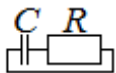


I-й етап Всеукраїнської олімпіади з фізики у Дніпропетровській області
25.10.2025 р. 11 клас (умови і розв'язки)

1. (10 балів) Міні-завдання

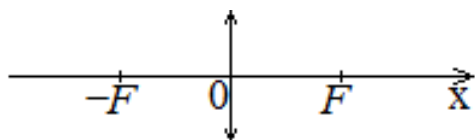
1.1. Виразити в фарадах ємність конденсатора $C = \frac{1}{1296000} \frac{(\text{мкА})^2 \cdot (\text{хВ})^4}{\text{Г} \cdot (\text{см})^2}$.

1.2. На основі закону Джоуля–Ленца виведіть вираз для розмірності опору через основні одиниці СІ: кг, м, А, с.



1.3. RC-ланцюжком називається послідовне з'єднання конденсатора ємністю C та резистора опором R . На основі міркувань розмірності запропонувати формулу для характерного часу розрядження конденсатора в RC-ланцюжку, якщо його замкнути сам на себе (див. рисунок).

1.4. Заряджена частинка з зарядом $q = +10^{-10}$ Кл і масою $m = 1,8 \cdot 10^{-5}$ кг обертається по колу радіуса $r = 1$ см навколо нерухомої зарядженої частинки зі швидкістю $v = 1$ м/с. Знайти заряд нерухомої частинки. Стала в законі Кулона $k = 9 \cdot 10^9$ Н·м²/Кл².



До задачі 1.5

1.5. Фокусна відстань тонкої збиральної лінзи дорівнює F . Вздовж головної оптичної вісі (ГОВ) лінзи провели координатну вісь, як показано на рисунку, оптичний центр лінзи співпадає з початком координат. Маленьке тіло коливається на ГОВ лінзи за законом $x(t) = -2F + 0,5F \cos(\omega t)$. Знайти найбільшу відстань від зображення тіла до лінзи, що досягається при такому русі.

1.1. $C = \frac{1}{1296000} \cdot \frac{(10^{-6} \text{ А})^2 \cdot (60 \text{ с})^4}{10^{-3} \text{ кг} \cdot (10^{-2} \text{ м})^2} = 10^{-4} \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} = \boxed{10^{-4} \text{ Ф}}$

1.2. $Q = I^2 R t \Rightarrow \text{Ом} = \frac{\text{Дж}}{\text{А}^2 \cdot \text{с}} \Rightarrow \boxed{\text{Ом} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3}}$

1.3. $t = f(R, C) = \alpha R^x C^y$, $\alpha = \text{const}$. $[C] = \text{Ф} = \frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^2}$, див., зокрема, задачу 1.1.

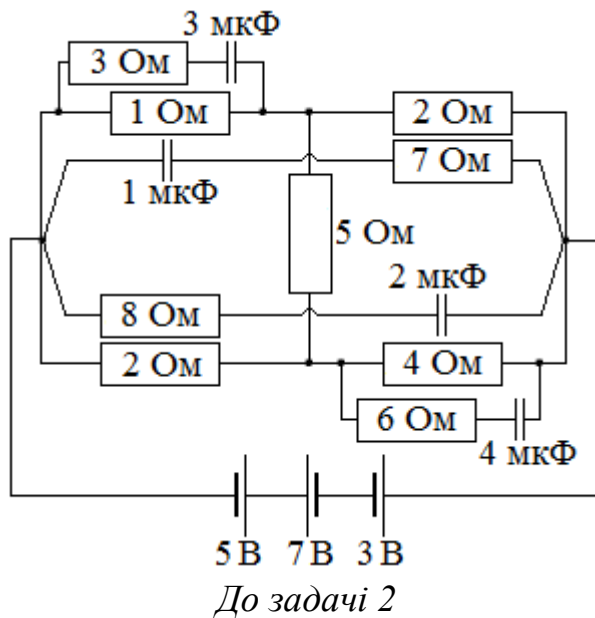
$[R] = \text{Ом} = \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3}$, тож $\text{с} = \left(\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{А}^2 \cdot \text{с}^3} \right)^x \left(\frac{\text{А}^2 \cdot \text{с}^4}{\text{кг} \cdot \text{м}^2} \right)^y \Rightarrow x = y = 1$, тож шукана формула

$t = \alpha RC$, α – безрозмірна стала. Для довідки: за час, що дорівнює $\tau = RC$ заряд конденсатора падає в e разів.

1.4. $\frac{k|qQ|}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow |Q| = \frac{mv^2 r}{k|q|} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}$, $Q < 0$, тож $\boxed{Q = -2 \cdot 10^{-7} \text{ Кл}}$.

