УДК 37.016:51(07)
С77

Серія «Мій конспект. Матеріали до уроків»
Заснована 2021 року

Старова, Ольга Олександрівна

С77 Геометрія. 8 клас / О. О. Старова. — Харків : Вид. група «Основа», 2025. — 206, [2] с. : табл., іл., схеми. — (Серія «Мій конспект. Матеріали до уроків»).

ISBN 978-617-00-4389-4.

Посібник містить матеріали до уроків, дібрані відповідно до вимог нового Державного стандарту базової середньої освіти (30.09.2020), типової освітньої програми для 5–9 класів закладів загальної середньої освіти (наказ МОН № 235 від 19.02.2021) та всіх чинних модельних навчальних програм «Геометрія. 7–9 класи» і «Математика. 7–9 класи».

У виданні запропоновано дидактичні матеріали до всіх етапів уроку (мотивація навчальної діяльності, повторення й систематизація знань, актуалізація опорних знань, вивчення нового матеріалу, підбиття підсумків уроку, перевірка домашнього завдання) та різноманітні форми роботи й типи завдань (бліцопитування, робота на картках з друкованою основою, тестування, робота в парах і групах, самостійна робота тощо).

Для вчителів математики, які працюють у 8-х класах Нової української школи.

УДК 37.016:51(07)

ISBN 978-617-00-4389-4

ЗМІСТ

Передмова 2
Орієнтовне календарно-тематичне планування з геометрії. 8 клас . . . 3
Повторення матеріалу, вивченого в 7-му класі 6
Чотирикутник, його елементи. Сума кутів чотирикутника 18
Паралелограм, його властивості й ознаки 28
Прямокутник, ромб, квадрат, їхні властивості й ознаки 39
Трапеція 50
Вписані та центральні кути 60
Вписані та описані чотирикутники 69
Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника, її властивості. Середня лінія трапеції, її властивості 78
Узагальнена теорема Фалеса (теорема про пропорційні відрізки). Властивість медіан трикутника. Властивість бісектриси трикутника 89
Подібні трикутники. Ознаки подібності трикутників 99
Подібність прямокутних трикутників. Середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику 109
Застосування подібності трикутників до розв’язування задач: пропорційність відрізків хорд, пропорційність відрізків січної і дотичної 118
Теорема Піфагора. Теорема, обернена до теореми Піфагора 125
Перпендикуляр і похила, їхні властивості 137
Синус, косинус, тангенс і котангенс гострого кута прямокутного трикутника. Значення синуса, косинуса, тангенса й котангенса деяких кутів 146
Співвідношення між сторонами й кутами прямокутного трикутника. Розв’язування прямокутних трикутників 157
Многокутник та його елементи. Опуклий і неопуклий многокутники. Сума кутів опуклого многокутника. Многокутник, уписаний у коло, і многокутник, описаний навколо кола 169
Поняття площі многокутника. Площі прямокутника, паралелограма, ромба . . . 179
Площа трикутника 189
Площа трапеції 198
Джерела 207

ПЕРЕДМОВА

Посібник містить матеріали до уроків, що відповідають вимогам нового Державного стандарту базової середньої освіти (30 вересня 2020 року), типової освітньої програми для 5–9-х класів закладів загальної середньої освіти (наказ МОН № 235 від 19.02.2021 року), а також вимогам модельних навчальних програм «Геометрія. 7–9 класи» і «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти авторів:

- Біляніна О. Я., Білянін Г. І., Семчук А. Р., Ілащук О. Г., Мар'янчук О. Т., Рябий С. І.
- Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.
- Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В.
- Істер О. С.
- Генденштейн Л. Е., Жемчужкіна Г. В.
- Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.
- Панченко С. Ю.

Теми, що пропонують для вивчення автори окремих модельних програм, позначені зірочкою, до них є виноска з переліком відповідних програм.

До кожної теми посібника наведено очікувані результати роботи над темою з переліком знань і вмінь, які учні повинні набути в результаті вивчення теми.

Запропоновані способи мотивації навчальної діяльності учнів ураховують практичний досвід восьмикласників і завдання практичного змісту. Наведено орієнтовний план вивчення теми з короткими методичними коментарями до деяких питань. Серед прикладів завдань, що сприяють засвоєнню нового матеріалу, є усні й письмові вправи, які вчитель / учителька може використовувати як додаткові завдання або як завдання, альтернативні тим, що наведені в підручнику. Для учнів, які зазнають утруднень під час виконання завдань, надано картки-підказки. Для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики, дібрано додаткові задання на творче застосування знань.

Для перевірки домашнього завдання та підбиття підсумків уроку запропоновано різноманітні види робіт, як-от: усні бліцопитування, робота на картках із друкованою основою, дидактичні ігри, тестові завдання, завдання на встановлення відповідності, робота в парах і групах, самостійна робота тощо. Чимало робіт передбачають само- та взаємооцінювання учнів. Учитель / учителька на власний розсуд (залежно від наявності часу та рівня підготовленості учнів) вибирає види робіт та їхню кількість.

До багатьох тем наведено додаткові матеріали, де розглянуто питання історії математики, походження назв термінів тощо.

Відповідно до модельної навчальної програми, вибраної вчителем / учителькою, керуючись статтею 54 Закону України «Про освіту», педагог може в рамках академічної свободи змінювати послідовність вивчення тем, представлених у програмах і посібнику, або об'єднувати їх в окремі тематичні блоки за умови дотримання логіки розгортання курсу та самостійно забезпечувати природні внутрішні й міжпредметні зв'язки.

Матеріали до уроку, які складено, зважаючи на вимоги до обов'язкових результатів навчання учнів у математичній освітній галузі (Додаток 8 до Державного стандарту), сприяють формуванню предметної математичної компетентності, що містить здатність застосовувати математичні знання під час розв'язування проблем у повсякденному житті, усвідомлення ролі математичних знань в особистому та суспільному житті людини.

ОРІЄНТОВНЕ КАЛЕНДАРНО-ТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ З ГЕОМЕТРІЇ 8 КЛАС

Типовим навчальним планом визначено річний діапазон кількості годин для вивчення кожної освітньої галузі. У 8-х класах закладів загальної середньої освіти з українською мовою навчання для реалізації математичної освітньої галузі встановлено обсяг у межах:

- максимального показника, що становить 210 годин;
- мінімального — 140 годин;
- рекомендованого — 175 годин.

Діапазон тижневого навчального навантаження цієї освітньої галузі становить від 4 до 6 годин. Рекомендована кількість (5 годин) може бути виділена на вивчення інтегрованого курсу «Математика. 7–9 клас» або розподілена на вивчення таких навчальних предметів:

- алгебра — 3 години;
- геометрія — 2 години.

Резерв навчальних годин (різниця між рекомендованою та мінімальною кількість годин) становить 1 годину, який може бути розподілений між обов'язковими для вивчення та вибірковими освітніми компонентами.

Календарне планування укладене з розрахунку, що кількість навчальних годин становить 5 год на тиждень.

Порядок вивчення тем може відрізнятися від запропонованого залежно від того, за якою модельною навчальною програмою працює вчитель.

№ уроку	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин (2 год на тиждень; усього 70 год)	Дата проведення	Примітки
	Повторення вивченого в попередніх класах	**3**		
	Чотирикутники	**22**		
	І. Паралелограм, його властивості та ознаки. Види паралелограмів. Трапеція	12		
	Чотирикутник та його елементи	1		
	Сума кутів чотирикутника	1		
	Паралелограм та його властивості	2		
	Ознаки паралелограма	2		
	Прямокутник та його властивості	1		
	Ромб та його властивості	1		
	Квадрат та його властивості	1		
	Трапеція та її властивості	2		
	Діагностувальна робота № 1	1		

№ уроку	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин (2 год на тиждень; усього 70 год)	Дата проведення	Примітки
	II. Вписані та описані чотирикутники. Середні лінії трикутника і трапеції	10		
	Вписані та центральні кути	2		
	Вписані та описані чотирикутники	2		
	Теорема Фалеса	1		
	Середня лінія трикутника та її властивості	2		
	Середня лінія трапеції та її властивості	2		
	Діагностувальна робота № 2	1		
	Подібність трикутників	**12**		
	Узагальнена теорема Фалеса. Теорема про медіани трикутника	1		
	Властивість бісектриси трикутника	2		
	Означення подібних трикутників	1		
	Ознака подібності трикутників за двома кутами	1		
	Ознака подібності трикутників за двома сторонами та кутом між ними	1		
	Ознака подібності трикутників за трьома сторонами	1		
	Подібність прямокутних трикутників. Середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику	2		
	Застосування подібності трикутників під час розв'язування задач: пропорційність відрізків хорд, пропорційність відрізків січної та дотичної (відповідно до модельної навчальної програми «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти, автор Істер О. С.)	2		
	Діагностувальна робота № 3	1		
	Розв'язування прямокутних трикутників	**14**		
	Теорема Піфагора. Теорема, обернена до теореми Піфагора	2		
	Перпендикуляр і похила, їхні властивості	2		
	Синус, косинус і тангенс гострого кута прямокутного трикутника	1		
	Значення синуса, косинуса, тангенса деяких кутів	1		

№ уроку	Зміст навчального матеріалу	Кількість годин (2 год на тиждень; усього 70 год)	Дата проведення	Примітки
	Співвідношення між сторонами й кутами прямокутного трикутника	3		
	Розв’язування прямокутних трикутників	4		
	Діагностувальна робота № 4	1		
	Многокутники. Площі многокутників	**12**		
	Многокутник та його елементи	1		
	Сума кутів опуклого многокутника	1		
	Многокутник, уписаний у коло. Многокутник, описаний навколо кола	2		
	Поняття площі. Площа прямокутника	1		
	Площа паралелограма	2		
	Площа трикутника	2		
	Площа трапеції	2		
	Діагностувальна робота № 5	1		
	Повторення та систематизація навчального матеріалу	**6**		
	Підсумкова діагностувальна робота	1		

ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ВИВЧЕНОГО В 7-му КЛАСІ[1]

Очікувані результати: учні мають уміти наводити приклади відрізка, променю, кута певного виду, трикутника певного виду; розрізняти й зображувати на рисунках суміжні та вертикальні кути, паралельні та перпендикулярні прямі, зовнішній кут трикутника, медіану, бісектрису, висоту трикутника, рівнобедрені трикутники, коло та круг, коло, вписане в трикутник, і коло, описане, навколо трикутника; формулювати ознаки і властивості паралельних прямих, рівнобедреного трикутника, теорему про суму кутів трикутника, нерівність трикутника, ознаки рівності трикутників.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може провести таку бесіду:

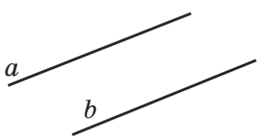
— Ви знаєте, що геометрія — це розділ математики, що вивчає властивості геометричних фігур. Знати геометрію надзвичайно важливо, адже нас оточує безліч геометричних фігур: відрізки, трикутники, прямокутники, прямокутні паралелепіпеди, кулі тощо. Без глибоких геометричних знань неможливо спорудити складні будівельні конструкції, побудувати кораблі та літаки, навіть виготовити деталі дитячого конструктора. Не знаючи геометрії, неможливо стати чудовим інженером-конструктором, військовим, токарем, столяром, архітектором, дизайнером, модельєром, спеціалістом з комп’ютерної графіки тощо.

Ви, напевно, помітили, що задачі з геометрії можна умовно поділити на декілька типів: задачі на доведення, на обчислення, на побудову. Задачі на доведення навчають нас обґрунтовувати свої твердження, обстоювати власну думку, уміти аргументовано переконувати співрозмовників. Задачі на обчислення мають велике практичне значення: обчислення площ і периметрів земельних ділянок, розмірів власної квартири, градусних мір кутів тощо. Узагалі розв’язування геометричних задач привчає нас логічно мислити, з безлічі фактів вибирати потрібні для розв’язування конкретної задачі, швидко знаходити правильне розв’язання проблеми.

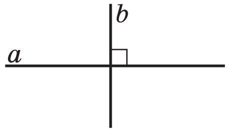
У 8-му класі ми продовжимо вивчення геометричних фігур та їхніх властивостей. Але, перш ніж почнемо вивчати курс геометрії у 8-му класі, маємо повторити матеріал, з яким ознайомилися під час навчання в 7-му класі.

ПЛАН ПОВТОРЕННЯ МАТЕРІАЛУ, ОПОРНІ КОНСПЕКТИ

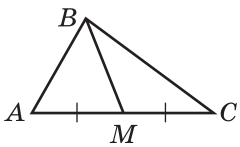
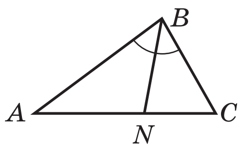
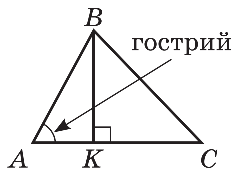
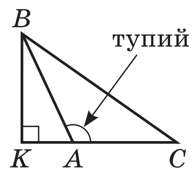
1. Взаємне розміщення прямих на площині.

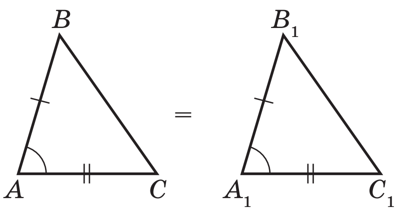
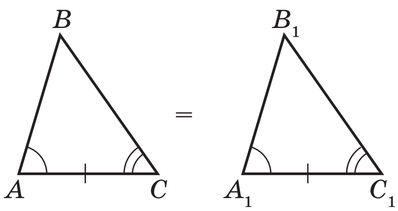
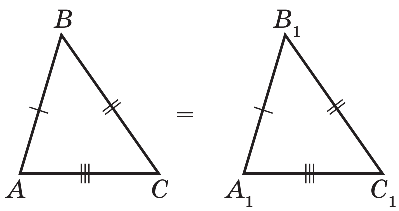
Паралельність прямих		
Означення	**Властивості**	**Ознаки**
Дві прямі на площині називають паралельними, якщо вони не перетинаються  $a \parallel b$	1. Через точку, яка не лежить на прямій, проходить тільки одна пряма, паралельна заданій (аксіома паралельних прямих). 2. Дві прямі, що паралельні третій, паралельні між собою. 3. Якщо дві паралельні прямі перетинаються січною, то: • внутрішні різносторонні кути рівні; • відповідні кути рівні; • сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°	Дві прямі паралельні, якщо із січною вони утворюють: або 1) рівні внутрішні різносторонні кути, або 2) рівні відповідні кути, або 3) внутрішні односторонні кути, сума яких дорівнює 180°

[1] Повторення навчального матеріалу передбачено в модельних навчальних програмах «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти — автори: Біляніна О. Я., Білянін Г. І., Семчук А. Р., Ілащук О. Г., Мар’янчук О. Т., Рябий С. І. та Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В., але цілком логічно розпочати вивчення геометрії за всіма навчальними програмами саме із цієї теми.

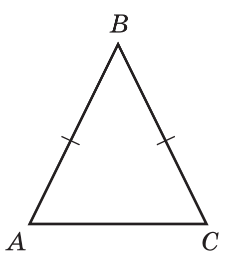
Перпендикулярність прямих	
Означення	**Властивості**
Дві прямі називають перпендикулярними, якщо вони перетинаються під прямим кутом  $a \perp b$	1. Через точку, яка не належить прямій, можна провести пряму, перпендикулярну до цієї прямої, і тільки одну. 2. Через точку на прямій можна провести пряму, перпендикулярну до цієї прямої, і тільки одну. 3. Дві прямі, перпендикулярні до третьої, паралельні

2. Трикутники. Ознаки рівності трикутників.

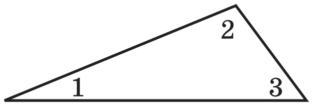
Трикутник та його елементи. Медіана, бісектриса й висота трикутника		
 BM — медіана (M — середина AC)	 BN — бісектриса ($\angle ABN = \angle CBN$)	  BK — висота ($BK \perp AC$)

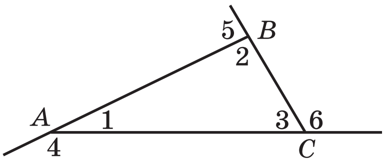
Ознаки рівності трикутників		
За двома сторонами й кутом між ними	**За стороною і прилеглими до неї кутами**	**За трьома сторонами**
 	 	
$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$	$AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$	$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$

3. Властивості та ознаки рівнобедреного трикутника.

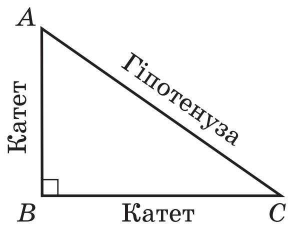
Рівнобедрений трикутник		
Означення	**Властивості**	**Ознаки**
Трикутник, дві сторони якого рівні, називають рівнобедреним  	У рівнобедреному трикутнику: 1) кути при основі рівні; 2) бісектриса кута при вершині є медіаною і висотою	• Якщо два кути рівні • Якщо медіана є його висотою • Якщо бісектриса є його висотою • Якщо медіана є його бісектрисою ↓ то трикутник рівнобедрений

4. Сума кутів трикутника. Зовнішній кут трикутника.

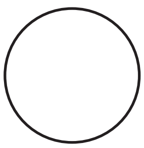
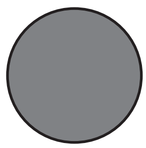
Сума кутів трикутника	
	$\boxed{\angle 1+\angle 2+\angle 3=180°}$

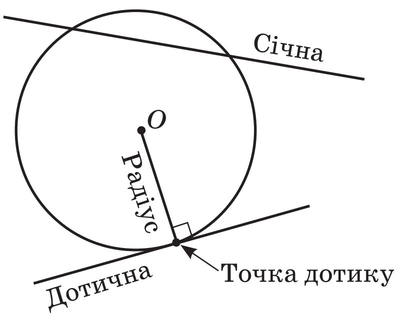
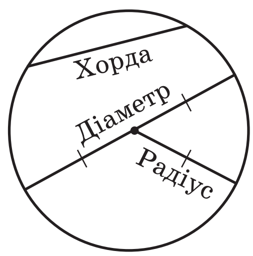
Зовнішній кут трикутника	
Зображення	**Властивості**
 $\angle 4$, $\angle 5$, $\angle 6$ — зовнішні кути трикутника ABC	$\boxed{\angle 4+\angle 5+\angle 6=360°}$ $\boxed{\angle 4=\angle 2+\angle 3}$ $\boxed{\angle 5=\angle 1+\angle 3}$ $\boxed{\angle 6=\angle 1+\angle 2}$

5. Прямокутний трикутник.

Означення	Властивості
Трикутник, що має прямий кут, називають прямокутним 	• Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°. • Якщо один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 45°, то цей трикутник є рівнобедреним. • У прямокутному трикутнику катет, протилежний куту 30°, дорівнює половині гіпотенузи

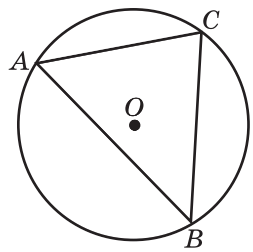
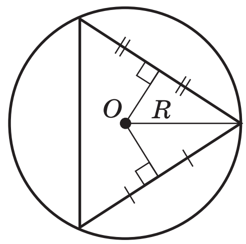
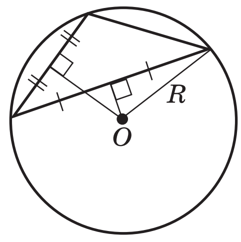
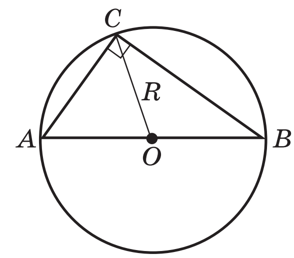
6. Коло і круг.

Коло	**Круг**
Коло — це геометрична фігура, що складається з усіх точок площини, рівновіддалених від заданої точки 	Круг — частина площини, обмежена колом 

Елементи кола	
	

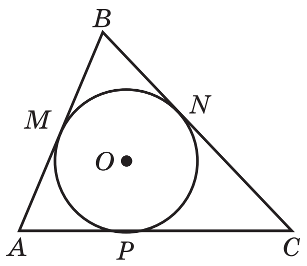
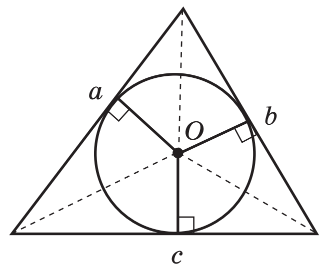
7. Коло, описане навколо трикутника, і коло, вписане в трикутник.

Центр кола, описаного навколо трикутника, — точка перетину серединних перпендикулярів до його сторін.

Коло, описане навколо трикутника	**Розміщення центра кола, описаного навколо трикутника**		
	Гострокутний	Тупокутний	Прямокутний
 Точки A, B, C лежать на колі	 Усередині трикутника	 Зовні трикутника	 На середині гіпотенузи

8. Коло, вписане в трикутник.

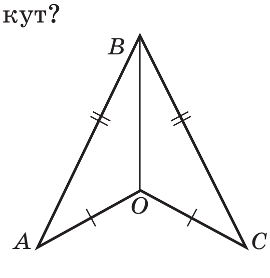
Центр кола, вписаного в трикутник, — точка перетину бісектрис його кутів.

Коло, вписане в трикутник	**Розміщення центра кола, вписаного в трикутник**
 Усі сторони ΔABC дотикаються до кола	 Центр кола, вписаного в будь-який трикутник, розміщений усередині трикутника

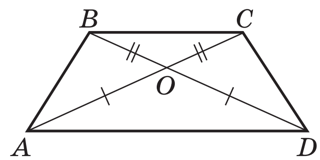
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ПОВТОРЕННЮ МАТЕРІАЛУ

➤ ***Усні вправи***

1. Скільки спільних точок можуть мати два відрізки, якщо вони:
   1) не лежать на одній прямій;
   2) лежать на одній прямій?
   Відповідь обґрунтуйте.
2. Градусна міра одного кута виражена цілим числом, а другого — дробовим. Чи можуть ці кути бути суміжними?
3. Чому за подвійного складання аркуша паперу обов'язково одержуємо прямий кут?
4. На рисунку $OA = OC$, $AB = BC$. Визначте, чи рівні трикутники AOB і COB. Відповідь обґрунтуйте.



5. Скільки пар рівних трикутників зображено на рисунку?

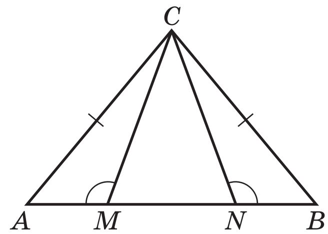


6. На рисунку $AC = CB$, $\angle AMC = \angle BNC = 120°$. Чи правильно, що:

1) $CM = MN$;

2) $\angle ACM = \angle BCN$;

3) $AC = CN$?

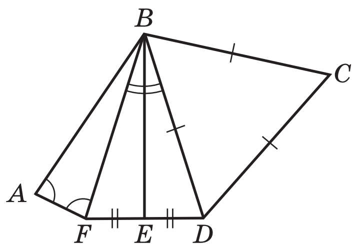


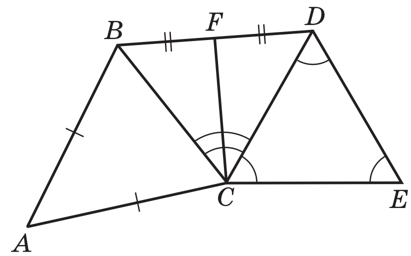
7. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ рівнобедрені, з основами AB і A_1B_1. За якою ознакою рівні ці трикутники, якщо:

1) $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$;   2) $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$;   3) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$?

8. Нерівні відрізки AB і CD перетинаються під прямим кутом у точці O, що є серединою кожного з них. Точки A і D, D і B, B і C, C і A сполучено відрізками. Назвіть усі пари рівних трикутників, які при цьому утворилися, і вкажіть ознаку, за якою вони рівні. Чи утворилися при цьому рівнобедрені трикутники? Якщо так, назвіть їх і доведіть, що вони рівнобедрені.

9. На рисунках рівні відрізки позначено однаковою кількістю рисочок, а рівні кути — однаковою кількістю дуг. Назвіть рівнобедрені та рівносторонні трикутники, зображені на рисунках.

1) 

2) 

10. Яку ознаку рівності трикутників потрібно застосувати, щоб довести твердження?

1) У рівнобедреному трикутнику бісектриси кутів при основі рівні.

2) У рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, рівні.

11. PK — бісектриса рівнобедреного трикутника APL з основою AL. Чи правильні такі твердження:

1) відрізки AK і KL рівні;   2) кути AKP і PKL прямі;

3) відрізки AP і AL рівні;   4) трикутники APK і LPK рівні?

12. EF — медіана й висота трикутника AEM. Чи правильно, що:

1) $\angle AEF = \angle FEM$;   2) $AE = EM$;

3) $\angle AEF = \angle MFE$;   4) $\angle EAM = \angle AME$?

13. Один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 17°. Чому дорівнює другий гострий кут?

14. У прямокутному трикутнику DMF катет DF дорівнює 8 см, $\angle M = 30°$. Чому дорівнює гіпотенуза DM?

15. Радіус кола дорівнює 2 см. Чи обов'язково діаметр цього кола дорівнює 4 см?

16. Діаметр кола дорівнює 8 см. Чи будь-який радіус цього кола дорівнює 4 см?

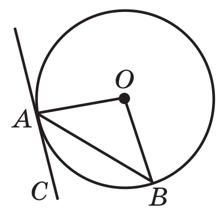
17. Діаметр круга дорівнює 10 см. Чи будь-який відрізок завдовжки 5 см, який належить кругу, є його радіусом? хордою?

18. Дано відрізки: $AO = 5$ см, $OB = 4$ см, $OC = 8$ см, $OD = 1$ см, $OE = 50$ мм, $OF = 4{,}9$ см, $OK = 5{,}2$ см, $OM = 20$ мм, $OK = 3$ см, $OL = 6$ мм, $OP = 0{,}5$ м, $OR = 1$ дм. З-поміж точок, що є кінцями цих відрізків, виберіть ті, які належать:

1) колу з центром у точці O і радіусом 5 см; 2) кругу з центром у точці O і радіусом 5 см.

➤ *Письмові вправи*

1. Один з кутів трикутника на 40° менший від другого й на 10° більший за третій. Обчисліть градусні міри кутів трикутника.
2. Одна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см, а друга становить $\dfrac{2}{5}$ третьої. Чому дорівнює периметр цього трикутника?
3. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см. Його бічна сторона відноситься до основи як $2:1$. Чому дорівнюють сторони цього трикутника?
4. Різниця двох сторін тупокутного рівнобедреного трикутника дорівнює 8 см, а його периметр дорівнює 38 см. Обчисліть довжини сторін трикутника.
5. У рівнобедреному трикутнику ABC кут B — тупий. Висота BD дорівнює 8 см. Обчисліть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника ABD дорівнює 24 см.
6. У трикутнику ABC зовнішні кути при вершинах A і C рівні. Обчисліть довжину бісектриси BD, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 36 дм, а периметр трикутника ABD — 24 дм.
7. У трикутнику ABC зовнішні кути при вершинах A і B рівні. Доведіть, що $2AC > AB$.
8. У трикутнику ABK $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 50^\circ$. Бісектриси кутів A і K перетинаються в точці D. Чому дорівнює градусна міра кута ADK?
9. У прямокутному трикутнику CDF $CD = CF$, а гіпотенуза DF дорівнює 30 см. Обчисліть довжину бісектриси, проведеної з прямого кута.
10. У координатній площині побудуйте трикутник MNK, якщо $M(-3;-2)$, $N(2;-2)$, $K(2;3)$. Чому дорівнюють кути цього трикутника?
11. Відрізок AB — діаметр кола з центром у точці O, BC — хорда, $\angle AOC = 136^\circ$. Обчисліть градусну міру кута BOM, якщо точка M — середина хорди BC.
12. На рисунку точка O — центр кола, AB — хорда, AC — дотична до кола в точці A, $\angle BAC = 51^\circ$. Чому дорівнює $\angle AOB$?



13. Центр кола, описаного навколо трикутника, належить одній зі сторін трикутника, один з кутів якого дорівнює 25°. Чому дорівнюють градусні міри решти кутів трикутника?
14. У трикутнику ABC $\angle A = 60^\circ$. Радіус кола, вписаного в трикутник ABC, дорівнює 2,7 см. Обчисліть відстань від центра кола до вершини A трикутника ABC.

➤ *Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики*

1. На стороні BC трикутника ABC позначили точку M так, що $BM : MC = 2:1$. Бісектриса BD перпендикулярна до відрізка AM. Обчисліть довжину сторони BC, якщо відомо, що $AB = 6$ см.
Відповідь. 9 см.
2. Доведіть рівність прямокутних трикутників за гострим кутом і висотою, проведеною до гіпотенузи.
3. Доведіть рівність прямокутних трикутників за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи.
4. Відрізок BD — висота трикутника ABC. Від вершини B на прямій CB по різні боки від точки B відкладено відрізки BE і BK, що дорівнюють AB. На прямій AC від точки D відкладено відрізок DF, що дорівнює DA. Доведіть, що точки A, E, K, F лежать на одному колі.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➢ ***Фронтальна бесіда***

1. Чим відрізняється бісектриса кута від бісектриси трикутника?
2. У якому трикутнику сторона є його висотою?
3. Через вершину B трикутника ABC проведено пряму, що перетинає сторону AC у точці M і $AC:MC=2:1$. Як називають відрізок BM?
4. У трикутнику ABC $\angle A=\angle C$, $BC=10$ см. Довжину якої зі сторін цього трикутника можна обчислити?
5. З якої найменшої кількості сірників можна скласти рівнобедрений трикутник?
6. У трикутнику CDE $\angle C=\angle D$. До якої сторони проведена медіана буде бісектрисою та висотою цього трикутника?
7. Чи існує трикутник, у якому будь-яка медіана є бісектрисою та висотою?
8. Чи існує рівнобедрений трикутник, периметр якого дорівнює 57 см, а бічна сторона — 29 см?
9. У трикутнику ABC $AB=BC$, BD — медіана, $\angle ABC=90°$. Доведіть, що ΔBDC — рівнобедрений.
10. Чи правильно, що одну й ту саму фігуру можна назвати колом або кругом?
11. Що більше: відстань від центра кола до дотичної чи радіус кола?
12. Коло описане навколо трикутника, один із кутів якого дорівнює 140°. Чи можна стверджувати, що центр кола розташований поза трикутником?

➢ ***Дидактична гра «Сучасна українська поетеса»***

Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у декілька команд (залежно від їхньої кількості). Кожна команда отримує картку із завданням: із букв, що відповідають правильним твердженням, наведеним у картці, утворити прізвище української поетеси, авторки вірша «Враже». Команда, яка першою дасть правильну відповідь, отримує 1 бал. Команда, яка зможе розповісти про цю поетесу та про історію створення вірша, отримує додатково 2 бали. Команда, яка зможе заспівати пісню, словами якої є вірш «Враже», отримує додатково ще 3 бали.

Приклад картки

Твердження	Буква
Відстанню між точками A і B називають довжину відрізка AB	Г
Перпендикулярні відрізки обов'язково перетинаються	У
Сума вертикальних кутів дорівнює 180°	Д
У трикутнику проти більшої сторони лежить менший кут	Е
Катет, який лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи	О
У будь-який трикутник можна вписати коло	Р
Якщо кути суміжні, то вони обов'язково рівні	И
Найбільшою стороною прямокутного трикутника є катет	Л
Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці	О
Сума суміжних кутів дорівнює 180°	В
Прямокутним називають трикутник, у якого всі кути прямі	Н
Найбільшою хордою кола є його діаметр	А

Відповідь. ГОРОВА.

Вірш-заклинання «Враже» Людмила Горова опублікувала на своїй сторінці в мережі «Фейсбук» (тепер «Мета») 22 квітня 2022 року. За лічені години вірш облетів усю планету завдяки соцмережам та українській спільноті у світі, згодом його поклали на музику та переклали польською, англійською, німецькою, білоруською, грузинською, французькою і навіть японською мовами.

За його мотивами з метою збору коштів для ЗСУ було створено благодійний календар «Так, як відьма скаже» зі світлинами українських волонтерок. Проєкт зібрав понад 1 мільярд гривень, а кліп станом на 2 вересня 2023 року отримав більше 18 мільйонів переглядів і потрапив у тренди відеохостингу.

Після початку повномасштабного вторгнення Людмила Горова з донькою евакуювалися з Києва до США. Саме там вона презентує свою творчість та представляє Україну на різних заходах, підтримує волонтерську діяльність свого чоловіка — письменника Руслана Горового, який залишається в Україні.

➢ ***Робота на картках із друкованою основою***

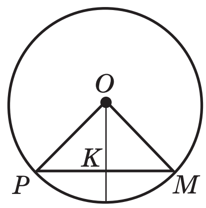
Варіант 1

1. З'єднайте стрілками початок речення з його закінченням так, щоб утворилося правильне твердження:

1) Якщо в трикутнику всі кути рівні, то такий трикутник може бути — прямокутним / тупокутним / гострокутним

2) Прямокутний трикутник може бути — різностороннім / рівностороннім / рівнобедреним

2. На рисунку $\angle OKP = 90°$, $\angle OMK = 45°$, $KM = 3$ см. Скориставшись рисунком, заповніть пропуски:
$PK =$ ___, $OK =$ ___, $\angle KOP =$ ___



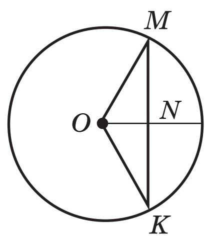
Варіант 2

1. З'єднайте стрілками початок речення з його закінченням так, щоб утворилося правильне твердження:

1) Трикутник, у якого один кут дорівнює сумі двох інших, може бути — прямокутним / тупокутним / гострокутним

2) Гострокутний трикутник може бути — різностороннім / рівностороннім / рівнобедреним

2. На рисунку $MN = NK$, $ON = 0{,}5\,OM$. Скориставшись рисунком, заповніть пропуски:
$\angle OMN =$ ___, $\angle ONM =$ ___, $\angle MON =$ ___



➢ *Тестові завдання з подальшою самоперевіркою та самооцінюванням*

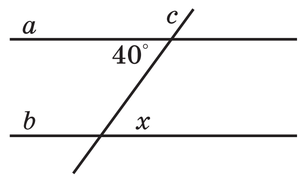
Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Один із суміжних кутів дорівнює 75°. Чому дорівнює другий кут?

А	Б	В	Г
75°	115°	105°	90°

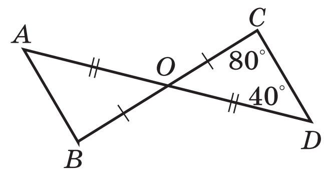
2. Якою має бути градусна міра кута x, щоби прямі a і b, зображені на рисунку, були паралельними?

А	Б	В	Г
40°	50°	140°	80°



3. Чому дорівнює $\angle A$ трикутника AOB (*див. рисунок*)?

А	Б	В	Г
80°	40°	60°	30°



4. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 40 см. Чому дорівнює основа трикутника, якщо його бічна сторона дорівнює 15 см?

А	Б	В	Г
10 см	25 см	12,5 см	15 см

5. У трикутнику MNK $\angle K = 60°$, $\angle M = 62°$. Укажіть найменшу сторону трикутника.

А	Б	В	Г
MN	NK	MK	визначити неможливо

6. AB — хорда кола з центром у точці O. Обчисліть $\angle AOB$, якщо $\angle ABO = 25°$.

А	Б	В	Г
25°	120°	140°	130°

Відповіді. 1. В. 2. А. 3. Б. 4. А. 5. В. 6. Г.

➢ *Робота в парах*

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

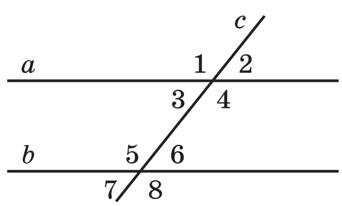
1. У результаті перетину паралельних прямих a і b січною c утворилися кути 1–8 (*див. рисунок*). Яке з наведених тверджень неправильне?

А $\angle 3 = \angle 6$

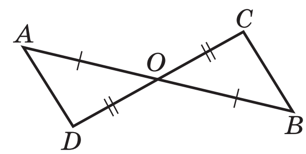
Б $\angle 4 = \angle 8$

В $\angle 7 + \angle 2 = 180°$

Г $\angle 5 + \angle 3 = 180°$

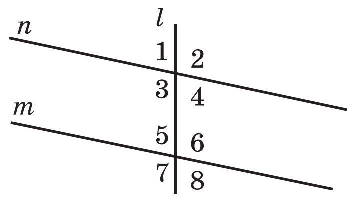


2. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO=OB$, $OC=OD$ (*див. рисунок*). Доведіть, що $AD \parallel BC$.



Варіант 2

1. У результаті перетину паралельних прямих m і n січною l утворилися кути 1–8 (*див. рисунок*). Яке з наведених тверджень правильне?



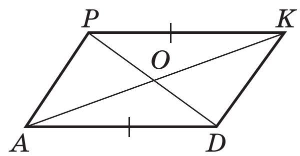
А $\angle 1=\angle 3$

Б $\angle 3+\angle 6=180^\circ$

В $\angle 3+\angle 5=180^\circ$

Г $\angle 6=\angle 4$

2. Відрізки PD і AK перетинаються в точці O. Відомо, що $PK \parallel AD$ і $PK=AD$ (*див. рисунок*). Доведіть, що $\Delta APO=\Delta KDO$.



➤ ***Робота в групах***

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

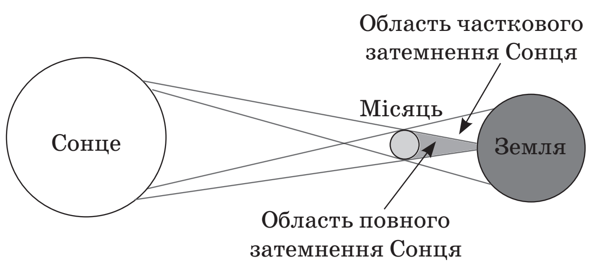
Відстань між Житомиром і Луцьком дорівнює 261 км. Місто Рівне розташоване між Житомиром і Луцьком на відстані 188 км від Житомира. Обчисліть відстань між містами Рівне і Луцьк, уважаючи, що всі три міста розташовані на одній прямій.

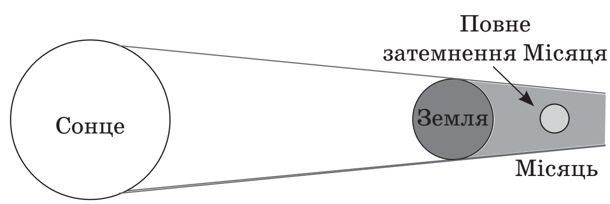
Задача 2

Відстань від Землі до Сонця дорівнює 150 млн км, а від Землі до Місяця — 400 тис. км. Чому дорівнює відстань від Місяця до Сонця під час:

1) повного сонячного затемнення;

2) повного місячного затемнення?





Задача 3

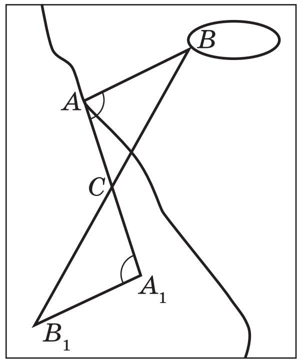
Населений пункт D розташований за декілька кілометрів строго на південь від населеного пункту A, а населені пункти B і C — на однакових відстанях від пункту D відповідно строго на захід і на схід. Обчисліть відстань між пунктами A і C, якщо відстань між A і B дорівнює 10 км.

Задача 4

На острові, розташованому на деякій відстані від берега, стоїть будинок, який потрібно підключити до мережі «Інтернет». Фірма запропонувала технологію, засновану на використанні оптичного волокна. Найближчий вузол колективного доступу міститься в точці A (*див. рисунок*). Як, не перепливаючи на острів, обчислити довжину оптико-волоконного кабелю, необхідного для підключення інтернету?

Указівка. Проведіть пряму AC і побудуйте відрізок $CA_1 = CA$. За допомогою теодоліта виміряйте кут CAB і через точку A_1 проведіть пряму A_1B_1 так, щоб $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$. Порівняйте трикутники ABC і A_1B_1C та зробіть висновки.

Примітка. Що таке теодоліт, можна дізнатися за посиланням: https://uk.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%BB%D1%96%D1%82



Завдання на встановлення відповідності

Варіант 1

Установіть відповідність між означенням (1–4) та назвою відрізка (А–Д), означення якого наведено.

1	Відрізок, який сполучає точку кола з його центром	**А**	Радіус
2	Перпендикуляр, що проведений з вершини трикутника до прямої, який містить протилежну сторону	**Б**	Катет
3	Відрізок прямої, який перетинає задану пряму під прямим кутом і має одним зі своїх кінців точку перетину	**В**	Хорда
4	Одна зі сторін прямокутного трикутника, які утворюють прямий кут	**Г**	Перпендикуляр
		Д	Висота

Варіант 2

Установіть відповідність між означенням (1–4) та назвою відрізка (А–Д), означення якого наведено.

1	Відрізок, який сполучає дві точки кола й проходить через його центр	**А**	Катет
2	Відрізок променю з початком у вершині трикутника, який ділить кут на два рівних кути й сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони	**Б**	Бісектриса
3	Сторона прямокутного трикутника, яка лежить проти прямого кута	**В**	Діаметр
4	Відрізок, який сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони	**Г**	Гіпотенуза
		Д	Медіана

Відповіді. Варіант 1. 1 — А. 2 — Д. 3 — Г. 4 — Б. Варіант 2. 1 — В. 2 — Б. 3 — Г. 4 — Д.

Самостійна робота

Варіант 1

1. У трикутнику ABC $AB = BC = 18$ см, $\angle B = 120°$, BD — медіана.
   1) Обчисліть градусні міри кутів трикутника ABD.
   2) Обчисліть довжину відрізка BD.

2. Два внутрішніх кути трикутника відносяться як $3:7$, а зовнішній кут при третій вершині дорівнює 120°. Обчисліть градусні міри всіх внутрішніх кутів трикутника.

3. У прямокутному трикутнику гострий кут дорівнює 60°, а бісектриса цього кута — 12 см. Обчисліть довжину катета, який лежить проти цього кута.

4. Діаметр кола із центром у точці O дорівнює 8 см. Обчисліть периметр трикутника AOC, якщо хорда AC дорівнює 5 см.

5. BC і DF — діаметри кола із центром у точці O. Доведіть, що $\Delta BOD = \Delta COF$.

Варіант 2

1. У трикутнику ABC $AB = BC$, $\angle B = 90^\circ$, BD — медіана, $BD = 8$ см.
   1) Обчисліть градусні міри кутів трикутника ABD.
   2) Обчисліть довжину відрізка AC.

2. Один із внутрішніх кутів трикутника в 4 рази більший, ніж другий, а зовнішній кут при третій вершині дорівнює 105°. Обчисліть градусні міри всіх внутрішніх кутів трикутника.

3. У прямокутному трикутнику катет завдовжки 9 см є прилеглим до кута 30°. Обчисліть довжину бісектриси другого гострого кута.

4. Діаметр кола із центром у точці O дорівнює 10 см. Обчисліть периметр трикутника MOK, якщо хорда MK дорівнює 8 см.

5. BC і BD — рівні хорди кола із центром у точці O. Доведіть, що $\Delta BOD = \Delta BOC$.

Відповіді. Варіант 1. 1. 1) 30°, 60°, 90°; 2) 9 см. 2. 60°, 36°, 84°. 3. 18 см. 4. 13 см. Варіант 2. 1. 1) 45°, 45°, 90°; 2) 16 см. 2. 75°, 21°, 84°. 3. 6 см. 4. 18 см.

ЧОТИРИКУТНИК, ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. СУМА КУТІВ ЧОТИРИКУТНИКА

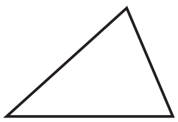
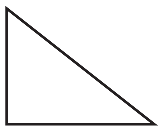
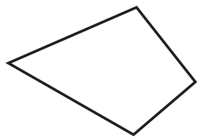
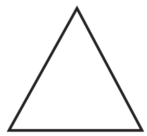
Очікувані результати: учні мають уміти розпізнавати на рисунках і зображувати чотирикутники; співвідносити реальні об'єкти навколишнього середовища з моделями чотирикутників; пояснювати, що таке чотирикутник; розрізняти опуклий і неопуклий чотирикутники; називати елементи чотирикутника; формулювати теорему про суму кутів чотирикутника й розуміти її доведення; розв'язувати задачі на застосування поняття чотирикутника та його елементів.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може запропонувати учням / ученицям виконати логічне завдання і зробити припущення щодо теми найближчих уроків.

➢ ***Логічне завдання***

З-поміж геометричних фігур, зображених на рисунку, знайдіть зайву. Поясніть свій вибір.

1)  2)  3)  4) 

Відповідь. Зайвою є геометрична фігура під номером 3. Решта фігур — трикутники.

З означенням, видами й властивостями трикутників учні / учениці вже знайомі. Отже, логічно, що предметом вивчення на найближчих уроках буде чотирикутник.

(На цьому етапі уроку доцільно звернути увагу на систему вивчення геометричної фігури трикутник: означення $\to$ елементи $\to$ види $\to$ властивості.)

— На найближчих уроках ми вивчимо означення чотирикутника та його елементів, дізнаємось, які чотирикутники називають опуклими, а які — неопуклими, навчимося зображувати чотирикутники, обчислювати периметр чотирикутника.

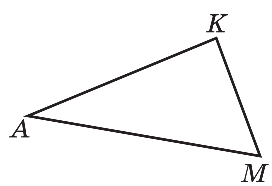
Вам відома теорема про суму кутів трикутника, ви вмієте застосовувати її під час розв'язування задач. А чи існує аналогічна теорема про суму кутів чотирикутника? Відповідь ствердна. Ми доведемо теорему про суму кутів чотирикутника, навчимося застосовувати її, розв'язуючи задачі.

З метою зацікавленості учнів / учениць у вивченні математики, активізації їхньої пізнавальної діяльності вчитель / учителька може навести деякі цікаві факти про чотирикутники (*див. додатковий матеріал*).

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➢ ***Фронтальне опитування***

1. Які геометричні фігури ви знаєте?
2. Яку геометричну фігуру називають трикутником?
3. Які елементи трикутника ви знаєте? Назвіть вершини, сторони й кути трикутника, зображеного на рисунку.



4. Якими геометричними фігурами є:
   1) сторони трикутника;
   2) вершини трикутника?

5. Що називають периметром трикутника?
6. Сформулюйте теорему про суму кутів трикутника.

➢ ***Усні вправи***

1. Чому дорівнює периметр трикутника зі сторонами:
   1) 7 см, 9 см, 8 см; 2) 50 см, 3 дм, 0,4 м?
2. Чому дорівнюють довжини сторін трикутника, якщо вони відносяться як $7:6:5$, а периметр трикутника дорівнює 18 см?
3. Чи існує трикутник зі сторонами:
   1) 3 см, 2 см, 1 см; 2) 5 дм, 5 дм, 3 дм; 3) 60 м, 20 м, 90 м; 4) 60 км, 70 км, 50 км?
4. Чи існує трикутник, кути якого дорівнюють:
   1) 90°, 45°, 50°; 2) 80°, 40°, 60°?
5. Чи може в трикутнику бути:
   1) два прямих кути; 2) два тупих кути?
6. Два кути трикутника дорівнюють 30° і 70°. Чому дорівнює третій кут цього трикутника?
7. Чому дорівнюють кути трикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як $7:6:5$?

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Означення чотирикутника.
   ! Чотирикутником називають фігуру, яка складається з чотирьох точок (вершин чотирикутника) і чотирьох відрізків, послідовно сполучених (сторін чотирикутника). При цьому жодні три вершини не лежать на одній прямій, а жодні дві сторони не перетинаються.
2. Елементи чотирикутника.

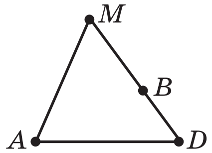
- Елементами чотирикутника називають його вершини, сторони, кути й діагоналі.
- Сусідніми вершинами чотирикутника називають дві вершини, сполучені однією стороною.
- Протилежними вершинами чотирикутника називають вершини, що не є сусідніми.
- Сусідніми кутами називають кути, вершини яких є сусідніми.
- Протилежними кутами називають кути, вершини яких є протилежними.
- Сусідніми сторонами чотирикутника називають дві сторони, які мають спільну вершину.
- Протилежними сторонами чотирикутника називають дві сторони, які не мають спільних точок.
- Діагоналлю чотирикутника називають відрізок, який сполучає дві протилежні вершини.

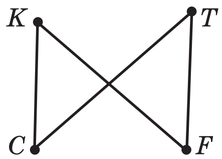
3. Позначення чотирикутника.
   ! У позначенні чотирикутника букви, що стоять поруч, відповідають сусіднім вершинам чотирикутника.
4. Периметр чотирикутника.
   ! Периметром чотирикутника називають суму довжин усіх його сторін.
5. Означення опуклого чотирикутника.
   ! Опуклим називають чотирикутник, який лежить по один бік від будь-якої прямої, що містить його сторону.
6. Теорема про суму кутів чотирикутника.
   ! Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

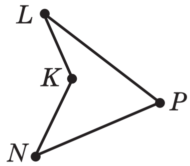
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

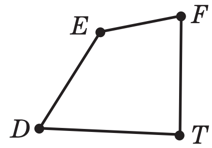
➢ ***Усні вправи***

1. На рисунку зображено геометричні фігури, кожна з яких складається з чотирьох точок і чотирьох відрізків, що послідовно сполучають ці точки. Назвіть усі чотирикутники, зображені на рисунку:

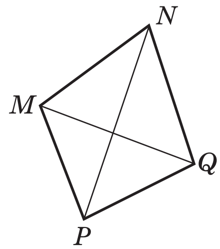
1) 

2) 

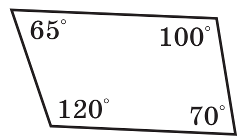
3) 

4) 

2. На рисунку зображено чотирикутник $MNQP$. Які з наведених тверджень є правильними?
   1) Вершина M є сусідньою до вершини Q.
   2) Вершини N і P є протилежними.
   3) Сторони MN і PM є сусідніми.
   4) Відрізок MP є діагоналлю чотирикутника.



3. Вершинами чотирикутника є точки K, L, M, N.
   1) Відомо, що KM і ML — сторони чотирикутника. Назвіть його діагоналі.
   2) Відомо, що KL — діагональ чотирикутника. Назвіть вершини, що є сусідніми до вершини K.
   3) Цей чотирикутник можна назвати $KMLN$. Чи можна його назвати $MLKN$?
4. Чому дорівнюють довжини сторін чотирикутника, якщо відомо, що вони рівні, а периметр чотирикутника дорівнює 38 см?
5. Чи правильно виконано рисунок? Відповідь обґрунтуйте.



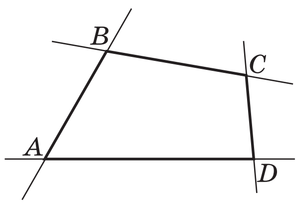
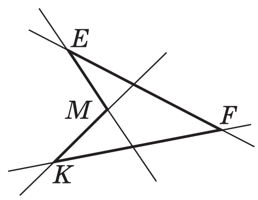
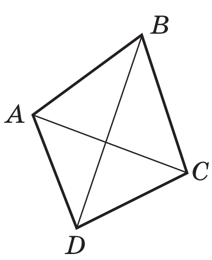
6. Чи можна побудувати опуклий чотирикутник, у якого три кути прямі, а четвертий — тупий? Відповідь обґрунтуйте.
7. Чи існує чотирикутник, у якого:
   1) усі кути тупі; 2) усі кути прямі; 3) усі кути гострі?
8. Чи правильне означення: «Опуклий чотирикутник називають гострокутним, якщо всі його кути гострі»? Відповідь обґрунтуйте.
9. Обчисліть градусну міру четвертого кута чотирикутника, якщо градусні міри трьох його кутів дорівнюють:
   1) 80°, 40°, 100°; 2) 50°, 110°, 65°.
10. Один з кутів чотирикутника дорівнює 120°, а решта кутів рівні. Обчисліть градусні міри невідомих кутів чотирикутника.
11. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2; 2; 3; 5.
12. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника, якщо один з них прямий, а решта — рівні між собою.

➢ ***Письмові вправи***

1. Побудуйте опуклий чотирикутник, у якого:
   1) два сусідніх кути прямі, а решта два — непрямі;
   2) одна діагональ у точці перетину ділиться навпіл, а друга — ні.

2. Побудуйте опуклий чотирикутник $ABCD$ і неопуклий чотирикутник $MNKP$. У кожному із цих чотирикутників проведіть діагоналі. Яким є взаємне розміщення діагоналей кожного з цих чотирикутників?
3. Обчисліть довжини сторін чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 66 см, перша сторона на 8 см більша за другу й на стільки ж менша від третьої, а четверта — утричі більша за другу.
4. У чотирикутнику $ABCD$ діагональ BD є бісектрисою кутів ABC і ADC. Обчисліть периметр чотирикутника $ABCD$, якщо $AB = 4$ см, $AD = 5$ см.
5. Доведіть, що не існує чотирикутника, у якому сусідні сторони дорівнюють 9 см і 12 см, а діагональ — 22 см.
6. Периметр чотирикутника дорівнює 20 см. Обчисліть довжини сторін чотирикутника, якщо одна з них становить 40 % його периметра, а решта три є рівними.
7. Сума градусних мір двох протилежних кутів опуклого чотирикутника дорівнює 160°. Обчисліть градусну міру більшого з решти двох кутів цього чотирикутника, якщо градусна міра меншого з них дорівнює 60°.
8. Два кути чотирикутника дорівнюють 80° і 100°, а решта два мають однакові градусні міри. Обчисліть градусну міру найбільшого кута чотирикутника.
9. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника $ABCD$, якщо $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$, а сума кутів A і B дорівнює 160°.
10. Кути чотирикутника $ABCD$, які сусідні з кутом C, рівні, а протилежний кут удвічі більший за кут C. Чому дорівнює кут C, якщо $\angle B = 60^\circ$?
11. В опуклому чотирикутнику три кути рівні й кожен з них на 72° менший від четвертого кута. Обчисліть градусну міру найбільшого кута чотирикутника.
12. У координатній площині побудуйте чотирикутник $ABCD$, якщо $A(-5;-2)$, $B(-2;3)$, $C(3;3)$, $D(3;-2)$. Чому дорівнює градусна міра кута A цього чотирикутника?

➤ ***Картка-підказка для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

<table>
<tr><th colspan="2">Чотирикутники</th></tr>
<tr><td>Опуклий чотирикутник</td><td>Неопуклий чотирикутник</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Елементи чотирикутника</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$ABCD$ — чотирикутник.
Протилежні вершини — A і C, B і D.
Сусідні вершини — A і B, B і C, C і D, D і A.
Протилежні сторони — AB і CD, BC і AD.
Сусідні сторони — AB і BC, BC і CD, CD і AD, AD і AB.
Діагоналі — AC і BD</td></tr>
</table>

Сума кутів чотирикутника	Периметр чотирикутника
Сума всіх кутів чотирикутника дорівнює 360°: $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$	Периметр чотирикутника — це сума довжин усіх його сторін: $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$

➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. У чотирикутнику проведено його діагоналі. Яка найбільша кількість рівних відрізків може бути на рисунку?
   Відповідь. Шість (дві сторони й усі відрізки діагоналей).
2. Периметр чотирикутника $ABCD$ дорівнює 23 см. Обчисліть довжину діагоналі AC, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 15 см, а периметр трикутника ADC — 22 см.
   Відповідь. 7 см.
3. Градусна міра одного з кутів опуклого чотирикутника становить 80 % суми градусних мір решти трьох його кутів. Обчисліть градусну міру цього кута трикутника.
   Відповідь. 160°.
4. Діагональ KT опуклого чотирикутника $MKPT$ перпендикулярна до сторін TP і MK. Гострі кути чотирикутника дорівнюють 37° і 43°. Обчисліть градусну міру найбільшого кута чотирикутника $MKPT$.
   Відповідь. 143°.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➢ ***Математичний диктант***

Дайте відповіді на запитання.

1. Яку геометричну фігуру називають чотирикутником?
2. Якими геометричними фігурами є сторони чотирикутника?
3. Якими геометричними фігурами є вершини чотирикутника?
4. Як називають сторони чотирикутника, що мають спільну точку?
5. Як називають сторони чотирикутника, що не є сусідніми?
6. Як називають відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника?

➢ ***Графічний диктант***

1. Побудуйте опуклий чотирикутник, у якого три кути тупі.
2. Побудуйте опуклий чотирикутник, у якого два сусідніх кути прямі, а решта — не прямі.
3. Побудуйте опуклий чотирикутник, у якого два протилежних кути прямі, а решта — не прямі.
4. Побудуйте опуклий чотирикутник, у якого один кут тупий, а решта — не тупі.
5. Побудуйте опуклий чотирикутник, у якого одна діагональ у точці перетину ділиться навпіл, а друга — ні.
6. Побудуйте опуклий чотирикутник, у якого обидві діагоналі в точці перетину діляться навпіл.

