики.-К.: Вища школа, 1985.-262 с.
2. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язування алгебраїчних задач.-К.: Радянська школа, 1991.-221 с.
3. Галицкий М.Л., Мошкович М.М., Шварцбурд С.И. Углубленное изучение курса алгебры и математического анализа.-М.: «Просвещение», 1990.-352 с.
4. Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре: Учебное пособие для 8-9 кл. с углубленным изучением математики. -М.: «Просвещение», 2006.-300 с.
5. Горделадзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчик Ф.П. Збірник конкурсних задач з математики: навчальний посібник третє видання.-К.: Вища школа, 1998.-328 с.
6. Задачі на подільність (методичні рекомендації). Укладач Погрібний В.Д. –К.: ІЗМН, 1996. – 32 с.
7. Збірник задач з математики для вступників до втузів/В.К. Єгерев, В.В. Зайцев, Б.А. Кордемський та ін.; За редакцією М.І. Сканаві;-К.: Вища школа, 1992.-445 с.
8. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. Алгебра 9 клас/ За редакцією З.І. Слєпкань; -Харків: Гімназія, 2002.-143 с.
9. Ивлев Б.М., Абрамов А.М., Дудницын Ю.П., Шварцбурд С.И. Задачи повышеной трудности по алгебре и началам анализа.
10. Коваленко В.Г., Кривошеев В.Я., Лемберский Л.Я. Алгебра: Эксперементальное учебное пособие для 8кл. шк. с углубленным изучением математики и специализированых школ физико-математического профиля.-К.: Радянська школа , 1990.-288 с.
11. Кушнир И. Неравенства. –К.: Астарта, 1996. -541 с.
12. Мерзляк А. Г., Полянський В. Б., Якір М. С. Алгебра: Підручник для 9 кл. з поглибленим вивченням математики. – Х. : Гімназія, 2009. -384 с.
13. Моргун О.О., Фурман М.С. Алгебра 9 клас: Поглиблене вивчення. –Х.: Основа, 2006. -220.
14. Померанцева Л.И. Проведение факультативних занятий по математике на тему «Делимость и простые числа». – Черкассы : 1982. -34 с.
15. Сарана О. А. Математичні олімпіади. – К. Вид. А.С.К., 2004. -340 с.
16. Сивашинский И. Х. Задачи по математике для внекласных занятий. – М. : Просвещение, 1968. -311 с.
17. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике 10 клас.-М.: Просвещение, 1989.-350 с.
18. Ясінський В.В. Математика. Методичний посібник для слухачів ІДП НТУУ «КПІ»/ За редакцією чл.-кор. НАН В.С. Мельника – К.: НТУУ «КПІ», 2003-324 с.

Видання підготовлено до друку та віддруковано
редакційно-видавничим відділом ЧОІПОПП
Зам. № 1287 Тираж 100 пр.
18003, Черкаси, вул. Бидгощська, 38/1