1.5. Відстань від тіла до лінзи змінюється в межах від $2,5F$ до $1,5F$. Найбільша відстань від зображення до лінзи досягається при $d = 1,5F$ і дорівнює

$\frac{dF}{d - F} = \frac{1,5F \cdot F}{1,5F - F} = \boxed{3F}$.



2. (10 балів) Електричне коло складається зі з'єднання трьох ідеальних джерел ЕРС, резисторів та конденсаторів, див. рисунок.

2.1. Знайти ЕРС з'єднання джерел.

Через тривалий час після початку роботи кола:

2.2. Вказати, через які резистори не протікатиме струм. Відповідь пояснити.

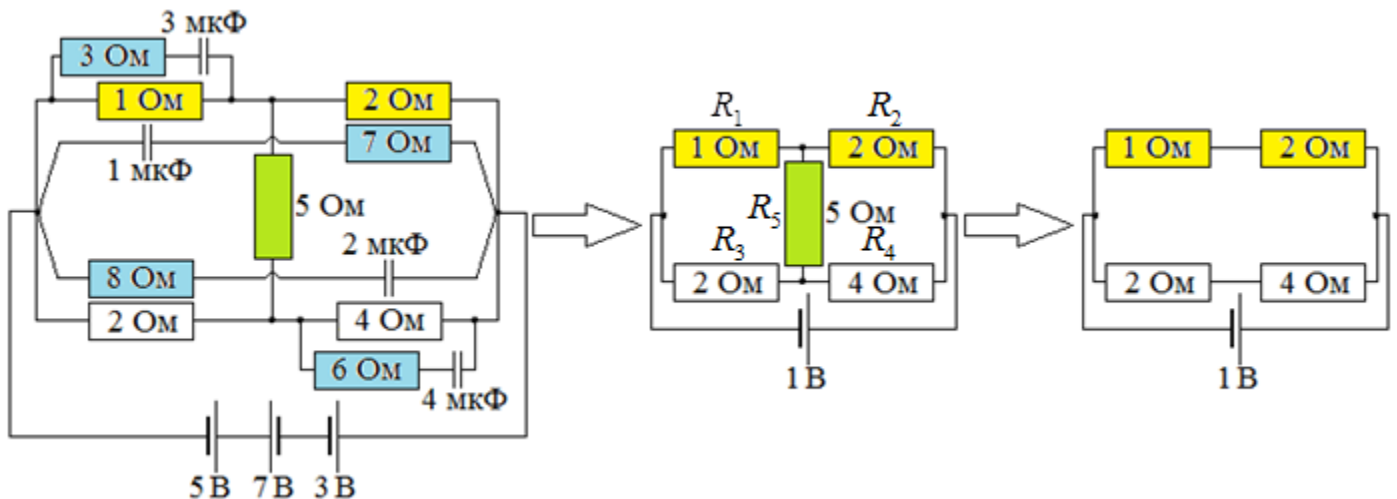
2.3. Вказати, через які резистори протікатиме найбільший струм. Відповідь пояснити.

2.4. Знайти загальну потужність, що

виділяється в колі.

2.1. $\varepsilon = 5\text{В} - 7\text{В} + 3\text{В} = \boxed{1\text{В}}$.

2.2 та 2.3. Через тривалий час конденсатори перестають пропускати струм, тож через гілки, які містять конденсатори, струм перестає проходити, та через «блакитні» резистори струм не потече. Відповідно, схема зведеться до схеми балансного резистивного моста через виконання умови $R_1 R_4 = R_2 R_3$, тож через «центральный» резистор R_5 струм теж не потече («зелений» резистор).

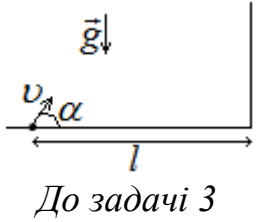


Відповідно, схема звелась до паралельного з'єднання двох гілок, більший струм буде на гілці меншого опору («жовті» резистори). Відповідні еквівалентні перетворення зображено на рисунку. Через «блакитні» та «зелений» резистор струм не потече, через «жовті» потече найбільший струм.

2.4. Загальний опір еквівалентної схеми через тривалий час після початку роботи

схеми: $R_{\text{заг}} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot (R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 2 \text{ Ом}$, струм через джерела, він же – загальний струм

через коло $I_{\text{заг}} = \frac{\varepsilon}{R_{\text{заг}}}$, загальна потужність $P = I_{\text{заг}}^2 R_{\text{заг}} = \frac{\varepsilon^2}{R_{\text{заг}}} = \frac{(1\text{В})^2}{2 \text{ Ом}} = \boxed{0,5\text{Вт}}$.