➢ ***Дидактична гра «Одне слово»***

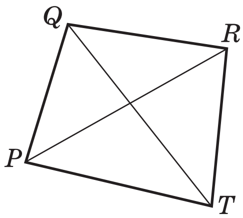
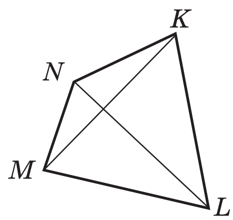
Учитель / учителька обирає трьох асистентів, а решті ставить запитання, відповіді на які можна дати одним словом. Учні / учениці записують свої відповіді на аркушах і показують їх асистентам. Асистенти фіксують, хто найпершим дав правильну відповідь. Перемагає гравець, який першим дав найбільше правильних відповідей.

Приклади запитань

1. Скільки сусідніх вершин має кожна вершина чотирикутника?
2. Скільки протилежних вершин має кожна вершина чотирикутника?
3. Скільки сусідніх сторін має кожна сторона чотирикутника?
4. Скільки протилежних сторін має кожна сторона чотирикутника?
5. Відрізок, що сполучає дві вершини чотирикутника, не є його діагоналлю. Чи можуть ці вершини бути протилежними?
6. Чи може опуклий чотирикутник мати два прямих кути?

Відповіді. 1. Дві. 2. Одну. 3. Дві. 4. Одну. 5. Ні. 6. Так.

➢ *Робота на картках із друкованою основою*

<table>
<tr><th>Варіант 1</th><th>Варіант 2</th></tr>
<tr><td colspan="2">Скориставшись рисунком чотирикутника, заповніть пропуски в тексті</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">1. На рисунку зображено чотирикутник ______, або _____, або _____, або _____.
2. Сусідніми вершинами чотирикутника є вершини ____ і____, ____ і____, ____ і____, ____ і____.
3. Протилежними вершинами чотирикутника є вершини ____ і____, ____ і____.
4. Сусідніми сторонами чотирикутника є сторони ____ і____, ____ і____, ____ і____, ____ і____.
5. Протилежними сторонами чотирикутника є сторони ____ і____, ____ і____.
6. Діагоналями чотирикутника є відрізки ____ і____.
7. Периметр чотирикутника дорівнює ____+____+____+____</td></tr>
</table>

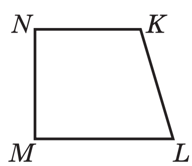
➢ *Тестові завдання*

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Яке позначення чотирикутника, зображеного на рисунку, є неправильним?

А	Б	В	Г
$MKNL$	$NKLM$	$KLMN$	$LMNK$



2. Якими геометричними фігурами є сторони чотирикутника?

А	Б	В	Г
прямими	променями	відрізками	точками

3. Як називають сторони чотирикутника, які мають спільну вершину?

А	Б	В	Г
сусідніми	протилежними	дружними	рівними

4. Як називають відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника?

А	Б	В	Г
діаметром	діагоналлю	діапазоном	діалектом

5. Сторони чотирикутника відносяться як $3:5:6:4$, а його периметр дорівнює 36 см. Чому дорівнює довжина найбільшої сторони чотирикутника?

А	Б	В	Г
6 см	8 см	10 см	12 см

6. Три кути чотирикутника дорівнюють 80°, 40°, 100°. Чому дорівнює градусна міра четвертого кута?

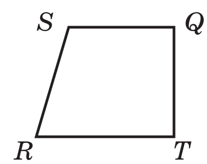
А	Б	В	Г
180°	240°	90°	140°

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Яке позначення чотирикутника, зображеного на рисунку, є неправильним?

А	Б	В	Г
RSQT	*STQR*	*QTRS*	*TRSQ*



2. Якими геометричними фігурами є вершини чотирикутника?

А	Б	В	Г
кутами	кругами	точками	відрізками

3. Як називають сторони чотирикутника, що не є сусідніми?

А	Б	В	Г
супротивними	дальніми	віддаленими	протилежними

4. Як називають відрізок, який сполучає протилежні вершини чотирикутника?

А	Б	В	Г
діагоналлю	діапозитивом	діаметром	діамантом

5. Сторони чотирикутника відносяться як $3:5:6:4$, а його периметр дорівнює 36 см. Чому дорівнює довжина найменшої сторони чотирикутника?

А	Б	В	Г
2 см	4 см	6 см	8 см

6. Три кути чотирикутника дорівнюють 50°, 110°, 65°. Чому дорівнює градусна міра четвертого кута?

А	Б	В	Г
115°	135°	85°	145°

Відповіді. Варіант 1. 1. А. 2. В. 3. А. 4. Б. 5. Г. 6. Г. Варіант 2. 1. Б. 2. В. 3. Г. 4. А. 5. В. 6. Б.

➢ *Робота в парах*

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. Обчисліть довжини сторін чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 46 см, а кожна з наступних сторін на 1 см більша за попередню.
2. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника, якщо один з них удвічі менший від другого, на 20° менший від третього й на 40° менший від четвертого.

Варіант 2

1. Обчисліть довжини сторін чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 24 см, а довжини сторін виражені послідовними непарними числами.
2. У чотирикутнику три кути рівні, а четвертий менший від їхньої суми на 240°. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника.

➢ *Робота в групах*

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника $ABCD$, якщо $\angle A : \angle B = 3 : 5$, $\angle C = \angle A + \angle B$, $\angle D = \angle B - \angle A$.

Задача 2

У гострокутному трикутнику ABC відрізки AA_1 і BB_1 — це висоти, O — точка перетину прямих AA_1 і BB_1. Чому дорівнює $\angle A_1OB_1$, якщо $\angle ACB = 60°$?

Задача 3

Бісектриси кутів C і D опуклого чотирикутника $ABCD$ перетинаються в точці O. Обчисліть градусні міри кутів COD і BCO, якщо $\angle A = 42°$, $\angle B = 138°$, $\angle CDO = 12°$.

➢ *Завдання на встановлення відповідності*

Варіант 1

Установіть відповідність між елементами чотирикутника $MNPK$ (1–3) та їхніми назвами (А–Г).

1	Відрізки MN і PK	**А**	Діагоналі чотирикутника
2	Відрізки MN і MK	**Б**	Протилежні сторони чотирикутника
3	Відрізки MP і KN	**В**	Суміжні сторони чотирикутника
		Г	Сусідні сторони чотирикутника

Варіант 2

Установіть відповідність між елементами чотирикутника $CEDF$ (1–3) та їхніми назвами (А–Г).

1	Відрізки CD і EF	**А**	Протилежні сторони чотирикутника
2	Відрізки CE і FD	**Б**	Діагоналі чотирикутника
3	Відрізки CE і CF	**В**	Сусідні сторони чотирикутника
		Г	Суміжні сторони чотирикутника

Відповіді. Варіант 1. 1 — Б. 2 — Г. 3 — А. Варіант 2. 1 — Б. 2 — А. 3 — В.

➢ ***Самостійна робота***

Варіант 1

1. Сторони чотирикутника відносяться як $3:4:5:6$. Обчисліть периметр чотирикутника, якщо сума його найбільшої та найменшої сторін дорівнює 18 см.
2. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника, якщо вони відносяться як $2:4:7:11$.
3. Сума градусних мір двох протилежних кутів опуклого чотирикутника дорівнює 160°. Обчисліть градусну міру більшого з-поміж решти двох кутів чотирикутника, якщо градусна міра меншого з них дорівнює 60°.
4. У чотирикутнику $ABCD$ сторони AB і AD рівні, а діагональ AC є бісектрисою кута BAD. Чому дорівнює градусна міра кута B, якщо $\angle A+\angle C=140°$?

Варіант 2

1. Сторони чотирикутника відносяться як $2:4:6:8$. Обчисліть периметр чотирикутника, якщо різниця його найбільшої та найменшої сторін дорівнює 3 см.
2. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника, якщо вони відносяться як $3:5:9:13$.
3. Сума градусних мір двох протилежних кутів опуклого чотирикутника дорівнює 100°. Обчисліть градусну міру меншого з-поміж решти двох кутів чотирикутника, якщо градусна міра більшого з них дорівнює 165°.
4. У чотирикутнику $ABCD$ $AB=BC$, $AD=DC$. Чому дорівнює градусна міра кута C, якщо $\angle B+\angle D=130°$?

Відповіді. Варіант 1. 1. 36 см. 2. 30°, 60°, 105°, 165°. 3. 140°. 4. 110°. Варіант 2. 1. 10 см. 2. 36°, 60°, 108°, 156°. 3. 95°. 4. 115°.

Додатковий матеріал

ДЕЯКІ ЦІКАВІ ФАКТИ ПРО ЧОТИРИКУТНИКИ

ПОХОДЖЕННЯ ДЕЯКИХ ТЕРМІНІВ

Термін *діагональ* утворений із грецьких слів *через* і *кут*. Буквальне значення слова — *та, що проходить через кут*.

Слово *периметр* утворене із грецьких слів *навколо* і *міряти*.

«НЕЖОРСТКІСТЬ» ЧОТИРИКУТНИКА

Уявіть модель чотирикутника, зроблену із шарнірно сполучених планок. Ми можемо змінювати величини кутів чотирикутника, а довжини сторін залишаються без змін. Це підтверджує, що існує безліч таких чотирикутників із заданими довжинами сторін. Цей факт широко використовують у техніці для створення шарнірних механізмів.

НЕРІВНІСТЬ ЧОТИРИКУТНИКА

Модуль різниці будь-яких сторін чотирикутника не більший від суми решти двох сторін:

$$|a-b| \le c+d\ .$$

Або: у будь-якому чотирикутнику сума довжин трьох його сторін не менша за довжину четвертої сторони, тобто: $a \le b+c+d$, $b \le a+c+d$, $c \le a+b+d$, $d \le a+b+c$.

НЕРІВНІСТЬ ПТОЛЕМЕЯ

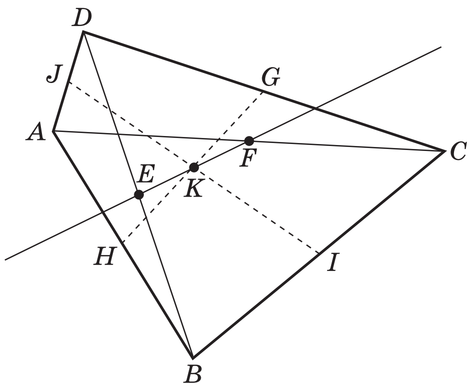
(Клавдій Птолемей — давньогрецький математик, астроном, географ, твори якого мали значний вплив на розвиток математики, астрономії, географії та оптики.)

Для сторін a , b , c , d і діагоналей e і f опуклого чотирикутника виконується нерівність

$$e \cdot f \le a \cdot c + b \cdot d\ .$$

СЕРЕДНІ ЛІНІЇ ЧОТИРИКУТНИКА

Нехай G , I , H , J — середини сторін опуклого чотирикутника $ABCD$, а E і F — середини його діагоналей (*див. рисунок*).



Відрізки GH, IJ, EF називають відповідно першою, другою і третьою середніми лініями чотирикутника. Відрізки GH і IJ називають також *бімедіанами*.

Усі три середні лінії чотирикутника перетинаються в одній точці (центроїді вершин чотирикутника) і діляться нею навпіл.

Середини E і F двох діагоналей, а також центроїд вершин K опуклого чотирикутника лежать на одній прямій EF. Ця пряма має назву *пряма Ньютона*. (Ісаак Ньютон (1643–1727) — англійський науковець, який заклав основи сучасного природознавства, творець класичної фізики.)

ПАРАЛЕЛОГРАМ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКИ

Очікувані результати: учні мають уміти розпізнавати на рисунках паралелограми з-поміж інших чотирикутників; співвідносити реальні об'єкти навколишнього середовища з моделями паралелограмів; зображувати паралелограми; називати елементи паралелограма; позначати паралелограми; пояснювати, що таке висота паралелограма; розрізняти властивості й ознаки паралелограма; розуміти доведення властивостей та ознак паралелограма; застосовувати властивості та ознаки паралелограма під час розв'язування задач.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може провести таку бесіду.

— Які види трикутників ви знаєте? (*Прямокутні, гострокутні, тупокутні, рівнобедрені, рівносторонні, різносторонні.*)

— Навіщо потрібно класифікувати трикутники? (*Кожен вид трикутників має певні властивості, які допомагають розв'язувати задачі, зокрема практичного змісту.*)

— Чи розподіляють чотирикутники на різні види? (*Так. Окремими видами чотирикутників є квадрат і прямокутник.*)

➢ ***Інформація вчителя / учительки***

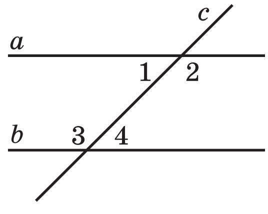
— Крім цих видів, існують й інші види чотирикутників. На найближчих уроках ми дізнаємось, які чотирикутники називають паралелограмами, які властивості мають паралелограми, вивчимо ознаки паралелограма, навчимося застосовувати їх під час розв'язування задач.

Англійський винахідник Джеймс Ватт (1736–1819) писав: «Хоча я й не особливо піклуюся про славу, але паралелограмом пишаюся більше, ніж будь-яким іншим моїм винаходом».

Властивості паралелограма широко використовують на практиці. Якщо сконструювати модель паралелограма на шарнірах, то, змінюючи величини кутів, можна дістати різні паралелограми з тими самими довжинами сторін. Тому про паралелограм кажуть, що ця фігура є рухомою, а не жорсткою на відміну від трикутника. Шарнірним паралелограмом користуються для проведення паралельних прямих на різних відстанях одна від одної. Модель шарнірного паралелограма запропонував Дж. Ватт для поєднання поршня з точкою махового колеса, щоб обертання колеса приводило поршень у прямолінійний рух. Можливо, дехто з вас, добре засвоївши властивості й ознаки паралелограма, також стане видатним винахідником.

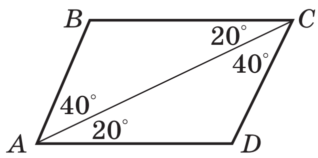
АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➢ ***Усні вправи***



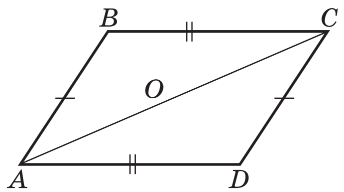
1. Укажіть пари внутрішніх різносторонніх і внутрішніх односторонніх кутів на рисунку. Чи паралельні прямі a і b, якщо:
   1) $\angle 1 = \angle 4$;
   2) $\angle 1 = 30°$, $\angle 3 = 130°$;
   3) $\angle 2 = 145°$, $\angle 4 = 35°$?
2. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle A = 40°$, $\angle B = 140°$. Доведіть, що $BC \parallel AD$.
3. У чотирикутнику $ABCD$ проведено діагональ AC. $\angle BCA = 80°$, а сторони BC і AD паралельні. Чому дорівнює $\angle CAD$?

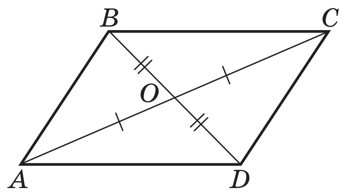
4. Скориставшись рисунком, доведіть, що:
   1) прямі AD і BC паралельні;
   2) трикутники ACD і CAD рівні.

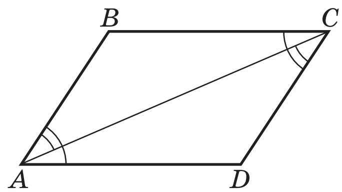


➢ ***Завдання за рисунками***

$ABCD$ — чотирикутник.







1) Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta CDA$. 2) Доведіть, що $\Delta AOB = \Delta COD$. 3) Доведіть, що $\Delta ABC = \Delta CDA$.

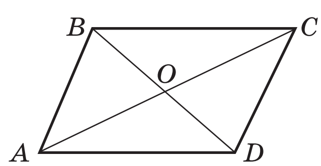
ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Означення паралелограма.
   ! Паралелограмом називають чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні.
2. Означення висоти паралелограма.
   ! Висотою паралелограма називають перпендикуляр, проведений з точки однієї сторони до прямої, яка містить протилежну сторону.
3. Властивості паралелограма (теорема).
   У паралелограмі:
   1) протилежні сторони рівні;
   2) протилежні кути рівні;
   3) діагоналі точкою перетину діляться навпіл.
4. Ознаки паралелограма.
   - Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні й рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
   - Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.
   - Якщо діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

➢ ***Усні вправи***

1. Обчисліть периметр паралелограма, дві сторони якого дорівнюють 10 см і 12 см.
2. Один із кутів паралелограма дорівнює 50°. Обчисліть градусні міри решти кутів цього паралелограма.
3. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O (*див. рисунок*).
   1) Укажіть відрізок, який є медіаною трикутника ACD.
   2) Укажіть трикутник, медіаною якого є відрізок AO.



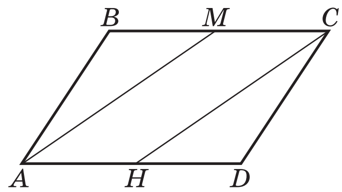
4. У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AB = CD$, $BC = 5$ см. Обчисліть довжину AD.
5. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle B = 120^\circ$. Обчисліть градусні міри решти кутів.

6. У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$, $AB = CD$, $\angle A = 30°$. Обчисліть градусні міри решти кутів.

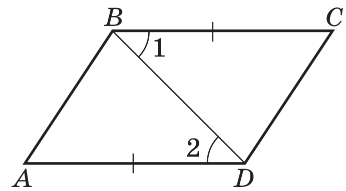
7. У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel DC$, $AB = CD = 9$ см, $AD = 2$ см. Обчисліть периметр чотирикутника $ABCD$.

8. O — точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$. $AO = OC$, $BO = OD$, $AB = 4$ см, $BC = 7$ см. Обчисліть периметр чотирикутника $ABCD$.

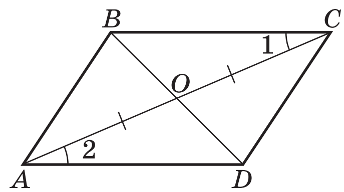
9. На рисунку $ABCD$ — паралелограм, точка M — середина сторони BC, точка H — середина сторони AD. Доведіть, що $AMCH$ — паралелограм.



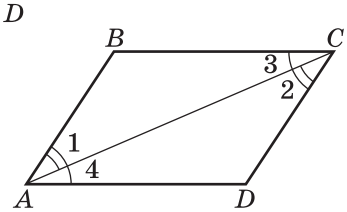
10. У чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$, $\angle 1 = \angle 2$ (*див. рисунок*). Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.



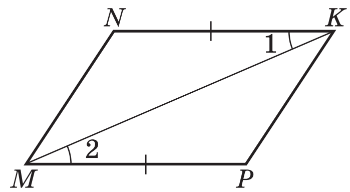
11. У чотирикутнику $ABCD$ $AO = OC$, $\angle 1 = \angle 2$ (*див. рисунок*). Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.



12. У чотирикутнику $ABCD$ $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$ (*див. рисунок*). Доведіть, що $ABCD$ — паралелограм.



13. У чотирикутнику $MNKP$ $NK = MP$, $\angle 1 = \angle 2$ (*див. рисунок*). Доведіть, що $MNKP$ — паралелограм.



14. Діагоналі чотирикутника $MNKP$ перетинаються в точці O. Чи є цей чотирикутник паралелограмом, якщо $MO = 7$ см, $MK = 1{,}4$ дм, $NO = 5$ см, $OP = 50$ мм?

➤ *Письмові вправи*

1. Дві сторони паралелограма відносяться як $3:4$. Обчисліть довжини сторін паралелограма, якщо його периметр дорівнює 42 см.

2. Обчисліть градусні міри кутів паралелограма, якщо відомо, що один з них на $30°$ більший за другий.

3. Діагональ паралелограма утворює з двома його сторонами кути $25°$ і $35°$. Обчисліть градусні міри кутів паралелограма.

4. Обчисліть градусні міри всіх кутів паралелограма, якщо відомо, що сума двох із них дорівнює $80°$.

5. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Укажіть усі пари рівних трикутників, які при цьому утворилися, та доведіть, що вони рівні.

6. Висота паралелограма утворює з його стороною кут 20°. Обчисліть градусні міри кутів паралелограма.

7. З вершини тупого кута паралелограма проведено дві висоти, кут між якими дорівнює 25°. Обчисліть градусні міри кутів паралелограма.

8. Бісектриса кута A паралелограма $ABCD$ перетинає сторону BC у точці M. Обчисліть периметр паралелограма, якщо $BM = 15$ см, $MC = 20$ см.

9. Бісектриси AM і BN паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці T. Обчисліть периметр паралелограма, якщо $\angle A = 60°$, $BT = 5$ см, $MC = 15$ см.

10. Через точку перетину діагоналей паралелограма проведено пряму. Доведіть, що її відрізок, обмежений сторонами паралелограма, ділиться точкою перетину діагоналей навпіл.

11. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Периметр паралелограма дорівнює 12 см, а різниця периметрів трикутників BOC і COD дорівнює 2 см. Обчисліть довжини сторони паралелограма.

12. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O. Периметр трикутника OBC на 6 см більший, ніж периметр трикутника AOB. Обчисліть різницю сторін AD і AB.

13. Діагональ KP паралелограма $KMPT$ перпендикулярна до сторони MK і дорівнює стороні TP. Обчисліть градусну міру тупого кута цього паралелограма.

14. Побудуйте трикутник ABC і проведіть його медіану BO. На промені BO побудуйте відрізок OD, що дорівнює BO. Сполучіть точку D із точками A і C.
    1) Поясніть, чому чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом.
    2) Позначте точку M так, щоб чотирикутник $ABDM$ був паралелограмом. Чи лежать точки M, C і D на одній прямій?

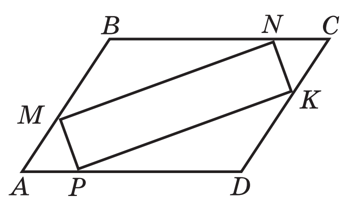
15. На сторонах AB і CD паралелограма $ABCD$ позначено відповідно точки P і L так, що $AP = CL$. Доведіть, що точки A, P, C, L є вершинами паралелограма.

16. Точки A і B ділять діагональ паралелограма $MNKP$ на три рівні частини. Доведіть, що чотирикутник $NAPB$ — паралелограм.

17. Точки M і N — середини протилежних сторін BC і AD паралелограма $ABCD$. Обчисліть периметр чотирикутника $AMCN$, якщо $BC = 6$ см, $NC = 5$ см.

18. Через точку перетину діагоналей паралелограма $ABCD$ проведено дві прямі. Одна з них перетинає сторони AB і CD відповідно в точках M і K, а друга — сторони BC і AD відповідно в точках N і L. У чотирикутнику $MNKL$ $\angle NML = 42°$. Обчисліть градусні міри решти кутів чотирикутника $MNKL$.

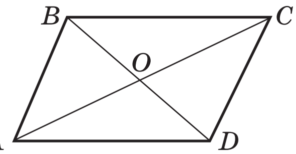
19. На рисунку $ABCD$ — паралелограм, $AP = AM = CN = CK$. Обчисліть довжини сторін чотирикутника $MNKP$, якщо його периметр дорівнює 48 см, а $MN - MP = 12$.



20. Точки A, B, C, D — середини сторін MN, NP, PT, TM паралелограма $MNPT$. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника $ABCD$, якщо один з них менший від іншого в 5 разів.

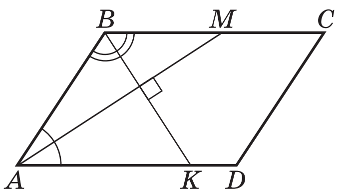
- ***Картки-підказки для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

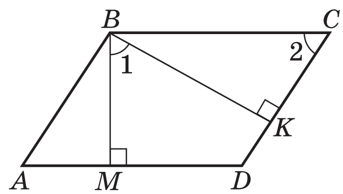
Картка 1

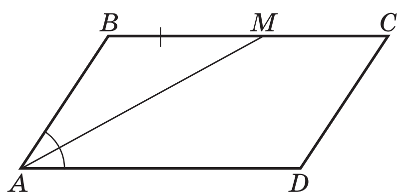
<table>
<tr><th colspan="4">Паралелограм</th></tr>
<tr><th>Означення</th><th>Зображення</th><th>Властивості</th><th>Ознаки</th></tr>
<tr>
<td>Паралелограмом називають чотирикутник, протилежні сторони якого попарно паралельні</td>
<td>

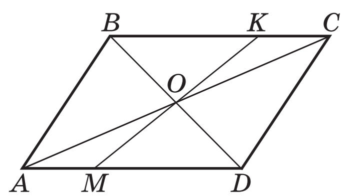
O — точка перетину діагоналей</td>
<td>Якщо $ABCD$ — паралелограм, то:
1) $AO = OC$, $BO = OD$;
2) $AB = CD$, $BC = AD$;
3) $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$</td>
<td>Якщо в чотирикутнику $ABCD$:
1) $AB = CD$ і $AB \parallel CD$
або
$BC = AD$ і $BC \parallel AD$;
або
2) $AB = CD$ і $BC = AD$;
або
3) $AO = OC$, $BO = OD$,
то
$ABCD$ — паралелограм</td>
</tr>
</table>

Картка 2

<table>
<tr><th colspan="2">Деякі корисні властивості паралелограма</th></tr>
<tr>
<td>

Бісектриси сусідніх кутів взаємно перпендикулярні: $AM \perp BK$</td>
<td>

Кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює його гострому куту: $\angle 1 = \angle 2$</td>
</tr>
<tr>
<td>

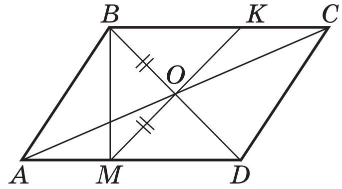
Бісектриса кута відтинає на протилежній стороні відрізок, що дорівнює прилеглій стороні: $AB = BM$</td>
<td>

Відрізок, який сполучає протилежні сторони й проходить через точку перетину діагоналей, ділиться цією точкою навпіл: $OM = OK$</td>
</tr>
</table>

- ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. На дошці було зображено паралелограм $ABCD$ і позначено точку E — середину сторони AB — і точку F — середину сторони CD. Черговий учень витер паралелограм, але залишив точки A, E, F. Як за цими точками відновити паралелограм $ABCD$?

2. У паралелограмі $ABCD$ через точку O — перетину діагоналей — проведено пряму, що перетинає сторони BC і AD у точках K і M відповідно, $BO = OM$. Обчисліть $\angle KBM$.

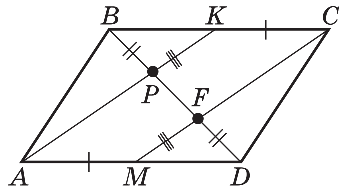


Розв'язання

$\Delta AMO = \Delta CKO$ (за стороною і прилеглими кутами), отже, $OM = OK$. Тоді в трикутнику MBK медіана, проведена до сторони MK, дорівнює її половині, а це можливо тільки в прямокутному трикутнику, отже, $\angle KBM = 90°$.

Відповідь. 90°.

3. На сторонах BC і AD чотирикутника $ABCD$ позначено точки K і M відповідно. Відрізок AK перетинає діагональ BD у точці P, а відрізок CM — у точці F. Відомо, що $AK \parallel CM$, $PK = FM$, $BP = FD$, $KC = AM$. Доведіть, що $\angle BAD = \angle BCD$.



Розв'язання

Оскільки $AK \parallel CM$, то $\angle BPK = \angle MFD$, отже, $\Delta BPK = \Delta DFM$, звідки випливає, що $MD = BK$. Тоді маємо, що $BC = AD$. З рівності трикутників BPK і MFD випливає також, що $\angle BKP = \angle FMD$. Оскільки $AK \parallel CM$, $\angle BKP = \angle BCM$, то внутрішні різносторонні кути при прямих BC і AD та січній CM рівні. Маємо: $BC \parallel AD$. Отже, $ABCD$ — паралелограм і $\angle BAD = \angle BCD$.

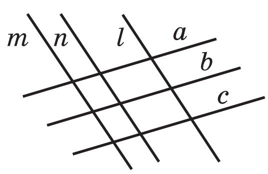
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

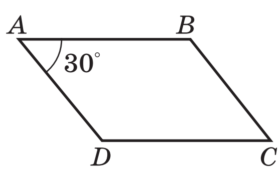
➤ ***Математичний диктант***

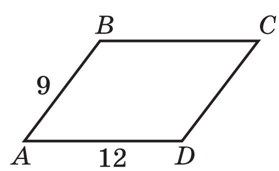
Доповніть твердження.

1. Якщо периметр паралелограма дорівнює 54 см, а одна зі сторін удвічі менша від другої, то менша сторона дорівнює...
2. Якщо в паралелограмі $ABCD$ $\angle A = 70°$, то $\angle C = \ldots$
3. Якщо в паралелограмі $ABCD$ $\angle B + \angle D = 90°$, то $\angle A = \ldots$
4. Якщо O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$, $AC = 12$ см, $BO = 4$ см, то $AO = \ldots$, $BD = \ldots$
5. Якщо бісектриса гострого кута паралелограма ділить сторону на відрізки 5 см і 8 см, починаючи від вершини гострого кута, то периметр паралелограма дорівнює...
6. Якщо бісектриса гострого кута паралелограма ділить сторону на відрізки 5 см і 8 см, починаючи від вершини тупого кута, то периметр паралелограма дорівнює...
7. Якщо кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 70°, то кути паралелограма дорівнюють...
8. Якщо сума двох кутів паралелограма дорівнює 140°, то кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює...

➤ ***Завдання за рисунками***



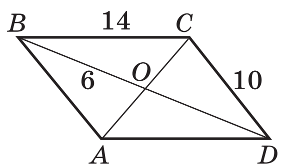


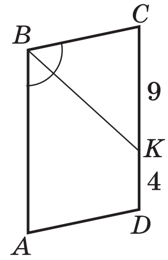


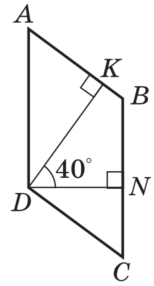
1) $a \parallel b \parallel c$, $m \parallel n \parallel l$. Скільки паралелограмів зображено на рисунку?

2) $ABCD$ — паралелограм. $\angle C = ?$ $\angle D = ?$

3) $ABCD$ — паралелограм. $P_{ABCD} = ?$







4) $ABCD$ — паралелограм. $P_{ABD} = ?$

5) $ABCD$ — паралелограм. $P_{ABCD} = ?$

6) $ABCD$ — паралелограм. $\angle A = ?$ $\angle B = ?$ $\angle C = ?$ $\angle D = ?$

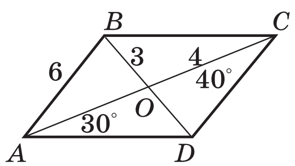
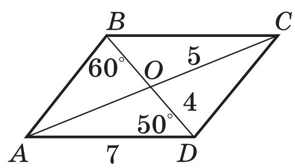
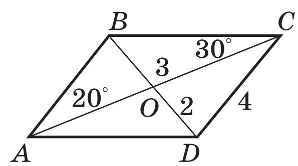
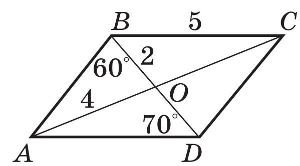
➢ ***Бліцопитування «Чи може..?», «Чи завжди..?»***

1. Чи може діагональ паралелограма дорівнювати його стороні?
2. Чи завжди бісектриси сусідніх кутів паралелограма перпендикулярні?
3. Чи завжди кут між висотами паралелограма, проведеними з однієї вершини, дорівнює куту цього паралелограма при сусідній вершині?
4. Чи завжди бісектриса кута паралелограма відтинає на його протилежній стороні відрізок, що дорівнює прилеглій стороні?
5. Чи може відрізок, який сполучає протилежні сторони паралелограма й проходить через точку перетину діагоналей, ділитися цією точкою у відношенні $2:3$?

➢ ***Дидактична гра-естафета «Властивості паралелограма»***

Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у 3-4 команди так, щоб у кожній команді була однакова кількість гравців. Завдання (на дошці): скориставшись рисунком паралелограма, дати відповіді на запитання. Гравці по черзі підбігають до дошки й замість знака питання записують число. Естафетною паличкою може слугувати шматочок крейди. Перемагає команда, яка першою виконає завдання і не припуститься помилок.

Приклади завдань

Для 1-ї команди	Для 2-ї команди	Для 3-ї команди	Для 4-ї команди
			
$DO = ?$ $DC = ?$ $AC = ?$ $P_{COD} = ?$ $\angle ABC = ?$ $\angle BAD = ?$	$AO = ?$ $BD = ?$ $BC = ?$ $P_{BOC} = ?$ $\angle ADC = ?$ $\angle BCD = ?$	$BO = ?$ $AC = ?$ $AB = ?$ $P_{AOB} = ?$ $\angle ABC = ?$ $\angle BAD = ?$	$CO = ?$ $BD = ?$ $AD = ?$ $P_{AOD} = ?$ $\angle ADC = ?$ $\angle BCD = ?$

➢ ***Дидактична гра «Портрет паралелограма»***

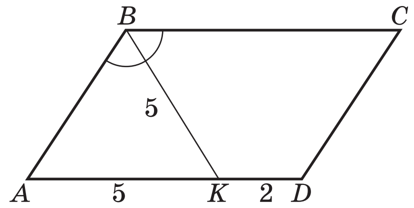
Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у три команди. Для кожної команди на дошці або на великому аркуші паперу позначено точку O. Гравці мають побудувати паралелограм так, щоб точка O була точкою перетину його діагоналей. Можна дати командам деякий час на міркування та складання плану побудови, після чого гравці по черзі будуватимуть по одному відрізку так, щоб у результаті вийшов паралелограм. Можна користуватися лінійкою з поділками або лінійкою і циркулем. Якщо кількість гравців у команді менша від потрібної, то хтось з учасників може виходити до дошки двічі, але обов'язково дотримуватися умови: за один хід можна будувати тільки один відрізок. (Відрізок із серединою в точці O вважають за два відрізки!) Якщо завдання виконують на папері, то відрізки можна будувати різними кольорами — так «портрет» паралелограма буде ще красивішим. Перемагає команда, яка першою впорається із завданням і найточніше побудує паралелограм.

Робота на картках із друкованою основою

Варіант 1

Скориставшись рисунком паралелограма $ABCD$, заповніть таблицю.

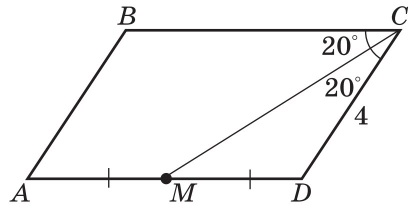
AB	P_{ABCD}	$\angle C$	$\angle B$



Варіант 2

Скориставшись рисунком паралелограма $ABCD$, заповніть таблицю.

AD	P_{ABCD}	$\angle A$	$\angle B$



Тестові завдання 1. Властивості паралелограма

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

Варіант 1

1. Периметр паралелограма дорівнює 40 см, а одна з його сторін на 8 см менша від іншої. Чому дорівнює довжина меншої сторони паралелограма?

А	Б	В	Г
16 см	6 см	12 см	14 см

2. Різниця двох кутів паралелограма дорівнює 40°. Чому дорівнює градусна міра більшого кута паралелограма?

А	Б	В	Г
140°	100°	110°	120°

3. У паралелограмі $ABCD$ $AB=6$ см, $AC=12$ см, $BD=8$ см. Чому дорівнює периметр трикутника COD, де O — точка перетину діагоналей паралелограма?

А	Б	В	Г
16 см	26 см	20 см	22 см

4. Тупий кут паралелограма дорівнює 126°. Чому дорівнює кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини цього кута?

А	Б	В	Г
54°	63°	27°	90°

Варіант 2

1. Периметр паралелограма дорівнює 40 см, а одна з його сторін на 8 см менша від іншої. Чому дорівнює довжина більшої сторони паралелограма?

А	Б	В	Г
24 см	20 см	14 см	12 см

2. Різниця двох кутів паралелограма дорівнює 40°. Чому дорівнює градусна міра меншого кута паралелограма?

А	Б	В	Г
70°	80°	40°	60°

3. У паралелограмі $ABCD$ $BC=9$ см, $AC=12$ см, $BD=8$ см. Чому дорівнює периметр трикутника AOD, де O — точка перетину діагоналей паралелограма?

А	Б	В	Г
14,5 см	25 см	23 см	19 см

4. Тупий кут паралелограма дорівнює 104°. Чому дорівнює кут між висотами паралелограма, проведеними з вершини цього кута?

А	Б	В	Г
90°	104°	76°	96°

Відповіді

Варіант 1. 1. Б. 2. В. 3. А. 4. А.

Варіант 2. 1. В. 2. А. 3. Г. 4. В.

➢ *Тестові завдання 2. Ознаки паралелограма*

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Яке з наведених тверджень правильне?

А	Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$, то $ABCD$ — паралелограм
Б	Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AB = AC$ і $BC = BD$, то $ABCD$ — паралелограм
В	Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $BC \parallel AD$, то $ABCD$ — паралелограм
Г	Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AD = BC$ і $AD \parallel BC$, то $ABCD$ — паралелограм

2. Якщо AC — діагональ чотирикутника $ABCD$, а медіани трикутників ABC і ABD, проведені до сторони AC, не рівні між собою і не лежать на одній прямій, то чотирикутник $ABCD$...

А	не може існувати
Б	обов'язково є паралелограмом
В	не може бути паралелограмом
Г	може бути, а може й не бути паралелограмом

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Яке з наведених тверджень правильне?

А	Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — паралелограм
Б	Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $BC = AD$, то $ABCD$ — паралелограм
В	Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $BC = AD$ і $AB \parallel CD$, то $ABCD$ — паралелограм
Г	Якщо в чотирикутнику $ABCD$ $AC = AD$ і $AD \parallel BC$, то $ABCD$ — паралелограм

2. Якщо AC — діагональ чотирикутника $ABCD$, а медіани трикутників ABC і ABD, проведені до сторони AC, рівні між собою і лежать на одній прямій, то чотирикутник $ABCD$...

А	може бути, а може й не бути паралелограмом
Б	не може існувати
В	не може бути паралелограмом
Г	обов'язково є паралелограмом

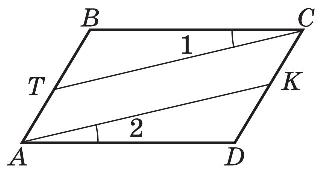
Відповіді. Варіант 1. 1. Г. 2. В. Варіант 2. 1. Б. 2. Г.

➢ *Робота в парах*

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

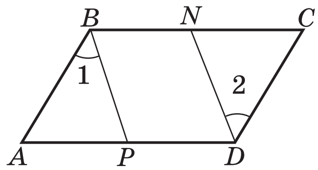
1. На рисунку $ABCD$ — паралелограм, $\angle 1 = \angle 2$.
   Доведіть, що $ATCK$ — паралелограм.



2. Діагональ PT чотирикутника $DPKT$ проходить через середину E діагоналі DK, $\angle PKE = \angle EDT$. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника $DPKT$, якщо сума двох з них дорівнює 160°.

Варіант 2

1. На рисунку $ABCD$ — паралелограм, $\angle 1 = \angle 2$.
   Доведіть, що $BNDP$ — паралелограм.



2. Діагональ DK чотирикутника $DPKT$ проходить через середину E діагоналі PT, $\angle DPE = \angle KTE$. Обчисліть довжини сторін чотирикутника $DPKT$, якщо вони відносяться як $1:3$, а периметр дорівнює 64 см.

➢ ***Робота в групах***

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

У чотирикутнику $ABCD$ $AB = CD$ і $BC \parallel AD$. Чи обов'язково чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом? Відповідь обґрунтуйте.

Задача 2

У чотирикутнику $ABCD$ $AB = BC$ і $AB \parallel CD$. Чи обов'язково чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом? Відповідь обґрунтуйте.

Задача 3

O — точка перетину діагоналей чотирикутника $ABCD$, $AO = OC$, $BO = OD$. Чи обов'язково чотирикутник $ABCD$ є паралелограмом? Відповідь обґрунтуйте.

➢ ***Завдання на встановлення відповідності***

Варіант 1

Установіть відповідність між паралелограмом (1–3) і градусною мірою його тупого кута (А–Г).

1	Паралелограм, сума гострих кутів якого дорівнює 80°	**А**	120°
2	Паралелограм, сусідні кути якого відносяться як $1:5$	**Б**	140°
3	Паралелограм, у якого кут між висотами, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 60°	**В**	100°
		Г	150°

Варіант 2

Установіть відповідність між паралелограмом (1–3) і градусною мірою його гострого кута (А–Г).

1	Паралелограм, сума тупих кутів якого дорівнює 260°	**А**	60°
2	Паралелограм, сусідні кути якого відносяться як $4:5$	**Б**	40°
3	Паралелограм, у якого кут між висотами, проведеними з вершини тупого кута, дорівнює 40°	**В**	80°
		Г	50°

Відповіді. Варіант 1. 1 — Б. 2 — Г. 3 — А. Варіант 2. 1 — Г. 2 — В. 3 — Б.

➢ ***Самостійна робота з подальшою взаємоперевіркою і взаємооцінюванням***

Варіант 1

1. Одна зі сторін паралелограма на 13 см менша, ніж друга. Обчисліть периметр паралелограма, якщо менша сторона дорівнює 12 см.
2. Обчисліть градусні міри кутів паралелограма, якщо один з них утричі більший, ніж другий.
3. У паралелограмі $ABCD$ $AC=12$ см, $CD=7$ см. Обчисліть периметр трикутника AOB (O — точка перетину діагоналей), якщо $AC-BD=4$ см.
4. У паралелограмі $ABCD$ $\angle B$ — тупий, BK — висота паралелограма, проведена до сторони AD. Обчисліть градусні міри кутів паралелограма, якщо $\angle ABK=28^\circ$.

Варіант 2

1. Одна зі сторін паралелограма на 9 см більша, ніж друга. Обчисліть периметр паралелограма, якщо більша сторона дорівнює 35 см.
2. Обчисліть градусні міри кутів паралелограма, якщо один з них удвічі менший, ніж другий.
3. У паралелограмі $ABCD$ $BD=10$ см, $AD=12$ см. Обчисліть периметр трикутника BOC (O — точка перетину діагоналей), якщо $AC-BD=8$ см.
4. У паралелограмі $ABCD$ $\angle B$ — тупий, BK — висота паралелограма, проведена до сторони CD. Обчисліть градусні міри кутів паралелограма, якщо $\angle CBK=32^\circ$.

Відповіді. Варіант 1. 1. 74 см. 2. 45°, 135°, 45°, 135°. 3. 17 см. 4. 62°, 118°, 62°, 118°. Варіант 2. 1. 122 см. 2. 60°, 120°, 60°, 120°. 3. 26 см. 4. 58°, 122°, 58°, 122°.

ПРЯМОКУТНИК, РОМБ, КВАДРАТ, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКИ

Очікувані результати: учні мають уміти розпізнавати на рисунках прямокутники, ромби, квадрати з-поміж інших паралелограмів; співвідносити реальні об'єкти навколишнього середовища з моделями прямокутників, ромбів, квадратів; зображувати прямокутники, ромби, квадрати; усвідомлювати, що прямокутник і ромб є окремими видами паралелограма, а квадрат — окремим видом прямокутника або ромба; розуміти доведення властивостей діагоналей прямокутника та ромба; застосовувати властивості прямокутника, ромба та квадрата під час розв'язування задач.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може поставити такі запитання:

— Чому дорівнюють кути паралелограма, якщо його діагоналі рівні?

— Чому дорівнює периметр паралелограма, якщо одна з його сторін дорівнює 5 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні?

(Напевно, ці запитання викликають утруднення.)

— Отже, можемо зробити висновок, що знань про паралелограм ще не достатньо. На найближчих уроках ми дізнаємось, які існують види паралелограмів, вивчимо їхні властивості, навчимося застосовувати їх під час розв'язування задач.

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➢ ***Фронтальне опитування***

1. Сформулюйте означення медіани трикутника.
2. Сформулюйте означення висоти трикутника.
3. Сформулюйте означення бісектриси трикутника.
4. Який трикутник називають рівнобедреним?
5. Як називають сторони рівнобедреного трикутника?
6. Сформулюйте властивість медіани рівнобедреного трикутника.
7. Який трикутник називають прямокутним?
8. Як називають сторони прямокутного трикутника?

➢ ***Усні вправи***

1. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$.
   1) Визначте вид трикутника.
   2) Укажіть назви сторін трикутника.
2. Відрізок AM — серединний перпендикуляр до відрізка BC. Доведіть, що $AB = AC$.
3. У трикутнику ABC $\angle A = \angle C$, $BC = 15$ см. Довжину якої зі сторін трикутника можна визначити за цими даними?
4. У трикутнику ABC $\angle A = \angle B$. До якої сторони проведена медіана буде висотою і бісектрисою?
5. BM — медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи AC, $\angle C = 40°$. Чому дорівнює $\angle ABM$? Розв'яжіть задачу двома способами.

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

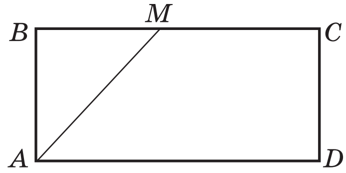
1. Означення прямокутника.
   ! Прямокутником називають паралелограм, усі кути якого прямі.
2. Властивості прямокутника.
   1) Властивості паралелограма.
   ! Протилежні сторони прямокутника паралельні й рівні.
   ! Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл.
   2) Особлива властивість прямокутника (теорема).
   ! Діагоналі прямокутника рівні.
3. Ознаки прямокутника.
   - Якщо один з кутів паралелограма прямий, то цей паралелограм є прямокутником.
   - Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм є прямокутником.
4. Означення ромба.
   ! Ромбом називають паралелограм, усі сторони якого рівні.
5. Властивості ромба.
   1) Властивості паралелограма.
   ! Протилежні кути ромба рівні.
   ! Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.
   2) Особливі властивості ромба (теорема).
   ! Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.
   ! Діагоналі ромба ділять його кути навпіл.
6. Ознаки ромба.
   - Якщо діагоналі паралелограма перпендикулярні, то цей паралелограм є ромбом.
   - Якщо діагональ паралелограма є бісектрисою його кута, то цей паралелограм є ромбом.
7. Означення квадрата.
   ! Квадратом називають прямокутник, усі сторони якого рівні.
8. Властивості квадрата.
   ! Усі сторони квадрата рівні, а протилежні сторони паралельні.
   ! Усі кути квадрата прямі.
   ! Діагоналі квадрата рівні.
   ! Діагоналі квадрата перпендикулярні.
   ! Діагоналі квадрата ділять кути квадрата навпіл.
   ! Діагоналі квадрата діляться точкою перетину навпіл.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

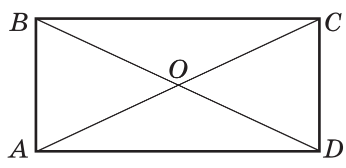
➢ ***Усні вправи***

1. Діагональ AC прямокутника $ABCD$ дорівнює 12 см. Чому дорівнює медіана трикутника ABD, проведена до його найбільшої сторони?

2. У прямокутнику $ABCD$ бісектриса кута A перетинає сторону BC у точці M (*див. рисунок*). Доведіть, що ΔABM — рівнобедрений.



3. У прямокутнику $ABCD$ кут BOC дорівнює 130° (*див. рисунок*). Обчисліть градусні міри кутів трикутника COD.

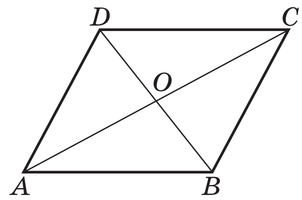


4. Чому дорівнює гострий кут між діагоналями прямокутника, якщо одна з них утворює зі сторонами прямокутника кути 20° і 70°?

5. Чому дорівнюють градусні міри кутів паралелограма, якщо його діагоналі рівні? (*Завдання, запропоноване на етапі мотивації навчальної діяльності.*)

Відповідь. Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм є прямокутником, градусні міри його кутів дорівнюють 90°.

6. На рисунку зображено ромб. Укажіть:
   1) його рівні сторони;
   2) його рівні кути;
   3) його діагоналі;
   4) усі рівнобедрені трикутники, зображені на рисунку;
   5) усі прямокутні трикутники, зображені на рисунку.



7. Периметр ромба дорівнює 24 см. Чому дорівнюють сторони ромба?

8. Чи існує ромб зі стороною 10 см і діагоналями 6 см і 8 см? Відповідь обґрунтуйте.

9. Чи може сторона ромба дорівнювати:
   1) його діагоналі;
   2) половині його діагоналі?

10. У ромбі $ABCD$ $AD = 5$ см, $DB = 6$ см, $AC = 8$ см. Обчисліть периметр трикутника BOC (O — точка перетину діагоналей).

11. Градусна міра одного з кутів між діагоналлю та стороною ромба дорівнює 72°. Чому дорівнюють градусні міри кутів ромба?

12. У ромбі $ABCD$ $\angle A = 32^\circ$. Чому дорівнюють градусні міри кутів трикутника BOC (O — точка перетину діагоналей)?

13. Обчисліть периметр ромба, гострий кут якого дорівнює 60°, а менша діагональ дорівнює 6 см.

14. Чому дорівнює периметр паралелограма, якщо одна з його сторін дорівнює 5 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні? *(Завдання, запропоноване на етапі мотивації навчальної діяльності.)*

Відповідь. Якщо діагоналі паралелограма взаємно перпендикулярні, то цей паралелограм є ромбом, отже, його периметр дорівнює $4 \cdot 5 = 20$ см.

15. Обчисліть довжини сторін паралелограма, якщо його периметр дорівнює 36 см, а діагоналі взаємно перпендикулярні.

16. Обчисліть довжини сторін паралелограма, якщо його периметр дорівнює 24 см, а діагональ є бісектрисою кута.

17. Чому дорівнює кут між діагоналлю та стороною квадрата?

18. Діагональ квадрата ділить його на два трикутники. Визначте вид цих трикутників.

19. Сторони прямокутника дорівнюють 26 см і 30 см. Обчисліть довжину сторони квадрата, периметр якого дорівнює периметру цього прямокутника.

20. Одна з діагоналей квадрата дорівнює 8 см. Обчисліть відстань від вершини квадрата до другої діагоналі.

21. Сформулюйте будь-яку ознаку квадрата.

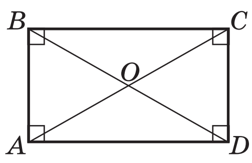
➢ *Письмові вправи*

1. У прямокутнику $ABCD$ з вершин A і C проведено перпендикуляри AE і CF до діагоналі BD. Доведіть, що $AE = CF$.

2. Менша сторона прямокутника дорівнює 4 см й утворює з діагоналлю кут 60°. Обчисліть довжини діагоналей прямокутника.
3. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. Обчисліть периметр трикутника AOB, якщо $\angle CAD = 30°$, $AC = 12$ см.
4. Через точку O перетину діагоналей прямокутника $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторону AB у точці M, а сторону CD — у точці K. Доведіть, що $AM = CK$.
5. Точка M — середина сторони AD прямокутника $ABCD$. На сторонах AB і CD цього прямокутника позначено відповідно точки K і H так, що $BK = CH$. Доведіть, що $KM = MH$.
6. Діагональ ромба довжиною 10 см проведена з вершини кута, що дорівнює 120°. Обчисліть периметр ромба.
7. У ромбі одна з діагоналей дорівнює стороні. Обчисліть градусні міри:
   1) кутів ромба;
   2) кутів, які утворюють діагоналі з його сторонами.
8. Кути, утворені діагоналями ромба з однією із його сторін, відносяться як 4 : 5. Обчисліть градусні міри кутів ромба.
9. У ромбі $ABCD$ кут A — гострий, кут між діагоналлю BD і висотою, проведеною з вершини B, дорівнює 40°. Обчисліть градусні міри кутів ромба.
10. $ABCD$ — ромб. Під яким кутом перетинаються бісектриси кутів BAC і BDC?
11. У паралелограмі $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинають сторони BC і AD у точках E і F відповідно. Доведіть, що $ABEF$ — ромб.
12. У прямокутнику $ABCD$ бісектриси кутів A і B перетинають сторони BC і AD у точках M і K відповідно. Доведіть, що $ABMK$ — квадрат.
13. Доведіть, що паралелограм, у якому висоти, проведені з вершини тупого кута, рівні, є ромбом.
14. Відстань від точки перетину діагоналей квадрата до однієї з його сторін дорівнює 5 см. Обчисліть периметр квадрата.
15. У рівнобедрений прямокутний трикутник уписано квадрат, який має з ним спільний кут. Обчисліть периметр квадрата, якщо кожен катет трикутника дорівнює 4 см.
16. У рівнобедрений прямокутний трикутник уписано квадрат так, що дві його вершини належать гіпотенузі, а решта дві — катетам. Обчисліть довжину сторони квадрата, якщо гіпотенуза дорівнює 6 см.
17. Доведіть, що прямокутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні, є квадратом.
18. У прямокутному трикутнику проведено бісектрису прямого кута. Через точку перетину цієї бісектриси з гіпотенузою проведено прямі, паралельні катетам. Доведіть, що отриманий чотирикутник — квадрат.
19. Сторона квадратної деталі дорівнює 60 мм. Якою має бути довжина листа сталі, щоб з нього можна було виготовити 50 деталей? Ширина листа дорівнює 300 мм.

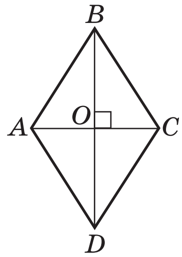
➢ ***Картки-підказки для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

Картка 1

Прямокутник		
Означення	**Зображення**	**Властивості**
Прямокутником називають паралелограм, усі кути якого прямі	 $ABCD$ — прямокутник	1) Діагоналі точкою перетину діляться навпіл: $AO = OC$, $BO = OD$; 2) протилежні сторони рівні: $AB = CD$, $BC = AD$; 3) діагоналі рівні: $AC = BD$

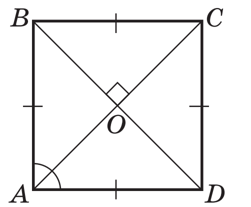
Картка 2

Ромб

Означення	Зображення	Властивості
Ромбом називають паралелограм, усі сторони якого рівні	 $ABCD$ — ромб	1) Діагоналі точкою перетину діляться навпіл: $AO = OC$, $BO = OD$; 2) протилежні кути рівні: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$; 3) діагоналі перпендикулярні: $AC \perp BD$; 4) діагоналі ділять кути навпіл

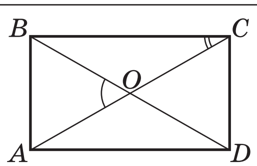
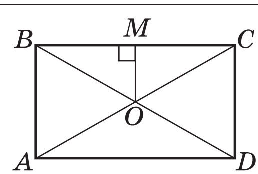
Картка 3

Квадрат

Означення	Зображення	Властивості
Квадратом називають прямокутник, усі сторони якого рівні	 $ABCD$ — квадрат	1) Діагоналі точкою перетину діляться навпіл: $AO = OC$, $BO = OD$; 2) діагоналі рівні: $AC = BD$; 3) діагоналі перпендикулярні: $AC \perp BD$; 4) діагоналі ділять кути навпіл

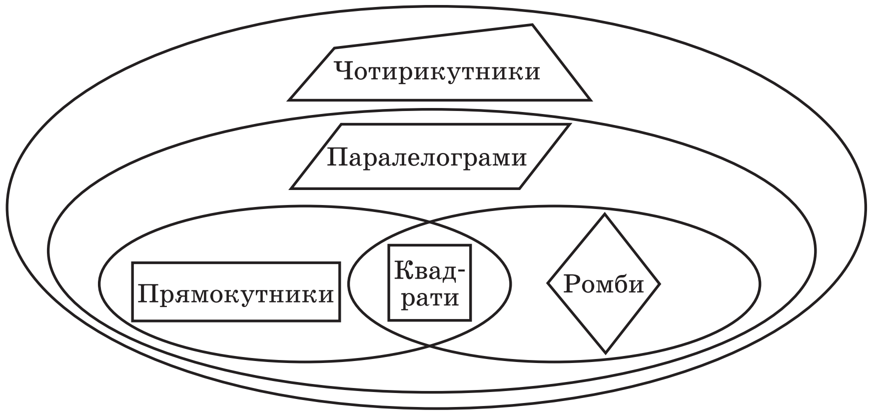
Картка 4

Деякі корисні властивості прямокутника

Означення	Зображення
 Якщо $ABCD$ — прямокутник, $AD > CD$, AC і BD — діагоналі, O — точка їхнього перетину, то $\angle AOB = 2\angle ACB$	 Якщо $ABCD$ — прямокутник, точка M — середина BC, то $OM \perp BC$, $OM = \frac{1}{2}AB$

Картка 5

Співвідношення між різними видами чотирикутників



➤ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

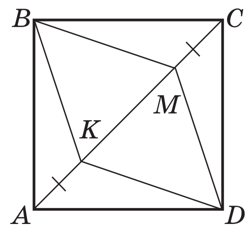
1. У прямокутнику $ABCD$ точки M і K — середини сторін AB і AD відповідно. На прямій AC позначено точку P, на прямій BD — точку F, $MP \perp AC$, $KF \perp BD$. Відомо, що $4KF = AD$. Обчисліть відношення $AP : PC$.

   Відповідь. $1:7$.

2. Точка M лежить на стороні AD прямокутника $ABCD$ так, що $AM = MC$, $MD = CD$. Обчисліть градусну міру меншого кута між діагоналями прямокутника.
   Відповідь. 45°.

3. У ромбі $ABCD$ бісектриса кута BAC перетинає сторону BC у точці M. Обчисліть кути ромба, якщо $\angle AMC = 120°$.
   Відповідь. $\angle A = 80°$, $\angle B = 100°$.

4. На діагоналі AC квадрата $ABCD$ позначено точки K і M так, що $AK = CM$ (*див. рисунок*). Доведіть, що $BMDK$ — ромб.



ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➤ ***Робота на картках із друкованою основою***

Варіант 1

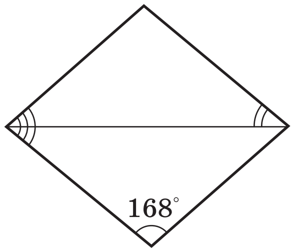
1. У паралелограмі $ABCD$ O — точка перетину діагоналей. Якщо за зазначеної умови $ABCD$ є прямокутником, постав у віконці літеру П, ромбом — Р, квадратом — К.

☐ ΔAOB — прямокутний нерівнобедрений;

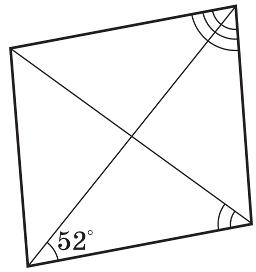
☐ ΔAOB — рівнобедрений непрямокутний;

☐ ΔAOB — прямокутний рівнобедрений

2. На рисунках ромбів напиши величини кутів, позначених двома та трьома рисками.



1)



2)

Варіант 2

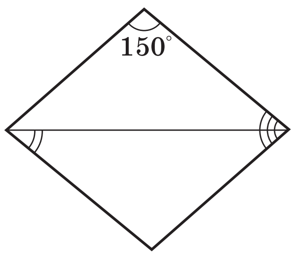
1. *ABCD* — паралелограм. Якщо за зазначеної умови *ABCD* є прямокутником, постав у віконці літеру П, ромбом — Р, квадратом — К.

☐ ΔABD — рівнобедрений непрямокутний;

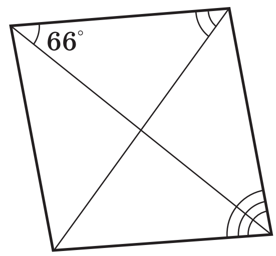
☐ ΔABD — прямокутний рівнобедрений;

☐ ΔABD — прямокутний нерівнобедрений.

2. На рисунках ромбів напиши величини кутів, позначених двома та трьома рисками.



1)



2)

➢ ***Дидактична гра «Прямокутник, ромб, квадрат»***

Учитель / учителька об’єднує учнів /учениць у три команди: «Прямокутник», «Ромб» і «Квадрат». Назви команд є відповідями на запитання, які ставитиме педагог. Для відповіді на перше запитання до дошки виходять по одному гравцю з кожної команди. Вони шикуються в одну лінію. Учитель / учителька ставить запитання. Представники команд, назви яких відповідають правильним відповідям на запитання, роблять один крок уперед, решта залишається стояти на місці. Команди, які дали правильні відповіді, отримують по одному балу. Потім до дошки виходять наступні представники команд, і гра триває. Перемагає команда, яка набере найбільшу кількість балів.

Приклади запитань

1. У якому чотирикутнику всі сторони рівні?
2. Діагоналі якого чотирикутника точкою перетину діляться навпіл?
3. Діагоналі якого чотирикутника перпендикулярні?
4. У якому чотирикутнику всі кути рівні?
5. Діагоналі якого чотирикутника рівні?
6. Діагоналі якого чотирикутника є бісектрисами його кутів?
7. У якому чотирикутнику протилежні сторони рівні?
8. У якому чотирикутнику протилежні кути рівні?

➢ ***Тестові завдання з подальшою взаємоперевіркою і взаємооцінюванням***

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Периметр якого з наведених чотирикутників у 4 рази більший, ніж його сторона?

А	Б	В	Г
прямокутника	паралелограма	ромба	будь-якого з наведених

2. Діагоналі якого з наведених чотирикутників взаємно перпендикулярні?

А	Б	В	Г
прямокутника	паралелограма	квадрата	будь-якого з наведених

3. У якого з наведених чотирикутників усі кути прямі?

А	Б	В	Г
у прямокутника	у ромба	у паралелограма	у будь-якого з наведених

4. У якого з наведених чотирикутників рівні тільки протилежні сторони?

А	Б	В	Г
у паралелограма	у ромба	у квадрата	у будь-якого з наведених

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Сторона якого з наведених чотирикутників у 4 рази менша, ніж його периметр?

А	Б	В	Г
паралелограма	квадрата	прямокутника	у будь-якого з наведених

2. Діагоналі якого з наведених чотирикутників є бісектрисами його кутів?

А	Б	В	Г
паралелограма	прямокутника	ромба	у будь-якого з наведених

3. У якого з наведених чотирикутників усі кути рівні?

А	Б	В	Г
у паралелограма	у ромба	у квадрата	у будь-якого з наведених

4. У якого з наведених чотирикутників рівні діагоналі?

А	Б	В	Г
у прямокутника	у ромба	у паралелограма	у будь-якого з наведених

Відповіді. Варіант 1. 1. В. 2. В. 3. А. 4. А. Варіант 2. 1. Б. 2. В. 3. В. 4. А.

➤ ***Тестові завдання***

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$, $\angle AOB = 40°$. Чому дорівнює $\angle OAD$?

А	Б	В	Г
$20°$	$70°$	$140°$	$90°$

2. У паралелограмі $ABCD$ $\angle A = 90°$, $BD = 10$ см. Чому дорівнює довжина AC?

А	Б	В	Г
5 см	20 см	10 см	визначити неможливо

3. У паралелограмі $ABCD$ $AC = BD = 12$ см, $\angle DAC = 60°$. Чому дорівнює довжина AD?

А	Б	В	Г
12 см	6 см	24 см	визначити неможливо

4. Діагональ ромба утворює з його стороною кут $36°$. Чому дорівнює градусна міра більшого кута ромба?

А	Б	В	Г
$108°$	$72°$	$144°$	$54°$

5. Діагоналі паралелограма $ABCD$ є бісектрисами його кутів, O — точка перетину діагоналей. Яка з наведених рівностей правильна?

А	Б	В	Г
$\angle AOB = 100°$	$\angle AOB = 50°$	$\angle AOB = 140°$	$\angle AOB = 90°$

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. O — точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$, $\angle AOD = 150°$. Чому дорівнює $\angle ABO$?

А	Б	В	Г
$45°$	$15°$	$90°$	$75°$

2. У паралелограмі $ABCD$ $\angle B = 90°$, $AC = 12$ см. Чому дорівнює довжина BD?

А	Б	В	Г
12 см	6 см	24 см	визначити неможливо

3. У паралелограмі $ABCD$ $AC = BD = 18$ см, $\angle DBC = 60°$. Чому дорівнює довжина BC?

А	Б	В	Г
18 см	9 см	24 см	визначити неможливо

4. Діагональ ромба утворює з його стороною кут 54°. Чому дорівнює градусна міра меншого кута ромба?

А	Б	В	Г
36°	27°	72°	108°

5. Діагоналі паралелограма $ABCD$ перетинаються в точці O, $\angle AOB = 90^\circ$. Яка з наведених рівностей неправильна?

А	Б	В	Г
$\angle BAC = \angle CAD$	$\angle ABD = \angle DBC$	$\angle BCA = \angle ACD$	$\angle ABC = \angle DBA$

Відповіді. Варіант 1. 1. А. 2. В. 3. Б. 4. А. 5. Г. Варіант 2. 1. Б. 2. А. 3. Б. 4. В. 5. Г.

➢ *Робота в парах*

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. Доведіть, що якщо діагоналі прямокутника ділять його кути навпіл, то цей прямокутник є квадратом.
2. Відрізок, що сполучає середини протилежних сторін квадрата, дорівнює 5 см. Обчисліть периметр квадрата.

Варіант 2

1. Доведіть, що паралелограм, дві сусідні сторони якого утворюють з діагоналлю рівні кути, є ромбом.
2. Периметр квадрата дорівнює 36 см. Чому дорівнює відстань від точки перетину діагоналей квадрата до його сторін?

➢ *Робота в групах*

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Обчисліть периметр прямокутника $ABCD$, якщо бісектриса кута A ділить сторону:

1) BC на відрізки 45 см і 7 см; 2) DC на відрізки 3 см і 5 см.

Задача 2

Доведіть, що якщо в паралелограмі дві сусідні сторони рівні, то цей паралелограм — ромб.

Задача 3

Доведіть, що якщо в чотирикутнику всі сторони рівні, то цей чотирикутник — ромб.

➢ *Індивідуальні завдання*

1. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає його сторону BC у точці K, $BK = 4$ см, $KC = 8$ см. Обчисліть периметр прямокутника.
2. Бісектриса кута D прямокутника $ABCD$ перетинає його сторону AB у точці M, $BM : MA = 5 : 3$. Чому дорівнюють сторони прямокутника, якщо його периметр дорівнює 66 см?

3. У прямокутнику $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O. M — середина сторони AB, $\angle BAC = 50°$. Обчисліть градусну міру кута MOD.

4. У прямокутнику $ABCD$ O — точка перетину діагоналей, BM — висота трикутника ABO, $\angle BOM = 60°$, $AM = 7$ см. Обчисліть довжину відрізка BD.

Відповіді. 1. 32 см. 2. 24 см і 9 см. 3. 140°. 4. 28 см.

➢ *Завдання на встановлення відповідності*

Варіант 1

Установіть відповідність між кутом (1–3) та його градусною мірою (А–Г).

1	Гострий кут між діагоналями прямокутника, якщо його діагональ утворює з більшою стороною кут 32°	**А**	40°
2	Гострий кут ромба, якщо його діагональ утворює зі стороною кут 16°	**Б**	16°
3	Гострий кут ромба, якщо його кути відносяться як $2:7$	**В**	64°
		Г	32°

Варіант 2

Установіть відповідність між кутом (1–3) та його градусною мірою (А–Г).

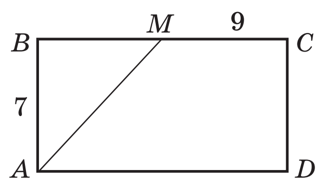
1	Тупий кут ромба, якщо його діагональ утворює зі стороною кут 60°	**А**	110°
2	Тупий кут ромба, якщо його кути відносяться як $1:8$	**Б**	140°
3	Тупий кут між діагоналями прямокутника, якщо його діагональ утворює з меншою стороною кут 70°	**В**	160°
		Г	120°

Відповіді. Варіант 1. 1 — В. 2 — Г. 3 — А. Варіант 2. 1 — Г. 2 — В. 3 — Б.

➢ *Самостійна робота з подальшою самоперевіркою і самооцінюванням*

1. У паралелограмі $ABCD$ кут A — прямий, $AB = 7$ см, $AC = 12$ см. Обчисліть периметр трикутника AMB, де M — точка перетину діагоналей паралелограма.

2. На рисунку зображено прямокутник $ABCD$. Скориставшись даними, наведеними на рисунку, обчисліть периметр прямокутника, якщо AM — бісектриса кута A.



3. У паралелограмі $ABCD$ $AC \perp BD$, $\angle BAD = 72°$. Обчисліть градусну міру кута ADB.

4. На діагоналі BD квадрата $ABCD$ позначено точку M так, що $\angle MAD = 30°$. Обчисліть градусні міри кутів трикутника AOM, де O — точка перетину діагоналей квадрата.

Відповіді. 1. 19 см. 2. 46 см. 3. 54°. 4. $\angle OAM = 15°$, $\angle AOM = 90°$, $\angle AMO = 75°$.

ТРАПЕЦІЯ

Очікувані результати: учні мають уміти розпізнавати на рисунках трапеції з-поміж інших чотирикутників; співвідносити реальні об'єкти навколишнього середовища з моделями трапецій; зображувати й позначати трапеції; називати елементи трапеції; пояснювати, що таке висота трапеції, яку трапецію називають рівнобічною, а яку — прямокутною; застосовувати властивості трапецій під час розв'язування задач.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може поставити учням / ученицям запитання:

— Яку фігуру називають чотирикутником?

— Яку додаткову умову слід знати, щоб стверджувати, що заданий чотирикутник є паралелограмом?

— Чи правильно, що будь-який чотирикутник є паралелограмом?

— Чи є паралелограмом чотирикутник, якщо тільки дві протилежні його сторони паралельні? Виконайте зображення такого чотирикутника.

Відповідаючи на запитання, восьмикласники мають дійти висновку, що, окрім паралелограмів (які мають дві пари паралельних сторін), існують чотирикутники, у яких лише одна пара паралельних сторін.

Отже, є новий геометричний об'єкт, окремий вид чотирикутника, що має назву *трапеція*.

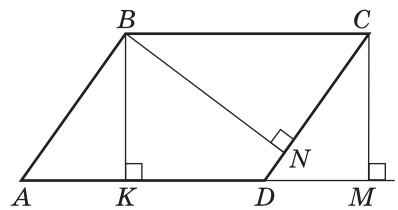
— На найближчих уроках ми дізнаємося, що називають трапецією, які існують види трапецій, які властивості мають трапеції, навчимося розв'язувати задачі із застосуванням означення трапеції, властивостей окремих видів трапецій.

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➢ ***Завдання за рисунком***

На рисунку зображено паралелограм $ABCD$.

Скориставшись рисунком, назвіть:

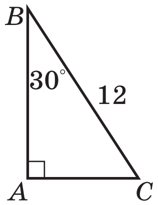


1) протилежні сторони паралелограма;
2) протилежні кути паралелограма;
3) висоти паралелограма;
4) кути паралелограма, сума яких дорівнює 180°;
5) усі паралельні прямі, зображені на рисунку;
6) чотирикутники, зображені на рисунку (крім паралелограма $ABCD$);
7) висоти прямокутника $BCMK$.

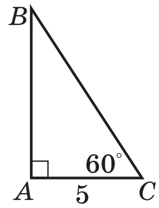
➢ ***Фронтальне опитування***

1. Сформулюйте означення рівнобедреного трикутника.
2. Як називають сторони й кути рівнобедреного трикутника?
3. Яку властивість мають кути при основі рівнобедреного трикутника?
4. Сформулюйте означення прямокутного трикутника.
5. Як називають сторони прямокутного трикутника?
6. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.

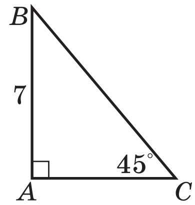
➢ ***Завдання за рисунками***

1) 

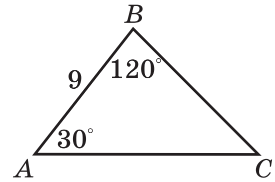
$AC = ?$

2) 

$BC = ?$

3) 

$AC = ?$

4) 

$AC = ?$

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Означення трапеції та її елементів.
   ! Трапецією називають чотирикутник, дві протилежні сторони якого паралельні, а решта дві — не паралельні.
   ! Паралельні сторони трапеції називають її основами.
   ! Непаралельні сторони трапеції називають її бічними сторонами.
   ! Висотою трапеції називають перпендикуляр, проведений з точки однієї основи до прямої, яка містить іншу сторону.

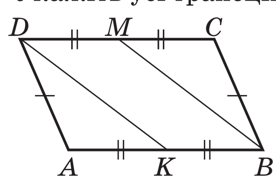
2. Окремі види трапеції.
   ! Прямокутною трапецією називають трапецію, одна з бічних сторін якої перпендикулярна до основ.
   ! Рівнобічною трапецією називають трапецію, бічні сторони якої рівні.

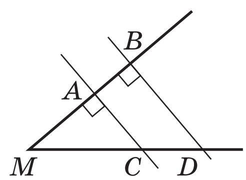
3. Властивості рівнобічної трапеції.
   У рівнобічній трапеції:
   - кути при кожній основі рівні;
   - діагоналі рівні;
   - висота, проведена з вершини тупого кута, ділить основу трапеції на два відрізки, менший з яких дорівнює пів різниці основ, а більший — пів сумі основ.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

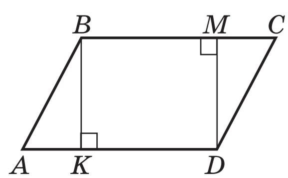
➢ ***Усні вправи***

1. Укажіть усі трапеції, що зображено на рисунку. Назвіть їхні основи й бічні сторони.

1) 

2) 

2. На рисунку зображено паралелограм $ABCD$. Які ще чотирикутники зображено на рисунку? Чи є з-поміж них паралелограми, трапеції?



3. Обчисліть градусні міри невідомих кутів трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, якщо $\angle A = 40°$, $\angle D = 50°$.

4. Обчисліть градусні міри невідомих кутів рівнобічної трапеції, один з яких дорівнює 55°.

5. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини гострого кута, утворює з бічною стороною кут 24°. Обчисліть градусні міри кутів трапеції.

6. Чому дорівнюють градусні міри невідомих кутів прямокутної трапеції, якщо найбільший її кут дорівнює 130°?

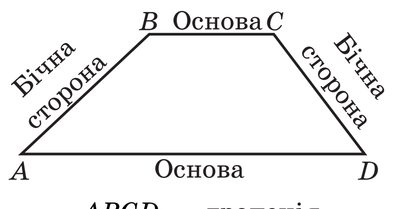
7. Гострий кут прямокутної трапеції удвічі менший від тупого кута. Чому дорівнюють градусні міри кутів трапеції?
8. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 43 см, а основи — 11 см і 14 см. Чому дорівнюють бічні сторони трапеції?

➢ *Письмові вправи*

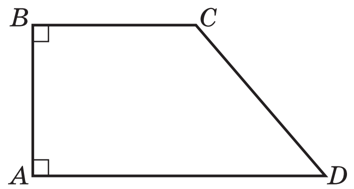
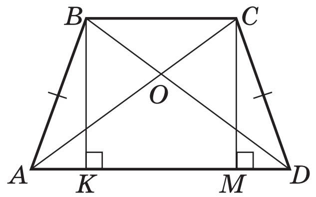
1. Обчисліть градусні міри кутів:
   1) рівнобічної трапеції, якщо різниця двох її протилежних кутів дорівнює 80°;
   2) прямокутної трапеції, якщо її діагональ є бісектрисою тупого кута й утворює з меншою бічною стороною кут 35°.
2. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює бічній стороні, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін. Обчисліть градусні міри кутів трапеції.
3. У трапеції $ABCD$ O — точка перетину діагоналей. Відрізки OA і OD рівні. Доведіть, що $AB = CD$.
4. Один з гострих кутів рівнобічної трапеції дорівнює 60°. Чому дорівнюють основи трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 12 см, а периметр — 58 см?
5. Периметр трапеції $DFMN$ $(FM \parallel DN)$ дорівнює 46 см, а менша основа FM — 12 см. Через вершину F проведено пряму, паралельну MN. Обчисліть периметр утвореного трикутника.
6. У трапеції $ABCD$ BC — менша основа. На відрізку AD позначено точку M так, що $BM \parallel CD$, $\angle ABM = 70^\circ$, $\angle BMA = 50^\circ$. Обчисліть градусні міри кутів трапеції.
7. У прямокутній трапеції гострий кут дорівнює 60°. Більша бічна сторона й більша основа дорівнюють по 20 см. Обчисліть довжину меншої основи.
8. У рівнобічній трапеції більша основа удвічі більша за меншу. Середина більшої основи віддалена від вершини тупого кута на відстань, що дорівнює меншій основі. Обчисліть градусні міри кутів трапеції.
9. У прямокутній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони, гострий кут дорівнює 45°. Чому дорівнює відношення основ трапеції?
10. Діагоналі рівнобічної трапеції є взаємно перпендикулярними. Висота трапеції дорівнює 8 см. Обчисліть периметр трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 12 см.
11. Діагональ прямокутної трапеції є бісектрисою тупого кута. Основи трапеції дорівнюють 18 см і 12 см. Обчисліть периметр трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 30°.
12. З вершини тупого кута рівнобічної трапеції $ABCD$ проведено перпендикуляр CM до прямої AD, що містить більшу основу. Доведіть, що $AM = \frac{1}{2}(AD + BC)$.

➢ *Картки-підказки для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань*

Картка 1

Трапеція	
 $ABCD$ — трапеція	**Означення.** Трапецією називають чотирикутник, дві сторони якого паралельні, а решта дві — не паралельні. **Властивість.** Сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°: $\angle A + \angle B = \angle C + \angle D = 180^\circ$

Картка 2

<table>
<tr><th colspan="2">Окремі види трапеції</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">ПРЯМОКУТНА ТРАПЕЦІЯ</td></tr>
<tr><td>
$ABCD$ — прямокутна трапеція</td><td>Означення. Прямокутною називають трапецію, одна з бічних сторін якої перпендикулярна до основ.
$\angle A = \angle B = 90°$.
Властивість. Сторона AB водночас є висотою трапеції</td></tr>
<tr><td colspan="2">РІВНОБІЧНА ТРАПЕЦІЯ</td></tr>
<tr><td>
$ABCD$ — рівнобічна трапеція ($AB = CD$)</td><td>Означення. Рівнобічною називають трапецію, бічні сторони якої рівні.
Властивості
1) Кути при основі рівні: $\angle A = \angle D$; $\angle B = \angle C$.
2) Діагоналі рівні: $AC = BD$.
3) $AK = DM = \dfrac{AD - BC}{2}$.
4) Якщо $AC \perp BD$, то висота $BK = \dfrac{BC + AD}{2}$</td></tr>
</table>

➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. У прямокутній трапеції діагоналі взаємно перпендикулярні. Кут між більшою діагоналлю і меншою бічною стороною дорівнює 60°. Доведіть, що менша діагональ дорівнює пів сумі довжин основ.

2. Три сторони трапеції рівні між собою, діагональ дорівнює одній з основ. Обчисліть градусні міри кутів трапеції.
   Відповідь. 72°, 72°, 108°, 108°.

3. У трапеції $ABCD$ основи AD і BC відповідно дорівнюють 15 см і 5 см, $\angle CDA = 60°$. Через вершину B і середину CD — точку O проведено пряму до перетину з продовженням AD у точці E. $\angle ABE = 90°$, $\angle CBE = 30°$. Обчисліть периметр трапеції.
   Відповідь. 40 см.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➢ ***Бліцопитування «Чи можуть..?», «Чи завжди..?»***

1. Чи можуть основи трапеції дорівнювати одна одній?
2. Чи можуть сусідні кути трапеції бути рівними?
3. Чи можуть протилежні кути трапеції бути рівними?
4. Чи завжди кути трапеції, прилеглі до більшої основи, є гострими?
5. Чи може рівнобічна трапеція бути прямокутною?
6. Чи може висота трапеції бути більшою за бічну сторону?
7. Чи може висота трапеції дорівнювати бічній стороні?
8. Чи завжди в трапеції протилежними кутами є гострий і тупий?
9. Чи можуть три кути трапеції бути прямими?

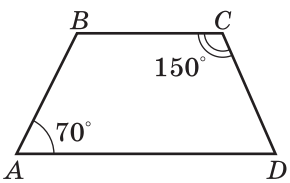
➢ *Математичний диктант*

Чи правильне твердження? (Напишіть лише номер твердження і відповідь: так / ні.)

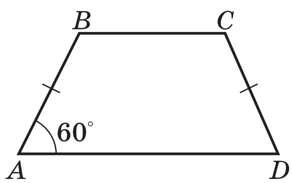
1. Трапеція — це чотирикутник, тільки дві протилежні сторони якого паралельні.
2. Паралельні сторони трапеції називають бічними сторонами.
3. Непаралельні сторони трапеції називають бічними сторонами.
4. Сума кутів, прилеглих до основи трапеції, дорівнює 180°.
5. Висотою трапеції називають перпендикуляр, проведений з будь-якої точки прямої, що містить одну з основ, на пряму, що містить другу основу.
6. У кожній трапеції можна провести безліч висот.
7. Трапецію, основи якої рівні, називають рівнобічною.
8. У рівнобічній трапеції кути при основі рівні.
9. Існує трапеція, сторона якої є висотою.
10. Існує трапеція, протилежні кути якої є рівними.
11. Не існує трапеції, у якій прямим є тільки один кут.
12. Кути трапеції, узяті послідовно, можуть відноситись як $7:2:5:4$.

➢ *Завдання за рисунками*

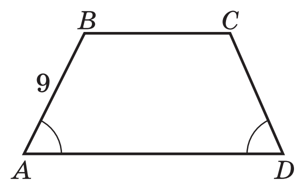
$ABCD$ — трапеція.

1) 

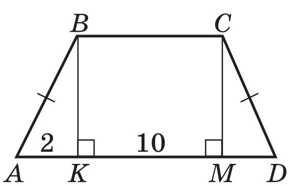
$\angle B = ?$ $\angle D = ?$

2) 

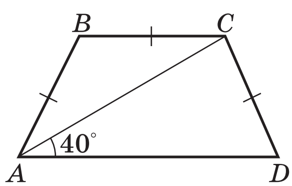
$\angle B = ?$ $\angle C = ?$ $\angle D = ?$

3) 

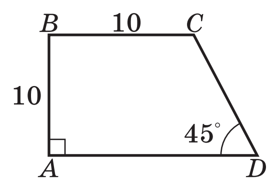
$CD = ?$

4) 

$AD = ?$ $BC = ?$

5) 

$\angle A = ?$ $\angle B = ?$
$\angle C = ?$ $\angle D = ?$

6) 

$AD = ?$

➢ *Дидактична гра «Найточніша відповідь»*

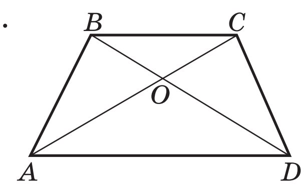
Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у декілька команд (залежно від їхньої кількості). Кожна команда отримує завдання, на виконання якого є декілька секунд. Після цього команди дають відповіді. Перемагає команда, яка дасть точну або найближчу до точної відповідь.

Приклад завдання

На рисунку зображено рівнобічну трапецію $ABCD$, AC і BD — її діагоналі. Назвіть:

1) кількість пар рівних відрізків, зображених на рисунку;

2) кількість пар рівних кутів, зображених на рисунку.



Відповідь. 1) Чотири пари; 2) десять пар.

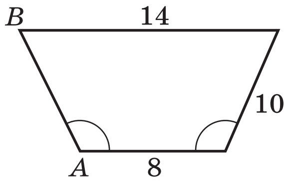
➤ ***Робота на картках із друкованою основою***

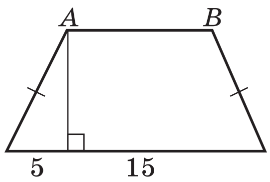
Варіант 1

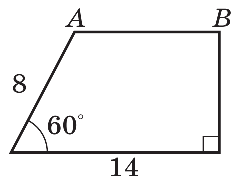
1. Визначте вид трапеції $BKMC$ $(BC \parallel KM)$. Якщо за зазначеної умови трапеція $BKMC$ рівнобічна, напишіть у віконці літеру Р, прямокутна — літеру П, неможливо визначити — залиште віконце порожнім.

☐ $\angle B = \angle K$ ☐ $BM = KC$ ☐ $KB = BC$ ☐ $\angle K = \angle M$

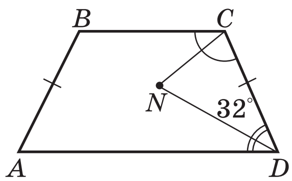
2. Скориставшись зображенням трапеції, обчисліть і напишіть на рисунку довжину відрізка AB.

1) 

2) 

3) 

3. На рисунку зображено трапецію $ABCD$, у якій $AB = CD$, $\angle CDN = 32°$, DN і CN бісектриси кутів D і C. Скориставшись рисунком, заповніть таблицю.



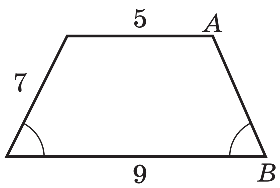
$\angle BAD$	$\angle BCN$	$\angle CND$

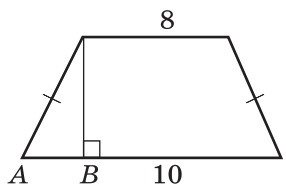
Варіант 2

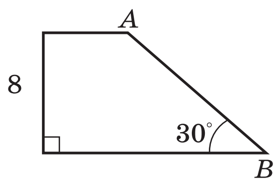
1. Визначте вид трапеції $CFML$ $(FM \parallel CL)$. Якщо за зазначеної умови трапеція $CFML$ рівнобічна, напишіть у віконці літеру Р, прямокутна — літеру П, неможливо визначити — залиште віконце порожнім.

☐ $\angle M + \angle L = 180°$ ☐ $FC = ML$ ☐ $ML \perp CL$ ☐ $\angle C = \angle L$

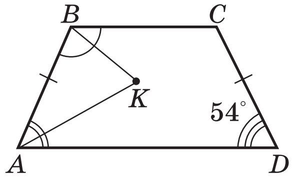
2. Скориставшись зображенням трапеції, обчисліть і напишіть на рисунку довжину відрізка AB.

1) 

2) 

3) 

3. На рисунку зображено трапецію $ABCD$, у якій $AB = CD$, $\angle CDA = 54°$, AK і BK бісектриси кутів A і B. Скориставшись рисунком, заповніть таблицю.



$\angle BAK$	$\angle CBK$	$\angle BKA$

➢ *Тестові завдання*

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

Варіант 1

1. Чому дорівнює бічна сторона рівнобічної трапеції, якщо її периметр дорівнює 48 см, а основи — 19 см і 13 см?

А	Б	В	Г
8 см	14,5 см	16 см	17,5 см

2. Чому дорівнює бічна сторона рівнобічної трапеції, якщо її основи дорівнюють 6 см і 17 см, а діагональ є бісектрисою гострого кута?

А	Б	В	Г
17 см	11,5 см	6 см	5,5 см

3. Чому дорівнює градусна міра тупого кута рівнобічної трапеції, якщо величини протилежних кутів відносяться як 5:7?

А	Б	В	Г
135°	75°	150°	105°

4. У прямокутній трапеції градусна міра тупого кута більша за градусну міру гострого на 40°. Чому дорівнює градусна міра гострого кута трапеції?

А	Б	В	Г
25°	70°	35°	50°

Варіант 2

1. Чому дорівнює бічна сторона рівнобічної трапеції, якщо її периметр дорівнює 48 см, а основи — 11 см і 17 см?

А	Б	В	Г
20 см	18,5 см	10 см	8 см

2. Чому дорівнює бічна сторона рівнобічної трапеції, якщо її основи дорівнюють 6 см і 17 см, а діагональ є бісектрисою тупого кута?

А	Б	В	Г
6 см	11 см	11,5 см	17 см

3. Чому дорівнює градусна міра гострого кута рівнобічної трапеції, якщо різниця її протилежних кутів дорівнює 40°?

А	Б	В	Г
40°	70°	60°	50°

4. У прямокутній трапеції градусна міра тупого кута більша за градусну міру гострого в 4 рази. Чому дорівнює градусна міра тупого кута трапеції?

А	Б	В	Г
144°	135°	72°	120°

Відповіді

Варіант 1. 1. А. 2. В. 3. Г. 4. Б.

Варіант 2. 1. В. 2. Г. 3. Б. 4. А.

➢ *Робота в парах*

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. Кут при основі рівнобічної трапеції дорівнює 60°. Пряма, яка проходить через вершину тупого кута й паралельна бічній стороні, ділить більшу основу на відрізки 5 см і 4 см. Обчисліть периметр трапеції. Скільки розв'язків має задача?

2. У трапеції $ABCD$ $AC \perp CD$, $BD \perp AB$, $\angle ACB = \angle CBD$. Доведіть, що трапеція $ABCD$ рівнобічна.

Варіант 2

1. Кут при основі рівнобічної трапеції дорівнює 120°. Пряма, яка проходить через вершину тупого кута й паралельна бічній стороні, ділить більшу основу на відрізки 7 см і 5 см. Обчисліть периметр трапеції. Скільки розв'язків має задача?

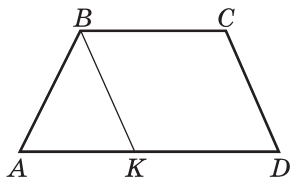
2. У трапеції $ABCD$ $\angle ACB = \angle CBD$, $\angle BAC = \angle CDB$. Доведіть, що трапеція рівнобічна.

➢ *Робота в групах*

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

У трапеції $ABCD$ через вершину B проведено пряму BK, паралельну стороні CD (*див. рисунок*).



1) Доведіть, що $KBCD$ — паралелограм.
2) Обчисліть периметр трапеції, якщо $BC = 4$ см, $P_{ABK} = 11$ см.

Задача 2

Діагональ рівнобедреної трапеції ділить навпіл її гострий кут, що дорівнює 60°. Обчисліть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 15 см.

Задача 3

Градусна міра одного з гострих кутів рівнобічної трапеції дорівнює 60°, а довжина бічної сторони — 16 см. Обчисліть довжини основ трапеції, якщо їхня сума дорівнює 38 см.

Задача 4

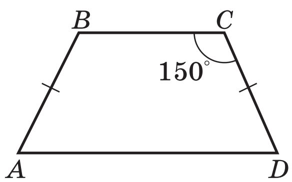
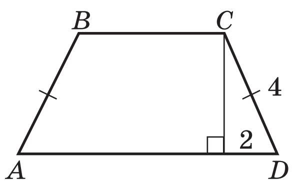
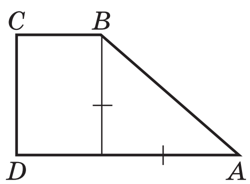
Основи прямокутної трапеції дорівнюють a і b, один з кутів дорівнює α. Обчисліть довжину:

1) більшої бічної сторони трапеції, якщо $a = 4$ см, $b = 7$ см, $\alpha = 60°$;
2) меншої бічної сторони трапеції, якщо $a = 10$ см, $b = 15$ см, $\alpha = 45°$.

➢ *Завдання на встановлення відповідності*

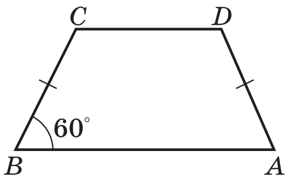
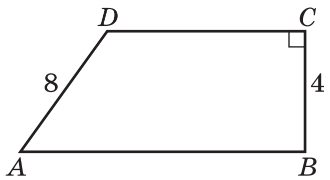
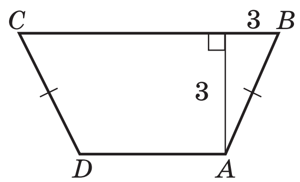
Варіант 1

Установіть відповідність між зображенням трапеції $ABCD$ (1–3) та градусною мірою кута A (А–Г).

<table>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>А</td><td>45°</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>Б</td><td>30°</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>В</td><td>$50^{\circ}\,^{\circ}$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Г</td><td>60°</td></tr>
</table>

Варіант 2

Установіть відповідність між зображенням трапеції $ABCD$ (1–3) та градусною мірою кута D (А–Г).

<table>
<tr><td>1</td><td>
</td><td>А</td><td>150°</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td><td>Б</td><td>135°</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td><td>В</td><td>120°</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Г</td><td>140°</td></tr>
</table>

Відповіді. Варіант 1. 1 — Б. 2 — Г. 3 — А. Варіант 2. 1 — В. 2 — А. 3 — Б.

➢ *Самостійна робота*

Варіант 1

1. У трапеції $ABCD$ AD — більша основа. Прямі AB і CD перетинаються в точці M, $\angle BMC = 80°$, $\angle MBC = 40°$. Обчисліть градусні міри кутів трапеції.
2. У трапеції $ABCD$ $AC = BD$, два кути відносяться як $5:4$. Обчисліть градусні міри кутів трапеції.
3. Більша основа прямокутної трапеції дорівнює 10 см, менша основа й менша бічна сторона — по 5 см. Обчисліть градусні міри кутів трапеції.
4. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 10 см і 16 см, а її діагоналі є взаємно перпендикулярними. Чому дорівнює висота трапеції?
5. Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу трапеції на відрізки завдовжки 3 см і 11 см. Обчисліть периметр трапеції, якщо градусна міра її гострого кута дорівнює 60°.

Варіант 2

1. Через сторони AB і BC трикутника ABC проведено пряму $MK \parallel AC$, $\angle BMK = 70°$, $\angle MBK = 80°$. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника $AMKC$.
2. У трапеції $MNKP$ $MK = NP$, два кути відносяться як $2:3$. Обчисліть градусні міри кутів трапеції.
3. Менша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 6 см, а більша — 12 см. Обчисліть градусні міри кутів трапеції.
4. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 6 см і 20 см, а її діагоналі є взаємно перпендикулярними. Чому дорівнює довжина відрізка, який сполучає середини основ трапеції?

5. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 5 см. Висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки, один з яких дорівнює 2 см. Обчисліть периметр трапеції, якщо градусна міра її тупого кута дорівнює 120°.

Відповіді. Варіант 1. 1. $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 140^\circ$, $\angle C = 120^\circ$, $\angle D = 60^\circ$. 2. $80^\circ, 100^\circ, 80^\circ, 100^\circ$. 3. $90^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 45^\circ$. 4. 13 см. 5. 34 см. Варіант 2. 1. $\angle A = 70^\circ$, $\angle M = 110^\circ$, $\angle K = 150^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. 2. $72^\circ, 108^\circ, 72^\circ, 108^\circ$. 3. $90^\circ, 90^\circ, 150^\circ, 30^\circ$. 4. 13 см. 5. 22 см.

Додатковий матеріал

ДЕЯКІ ЦІКАВІ ФАКТИ ПРО ТРАПЕЦІЮ

ПОХОДЖЕННЯ ТЕРМІНІВ

Термін *трапеція* походить від грецького *трапезос* — маленький столик (порівняйте зі словом *трапеза*).

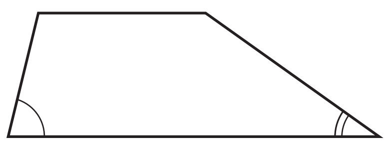
У «Началах» Евкліда трапецією називали всі чотирикутники, крім квадрата, ромба й прямокутника. У сучасному змісті найпершим цей термін застосував давньогрецький математик Посідоній (бл. 135 р. до н. е. — 51 р. до н. е.).

ВИДИ ТРАПЕЦІЙ

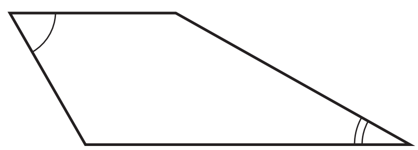
Крім прямокутної, іноді розрізняють гострі й тупі трапеції.

Гострою називають трапецію, у якій кути, прилеглі до більшої основи, є гострими.

Тупою називають трапецію, у якій один з кутів, прилеглих до більшої основи, є тупим.



Гостра трапеція



Тупа трапеція

ФОРМУЛА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ВИСОТИ ТРАПЕЦІЇ

$h = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{c^2 - d^2}{b - a} + b - a\right)^2}$, де b — більша основа трапеції, a — менша основа трапеції, c і d — бічні сторони.

Для рівнобічної трапеції $h = \sqrt{c^2 - \frac{1}{4}(b - a)^2}$, оскільки $c^2 - d^2 = 0$.

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ДІАГОНАЛЯМИ Й СТОРОНАМИ ТРАПЕЦІЇ

(d_1 і d_2 — діагоналі трапеції, b — більша основа, a — менша основа, c і d — бічні сторони)

$d_1^2 + d_2^2 = 2ab + c^2 + d^2$;

$$d_1 = \sqrt{ab + d^2 + \frac{b\left(c^2 - d^2\right)}{b - a}};$$

$$d_2 = \sqrt{ab + c^2 - \frac{b\left(c^2 - d^2\right)}{b - a}}.$$

НЕРІВНОСТІ ДЛЯ СТОРІН І ДІАГОНАЛЕЙ ТРАПЕЦІЇ

Якщо $ABCD$ — трапеція, $AD \parallel BC$, то:

$AB + CD > |AD - BC|$ (сума бічних сторін більша за модуль різниці основ трапеції);

$AC + BD > AD + BC$ (сума діагоналей більша за суму основ трапеції);

$|AB - CD| < |AD - BC|$ (модуль різниці бічних сторін менший від модуля різниці основ трапеції).

ВПИСАНІ ТА ЦЕНТРАЛЬНІ КУТИ[1]

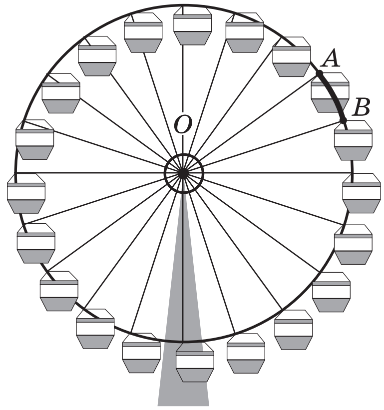
Очікувані результати: учні мають уміти розпізнавати на рисунках центральні кути кола, дуги кола, вписані кути кола; пояснювати, що таке центральний кут кола, вписаний кут кола, градусна міра дуги; знати властивості вписаних кутів, що спираються на ту саму дугу кола; розуміти доведення теореми про градусну міру вписаного кута кола; застосовувати властивості вписаних кутів кола під час розв'язування задач.

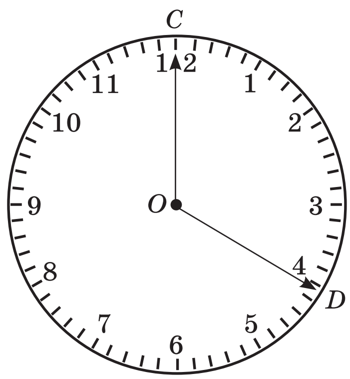
МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може провести бесіду:

— Які ви знаєте види кутів? (*Гострі, прямі, тупі, розгорнуті, суміжні, вертикальні, зовнішні, внутрішні*.)

— До якого виду можна віднести кут AOB (між ребрами, що з'єднують місця прикріплення кабінок на колесі огляду) та кут COD (між стрілками годинника)? Що спільного мають ці кути?





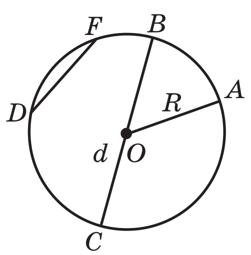
Можливо, учні / учениці зможуть пояснити, що спільним у цих кутів є те, що вершина кута лежить у центрі кола, а з визначенням виду кутів та їхньою назвою, напевно, виникнуть утруднення.

Тоді педагог повідомляє, що такі кути називають *центральними*.

— На найближчих уроках ми вивчимо означення не тільки центральних, а й уписаних кутів, вивчимо їхні властивості, навчимося застосовувати означення та властивості вписаних і центральних кутів під час розв'язування задач.

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

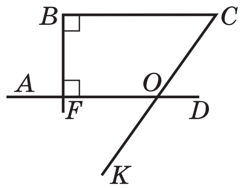
➢ ***Усні вправи за рисунками***

1. 

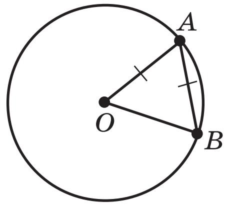
Скориставшись рисунком кола, назвіть його:

1) центр;
2) діаметр;
3) радіуси;
4) хорди;
5) дуги.

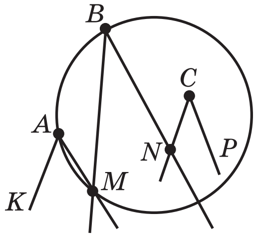
[1] У модельній навчальній програмі «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти, автор Істер О. С., вивчення теми «Вписані та центральні кути» у 8-му класі не передбачено.

2. 

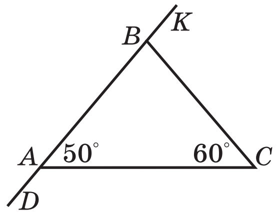
1) Назвіть усі кути, зображені на рисунку.
2) Назвіть пари рівних кутів.
3) Градусні міри яких кутів можна визначити, скориставшись рисунком?

3. 

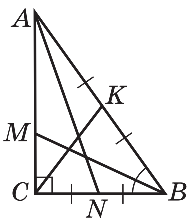
На рисунку точка O — центр кола. Чому дорівнюють градусні міри кутів трикутника AOB?

4. 

Скориставшись рисунком, назвіть:
1) кути, вершини яких належать колу;
2) кути, сторони яких перетинають коло;
3) кути, вершини яких належать колу, а сторони перетинають коло.

5. 

1) Назвіть зовнішні кути трикутника ABC, зображені на рисунку.
2) Обчисліть градусні міри цих кутів.

6. 

На рисунку трикутник ABC — прямокутний ($\angle C = 90^\circ$).
1) Назвіть катети й гіпотенузу цього трикутника.
2) Який з відрізків, зображених на рисунку, є медіаною, проведеною до гіпотенузи трикутника?

➤ ***Бліцопитування***

1. Який трикутник називають уписаним у коло?
2. Чи правильно, що якщо трикутник уписаний у коло, то коло є описаним навколо трикутника?
3. Сформулюйте означення дотичної до кола.
4. Яким є взаємне розміщення дотичної до кола й радіуса цього кола, проведеного в точку дотику?

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Означення центрального кута.
   ! Центральним кутом кола називають кут з вершиною в центрі кола.
2. Градусна міра дуги.
   ! Градусною мірою дуги кола називають градусну міру відповідного центрального кута.
3. Означення вписаного кута.
   ! Вписаним кутом називають кут, вершина якого лежить на колі, а сторони перетинають це коло.

4. Властивості вписаного кута.

Теорема

- Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

Або (інше формулювання теореми)

- Вписаний кут дорівнює половині центрального кута, який спирається на ту саму дугу.

Наслідок 1

- Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні.

Наслідок 2

- Вписаний кут, що спирається на півколо, — прямий, і навпаки: будь-який прямий уписаний кут спирається на півколо.

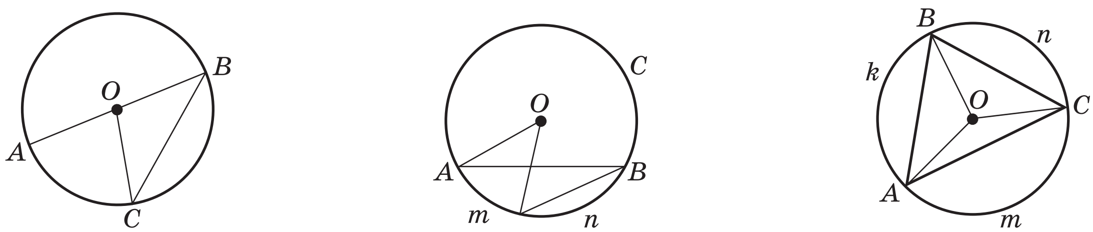
Наслідок 3

- Центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи. Медіана прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює половині гіпотенузи.

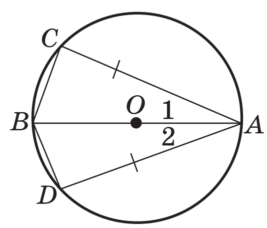
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

➢ ***Усні вправи***

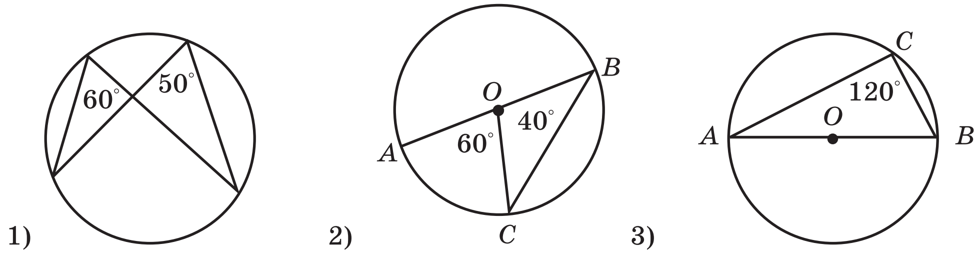
1. На кожному з наведених рисунків назвіть:
   1) центральний кут;
   2) дугу, що відповідає центральному куту;
   3) вписаний кут, що спирається на цю дугу.



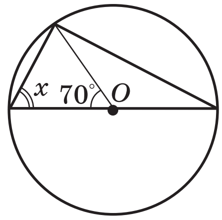
2. Визначте, чи є вписаний кут ABC гострим, прямим або тупим, якщо:
   1) дуга ABC менша від півкола;
   2) дуга ABC більша за півколо;
   3) дуга ABC дорівнює півколу.
3. Обчисліть градусну міру дуги, яка складає:
   1) чверть кола; 2) третину кола; 3) $\frac{5}{18}$ кола.
4. Чи можуть два вписаних кути дорівнювати один одному, якщо вони не спираються на одну дугу?
5. Чи може кут з вершиною на колі, сторони якого перетинають коло в кінцях діаметра, бути гострим?
6. На рисунку зображено коло з центром у точці O.
   1) Чому дорівнює градусна міра кута ACB?
   2) Чи є на рисунку кут, градусна міра якого дорівнює градусній мірі кута ACB?
   3) Доведіть, що, якщо $AC = AD$, то $\angle 1 = \angle 2$.



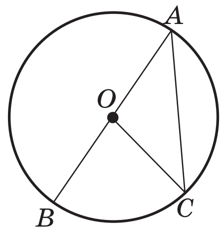
7. Виправте помилки на рисунках.



8. Скориставшись рисунком, обчисліть x.



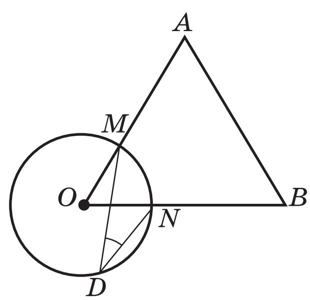
9. Скориставшись рисунком, обчисліть:
   1) градусну міру кута BOC, якщо $\angle BAC = 40°$;
   2) градусну міру кута BAC, якщо $\angle BOC = 86°$.



10. У колі з центром O проведено діаметр AB і хорду AC. Чому дорівнює градусна міра кута BAC, якщо $AC = AO$?

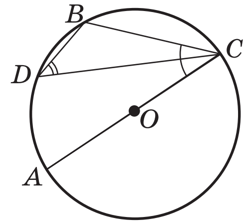
➤ *Письмові вправи*

1. Хорда AC ділить коло на дві дуги, градусні міри яких відносяться як $11:7$. Обчисліть градусну міру кута ABC, якщо точка B лежить на більшій дузі.
2. Дуга AB кола з центром у точці O дорівнює $120°$. Обчисліть відстань від точки O до хорди AB, якщо радіус кола дорівнює 6 см.
3. Відрізки AB і AC — хорди кола. $\angle BAC = 70°$, $\cup AB = 120°$. Обчисліть градусну міру дуги AC.
4. У колі проведено діаметр AB і хорду AC. Обчисліть градусну міру кута BAC, якщо градусні міри дуг відносяться як $7:2$.
5. Відрізки MA і MB — хорди кола із центром у точці O, $\angle AMB = 30°$. Чому дорівнює довжина хорди AB, якщо радіус кола дорівнює 5 см?
6. На рисунку зображені коло із центром у точці O й рівносторонній трикутник AOB, що перетинає коло в точках M і N. Точка D належить колу. Обчисліть градусну міру кута MDN.



7. Трикутник ABC вписаний у коло, центр якого лежить на відрізку AB.
   1) Обчисліть градусну міру кута B, якщо $\angle A = 65°$.
   2) Обчисліть довжину медіани, проведеної з вершини C, якщо $AB = 12$ см.

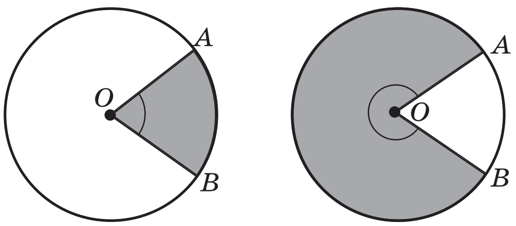
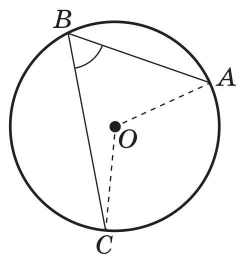
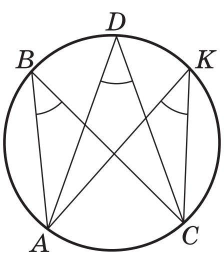
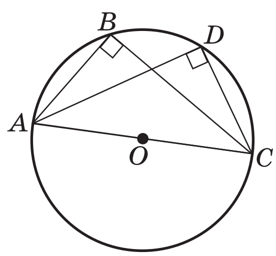
8. Обчисліть градусну міру кута BDC, якщо $\angle BCA = 50^\circ$ (*див. рисунок*).



9. На колі позначено точки A , B і C, причому AC — діаметр кола, $\angle BCA = 60^\circ$, $BC = 4$ см. Обчисліть довжину радіуса кола.

10. Обчисліть довжину меншого катета прямокутного трикутника, якщо медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює 9 см та утворює з гіпотенузою кут 60°.

➢ ***Картка-підказка для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

Кути в колі	
Центральний кут	**Вписаний кут**
 Кут AOB — центральний $\angle AOB = \cup AB$	 Кут ABC — вписаний $\angle ABC = \cup \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \angle AOC$
Вписані кути, що спираються на одну дугу	**Вписаний кут, що спирається на діаметр**
 Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні між собою. $\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC$	 Вписаний кут, що спирається на діаметр, є прямим. $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$

➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. У прямокутному трикутнику з прямим кутом C $\angle B = 42^\circ$. На катеті AC як на діаметрі побудовано коло, яке перетинає гіпотенузу AB у точці D. Обчисліть градусну міру кута ACD.
Відповідь. 42°.

2. Відрізки MA і MB — хорди кола із центром у точці O, $\angle AMB = 60^\circ$. Обчисліть відстань від центра кола до хорди AB, якщо радіус кола дорівнює 7 см.
Відповідь. 3,5 см.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➤ ***Математичний диктант***

Чи правильне твердження? (Напишіть лише номер твердження та відповідь: так / ні.)

1. Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні.
2. Вписаний і центральний кути, що спираються на одну й ту саму дугу, рівні.
3. Вписаний кут дорівнює половині центрального кута, що спирається на ту саму дугу.
4. Вписаний кут, що спирається на діаметр кола, є гострим.
5. Центр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є серединою гіпотенузи цього трикутника.
6. Медіана прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, дорівнює третині гіпотенузи.

➤ ***Дидактична гра «Практичне завдання»***

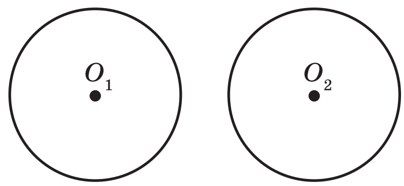
Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у декілька команд (залежно від їхньої кількості). Кожна команда отримує круг, виготовлений із фанери або дуже цупкого паперу, і косинець із прямим кутом, найбільша сторона якого дорівнює діаметру цього круга. Завдання: користуючись тільки цим косинцем і олівцем, знайти центр круга. Перемагає команда, яка першою виконає завдання і зможе обґрунтувати свої дії.

Відповідь. Потрібно скористатися одним з наслідків теореми про вписаний кут. Оскільки центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи, то можна цей косинець двічі вписати в круг і знайти точку перетину його найбільших сторін, тобто гіпотенуз.

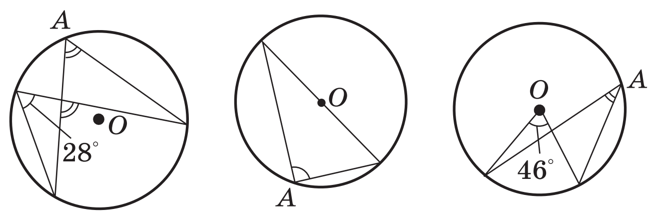
➤ ***Робота на картках із друкованою основою***

Варіант 1

1. Зобразіть кут, уписаний у коло з центром O_1, і центральний кут кола з центром O_2.

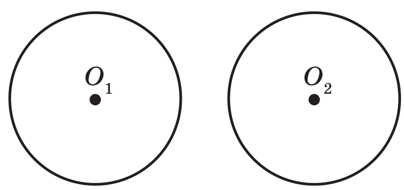


2. Напишіть величину кута A на кожному з наведених рисунків (точка O — центр кола).