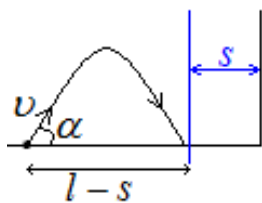
3. (10 балів) Маленьку кульку кидають з горизонтальної поверхні під кутом α до горизонту, який може змінюватись від 0 до $\pi/2$ в площині рисунку. Відстань від точки кидання до високої вертикальної стіни $l = 7 \text{ м}$, див. схематичний рисунок; початкова швидкість кульки дорівнює $v = 10 \text{ м/с}$. Удар кульки о стінку абсолютно пружний, при дотику до поверхні кулька прилипає до неї. Вважати $g = 10 \text{ м/с}^2$.

3.1. Знайти максимальну висоту підняття кульки, якщо $\alpha = \pi/2$.

3.2. Знайдіть можливі значення кута α , якщо відстань від кульки до стінки не досягла значення $s = 2 \text{ м}$ під час польоту.

3.3. Знайдіть можливі значення кута α , якщо двічі під час польоту кулька знаходилась на відстані $s = 2 \text{ м}$ від стінки.

$$\mathbf{3.1.} \quad \frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g} = \boxed{5\text{М}}.$$

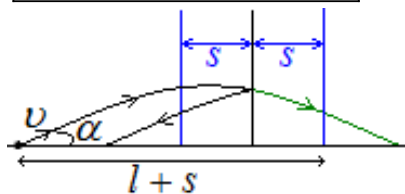


3.2. Дальність польоту є меншою за $l - s$, див. рисунок, звідки $\frac{v^2 \sin(2\alpha)}{g} < l - s \Rightarrow \sin(2\alpha) < \frac{g(l-s)}{v^2}$, розв'язок тригонометричної

нерівності: $2\alpha \in \left[0, \arcsin \frac{g(l-s)}{v^2}\right) \cup \left(\pi - \arcsin \frac{g(l-s)}{v^2}, \pi\right]$, шуканий

діапазон кутів $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2} \arcsin \frac{g(l-s)}{v^2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{g(l-s)}{v^2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Числова відповідь:

$$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ або } \alpha \in [0, 15^\circ) \cup (75^\circ, 90^\circ].$$



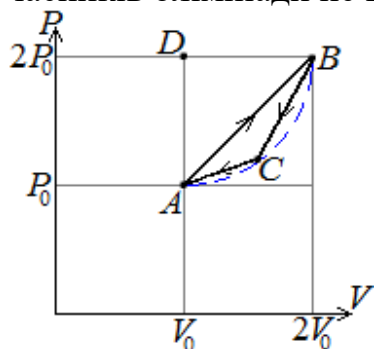
3.3. Траєкторія тіла, що задовольняє умову задачі, зображена на рисунку. «Продовження» траєкторії тіла за стінку (див. зеленим кольором на рисунку) буде симетричним відносно стінки до траєкторії тіла після удару. Відповідно, це буде еквівалентним до того, що у випадку, якщо стінки не було б, дальність польоту мала б бути не меншою за $l + s$.

Тож $\frac{v^2 \sin(2\alpha)}{g} \geq l + s$, $\sin(2\alpha) \geq \frac{g(l+s)}{v^2} \Rightarrow 2\alpha \in \left[\arcsin \frac{g(l+s)}{v^2}, \pi - \arcsin \frac{g(l+s)}{v^2}\right]$, та

шуканий діапазон кутів $\alpha \in \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{g(l+s)}{v^2}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{g(l+s)}{v^2}\right]$. Числова відповідь:

$$\alpha \in \left[\frac{1}{2} \arcsin \frac{9}{10}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{9}{10} \right], \text{ або від приблизно } 32^\circ \text{ до приблизно } 58^\circ.$$

Примітка: при числових даних в умові кулька може влучити в стінку лише після проходження верхньої точки траєкторії, однак детальний аналіз цього факту від учасників олімпіади не вимагався.



До задачі 4

4. (10 балів) З одноатомним ідеальним газом зі сталою кількістю частинок відбувається термодинамічний цикл ABC, кожна ділянка якого є прямолінійною в координатах PV; див. рисунок.

4.1. Знайти відношення найбільшої до найменшої абсолютної температури газу впродовж циклу.