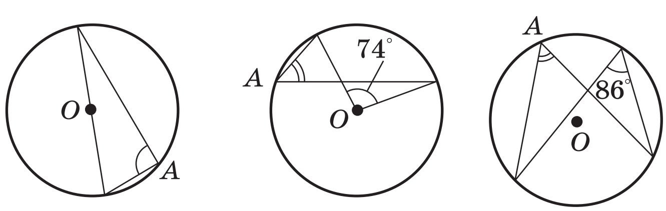


Варіант 2

1. Зобразіть центральний кут кола з центром O_1 і кут, уписаний у коло з центром O_2.



2. Напишіть величину кута A на кожному з наведених рисунків (точка O — центр кола).

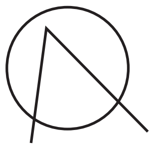
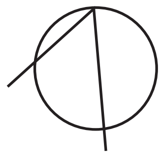
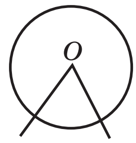
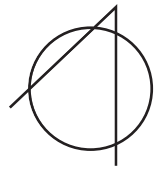


➢ *Тестові завдання*

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. На якому рисунку зображено центральний кут?

А	Б	В	Г
			

2. Центральний кут кола дорівнює 72°. Чому дорівнює вписаний кут, що спирається на ту саму дугу, що й заданий центральний?

А	Б	В	Г
72°	18°	54°	36°

3. Кут, уписаний у коло, на 40° менший від центрального кута, що спирається на ту саму дугу. Чому дорівнює центральний кут?

А	Б	В	Г
20°	80°	40°	50°

4. Відрізок AB — гіпотенуза прямокутного трикутника, вписаного в коло. Чому дорівнює довжина медіани цього трикутника, проведеної до сторони AB, якщо $AB = 15$ см?

А	Б	В	Г
7 см	8 см	7,5 см	8,5 см

5. Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 6 см, 8 см, 10 см. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо цього трикутника?

А	Б	В	Г
5 см	4 см	3 см	10 см

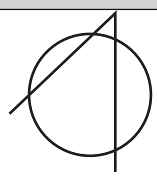
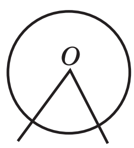
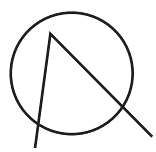
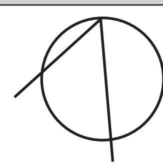
6. Точки A і B лежать на колі з центром у точці O. Радіус кола дорівнює 10 см, а відстань від точки A до радіуса OB — 5 см. Чому дорівнює градусна міра дуги AB?

А	Б	В	Г
60°	90°	120°	30°

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. На якому рисунку зображено вписаний кут?

А	Б	В	Г
			

2. Вписаний у коло кут дорівнює 40°. Чому дорівнює центральний кут, що спирається на ту саму дугу, що й заданий уписаний кут?

А	Б	В	Г
20°	40°	80°	50°

3. Центральний кут кола на 28° більший за кут, вписаний у це коло, який спирається на ту саму дугу. Чому дорівнює вписаний кут?

А	Б	В	Г
56°	14°	28°	42°

4. Відрізок AB — гіпотенуза прямокутного трикутника, вписаного в коло. Чому дорівнює довжина медіани цього трикутника, проведеної до сторони AB, якщо $AB = 13$ см?

А	Б	В	Г
6,5 см	6 см	5 см	7,5 см

5. Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 12 см, 16 см, 20 см. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо цього трикутника?

А	Б	В	Г
20 см	10 см	8 см	6 см

6. Точки A і B лежать на колі з центром у точці O. Радіус кола дорівнює 20 см, а відстань від точки B до радіуса OA — 10 см. Чому дорівнює градусна міра дуги AB?

А	Б	В	Г
30°	90°	45°	60°

Відповіді. Варіант 1. 1. В. 2. Г. 3. Б. 4. В. 5. А. 6. Г. Варіант 2. 1. Г. 2. В. 3. В. 4. А. 5. Б. 6. Г.

➢ ***Робота в парах***

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. Трикутник ABC вписано в коло, діаметром якого є відрізок BC. Обчисліть градусну міру кута C, якщо $\cup AC = 84^\circ$.
2. Кінці хорди MN ділять коло на дві дуги. Градусна міра меншої з них дорівнює 140°, а більшу точка K ділить у відношенні $5:6$, починаючи від точки M. Обчисліть градусну міру кута NMK.

Варіант 2

1. Трикутник ABC вписано в коло, діаметром якого є відрізок BC. Обчисліть градусну міру дуги AB, якщо $\angle B = 38^\circ$.
2. Кінці хорди AB ділять коло на дві дуги. Градусна міра більшої з них дорівнює 260°, а меншу точка M ділить у відношенні $7:18$, починаючи від точки B. Обчисліть градусну міру кута MBA.

➢ ***Робота в групах***

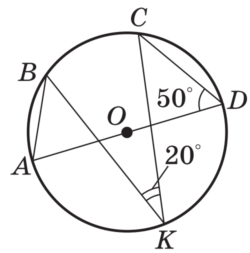
- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Точка O — центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC. Обчисліть градусні міри трикутника ABC, якщо $\angle BOC = 32^\circ$. Скільки розв'язків має задача?

Задача 2

Відрізок AD — діаметр кола з центром у точці O (*див. рисунок*). Обчисліть градусну міру кута BAD, якщо $\angle CDA = 50^\circ$, $\angle BKC = 20^\circ$.



Задача 3

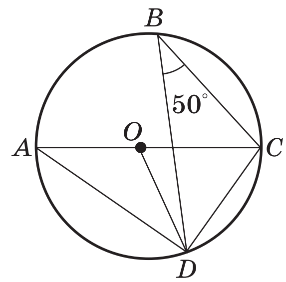
Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 62°. Півколо, побудоване на бічній стороні трикутника як на діаметрі, ділиться іншими сторонами на три дуги. Обчисліть градусні міри цих дуг.

➤ *Завдання на встановлення відповідності*

Варіант 1

На рисунку зображено коло із центром у точці O, $\angle DBC = 50^\circ$. Установіть відповідність між кутом (1–3) та його градусною мірою (А–Г).

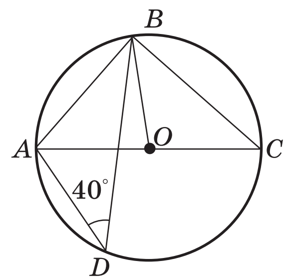
1	$\angle DOC$	**А**	90°
2	$\angle ADC$	**Б**	25°
3	$\angle DAC$	**В**	100°
		Г	50°



Варіант 2

На рисунку зображено коло із центром у точці O, $\angle BDA = 40^\circ$. Установіть відповідність між кутом (1–3) та його градусною мірою (А–Г).

1	$\angle ABC$	**А**	40°
2	$\angle AOB$	**Б**	90°
3	$\angle ACB$	**В**	20°
		Г	80°



Відповіді. Варіант 1. 1 — В. 2 — А. 3 — Г. Варіант 2. 1 — Б. 2 — Г. 3 — А.

➤ *Самостійна робота з подальшою взаємоперевіркою і взаємооцінюванням*

Варіант 1	**Варіант 2**
1. Відрізки OA і OB — радіуси кола. Обчисліть градусну міру дуги AB, якщо	
$\angle AOB = 50^\circ$	$\angle AOB = 60^\circ$
2. Точка O — центр кола, CA і CB — хорди цього кола. Обчисліть градусні міри кутів AOB і ACB, якщо	
$\cup AB = 86^\circ$	$\cup AB = 72^\circ$
3. Трикутник ABC вписано в коло, причому	
$\angle C = 80^\circ$, $\cup AC = 80^\circ$	$\angle C = 100^\circ$, $\cup AC = 100^\circ$
Обчисліть: 1) градусні міри кутів A і B; 2) градусні міри дуг AB і BC	

Відповіді. Варіант 1. 1. 50°. 2. $\angle AOB = 86^\circ$, $\angle ACB = 43^\circ$. 3. 1) $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 40^\circ$; 2) $\cup AB = 160^\circ$, $\cup BC = 120^\circ$. Варіант 2. 1. 60°. 2. $\angle AOB = 72^\circ$, $\angle ACB = 36^\circ$. 3. 1) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 50^\circ$; 2) $\cup AB = 200^\circ$, $\cup BC = 60^\circ$.

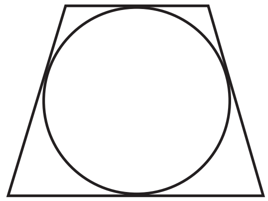
ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

Очікувані результати: учні мають уміти розпізнавати на рисунках вписані та описані чотирикутники; пояснювати, яке коло називають описаним навколо чотирикутника, а яке — вписаним у чотирикутник; знати властивості вписаних та описаних чотирикутників; усвідомлювати, навколо якого чотирикутника можна описати коло, у який чотирикутник можна вписати коло; застосовувати властивості вписаних та описаних чотирикутників під час розв'язування задач.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може запропонувати учням / ученицям обговорити таку ситуацію.

— Уявіть, що ви працюєте в майстерні, яка виготовляє приладдя для виступу циркових артистів. Для одного зі своїх номерів циркові гімнасти замовили приладдя у вигляді рівнобічної трапеції, описаної навколо кола (*див. рисунок*).



Кути при основі цієї трапеції мають дорівнювати 45°, основи трапеції — 2 м і 0,6 м.

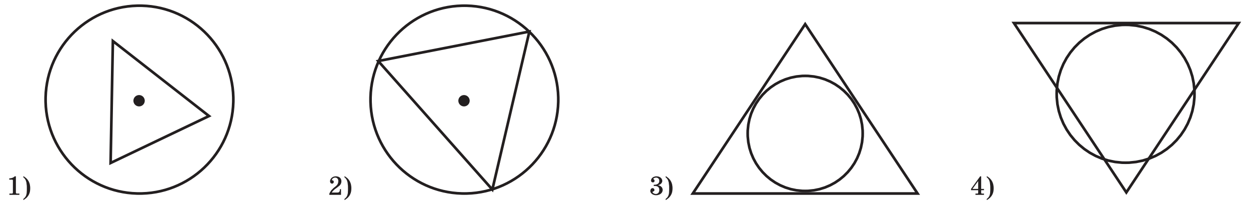
Для виконання цього замовлення потрібно знати, що таке трапеція, описана навколо кола, яким має бути радіус кола, вписаного в цю трапецію, чому дорівнюють бічні сторони трапеції.

На найближчих уроках ми дізнаємось, які чотирикутники називають описаними навколо кола і вписаними в коло, чи будь-який чотирикутник можна вписати в коло й описати навколо кола, вивчимо властивості вписаних та описаних чотирикутників.

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➢ ***Фронтальне опитування***

1. На якому з рисунків зображено трикутник, уписаний у коло, а на якому — описаний навколо кола?



2. Який трикутник називають уписаним у коло?
3. Чи правильно, що якщо трикутник уписаний у коло, то це коло є описаним навколо трикутника?
4. Чи навколо будь-якого трикутника можна описати коло?
5. Де лежить центр кола, описаного навколо:
   1) гострокутного трикутника;
   2) прямокутного трикутника;
   3) тупокутного трикутника?
6. Що називають дотичною до кола?
7. Сформулюйте властивість відрізків дотичних, проведених з однієї точки.
8. Який трикутник називають описаним навколо кола?
9. Чи правильно, що якщо навколо трикутника описане коло, то це коло є вписаним у трикутник?
10. Чи правильно, що навколо будь-якого трикутника можна описати коло?

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Означення вписаного чотирикутника.
   ! Чотирикутник називають уписаним у коло, якщо всі його вершини лежать на цьому колі.
2. Властивість уписаного чотирикутника.
   ! Сума протилежних кутів уписаного чотирикутника дорівнює 180°.
3. Умова, за якою чотирикутник є вписаним (ознака вписаного чотирикутника).
   ! Якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.
4. Окремі види чотирикутників, уписаних у коло.
   - Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.
   - Якщо паралелограм уписаний у коло, то він є прямокутником.
   - Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.
   - Якщо трапеція вписана в коло, то вона є рівнобічною.
5. Означення описаного чотирикутника.
   ! Чотирикутник називають описаним навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до цього кола.
6. Властивість описаного чотирикутника.
   ! В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні.
7. Умова, за якою чотирикутник є описаним (ознака описаного чотирикутника).
   ! Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.
8. Окремі види описаних чотирикутників.
   - У будь-який ромб можна вписати коло.
   - Якщо в паралелограм уписано коло, то він є ромбом.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

➤ ***Усні вправи***

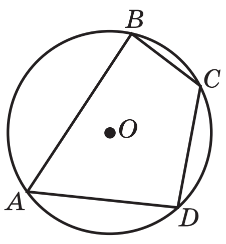
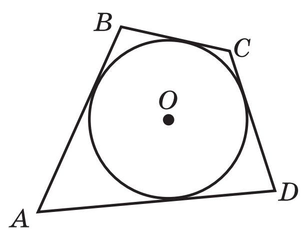
1. Обґрунтуйте відповіді на запитання:
   1) Чому неможливо вписати в коло паралелограм?
   2) Чому неможливо описати коло навколо паралелограма?
2. Чи можливо вписати коло в прямокутну трапецію, менша основа якої дорівнює меншій бічній стороні?
3. Чи можливо вписати в коло чотирикутник $ABCD$, якщо:
   1) $\angle A = 130°$, $\angle B = 50°$, $\angle C = 140°$, $\angle D = 40°$;
   2) $\angle A = 120°$, $\angle B = 80°$, $\angle C = 60°$, $\angle D = 100°$?
4. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. $\angle A = 110°$, $\angle B = 50°$. Чому дорівнюють градусні міри кутів C і D?
5. Сторони прямокутника дорівнюють 13,7 см і 15,28 см. Чи можливо описати коло навколо цього прямокутника?
6. Чи можливо описати навколо кола чотирикутник $ABCD$, якщо:
   1) $AB = 15$ см, $BC = 10$ см, $CD = 12$ см, $AD = 13$ см;
   2) $AB = 12$ см, $BC = 8$ см, $CD = 14$ см, $AD = 18$ см?
7. Чотирикутник $ABCD$ описано навколо кола. $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $CD = 7$ см. Доведіть, що $AD = BC$.
8. У чотирикутник, усі кути якого прямі, вписане коло. Визначте вид цього чотирикутника.
9. Сума довжин основ рівнобічної трапеції дорівнює 15 см. Якими завдовжки мають бути бічні сторони, щоб у цю трапецію можна було вписати коло?

➢ *Письмові вправи*

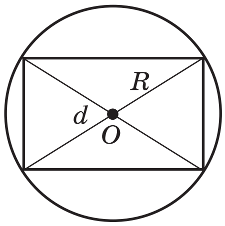
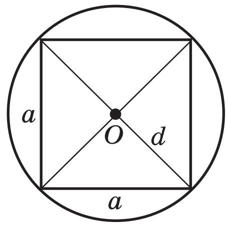
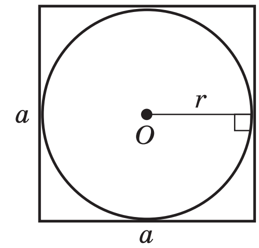
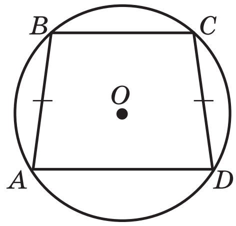
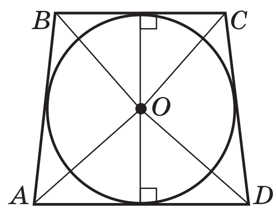
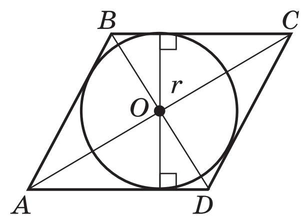
1. Обчисліть градусні міри невідомих кутів:
   1) вписаного чотирикутника, якщо два з них дорівнюють 46° і 125°;
   2) вписаної трапеції, якщо один з них дорівнює 80°;
   3) вписаного чотирикутника, діагоналі якого точкою перетину діляться навпіл.
2. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Обчисліть градусні міри його кутів, якщо відомо, що $\angle A : \angle C = 1:3$, $\angle B = 100°$.
3. Чотирикутник $ABCD$ вписаний у коло так, що сторона AD є діаметром кола, $\angle ABC = 121°$, $\angle BCD = 129°$. Обчисліть градусні міри кутів BAD, CDA, ACB.
4. Відрізок MP — діаметр кола, описаного навколо чотирикутника $MKTP$. Обчисліть градусні міри кутів KTP, TPM, KMP, якщо $\angle KTM = 24°$, $\angle MKT = 127°$.
5. Обчисліть периметр рівнобічної трапеції, діагональ якої перпендикулярна до бічної сторони й утворює з основою кут 30°, якщо радіус кола, описаного навколо трапеції, дорівнює 8 см.
6. Основи трапеції, у яку можна вписати коло, дорівнюють 7 см і 9 см. Обчисліть периметр трапеції.
7. Обчисліть периметр:
   1) описаного чотирикутника, три послідовні сторони якого дорівнюють 7 см, 9 см і 8 см;
   2) описаної трапеції, бічні сторони якої дорівнюють 3 см і 11 см.
8. Периметр чотирикутника $ABCD$, описаного навколо кола, дорівнює 36 см. $AB = 10$ см, $CD = 8$ см, $BC = AD$. Обчисліть довжини сторін BC і AD.
9. У рівнобічну трапецію, периметр якої дорівнює 14 см, уписано коло. Знайдіть довжину бічної сторони трапеції.
10. Коло, вписане в прямокутну трапецію, ділить точкою дотику більшу бічну сторону на відрізки завдовжки 6 см і 14 см. Чому дорівнює висота трапеції, якщо її периметр дорівнює 64 см?
11. Діагональ ромба, що виходить з вершини кута 60°, дорівнює 24 см. Чому дорівнює радіус кола, вписаного в ромб?
12. Кут при основі рівнобічної трапеції дорівнює 30°, основи трапеції — a см і b см. Чому дорівнює радіус кола, вписаного в цю трапецію?
13. Периметр прямокутної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 98 см, а радіус кола — 12 см. Обчисліть довжину найбільшої бічної сторони трапеції.

➢ *Картки-підказки для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань*

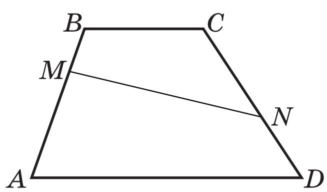
Картка 1

Вписаний та описаний чотирикутники	
Вписаний чотирикутник	**Описаний чотирикутник**
$\angle A + \angle C = 180°$; $\angle B + \angle D = 180°$. І навпаки: якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло  	$AB + CD = BC + AD$ (суми довжин протилежних сторін рівні). І навпаки: якщо суми довжин протилежних сторін опуклого чотирикутника рівні, то в нього можна вписати коло 

Картка 2

<table>
<tr><th colspan="3">Окремі види вписаних і описаних чотирикутників</th></tr>
<tr><th>Прямокутник</th><th colspan="2">Квадрат</th></tr>
<tr>
<td>$R=\dfrac{d}{2}$
1. Якщо паралелограм вписано в коло, то він є прямокутником.
2. Центр кола, описаного навколо прямокутника, — точка перетину діагоналей</td>
<td>$R=\dfrac{d}{2}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$</td>
<td>$r=\dfrac{a}{2}$</td>
</tr>
<tr><th colspan="3">Трапеція і ромб</th></tr>
<tr>
<td>Якщо $ABCD$ — вписана трапеція, то $AB=CD$</td>
<td></td>
<td>$d_{\text{впис. кола}}=h$
O — точка перетину бісектрис внутрішніх кутів,
$\angle AOB=\angle COD=90°$</td>
</tr>
</table>

➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***



1. У трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$) можна вписати коло. Точка M лежить на стороні AB, а точка N — на стороні CD. Чи можливо вписати коло в чотирикутник $AMND$? Відповідь обґрунтуйте.

   Відповідь. Неможливо. Нехай у чотирикутник $AMND$ можливо вписати коло (*див. рисунок*).

   Тоді за теоремою про описаний чотирикутник $AD+MN=AM+ND$. З умови випливає, що $AD+BC=AB+CD$. Віднімемо з другої рівності першу. Дістанемо: $BC-MN=BM+CN$ або $BC=BM+MN+NC$. Але остання рівність неможлива, оскільки $BM+MN+NC>BN+NC>BC$ (за нерівністю трикутника). Дістали суперечність.

2. Навколо кола описано прямокутну трапецію, більша бічна сторона якої дорівнює 15 см. Обчисліть довжину кола, якщо периметр трапеції дорівнює 42 см.

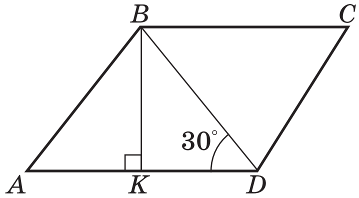
   Відповідь. 6π см.

3. Навколо кола радіуса 4 см описано чотирикутник $ABCD$. Сторони AB і CD паралельні і рівні, $\angle ADB=30°$. Обчисліть довжину діагоналі DB.

Розв'язання

Оскільки $AB \parallel CD$ і $AB = CD$, то $ABCD$ — паралелограм, у який уписано коло, тобто $ABCD$ — ромб. Висота ромба дорівнює діаметру вписаного в нього кола, отже, $BK = 8$ см. Із прямокутного трикутника BKD знаходимо: $BD = 2 \cdot BK = 16$ см.

Відповідь. 16 см.



ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➢ ***Математичний диктант 1. Вписані чотирикутники***

Чи правильне твердження? (Напишіть лише номер твердження та відповідь: так / ні.)

1. Чотирикутник називають уписаним у коло, якщо він лежить усередині деякого кола.
2. Чотирикутник називають уписаним у коло, якщо всі його вершини належать деякому колу.
3. Якщо чотирикутник є вписаним у коло, то сума його протилежних кутів дорівнює 180°.
4. Якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює 90°, то він є вписаним у коло.
5. Якщо навколо паралелограма можна описати коло, то цей паралелограм є прямокутником.
6. Навколо будь-якої трапеції можна описати коло.

➢ ***Математичний диктант 2. Описані чотирикутники***

Доповніть твердження.

1. Чотирикутник називають описаним навколо кола, якщо...
2. Якщо в чотирикутник $ABCD$ можна вписати коло, то $AB + CD = \ldots$
3. Якщо паралелограм описаний навколо кола, то цей паралелограм є...
4. Якщо ромб описаний навколо кола, то центром кола є...
5. Якщо ромб описаний навколо кола радіуса R, то висота ромба дорівнює...
6. Якщо трапеція описана навколо кола та її висота дорівнює H, то діаметр кола дорівнює...

➢ ***Дидактична гра «Видатний французький математик»***

Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у декілька команд (залежно від їхньої кількості). Усі команди отримують картки з однаковими завданнями.

Завдання. До кожного початку твердження наведено два варіанти його закінчення, з яких тільки один правильний. З букв, що відповідають правильним твердженням, потрібно утворити прізвище видатного французького математика. Команда, яка першою впорається із завданням, отримує 1 бал. Команда, яка правильно виконає завдання і зможе розповісти про цього математика (коли жив, видатні досягнення тощо), отримує 2 бали. Перемагає команда, яка набере найбільшу кількість балів.

Приклади тверджень

1. Навколо чотирикутника можна описати коло, якщо...

...сума прилеглих кутів дорівнює 180°	Г
...сума протилежних кутів дорівнює 180°	В

2. У чотирикутник можна вписати коло, якщо...

...суми протилежних сторін рівні	І
...суми прилеглих сторін рівні	Е

3. Якщо в паралелограм можна вписати коло, то він є...

...ромбом	Є
...прямокутником	Р

4. Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона є...

...рівнобічною	Т
...прямокутною	Б

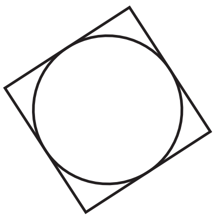
Відповідь. ВІЄТ.

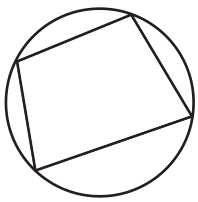
Франсуа Вієт (1540–1603) — французький математик, за фахом юрист. Зацікавившись астрономією, вимушений був вивчати алгебру й тригонометрію. За значний внесок у розвиток науки Вієта називають *батьком алгебри*. Він особливо цінував установлену ним залежність між коренями й коефіцієнтами рівнянь (формули Вієта). Під час війни Іспанії із Францією винайшов ключ до шифру, який застосовували іспанці, і навіть знайшов спосіб відстежувати всі зміни цього шифру.

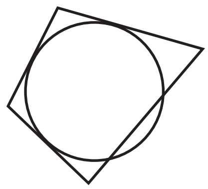
➢ *Робота на картках із друкованою основою*

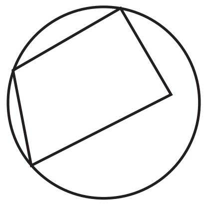
Варіант 1

1. Закресліть рисунки, на яких у зображенні чотирикутників, уписаних у коло або описаних навколо кола, припустилися помилок.

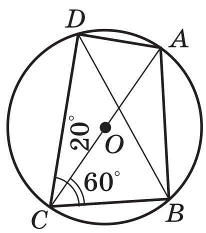
1) 

2) 

3) 

4) 

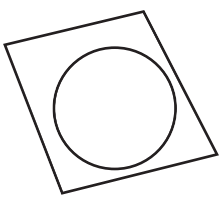
2. На рисунку зображено чотирикутник, уписаний у коло з центром у точці O. Скориставшись рисунком, заповніть таблицю.

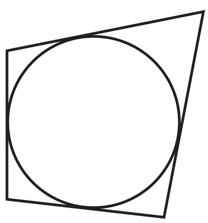


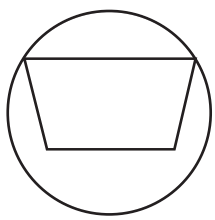
Кут	$\angle DBA$	$\angle AOB$	$\angle DAB$
Градусна міра кута			

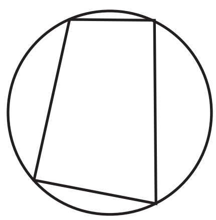
Варіант 2

1. Закресліть рисунки, на яких у зображенні чотирикутників, уписаних у коло або описаних навколо кола, припустилися помилок.

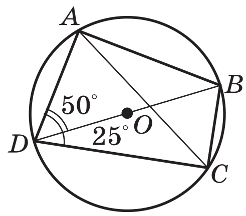
1) 

2) 

3) 

4) 

2. На рисунку зображено чотирикутник, уписаний у коло з центром у точці O. Скориставшись рисунком, заповніть таблицю.



Кут	$\angle BCA$	$\angle AOB$	$\angle ABC$
Градусна міра кута			

➢ *Тестові завдання*

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Навколо паралелограма, діагоналі якого не перпендикулярні, описане коло. Визначте вид цього паралелограма.

А	Б	В	Г
прямокутник	ромб	квадрат	визначити неможливо

2. Два кути вписаного в коло чотирикутника дорівнюють 73° і 104°. Чому дорівнює градусна міра найбільшого з решти кутів?

А	Б	В	Г
76°	96°	127°	107°

3. Навколо чотирикутника $ATMK$ описано коло. $\cup AK = \cup KM$, $\angle AKM = 118°$. Чому дорівнює $\angle ATK$?

А	Б	В	Г
62°	31°	121°	134°

4. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = 9$ см, $BC = 8$ см, $CD = 7$ см. Якою завдовжки має бути сторона AD, щоб цей чотирикутник можна було описати навколо кола?

А	Б	В	Г
7 см	9 см	10 см	8 см

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Навколо паралелограма описане коло. Визначте вид цього паралелограма, якщо діагоналі є бісектрисами його кутів.

А	Б	В	Г
прямокутник	ромб, але не квадрат	квадрат	визначити неможливо

2. Два кути вписаного в коло чотирикутника дорівнюють 92° і 51°. Чому дорівнює градусна міра найменшого з решти кутів?

А	Б	В	Г
88°	109°	49°	98°

3. У коло вписано чотирикутник $CNPL$, $\cup CL = \cup LP$, $\angle CNL = 47°$. Чому дорівнює $\angle CLP$?

А	Б	В	Г
172°	43°	86°	94°

4. У чотирикутнику $ABCD$ $BC = 9$ см, $CD = 10$ см, $AD = 11$ см. Якою завдовжки має бути сторона AB, щоб цей чотирикутник можна було описати навколо кола?

А	Б	В	Г
9 см	10 см	11 см	12 см

Відповіді. Варіант 1. 1. А. 2. Г. 3. Б. 4. Г. Варіант 2. 1. В. 2. А. 3. В. 4. Б.

➢ *Робота в парах*

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / вчительці для оцінювання.

Варіант 1

1. У чотирикутнику $ABCD$, вписаному в коло, $\angle A : \angle B : \angle C = 4 : 8 : 11$. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника.
2. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Діагональ AC цього чотирикутника є діаметром кола. Обчисліть градусну міру кута BAC, якщо $\angle CAD = 35°$, а кут між діагоналями чотирикутника, що лежить проти сторони AD, дорівнює 64°.

Варіант 2

1. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Кут A більший за кут B на 58° і в 4 рази більший за кут C. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника.
2. Чотирикутник $ABCD$ вписано в коло. Діагональ AC цього чотирикутника є діаметром кола. Обчисліть градусну міру кута між діагоналями чотирикутника, що лежить проти сторони AD, якщо $\angle BAC = 23°$, $\angle DAC = 52°$.

➢ ***Робота в групах***

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / вчительці для оцінювання.

***Задача 1** (завдання, запропоноване на етапі мотивації навчальної діяльності)*

Циркові гімнасти замовили приладдя у вигляді рівнобічної трапеції, описаної навколо кола. Кути при основі цієї трапеції мають дорівнювати 45°, основи трапеції — 2 м і 0,6 м. Чому має дорівнювати радіус кола, вписаного в цю трапецію? Якими завдовжки мають бути бічні сторони трапеції?

Задача 2

Фірма для своєї продукції замовила логотип у вигляді рівнобічної трапеції, описаної навколо кола радіуса 6 см. Одна з основ трапеції має бути на 10 см більша за іншу, а кут при основі трапеції має дорівнювати 30°. Якими завдовжки мають бути сторони трапеції?

➢ ***Завдання на встановлення відповідності***

Варіант 1

Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Г) так, щоб утворилося правильне твердження.

1	Якщо діагональ прямокутника дорівнює 20 см, то радіус описаного навколо нього кола дорівнює...	**А**	5 см
2	Якщо сума основ рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 16 см, то її бічна сторона дорівнює...	**Б**	16 см
3	Якщо висота ромба дорівнює 10 см, то радіус уписаного в нього кола дорівнює...	**В**	10 см
		Г	8 см

Варіант 2

Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Г) так, щоб утворилося правильне твердження.

1	Якщо сторона квадрата дорівнює 12 см, то радіус уписаного в нього кола дорівнює...	**А**	9 см
2	Якщо висота трапеції дорівнює 6 см, то радіус уписаного в неї кола дорівнює...	**Б**	6 см
3	Якщо радіус кола, вписаного в ромб, дорівнює 9 см, то висота ромба дорівнює...	**В**	3 см
		Г	18 см

Відповіді. Варіант 1. 1 — В. 2 — Г. 3 — А. Варіант 2. 1 — Б. 2 — В. 3 — Г.

➢ *Самостійна робота*

Варіант 1

1. Два кути чотирикутника дорівнюють 110° і 120°. Чому дорівнюють градусні міри решти кутів чотирикутника, якщо його можна вписати в коло?
2. Радіус кола, вписаного у квадрат, дорівнює 4,5 см. Обчисліть периметр квадрата.
3. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = 10$ см, $BC = 8$ см, $CD = 7$ см. Якою завдовжки має бути сторона AD, щоб цей чотирикутник можна було описати навколо кола?
4. У чотирикутник $CPNQ$ вписано коло, $CP : PN : NQ = 3 : 5 : 7$. Чому дорівнює довжина найменшої сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 40 см?
5. Чотирикутник $BTQM$ вписано в коло, центр якого належить стороні BT. Чому дорівнює кут MBT, якщо $\angle BQM = 16^\circ$?

Варіант 2

1. Два кути чотирикутника дорівнюють 100° і 130°. Обчисліть градусні міри решти кутів чотирикутника, якщо навколо нього можна описати коло.
2. Обчисліть периметр квадрата, описаного навколо кола, якщо радіус кола дорівнює 5,5 см.
3. У чотирикутнику $ABCD$ $BC = 6$ см, $CD = 8$ см, $AD = 12$ см. Якою завдовжки має бути сторона AB, щоб цей чотирикутник можна було описати навколо кола?
4. Чотирикутник $DLKM$ описано навколо кола, $DL : LK : KM = 1 : 3 : 4$. Чому дорівнює довжина найбільшої сторони чотирикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см?
5. Навколо чотирикутника $DKEF$ описано коло, центр якого належить стороні DF. Чому дорівнює кут FDK, якщо $\angle DEK = 23^\circ$?

Відповіді. Варіант 1. 1. 70° і 60°. 2. 36 см. 3. 9 см. 4. 6 см. 5. 74°. Варіант 2. 1. 80° і 50°. 2. 44 см. 3. 10 см. 4. 12 см. 5. 67°.

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ. СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Очікувані результати: учні мають уміти формулювати й розуміти зміст теореми Фалеса; пояснювати, що таке середня лінія трикутника, середня лінія трапеції; розпізнавати та зображувати на рисунках середню лінію трикутника та середню лінію трапеції; розуміти доведення властивостей середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції; застосовувати властивості середньої лінії трикутника та середньої лінії трапеції під час розв'язування задач.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може провести таку бесіду:

— Чи вірите ви, що стародавні греки, стоячи на березі, могли визначати відстань до кораблів на морі? Відповідь ствердна. Для цього вони користувалися приладом, який має назву *далекомір*. Цей прилад винайшов давньогрецький учений Фалес (бл. 625–547 рр. до н. е.). Фалес також відкрив теорему про вертикальні кути, довів рівність кутів при основі рівнобедреного трикутника, довів другу ознаку рівності трикутників. А одну з теорем, відкритих цим ученим, навіть названо його ім'ям. На найближчих уроках ми вивчимо теорему Фалеса, а також дізнаємося, що називають середньою лінією трикутника та яку вона має властивість. А для доведення властивості середньої лінії трикутника застосовуватимемо теорему Фалеса!

А тепер послухайте казку.

ТРИКУТНИК І ТРАПЕЦІЯ

Зустрів якось Трикутник Трапецію, а вона геть сумна...

— Чого ти така зажурена? — питає Трикутник.

А Трапеція відповідає:

— Як же мені не журитися? У тебе є і медіани, і бісектриси, і висоти, і навіть аж три середніх лінії. А в мене тільки одна середня лінія, та й то я не пам'ятаю, що це таке. Її означення та властивості начебто схожі на означення та властивості твоєї середньої лінії, а все ж таки відрізняються. Адже в тебе три сторони, а в мене — чотири.

— Звернімося до восьмикласників! — запропонував Трикутник.

— Та я вже зверталася. Вони кажуть, що такого ще не вчили.

І Трапеція гірко заплакала... Тоді Трикутник вирішив сам звернутися до восьмикласників:

— Потішмо Трапецію, вивчімо означення та властивості її середньої лінії!

Восьмикласники радо погодилися, і вже за кілька хвилин потому змогли розповісти Трапеції про її середню лінію.

— Отже, на найближчих уроках ми вивчимо означення та властивості середньої лінії трапеції, навчимося розв'язувати задачі на застосування її означення та властивостей.

З метою зацікавленості учнів у вивченні математики і розширення їхнього кругозору вчитель / учителька може провести коротку розповідь про середні лінії будь-якого чотирикутника (*див. додатковий матеріал*).

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➢ ***Фронтальне опитування***

1. Сформулюйте ознаки паралельності прямих.
2. Сформулюйте ознаки рівності трикутників.
3. Сформулюйте означення, властивості й ознаки паралелограма.

4. У чотирикутнику $ABCD$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.
   1) Визначте вид чотирикутника $ABCD$.
   2) Чому дорівнює довжина відрізка AD, якщо $BC = 5$ см?
5. У чотирикутнику $ABCD$ сторони BC і AD паралельні. Що ще необхідно знати, щоб визначити вид чотирикутника $ABCD$?
6. У трапеції $ABCD$ $BC \parallel AD$. Укажіть основи й бічні сторони трапеції $ABCD$.

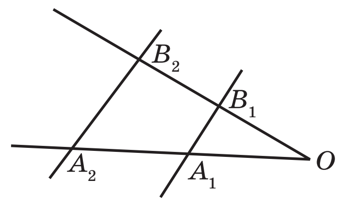
ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Теорема Фалеса.
   ! Паралельні прямі, що перетинають сторони кута й відтинають на одній з них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки й на другій стороні.
2. Інше формулювання теореми Фалеса.
   ! Паралельні прямі, що перетинають дві прямі й відтинають на одній з них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки й на другій прямій.
3. Означення середньої лінії трикутника.
   ! Середньою лінією трикутника називають відрізок, що сполучає середини двох його сторін.
4. Властивість середньої лінії трикутника.
   • Середня лінія трикутника паралельна одній з його сторін і дорівнює половині цієї сторони.
5. Означення середньої лінії трапеції.
   ! Середньою лінією трапеції називають відрізок, що сполучає середини бічних сторін.
6. Властивості середньої лінії трапеції.
   • Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній півсумі.

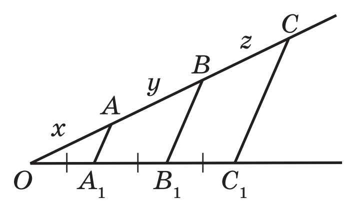
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

➢ ***Усні вправи***

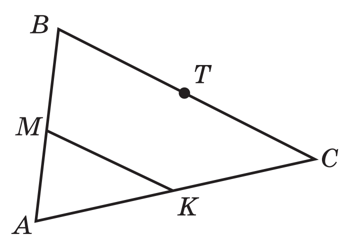
1. На рисунку зображено кут O і дві паралельні прямі A_1B_1 і A_2B_2. $OA_1 = A_1A_2$. Чи є на цьому рисунку інші пари рівних відрізків?



2. На рисунку $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, $AC = 8$ см. Обчисліть x, y і z.



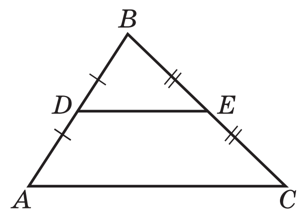
3. На рисунку відрізок MK — середня лінія трикутника ABC, точка T — середина сторони BC. Назвіть усі пари рівних відрізків, зображених на рисунку.



4. Відрізок DE — середня лінія трикутника ABC (*див. рисунок*).

   1) Визначте вид чотирикутника $ADEC$.

   2) Назвіть медіану трикутника, що виходить з вершини A.



5. Чи може середня лінія трикутника бути перпендикулярною до його сторони? до двох його сторін? Відповідь обґрунтуйте.

6. Чи можуть середні лінії трикутника дорівнювати 3 см, 4 см і 10 см? Відповідь обґрунтуйте.

7. Дві сторони трикутника дорівнюють 5 см і 9 см, а середня лінія, паралельна третій стороні, дорівнює 6 см. Обчисліть периметр трикутника.

8. Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 3,5 см. Обчисліть периметр трикутника.

9. Чому дорівнює середня лінія рівностороннього трикутника, периметр якого дорівнює 54 см?

10. Скільки середніх ліній можна провести в трапеції?

11. Чи може середня лінія трапеції бути меншою від обох її основ? дорівнювати одній з основ?

12. Обчисліть середню лінію трапеції, якщо її основи дорівнюють:

    1) 13 см і 7 см; 2) 6 см і 9 см; 3) $5k$ і $7k$.

13. Обчисліть довжини основ трапеції, діагональ якої ділить середню лінію на відрізки завдовжки 3 см і 4 см.

14. Обчисліть основу трапеції, якщо інша її основа й середня лінія відповідно дорівнюють:

    1) 5 см і 6 см; 2) 13 см і 7 см.

15. Обчисліть основи трапеції, якщо:

    1) одна з них утричі більша за другу, а середня лінія дорівнює 16 см;

    2) вони відносяться як $3:5$, а середня лінія дорівнює 6 см.

16. Бічні сторони трапеції дорівнюють 8 см і 9 см, а середня лінія — 11 см. Обчисліть периметр трапеції.

17. Бічні сторони трапеції, описаної навколо кола, дорівнюють 5 см і 7 см. Чому дорівнює середня лінія трапеції?

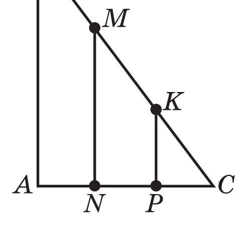
18. У трапеції $ABCD$ проведено середню лінію MP. Обчисліть периметр чотирикутника $MBCP$, якщо $AB = CD = 6$ см, $BC = 8$ см, $AD = 10$ см.

➤ *Письмові вправи*

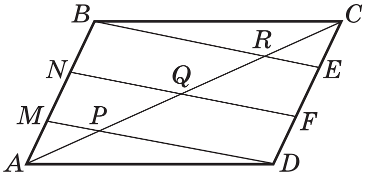
1. Через середину сторони NK трикутника MNK проведено пряму, паралельну стороні MN, яка перетинає сторону MK у точці P. Чому дорівнює довжина відрізка MP, якщо $MK = 9$ см?

2. На бічній стороні AB трапеції $ABCD$ позначено точку K так, що $AK = KB$. Через точку K паралельно основі трапеції проведено пряму, що перетинає сторону CD у точці M. Обчисліть довжини відрізків, на які точка M ділить сторону CD, якщо $CD = 11$ см.

3. Гіпотенузу BC прямокутного трикутника ABC поділено точками M і K на три рівні частини. Із точок M і K до сторони AC проведено перпендикуляри, що перетинають її в точках N і P відповідно (*див. рисунок*). Обчисліть довжину відрізка NC, якщо $BC = 12$ см, $AC = 6$ см.



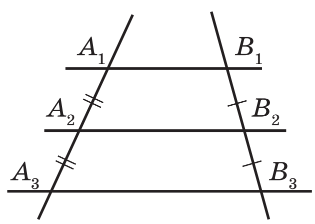
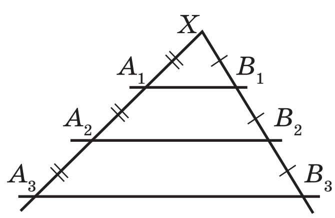
4. На стороні AB паралелограма $ABCD$ (*див. рисунок*) позначили точки M і N, а на стороні CD — точки E і F так, що $BN = NM = MA = CE = EF = FD$. Відрізки BE, NF, MD перетинають діагональ AC у точках R, Q, P відповідно. Доведіть, що $AP = PQ = QR = RC$.



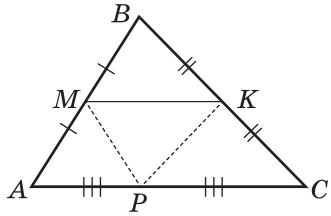
5. Побудуйте трикутник ABC. Позначте точки D, E і F — середини сторін AB, BC і AC відповідно. Сполучіть позначені точки.
   1) Визначте вид чотирикутника $ADEF$. Відповідь обґрунтуйте.
   2) Визначте вид чотирикутника $ADEC$. Відповідь обґрунтуйте.
6. Середня лінія трикутника відтинає від нього трапецію з бічними сторонами 3 см і 4 см та меншою основою 5 см. Обчисліть периметр трикутника.
7. У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, K — середина сторони AB, $AK = 3$ см, $KO = 4$ см. Обчисліть периметр паралелограма.
8. У ромбі $ABCD$ O — точка перетину діагоналей, M і N — середини сторін AB і AD відповідно. Доведіть, що:
   1) $MN = BO$; 2) $MN \perp AC$.
9. Менша зі сторін прямокутника дорівнює 16 см й утворює з діагоналлю кут, градусна міра якого дорівнює 60°. Середини сторін прямокутника послідовно сполучені. Визначте вид утвореного чотирикутника й обчисліть його периметр.
10. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 12 см. Чому дорівнюють відрізки середньої лінії, що містяться між діагоналями трапеції?
11. Довжина відрізка середньої лінії трапеції, що міститься між її діагоналями, дорівнює 5 см. Чому дорівнює менша основа трапеції, якщо її більша основа дорівнює 16 см?
12. Середня лінія трапеції втричі більша за меншу основу й на 8 см менша від більшої основи. Чому дорівнюють основи трапеції?
13. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Обчисліть довжину середньої лінії трапеції, якщо її основи відносяться як $3:5$, а периметр трапеції дорівнює 42 см.
14. Основи трапеції дорівнюють 14 см і 20 см, кути при меншій основі — по 120°. Обчисліть периметри фігур, на які ділить цю трапецію середня лінія.
15. Діагональ трапеції ділить її середню лінію на частини, одна з яких на 6 см більша за іншу. Чому дорівнюють основи трапеції, якщо її периметр дорівнює 48 см, а кути при основі — по 120°?
16. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на відрізки завдовжки a см, $2a$ см і a см. Обчисліть відношення основ цієї трапеції.

➢ ***Картки-підказки для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

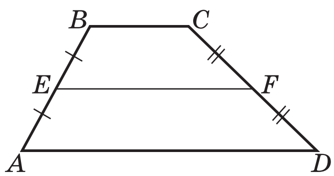
Картка 1

<table>
<tr><th colspan="2">Теорема Фалеса</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$ і $XA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$, то $XB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$</td></tr>
</table>

Картка 2

Середня лінія трикутника		
Означення	**Зображення**	**Властивості**
Середньою лінією трикутника називають відрізок, що сполучає середини двох його сторін	 M і K — середини сторін AB і BC, MK — середня лінія трикутника ABC	$MK \parallel AC$; $MK = \frac{1}{2}AC$; MP і KP — також середні лінії трикутника ABC; $P_{MPK} = \frac{1}{2}P_{ABC}$

Картка 3

Середня лінія трапеції		
Означення	**Зображення**	**Властивості**
Середньою лінією трапеції називають відрізок, що сполучає середини бічних сторін трапеції	 E і F — середини сторін AB і CD, EF — середня лінія трапеції $ABCD$	Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній пів сумі: $EF \parallel BC$, $EF \parallel AD$; $EF = \frac{BC+AD}{2}$

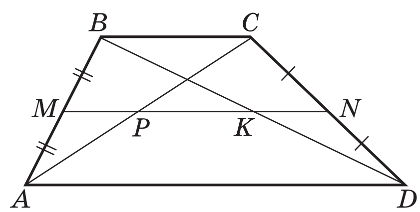
➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. У чотирикутнику $ABCD$ $AC = BD$. Точки M, P, K, N відповідно середини сторін AB, BC, CD, DA. Доведіть, що $MK \perp PN$.

2. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на рівні частини. Обчисліть відношення основ цієї трапеції.
Відповідь. $2:1$.

3. На бічній стороні AB трапеції $ABCD$ позначено точки M, K, P, які ділять відрізок AB на рівні частини. Через точки M, K, P паралельно основі трапеції проведено прямі, що перетинають сторону CD у точках M_1, K_1, P_1 відповідно. Доведіть, що $MM_1 + PP_1 = BC + AD$.

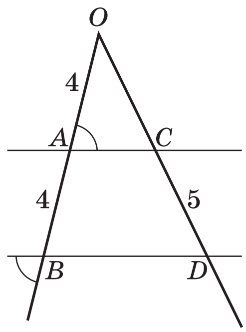
4. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три відрізки, два з яких дорівнюють 8 см і 7 см. Чому дорівнюють основи трапеції?
Указівка. Спочатку потрібно довести, що $MP = KN$.
Відповідь. $BC = 16$ см, $AD = 30$ см.



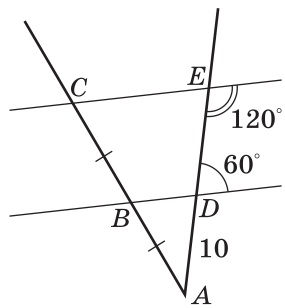
5. Периметр паралелограма $ABCD$ дорівнює 80 см. Бісектриси кутів A і D перетинаються в такій точці M, що сторона BC ділить відрізок AM навпіл. Обчисліть довжини сторін паралелограма. *Відповідь*. 8 см і 32 см.
6. Доведіть, що якщо діагоналі трапеції взаємно перпендикулярні й рівні, то її висота дорівнює середній лінії.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

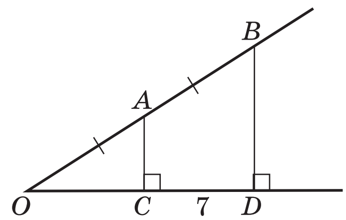
➢ ***Завдання за рисунками***



1) $OC = ?$



2) $DE = ?$



3) $OC = ?$

➢ ***Дидактична гра «Назвіть число»***

Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у три команди. Кожна команда отримує картку з пронумерованими твердженнями, з-поміж яких є правильні й неправильні. Потрібно номери правильних тверджень написати в бланку відповідей і назвати утворене число. Перемагає команда, яка першою назве правильне число.

Приклад картки для 1-ї команди

	Твердження
1	Середньою лінією трикутника називають відрізок, що сполучає середини двох його сторін
2	У будь-якому трикутнику можна провести тільки одну середню лінію
3	Якщо в трикутнику дві середні лінії рівні, то трикутник — рівнобедрений
4	Середньою лінією трапеції називають відрізок, що сполучає середини будь-яких її сторін
5	У кожній трапеції можна провести безліч середніх ліній
6	Середня лінія трапеції паралельна її основам

Бланк відповідей

Приклад картки для 2-ї команди

	Твердження
1	Середня лінія трикутника — це відрізок, що проходить через середини всіх його сторін
2	У кожному трикутнику можна провести три середні лінії
3	У рівносторонньому трикутнику всі середні лінії рівні
4	Відрізок, кінці якого є серединами бічних сторін трапеції, називають її середньою лінією
5	Існують трапеції, у яких немає жодної середньої лінії
6	Середня лінія трапеції дорівнює піврізниці її основ

Бланк відповідей

Приклад картки для 3-ї команди

	Твердження
1	Середньою лінією трикутника називають відрізок, що проходить через середину трикутника
2	У кожному трикутнику можна провести безліч середніх ліній
3	Якщо дві середні лінії трикутника перпендикулярні, то трикутник — прямокутний
4	Середньою лінією трапеції називають відрізок, що проходить через середини її бічних сторін
5	У кожній трапеції можна провести середню лінію
6	Середня лінія трапеції дорівнює сумі її основ

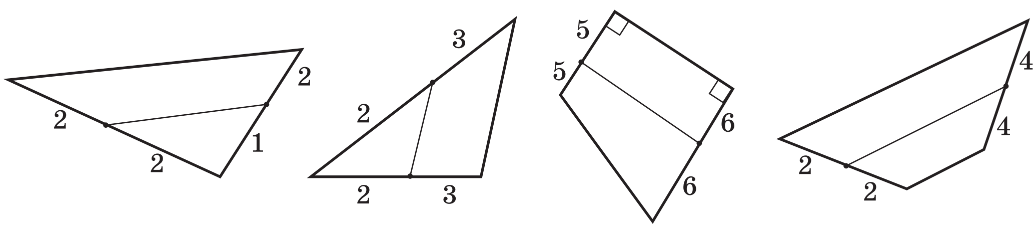
Бланк відповідей

Відповіді. 1-ша команда: 136. 2-га команда: 234. 3-тя команда: 345.

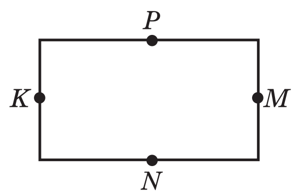
➢ *Робота на картках із друкованою основою*

Варіант 1

1. Закресліть рисунки, на яких під час зображення середньої лінії трикутника або трапеції припустилися помилок.



2. На рисунку точки K, P, M, N — середини сторін прямокутника. У квадратику поряд із твердженням поставте позначку ✓, якщо твердження правильне.

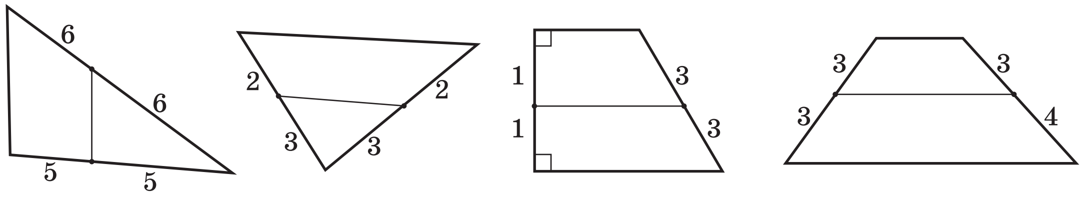


☐ $KP = MN$; ☐ $PM = KN$; ☐ $KN \parallel PM$;

☐ $KN \perp MN$; ☐ $KM \perp PN$; ☐ $PN = KM$

Варіант 2

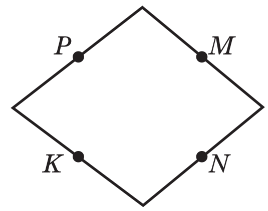
1. Закресліть рисунки, на яких під час зображення середньої лінії трикутника або трапеції припустилися помилок.



2. На рисунку точки K, P, M, N — середини сторін ромба. У квадратику поряд із твердженням поставте позначку ✓, якщо твердження правильне.

☐ $KP = MN$; ☐ $PM = KN$; ☐ $KN \parallel PM$;

☐ $KN \perp MN$; ☐ $KM \perp PN$; ☐ $PN = KM$



➢ ***Тестові завдання 1. Середня лінія трикутника***

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

Варіант 1

1. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см, а бічна сторона — 8 см. Чому дорівнює довжина відрізка, що сполучає середини основи й бічної сторони?

А	Б	В	Г
5 см	16 см	4 см	10 см

2. Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 4 см. Чому дорівнюють сторони цього трикутника?

А	Б	В	Г
2 см	8 см	12 см	1 см

3. У квадраті з діагоналлю 7 см послідовно сполучили відрізками середини сторін. Чому дорівнює периметр утвореного чотирикутника?

А	Б	В	Г
28 см	7 см	12 см	14 см

4. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см, а гіпотенуза — 13 см. Чому дорівнює відстань від середини гіпотенузи до меншого катета?

А	Б	В	Г
6,5 см	6 см	3 см	2,5 см

Варіант 2

1. У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 5 см, а катети — 3 см і 4 см. Чому дорівнює довжина відрізка, що сполучає середини катетів?

А	Б	В	Г
2,5 см	1,5 см	2 см	6 см

2. Середня лінія рівностороннього трикутника дорівнює 8 см. Чому дорівнюють сторони цього трикутника?

А	Б	В	Г
4 см	12 см	16 см	24 см

3. У прямокутнику з діагоналлю 11 см послідовно сполучили відрізками середини сторін. Чому дорівнює периметр утвореного чотирикутника?

А	Б	В	Г
44 см	11 см	38 см	22 см

4. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см, а гіпотенуза — 10 см. Чому дорівнює відстань від середини гіпотенузи до більшого катета?

А	Б	В	Г
3 см	4 см	5 см	2 см

Відповіді

Варіант 1. 1. В. 2. Б. 3. Г. 4. Б.

Варіант 2. 1. А. 2. В. 3. Г. 4. А.

➢ *Тестові завдання 2. Середня лінія трапеції*

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

Варіант 1

1. Бічні сторони трапеції дорівнюють 6 см і 4 см, а основи — 3 см і 9 см. Чому дорівнює середня лінія трапеції?

А	Б	В	Г
5 см	6 см	3 см	7,5 см

2. Сторони трапеції дорівнюють 6 см, 8 см, 6 см, 10 см. Чому дорівнює середня лінія трапеції?

А	Б	В	Г
7 см	8 см	6 см	9 см

3. Бічні сторони трапеції дорівнюють 5 см, а середня лінія — 6 см. Чому дорівнює периметр трапеції?

А	Б	В	Г
22 см	16 см	13 см	18 см

4. Середня лінія трапеції дорівнює 9 см, а відношення основ — 4 : 5. Чому дорівнює менша основа трапеції?

А	Б	В	Г
10 см	4 см	8 см	6 см

Варіант 2

1. Бічні сторони трапеції дорівнюють 12 см і 8 см, а основи — 10 см і 14 см. Чому дорівнює середня лінія трапеції?

А	Б	В	Г
11 см	10 см	12 см	13 см

2. Сторони трапеції дорівнюють 8 см, 10 см, 8 см, 12 см. Чому дорівнює середня лінія трапеції?

А	Б	В	Г
9 см	12 см	8 см	11 см

3. Бічні сторони трапеції дорівнюють 4 см, а середня лінія — 6 см. Чому дорівнює периметр трапеції?

А	Б	В	Г
16 см	20 см	14 см	18 см

4. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см, а відношення основ — 3 : 5. Чому дорівнює більша основа трапеції?

А	Б	В	Г
10 см	6 см	5 см	16 см

Відповіді

Варіант 1. 1. Б. 2. Г. 3. А. 4. В.

Варіант 2. 1. В. 2. Г. 3. Б. 4. А.

➢ *Робота в парах*

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. Середня лінія трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 5 см, а бічна сторона — 6 см. Чому дорівнює друга бічна сторона трапеції?
2. Середня лінія трапеції дорівнює 48 см. Обчисліть периметр трапеції, якщо відомо, що її можна розрізати на квадрат і рівнобедрений прямокутний трикутник, гіпотенуза якого дорівнює 44,8 см.

Варіант 2

1. Бічні сторони трапеції, описаної навколо кола, дорівнюють 7 см і 5 см. Обчисліть довжину середньої лінії трапеції.
2. Середня лінія трапеції дорівнює 36 см. Обчисліть периметр трапеції, якщо відомо, що її можна розрізати на ромб і рівносторонній трикутник.

➢ *Робота в групах*

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Через точку E — середину сторони AB трикутника ABC — проведено пряму, яка паралельна стороні AC. Ця пряма перетинає сторону BC в точці F. Обчисліть периметр трикутника ABC, якщо $AE = 4$ см, $AC = 12$ см, $FC = 5$ см.

Задача 2

Точка M — середина бічної сторони AB трапеції $ABCD$. Через точки M і B проведено прямі, паралельні стороні CD, які перетинають сторону AD в точках K і E відповідно. Обчисліть довжину відрізка AK, якщо $BC = 10$ см, $AD = 16$ см.

Задача 3

У чотирикутнику $ABCD$ точки M, N, K, P є відповідно серединами сторін AB, BC, CD і DA. Доведіть, що:

1) $\angle NMK = \angle KPN$;

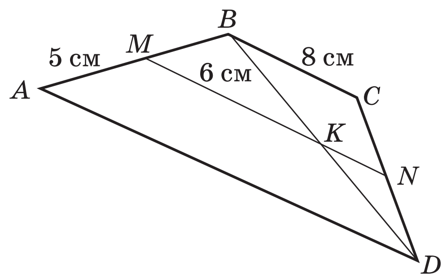
2) відрізки MP і NK точкою перетину діляться навпіл.

➢ *Завдання на встановлення відповідності*

Варіант 1

На рисунку відрізок MN є середньою лінією трапеції $ABCD$. Установіть відповідність між відрізком (1–3) та його довжиною (А–Г).

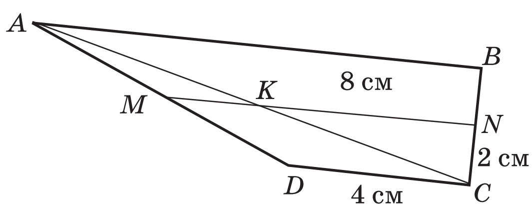
1	KN	А	5 см
2	AD	Б	4 см
3	MB	В	3 см
		Г	12 см



Варіант 2

На рисунку відрізок MN є середньою лінією трапеції $ABCD$. Установіть відповідність між відрізком (1–3) та його довжиною (А–Г).

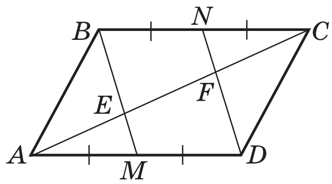
1	MK	А	16 см
2	AB	Б	6 см
3	BC	В	2 см
		Г	4 см



Відповіді. Варіант 1. 1 — Б. 2 — Г. 3 — А. Варіант 2. 1 — В. 2 — А. 3 — Г.

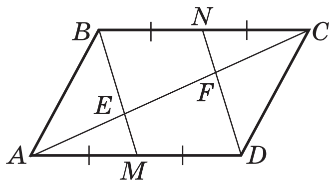
➢ ***Самостійна робота з подальшою взаємоперевіркою і взаємооцінюванням***

Варіант 1



1. Точки M і N — середини сторін AD і BC паралелограма $ABCD$ (*див. рисунок*). Відрізки BM і DN перетинають діагональ AC у точках E і F. Чому дорівнює довжина відрізка EC, якщо $AE = 6$ см?
2. Чому дорівнює середня лінія рівностороннього трикутника, периметр якого — 54 см?
3. Сторони трикутника відносяться як $3:5:7$, а його периметр дорівнює 60 см. Обчисліть довжини сторін трикутника, вершинами якого є середини сторін цього трикутника.
4. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три рівні частини. Обчисліть довжину меншої основи трапеції, якщо довжина більшої основи дорівнює 48 см.
5. Висота прямокутної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить її основу на відрізки, перший з яких, рахуючи від вершини прямого кута, на 4 см більший за другий. Чому дорівнюють основи трапеції, якщо її середня лінія — 13 см?

Варіант 2

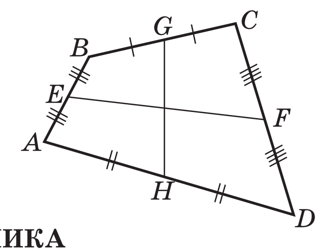


1. Точки M і N — середини сторін AD і BC паралелограма $ABCD$ (*див. рисунок*). Відрізки BM і DN перетинають діагональ AC у точках E і F. Чому дорівнює довжина відрізка FC, якщо $AF = 16$ см?
2. Периметр трикутника, утвореного середніми лініями рівностороннього трикутника ABC, дорівнює 18 см. Чому дорівнює AB?
3. Периметр трикутника дорівнює 68 см, а довжини його середніх ліній відносяться як $4:6:7$. Обчисліть довжини сторін цього трикутника.
4. Діагоналі трапеції ділять її середню лінію на три рівні частини. Обчисліть довжину більшої основи трапеції, якщо довжина меншої основи дорівнює 24 см.
5. Середня лінія прямокутної трапеції дорівнює 14 см, а висота, проведена з вершини тупого кута трапеції, ділить її основу на відрізки, довжини яких відносяться як $2:3$, рахуючи від вершини прямого кута. Чому дорівнюють основи трапеції?

Відповіді. Варіант 1. 1. 12 см. 2. 9 см. 3. 6 см, 10 см, 14 см. 4. 24 см. 5. 10 см і 16 см. Варіант 2. 1. 8 см. 2. 12 см. 3. 16 см, 24 см, 28 см. 4. 48 см. 5. 8 см і 20 см.

Додатковий матеріал

СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ЧОТИРИКУТНИКА



Середня лінія чотирикутника — це відрізок, що сполучає середини протилежних сторін чотирикутника. На рисунку EF і GH — середні лінії чотирикутника $ABCD$.

ВЛАСТИВОСТІ СЕРЕДНІХ ЛІНІЙ ЧОТИРИКУТНИКА

Якщо в опуклому чотирикутнику середня лінія утворює рівні кути з діагоналями чотирикутника, то діагоналі рівні.

Довжина середньої лінії чотирикутника менша за півсуму решти двох сторін або дорівнює їй, якщо ці сторони паралельні, і лише в цьому випадку.

Точка перетину середніх ліній чотирикутника є їхньою спільною серединою та ділить навпіл відрізок, що сполучає середини діагоналей.

УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРЕМА ФАЛЕСА (ТЕОРЕМА ПРО ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ). ВЛАСТИВІСТЬ МЕДІАН ТРИКУТНИКА. ВЛАСТИВІСТЬ БІСЕКТРИСИ ТРИКУТНИКА

Очікувані результати: учні мають уміти пояснювати, що таке відношення двох відрізків; розуміти зміст узагальненої теореми Фалеса (теореми про пропорційні відрізки), теорем про перетин медіан трикутника, про властивість бісектриси трикутника; застосовувати ці теореми та властивості під час розв'язування задач.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може провести такий експеримент або навіть показати учням / ученицям «фокус».

У прямокутнику, вирізаному з картону, позначають точку перетину діагоналей. Якщо покласти цей прямокутник на вістря голки в точці перетину діагоналей, то він перебуватиме в рівновазі.

Причому якщо точку опори змістити, то прямокутник не перебуватиме в стані рівноваги. Це відбувається тому, що точка перетину діагоналей прямокутника є його центром мас.

— А чи існує така точка в трикутнику? Відповідь ствердна. Це точка перетину медіан трикутника.

Учитель / учителька може запропонувати учням / ученицям переконатися в цьому.

— Отже, точка перетину медіан трикутника є його центром мас, або центроїдом. А які ще властивості мають медіани трикутника? На найближчих уроках ми вивчимо властивості не тільки медіан, а й бісектриси трикутника, навчимося застосовувати їх під час розв'язування задач.

З метою активізації пізнавальної діяльності учнів / учениць і зацікавленості їх у вивченні математики вчитель / учителька може провести коротку бесіду про деякі чудові точки трикутника (*див. додатковий матеріал*).

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➢ ***Фронтальне опитування***

1. Що називають відношенням двох чисел?
2. Що називають пропорцією? Наведіть приклади пропорцій.
3. Сформулюйте основну властивість пропорції.
4. Як знайти невідомий член пропорції, якщо відомі три його члени?
5. Що називають медіаною трикутника?
6. Скільки медіан можна провести в одному трикутнику?
7. Що називають бісектрисою трикутника?
8. Скільки бісектрис можна провести в одному трикутнику?

➢ ***Усні вправи***

1. Чому дорівнює відношення чисел:

   1) 6 і 3; 2) 3 і 7; 3) 5 і 2,5?

2. Обчисліть невідомий член пропорції:

   1) $\frac{6}{3}=\frac{x}{8}$; 2) $\frac{2{,}5}{x}=\frac{1}{4}$; 3) $\frac{x}{3}=\frac{12}{x}$.

3. Відомо, що $\frac{AB}{CD}=\frac{MK}{NP}$, $CD=9$ см, $MK=12$ см, $NP=6$ см. Обчисліть довжину AB.

4. До сторони AC трикутника ABC проведено медіану BM. Чому дорівнює:
   1) AM, якщо $AC = 14$ см; 2) AC, якщо $MC = 8$ см?

5. У трикутнику ABC проведено бісектрису BD.
   1) Які з кутів, що при цьому утворилися, є рівними?
   2) Назвіть відрізки, на які точка D ділить сторону AC.
   3) Укажіть відрізок, прилеглий до сторони AB.
   4) До якої зі сторін прилеглий відрізок DC?

6. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) $\angle B = 120°$, BD — бісектриса трикутника. Чому дорівнюють градусні міри кутів трикутника BDC?

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Що називають відношенням двох відрізків.
   ! Відношенням двох відрізків називають відношення їхніх довжин, виражених в одних і тих самих одиницях вимірювання.

2. Означення пропорційних відрізків.
   ! Відрізки завдовжки a і c пропорційні відрізкам завдовжки b і d, якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

3. Узагальнена теорема Фалеса (теорема про пропорційні відрізки).
   ! Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, які утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, які утворилися на другій стороні кута.

4. Теорема про медіани трикутника.
   ! Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні 2:1, починаючи від вершини трикутника.

5. Властивість бісектриси трикутника.
   - Бісектриса трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам.

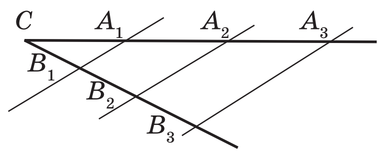
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

➢ ***Усні вправи***

1. Чому дорівнює відношення відрізків AB і CD, якщо їхні довжини відповідно дорівнюють 15 см і 20 см? Чи зміниться це відношення, якщо довжини цих відрізків виразити в міліметрах?

2. Чи пропорційні відрізки AB і CD відрізкам A_1B_1 і C_1D_1, якщо $AB = 2$ см, $A_1B_1 = 5$ см, $CD = 2{,}4$ см, $C_1D_1 = 6$ см?

3. На рисунку прямі $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $CA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$. Чому дорівнює відношення $CB_2 : B_2B_3$?



4. У трикутнику ABC $AC = 9$ см, AD — бісектриса, $BD = 5$ см, $DC = 3$ см. Чому дорівнює AB?

5. Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC, $BD = 10{,}5$ см, $DC = 3{,}5$ см. Чому дорівнює відношення $\frac{AC}{AB}$?

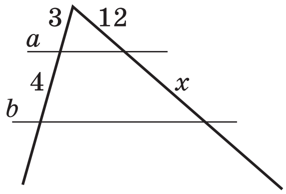
6. Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC, $BD = 10$ см, $DC = 5$ см. Наведіть приклади трьох пар сторін, які можуть бути сторонами AB і BC трикутника ABC. Чи можуть сторони AB і BC відповідно дорівнювати 8 см і 4 см?

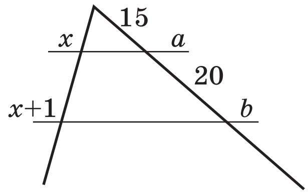
➢ *Письмові вправи*

1. Відрізки AB і CD пропорційні відрізкам EF і MN. Обчисліть довжину відрізка EF, якщо $AB = 5$ см, $CD = 80$ мм, $MN = 1$ дм.

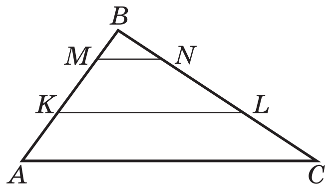
2. У паралелограмі $ABCD$ діагоналі перетинаються в точці O, $CD = 8$ см. Обчисліть периметр паралелограма, якщо $\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AO}$.

3. На рисунку $a \parallel b$. Обчисліть x, скориставшись рисунком.

1) 

2) 

4. На рисунку $AKLC$ і $KMNL$ — трапеції. Обчисліть довжини відрізків BN, NL і LC, якщо $AK : KM : MB = 2 : 3 : 1$, $BC = 24$ см.



5. Медіани AF і BD трикутника ABC перетинаються в точці E. Обчисліть довжини відрізків AE і DE, якщо $AF = 15$ см, $BD = 9$ см.

6. Медіани BM і CN трикутника ABC перетинаються в точці K. Обчисліть периметр трикутника BCK, якщо $BM = 12$ см, $CN = 18$ см, $BC = 16$ см.

7. Сторони AC і BC трикутника ABC відповідно дорівнюють 10 см і 12 см. Медіани AM і BN трикутника перетинаються в точці K, $AM = 6$ см, $BN = 9$ см. Обчисліть периметр чотирикутника $CNKM$.

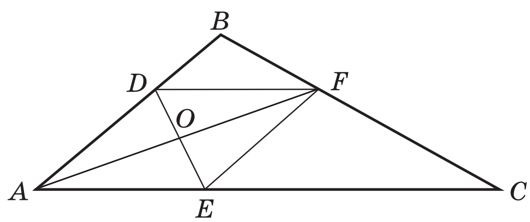
8. Медіани рівностороннього трикутника перетинаються в точці O. Обчисліть відстань від точки O до сторін трикутника, якщо медіани дорівнюють по 3 см.

9. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) точка M перетину медіан віддалена від основи на 4 см. Обчисліть відстань від точки M до вершини B.

10. Бісектриса рівнобедреного трикутника ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 2 см і 4 см, починаючи від основи трикутника. Обчисліть довжину основи трикутника.

11. Бісектриса DN трикутника DEF ділить сторону EF на відрізки $EN = 2$ см і $NF = 3$ см. Обчисліть периметр трикутника DEF, якщо $DE = 4$ см.

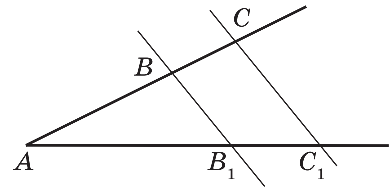
12. На рисунку в трикутник ABC вписано ромб так, що кут A у них спільний, а протилежна до нього вершина F лежить на стороні трикутника BC. Чому дорівнює відношення $BF : FC$, якщо $AB = 15$ см, $AC = 10$ см?



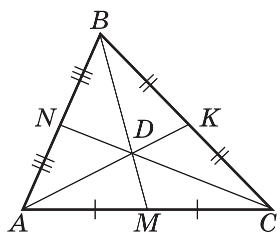
13. Відрізок CM — бісектриса трикутника ABC. Обчисліть периметр цього трикутника, якщо $AC = 12$ см, $MB = 4$ см, $\frac{MB}{CB} = 0{,}25$.

➢ *Картка-підказка для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань*

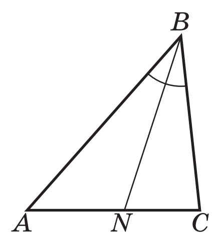
Картка 1

Узагальнена теорема Фалеса	
Якщо паралельні прямі перетинають сторони кута, то відрізки, які утворилися на одній стороні кута, пропорційні відповідним відрізкам, які утворилися на другій стороні кута. $BB_1 \parallel CC_1 \;\Rightarrow\; \dfrac{AB}{BC}=\dfrac{AB_1}{B_1C_1},\; \dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AC_1}{AB_1}$	

Картка 2

Властивість медіан трикутника	
Усі три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка ділить кожну з них у відношенні $2:1$, починаючи від вершини трикутника. Медіани трикутника перетинаються в точці D $\Downarrow$ $BD:DM=2:1,\; AD:DK=2:1,\; CD:DN=2:1$	

Картка 3

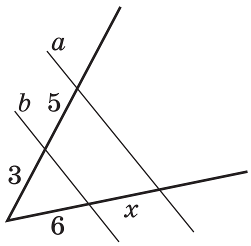
Властивість бісектриси трикутника	
Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні решті двом сторонам. BN — бісектриса ($\angle ABN=\angle CBN$) $\Rightarrow \dfrac{AN}{CN}=\dfrac{AB}{BC}$	

➢ *Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики*

1. У трикутнику ABC на стороні AC позначено точку D. Доведіть, що якщо $\dfrac{AD}{DC}>\dfrac{AB}{BC}$, то $\angle ABD>\angle DBC$.
2. У прямокутний трикутник ABC $(\angle C=90°)$ вписано квадрат $MKDC$ так, що точка K лежить на гіпотенузі AB. Обчисліть довжини відрізків AK і BK, якщо $AC=21$ см, $BC=28$ см, $AB=35$ см.
   Відповідь. $AK=15$ см, $BK=20$ см.
3. У трикутнику ABC кут B удвічі більший за кут A. Знайдіть залежність між сторонами a, b, c цього трикутника, де $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$.
   Відповідь. $\dfrac{cb}{a+c}$.

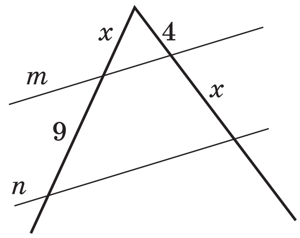
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➤ ***Завдання 1 за рисунками. Узагальнена теорема Фалеса***

1) 

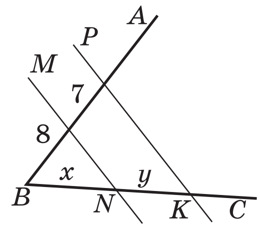
$a \parallel b$

Чому дорівнює x?

2) 

$m \parallel n$

Чому дорівнює x?

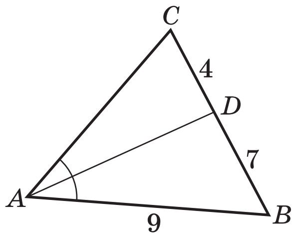
3) 

$MN \parallel PK$, $BK = 30$

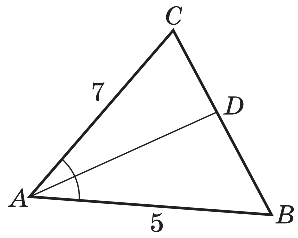
Чому дорівнюють x і y?

➤ ***Завдання 2 за рисунками. Властивість бісектриси трикутника***

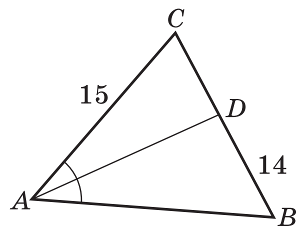
AD — бісектриса трикутника ABC.

1) 

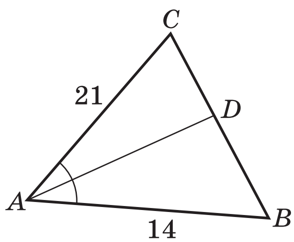
AC — ?

2) 

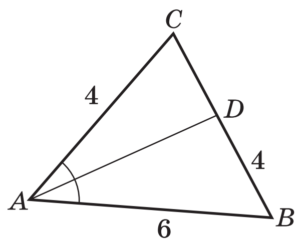
$BC = 8$, CD — ?

3) 

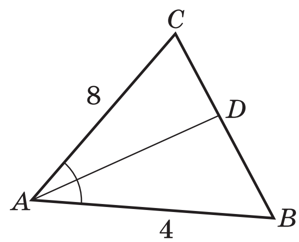
$CB = 24$, AB — ?

4) 

$BC = 20$, BD — ? CD — ?

5) 

P_{ABC} — ?

6) 

$BC = 6$, $P_{ACD} - P_{ABD}$ — ?

➤ ***Дидактична гра «Назвіть слово»***

Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у декілька команд (залежно від їхньої кількості). Усі команди отримують картки із завданням: з букв, що відповідають правильним твердженням, наведеним у картках, утворити слово. Перемагає команда, яка першою правильно назве утворене слово.

Приклад картки

Відрізки завдовжки a і c пропорційні відрізкам завдовжки b і d, якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$	**А**
Відрізки завдовжки a і c пропорційні відрізкам завдовжки b і d, якщо $a + b = c + d$	**Г**
Медіани трикутника перетинаються в трьох різних точках	**Е**
Усі медіани трикутника перетинаються в одній точці	**Т**
Медіани трикутника точкою перетину діляться у відношенні $1:2$, починаючи від вершини трикутника	**Р**

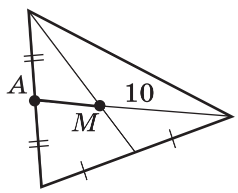
Медіани трикутника точкою перетину діляться у відношенні $2:1$, починаючи від вершини трикутника	**О**
Бісектриса трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, пропорційні прилеглим до них сторонам	**М**
Бісектриса трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на відрізки, довжини яких відносяться як $2:1$	**Б**

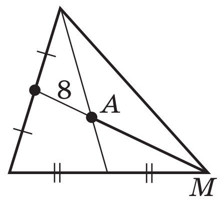
Відповідь. АТОМ.

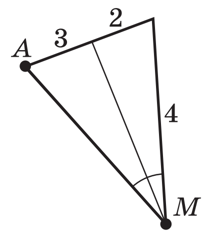
➢ ***Робота на картках із друкованою основою***

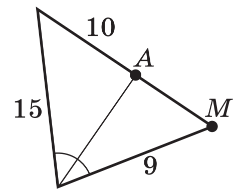
Варіант 1

1. На кожному з рисунків напишіть довжину відрізка AM.

1) 

2) 

3) 

4) 

2. Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC, $BD=8$ см, $DC=4$ см. У квадратику поряд з парою відрізків поставте позначку ✓, якщо ці відрізки можуть бути сторонами AB і BC трикутника ABC.

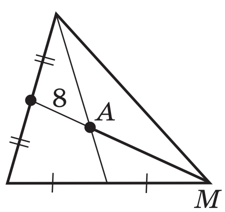
1) $AB=12$ см, $AC=6$ см ☐;

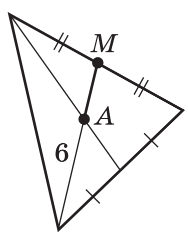
2) $AB=5$ см, $AC=10$ см ☐;

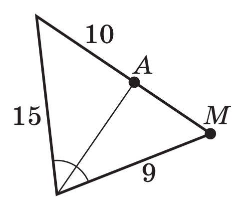
3) $AB=9$ см, $AC=4{,}5$ см ☐

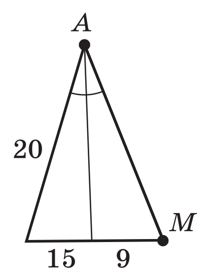
Варіант 2

1. На кожному з рисунків напишіть довжину відрізка AM.

1) 

2) 

3) 

4) 

2. Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC, $BD=4$ см, $DC=12$ см. У квадратику поряд з парою відрізків поставте позначку ✓, якщо ці відрізки можуть бути сторонами AB і BC трикутника ABC.

1) $AB=15$ см, $AC=5$ см ☐;

2) $AB=6$ см, $AC=18$ см ☐;

3) $AB=4{,}4$ см, $AC=13{,}2$ см ☐

➢ *Тестові завдання з подальшою самоперевіркою і самооцінюванням*

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Відрізки AB і CD пропорційні відрізкам MK і NP. Чому дорівнює довжина відрізка CD, якщо $AB = 6$ см, $MK = 4$ см, $NP = 5$ см?

А	Б	В	Г
3 см	7,5 см	2,5 см	8 см

2. Медіани трикутника ABC перетинаються в точці K. Чому дорівнює довжина медіани AM, якщо довжина відрізка AK на 4 см більша за довжину відрізка KM?

А	Б	В	Г
12 см	8 см	16 см	6 см

3. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $CD = 4$ см, $BC = 12$ см, $AB = 15$ см. Чому дорівнює довжина сторони AC?

А	Б	В	Г
5 см	13,5 см	9 см	8 см

4. Бісектриса AD трикутника ABC ділить сторону BC на відрізки, так що $BD - CD = 3$ см. Чому дорівнює периметр трикутника, якщо $AB = 21$ см, $AC = 14$ см?

А	Б	В	Г
50 см	44 см	41 см	38 см

Відповіді. 1. Б. 2. А. 3. В. 4. А.

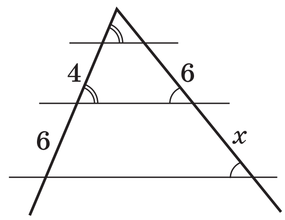
➢ *Тестові завдання*

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Скориставшись рисунком, обчисліть x.

А	Б	В	Г
4	8	9	12



2. Медіани AM і BK трикутника ABC перетинаються в точці O. Чому дорівнює довжина відрізка OK, якщо $BK = 12$ см?

А	Б	В	Г
4 см	8 см	6 см	2,4 см

3. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $BC = 6$ см, $DC = 4$ см, $AC = 14$ см. Чому дорівнює довжина сторони AB?

А	Б	В	Г
10 см	15 см	12 см	18 см

4. Бісектриса AD трикутника ABC ділить сторону BC на відрізки, один з яких на 4 см менший, ніж другий. Чому дорівнює сторона BC, якщо $AB = 15$ см, $AC = 9$ см?

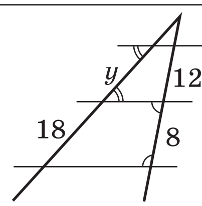
А	Б	В	Г
10 см	6 см	12 см	16 см

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Скориставшись рисунком, обчисліть y.

А	Б	В	Г
27	24	30	16



2. Медіани AM і BK трикутника ABC перетинаються в точці O. Чому дорівнює довжина відрізка AO, якщо $AM = 18$ см?

А	Б	В	Г
4,5 см	9 см	12 см	6 см

3. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $BC = 9$ см, $AC = 16$ см, $DC = 6$ см. Чому дорівнює довжина сторони AB?

А	Б	В	Г
9 см	12 см	24 см	15 см

4. Бісектриса BD трикутника ABC ділить сторону BC на відрізки, один з яких на 1 см більший, ніж другий. Чому дорівнює сторона AC, якщо $AB = 18$ см, $BC = 20$ см?

А	Б	В	Г
21 см	19 см	10 см	9 см

Відповіді. Варіант 1. 1. В. 2. А. 3. Б. 4. Г. Варіант 2. 1. А. 2. В. 3. Г. 4. Б.

➢ ***Робота в парах***

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC. Обчисліть:

1) довжини відрізків AD і DC, якщо $AB = 8$ см, $BC = 14$ см, $AC = 11$ см;
2) довжину сторони AC, якщо $AB : BC = 2 : 3$, $CD - AD = 3$ см;
3) довжини сторін AB, BC і AC, якщо $AB + BC = 56$ см, $AD = 9$ см, $DC = 15$ см.

Варіант 2

Відрізок AK — бісектриса трикутника ABC. Обчисліть:

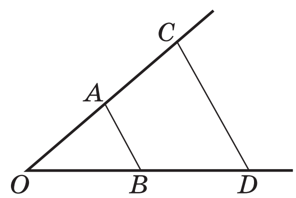
1) довжини відрізків BK і KC, якщо $AB = 8$ см, $AC = 12$ см, $BC = 10$ см;
2) довжину сторони AB, якщо $BK : KC = 3 : 7$, $AC = 28$ см;
3) довжини сторін AB і AC, якщо $AC - AB = 9$ см, $BK : KC = 4 : 7$.

➢ ***Завдання на встановлення відповідності***

Варіант 1

На рисунку $AB \parallel CD$. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Г) так, щоб утворилося правильне твердження.

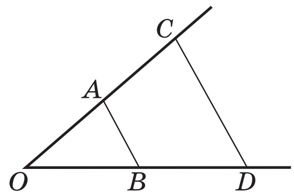
1	Якщо $OA = 5$ см, $AC = 4$ см, $OB = 10$ см, то...	А	$BD = 6$ см
2	Якщо $OA = 4$ см, $OC = 6$ см, $OB = 8$ см, то...	Б	$BD = 2$ см
3	Якщо $OC = 10$ см, $AC = 4$ см, $OB = 3$ см, то...	В	$BD = 8$ см
		Г	$BD = 4$ см



Варіант 2

На рисунку $AB \parallel CD$. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Г) так, щоб утворилося правильне твердження.

1	Якщо $OA = 6$ см, $BD = 4$ см, $OB = 8$ см, то...	**А**	$AC = 8$ см
2	Якщо $OB = 4$ см, $OD = 16$ см, $OA = 2$ см, то...	**Б**	$AC = 3$ см
3	Якщо $OD = 9$ см, $BD = 4$ см, $OA = 10$ см, то...	**В**	$AC = 6$ см
		Г	$AC = 2$ см



Відповіді. Варіант 1. 1 — В. 2 — Г. 3 — Б. Варіант 2. 1 — Б. 2 — В. 3 — Г.

➢ *Самостійна робота*

Варіант 1

1. Паралельні прямі a і b перетинають сторону OA кута AOB у точках N і P, а сторону OB — у точках M і K, починаючи від вершини. Обчисліть довжину відрізка OM, якщо $ON = 4$ м, $OP = 10$ м, $MK = 9$ м.
2. Медіани AK і BM трикутника ABC перетинаються в точці O. Обчисліть довжини відрізків BO і OK, якщо $AK = 6$ см, $BM = 9$ см.
3. Медіани AP і BD трикутника ABC перетинаються в точці K, причому $KP = 6$ см, $BK = 8$ см. Чому дорівнює периметр трикутника AKD, якщо $AC = 20$ см?
4. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $AD : DC = 3 : 4$. Обчисліть довжину сторони AB, якщо $BC = 24$ см.
5. Периметр трикутника дорівнює 30 см, а його бісектриса ділить протилежну сторону на відрізки завдовжки 7 см і 3 см. Обчисліть довжини сторін трикутника.

Варіант 2

1. Паралельні прямі a і b перетинають сторону OA кута AOB у точках N і P, а сторону OB — у точках M і K, починаючи від вершини. Обчисліть довжину відрізка NP, якщо $OM = 3$ м, $OK = 15$ м, $ON = 4$ м.
2. Медіани AK і BM трикутника ABC перетинаються в точці O. Обчисліть довжини відрізків AO і OM, якщо $AK = 12$ см, $BM = 15$ см.
3. Медіани BF і CK трикутника ABC перетинаються в точці D, причому $BD = 14$ см, $KD = 6$ см. Чому дорівнює периметр трикутника DFC, якщо $AC = 18$ см?
4. Відрізок BD — бісектриса трикутника ABC, $AD : DC = 3 : 4$. Обчисліть довжину сторони BC, якщо $AB = 36$ см.
5. Периметр трикутника дорівнює 35 см. Обчисліть довжини відрізків, на які бісектриса трикутника ділить протилежну сторону, якщо решта дві сторони трикутника дорівнюють 12 см і 16 см.

Відповіді. Варіант 1. 1. 6 м. 2. $BO = 6$ см, $OK = 2$ см. 3. 26 см. 4. 18 см. 5. 14 см, 6 см. Варіант 2. 1. 16 м. 2. $AO = 8$ см, $OM = 5$ см. 3. 28 см. 4. 48 см. 5. 3 см і 4 см.

ЧУДОВІ ТОЧКИ ТРИКУТНИКА

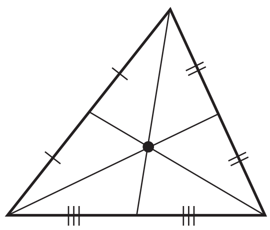
Чудові точки трикутника — це точки, розташування яких однозначно визначається трикутником і не залежить від того, у якому порядку взято сторони й вершини трикутника.

Зазвичай чудові точки розташовані всередині трикутника, але є винятки. Наприклад, точка перетину висот може лежати поза трикутником.

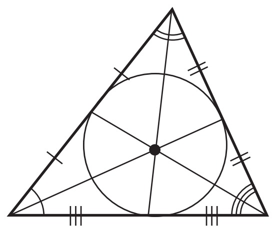
Енциклопедія чудових точок трикутника (англ. *The Encyclopedia of Triangle Centers; ETC*) містить понад 32 тис. (станом на 2019 рік) «центрів трикутника» — точок, пов'язаних з геометрією трикутника.

ДЕЯКІ ПРИКЛАДИ ЧУДОВИХ ТОЧОК ТРИКУТНИКА

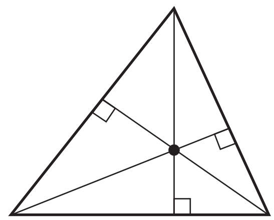
- Центроїд, або центр мас — точка перетину медіан трикутника.
- Інцентр, або центр уписаного кола — точка перетину бісектрис трикутника.
- Ортоцентр — точка перетину висот трикутника.
- Центр описаного кола — точка перетину серединних перпендикулярів трикутника.



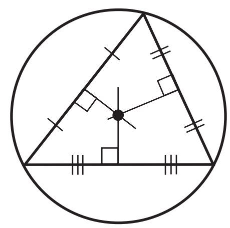
Центроїд



Інцентр



Ортоцентр



Центр описаного кола

Якщо хоча б дві із цих чотирьох чудових точок трикутника збігаються, то трикутник є рівностороннім.

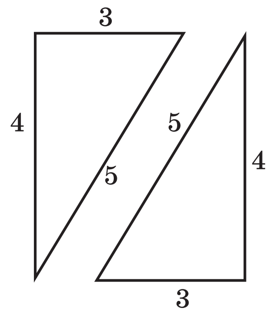
ПОДІБНІ ТРИКУТНИКИ. ОЗНАКИ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Очікувані результати: учні мають розуміти й уміти пояснювати зв'язок між рівністю і подібністю геометричних фігур; пояснювати, які два трикутники називають подібними; зображувати та знаходити на рисунках подібні трикутники; володіти навичкою складання пропорцій для відповідних сторін подібних трикутників; застосовувати пропорційність відповідних сторін подібних трикутників до розв'язування задач; розуміти зміст ознак подібності трикутників; обґрунтовувати подібність трикутників; застосовувати ознаки подібності трикутників під час розв'язування задач, зокрема практичного змісту.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може запропонувати учням / ученицям обговорити таку ситуацію.

Восьмикласники вирішили на шкільному подвір'ї облаштувати квітник у вигляді двох прямокутних трикутників, між якими проходить доріжка. На аркуші паперу вони зобразили план цього квітника, на якому сторони трикутників дорівнювали 3 см, 4 см і 5 см (*див. рисунок*), а на подвір'ї запланували зобразити трикутники такої самої форми зі сторонами в 100 разів більшими, тобто 3 м, 4 м і 5 м.



Перед тим як облаштовувати квітник, восьмикласники хотіли купити декоративну огорожу. Тоді постало питання: скільки метрів такої огорожі потрібно придбати? Чи правильно, що, для того щоб знайти периметри трикутників на землі, можна периметри трикутників на папері помножити на 100? Вони звернулися до вчителя / учительки математики й отримали пояснення: якщо всі сторони одного трикутника в 100 разів більші за відповідні сторони другого трикутника, то такі трикутники є подібними. А точне означення та властивості подібних трикутників ми вивчимо на уроках математики.

Потім учитель / учителька може поставити такі запитання:

— Що означає слово *подібний*?

— Чи є синонімами слова *подібний* і *однаковий*?

У тлумачному словнику української мови читаємо: *подібний* — це такий, що має спільні ознаки з ким-небудь або чим-небудь, схожий на когось, щось. Отже, слова *подібний* і *однаковий* не є синонімами.

У навколишньому середовищі існують предмети, які мають однакову форму, але різні розміри. Такі предмети є подібними (наприклад, тенісний і футбольний м'ячі, макет корабля і сам корабель). Наведіть інші приклади предметів, які мають однакову форму, але різні розміри. (Учні / учениці наводять приклади.) Існують також геометричні фігури, які мають однакову форму, але різні розміри (наприклад, квадрати, кола). Геометричні фігури, які мають однакову форму, називають подібними. Тобто будь-які два квадрати або будь-які два кола є подібними один до одного. А чи подібні один до одного будь-які два трикутники? Очевидно, відповідь заперечна. Адже існують трикутники, які мають різні форми й різні розміри. А чи існують подібні трикутники? Відповідь ствердна.

На найближчих уроках ми дізнаємось, які трикутники називають подібними, вивчимо властивості подібних трикутників, ознаки подібності трикутників, навчимося розв'язувати задачі на застосування поняття й ознак подібності трикутників.

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➤ ***Усні вправи***

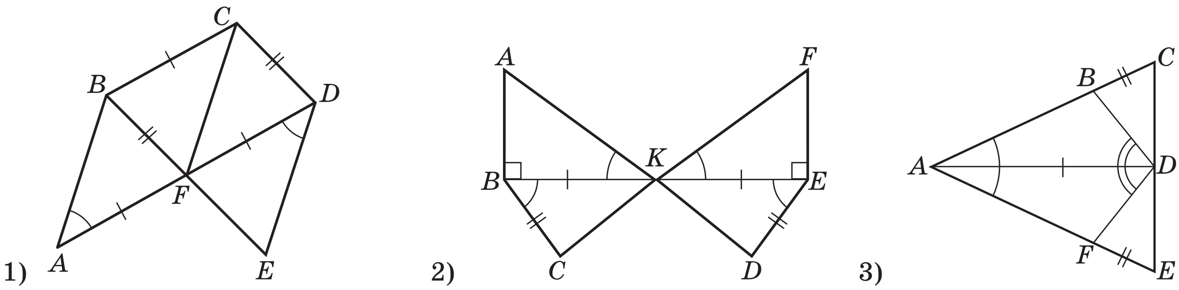
1. Чому дорівнюють кути трикутника MPK, якщо $\Delta ABC = \Delta MPK$, $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$?
2. Чому дорівнюють сторони трикутника ABC, якщо $\Delta ABC = \Delta MPK$, $MP = 6$ см, $PK = 8$ см, $MK = 10$ см?

3. Відомо, що в трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ відповідні сторони рівні. Чи випливає із цього, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$?

4. Відомо, що в трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ відповідні кути рівні. Чи випливає з цього, що $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$?

➢ ***Завдання за рисунками (повторення ознак рівності трикутників)***

Скориставшись рисунками, укажіть рівні трикутники й поясніть, чому вони рівні.



ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Уявлення про подібні фігури.
   ! Геометричні фігури, які мають однакову форму, називають подібними.

2. Означення подібних трикутників.
   ! Два трикутники називають подібними, якщо в них рівні кути й відповідні сторони пропорційні.

3. Означення коефіцієнта подібності.
   ! Коефіцієнтом подібності називають відношення відповідних сторін подібних трикутників.

4. Властивості подібних трикутників.
   - Відношення периметрів подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.
   - Відношення відповідних лінійних елементів (медіан, бісектрис, висот тощо) подібних трикутників дорівнює коефіцієнту подібності.

5. Ознака подібності трикутників за двома кутами (перша ознака подібності трикутників).
   - Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

6. Ознака подібності трикутників за двома сторонами та кутом між ними (друга ознака подібності трикутників).
   - Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам другого трикутника й кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

7. Ознака подібності трикутників за трьома сторонами (третя ознака подібності трикутників).
   - Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники подібні.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

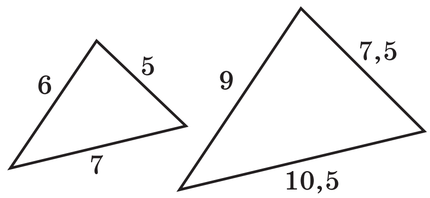
➢ ***Усні вправи***

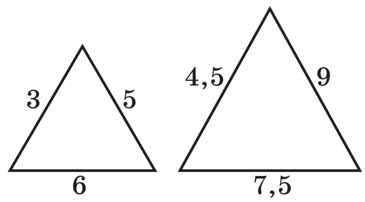
1. Периметри двох квадратів дорівнюють 16 см і 8 см. Якщо квадрати подібні, укажіть коефіцієнт подібності.

2. Довжини двох кіл дорівнюють 6π см і 9π см. Якщо кола подібні, укажіть коефіцієнт подібності.

3. Трикутник $A_1B_1C_1$ подібний трикутнику ABC. Сторони трикутника ABC дорівнюють 5 см, 12 см, 15 см. Найбільша сторона трикутника $A_1B_1C_1$ дорівнює найменшій стороні трикутника ABC. Чому дорівнює коефіцієнт подібності?

4. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 6 см, 5 см. Менша сторона другого трикутника, подібного заданому, дорівнює 2,5 см. Обчисліть довжини решти сторін другого трикутника.
5. Сторони трикутника дорівнюють 8 см, 6 см, 5 см. Більша сторона другого трикутника, подібного заданому, дорівнює 16 см. Обчисліть довжини решти сторін другого трикутника.
6. Сторони трикутника дорівнюють 5 см, 6 см і 8 см. Чому дорівнює периметр подібного йому трикутника, у якому різниця найбільшої та найменшої сторін дорівнює 12 см?
7. Чи подібні трикутники, зображені на рисунках?

1) 

2) 

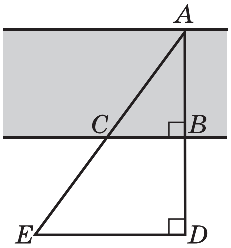
8. Чи подібні трикутники, якщо їхні сторони відповідно дорівнюють:
   1) 3 м, 4 м, 5 м і 6 м, 7 м, 8 м;
   2) 7 см, 6 см, 7,5 см і 14 см, 12 см, 15 см?
9. Чи подібні трикутники, якщо кожна сторона одного з них становить 30 % кожної зі сторін другого?
10. Чи обов'язково подібні:
   1) два рівносторонніх трикутники;
   2) два рівнобедрених трикутники?
11. Сторони трикутника дорівнюють 3 см, 4 см, 5 см. Скільки метрів декоративної огорожі потрібно, що загородити два квітники у вигляді трикутників, відповідні сторони яких у 100 разів більші за сторони цього трикутника? (*Завдання, запропоноване на етапі мотивації навчальної діяльності.*)
    Відповідь. 24 м.
12. Два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам другого трикутника. Сторони першого трикутника відносяться як $7:5:3$. Обчисліть довжину найменшої сторони другого трикутника, якщо його периметр дорівнює 45 см.

➢ *Письмові вправи*

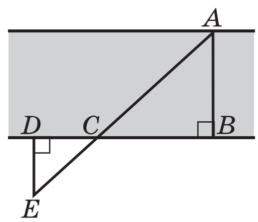
1. Трикутники ABC і DEF подібні, $EF = 14$ см, $DF = 20$ см, $BC = 21$ см. Обчисліть довжину сторони AC.
2. Трикутники ABC і MKT подібні, $AB = 18$ см, $AC = 15$ см, $MK = 12$ см. Обчисліть довжину сторони MT.
3. Діагональ AC ділить трапецію $ABCD$ на два подібних трикутники ABC і DCA, $BC = 4$ см, $AD = 9$ см. Обчисліть довжину діагоналі AC.
4. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) діагональ AC є бісектрисою кута A і ділить трапецію на два подібних трикутники ABC і ACD, $AB = 9$ см, $CD = 12$ см. Обчисліть периметр трапеції.
5. У чотирикутнику $ABCD$ $AB = 10$ см, $BC = 14$ см, $CD = 18$ см, $DA = 22$ см. Діагональ AC дорівнює середньому арифметичному сторін AB і CD. Чи подібні трикутники, на які діагональ розділила чотирикутник? Відповідь обґрунтуйте.
6. Сторони паралелограма дорівнюють 15 см і 30 см, а відстань між меншими сторонами — 20 см. Обчисліть відстань між більшими сторонами паралелограма.
7. Периметр паралелограма дорівнює 70 см, а його висоти — 3 см і 4 см. Чому дорівнюють сторони паралелограма?
8. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O, $\dfrac{AO}{OB} = \dfrac{DO}{OC} = \dfrac{3}{5}$, $AD = 9$ см. Обчисліть довжину відрізка BC.
9. Точки K і N лежать відповідно на сторонах AB і BC трикутника ABC, $AB = 12$ см, $BK = 4$ см, $BC = 15$ см, $BN = 8$ см. У скільки разів периметр трикутника ABC більший за периметр трикутника KBN?

10. У прямокутних трикутниках ABC (кут A — прямий) і $A_1B_1C_1$ (кут A_1 — прямий) $AB = 8$ см, $AC = 6$ см, $A_1B_1 = 4$ см, $A_1C_1 = 3$ см, $\angle B = 40°$. Чому дорівнює градусна міра кута C_1?
11. На сторонах AB і AC трикутника ABC позначено відповідно точки N і M так, що $\frac{AB}{AN} = \frac{AC}{AM} = 3$. $NM = 4$ см. Обчисліть довжину сторони BC.
12. У трикутнику ABC на стороні AB позначили точку K, а на стороні BC — точку N так, що $\angle BAN = \angle BCK$, $AK = 0{,}5$ см, $KB = 7{,}5$ см, $BN = 5$ см. Обчисліть довжину відрізка NC.
13. Кути між бічними сторонами двох рівнобедрених трикутників рівні. Основа й бічні сторони першого трикутника відповідно дорівнюють 18 см і 12 см. Обчисліть довжину основи другого трикутника, якщо його периметр дорівнює 7 см.
14. У трикутнику KMP $KM = 6$ см, $MP = 7$ см, $KP = 9$ см. У трикутнику ABC $AB = 27$ см, $BC = 21$ см, $AC = 18$ см. Укажіть кут, рівний куту ACB.
15. На рисунках показано, як у різний спосіб можна обчислити ширину річки. Обчисліть ширину AB річки, якщо:

    1) $ED = 6$ м, $BD = 4$ м, $CB = 3$ м; 2) $DE = 2$ м, $DC = 3$ м, $CB = 6$ м.



1)

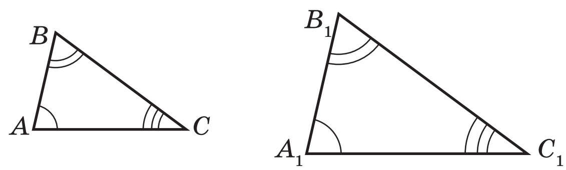


2)

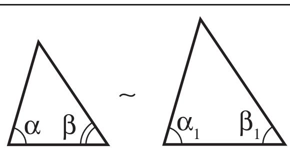
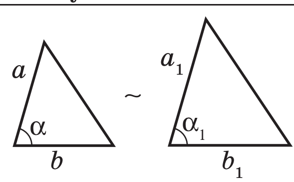
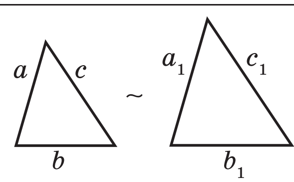
16. Для обчислення відстані від точки A до недоступної точки B на місцевості вибрали точку C і виміряли відрізок AC, кути BAC і ACB. Потім побудували на аркуші паперу трикутник $A_1B_1C_1$, подібний трикутнику ABC. Чому дорівнює AB, якщо $AC = 42$ м, $A_1C_1 = 6{,}3$ см, $A_1B_1 = 7{,}2$ см?

➢ ***Картки-підказки для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

Картка 1

Означення подібних трикутників	
$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l}\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1, \\ \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k\end{array}}$	

Картка 2

Ознаки подібності трикутників		
За двома кутами	**За двома сторонами й кутом між ними**	**За трьома сторонами**
 $\alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1$	 $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1},\ \alpha = \alpha_1$	 $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

➢ *Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики*

1. Трикутники ABC і $C_1A_1B_1$ подібні, AM — висота трикутника ABC, C_1K_1 — висота трикутника $C_1A_1B_1$, $BC:A_1B_1=3:4$, $AC=6$ см, $\angle A_1=15°$. Чому дорівнює:

   1) B_1C_1; 2) $\angle B$; 3) $C_1K_1:AM$?

   Відповідь. 1) 8 см; 2) 15°; 3) 4 : 3.

2. У трикутнику ABC BK — висота, $AK=5{,}5$ см, $KC=5{,}5$ см. У трикутнику DEF $\angle D=\angle F$, $DE=5\frac{1}{3}$ см. $\Delta ABC\sim\Delta DEF$, $P_{ABC}:P_{DEF}=3:2$. Обчисліть периметри цих трикутників.

   Відповідь. 27 см, 18 см.

3. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$, $AC=14$ см, сторона AB на 4 см менша від сторони BC, сторона A_1B_1 на 3 см більша за сторону AB, а сторона B_1C_1 на 9 см більша за сторону AB. Обчисліть довжини невідомих сторін трикутників ABC і $A_1B_1C_1$.

   Відповідь. $AB=6$ см, $BC=10$ см, $A_1B_1=9$ см, $B_1C_1=15$ см, $A_1C_1=21$ см.

4. Відрізок BD — висота гострокутного трикутника ABC. MP — середня лінія трикутника ABD, паралельна стороні AB, PK — середня лінія трикутника BDC, паралельна BC. Доведіть, що $\Delta ABC\sim\Delta MPK$.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➢ *Бліцопитування 1. Означення подібних трикутників*

Чи правильно, що...

1. якщо $\Delta MNK\sim\Delta PTQ$, то $\angle M=\angle P$, $\angle N=\angle Q$, $\angle K=\angle T$;
2. якщо $\Delta MNK\sim\Delta PTQ$, то $\frac{MN}{PT}=\frac{MK}{PQ}=\frac{NK}{TQ}$;
3. якщо $\Delta MNK\sim\Delta PTQ$ і $\frac{MK}{PQ}=k$, то $P_{MNK}=k\cdot P_{PTQ}$;
4. якщо $\Delta MNK\sim\Delta PTQ$, $\frac{MK}{PQ}=k$, MM_1 — висота трикутника MNK, PP_1 — бісектриса трикутника PTQ, то $\frac{MM_1}{PP_1}=k$?

➢ *Бліцопитування 2. Ознаки подібності трикутників*

1. У трикутниках ABC і MNK $\angle A=\angle M$, $\angle C=\angle K$. Чи правильно, що $\frac{AB}{MN}=\frac{AC}{NK}$?
2. У трикутниках ABC і MNK $\angle B=\angle N$, $\angle C=\angle K$. Чи правильно, що $\frac{BC}{NK}=\frac{AC}{MK}$?
3. У трикутниках ABC і MNK $\frac{AB}{MN}=\frac{AC}{MK}$, $\angle A=\angle M$. Чи правильно, що $\angle B=\angle N$?
4. У трикутниках ABC і MNK $\frac{AB}{MN}=\frac{AC}{MK}=\frac{BC}{NK}$. Чи правильно, що $\angle A=\angle K$?

➢ *Математичний диктант*

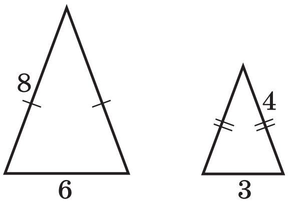
Напишіть лише номер запитання та відповідь: так / ні.

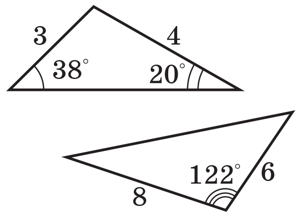
Чи правильно, що подібність трикутників можна встановити за:

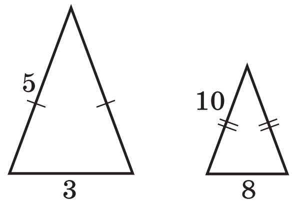
1) двома кутами трикутників;
2) двома сторонами трикутника;
3) двома сторонами та яким-небудь кутом трикутника;
4) двома сторонами й кутом між ними;
5) за однією стороною та одним кутом трикутника;
6) за трьома сторонами трикутника?

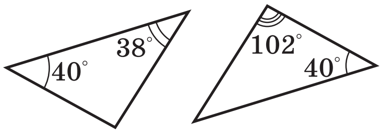
➢ *Завдання за рисунками*

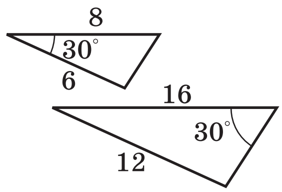
Чи подібні трикутники, зображені на рисунках? Якщо так, то укажіть ознаку, за якою трикутники подібні.

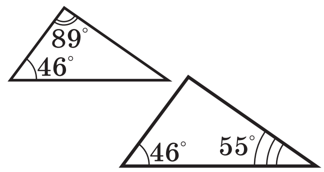
1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

6) 

➢ *Дидактична гра «Подібні трикутники»*

Учитель / учителька обирає трьох членів журі, а решту класу об'єднує у дві команди. Команди обирають капітанів, які координуватимуть роботу членів команд. Кожна команда отримує картку із завданням. На виконання завдання відводиться певний час. Після цього капітани здають картки з виконаними завданнями журі, а четверо гравців першої команди біля дошки презентують виконання завдань (кожний гравець виконує одне завдання). Гравців для цього обирає капітан. Учитель / учителька й члени команди-суперниці можуть ставити запитання, з'ясовувати незрозумілі моменти. Якщо гравець, який виконував завдання біля дошки, не зможе дати відповідь на запитання, йому допомагають члени команди. Потім команди міняються місцями. Переможців обирає журі, зважаючи на правильність і повноту відповідей.

Приклад завдання для 1-ї команди

Виконайте рисунки й напишіть подібні трикутники, які утворилися в результаті виконаних побудов.

Виконані побудови	Рисунки	Подібні трикутники
У трапеції $PTKM$ $(TK \parallel PM)$ провели діагоналі, які перетинаються в точці L		
У прямокутному трикутнику APT провели висоту AN до гіпотенузи PT		
У трикутнику DFL провели висоти DD_1 і FF_1		
У трикутнику MNP з'єднали середини сторін MN, NP і MP — відповідно точки K, L і T		

Приклад завдання для 2-ї команди

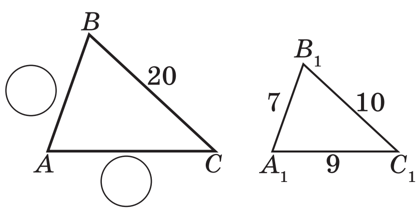
Виконайте рисунки й напишіть подібні трикутники, які утворилися в результаті виконаних побудов.

Виконані побудови	Рисунки	Подібні трикутники
У прямокутному трикутнику MKN провели висоту MB до гіпотенузи KN		
У трикутнику ADF з'єднали середини сторін AD, DF і AF — відповідно точки N, P і C		
У трапеції $KPCD$ $(PC \parallel KD)$ провели діагоналі, які перетинаються в точці T		
У трикутнику BCK провели висоти BB_1 і CC_1		

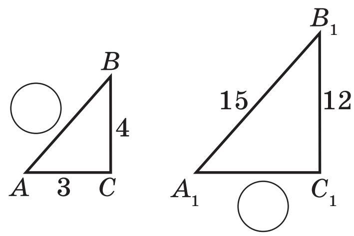
➢ *Робота на картках із друкованою основою*

Варіант 1

1. Доповніть твердження.
   1) Трикутники CPF і DQT називають подібними, якщо ________________________________.
   2) Трикутники ADK і FPM подібні за двома сторонами та кутом між ними, якщо ____________.
   3) Трикутники KNL і QPC подібні за двома кутами, якщо ______________________________.
   4) Трикутники NAM і BLK подібні за трьома сторонами, якщо ___________________________.
2. На рисунках трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні. Напишіть у кружечках довжини невідомих сторін цих трикутників.



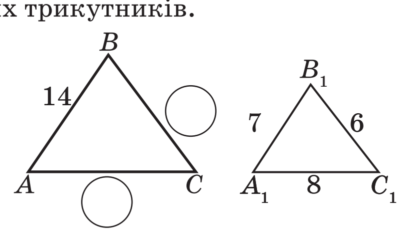
1)



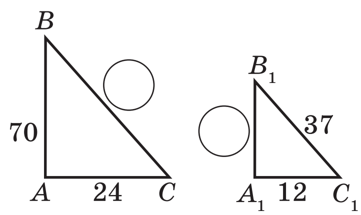
2)

Варіант 2

1. Доповніть твердження.
   1) Трикутники ANK і BCP називають подібними, якщо ________________________________.
   2) Трикутники CPM і KND подібні за трьома сторонами, якщо ___________________________.
   3) Трикутники DEF і MKN подібні за двома кутами, якщо ______________________________.
   4) Трикутники TAB і PLN подібні за двома сторонами та кутом між ними, якщо ____________.
2. На рисунках трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні. Напишіть у кружечках довжини невідомих сторін цих трикутників.