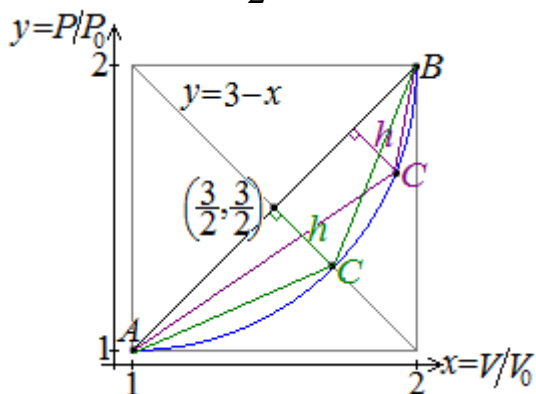
4.2. Знайти теплоту, отриману газом на ділянці AB. Параметри P_0 та V_0 вважати заданими.

Точку C обирають на дузі кола AB з центром в точці D так, щоб ККД циклу був найбільш можливим.

4.3. Де має бути розташована точка C на дузі кола AB? Знайти відповідний найбільш можливий ККД.

4.1. Згідно рівняння стану ідеального газу $\frac{T_{\max}}{T_{\min}} = \frac{2P_0 \cdot 2V_0}{P_0 V_0} = \boxed{4}$.

4.2. $Q_{AB} = \frac{3}{2}(2P_0 \cdot 2V_0 - P_0 V_0) + A_{AB} = \frac{9}{2}P_0 V_0 + \frac{P_0 + 2P_0}{2}V_0 = \boxed{6P_0 V_0}$.



4.3. Газ отримує теплоту тільки на ділянці AB; на ділянках BC та CA газ віддає теплоту незалежно від розташування точки C на чверті кола, тож незалежно від розташування точки C $Q_{\text{прийняте}} = 6P_0 V_0$. $\eta = A_{\text{заЦикл}} / Q_{\text{прийняте}}$, робота за цикл дорівнює площі трикутника ABC, тож треба обрати точку C так, щоб максимізувати площу трикутника ABC. Див. рисунок в безрозмірних осях. $AB = \sqrt{2}$, $S_{ABC} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{h}{\sqrt{2}}$, тобто треба розташувати точку

C таким чином, щоб висота h трикутника ABC була максимально можливою. Оптимальне розташування наведено зеленим кольором, точка C має лежати на перетині прямої $y = 3 - x$ та дуги кола $y = 2 - \sqrt{1 - (x - 1)^2}$, відповідна точка перетину має координати $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, тож з урахуванням розмірностей координати точки

C: $\boxed{C\left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)V_0, \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)P_0\right)}$. В безрозмірних осях максимально можлива висота

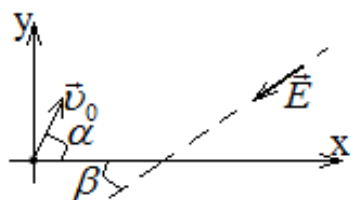
трикутника ABC дорівнює відстані між точками $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ та $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$, тож

$$h_{\max} = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \quad S_{\max} = \frac{h_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}; \text{ з урахуванням}$$

розмірностей відповідна робота за цикл $A_{\max} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} P_0 V_0$, та шуканий

$$\eta_{\max} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} P_0 V_0 / 6 P_0 V_0 = \frac{\sqrt{2}-1}{12}, \text{ або приблизно } 3,45\%.$$

Примітка: вище наведено розв'язок без похідної. Можна було також, наприклад, формально дослідити площу трикутника ABC в безрозмірних осях як функцію від координати x точки C з урахуванням того, що точка C лежить на дузі кола $y = 2 - \sqrt{1 - (x-1)^2}$ та на основі взяття похідної довести, що на проміжку $x \in [1, 2]$ функція $S_{ABC}(x)$ досягає максимального значення при $x = 1 + (1/\sqrt{2})$ та відповідне максимальне значення площі дорівнює $(\sqrt{2}-1)/2$.



До задачі 5

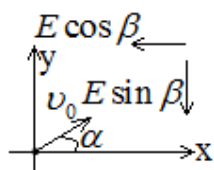
5. (10 балів) Заряджена частинка з зарядом $q = +10^{-6}$ Кл і масою $m = 1$ г стартує з точки $(0,0)$. Початкова швидкість частинки $v_0 = 1$ м/с спрямована під кутом α до Ox . Частинка рухається в однорідному електричному полі напруженістю $E = 10^3$ В/м, кут між прямою, що містить вектор $\vec{E}$ та Ox дорівнює β , див. схематичний рисунок. Поле тяжіння відсутнє, рух частинки припиняється, як тільки вона досягає Ox .