1)



2)

➢ *Тестові завдання*

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

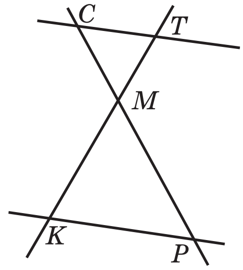
1. Трикутники ABC і EFG подібні, $AB:EF=$ $=1:4$. Сторони трикутника ABC дорівнюють 4 см, 6 см, 8 см. Чому дорівнює довжина найменшої сторони трикутника EFG?

А	Б	В	Г
2 см	1 см	32 см	16 см

2. Периметри рівносторонніх трикутників ABC і MKT відносяться як $3:5$. Чому дорівнює довжина медіани AA_1 трикутника ABC, якщо довжина медіани MM_1 трикутника MKT дорівнює 15 см?

А	Б	В	Г
5 см	9 см	3 см	45 см

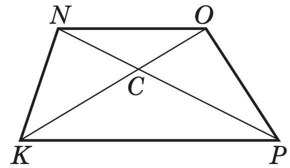
3. Прямі KT і CP перетинаються в точці M, при цьому $MT = 0{,}5KM$, $PM = 2MC$ (*див. рисунок*). Чому дорівнює периметр трикутника KMP, якщо периметр трикутника MTC дорівнює 5 см?



А	Б	В	Г
20 см	5 см	10 см	10 см

4. Яке з наведених тверджень правильне, якщо на рисунку зображено трапецію $KNOP$ ($NO \parallel KP$)?

А	Б	В	Г
$\Delta KNC \sim \Delta OCP$	$\Delta OCN \sim \Delta KCP$	$\Delta NOC \sim \Delta POC$	$\Delta CNK \sim \Delta CPK$



Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

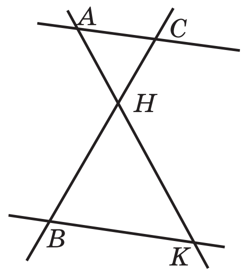
1. Трикутники ABC і DEF подібні, $AC : DF = 1 : 3$. Сторони трикутника DEF дорівнюють 6 см, 9 см, 12 см. Чому дорівнює довжина найбільшої сторони трикутника ABC?

А	Б	В	Г
2 см	4 см	18 см	36 см

2. Периметри рівносторонніх трикутників ABC і MKT відносяться як $8 : 3$. Чому дорівнює довжина медіани TT_1 трикутника MKT, якщо довжина медіани CC_1 трикутника ABC дорівнює 24 см?

А	Б	В	Г
9 см	8 см	3 см	72 см

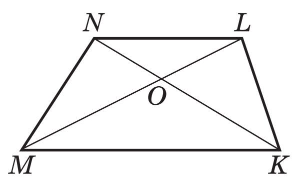
3. Прямі AK і BC перетинають в точці H, при цьому $BH = 2{,}5CH$, $AH = 0{,}4HK$ (*див. рисунок*). Чому дорівнює периметр трикутника BHK, якщо периметр трикутника AHC дорівнює 8 см?



А	Б	В	Г
32 см	2 см	4 см	20 см

4. Яке з наведених тверджень правильне, якщо на рисунку зображено трапецію $MNLK$ ($NL \parallel MK$)?

А	Б	В	Г
$\Delta MON \sim \Delta LOK$	$\Delta MON \sim \Delta MOK$	$\Delta MOK \sim \Delta LON$	$\Delta MOK \sim \Delta LOK$



Відповіді. Варіант 1. 1. Г. 2. Б. 3. В. 4. Б. Варіант 2. 1. Б. 2. А. 3. Г. 4. В.

➢ ***Робота в парах***

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. Відрізок AB перетинає пряму a в точці O. Із точок A і B до прямої a проведено перпендикуляри AM і BK. Обчисліть довжини відрізків AO і OB, якщо $P_{AOM} : P_{BOK} = 2:3$, $AB = 20$ см.
2. У трикутнику ABC $AB = 18$ см, $AC = 24$ см. На сторонах AB і AC позначено точки M і N так, що $MB = 6$ см, $NC = 8$ см. Чи подібні трикутники ABC і AMN? Відповідь обґрунтуйте.
3. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці F, $AB : BF = 3:4$. Обчисліть довжину більшої основи AD, якщо різниця основ трапеції дорівнює 6 см.

Варіант 2

1. Пряма a перетинає відрізок AB у точці O. Із точок A і B до прямої a проведено перпендикуляри AM і BK. Чому дорівнює відношення периметрів трикутників AOM і BOK, якщо $AB = 36$ см, $AO = 24$ см?
2. У трикутнику ABC $AC = 15$ см, $BC = 20$ см. На сторонах AC і BC позначено точки K і M так, що $AK = 9$ см, $CM = 8$ см. Чи подібні трикутники ABC і KMC? Відповідь обґрунтуйте.
3. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 18 см, а одна з бічних сторін — 5 см. На скільки сантиметрів потрібно подовжити цю сторону, щоб вона перетинала пряму, що містить другу бічну сторону трапеції?

➢ ***Робота в групах***

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) O — точка перетину діагоналей, $AO : OC = 5:2$, а середня лінія трапеції дорівнює 7 см. Обчисліть довжини основ трапеції.

Задача 2

У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, а сторони трикутника ABC, що утворюють кут A, у 3,5 рази більші за сторони трикутника $A_1B_1C_1$, що утворюють кут A_1. Обчисліть довжини сторін BC і B_1C_1, якщо їхня сума дорівнює 18 см.

Задача 3

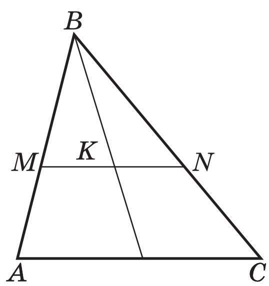
Одна з діагоналей трапеції дорівнює 28 см і ділить другу діагональ на відрізки завдовжки 5 см і 9 см. Обчисліть довжину більшої основи трапеції і відрізків, на які точка перетину діагоналей ділить першу діагональ, якщо довжина меншої основи дорівнює 6 см.

➢ ***Завдання на встановлення відповідності***

Варіант 1

Через точку K перетину медіан трикутника ABC паралельно стороні AC проведено пряму, яка перетинає сторони AB і BC у точках M і N відповідно (*див. рисунок*). Установіть відповідність між відношенням відрізків (1–3) та його числовим значенням (А–Г).

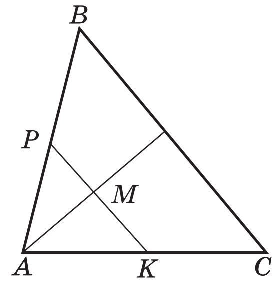
1	$AB : MB$	А	$2:1$
2	$MN : AC$	Б	$3:2$
3	$BN : NC$	В	$1:3$
		Г	$2:3$



Варіант 2

Через точку M перетину медіан трикутника ABC паралельно стороні BC проведено пряму, яка перетинає сторони AB і AC у точках P і K відповідно (*див. рисунок*). Установіть відповідність між відношенням відрізків (1–3) та його числовим значенням (А–Г).

1	$AK : AC$	А	$3:1$
2	$AB : PB$	Б	$1:2$
3	$KC : AK$	В	$2:3$
		Г	$3:2$

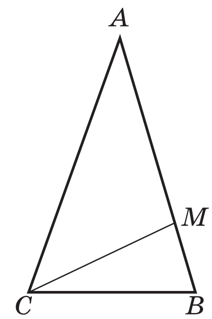


Відповіді. Варіант 1. 1 — Б. 2 — Г. 3 — А. Варіант 2. 1 — В. 2 — А. 3 — Б.

➢ *Самостійна робота*

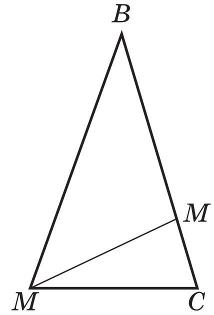
Варіант 1

1. У рівнобедреному трикутнику ABC AC — основа, $AC = 6$ см, $AB = 9$ см. Через бічні сторони паралельно основі проведено пряму, що перетинає сторони AB і AC у точках M і N відповідно. $MN = 4$ см. Обчисліть довжину відрізка BN.
2. У трикутниках ABC і ADK кут A спільний, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AK} = \frac{3}{4}$. Обчисліть периметр трикутника ABC, якщо периметр трикутника ADK дорівнює 24 см.
3. Сторони одного трикутника відносяться як $5:7:9$, а сторони другого трикутника дорівнюють 25 см, 35 см, 45 см. Доведіть, що ці трикутники подібні.
4. На стороні AB трикутника ABC позначено точку M так, що $CM = 8$ см (*див. рисунок*). Обчисліть довжину відрізка AM, якщо $AC = AB = 16$ см, $BC = 8$ см.



Варіант 2

1. У трикутнику ABC $AB = 9$ см. Паралельно стороні AB проведено пряму, що перетинає сторони BC і AC у точках D і F відповідно. $BD = 2$ см, $DC = 4$ см. Обчисліть довжину відрізка DF.
2. У трикутниках ABC і AMN кут A спільний, $\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{5}{2}$. Обчисліть периметр трикутника AMN, якщо периметр трикутника ABC дорівнює 25 см.
3. Сторони одного трикутника дорівнюють 27 см, 33 см і 48 см, а сторони другого трикутника відносяться як $9:11:16$. Доведіть, що ці трикутники подібні.
4. На стороні BC трикутника ABC позначено точку M так, що $AM = 5$ см (*див. рисунок*). Обчисліть довжину відрізка MC, якщо $AB = BC = 10$ см, $AC = 5$ см.



Відповіді

Варіант 1. 1. 6 см. 2. 18 см. 4. 12 см. Варіант 2. 1. 6 см. 2. 10 см. 4. 2,5 см.

ПОДІБНІСТЬ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ. СЕРЕДНІ ПРОПОРЦІЙНІ ВІДРІЗКИ В ПРЯМОКУТНОМУ ТРИКУТНИКУ

Очікувані результати: учні мають уміти знаходити на рисунках та зображувати прямокутні трикутники, подібні прямокутні трикутники; розуміти розбиття прямокутного трикутника на прямокутні трикутники, подібні заданому; знати, як пов'язані висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, і проєкції катетів на гіпотенузу, катет, гіпотенуза та проєкція цього катета на гіпотенузу; застосовувати метричні співвідношення в прямокутному трикутнику під час розв'язування задач.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може запропонувати обговорити таку ситуацію.

Восьмикласники відвідували національний заповідник «Софія Київська», і раптом хтось поцікавився: «А яка висота дзвіниці Софійського собору?». Учитель / учителька запропонував(-ла) таку задачу.

Задача

У певний момент часу довжина тіні дзвіниці Софійського собору (м. Київ) дорівнює 19 м (можна безпосередньо виміряти), а довжина тіні ліхтарного стовпа, що стоїть біля дзвіниці, — 1,5 м (також можна виміряти). Яка висота дзвіниці, якщо висота стандартного стовпа дорівнює 6 м?

(Після обговорення учні доходять висновку, що для розв'язування цієї задачі потрібно встановити подібність прямокутних трикутників.)

Учитель / учителька може нагадати, що учні знають, що існують ознаки рівності трикутників та їхні наслідки — відповідні ознаки рівності прямокутних трикутників.

— Чи має місце аналогічна ситуація у випадку подібності трикутників? Відповідь ствердна. На найближчих уроках ми сформулюємо ознаки подібності прямокутних трикутників і навчимося застосовувати їх під час розв'язування задач.

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➢ ***Фронтальне опитування***

1. Які трикутники називають прямокутними?
2. Як називають сторони прямокутного трикутника?
3. Чому дорівнює сума гострих кутів прямокутного трикутника?
4. Що таке висота трикутника?
5. Скільки висот можна провести в будь-якому трикутнику?
6. Чи правильно, що в прямокутному трикутнику дві його висоти збігаються зі сторонами?

➢ ***Усні вправи***

1. У трикутнику ABC $\angle A = 90^\circ$. Як називаються сторони цього трикутника?
2. Обчисліть кути прямокутного трикутника, якщо один з них дорівнює:

   1) 45°; 2) 70°; 3) 15°; 4) 92°; 5) 90°.

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Ознака подібності прямокутних трикутників.

   ! Два прямокутних трикутники подібні, якщо гострий кут одного дорівнює гострому куту другого трикутника.

   ! Два прямокутних трикутники подібні, якщо катети одного пропорційні катетам другого трикутника.

   ! Два прямокутних трикутники подібні, якщо катет і гіпотенуза одного пропорційні катету й гіпотенузі другого трикутника.

2. Означення середнього пропорційного відрізка.

! Відрізок x називають середнім пропорційним між відрізками a і b, якщо $\frac{a}{x}=\frac{x}{b}$, тобто $x^2=ab$.

3. Означення проєкції катета на гіпотенузу.

! Відрізки, на які висота прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу, називають проєкціями катетів на гіпотенузу.

4. Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику.

! У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проєкціями катетів на гіпотенузу. (Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює добутку проєкцій катетів на гіпотенузу.)

! У прямокутному трикутнику катет є середнім пропорційним між гіпотенузою та його проєкцію на гіпотенузу. (Квадрат катета дорівнює добутку гіпотенузи й проєкції цього катета на гіпотенузу.)

! Висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює добутку катетів, поділеному на гіпотенузу.

5. Поділ прямокутного трикутника висотою, проведеною до гіпотенузи.

Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить трикутник на два подібних прямокутних трикутники, кожен з яких подібний заданому трикутнику.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

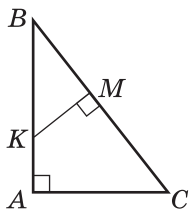
➢ ***Усні вправи***

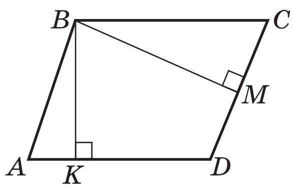
1. Чи подібні прямокутні трикутники, якщо один з них має кут 40°, а другий — кут, що дорівнює:

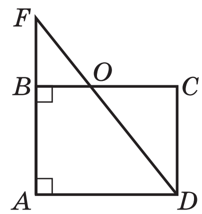
1) 50°; 2) 60°?

2. Чи подібні прямокутні трикутники ABC і MNK, якщо $\angle B=90^\circ$, $\angle N=90^\circ$, $\frac{AB}{NM}=\frac{AC}{NK}$?

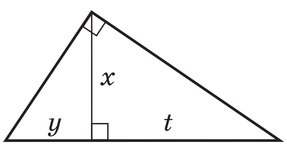
3. Укажіть подібні трикутники, зображені на рисунку, та обґрунтуйте їхню подібність.

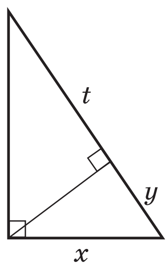
1) 

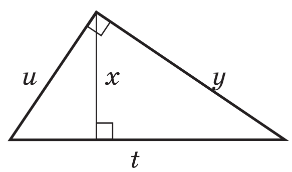
2) 

3) 

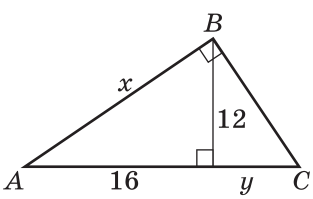
4. Скориставшись рисунком, складіть рівність, що є метричним співвідношенням у прямокутному трикутнику.

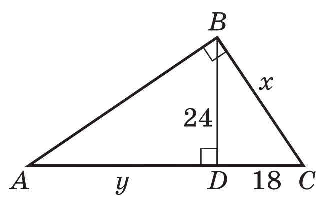
1) 

2) 

3) 

5. Скориставшись рисунком, обчисліть x і y.

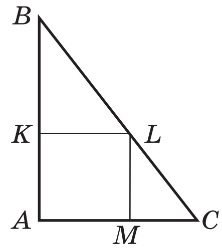
1) 

2) 

➢ ***Письмові вправи***

1. Побудуйте прямокутний трикутник MKN ($\angle K = 90°$). Через точку K проведіть пряму так, щоб вона поділила цей трикутник на два подібних трикутники. Напишіть позначення цих трикутників.

2. У прямокутний трикутник вписано квадрат (*див. рисунок*).
   1) Укажіть на рисунку подібні трикутники й доведіть їхню подібність.
   2) Обчисліть довжину сторони квадрата, якщо $BK = 9$ см, $MC = 4$ см.



3. Чому дорівнює висота прямокутного трикутника, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 9 см і 16 см?

4. Проєкції катетів прямокутного трикутника на гіпотенузу дорівнюють 7 см і 9 см. Обчисліть довжину більшого катета.

5. Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см. Обчисліть висоту цього трикутника, проведену до гіпотенузи.

6. Обчисліть довжину катета AB прямокутного трикутника ABC, якщо його проєкція на гіпотенузу дорівнює 2 см, а проєкція катета BC на гіпотенузу — 10,5 см.

7. Обчисліть периметр прямокутного трикутника, у якого катет дорівнює 15 см, а його проєкція на гіпотенузу — 9 см.

8. Перпендикуляр, проведений з точки перетину діагоналей ромба до його сторони, ділить її на відрізки завдовжки 4 см і 25 см. Обчисліть довжину діагоналей ромба.

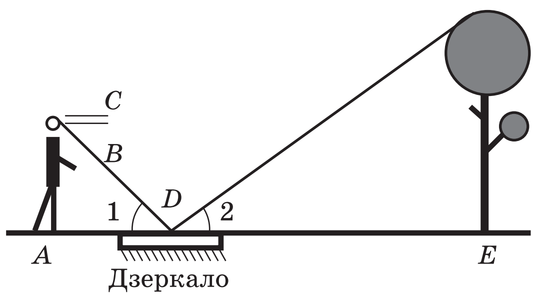
9. Точка дотику кола, вписаного в ромб, ділить сторону ромба на відрізки завдовжки 20 см і 5 см. Обчисліть висоту ромба.

10. Обчисліть довжину висоти й бічної сторони рівнобічної трапеції, основи якої дорівнюють 10 см і 8 см, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін.

11. У певний момент часу довжина тіні дзвіниці Софійського собору (м. Київ) дорівнює 19 м, а довжина тіні ліхтарного стовпа, що стоїть біля дзвіниці, — 1,5 м. Яка висота дзвіниці, якщо висота стандартного стовпа дорівнює 6 м? (*Завдання, запропоноване на етапі мотивації навчальної діяльності.*)
    Відповідь. 76 м.

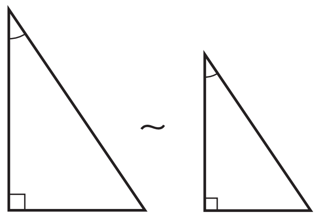
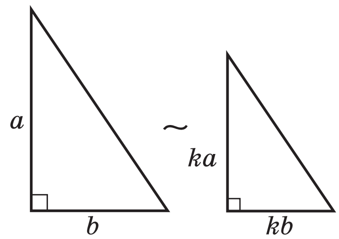
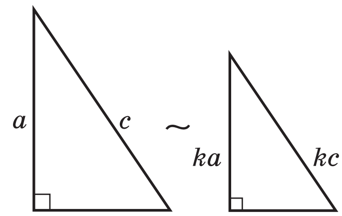
12. Довжина тіні дерева дорівнює 10,2 м, а довжина тіні хлопчика, зріст якого становить 1,7 м, дорівнює 2,5 м. Чому дорівнює висота дерева?

13. Для обчислення висоти дерева можна використовувати дзеркало так, як показано на рисунку. Промінь світла FD, відбиваючись від дзеркала в точці D, потрапляє в око людини (точку B). Обчисліть висоту дерева, якщо $AC = 165$ см, $BC = 12$ см, $AD = 120$ см, $DE = 4{,}8$ м, $\angle 1 = \angle 2$.

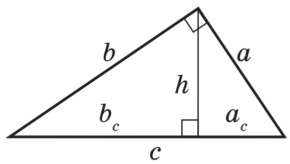


➢ ***Картки-підказки для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

Картка 1

Ознаки подібності прямокутних трикутників		
За гострим кутом	**За двома катетами**	**За гіпотенузою і катетом**
		

Картка 2

Метричні співвідношення в прямокутному трикутнику	
 $a^2 = a_c \cdot c$ $\quad b^2 = b_c \cdot c$ $\quad h^2 = a_c \cdot b_c$	Наслідки: $\dfrac{a_c}{b_c} = \dfrac{a^2}{b^2}$ $\quad h = \dfrac{ab}{c}$

➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. Відрізок BD — висота прямокутного трикутника ABC, BK — бісектриса кута DBC. Обчисліть довжину відрізка AK, якщо $AC = 9$ см, $DC = 5$ см.
Відповідь. 6 см.

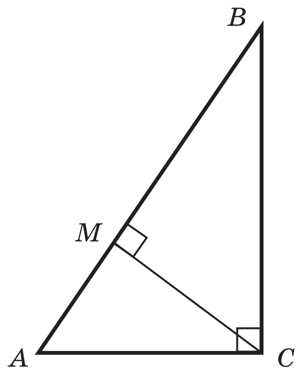
2. У прямокутній трапеції $ABCD$ ($\angle C = \angle D = 90°$) $BC = 3$ см, $CD = 6$ см, $BD \perp AB$. Обчисліть довжину сторони AD.
Відповідь. 15 см.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➢ ***Математичний диктант***

Напишіть рівності. Скориставшись рисунком, визначте, які з них є правильними. Якщо рівність правильна, поставте поряд позначку ✓. Якщо рівність неправильна, закресліть її та напишіть поряд правильну рівність.

1. $AM + BM = AB$. ☐
2. $BC^2 = MA \cdot MB$. ☐
3. $AC^2 = AM \cdot AB$. ☐
4. $BC = AB \cdot MB$. ☐
5. $MC^2 = MA \cdot MB$. ☐
6. $MC = \dfrac{AC \cdot BC}{AB}$. ☐



➢ ***Дидактична гра «Математичний мініквест»***

Учитель / учителька заздалегідь готує два (за кількістю команд, що братимуть участь у грі) комплекти завдань. Для цього на картках потрібно написати задачі й покласти ці картки в конверти так, щоб напис на конверті містив відповідь до наступної задачі. Для кожної команди слід узяти конверти певного кольору. Перед початком уроку вчитель / учителька розкладає ці конверти в межах класної кімнати (на партах, у шафі, на підвіконні, на вчительському столі тощо). На уроці об'єднує учнів / учениць у дві команди. Кожна команда отримує один конверт із задачею. Гравці розв'язують задачу, а потім шукають конверт «свого» кольору, на якому написано відповідь до задачі. Якщо конверта з такою відповіддю немає, то задачу розв'язано неправильно. Так учні мають розв'язати всі задачі. Відповідь до останньої задачі міститься на конверті, який гравці отримують на початку гри. Перемагає команда, яка першою розв'яже всі задачі.

Приклади задач для 1-ї команди

1. Чому дорівнює висота прямокутного трикутника, якщо її основа ділить гіпотенузу на відрізки 3 см і 12 см?
   Відповідь. 6 см.
2. Чому дорівнює катет прямокутного трикутника, якщо його проєкція на гіпотенузу й гіпотенуза відповідно дорівнюють 5 см і 20 см?
   Відповідь. 10 см.
3. Чому дорівнює гіпотенуза прямокутного трикутника, якщо один із катетів та його проєкція на гіпотенузу відповідно дорівнюють 6 см і 4 см?
   Відповідь. 9 см.
4. Чому дорівнює висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, якщо сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см?
   Відповідь. 4,8 см.
5. Чому дорівнює проєкція катета прямокутного трикутника на гіпотенузу, якщо катет і гіпотенуза відповідно дорівнюють 8 см і 10 см?
   Відповідь. 6,4 см.
6. Чому дорівнює гіпотенуза прямокутного трикутника, якщо катети трикутника дорівнюють 7 см і 24 см, а висота, проведена до гіпотенузи, — 6,72 см?
   Відповідь. 25 см.

Приклади задач для 2-ї команди

1. Чому дорівнює висота прямокутного трикутника, якщо її основа ділить гіпотенузу на відрізки 4 см і 9 см?
   Відповідь. 6 см.
2. Чому дорівнює катет прямокутного трикутника, якщо його проєкція на гіпотенузу й гіпотенуза відповідно дорівнюють 9 см і 16 см?
   Відповідь. 12 см.
3. Чому дорівнює гіпотенуза прямокутного трикутника, якщо один із катетів та його проєкція на гіпотенузу відповідно дорівнюють 4 см і 2 см?
   Відповідь. 8 см.
4. Чому дорівнює висота прямокутного трикутного, проведена до гіпотенузи, якщо сторони трикутника дорівнюють 5 см, 4 см і 3 см?
   Відповідь. 2,4 см.
5. Чому дорівнює проєкція катета прямокутного трикутника на гіпотенузу, якщо катет і гіпотенуза відповідно дорівнюють 12 см і 20 см?
   Відповідь. 7,2 см.
6. Чому дорівнює гіпотенуза прямокутного трикутника, якщо катети трикутника дорівнюють 6 см і 8 см, а висота, проведена до гіпотенузи, — 6,4 см?
   Відповідь. 10 см.

Робота на картках із друкованою основою

Варіант 1

1. У прямокутному трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 15$ см, $BC = 20$ см, $AB = 25$ см, CD — висота цього трикутника. Заповніть порожні комірки таблиці.

Відрізок	AD	BD	CD
Довжина відрізка			

2. Виконайте рисунок за його описом. Чи утворилися при цьому подібні трикутники? Якщо так, напишіть у правому стовпці таблиці, які саме трикутники подібні.

	Опис рисунка	Рисунок	Подібні трикутники
1	Відрізок MK — середня лінія прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), яка сполучає середини катетів		
2	Відрізки NN_1 і KK_1 — висоти трикутника MNK		
3	Діагональ AC прямокутної трапеції $ABCD$ ($\angle A = \angle B = 90°$) перпендикулярна до бічної сторони CD		

Варіант 2

1. У прямокутному трикутнику KLM $\angle L = 90°$, $KL = 40$ см, $LM = 30$ см, $KM = 50$ см, LN — висота цього трикутника. Заповніть порожні комірки таблиці.

Відрізок	KN	MN	LN
Довжина відрізка			

2. Виконайте рисунок за його описом. Чи утворилися при цьому подібні трикутники? Якщо так, напишіть у правому стовпці таблиці, які саме трикутники подібні.

	Опис рисунка	Рисунок	Подібні трикутники
1	Відрізок MK — середня лінія прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), де точки M і K — середини відповідно сторін AB і BC		
2	Відрізки CC_1 і PP_1 — висоти трикутника PCT		
3	Діагональ DB прямокутної трапеції $ABCD$ ($\angle A = \angle D = 90°$) перпендикулярна до бічної сторони BC		

Тестові завдання

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Чому дорівнює висота прямокутного трикутника, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4 см і 16 см?

А	Б	В	Г
6 см	8 см	10 см	12 см

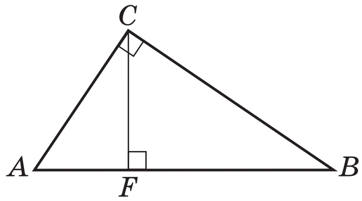
2. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а один із катетів — 4 см. Чому дорівнює проєкція цього катета на гіпотенузу?

А	Б	В	Г
2 см	6 см	4 см	1 см

3. Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 9 см, 12 см і 15 см. Чому дорівнює висота цього трикутника, проведена до гіпотенузи?

А	Б	В	Г
11,25 см	7,2 см	10,75 см	8,4 см

4. На рисунку зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$), CF — висота, проведена до гіпотенузи. Які з наведених тверджень є правильними?
I. $\Delta AFC \sim \Delta ACB$.
II. $\Delta CFB \sim \Delta AFC$.
III. $\Delta BFC \sim \Delta BCA$.



А	Б	В	Г
Лише I	Лише I та II	I, II та III	Лише II та III

Варіант 2
Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Чому дорівнює висота прямокутного трикутника, якщо вона ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 3 см і 12 см?

А	Б	В	Г
18 см	12 см	10 см	6 см

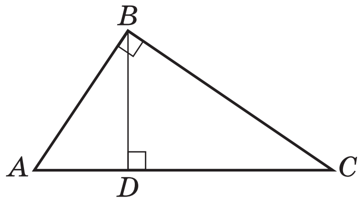
2. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а один із катетів — 6 см. Чому дорівнює проєкція цього катета на гіпотенузу?

А	Б	В	Г
3 см	6 см	9 см	10 см

3. Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 7 см, 24 см і 25 см. Чому дорівнює висота цього трикутника, проведена до гіпотенузи?

А	Б	В	Г
7,29 см	8,57 см	6,72 см	8,24 см

4. На рисунку зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle B = 90°$), BD — висота, проведена до гіпотенузи. Які з наведених тверджень є правильними?
I. $\Delta ABC \sim \Delta ADB$.
II. $\Delta ADB \sim \Delta BDC$.
III. $\Delta BDC \sim \Delta ABC$.



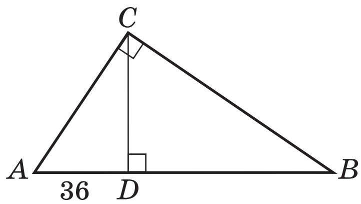
А	Б	В	Г
Лише I та III	I, II та III	Лише II	Лише III

Відповіді. Варіант 1. 1. Б. 2. А. 3. Б. 4. В. Варіант 2. 1. Г. 2. А. 3. В. 4. Б.

➢ ***Робота в парах***
- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

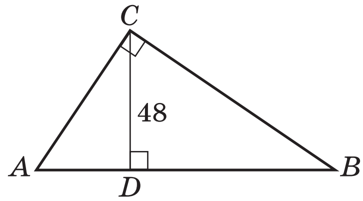
1. На рисунку ΔABC — прямокутний ($\angle C = 90°$), $AC : CB : AB = 3 : 4 : 5$. Обчисліть висоту, проведену до гіпотенузи, і проєкцію катета CB на гіпотенузу.



2. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони й дорівнює $3\sqrt{5}$ см, а проєкція бічної сторони на більшу основу дорівнює 4 см. Обчисліть довжини основ трапеції та її бічної сторони.

Варіант 2

1. На рисунку ΔABC — прямокутний ($\angle C = 90°$), $AC:CB:AB = 3:4:5$. Обчисліть проєкції катетів на гіпотенузу.



2. Діагональ рівнобічної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Основи трапеції дорівнюють 10 см і 26 см. Обчисліть довжини висоти, бічної сторони й діагоналі трапеції.

➢ ***Робота в групах***

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Висота прямокутного трикутника дорівнює 24 см і ділить гіпотенузу у відношенні $9:16$. Чому дорівнюють катети трикутника?

Задача 2

Перпендикуляр, проведений із середини основи рівнобедреного трикутника до бічної сторони, ділить її на відрізки завдовжки 2,25 см і 4 см. Чому дорівнює висота трикутника, проведена до бічної сторони?

Задача 3

Відрізки BK і BM — висоти паралелограма $ABCD$, проведені з вершини кута B до сторін AD і CD відповідно. Чому дорівнює довжина відрізка BK, якщо $BM = 4$ см, $AD:CD = 2:3$?

➢ ***Завдання на встановлення відповідності***

Варіант 1

Установіть відповідність між елементом прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ (1–3) та його довжиною (А–Г).

1	Висота CD, якщо $AD = 4{,}5$ см, $BD = 2$ см	**А**	6 см
2	Катет AC, якщо $AB = 16$ см, CD — висота, $AD = 4$ см	**Б**	8 см
3	Висота CD, якщо $AC = 6$ см, $BC = 8$ см, $AB = 10$ см	**В**	4,8 см
		Г	3 см

Варіант 2

Установіть відповідність між елементом прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$ (1–3) та його довжиною (А–Г).

1	Висота CD, якщо $AD = 2$ см, $BD = 12{,}5$ см	**А**	6 см
2	Катет CB, якщо $AB = 12$ см, CD — висота, $BD = 3$ см	**Б**	5,2 см
3	Висота CD, якщо $AB = 20$ см, $AC = 12$ см, $BC = 16$ см	**В**	5 см
		Г	9,6 см

Відповіді. Варіант 1. 1 — Г. 2 — Б. 3 — В. Варіант 2. 1 — В. 2 — А. 3 — Г.

➢ ***Самостійна робота***

Варіант 1

1. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 16 см, а один із катетів — 12 см. Обчисліть проєкцію другого катета на гіпотенузу.
2. Катети прямокутного трикутника відносяться як $7:24$. Обчисліть довжини відрізків, на які ділить гіпотенузу цього трикутника висота, проведена з вершини прямого кута, якщо довжина гіпотенузи дорівнює 25 см.
3. У ромбі $ABCD$ O — точка перетину діагоналей, OM — відстань до сторони AB. $AM = 2$ см, $MB = 8$ см. Обчисліть довжину відрізка OM.

Варіант 2

1. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 25 см, а один із катетів — 10 см. Обчисліть проєкцію другого катета на гіпотенузу.
2. Катети прямокутного трикутника відносяться як $3:4$. Обчисліть довжини відрізків, на які ділить гіпотенузу цього трикутника висота, проведена з вершини прямого кута, якщо довжина гіпотенузи дорівнює 10 см.
3. У ромбі $ABCD$ O — точка перетину діагоналей, OK — відстань до сторони BC , $BK = 4$ см, $KC = 9$ см. Обчисліть довжину відрізка OK.

Відповіді. Варіант 1. 1. 7 см. 2. 1,96 см і 23,04 см. 3. 4 см. Варіант 2. 1. 21 см. 2. 3,6 см і 6,4 см. 3. 6 см.

ЗАСТОСУВАННЯ ПОДІБНОСТІ ТРИКУТНИКІВ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ: ПРОПОРЦІЙНІСТЬ ВІДРІЗКІВ ХОРД, ПРОПОРЦІЙНІСТЬ ВІДРІЗКІВ СІЧНОЇ І ДОТИЧНОЇ[1]

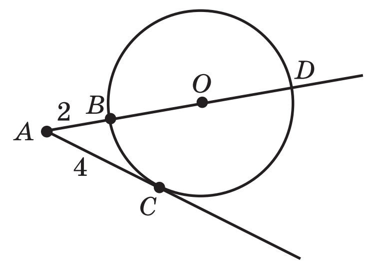
Очікувані результати: учні мають уміти формулювати теореми про пропорційність відрізків хорд та пропорційність відрізків січної і дотичної; розуміти доведення цих теорем; застосовувати ці теореми під час розв'язування задач.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може запропонувати обговорити таку ситуацію:

— Уявіть, що у вас є басейн круглої форми й ви маєте дізнатися, чому дорівнює діаметр басейну. Чи можна це зробити, не заходячи в басейн? Відповідь ствердна. Для цього потрібно вибрати точку поза басейном, провести через цю точку дотичну до кола басейну, виміряти відстань від вибраної точки до точки дотику й до найближчої точки кола.

Нехай ми вибрали точку A (*див. рисунок*). Виміряли відрізок дотичної: $AC = 4$ м, і відстань від точки A до найближчої точки кола: $AB = 2$ м. Відрізок BD — діаметр кола. Виявляється, існує співвідношення: $AC^2 = AB \cdot AD$, скориставшись яким, можна обчислити діаметр басейну.

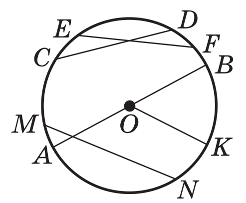


Це співвідношення є прикладом метричних співвідношень у колі. На найближчих уроках ми, скориставшись подібністю трикутників, доведемо це та інші співвідношення, навчимося застосовувати їх під час розв'язування задач.

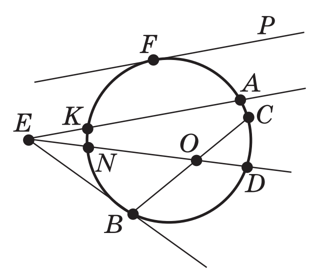
АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➤ ***Фронтальне опитування***

1. Що називають хордою кола?
2. Скільки хорд можна провести в одному колі?
3. Чи правильно, що всі хорди кола мають однакову довжину?
4. Що називають дотичною до кола?
5. Скільки дотичних до кола можна провести з однієї точки, що лежить поза колом?
6. Що називають січною кола?
7. Укажіть назви всіх відрізків, зображених на рисунку.



8. Укажіть назви всіх прямих і відрізків, зображених на рисунку.



[1] Вивчення теми передбачено в модельній навчальній програмі «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти, автор Істер О. С.

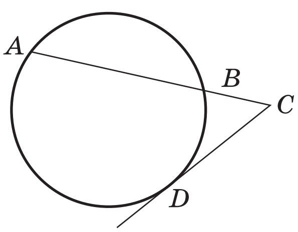
ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

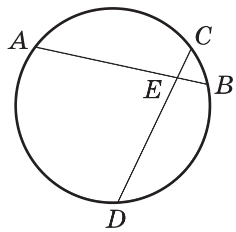
1. Теорема про пропорційність відрізків хорд.
   ! Якщо хорди AB і CD перетинаються в точці M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$.
2. Наслідок з теореми про пропорційність відрізків хорд.
   ! Якщо хорда AB проходить через точку M кола радіуса R і $OM = b$ (O — центр кола), то $AM \cdot MB = R^2 - b^2$.
3. Теорема про пропорційність відрізків січної та дотичної.
   ! Якщо з точки M, що розміщена поза колом, провести січну, яка перетинає коло в точках B і C, і дотичну MA, де A — точка дотику, то $AM^2 = MB \cdot MC$.
4. Наслідок з теореми про пропорційність відрізків січної та дотичної.
   ! Якщо з точки M провести дві січні, одна з яких перетинає коло в точках A і B, а друга — у точках C і D, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$.

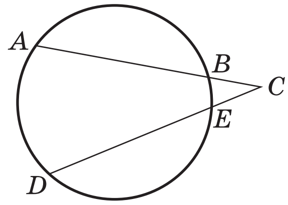
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

➢ ***Усні вправи***

1. До кожного з наведених рисунків виберіть відповідну рівність. Поясніть свій вибір.

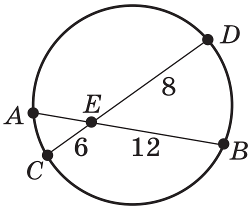
1) 

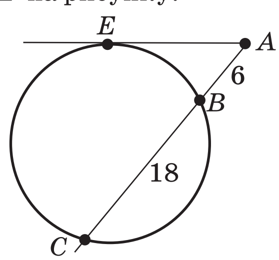
2) 

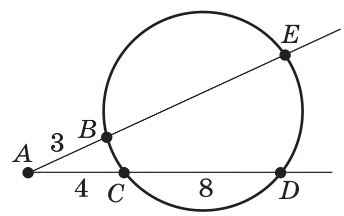
3) 

А $AE \cdot BE = CE \cdot DE$ Б $AC \cdot BC = CD^2$ В $AC \cdot BC = CD \cdot CE$

2. Чому дорівнює довжина відрізка AE на рисунку.

1) 

2) 

3) 

➢ ***Письмові вправи***

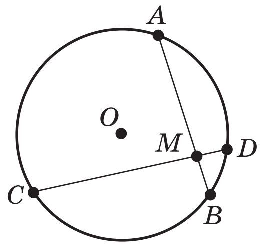
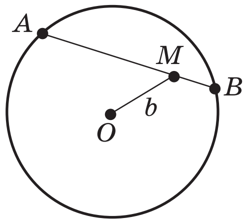
1. Хорди AB і CK перетинаються в точці P. Обчисліть довжини хорд, якщо $AP = 20$ см, $BP = 12$ см, $CK : PK = 8 : 3$.
2. За перетину з діаметром кола хорда ділиться на відрізки завдовжки 3 см і 4 см, а діаметр — у відношенні 1 : 3. Обчисліть радіус кола.
3. З точки кола до радіуса проведено перпендикуляр, завдовжки 12 см. Цей перпендикуляр ділить радіус у відношенні $3 : 2$, починаючи від центра кола. Чому дорівнює радіус кола?
4. Січна, проведена з точки A, перетинає коло в точках B і C, причому $AB = 4$ см, $BC = 5$ см. Обчисліть довжину відрізка дотичної, проведеної до кола з точки A.
5. З точки M поза колом проведено січну, яка перетинає коло в точках K і L, причому точка K належить відрізку ML. Обчисліть довжину відрізка дотичної, проведеної з точки M до цього кола, якщо $MK = 8$ см, $KL = 10$ см.

6. Обчисліть діаметр басейну круглої форми, якщо відрізок дотичної, проведеної з точки, що лежить поза басейном, до кола басейну, дорівнює 4 м, а відстань від цієї точки до найближчої точки басейну дорівнює 2 м. *(Завдання, запропоноване на етапі мотивації навчальної діяльності.)*
Відповідь. 6 м.

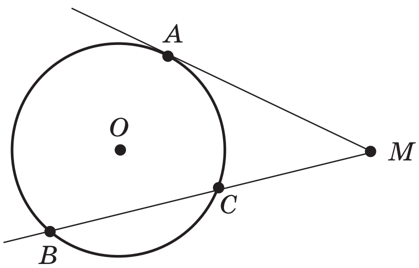
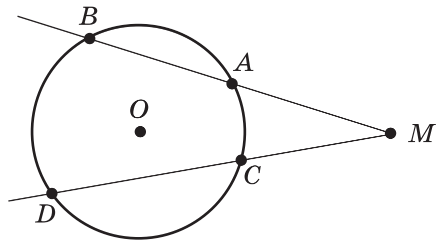
7. З точки A проведено січні, які перетинають коло в точках B і C ($AB < AC$) та D і E ($AD < AE$). Обчисліть довжину відрізка DE, якщо $AB = 8$ см, $BC = 10$ см, $AD = 0{,}5AB$.

➢ ***Картки-підказки для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

Картка 1

Пропорційність відрізків хорд		
Зображення		
Властивості	Якщо хорди AB і CD перетинаються в точці M, то $AM \cdot MB = CM \cdot MD$	Якщо хорда AB проходить через точку M кола радіуса R і $OM = b$ (O — центр кола), то $AM \cdot MB = R^2 - b^2$

Картка 2

Пропорційність відрізків січної і дотичної		
Зображення		
Властивості	Якщо дотична в точці A й січна BC перетинаються в точці M, то $AM^2 = MB \cdot MC$	Якщо січні AB і CD перетинаються в точці M, то $AM \cdot BM = CM \cdot DM$

➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. З точки поза колом проведено січну, що перетинає коло в точках, віддалених від заданої точки на 12 см і 20 см. Відстань від заданої точки до центра кола дорівнює 17 см. Обчисліть радіус цього кола.
Відповідь. 7 см.

2. Точка S розташована поза колом на відстані 22 см від його центра. Січна, проведена через точку S, перетинає коло в точках A і B, причому $SA = 16$ см, $AB = 8$ см, а точка A належить відрізку SB. Обчисліть діаметр цього кола.
Відповідь. 20 см.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

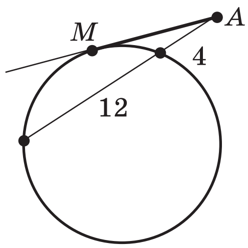
➢ ***Робота на картках із друкованою основою***

Варіант 1

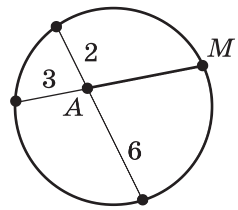
1. Чи правильне твердження? Поставте позначку «так» або «ні» у відповідній комірці таблиці.

Твердження	Так / ні
Якщо хорди EF і KP кола перетинаються в точці M, то $EM \cdot MF = KM \cdot MP$	
Якщо з точки C до кола проведено дотичну CN (N — точка дотику) і січну, що перетинає коло в точках A і B, то $CN^2 = CA \cdot CB$	

2. На кожному з рисунків напишіть довжину відрізка AM.



1)



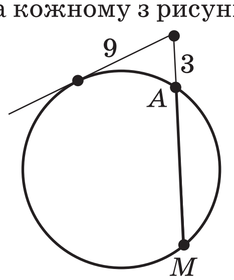
2)

Варіант 2

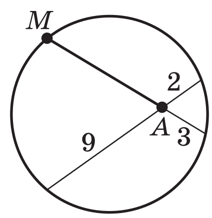
1. Чи правильне твердження? Поставте позначку «так» або «ні» у відповідній комірці таблиці.

Твердження	Так / ні
Якщо хорди TA і BL кола перетинаються в точці C, то $TC \cdot AB = LC \cdot CA$	
Якщо з точки D до кола проведено дотичну DL (L — точка дотику) і січну, що перетинає коло в точках K і M, то $DL^2 = DK \cdot DM$	

2. На кожному з рисунків напишіть довжину відрізка AM.



1)



2)

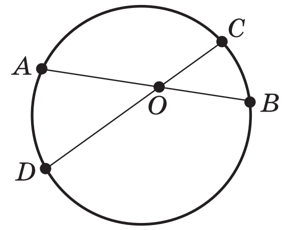
➢ ***Дидактична гра «Заповніть таблицю»***

Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць класу в декілька команд (залежно від їхньої кількості). Гру проводять у два раунди. Кожного раунду командам видають картки з таблицями, у яких потрібно заповнити порожні комірки. Гравці по черзі заповнюють порожні комірки в одному стовпці таблиці, передаючи картку одне одному. Коли всі комірки в таблиці заповнені, картки передають учителеві / учительці для перевірки. За кожну правильну відповідь нараховують 1 бал. Перемагає команда, яка першою впорається із завданням і набере найбільшу кількість балів.

Приклад завдання для 1-го раунду

Скориставшись рисунком, обчисліть довжину невідомого відрізка й напишіть результат в порожній комірці стовпця таблиці.

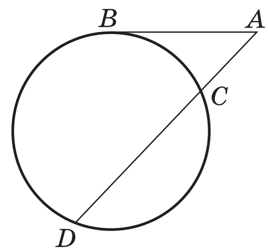
AO	5 см		11 см	4 см		4 см	5 см	4 см
CO	2 см	2 см	4 см		2 см	1 см		3 см
BO	4 см	3 см		3 см	4 см	2 см	3 см	
DO		9 см	5,5 см	6 см	14 см		7,5 см	8 см



Приклад завдання для 2-го раунду

Скориставшись рисунком, обчисліть довжини невідомих відрізків і напишіть результат у порожній комірці стовпця таблиці.

AB	4 см		5 см			8 см		
AC	2 см	3 см	1 см	4 см	2 см	4 см	2 см	3 см
CD		5 см						6 см
AD				9 см	6 см		10 см	



➢ *Тестові завдання*

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці O, $AB=12$ см, $AO:OB=5:1$, $OD=5$ см. Чому дорівнює довжина відрізка OC?

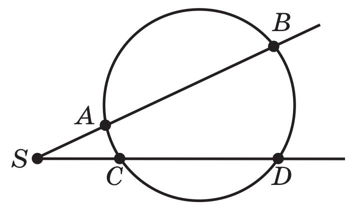
А	Б	В	Г
4 см	2 см	10 см	8 см

2. З точки A до кола проведено дотичну AB (B — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках C і D, причому точка C лежить між точками A і D. Чому дорівнює довжина відрізка CD, якщо $AB=6$ см, $AD=8$ см?

А	Б	В	Г
4,5 см	3,5 см	0,75 см	7,25 см

3. На рисунку зображено коло й дві його січні, $SA=a$, $SB=b$, $SC=c$, $SD=d$. Укажіть правильну рівність.

А	Б	В	Г
$ad-bc=0$	$ac-bd=0$	$a(c-a)-b(d-b)=0$	$ab-cd=0$



Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

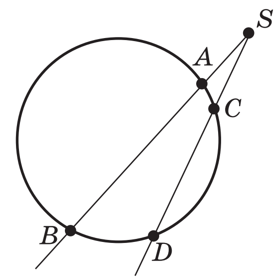
1. Хорди AB і CD кола перетинаються в точці O, $AB=18$ см, $AO-OB=2$ см, $OD=16$ см. Чому дорівнює довжина відрізка OC?

А	Б	В	Г
8 см	10 см	5 см	7 см

2. З точки A до кола проведено дотичну AB (B — точка дотику) і січну, яка перетинає коло в точках C і D, причому точка C лежить між точками A і D. Чому дорівнює довжина відрізка CD, якщо $AB=4$ см, $AC=2,5$ см?

А	Б	В	Г
6,4 см	1,6 см	4,8 см	3,9 см

3. На рисунку зображено коло й дві його січні, $SA = a$, $AB = b$, $SC = c$, $CD = d$. Укажіть правильну рівність.



А	Б	В	Г
$ac - bd = 0$	$a(a+b) - c(c+d) = 0$	$ab - cd = 0$	$ad - bc = 0$

Відповіді. Варіант 1. 1. А. 2. Б. 3. Г. Варіант 2. 1. В. 2. Г. 3. Б.

➢ ***Робота в парах***

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / вчительці для оцінювання.

Варіант 1

1. З точки поза колом, віддаленої від найближчої точки кола на 24 см, проведено дотичну до кола. Обчисліть радіус кола, якщо відрізок дотичної дорівнює 36 см.

2. Радіус кола дорівнює 10 см. Через точку A до кола проведено дотичну AB (B — точка дотику) і січну, що проходить через центр кола. Обчисліть довжину відрізка січної, що міститься між колом і точкою A, якщо $AB = 24$ см.

Варіант 2

1. З точки поза колом проведено дотичну до кола. Обчисліть радіус кола, якщо відстань від цієї точки до точки дотику дорівнює 12 см, а до найближчої точки кола — 9 см.

2. Через точку M до кола проведено дотичну MA (A — точка дотику) і січну, що перетинає коло в точках B і C (точка B лежить між точками M і C). Обчисліть довжину відрізка MB, якщо $BC = 5$ см, $AM = 6$ см.

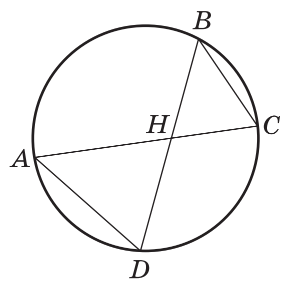
➢ ***Робота в групах***

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Скориставшись рисунком, обчисліть:

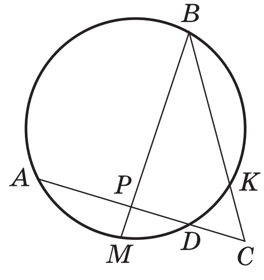
1) довжини відрізків AH і BC, якщо $DH = 5$ см, $BH = 4$ см, $HC = 2$ см, $AD = 6$ см;
2) довжину відрізка AC, якщо $AH : HC = 5 : 2$, $BH = 5$ см, $DH = 8$ см.



Задача 2

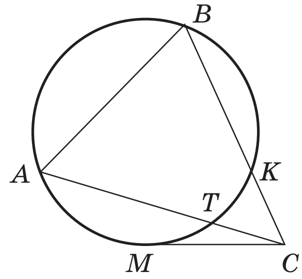
Скориставшись рисунком, обчисліть:

1) довжину відрізка AP, якщо $AP = DP$, $AC = 12$ см, $CK = 4$ см, $BK = 6$ см;
2) довжину відрізка BM, якщо $AP = DP$, $BP = 4PM$, $DC = 2$ см, $CK = 1$ см, $BK = 19$ см.



Задача 3

На рисунку MC — дотична до кола, $MC=6$ см, $CK=3$ см, $AC=BC$, $AB=12$ см. Обчисліть градусну міру кута ABC.

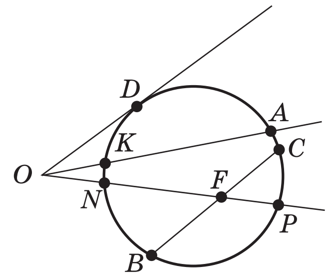


Завдання на встановлення відповідності

Варіант 1

Скориставшись рисунком, установіть відповідність між відрізком (1–3) та його довжиною (А–Г).

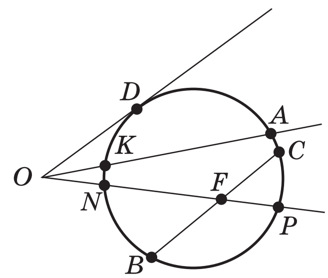
1	NF, якщо $FP=2$ см, $BF=5$ см, $FC=4$ см	**А**	12 см
2	OD, якщо $ON=4$ см, $OP=16$ см	**Б**	10 см
3	OP, якщо $OK=4$ см, $OA=9$ см, $ON=3$ см	**В**	9 см
		Г	8 см



Варіант 2

Скориставшись рисунком, установіть відповідність між відрізком (1–3) та його довжиною (А–Г).

1	BF, якщо $FC=4$ см, $NF=8$ см, $FP=3$ см	**А**	4 см
2	OD, якщо $OK=2$ см, $OA=8$ см	**Б**	5 см
3	OK, якщо $OA=9$ см, $OP=15$ см, $ON=3$ см	**В**	6 см
		Г	3 см



Відповіді. Варіант 1. 1 — Б. 2 — Г. 3 — А. Варіант 2. 1 — В. 2 — А. 3 — Б.

Самостійна робота

Варіант 1

1. Хорди кола AB і CD перетинаються в точці F, $CF=6$ см, $FB=3$ см, довжина відрізка FD на 9 см менша від довжини відрізка AF. Обчисліть довжину відрізка AF.
2. Пряма MN дотикається до кола в точці N, пряма KP — січна, що проходить через точку M, причому точка K лежить між точками M і P. Обчисліть довжину відрізка MP, якщо $MN=12$ см, $KP=7$ см.
3. Січні кола BC і DE перетинаються в точці A, точка B лежить між точками A і C, точка D — між точками A і E. Обчисліть довжину відрізка AC, якщо $AD=4$ см, $DE=3AD$, $AB:BC=1:15$.

Варіант 2

1. Хорди кола AB і CD перетинаються в точці F, $AF=9$ см, $CF=3$ см, довжина відрізка DF на 10 см більша за довжину відрізка BF. Обчисліть довжину відрізка BF.
2. Пряма AB дотикається до кола в точці B, пряма AD — січна, що проходить через точку A, причому точка C лежить між точками A і D. Обчисліть довжину відрізка AD, якщо $AB=6$ см, $CD=5$ см.
3. Січні кола BC і DE перетинаються в точці A, точка B лежить між точками A і C, точка D — між точками A і E. Обчисліть довжину відрізка AE, якщо $AB=2$ см, $CB=8AB$, $AD:DE=1:3$.

Відповіді. Варіант 1. 1. 18 см. 2. 16 см. 3. 32 см. Варіант 2. 1. 5 см. 2. 9 см. 3. 12 см.

ТЕОРЕМА ПІФАГОРА. ТЕОРЕМА, ОБЕРНЕНА ДО ТЕОРЕМИ ПІФАГОРА

Очікувані результати: учні мають уміти формулювати теорему Піфагора та теорему, обернену до теореми Піфагора; розуміти зміст і доведення теореми Піфагора та теореми, оберненої до теореми Піфагора; застосовувати теорему Піфагора та теорему, обернену до теореми Піфагора, під час розв'язування задач, зокрема практичного змісту.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може провести таку бесіду:

— Ви, певно, чули про видатного давньогрецького математика Піфагора. Його ім'ям названо одну з найважливіших теорем геометрії — теорему Піфагора про співвідношення між катетами й гіпотенузою прямокутного трикутника. Це співвідношення було відоме задовго до Піфагора, але саме Піфагор довів його. На сьогодні відомо понад 150 способів доведення теореми Піфагора. Таку кількість доведень можна пояснити фундаментальним значенням теореми для геометрії. На найближчих уроках ми вивчимо теорему Піфагора та одне з її доведень, навчимося застосовувати цю теорему під час розв'язування задач.

Потім учитель / учителька може запропонувати обговорити таке питання:

— Чи можливо за допомогою мотузки, розділеної вузликами на 12 частин, побудувати прямий кут? (Учитель / учителька може продемонструвати таку мотузку й запропонувати учням / ученицям за її допомогою побудувати прямий кут. Якщо в них виникають труднощі, то педагог показує, як це зробити, і пояснює, що такий спосіб побудови прямого кута ґрунтується на теоремі, оберненій до теореми Піфагора.)

Після цього можна поставити більш загальне запитання:

— Чи можливо, знаючи довжини сторін трикутника, визначити, чи є цей трикутник прямокутним? Відповідь на це запитання дає теорема, обернена до теореми Піфагора. На найближчих уроках ми вивчимо також і теорему, обернену до теореми Піфагора, навчимося розв'язувати задачі із застосуванням цієї теореми.

З метою розширення кругозору учнів / учениць і зацікавленості їх у вивченні математики вчитель / учителька може провести коротку розповідь про Піфагора та піфагорові числа (*див. додатковий матеріал*).

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➤ ***Усні вправи (обчислення квадрата числа й квадратного кореня з числа)***

1. Обчисліть: $5^2,\ 3^2,\ 12^2,\ 4^2,\ 13^2,\ 8^2,\ 6^2,\ 10^2,\ 15^2,\ 25^2.$
2. Обчисліть: $\sqrt{25},\ \sqrt{16},\ \sqrt{9},\ \sqrt{144},\ \sqrt{400},\ \sqrt{256}.$
3. Обчисліть значення виразу: $\left(\sqrt{13}\right)^2,\ \left(\sqrt{29}\right)^2,\ \sqrt{3^2+4^2},\ \sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}.$
4. Обчисліть суму квадратів чисел: 3 і 4, 8 і 6, 12 і 16, 5 і 12, 9 і 12.

➤ ***Математичний диктант (означення прямокутного трикутника та його елементів, метричні співвідношення в прямокутному трикутнику).***

1. Побудуйте трикутник ABC, у якому $\angle A = 90°$.
2. Назвіть вид цього трикутника.
3. Укажіть назви сторін цього трикутника.
4. Проведіть у трикутнику ABC висоту AN.

5. Яку назву мають відрізки BN і NC?

6. Обчисліть довжину висоти, якщо $BN = 4$ см, $NC = 9$ см.

7. Обчисліть квадрати катетів трикутника ABC.

➢ ***Графічний диктант***

Виконайте побудови. Укажіть усі прямокутні трикутники, що при цьому утворилися. Назвіть катети й гіпотенузи цих трикутників.

1. Побудуйте прямокутник $ABCD$ і проведіть діагональ AC.
2. Побудуйте ромб $ABCD$, проведіть діагоналі й позначте точку O перетину діагоналей.
3. Побудуйте паралелограм $ABCD$ і проведіть висоти BK і DN.
4. Побудуйте рівнобедрений трикутник ABC ($AB = BC$) і проведіть медіану BM.
5. Побудуйте трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$) і проведіть висоти BM і CP.
6. Побудуйте коло, проведіть діаметр AB, позначте на колі точки C і D та сполучіть кожну з цих точок з кінцями діаметру.

➢ ***Фронтальне опитування***

1. З яких частин складається будь-яка теорема?
2. Сформулюйте у вигляді «Якщо..., то...» такі теореми:
   1) Вертикальні кути рівні.
   2) Сума суміжних кутів дорівнює 180°.

   Назвіть умову й висновок кожної із цих теорем. Сформулюйте твердження, обернені до наведених теорем. Чи правильні ці твердження?
3. Наведіть приклад теореми, обернена до якої є правильним твердженням.

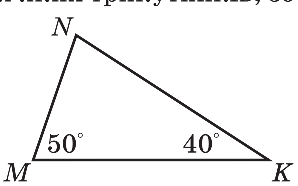
ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

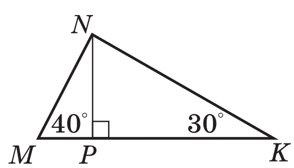
1. Теорема Піфагора.
   ! У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.
2. Застосування теореми Піфагора до обчислення невідомої сторони прямокутного трикутника за двома відомими.
   ! Нехай a і b — катети прямокутного трикутника, c — його гіпотенуза. Тоді:
   $a^2 = c^2 - b^2 \rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$; $b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$.
3. Теорема, обернена до теореми Піфагора.
   ! Якщо сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони, то такий трикутник є прямокутним.

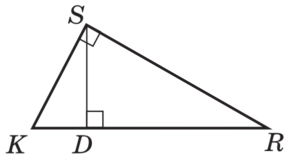
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

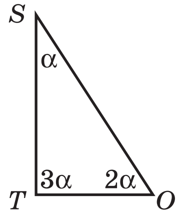
➢ ***Усні вправи***

1. Для яких трикутників, зображених на рисунках, виконується теорема Піфагора?

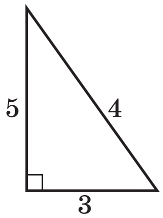
1) 

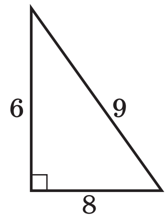
2) 

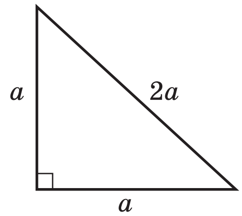
3) 

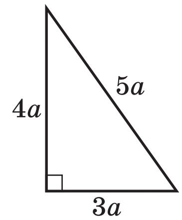
4) 

2. Чи є помилки в зображенні прямокутних трикутників (*див. рисунок*)? Якщо так, виправте ці помилки.

1) 

2) 

3) 

4) 

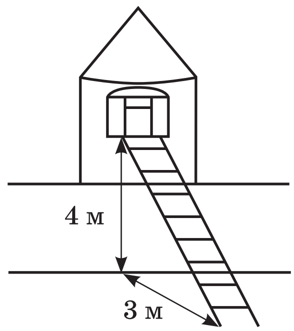
3. Чому дорівнює гіпотенуза прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють:

1) 6 см і 8 см; 2) 5 см і 12 см?

4. Чому дорівнює катет прямокутного трикутника, якщо гіпотенуза та другий катет відповідно дорівнюють:

1) 5 см і 3 см; 2) 15 см і 12 см?

5. *Жарт*. Чи винен садівник? Злочинець потрапив до замку крізь вікно, скориставшись приставною драбиною (*див. рисунок*). На землі залишилися сліди від драбини. Підозра впала на садівника, якого часто бачили із драбиною. Якого висновку дійшов детектив, дізнавшись, що довжина драбини садівника дорівнює 3 м та іншої драбини в садівника немає?



6. Дві сторони прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Якою може бути довжина третьої сторони?

7. Два кути трикутника дорівнюють 90° і 45°, а найбільша сторона — 20 см. Обчисліть довжини решти сторін трикутника.

8. Обчисліть діагональ квадрата, сторона якого дорівнює:

1) 12 см; 2) 9 см; 3) a см.

Зауваження. Доцільно рекомендувати учням запам'ятати формулу $d = a\sqrt{2}$, де d — діагональ квадрата, a — його сторона.

9. Чи правильно, що трикутник зі сторонами 7 см, 24 см, 25 см є прямокутним?

10. Доведіть, що трикутник зі сторонами 2 см, 3 см і $\sqrt{13}$ см є прямокутним.

11. Установіть, чи є трикутник прямокутним, якщо його сторони дорівнюють:

1) 8 см, 15 см, 17 см; 2) 5 см, 7 см, 12 см.

12. У трикутнику BML $BM^2 = BL^2 + LM^2$. Укажіть прямий кут цього трикутника.

13. У трикутнику CFP $CF^2 + CP^2 = FP^2$. Чи можна стверджувати, що цей трикутник є прямокутним? Якщо так, укажіть сторону цього трикутника, яка є гіпотенузою.

14. Дві менші сторони трикутника дорівнюють 9 см і 12 см. Чому має дорівнювати найбільша сторона трикутника, щоб він був прямокутним?

15. Чому дорівнює градусна міра найбільшого кута трикутника, сторони якого дорівнюють:

1) 12 см, 16 см, 20 см;

2) 7 см, 24 см, 25 см;

3) 1 см, 4 см і $\sqrt{17}$ см?

16. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 15 см, 17 см, 8 см?

➢ ***Письмові вправи***

1. Сума катетів прямокутного трикутника дорівнює 17 см, а гіпотенуза — 13 см. Обчисліть довжини катетів трикутника.

2. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює 10 см. Обчисліть довжини сторін трикутника, якщо різниця його катетів дорівнює 4 см.

3. У трапеції менша діагональ перпендикулярна до більшої бічної сторони. Обчисліть довжину більшої основи трапеції, якщо менша діагональ дорівнює 12 см, а більша бічна сторона — 5 см.

4. Хорда завдовжки 8 см віддалена від центра кола на 3 см. Чому дорівнює діаметр кола?

5. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 9 см і 25 см. Менша діагональ перпендикулярна до більшої бічної сторони і дорівнює 15 см. Обчисліть периметр трапеції.

6. Висота рівнобедреного трикутника ділить бічну сторону на відрізки завдовжки 1 см і 12 см, починаючи від основи. Обчисліть довжину основи трикутника.

7. Чому дорівнює гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника, катет якого дорівнює:

1) 4 см; 2) $2\sqrt{2}$ см; 3) a см?

8. Чому дорівнює катет рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює:

1) 10 см; 2) $\sqrt{2}$ см; 3) c см?

9. Чому дорівнює висота рівностороннього трикутника, сторона якого дорівнює:

1) 6 см; 2) $2\sqrt{3}$ см; 3) a см?

Зауваження. Доцільно рекомендувати учням запам'ятати формулу $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, де h — висота рівностороннього трикутника, a — його сторона.

10. Визначте, чи є прямокутним трикутник зі сторонами:

1) 4 см, 5 см, 6 см; 2) 2 см, $\sqrt{7}$ см, $\sqrt{13}$ см.

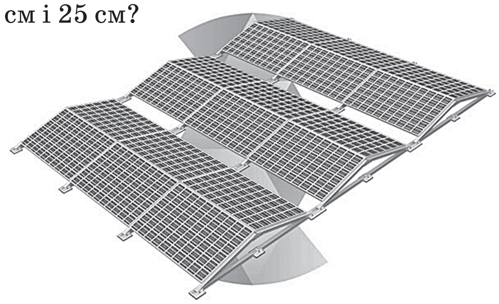
11. Обчисліть площу трикутника, якщо його сторони дорівнюють 5 см, 12 см, 13 см.

12. Діагоналі паралелограма дорівнюють 16 см і 30 см, а одна зі сторін — 17 см. Доведіть, що цей паралелограм є ромбом.

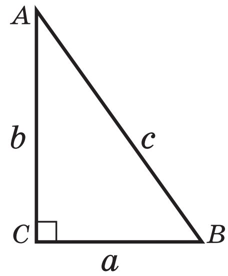
13. Сторони трикутника дорівнюють 15 см, 20 см і 25 см. Чому дорівнюють медіана й висота, проведені до найбільшої сторони трикутника?

14. Чому дорівнюють висоти трикутника, сторони якого 7 см, 24 см і 25 см?

15. На рисунку зображено систему для встановлення сонячних панелей. Висота цієї споруди дорівнює 1 м, ширина — 10 м, довжина — 30 м. Обчисліть площу сонячних панелей, установлених на системі, зображеній на рисунку.



➢ ***Картка-підказка для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

Теорема Піфагора	
Якщо в ΔABC $\angle C = 90^\circ$, то $AB^2 = AC^2 + BC^2$. *Або*: Якщо a, b, c — довжини сторін ΔABC, то $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a^2 = c^2 - b^2 \rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b^2 = c^2 - a^2 \rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$ **Теорема, обернена до теореми Піфагора** Якщо в ΔABC $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то $\angle C = 90^\circ$	
Піфагорові трійки чисел Якщо числа a, b, c такі, що $a^2 + b^2 = c^2$, то трійка чисел a, b, c — піфагорова трійка, а трикутники зі сторонами a, b, c — піфагорові	**Приклади піфагорових трикутників** 

➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. Відстані від середини гіпотенузи до катетів дорівнюють 10 см і 24 см. Обчисліть периметр трикутника.
   Відповідь. 120 см.
2. Обчисліть суму квадратів медіан прямокутного трикутника, проведених до катетів, якщо гіпотенуза трикутника дорівнює 4 см.
   Відповідь. 20 см.
3. За яких значень a трикутник зі сторонами $3a$, $4a$, $5a$ є прямокутним?
   Відповідь. За будь-яких.
4. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника ділить висоту, проведену до основи, на відрізки завдовжки 20 см і 16 см. Обчисліть периметр трикутника.
   Відповідь. 216 см.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

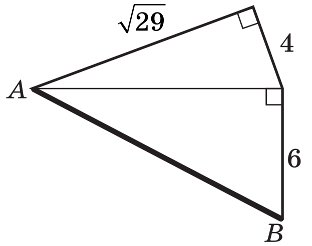
➢ ***Математичний диктант***

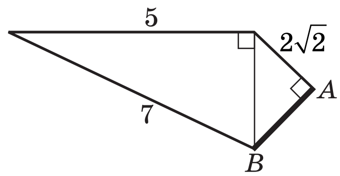
Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b, а гіпотенуза — c. Обчисліть:

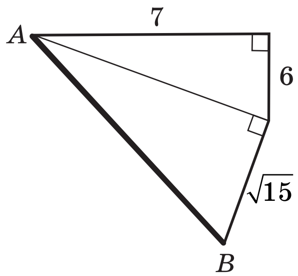
1) c, якщо $a = 5$ см, $b = 12$ см;
2) a, якщо $b = 24$ см, $c = 25$ см;
3) b, якщо $c = 17$ см, $a = 8$ см;
4) c, якщо $a = b = 5$ см;
5) a, якщо $c = 7$ см, $b = 5$ см;
6) b, якщо $a = 4$ см, $c = 6$ см.

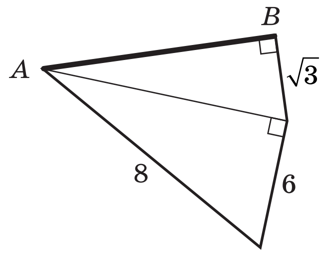
➢ ***Завдання 1 за рисунками***

На кожному з рисунків обчисліть довжину відрізка AB.

1) 

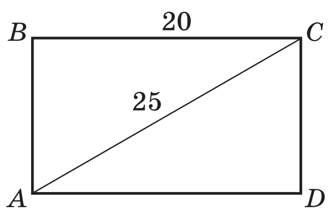
2) 

3) 

4) 

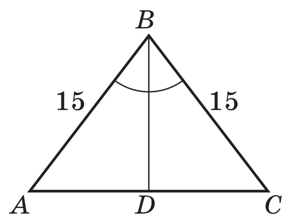
➢ ***Завдання 2 за рисунками***

1) $ABCD$ — прямокутник



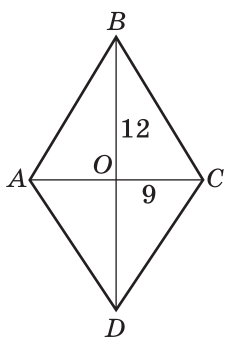
CD — ?

2) ABC — трикутник



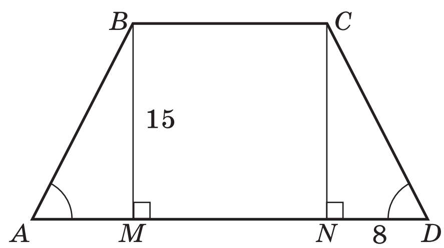
$AD = 18$, BD — ?

3) $ABCD$ — ромб



AB — ?

4) $ABCD$ — трапеція



AB — ?

➢ ***Дидактична гра «Утворіть слово»***

Учитель / учителька об’єднує всіх учнів / учениць класу в декілька команд (залежно від їхньої кількості). Кожна команда отримує картку, на якій написано твердження та відповідні букви. Усі команди виконують завдання: з букв, що відповідають правильним твердженням, утворити слово. Перемагає команда, яка першою правильно назве слово й зможе пояснити, який зв’язок має це слово з прямокутним трикутником і теоремою Піфагора.

Приклад картки

Оскільки $12^2 \neq 13^3 + 5^2$, то трикутник зі сторонами 5, 12, 13 не є прямокутним	А
Якщо сторони трикутника дорівнюють 1, 1, $\sqrt{2}$, то градусна міра найбільшого кута цього трикутника дорівнює 90°	Г
Якщо для сторін трикутника ABC виконується рівність $BC^2 = AC^2 + AB^2$, то кут A цього трикутника є прямим	Е
Оскільки $6 = 5 + 1$, то сторона завдовжки 6 лежить проти прямого кута	К
Якщо гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 15, а один із катетів — 10, то другий катет обчислюють так: $\sqrt{15^2 - 10^2}$	Т
Оскільки $4^2 + 5^2 = 41$, то трикутник зі сторонами 4, 5, $\sqrt{41}$ є прямокутним	П
Якщо катет рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 5, то гіпотенуза цього трикутника дорівнює $5\sqrt{2}$	И
Якщо сторони трикутника дорівнюють $3n$, $4n$, $5n$, де n — будь-яке натуральне число, то такий трикутник є прямокутним	Є
Якщо m і n — катети прямокутного трикутника, а k — гіпотенуза, то $k^2 = m^2 - n^2$	М

Відповідь. ЄГИПЕТ.

➢ *Робота на картках із друкованою основою*

Варіант 1

1. Заповніть пропуски:
   1) Якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 16 см, то гіпотенузу обчислюють так: ____.
   2) Якщо гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 13 см, а один з катетів — 5 см, то другий катет обчислюють так: ______________________________.
   3) Якщо сторони прямокутного трикутника дорівнюють 32 см, 40 см і 24 см, то гіпотенузою є сторона завдовжки ________.
   4) Якщо в трикутнику CFP $FP^2 = CF^2 + CP^2$, то кут __________ цього трикутника є прямим.
2. Заповніть порожні комірки таблиці (a, b — катети прямокутного трикутника, c — гіпотенуза).

a	$2\sqrt{3}$	10		7	1	
b	2		$2\sqrt{5}$	7		11
c		26	5		$3\sqrt{2}$	$11\sqrt{2}$

Варіант 2

1. Заповніть пропуски:

 1) Якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см, то гіпотенузу обчислюють так: ______________________________.

 2) Якщо гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 26 см, а один з катетів — 24 см, то другий катет обчислюють так: ______________________________.

 3) Якщо сторони прямокутного трикутника дорівнюють 36 см, 27 см і 45 см, то гіпотенузою є сторона завдовжки ________.

 4) Якщо в трикутнику DQT $QT^2 = DT^2 + QD^2$, то кут ____ цього трикутника є прямим.

2. Заповніть порожні комірки таблиці (a, b — катети прямокутного трикутника, c — гіпотенуза).

a	2		$2\sqrt{5}$	3		
b	$\sqrt{5}$	12		3	4	13
c		15	6		$4\sqrt{5}$	$13\sqrt{2}$

➢ ***Тестові завдання з подальшою взаємоперевіркою і взаємооцінюванням***

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

Варіант 1

1. Чому дорівнює гіпотенуза прямокутного трикутника, катети якого 8 см і 6 см?

А	Б	В	Г
14 см	7 см	50 см	10 см

2. Чому дорівнює катет прямокутного трикутника, гіпотенуза якого 13 см, а другий катет — 5 см?

А	Б	В	Г
8 см	12 см	$\sqrt{194}$ см	18 см

3. Чому дорівнює сторона ромба, діагоналі якого 8 см і 6 см?

А	Б	В	Г
10 см	14 см	5 см	12,5 см

4. Чому дорівнює висота рівнобедреного трикутника, основа якого 20 см, а бічна сторона — 26 см?

А	Б	В	Г
25 см	24 см	$4\sqrt{61}$ см	$2\sqrt{69}$ см

Варіант 2

1. Чому дорівнює гіпотенуза прямокутного трикутника, катети якого 4 см і 3 см?

А	Б	В	Г
$\sqrt{7}$ см	7 см	5 см	12,5 см

2. Чому дорівнює катет прямокутного трикутника, гіпотенуза якого 17 см, а другий катет — 8 см?

А	Б	В	Г
$\sqrt{353}$ см	5 см	9 см	15 см

3. Чому дорівнює сторона ромба, діагоналі якого 16 см і 12 см?

А	Б	В	Г
20 см	10 см	18 см	14 см

4. Чому дорівнює висота рівнобедреного трикутника, основа якого 24 см, а бічна сторона — 13 см?

А	Б	В	Г
5 см	$\sqrt{407}$ см	$\sqrt{313}$ см	10 см

Відповіді

Варіант 1. 1. Г. 2. Б. 3. В. 4. Б.

Варіант 2. 1. В. 2. Г. 3. Б. 4. А.

➢ *Тестові завдання*

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють $5a$ і $12a$. Чому дорівнює гіпотенуза цього трикутника?

А	Б	В	Г
13	$13a$	$13a^2$	$169a$

2. Катет прямокутного рівнобедреного трикутника дорівнює 7 см. Чому дорівнює гіпотенуза трикутника?

А	Б	В	Г
$7\sqrt{2}$ см	$2\sqrt{7}$ см	$\dfrac{7}{\sqrt{2}}$ см	$\dfrac{\sqrt{2}}{7}$ см

3. Чому дорівнюють катети прямокутного трикутника, якщо їхні довжини відносяться як 3 : 4, а гіпотенуза трикутника дорівнює 20 см?

А	Б	В	Г
6 см і 8 см	9 см і 12 см	3 см і 4 см	12 см і 16 см

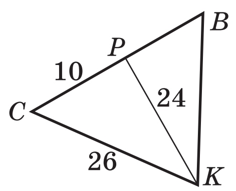
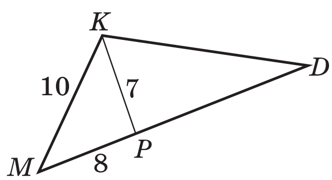
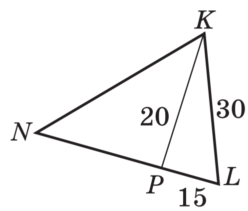
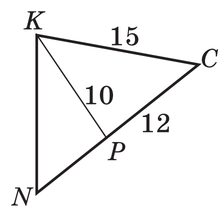
4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а різниця катетів — 3 см. Чому дорівнює периметр трикутника?

А	Б	В	Г
32 см	36 см	34 см	38 см

5. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 12 см, 16 см і 20 см?

А	Б	В	Г
6 см	8 см	10 см	20 см

6. З-поміж зображених на рисунку вкажіть трикутник, у якому відрізок KP є висотою.

А	Б	В	Г
			

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють $8a$ і $15a$. Чому дорівнює гіпотенуза цього трикутника?

А	Б	В	Г
$17a^2$	$289a$	$17a$	17

2. Гіпотенуза прямокутного рівнобедреного трикутника дорівнює 13 см. Чому дорівнюють катети трикутника?

А	Б	В	Г
$\dfrac{\sqrt{2}}{13}$ см	$13\sqrt{2}$ см	$2\sqrt{13}$ см	$\dfrac{13}{\sqrt{2}}$ см

3. Чому дорівнюють катети прямокутного трикутника, якщо їхні довжини відносяться як 4 : 3, а гіпотенуза трикутника дорівнює 15 см?

А	Б	В	Г
9 см і 6 см	4 см і 3 см	16 см і 12 см	12 см і 9 см

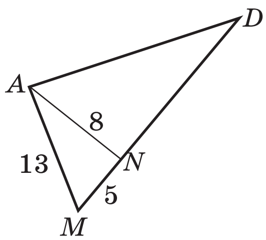
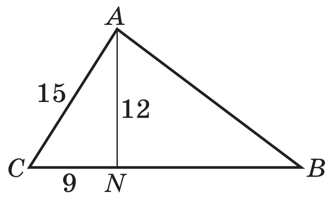
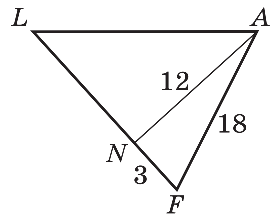
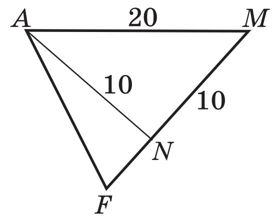
4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 20 см, а різниця катетів — 4 см. Чому дорівнює периметр трикутника?

А	Б	В	Г
40 см	34 см	56 см	48 см

5. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо трикутника зі сторонами 26 см, 24 см і 10 см?

А	Б	В	Г
13 см	12 см	5 см	10 см

6. З-поміж зображених на рисунку вкажіть трикутник, у якому відрізок AN є висотою.

А	Б	В	Г
			

Відповіді. Варіант 1. 1. Б. 2. А. 3. Г. 4. Б. 5. В. 6. А. Варіант 2. 1. В. 2. Г. 3. Г. 4. Г. 5. А. 6. Б.

➢ ***Робота в парах***
- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см. Обчисліть периметр трикутника, якщо його бісектриса, проведена до основи, дорівнює 6 см.
2. Основи рівнобедерної трапеції дорівнюють 8 см і 18 см, а висота — 12 см. Обчисліть периметр трапеції. Чи можна в цю трапецію вписати коло?

Варіант 2

1. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см, а бічна сторона — 13 см. Обчисліть довжину медіани, проведеної до основи.
2. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 21 см і 28 см, а більша бічна сторона — 25 см. Обчисліть периметр трапеції. Чи можна в цю трапецію вписати коло?

➢ ***Робота в групах***
- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв’яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв’язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Сторона ромба дорівнює 10 см, а один з кутів — 120°. Обчисліть довжини діагоналей ромба.

Задача 2

Діагональ рівнобічної трапеції дорівнює 41 см, а висота — 9 см. Обчисліть периметр трапеції, якщо бічна сторона дорівнює 15 см.

Задача 3

Висота, проведена з тупого кута ромба, ділить його сторону на відрізки завдовжки 7 см і 18 см, починаючи від вершини гострого кута. Обчисліть довжини діагоналей ромба.

Задача 4

Одна зі сторін трикутника на 15 см більша за другу, а висота, проведена до третьої сторони, ділить її на відрізки завдовжки 32 см і 7 см. Обчисліть периметр трикутника.

➢ *Завдання на встановлення відповідності*

Варіант 1

Установіть відповідність між відрізком (1–4) та його довжиною (А–Д).

1	Діагональ квадрата зі стороною 7 см	**А**	7 см
2	Діагональ прямокутника зі сторонами 7 см і $\sqrt{14}$ см	**Б**	$7\sqrt{2}$ см
3	Висота рівностороннього трикутника зі стороною 7 см	**В**	$\frac{7\sqrt{3}}{2}$ см
4	Сторона ромба, діагоналі якого дорівнюють 10 см і $4\sqrt{6}$ см	**Г**	$2\sqrt{7}$ см
		Д	$3\sqrt{7}$ см

Варіант 2

Установіть відповідність між відрізком (1–4) та його довжиною (А–Д).

1	Діагональ прямокутника зі сторонами 2 см і 4 см	**А**	5 см
2	Діагональ квадрата зі стороною 5 см	**Б**	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$ см
3	Сторона ромба, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 8 см	**В**	$5\sqrt{2}$ см
4	Висота рівностороннього трикутника зі стороною 5 см	**Г**	$2\sqrt{5}$ см
		Д	$3\sqrt{5}$ см

Відповіді. Варіант 1. 1 — Б. 2 — Д. 3 — В. 4 — А. Варіант 2. 1 — Г. 2 — В. 3 — А. 4 — Б.

➢ *Самостійна робота з подальшою взаємоперевіркою і взаємооцінюванням*

Варіант 1	**Варіант 2**
1. Обчисліть радіус кола, описаного навколо прямокутника зі сторонами	
12 см і 16 см	8 см і 6 см
2. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють a і b, а діагональ — c. Обчисліть висоту трапеції, якщо	
$a=20$ см, $b=28$ см, $c=30$ см	$a=16$ см, $b=32$ см, $c=26$ см
3. З точки A до кола проведено дотичну AD (D — точка дотику). Обчисліть відстань від точки A до центра кола, якщо	
радіус кола дорівнює 5 см, а довжина відрізка AD — 12 см	радіус кола дорівнює 12 см, а довжина відрізка AD — 16 см

Відповіді. Варіант 1. 1. 10 см. 2. 18 см. 3. 13 см. Варіант 2. 1. 5 см. 2. 10 см. 3. 20 см.

➢ ***Самостійна робота***

Варіант 1

1. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 26 см, а один з катетів на 2 см менший від гіпотенузи. Чому дорівнює другий катет трикутника?
2. Обчисліть периметр квадрата, діагональ якого дорівнює $36\sqrt{2}$ см.
3. Бічна сторона рівнобедреного трикутника відноситься до основи як $13:10$. Обчисліть висоту трикутника, проведену до основи, якщо периметр трикутника дорівнює 72 см.
4. Катет прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а медіана, проведена до нього, — 5 см. Чому дорівнює гіпотенуза трикутника?

Варіант 2

1. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а другий — на 14 см більший за перший. Чому дорівнює гіпотенуза трикутника?
2. Обчисліть довжину діагоналі квадрата, периметр якого дорівнює $12\sqrt{2}$ см.
3. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до бічної сторони як $16:17$, а висота, проведена до основи, дорівнює 30 см. Обчисліть довжини сторін трикутника.
4. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) катет AC дорівнює 8 см, а медіана AM — 10 см. Чому дорівнює гіпотенуза трикутника?

Відповіді. Варіант 1. 1. 10 см. 2. 144 см. 3. 24 см. 4. $2\sqrt{13}$ см. Варіант 2. 1. 26 см. 2. 6 см. 3. 32 см, 34 см, 34 см. 4. $4\sqrt{13}$ см.

Додатковий матеріал

ПІФАГОР ТА ЙОГО ВИСЛОВЛЮВАННЯ

Піфагор (570 р. до н. е., Самос — 497 р. до н. е., Метапонт) — давньогрецький філософ, релігійний та політичний діяч, засновник піфагореїзму. Піфагор став легендою та джерелом дискусій уже за стародавніх часів. У 306 р. до н. е. йому як найрозумнішому із греків установили пам'ятник у Римському Форумі.

Історію життя Піфагора складно відокремити від легенд, які представляють його як досконалого і величного мудреця, посвяченого в усі таїнства греків і варварів. Піфагор відомий також своїми мудрими висловлюваннями. Ось деякі з них.

- Для пізнання будь-якого народу намагайся перш за все вивчити його мову.
- Людина, яка опинилася в полоні своїх пристрастей, вільною бути не може.
- Не роби нічого ганебного ані в присутності інших, ані таємно. Першим твоїм законом має бути повага до себе самого.
- Не суди про свою велич за величиною своєї тіні на заході сонця.
- Під час гніву не потрібно ані говорити, ані діяти.
- Роби велике, не обіцяючи великого.

ЧИСЛА ПІФАГОРА

Числа Піфагора (піфагорові трійки) складаються з трьох натуральних чисел a, b і c, таких, що $a^2+b^2=c^2$. Ці числа зазвичай записують у такому вигляді: (a,b,c). Найвідомішим прикладом є трійка (3, 4, 5). Якщо (a,b,c) числа Піфагора, то й числа (ka,kb,kc), де k — будь-яке ціле додатне число, також є числами Піфагора. Таку назву ці числа отримали через теорему Піфагора, оскільки вони виражають довжини сторін прямокутних трикутників.

Примітивними піфагоровими трійками називають взаємно прості числа a, b і c.

ПРИКЛАДИ ПРИМІТИВНИХ ПІФАГОРОВИХ ТРІЙОК:

(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), (8, 15, 17), (9, 40, 41).

(*Зауваження*. Доцільно рекомендувати учням запам'ятати ці трійки, оскільки це спрощує обчислення під час застосування теореми Піфагора.)

На мегалітичних спорудах (доісторичних спорудах із величезних кам'яних блоків) у північній Європі є свідчення, що такі трійки були відомі ще до винайдення писемності.

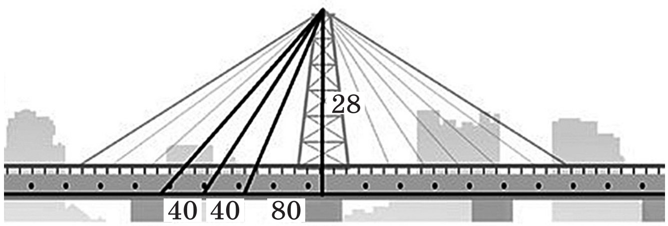
ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА, ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ[1]

Очікувані результати: учні мають розуміти й уміти пояснювати, що таке перпендикуляр, похила та її проєкція; знати властивості перпендикуляра, похилих та їхніх проєкцій; розуміти доведення властивостей перпендикуляра й похилої; розв'язувати задачі на застосування поняття та властивостей перпендикуляра, похилих та їхніх проєкцій.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може провести таку бесіду.

— Ви, певно, знаєте, що для стійкості вертикальних стовпів (телевізійних веж, веж стільникового зв'язку, опор мостів, блискавкозахисту тощо) використовують розтяжки (*див. рисунок*).



Для цього один кінець канату закріплюють ближче до вершини вежі, а другий — на площині, де її встановлено. Як ви вважаєте, чи залежить довжина канату від відстані між місцем кріплення канату на площині й основою вежі? Інтуїтивно зрозуміло: що далі від основи вежі розташовано місце кріплення, то більше канату знадобиться. На найближчих уроках ми обґрунтуємо цей факт з математичної точки зору.

Потім педагог може поставити таке запитання:

— Який математичний термін походить від латинського слова *projectio* (кидання вперед)? (Учні висловлюють припущення.)

Відповідь. Від латинського слова *projectio* походить термін *проєкція*. Цей термін траплявся вам під час вивчення метричних співвідношень в прямокутному трикутнику. Сьогодні ми вивчимо означення проєкції. Але проєкція не може існувати сама по собі: буває лише проєкція чогось на щось. (Пригадайте: проєкція катета на гіпотенузу.) На найближчих уроках ми обговоримо проєкцію похилої на пряму, дізнаємося, що називають похилою, як поняття похилої та її проєкції пов'язані з поняттям перпендикуляра до прямої.

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

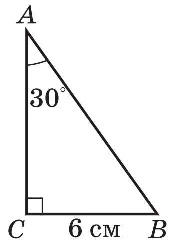
➤ ***Фронтальне опитування***

1. Укажіть катети та гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо його сторони дорівнюють:
   1) 10 см, 6 см, 8 см; 2) 10 см, 24 см, 26 см.
2. Катети одного трикутника дорівнюють 5 см і 12 см, а другого — 12 см і 16 см. Гіпотенуза якого із трикутників більша? Чи можна дати відповідь на запитання, не виконуючи обчислень?
3. Що називають перпендикуляром, проведеним із точки до прямої? Якою геометричною фігурою є перпендикуляр?

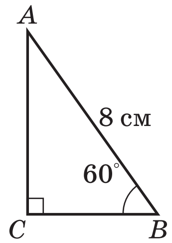
[1] Відповідно до модельних навчальних програм «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти — автори: Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С. та Генденштейн Л. Е., Жемчужкіна Г. В. — цю тему в курсі геометрії 8-го класу не вивчають.

4. Яке з наведених тверджень неправильне?
   1) Довжина відрізка є додатним числом.
   2) У прямокутному трикутнику довжина гіпотенузи більша за довжину будь-якого з катетів.
   3) Відстань від точки до прямої — це довжина перпендикуляра, проведеного з точки до прямої.
   4) З точки A до прямої m можна провести безліч перпендикулярів.

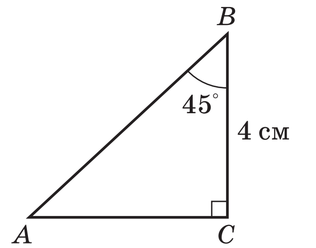
➢ ***Завдання за готовими рисунками***



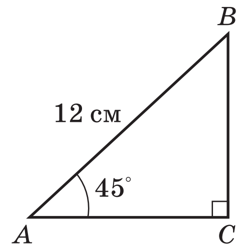
AB — ? AC — ?



AC — ? BC — ?



AC — ? AB — ?



AC — ? BC — ?

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Означення похилої, проведеної з точки до прямої.
   ! Нехай точка A не лежить на прямій, AB — перпендикуляр до цієї прямої. Будь-який відрізок, який сполучає точку A з точкою прямої a й не збігається з перпендикуляром, називають похилою до прямої a.
2. Означення проєкції похилої на пряму.
   ! Відрізок прямої a, обмежений основами перпендикуляра й похилої, називають проєкцією похилої на задану пряму.
3. Властивості перпендикуляра, похилих та їхніх проєкцій.
   ! Нехай з однієї точки до прямої проведено перпендикуляр і похилі. Тоді:
- будь-яка похила більша за перпендикуляр і більша за свою проєкцію на задану пряму;
- рівні похилі мають рівні проєкції, і навпаки: якщо проєкції двох похилих рівні, то рівні й самі похилі;
- більша похила має більшу проєкцію, і навпаки: з двох похилих більшою є та, яка має більшу проєкцію.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

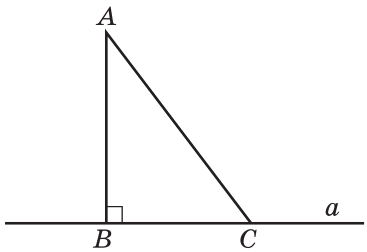
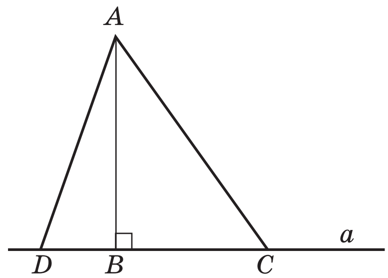
➢ ***Усні вправи***

1. У трикутнику ABC $\angle A = 90°$. Назвіть:
   1) похилу до прямої AB, проведену з точки C; 2) проєкцію похилої BC на пряму AC.
2. Відрізки a_1 і a_2 — проєкції похилих l_1 і l_2, проведених з однієї точки до однієї прямої. Порівняйте:
   1) l_1 і l_2, якщо $a_1 < a_2$; 2) a_1 і a_2, якщо $l_1 = l_2$.
3. Дві похилі до однієї прямої мають рівні проєкції. Чи обов'язково ці похилі рівні?
4. Скільки рівних похилих до прямої можна провести з точки, що не лежить на цій прямій?
5. Відрізок MN — перпендикуляр, проведений з точки M до прямої a, MP, MQ, MR — похилі, основи яких віддалені від основи N перпендикуляра відповідно на 18 см, 15 см і 14 см. Яка з похилих має найбільшу довжину?
6. З однієї точки до прямої проведено дві рівні похилі. Відстань між їхніми основами дорівнює 14 см. Чому дорівнюють довжини проєкцій похилих на цю пряму?
7. Точка розміщена на відстані 6 см від прямої. Із цієї точки до прямої проведено похилу, яка утворює з прямою кут $45°$. Чому дорівнює проєкція похилої на цю пряму?
8. Пожежну драбину завдовжки 25 м приставлено до даху будинку. Проєкція драбини на землю дорівнює 15 м. Яка висота стіни будинку?

➢ *Письмові вправи*

1. З точки, розміщеної на відстані 6 см від прямої, проведено дві рівні похилі до цієї прямої. Відстань між основами похилих дорівнює 16 см. Обчисліть довжину похилих.
2. З точки до прямої проведено дві похилі, довжина однієї з них дорівнює 26 см, довжина її проєкції — 24 см. Обчисліть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 45°.
3. З точки до прямої проведено дві похилі, одна з яких має довжину 10 см і утворює зі своєю проєкцією на пряму кут 30°. Обчисліть довжину другої похилої, якщо вона утворює з прямою кут 45°.
4. З точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі. Довжина однієї з похилих дорівнює 25 см, а друга похила утворює з прямою кут 30°. Обчисліть довжину другої похилої та проєкції похилих на пряму, якщо довжина перпендикуляра дорівнює 20 см.
5. З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них дорівнює 22 см і утворює з прямою кут 45°. Обчисліть довжину другої похилої, якщо її проєкція на цю пряму дорівнює $\sqrt{82}$ см.
6. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 5 см і 7 см, а різниця їхніх проєкцій дорівнює 4 см. Обчисліть відстань між основами похилих.
7. З точки до прямої проведено дві похилі, одна з яких на 3 см довша за другу. Обчисліть довжини цих похилих, якщо довжини їхніх проєкцій дорівнюють 5 см і 7 см.
8. З точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі, довжини яких дорівнюють 12 см і 8 см. Обчисліть довжину перпендикуляра, якщо проєкції похилих на цю пряму відносяться як $7:3$.
9. З точки, розміщеної на відстані 24 см від прямої, проведено до цієї прямої дві похилі. Обчисліть довжини похилих, якщо проєкції похилих відносяться як $5:9$, а відстань між основами похилих дорівнює 28 см. Розгляньте два випадки.

➢ *Картка-підказка для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань*

<table>
<tr><th colspan="2">Перпендикуляр і похила</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td></td><td>Властивості</td></tr>
<tr><td>
Відрізок AB — перпендикуляр до прямої a.
Відрізок AC — похила до прямої a.
Відрізок BC — проєкція похилої AC на пряму a</td><td>
Якщо $AB \perp a$, AC, AD — похилі, то:
1) $AC > AB$, $AC > BC$;
2) $AC = AD \Leftrightarrow BC = BD$;
3) $AC > AD \Leftrightarrow BC > BD$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо перпендикуляр і похила проведені з однієї точки до однієї прямої, то:
1) будь-яка похила більша за перпендикуляр і за свою проєкцію;
2) рівні похилі мають рівні проєкції, і навпаки;
3) більша похила має більшу проєкцію, і навпаки</td></tr>
</table>

➢ *Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики*

1. Відрізок AM — перпендикуляр до прямої m, AB і AC — похилі до цієї прямої, $AB = c$, $AC = b$. Обчисліть довжину проєкції похилої AC на пряму m, якщо $BC = a$.

   Відповідь. $\dfrac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$.

2. Відрізок BM — перпендикуляр до прямої, BA і BC — похилі до цієї прямої. Доведіть, що $BC^2 = AB^2 + AC \pm 2AC \cdot AM$.

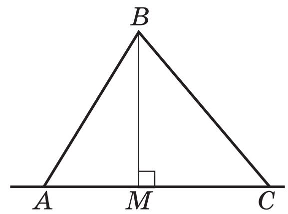
   Указівка. Розгляньте два випадки:

   1) точки A і C розташовані по різні боки від точки M;

   2) точки A і C розташовані по один бік від точки M.

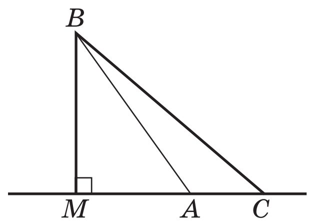
   Доведення

   1) Розглянемо випадок, коли A і C розташовані по різні боки від точки M (*див. рисунок*).



ΔABM: $BM^2 = AB^2 - AM^2$;
ΔBMC: $BM^2 = BC^2 - MC^2$.
Отже, $BC^2 - MC^2 = AB^2 - AM^2$,
звідки $BC^2 = AB^2 + MC^2 - AM^2$.
Ураховуючи, що $MC = AC - AM$,
маємо: $BC^2 = AB^2 + \left(AC - AM\right)^2 - AM^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AM + AM^2 - AM^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AC \cdot AM$.

   2) Розглянемо випадок, коли A і C розташовані по один бік від точки M (*див. рисунок*).



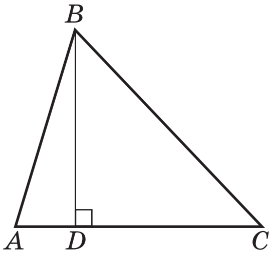
ΔABM: $BM^2 = AB^2 - AM^2$;
ΔBMC: $BM^2 = BC^2 - MC^2$.
Отже, $BC^2 - MC^2 = AB^2 - AM^2$,
звідки $BC^2 = AB^2 + MC^2 - AM^2$.
Ураховуючи, що $MC = AC + AM$,
маємо: $BC^2 = AB^2 + \left(AC + AM\right)^2 - AM^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AC \cdot AM + AM^2 - AM^2 = AB^2 + AC^2 + 2 \cdot AC \cdot AM$.

Отже, маємо: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \pm 2 \cdot AC \cdot AM$, причому знак залежить від розташування точок A і C відносно точки M.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

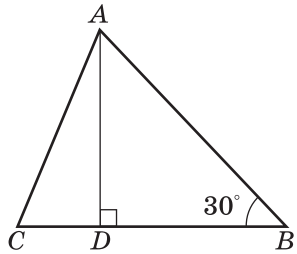
➢ *Завдання за рисунками*

1)



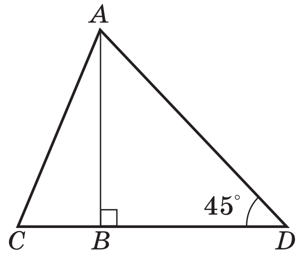
$BD = 12$, $AD = 5$, $DC = 9$.
$AB = ?$ $BC = ?$

2)



$AC = 5$, $CD = 3$, $\angle B = 30°$.
$AB = ?$

3)



$AC = 10$, $CB = 6$, $\angle D = 45°$.
$CD = ?$

➢ *Математичний диктант*

Заповніть пропуски, зважаючи на умову: якщо AB — перпендикуляр до прямої m, точки C і D належать прямій m.

1) Відрізки AC і AD називають...
2) Відрізки BC і BD називають...
3) Якщо $AC > AD$, то $BC \ldots BD$.
4) Якщо $BC < BD$, то $AC \ldots AD$.
5) Якщо $AB = 10$ см, $AC = 8$ см, то $BC = \ldots$ см.
6) Якщо $AD = 26$ см, $BD = 24$ см, то $AB = \ldots$ см.

➢ *Дидактична гра «Обмін запитаннями»*

Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у дві команди. Представники команд по черзі ставлять запитання команді суперників і називають гравця, який відповідатиме на це запитання. Запитання можуть бути такими: «Чому дорівнює довжина похилої, проведеної з точки до прямої, якщо довжина її проєкції на цю пряму дорівнює..., а довжина перпендикуляра, проведеного з тієї самої точки на ту саму пряму, дорівнює...?» або «Чому дорівнює довжина перпендикуляра, проведеного з точки до прямої, якщо довжина похилої, проведеної з цієї самої точки до цієї самої прямої, дорівнює..., а довжина її проєкції на цю пряму дорівнює...?» тощо — із числовими значеннями на місці пропусків. За кожну правильну відповідь команда отримує 1 бал. Якщо запитання поставлене некоректно (наприклад, задана довжина перпендикуляра більша за довжину похилої), то з рахунку команди знімають 1 бал, а хід переходить до другої команди. Перемагає команда, яка отримає найбільше балів.

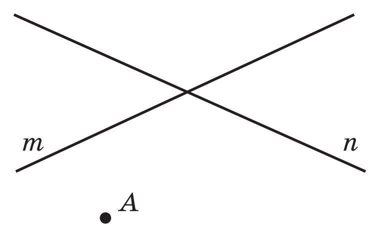
➢ *Робота на картках із друкованою основою*

Варіант 1

На рисунку:

1) проведіть перпендикуляри з точки A до прямих m і n, позначте їх буквами;
2) проведіть по дві похилі з точки A до кожної з прямих m і n, позначте їх буквами;
3) напишіть властивості перпендикуляра, похилих та їхніх проєкцій на прямі, що утворилися на вашому рисунку.

___
___
___

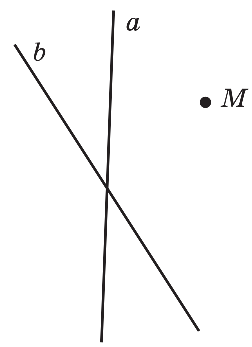


Варіант 2

На рисунку:

1) проведіть перпендикуляри з точки M до прямих a і b, позначте їх буквами;
2) проведіть по дві похилі з точки M до кожної з прямих a і b, позначте їх буквами;
3) напишіть властивості перпендикуляра, похилих та їхніх проєкцій на прямі, що утворилися на вашому рисунку.

___
___
___



➢ *Тестові завдання з подальшою самоперевіркою і самооцінюванням*

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Похила завдовжки 10 см, яку проведено з точки A до прямої m, має проєкцію завдовжки 6 см. Чому дорівнює довжина перпендикуляра, проведеного з A до прямої m?

А	Б	В	Г
9 см	8 см	7 см	6 см

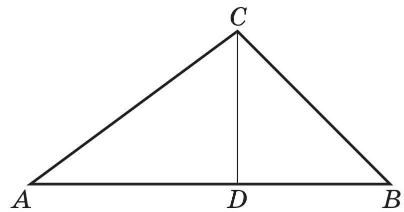
2. З точки K до прямої a проведено перпендикуляр і похилу завдовжки відповідно 15 см і 17 см. Чому дорівнює проєкція похилої?

А	Б	В	Г
6 см	7 см	8 см	9 см

3. З точки M до прямої l проведено похилу й перпендикуляр завдовжки 12 см. Чому дорівнює похила, якщо її проєкція на пряму l дорівнює 9 см?

А	Б	В	Г
15 см	14 см	13 см	12 см

4. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $CD \perp AB$, $AC = 13$ см, $CD = 5$ см, $AB = 20$ см (*див. рисунок*). Чому дорівнює проєкція катета CB на гіпотенузу AB?



А	Б	В	Г
5 см	6 см	7 см	8 см

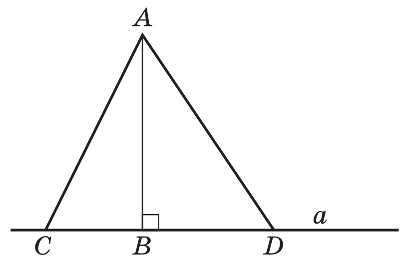
Відповіді. 1. Б. 2. В. 3. А. 4. Г.

➢ *Тестові завдання*

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Скориставшись рисунком, укажіть закінчення твердження «Якщо $AC < AD$, то...» так, щоб воно було правильним.



А	Б	В	Г
$BC > BD$	$BC = BD$	$BC < BD$	$BC > AD$

2. Відрізок MN — перпендикуляр, проведений з точки M до прямої a, P і Q — довільні точки прямої a. Яке з наведених тверджень неправильне?

А	Відрізки MP і MQ називають похилими, проведеними з точки M до прямої a
Б	Відрізки PN і QN — проєкції похилих MP і MQ на пряму a
В	Якщо $PN < QN$, то $MP < MQ$
Г	З точки, розміщеної поза прямою, можна провести до цієї прямої три рівні похилі

3. З точки A до прямої a проведено перпендикуляр AB і похилі AC і AD так, що $CB < BD$. Розташуйте відрізки AB, AC і AD в порядку спадання їхніх довжин.

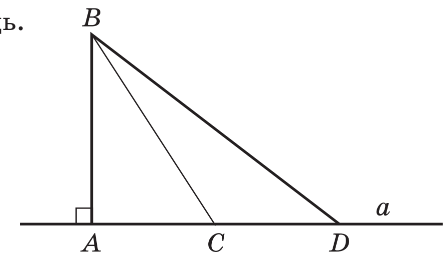
А	Б	В	Г
AC, AD, AB	AB, AD, AC	AD, AC, AB	AD, AB, AC

4. З точки A до прямої m проведено похилу. Чому дорівнює довжина цієї похилої, якщо вона на 5 см більша за свою проєкцію на пряму m, а точка A віддалена від прямої m на 15 см?

А	Б	В	Г
25 см	20 см	15 см	10 см

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.



1. Скориставшись рисунком, укажіть закінчення твердження «Якщо $AC < AD$, то...» так, щоб воно було правильним.

А	Б	В	Г
$BC > BD$	$BC < BD$	$BC = BD$	$BC < AB$

2. Відрізок MN — перпендикуляр, проведений з точки M до прямої a, P і Q — довільні точки прямої a. Яке з наведених тверджень неправильне?

А	Відрізки NP і NQ називають похилими, проведеними з точки M до прямої a
Б	Відрізки PN і QN — проєкції похилих MP і MQ на пряму a
В	Якщо $MP > MQ$, то $PN > QN$
Г	З точки, розміщеної поза прямою, можна провести до цієї прямої дві рівні похилі

3. З точки B до прямої b проведено перпендикуляр BC і похилі BD і BE так, що $CE > CD$. Розташуйте відрізки BC, BD і BE в порядку зростання їхніх довжин.

А	Б	В	Г
BC, BD, BE	BD, BC, BE	BE, BC, BD	BC, BE, BD

4. З точки A до прямої m проведено похилу. Чому дорівнює проєкція цієї похилої на пряму m, якщо вона на 1 см менша від похилої, а точка A віддалена від прямої m на 7 см?

А	Б	В	Г
7 см	14 см	24 см	25 см

Відповіді. Варіант 1. 1. В. 2. Г. 3. В. 4. А. Варіант 2. 1. Б. 2. А. 3. А. 4. Г.

➢ ***Робота в парах***

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. З точки A до прямої a проведено перпендикуляр AK і похилі AB і AC. Відомо, що $KC = 7$ см, $KB = 11$ см. Розташуйте відрізки AB, AK і AC у порядку зростання їхніх довжин.
2. Чому дорівнює висота, проведена до найбільшої сторони трикутника зі сторонами 15 см, 41 см і 42 см?
3. З точки до прямої проведено дві похилі, одна з яких на 2 см довша за другу. Обчисліть відстань від точки до прямої, якщо проєкції цих похилих дорівнюють 5 см і 9 см.

Варіант 2

1. З точки A до прямої a проведено перпендикуляр AM і похилі AD і AF. Відомо, що $DM = 8$ см, $MF = 5$ см. Розташуйте відрізки AM, AD і AF у порядку спадання їхніх довжин.
2. Чому дорівнює висота, проведена до найбільшої сторони трикутника зі сторонами 15 см, 13 см і 14 см?
3. З точки до прямої проведено дві похилі, одна з яких на 4 см коротша за другу. Обчисліть відстань від точки до прямої, якщо проєкції цих похилих дорівнюють 18 см і 10 см.

➢ ***Робота в групах***

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

З точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 25 см і 26 см. Обчисліть відстань від точки до прямої, якщо відношення проєкцій цих похилих дорівнює 0,7.

Задача 2

Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 10 см, а градусна міра кута при основі трапеції — 30°. Обчисліть довжину діагоналі трапеції, якщо її проєкція на більшу основу дорівнює 12 см.

Задача 3

Кінці відрізка MN віддалені від прямої a на 4 см і 11 см. Чому дорівнює проєкція відрізка MN на пряму a, якщо $MN = 25$ см?

Задача 4

Відрізок AB є перпендикуляром до прямої a і похилою до прямої b. Відрізок BC — перпендикуляр до прямої b і похила до прямої a. Відрізок CD — перпендикуляр до прямої a. Визначте взаємне розташування відрізків AB і CD.

➢ ***Завдання на встановлення відповідності***

Варіант 1

З точки A до прямої a проведено перпендикуляр і похилу. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Г) так, щоб утворилося правильне твердження.

1	Якщо перпендикуляр дорівнює 12 см, а похила — 16 см, то її проєкція на пряму a дорівнює…	А	$4\sqrt{2}$ см
2	Якщо похила дорівнює 12 см, а її проєкція на пряму a — 8 см, то перпендикуляр дорівнює…	Б	$4\sqrt{3}$ см
3	Якщо перпендикуляр дорівнює 5 см, а проєкція похилої на пряму a — $\sqrt{7}$ см, то похила дорівнює…	В	$4\sqrt{7}$ см
		Г	$4\sqrt{5}$ см

Варіант 2

З точки A до прямої a проведено перпендикуляр і похилу. Установіть відповідність між початком речення (1–3) та його закінченням (А–Г) так, щоб утворилося правильне твердження.

1	Якщо перпендикуляр дорівнює 3 см, а проєкція похилої на пряму a — 6 см, то похила дорівнює...	**А**	$3\sqrt{2}$ см
2	Якщо перпендикуляр дорівнює 3 см, а похила — 6 см, то її проєкція на пряму a дорівнює...	**Б**	$3\sqrt{3}$ см
3	Якщо похила дорівнює 8 см, а її проєкція на пряму a — $\sqrt{10}$ см, то перпендикуляр дорівнює...	**В**	$3\sqrt{6}$ см
		Г	$3\sqrt{5}$ см

Відповіді. Варіант 1. 1 — В. 2 — Г. 3 — А. Варіант 2. 1 — Г. 2 — Б. 3 — В.

➢ ***Самостійна робота***

Варіант 1

1. З точки A до прямої m проведено похилі AC і AD та перпендикуляр AB так, що точки C і D лежать по різні боки від точки B. Обчисліть довжину AD, якщо $AB=8$ см, $AC=10$ см, $CD=12$ см.
2. Обчисліть відстань між основами похилих, проведених із точки A до прямої m, якщо відстань від точки A до прямої m дорівнює 12 см, а довжини похилих — 13 см і 15 см. Скільки розв'язків має задача?
3. Довжина перпендикуляра, проведеного до прямої a, дорівнює 8 см, а довжина похилої на 4 см більша, ніж довжина її проєкції на цю пряму. Обчисліть довжину похилої.
4. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких дорівнюють 15 см і 20 см, а довжини їхніх проєкцій на цю пряму відносяться як $9:16$. Обчисліть відстань від точки до прямої.

Варіант 2

1. З точки A до прямої m проведено похилі AC і AD та перпендикуляр AB так, що точки C і D лежать по різні боки від точки B. Обчисліть довжину AC, якщо $AB=4$ см, $AD=5$ см, $CD=6$ см.
2. Обчисліть відстань між основами похилих, проведених із точки A до прямої m, якщо відстань від точки A до прямої m дорівнює 24 см, а довжини похилих — 30 см і 26 см. Скільки розв'язків має задача?
3. Довжина перпендикуляра, проведеного до прямої a, дорівнює 6 см, а довжина похилої на 2 см більша, ніж довжина її проєкції на цю пряму. Обчисліть довжину похилої.
4. З точки до прямої проведено дві похилі, довжини яких відносяться як $2:3$, а довжини їхніх проєкцій на цю пряму дорівнюють 2 см і 7 см. Обчисліть довжини похилих.