5.1. Знайти модуль прискорення частинки.

5.2. Записати в загальному вигляді залежності координат частинки від часу: $x(t)$ та $y(t)$.

5.3. Знайти роботу сили, що діє з боку електричного поля на частинку, за весь час її руху, якщо $\alpha = \pi/3$ та $\beta = \pi/6$.

5.4. Знайти часовий проміжок, на якому відстань від точки $(0,0)$ до частинки спадає під час руху, якщо $\alpha = \pi/3$ та $\beta = \pi/3 - \arccos(17/18)$.



5.1. $ma = qE \Rightarrow a = qE/m = \boxed{1 \text{ м/с}^2}$.

5.2. $x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{a \cos \beta}{2} t^2$, $y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{a \sin \beta}{2} t^2$, де $a = \frac{qE}{m}$.

5.3. $\begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha - a \cos \beta \cdot t \\ v_y(t) = v_0 \sin \alpha - a \sin \beta \cdot t \end{cases}$. Час польоту тіла τ обчислюється на основі виразів

$$\begin{cases} y(\tau) = 0 \\ \tau \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \tau = \frac{2v_0 \sin \alpha}{a \sin \beta}; \text{ компоненти швидкості частинки наприкінці польоту}$$

$$v_x(\tau) = v_0 (\cos \alpha - 2 \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha), \quad v_y(\tau) = -v_0 \sin \alpha, \text{ звідки шукана робота}$$

$$A = \frac{mv^2(\tau)}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m(v_x^2(\tau) + v_y^2(\tau))}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} ((\cos \alpha - 2 \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha)^2 + \sin^2 \alpha - 1) =$$

$$= 2mv_0^2 \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha (\operatorname{ctg} \beta \sin \alpha - \cos \alpha). \text{ Або можна було діяти так: наприкінці польоту}$$

$x(\tau) = \frac{2m\nu_0^2 \sin \alpha}{qE \sin \beta} (\cos \alpha - \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha)$, сила вздовж Ox діє проти осі, тож шукана робота

$$A = -qE \cos \beta \cdot (x(\tau) - x(0)) = 2m\nu_0^2 \operatorname{ctg} \beta \sin \alpha (\operatorname{ctg} \beta \sin \alpha - \cos \alpha) = \boxed{3 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}}.$$

5.4. Залежність досліджуваної відстані від часу:

$$S(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = \sqrt{\left(\nu_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{a \cos \beta}{2} t^2\right)^2 + \left(\nu_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{a \sin \beta}{2} t^2\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\nu_0^2 t^2 - \nu_0 a \cos(\alpha - \beta) \cdot t^3 + \frac{a^2}{4} t^4}, \text{ функції } S(t) \text{ та } f(t) = S^2(t) \text{ зростають та спадають}$$

одночасно, тож дослідимо проміжки зростання та спадання функції

$$f(t) = S^2(t) = \nu_0^2 t^2 - \nu_0 a \cos(\alpha - \beta) \cdot t^3 + \frac{a^2}{4} t^4 \text{ при } t \in [0, \tau]; \text{ при заданих числових}$$

параметрах $\tau = \frac{2\nu_0 \sin \alpha}{a \sin \beta} \approx 2,65 \text{ с}$.

Шукаємо похідну: $f'(t) = t(a^2 t^2 - 3\nu_0 a \cos(\alpha - \beta) \cdot t + 2\nu_0^2)$; корені похідної $t_0 = 0$,

$$t_{1,2} = \frac{3 \cos(\alpha - \beta) \mp \sqrt{9 \cos^2(\alpha - \beta) - 8}}{2} \frac{\nu_0}{a}, \text{ числові точні значення: } t_1 = \frac{4}{3} \text{ с}, t_2 = \frac{3}{2} \text{ с}; \text{ як}$$

бачимо, $f'(t) = a^2 t(t - t_1)(t - t_2)$, $0 < t_1 < t_2 < \tau$; тож

	$t \in (0, t_1)$	$t \in (t_1, t_2)$	$t \in (t_2, \tau)$
$f'(t)$	додатна	від'ємна	додатна
$f(t)$	зростає	спадає	зростає

Шуканий часовий проміжок: $t \in (t_1, t_2)$, тож $t \in \left(\frac{4}{3} \text{ с}, \frac{3}{2} \text{ с}\right)$.

Примітка. Задачу можна було розв'язати і розглянувши моменти часу, в які радіус-вектор частинки є перпендикулярним до її швидкості.

Задачі запропонував В. М. Горєв, завідувач кафедри фізики Національного технічного університету «Дніпровська політехніка».