Відповіді. Варіант 1. 1. 10 см. 2. 4 см або 14 см. 3. 10 см. 4. 12 см. Варіант 2. 1. 5 см. 2. 8 см або 28 см. 3. 10 см. 4. 6 см і 9 см.

СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС І КОТАНГЕНС[1] ГОСТРОГО КУТА ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА. ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА Й КОТАНГЕНСА ДЕЯКИХ КУТІВ

Очікувані результати: учні мають знати й формулювати означення синуса, косинуса, тангенса й котангенса гострого кута прямокутного трикутника; уміти зображувати та знаходити на рисунках сторони прямокутного трикутника, відношення яких дорівнює синусу, косинусу, тангенсу й котангенсу вказаного гострого кута; розуміти, що називають тригонометричними функціями; записувати формули доповнення, співвідношення між тригонометричними функціями одного аргументу; обчислювати значення синуса, косинуса, тангенса й котангенса для кутів 30°, 45°, 60°.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може провести таку бесіду:

— Сьогодні ми розпочинаємо вивчення важливого розділу математики — тригонометрії. Тригонометричні обчислення застосовують майже у всіх розділах геометрії, фізики й інженерної справи. Велике значення має техніка тріангуляції, що дозволяє вимірювати відстані до недалеких зір в астрономії, між орієнтирами в географії, контролювати системи навігації супутників. Також слід відзначити застосування тригонометрії в таких галузях, як теорія музики, акустика, оптика, аналіз фінансових ринків, електроніка, теорія імовірностей, статистика, біологія, медицина (зокрема ультразвукове дослідження (УЗД) та комп'ютерна томографія), фармацевтика, хімія, теорія чисел (і, як наслідок, криптографія), сейсмологія, метеорологія, океанологія, картографія, топографія та геодезія, архітектура, фонетика, економіка, електронна техніка, машинобудування, комп'ютерна графіка, кристалографія.

Слово *тригонометрія* — грецького походження, буквально означає вимірювання трикутників — розділ елементарної математики, що вивчає співвідношення між сторонами й кутами трикутників, дозволяючи проводити обчислення через спеціально визначені функції кутів.

На найближчих уроках ми вивчимо означення тригонометричних функцій гострих кутів, а саме: означення синуса, косинуса, тангенса й котангенса гострого кута прямокутного трикутника, навчимося розв'язувати задачі на застосування цих понять.

Варто зазначити, що це тільки початок вивчення тригонометрії. У 9-му й 10-му класах ми розширимо поняття синуса, косинуса, тангенса й котангенса, дізнаємося, що називають тригонометричними функціями будь-якого (а не тільки гострого) кута, вивчимо багато тригонометричних співвідношень, навчимося розв'язувати тригонометричні рівняння. Отже, щоб успішно опанувати цю цікаву науку й навчитися застосовувати її на практиці, а можливо, у майбутній професії, потрібно добре засвоїти матеріал цього та найближчих уроків.

З метою активізації пізнавальної діяльності та розширення кругозору учнів / учениць учитель / учителька може провести коротку бесіду про походження термінів *синус, косинус, тангенс* і *котангенс* (*див. додатковий матеріал*).

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

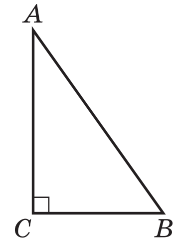
➢ ***Фронтальне опитування***

1. Який трикутник називають прямокутним?
2. Як називають сторони прямокутного трикутника?

---

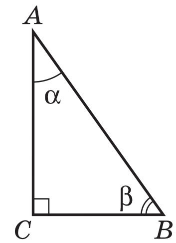
[1] Поняття котангенса розглядається відповідно до модельних навчальних програм «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти, автори: Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С.; Генденштейн Л. Е., Жемчужкіна Г. В.; Панченко С. Ю.

3. Назвіть катети й гіпотенузу трикутника, зображеного на рисунку.



4. Чому дорівнює сума гострих кутів прямокутного трикутника?
5. Сформулюйте ознаки подібності прямокутних трикутників.
6. Що називають відношенням двох чисел?

➢ ***Математичний диктант із подальшою перевіркою та обговоренням***



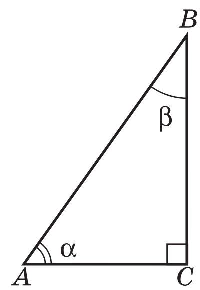
1. У трикутнику, зображеному на рисунку, назвіть:
   1) катет, прилеглий до кута α;
   2) катет, прилеглий до кута β;
   3) катет, протилежний куту α;
   4) катет, протилежний куту β.
2. Скориставшись зображенням трикутника ABC, напишіть:
   1) відношення катетів до гіпотенузи;
   2) відношення катетів.

➢ ***Усні вправи***

Доповніть твердження.

1) Якщо катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см і 9 см, то гіпотенуза дорівнює...
2) Якщо дві більші сторони прямокутного трикутника дорівнюють 17 і 15, то третя сторона дорівнює...
3) Якщо діагональ квадрата дорівнює 12 см, то сторона квадрата дорівнює...
4) Якщо діагоналі ромба дорівнюють 12 см і 16 см, то сторона ромба дорівнює...
5) Якщо в прямокутному трикутнику ABC кут C — прямий, $\angle A = 50^\circ$, то найменшою стороною цього трикутника є сторона...
6) Якщо в прямокутному трикутнику ABC $AB = 13$ см, $BC = 5$ см, $AC = 12$ см, то найменшим гострим кутом цього трикутника є кут...

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ



1. Означення синуса гострого кута прямокутного трикутника.
   ! Синусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до гіпотенузи: $\sin A = \frac{BC}{AB}$; $\sin B = \frac{AC}{AB}$.
2. Означення косинуса гострого кута прямокутного трикутника.
   ! Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до гіпотенузи: $\cos A = \frac{AC}{AB}$; $\cos B = \frac{BC}{AB}$.
3. Означення тангенса гострого кута прямокутного трикутника.
   ! Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення протилежного катета до прилеглого: $\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$; $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$.
4. Означення котангенса гострого кута прямокутного трикутника.
   ! Котангенсом гострого кута прямокутного трикутника називають відношення прилеглого катета до протилежного : $\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}$; $\operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC}$.
5. Залежність синуса, косинуса, тангенса, котангенса кута тільки від величини кута.
   ! Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту другого прямокутного трикутника, то синуси цих кутів рівні.

Тобто

! Синус кута залежить тільки від величини цього кута.

Аналогічно

! Косинус, тангенс і котангенс кута залежать тільки від величини цього кута.

6. Властивості синуса, косинуса, тангенса, котангенса гострого кута.

- $0 < \sin\alpha < 1,\ 0 < \cos\alpha < 1,\ \mathrm{tg}\,\alpha > 0,\ \mathrm{ctg}\,\alpha > 0.$
- Якщо $\alpha < \beta$, то $\sin\alpha < \sin\beta,\ \cos\alpha > \cos\beta,\ \mathrm{tg}\,\alpha < \mathrm{tg}\,\beta,\ \mathrm{ctg}\,\alpha > \mathrm{ctg}\,\beta$.
- Якщо $\alpha = \beta$, то $\sin\alpha = \sin\beta,\ \cos\alpha = \cos\beta,\ \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta,\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{ctg}\,\beta$.

7. Означення тригонометричної функції.

! Функцію, яка відповідає залежності синусів (косинусів, тангенсів, котангенсів) гострих кутів від цих кутів, називають тригонометричною.

8. Формули доповнення.

- Для будь-якого гострого кута α:
  $\sin(90°-\alpha) = \cos\alpha,\ \cos(90°-\alpha) = \sin\alpha,\ \mathrm{tg}(90°-\alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha,\ \mathrm{ctg}(90°-\alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha$.

9. Співвідношення між тригонометричними функціями одного кута.

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;\ \mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$.

10. Обчислення синуса, косинуса й тангенса кута $45°$.

- $\sin 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \cos 45° = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \mathrm{tg}\,45° = 1,\ \mathrm{ctg}\,45° = 1$.

11. Обчислення синуса, косинуса й тангенса кута $30°$.

- $\sin 30° = \dfrac{1}{2},\ \cos 30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{tg}\,30° = \dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \mathrm{ctg}\,30° = \sqrt{3}$.

12. Обчислення синуса, косинуса й тангенса кута $60°$.

- $\sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \cos 60° = \dfrac{1}{2},\ \mathrm{tg}\,60° = \sqrt{3},\ \mathrm{ctg}\,60° = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

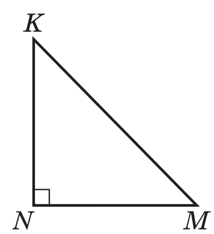
➢ ***Усні вправи***

1. Прочитайте записи: $\sin A = \dfrac{1}{2},\ \cos B = \dfrac{2}{3},\ \mathrm{tg}\,D = 1,\ \mathrm{ctg}\,M = 2$. Поясніть, що вони означають.
2. Яке із чисел: 1, 0,5, $\sqrt{3}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{3}{4}$, $\dfrac{4}{3}$, 0, –0,3 — може бути числовими значеннями синуса, косинуса, тангенса й котангенса гострого кута прямокутного трикутника? Відповідь обґрунтуйте.
3. Скориставшись рисунком, визначте, яка тригонометрична функція кута K виражається відношенням:

1) $\dfrac{KN}{KM}$; 2) $\dfrac{MN}{KN}$;

3) $\dfrac{MN}{KM}$; 4) $\dfrac{KM}{KN}$;

5) $\dfrac{KN}{NM}$.



4. Обчисліть косинус гострого кута B прямокутного трикутника, якщо його катет AC дорівнює 11 см, другий катет — 60 см, а гіпотенуза — 61 см.

5. Обчисліть синус гострого кута M прямокутного трикутника, якщо його катет MK дорівнює 45 см, другий катет — 28 см, а гіпотенуза — 53 см.

6. Обчисліть тангенс і котангенс гострого кута прямокутного рівнобедреного трикутника.

7. У трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 3$, $BC = 4$. Укажіть кут:

1) синус якого дорівнює $\frac{3}{5}$; 2) косинус якого дорівнює $\frac{4}{5}$;

3) тангенс якого дорівнює $\frac{3}{4}$; 4) котангенс якого дорівнює $\frac{3}{4}$.

8. Чому дорівнює синус, косинус, тангенс і котангенс найменшого кута єгипетського трикутника?

9. Чому дорівнює гострий кут x, якщо:

1) $\sin x = \cos 36°$; 2) $\cos x = \sin 82°$; 3) $\sin x = \cos x$?

10. Спростіть вираз:

1) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; 2) $\frac{1-\cos^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$.

11. Визначте, чи можуть синус і конус одного кута відповідно дорівнювати:

1) $\frac{5}{13}$ і $\frac{12}{13}$; 2) $\frac{2}{5}$ і $\frac{3}{5}$; 3) $\frac{4}{7}$ і $\frac{3}{7}$; 4) $\frac{8}{17}$ і $\frac{15}{17}$.

12. Доведіть, що за всіх α таких, що $0 < \alpha < 90°$, значення виразу $\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha + 1$ дорівнює 2.

13. Доведіть, що за всіх α таких, що $0 < \alpha < 90°$, значення виразу $1 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$ дорівнює 0.

14. Обчисліть:

1) $\sin 30° + \mathrm{tg}\,45°$; 2) $\sqrt{2}\sin 45° - \cos 60°$; 3) $\cos 30° \cdot \mathrm{ctg}\,30°$.

➤ ***Письмові вправи***

1. Побудуйте за допомогою транспортира прямокутний трикутник з гострим кутом $40°$. Виміряйте його сторони та обчисліть синус, косинус, тангенс і котангенс цього кута.
2. Побудуйте кут, градусна міра якого дорівнює $75°$. За допомогою додаткових побудов і вимірювань обчисліть синус, косинус, тангенс і котангенс цього кута.
3. Побудуйте прямокутний трикутник ABC, у якому:

1) $\mathrm{tg}\,A = \frac{5}{6}$; 2) $\sin A = \frac{2}{3}$.

4. Побудуйте гострий кут. Позначте на одній стороні кута дві точки й проведіть з них перпендикуляри до другої сторони кута.
   1) Виміряйте сторони прямокутних трикутників, що утворилися, та обчисліть двома способами синус побудованого кута. Порівняйте результати.
   2) Обчисліть косинус побудованого кута двома способами — за означенням і за основною тригонометричною тотожністю. Порівняйте результати.

5. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 10 см і 24 см. Обчисліть синус, косинус, тангенс і котангенс гострих кутів цього трикутника.

6. Катет і гіпотенуза прямокутного трикутника відповідно дорівнюють 6 см і 10 см. Обчисліть:
   1) синус гострого кута, що лежить проти більшого катета;
   2) косинус гострого кута, прилеглого до меншого катета;
   3) тангенс гострого кута, що лежить проти більшого катета;
   4) котангенс гострого кута, що лежить проти більшого катета.

7. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 5 см, а довжина основи — 24 см. Обчисліть синус, косинус, тангенс і котангенс кута при основі трикутника.

8. Діагоналі ромба дорівнюють 16 см і 30 см. Обчисліть синус, косинус, тангенс і котангенс кута, який утворює менша діагональ ромба з його стороною.

9. З точки A до прямої проведено перпендикуляр завдовжки 24 см і похилу завдовжки 25 см. Обчисліть синус, косинус, тангенс і котангенс кута, який утворює похила зі своєю проєкцією.

10. Обчисліть градусні міри кутів паралелограма, якщо:

 1) менша його сторона дорівнює 12 см, а висота, проведена до більшої сторони, — $6\sqrt{3}$ см;

 2) більша його сторона дорівнює 18 см, а висота, проведена до меншої сторони, — $9\sqrt{3}$ см.

11. Спростіть вираз:

 1) $2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$; 2) $(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)$; 3) $\sin\alpha:\operatorname{tg}\alpha$.

12. Спростіть вираз:

 1) $\dfrac{\cos(90°-\alpha)}{\sin(90°-\alpha)}$; 2) $\sin^2\alpha+\sin^2(90°-\alpha)$;

 3) $1-\cos^2(90°-\alpha)$; 4) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}(90°-\alpha)$.

13. Обчисліть значення виразу:

 1) $\cos 45°\cdot\sin 45°-\sin 30°$; 2) $\sin 60°\cdot\cos 30°-\operatorname{tg}45°$;

 3) $\operatorname{tg}^2 60\cdot\sin^2 45°$; 4) $2\operatorname{ctg}30°\cdot\sin 60°-\cos 60°$.

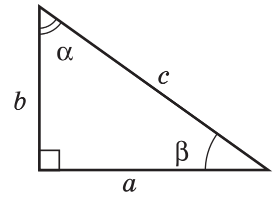
14. Обчисліть:

 1) $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha=0{,}6$; 2) $\operatorname{tg}\alpha$, якщо $\sin\alpha=\dfrac{8}{17}$.

15*. Розташуйте в порядку зростання:

 1) $\sin 12°$, $\sin 65°$, $\sin 38°$, $\sin 25°$; 2) $\cos 52°$, $\cos 10°$, $\cos 80°$, $\cos 20°$.

➢ ***Картка-підказка для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

Синус, косинус, тангенс, котангенс гострого кута прямокутного трикутника	
Синус гострого кута $=\dfrac{\text{протилежний катет}}{\text{гіпотенуза}}$ Косинус гострого кута $=\dfrac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}}$ Тангенс гострого кута $=\dfrac{\text{протилежний катет}}{\text{прилеглий катет}}$ Котангенс гострого кута $=\dfrac{\text{прилеглий катет}}{\text{протилежний катет}}$	$\boxed{\sin\alpha=\frac{a}{c}}$ $\boxed{\sin\beta=\frac{b}{c}}$ $\boxed{\cos\alpha=\frac{b}{c}}$ $\boxed{\cos\beta=\frac{a}{c}}$ $\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}}$ $\boxed{\operatorname{tg}\beta=\frac{b}{a}}$ $\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}}$ $\boxed{\operatorname{ctg}\beta=\frac{a}{b}}$ 

➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle B = 90°$), BM — медіана, BK — висота, $AC = 4$ см, $MK = \sqrt{3}$ см. Обчисліть градусні міри гострих кутів трикутника.
Відповідь. 30°, 60°.

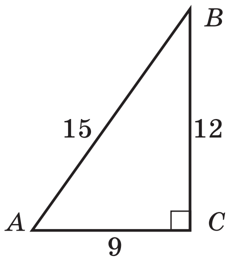
2. У гострокутному трикутнику ABC $AC = 15$ см, $BC = 14$ см. AK і BM — висоти трикутника, $BM = 11{,}2$ см. Чому дорівнюють синус, косинус і тангенс кута C трикутника ABC?

Відповідь. $\sin C = \dfrac{4}{5}$, $\cos C = \dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg} C = \dfrac{4}{3}$.

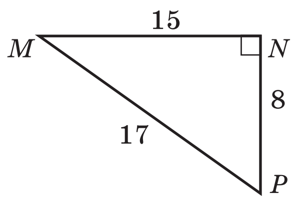
3. Доведіть тотожність $\dfrac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1 + \sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

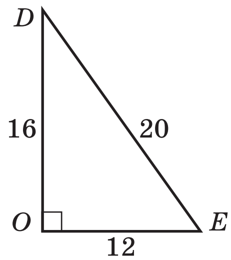
➢ ***Завдання 1 за рисунками***



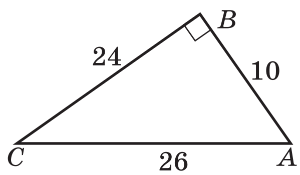
$\sin A$ — ?
$\operatorname{tg} B$ — ?



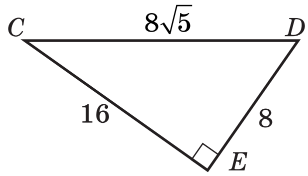
$\cos M$ — ?
$\operatorname{ctg} P$ — ?



$\sin D$ — ?
$\cos E$ — ?

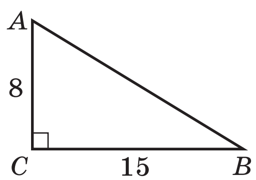


$\cos C$ — ?
$\operatorname{tg} A$ — ?

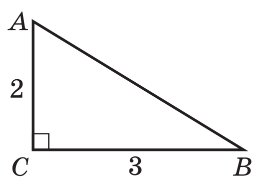


$\operatorname{tg} C$ — ?
$\operatorname{ctg} C$ — ?

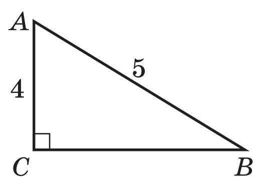
➢ ***Завдання 2 за рисунками***



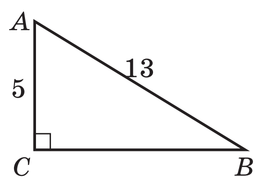
$\sin A$ — ?



$\cos B$ — ?



$\operatorname{tg} B$ — ?



$\operatorname{ctg} A$ — ?

➢ ***Математичний диктант***

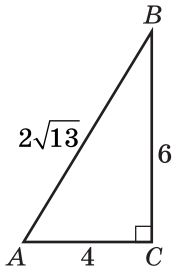
Заповніть пропуски.

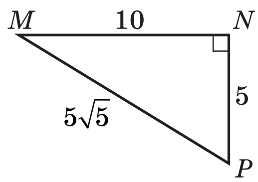
1) $\sin^2 37° + \cos^2 37° = \ldots$;
2) $\dfrac{\sin 50°}{\cos 50°} = \operatorname{tg} \ldots°$;
3) $\cos 50° = \sin \ldots°$;
4) $\sin 20° = \cos \ldots°$;
5) $\sin 45° \cdot \cos 45° = \ldots$;
6) $\sin 30° + \cos 60° = \ldots$;
7) $2\cos 30° - 2\sin 60° = \ldots$;
8) $\operatorname{tg} \ldots° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;
9) $\dfrac{\operatorname{tg} 60°}{\operatorname{tg} 45°} = \ldots$

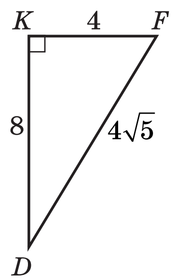
➢ ***Дидактична гра «Вибери собі тригонометричну функцію»***

Учитель / учителька обирає трьох асистентів, а решту класу об'єднує в три команди. На дошці — рисунки прямокутних трикутників для кожної команди. Асистенти записують довжини сторін цих трикутників (зазначені педагогом). Гравці команд по черзі підходять до дошки й обчислюють синус, косинус, тангенс або котангенс будь-якого гострого кута прямокутного трикутника. Тригонометричну функцію і кут гравці вибирають самі. Асистенти перевіряють правильність виконаного завдання і фіксують результат. Перед тим як до дошки має вийти наступна трійка гравців, асистенти змінюють довжини сторін трикутників. Перемагає команда, яка першою виконає завдання і дасть найбільше правильних відповідей.

Приклад трикутників для однієї із трійок гравців







➢ ***Робота на картках із друкованою основою***

Варіант 1

Заповніть пропуски.

1) Якщо в прямокутному трикутнику KMP ($\angle P = 90°$) $MP = k$, $PK = m$, $MK = p$, то

$\sin M =$ ____ , $\sin K =$ ____ , $\cos M =$ ____ , $\cos K =$ ____ ,

$\operatorname{tg} M =$ ____ , $\operatorname{tg} K =$ ____ , $\operatorname{ctg} M =$ ____ , $\operatorname{ctg} K =$ ____ .

2) $\sin$ ____ $° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 30° =$ ____ , tg ____ $° = 1$, $\operatorname{ctg} 60° =$ ____

Варіант 2

Заповніть пропуски.

1) Якщо в прямокутному трикутнику ABD ($\angle D = 90°$) $AB = d$, $AD = b$, $DB = a$, то

$\sin A =$ ____ , $\sin B =$ ____ , $\cos A =$ ____ , $\cos B =$ ____ ,

$\operatorname{tg} A =$ ____ , $\operatorname{tg} B =$ ____ , $\operatorname{ctg} A =$ ____ , $\operatorname{ctg} B =$ ____ .

2) $\sin 45° =$ ____ , $\cos$ ____ $° = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 30° =$ ____ , ctg ____ $° = 1$

➢ ***Тестові завдання***

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. У прямокутному трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 8$ см, $BC = 15$ см. Чому дорівнює $\sin A$?

А	Б	В	Г
$\frac{8}{15}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{15}{17}$	$\frac{15}{8}$

2. У прямокутному трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 9$ см, $BC = 12$ см. Чому дорівнює косинус кута A?

А	Б	В	Г
0,6	0,8	0,75	0,25

3. Яка з наведених рівностей правильна?

А	Б	В	Г
$\sin 42° = \sin 48°$	$\sin 24° = \cos 66°$	$\cos 35° = \sin 35°$	$\cos 28° = \sin 52°$

4. Чому дорівнює $\sin\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{3}{5}$?

А	Б	В	Г
$\frac{2}{5}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{4}{5}$

5. Чому дорівнює значення виразу $\mathrm{tg}\,60° \cdot \mathrm{ctg}\,45°$?

А	Б	В	Г
$\frac{1}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. У прямокутному трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 5$ см, $BC = 12$ см. Чому дорівнює $\cos A$?

А	Б	В	Г
$\frac{5}{12}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{12}{13}$	$\frac{5}{13}$

2. У прямокутному трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $BC = 16$ см. Чому дорівнює синус кута A?

А	Б	В	Г
0,75	0,25	0,8	0,6

3. Яка з наведених рівностей правильна?

А	Б	В	Г
$\cos 54° = \sin 36°$	$\cos 47° = \cos 43°$	$\sin 32° = \cos 32°$	$\sin 19° = \cos 81°$

4. Чому дорівнює $\cos\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{4}{5}$?

А	Б	В	Г
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{9}{25}$

5. Чому дорівнює значення виразу

$\mathrm{tg}\,45° \cdot \mathrm{ctg}\,30°$?

А	Б	В	Г
$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{3}$

Відповіді. Варіант 1. 1. В. 2. А. 3. Б. 4. Г. 5. Б. Варіант 2. 1. Г. 2. В. 3. А. 4. В. 5. Г.

➢ ***Робота в парах***

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і $6\sqrt{3}$ см. Обчисліть градусні міри гострих кутів цього трикутника.
2. Сторони одного прямокутного трикутника дорівнюють 20 см, 21 см і 29 см, а сторони другого — 42 см, 58 см і 40 см. Обчисліть значення тригонометричних функцій найменших гострих кутів кожного з цих трикутників. Поясніть результат.
3. Обчисліть значення виразу $\sin^2 25° + \cos^2 25° + \sin 30° + \mathrm{tg}\,45°$.

Варіант 2

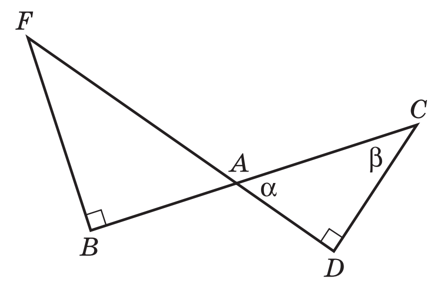
1. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює $5\sqrt{2}$ см, а один з катетів — 5 см. Обчисліть градусні міри гострих кутів цього трикутника.
2. Сторони одного прямокутного трикутника дорівнюють 12 см, 35 см і 37 см, а сторони другого — 74 см, 70 см і 24 см. Обчисліть значення тригонометричних функцій найбільших гострих кутів кожного з цих трикутників. Поясніть результат.
3. Обчисліть значення виразу $\cos^2 75° + \sin^2 75° + \cos 60° - \operatorname{ctg} 45°$.

➤ ***Робота в групах***

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Подайте різними способами синус, косинус, тангенс і котангенс кутів α і β, зображених на рисунку.



Задача 2

Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 2 см, а другий — $\sqrt{5}$ см. Обчисліть синус, косинус, тангенс і котангенс меншого гострого кута цього трикутника.

Задача 3

У рівнобічній трапеції $ABCD$ $AB = CD = 4$ см, $BC = 6$ см, $AD = 10$ см. Обчисліть градусні міри кутів трапеції.

➤ ***Завдання 1 на встановлення відповідності***

Варіант 1

У прямокутному трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 12$ см, $BC = 5$ см. Установіть відповідність між тригонометричною функцією кута A трикутника (1–4) та її числовим значенням (А–Д).

1	$\sin A$	**А**	$\frac{12}{5}$
2	$\cos A$	**Б**	$\frac{5}{13}$
3	$\operatorname{tg} A$	**В**	$\frac{5}{12}$
4	$\operatorname{ctg} A$	**Г**	$\frac{12}{13}$
		Д	$\frac{13}{12}$

Варіант 2

У прямокутному трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AC = 15$ см, $AB = 17$ см. Установіть відповідність між тригонометричною функцією кута A трикутника (1–4) та її числовим значенням (А–Д).

1	$\sin A$	**А**	$\frac{15}{17}$
2	$\cos A$	**Б**	$\frac{15}{8}$
3	$\operatorname{tg} A$	**В**	$\frac{8}{17}$
4	$\operatorname{ctg} A$	**Г**	$\frac{17}{15}$
		Д	$\frac{8}{15}$

Відповіді

Варіант 1. 1 — Б. 2 — Г. 3 — В. 4 — А.

Варіант 2. 1 — В. 2 — А. 3 — Д. 4 — Б.

➢ *Завдання 2 на встановлення відповідності*

Установіть відповідність між виразом (1–3) та його значенням (А–Г).

Варіант 1

1	$2\sin 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$	**А**	1,5
2	$\operatorname{tg}^2 45^\circ + \cos 60^\circ$	**Б**	2
3	$\operatorname{tg} 30^\circ \cdot \cos 30^\circ$	**В**	3
		Г	0,5

Варіант 2

1	$\sqrt{2}\sin 45^\circ + \cos 60^\circ$	**А**	1
2	$\operatorname{tg} 45^\circ - \cos^2 45^\circ$	**Б**	0,5
3	$6\sin 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 30^\circ$	**В**	$\sqrt{3}$
		Г	1,5

Відповіді

Варіант 1. 1 — В. 2 — А. 3 — Г.

Варіант 2. 1 — Г. 2 — Б. 3 — В.

➢ *Самостійна робота*

Варіант 1

1. Побудуйте кут:

   1) косинус якого дорівнює $\frac{6}{7}$; 2) тангенс якого дорівнює 3; 3) синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$.

2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 3 см і 8 см. Обчисліть:

   1) тангенс гострого кута, що лежить проти меншого катета;

   2) синус гострого кута, що прилягає до більшого катета;

   3) косинус гострого кута, що лежить проти більшого катета;

   4) котангенс гострого кута, що прилягає до меншого катета.

3. Обчисліть $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\cos\alpha = \frac{1}{4}$.

4. Обчисліть значення виразу:

   1) $2\cos 60^\circ + \sqrt{3}\sin 60^\circ$; 2) $3\operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$.

5. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, основа трикутника — 16 см. Обчисліть синус, косинус, тангенс і котангенс кута при основі трикутника.

Варіант 2

1. Побудуйте кут:

   1) косинус якого дорівнює $\frac{3}{5}$; 2) тангенс якого дорівнює 2; 3) синус якого дорівнює $\frac{2}{9}$.

2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 6 см. Обчисліть:

   1) тангенс гострого кута, що лежить проти більшого катета;

   2) синус гострого кута, що прилягає до меншого катета;

   3) косинус гострого кута, що лежить проти меншого катета;

   4) котангенс гострого кута, що прилягає до більшого катета.

3. Обчисліть $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ і $\operatorname{ctg}\alpha$, якщо $\sin\alpha = \frac{2}{3}$.

4. Обчисліть значення виразу:

   1) $\operatorname{ctg} 45^\circ - \sqrt{3}\cos 30^\circ$; 2) $4\operatorname{tg} 60^\circ \sin 60^\circ$.

5. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 14 см, а висота, проведена до основи — 24 см. Обчисліть синус, косинус, тангенс і котангенс кута при основі трикутника.

Відповіді. Варіант 1. 2. 1) $\frac{3}{8}$; 2) $\frac{3}{\sqrt{73}}$; 3) $\frac{3}{\sqrt{73}}$; 4) $\frac{3}{8}$. 3. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}$. 4. 1) $2\frac{1}{2}$; 2) $3\sqrt{3}$. 5. $\frac{15}{17}$, $\frac{8}{17}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{8}{15}$. Варіант 2. 2. 1) $\frac{6}{5}$; 2) $\frac{6}{\sqrt{61}}$; 3) $\frac{6}{\sqrt{61}}$; 4) $\frac{6}{5}$. 3. $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\sqrt{5}}{2}$. 4. 1) $-\frac{1}{2}$; 2) 6. 5. $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{7}$, $\frac{7}{24}$.

Додатковий матеріал

ПОХОДЖЕННЯ НАЗВ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Слово *синус* уперше трапляється в індійських сидхантах — анонімній праці з астрономії IV або V ст. і в «Аріабхатіамі» — творі індійського астронома й математика Аріабхати (476–550).

Назву *синус* мала *ардхаджива*: *ардха* означає половина, а *джива* — тятива лука, хорда. В арабській літературі індійський термін був замінений словом *джиба*, а згодом у IX ст. це слово було замінено словом *джайб*, тобто пазуха, опуклість. Під час перекладу з арабської на латину перекладачі застосовували слово *sinus* — буквальний переклад слова *джайб*.

Для позначення синуса кута використовували різні скорочення слова: *s, si, sin, S* тощо. Сучасне позначення синуса, косинуса, тангенса й котангенса запровадив Леонард Ейлер 1739 року.

Термін *косинус* є скороченням виразу *complementi sinus* — тобто додатковий синус. У працях арабських математиків косинус розглядали тільки як синус доповнення кута до 90°. Цей термін, як і *котангенс*, увів англійський математик і астроном Едмунд Гантер 1620 року. Терміни *косинус* і *котангенс* не отримали визнання відомих математиків того часу і з'явилися лише в математичних працях 1633–1671 років.

Поняття *тангенс* і *котангенс* з'явилися в арабській математиці як «пряма й обернена тінь». Ці величини використовували в науці про сонячний годинник — гномоніці. Про ці результати арабських математиків у Європі дізналися тільки в XI–XII ст. Проте англійський математик Томас Брадвардін (XIV ст.) та німецький математик і астроном Регіомонтан заново відкрили ці функції і наголошували на особливому значенні тангенсів у тригонометрії.

Назва *тангенс* походить від латинського *tangere* (дотикатися), *tangens* (дотичний). Слово *тангенс* увів у обіг данський математик Томас Фінке 1583 року. Загальноприйнятим цей термін став у XVII столітті.

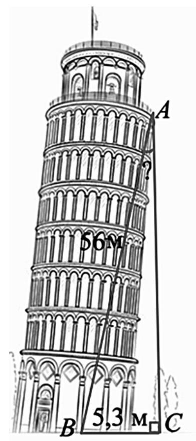
СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ СТОРОНАМИ Й КУТАМИ ПРЯМОКУТНОГО ТРИКУТНИКА. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

Очікувані результати: учні мають знати співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника; розуміти, що означає розв'язати прямокутний трикутник; уміти застосовувати співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника для розв'язування задач, зокрема практичного змісту:

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може провести таку бесіду:

— Одного разу восьмикласники повідомили, що на уроках географії їм розповідали про визначні пам'ятки Італії, зокрема знамениту Пізанську вежу. Учнів зацікавила ця незвична споруда, але найбільше вони хотіли дізнатися, який кут відхилення від вертикалі має Пізанська вежа, тобто чому дорівнює градусна міра кута A на рисунку.



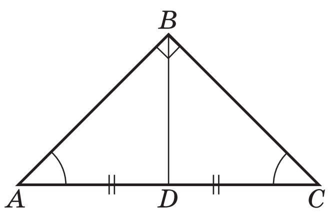
Учні запам'ятали, що висота вежі дорівнює 56 м і 2006 року вершина вежі була відхилена на 5,3 м від центра. (Останнім часом проводять роботи з «вирівнювання» Пізанської вежі.) Учитель / учителька математики відповів(-ла): для того щоб обчислити кут відхилення вежі, потрібно вміти розв'язувати трикутники.

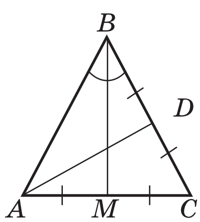
Ви знаєте, що означає розв'язати задачу, розв'язати рівняння. А що означає розв'язати трикутник? Чи взагалі мають зміст слова *розв'язати трикутник*? Відповідь ствердна. Розв'язати трикутник означає обчислити його невідомі сторони й кути за відомими сторонами й кутами. У 9-му класі ми навчимося розв'язувати довільні трикутники, а поки що — прямокутні. Тобто на найближчих уроках ми навчимося обчислювати дві сторони прямокутного трикутника, якщо відомі його гострий кут і одна (будь-яка) зі сторін.

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

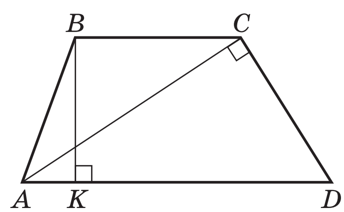
➢ ***Завдання за рисунками***

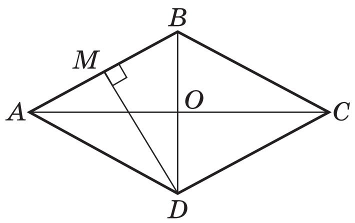
Назвіть усі прямокутні трикутники, зображені на кожному з наведених рисунків. У кожному випадку вкажіть катети й гіпотенузу прямокутного трикутника.



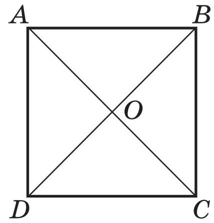


ΔABC — рівносторонній

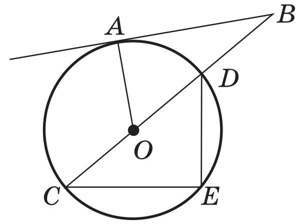




$ABCD$ — ромб



$ABCD$ — квадрат



Точка O — центр кола

➢ ***Математичний мініdiктант із подальшою перевіркою та обговоренням***

У прямокутному трикутнику ABC

($\angle C = 90°$) $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

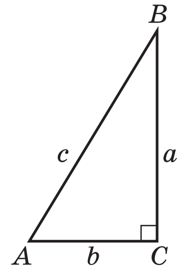
Продовжте запис:

$\sin A = \dots$, $\sin B = \dots$,

$\cos A = \dots$, $\cos B = \dots$,

$\operatorname{tg} A = \dots$, $\operatorname{tg} B = \dots$,

$\operatorname{ctg} A = \dots$, $\operatorname{ctg} B = \dots$



➢ ***Усні вправи***

1. Округліть до сотих:

1) 0,677; 2) 0,532; 3) 0,2573; 4) 0,5612.

2. Виконайте дії та округліть результат до сотих:

1) $5 \cdot 0{,}568$; 2) $12 \cdot 0{,}352$; 3) $\dfrac{6}{0{,}927}$; 4) $\dfrac{5}{13}$.

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Обчислення катета прямокутного трикутника.

! Катет прямокутного трикутника дорівнює:

добутку	→	гіпотенузи на синус протилежного кута
	→	гіпотенузи на косинус прилеглого кута
	→	другого катета на тангенс протилежного кута
частці	→	від ділення другого катета на тангенс прилеглого кута

2. Обчислення гіпотенузи прямокутного трикутника.

! Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює:

частці від ділення	→	катета на синус протилежного кута
	→	катета на косинус прилеглого кута

3. Що означає *розв'язати трикутник*.

! Розв'язати трикутник — це значить знайти його невідомі сторони й кути за відомими сторонами й кутами.

4. Розв'язування прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$).

! За гіпотенузою і гострим кутом ($AB = c$, $\angle A = \alpha$):

1) $\angle B = 90° - \alpha$; 2) $AC = c\cos\alpha$; 3) $BC = c\sin\alpha$.

! За катетом і гострим кутом, протилежним катету ($BC = a,\ \angle A = \alpha$):

1) $\angle B = 90° - \alpha$; 2) $AB = \dfrac{a}{\sin\alpha}$; 3) $AC = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$.

! За катетом і гострим кутом, прилеглим до катета ($BC = a,\ \angle B = \beta$):

1) $\angle A = 90° - \beta$; 2) $AB = \dfrac{a}{\cos\beta}$; 3) $AC = a\operatorname{tg}\beta$.

! За гіпотенузою і катетом ($AB = c,\ BC = a$):

1) $AC = \sqrt{c^2 - a^2}$; 2) $\sin A = \dfrac{a}{c}$; 3) $\angle B = 90° - \angle A$.

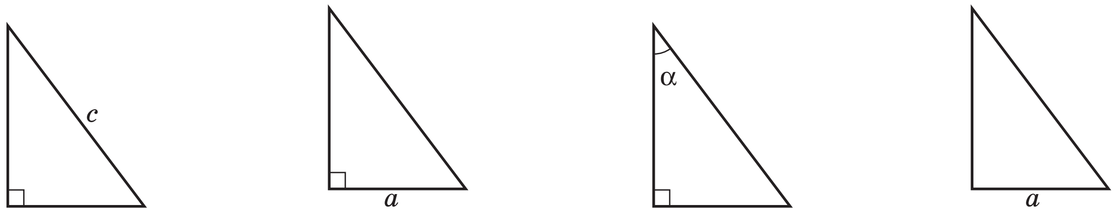
! За двома катетами ($BC = a,\ AC = b$):

1) $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$; 2) $\operatorname{tg} A = \dfrac{a}{b}$; 3) $\angle B = 90° - \angle A$.

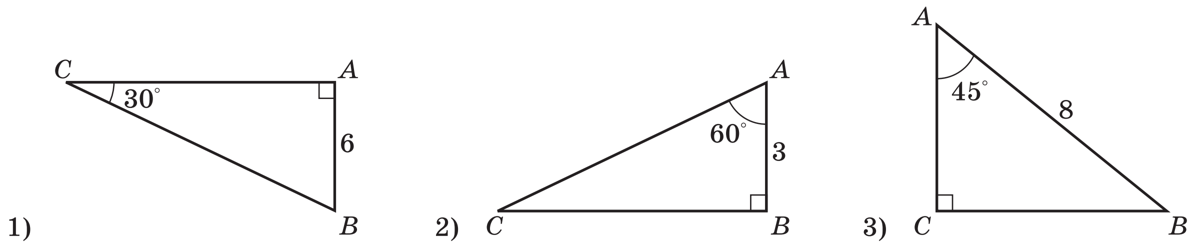
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

➢ ***Усні вправи***

1. Визначте невідомі сторони прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$, якщо:
   1) $AB = c,\ \angle A = \alpha$; 2) $AC = b,\ \angle B = \beta$; 3) $BC = a,\ \angle B = \beta$.
2. Про які елементи слід знати додатково, щоб мати можливість розв’язати трикутники, зображені на рисунку?



3. Чому дорівнюють сторони AC і BC трикутників, зображених на рисунках?



4. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а один з гострих кутів — $60°$. Чому дорівнюють катети цього трикутника?
5. Діагоналі ромба дорівнюють 4 см і $4\sqrt{3}$ см. Чому дорівнюють кути ромба?
6. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 12 см і 22 см, а бічна сторона — 13 см. Чому дорівнює висота трапеції?
7. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 7 см і 15 см, а гострий кут — $60°$. Обчисліть довжини бічних сторін трапеції.
8. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 16 см, а бічна сторона — 10 см. Обчисліть довжину висоти цього трикутника і всі тригонометричні функції кута при основі трикутника.

9. Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 25 см, а висота — 7 см. Обчисліть синус, косинус і тангенс гострого кута трапеції.

10. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 24 см і 10 см. Чому дорівнює радіус кола, описаного навколо цього трикутника, і всі тригонометричні функції гострих кутів трикутника?

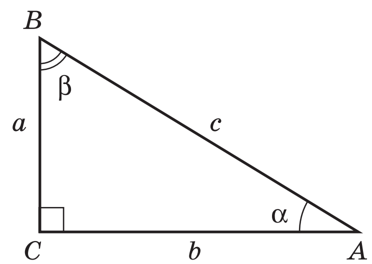
11. Обчисліть довжини невідомих сторін прямокутного трикутника ABC $(\angle C = 90°)$, якщо:

    1) $AC = 6$ см, $\sin B = \frac{1}{4}$;
    2) $BC = 4$ см, $\sin B = \frac{1}{3}$;
    3) $BC = 3$ см, $\cos A = \frac{3}{5}$;
    4) $AC = 5$ см, $\cos A = \frac{3}{7}$.

12. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b. Виразіть через a і b гіпотенузу й тангенси гострих кутів трикутника та обчисліть їхнє значення, якщо $a = 12$, $b = 15$.

➢ *Письмові вправи*

1. Скориставшись рисунком, виконайте завдання:
    1) напишіть у вигляді формул означення всіх тригонометричних функцій;
    2) з кожної написаної рівності виразіть усі можливі сторони прямокутного трикутника;
    3) прочитайте здобуті рівності, використовуючи поняття *добуток*, *відношення*, та назви сторін прямокутного трикутника.



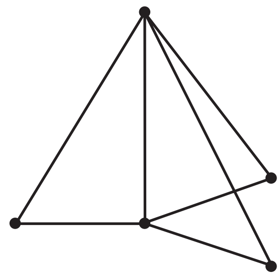
2. Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою $c = 10$ і гострим кутом $\alpha = 50°$.
3. Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетом $a = 6$ і гострим кутом $\beta = 22°$.
4. Розв'яжіть прямокутний трикутник за гіпотенузою $c = 13$ і катетом $a = 5$.
5. Розв'яжіть прямокутний трикутник за катетами $a = 8$ і $b = 15$.
6. Сторони паралелограма дорівнюють a і b, а гострий кут — α. Обчисліть довжини висот паралелограма.
7. Дві сторони трикутника дорівнюють a і b, а кут між ними α $(\alpha < 90°)$. Обчисліть довжини висот трикутника, проведені до цих сторін.
8. Обчисліть довжину сторони ромба, якщо:
    1) гострий кут ромба дорівнює α, а менша діагональ — m;
    2) тупий кут ромба дорівнює β, а більша діагональ — n.
9. Один з гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює $30°$, а висота, проведена до гіпотенузи, — $8\sqrt{3}$ см. Обчисліть довжину відрізка, що сполучає середини катетів.
10. У рівнобічні трапеції $ABCD$ $AB = CD = 7$ см, $BC = 2$ см, $AD = 8$ см. Чому дорівнюють синус і косинус кута CAD?
11. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC ($\angle C$ — прямий) якщо:
    1) $AB = 15$ см, $\angle A = 60°$;
    2) $BC = 10$ см, $\angle A = 30°$;
    3) $BC = 8$ см, $AC = 16$ см;
    4) $BC = \sqrt{3}$ см, $AC = 3$ см.
12. У прямокутному трикутнику ACB $(\angle C = 90°)$ $\angle BAC = 45°$, $AB = 5\sqrt{6}$ см, на стороні BC позначено точку D так, що $\angle DAC = 30°$. Обчисліть довжину відрізка DC.

13. У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) точка M лежить на катеті BC. Ця точка рівновіддалена від сторін AB і AC, $MC = 3$ см, $AM = 6$ см. Обчисліть периметр трикутника ABC.

14. У прямокутній трапеції $ABCD$ з основами AD і BC $\angle A = \angle B = 90°$, $BC = 4$ см, $AD = 16$ см. Обчисліть градусні міри кутів C і D трапеції, якщо її діагональ перпендикулярна до бічної сторони.

15. Чому дорівнює градусна міра кута відхилення від вертикалі Пізанської вежі, якщо висота вежі дорівнює 56 м, а вершина вежі відхилена від центра на 5,3 м? (*Завдання, запропоноване на етапі мотивації навчальної діяльності*.)
Відповідь. $\approx 5°$.

16. Ретрансляційна вишка заввишки 12 м закріплена за допомогою трьох розтяжок із дроту. Один кінець кожної з них закріплений на вершині вишки, а другий розміщений на відстані 3 м від її основи. Скільки метрів дроту знадобилося для виготовлення розтяжок?

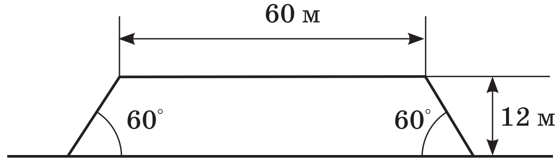


17. На вершину гори заввишки 2400 м можна дістатися за допомогою фунікулеру. Під яким кутом до поверхні землі розташована траса фунікулеру, якщо швидкість його руху становить 16 км/год, а час підйому — 18 хв?

18. З табору одночасно вийшли дві групи туристів. Одна з них рухалася строго на захід, а друга — на південь. За дві години потому відстань між ними становила 10 км. З якою швидкістю рухалися групи туристів, якщо швидкість однієї з них становить 75 % швидкості другої?

19. Тінь від вертикальної жердини, висота якої 5 м, дорівнює 3 м. Виразіть у градусах висоту Сонця над горизонтом.

20. Ширина верхньої частини насипу шосе дорівнює 60 м. Чому дорівнює ширина насипу в нижній частині, якщо кут нахилу укосів — $60°$, а висота насипу — 12 м?



➢ ***Картки-підказки для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

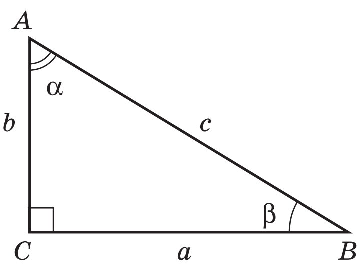
Картка 1

Співвідношення між сторонами й кутами прямокутних трикутників

$$a = c\sin\alpha \leftarrow \boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}} \rightarrow c = \frac{a}{\sin\alpha}$$

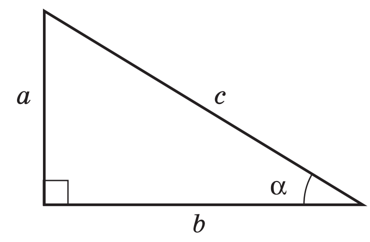
$$b = c\cos\alpha \leftarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}} \rightarrow c = \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$a = b\,\mathrm{tg}\,\alpha \leftarrow \boxed{\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}} \rightarrow b = \frac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha} = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$



Картка 2

Обчислення невідомих сторін прямокутного трикутника

Шукана сторона	Правило знаходження	Формула	
Протилежний катет	Катет, протилежний до кута α, дорівнює: • добутку гіпотенузи на $\sin\alpha$; • добутку прилеглого катета на $\operatorname{tg}\alpha$	$a = c\sin\alpha$ $a = b\operatorname{tg}\alpha$	
Прилеглий катет	Катет, прилеглий до кута α, дорівнює: • добутку гіпотенузи на $\cos\alpha$; • відношенню протилежного катета до $\operatorname{tg}\alpha$	$b = c\cos\alpha$ $b = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$	
Гіпотенуза	Гіпотенуза дорівнює: • відношенню протилежного катета до $\sin\alpha$; • відношенню прилеглого катета до $\cos\alpha$	$c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$ $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$	

➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює α, причому $\cos\alpha = m$. Обчисліть тангенс кута між висотою, проведеною до бічної сторони, та основою трикутника.

   Відповідь. $\sqrt{\dfrac{1-m}{1+m}}$.

2. У рівнобічній трапеції діагональ перпендикулярна до бічної сторони. Чому дорівнює середня лінія трапеції, якщо бічна сторона дорівнює a, а гострий кут при основі — α?

   Відповідь. $\dfrac{a\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

3. У прямокутний трикутник з гіпотенузою a і гострим кутом 30° вписаний прямокутник, одна зі сторін якого удвічі більша за другу. Більша сторона прямокутника лежить на гіпотенузі, а протилежні їй вершини — на катетах. Обчисліть довжини сторін прямокутника.

   Відповідь. $a\left(\sqrt{3}-\dfrac{3}{2}\right)$, $a\left(2\sqrt{3}-3\right)$.

4. У трикутнику ABC $AB = BC$, BF і AN — висоти, $AN : BF = 0{,}5$. Чому дорівнює косинус кута при основі трикутника?
   Відповідь. $0{,}25$.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➢ ***Бліцопитування***

1. Що означає розв'язати трикутник?
2. Чи можна знайти сторони прямокутного трикутника, якщо відомі всі його кути?
3. Чи можна знайти катет прямокутного трикутника, якщо відомі:
   1) гіпотенуза й один з гострих кутів;
   2) другий катет і один з гострих кутів;
   3) другий катет і гіпотенуза?

4. Чи можна знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомі:

   1) катет і один з гострих кутів; 2) один з катетів?

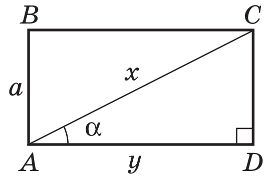
➢ *Математичний диктант*

Доповніть твердження.

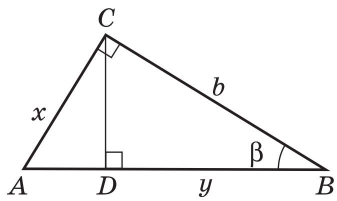
1) Якщо в прямокутному трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AB = 10$ см, $\cos B = 0{,}6$, то $BC = \ldots$
2) Якщо в трапеції $ABCD$ висота $BM = 4$ см, $\sin A = 0{,}8$, то $AB = \ldots$
3) Якщо в прямокутнику $ABCD$ $AB = 5$ см, $\operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{12}{5}$, то $BC = \ldots$
4) Якщо в ромбі $ABCD$ $BD = 16$ см, $\operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{4}{3}$, то $AC = \ldots$

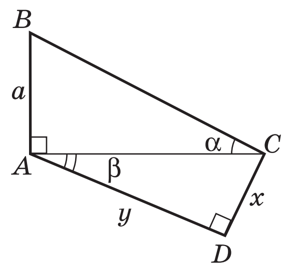
➢ *Завдання за рисунками*

1. Обчисліть x і y.

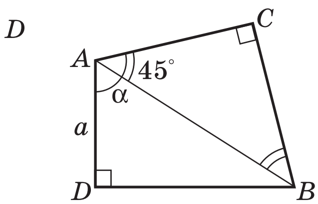


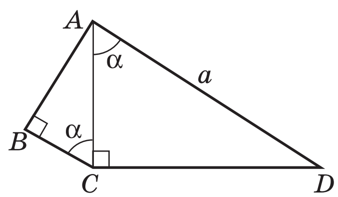
$ABCD$ — прямокутник

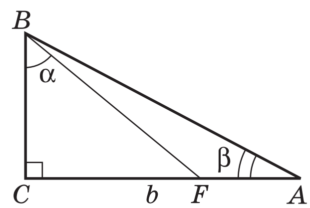




2. Обчисліть довжини відрізків AB і BC.







➢ *Дидактична гра «Розв'язування прямокутних трикутників»*

Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у команди по п'ять гравців у кожній. Решта може виконувати роль асистентів. Командам видають картки із завданням. Гравці по черзі виконують завдання, передаючи картку одне одному. Після цього здають картки вчителеві / учительці (або асистентам) для перевірки. За кожну правильно розв'язану задачу нараховують 1 бал. Перемагає команда, яка першою виконає завдання і набере найбільшу кількість балів.

Приклад картки із завданням

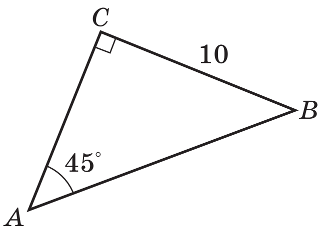
Умова задачі		Схема розв'язання
1	$AC = b$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90°$. Чому дорівнюють $\angle B$, BC, AB?	1) ____________________; 2) ____________________; 3) ____________________
2	$AC = b$, $\angle B = \beta$, $\angle C = 90°$. Чому дорівнюють $\angle A$, AB, BC?	1) ____________________; 2) ____________________; 3) ____________________
3	$AB = c$, $AC = b$, $\angle C = 90°$. Чому дорівнюють CB, $\angle A$, $\angle B$?	1) ____________________; 2) ____________________; 3) ____________________

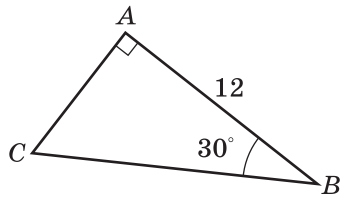
Умова задачі		Схема розв'язання
4	$AC = b$, $BC = a$, $\angle C = 90^{\circ}$. Чому дорівнюють AB, $\angle A$, $\angle B$?	1) ____________________; 2) ____________________; 3) ____________________
5	$AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle C = 90^{\circ}$. Чому дорівнюють $\angle B$, AC, BC?	1) ____________________; 2) ____________________; 3) ____________________

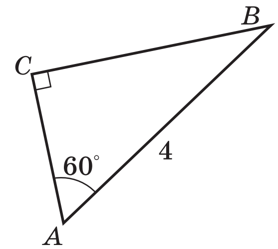
➢ ***Робота на картках із друкованою основою***

Варіант 1

1. На кожному з рисунків напишіть довжини сторін AC і BC пропонованих трикутників.







2. У прямокутному трикутнику MNK $\angle N = 90^{\circ}$, $\angle M = 32^{\circ}$, $MK = 10$. Напишіть у квадратику сторону трикутника MNK так, щоб утворилася правильна рівність:

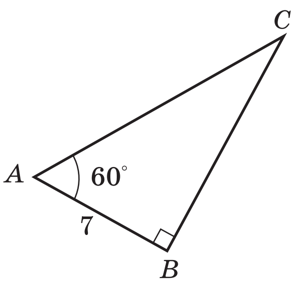
1) $\square = 10\sin 32^{\circ}$; 2) $\square = 10\cos 58^{\circ}$; 3) $\square = 10\cos 32^{\circ}$; 4) $\square = 10\sin 58^{\circ}$.

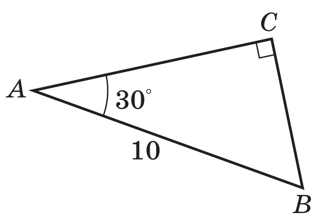
3. У прямокутному трикутнику ABC $(\angle C = 90^{\circ})$ $AB = 10$ см, $\angle A = 60^{c}$. Скориставшись цими даними, заповніть порожні комірки таблиці.

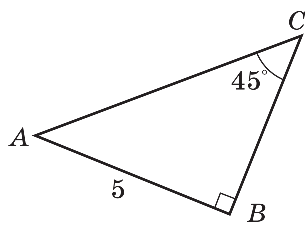
$\angle B$	AC	BC

Варіант 2

1. На кожному з рисунків напишіть довжини сторін AC і BC пропонованих трикутників.







2. У прямокутному трикутнику DEF $\angle E = 90^{\circ}$, $\angle D = 27^{\circ}$, $DF = 5$. Напишіть у квадратику сторону трикутника DEF так, щоб утворилася правильна рівність:

1) $\square = 5\cos 27^{\circ}$; 2) $\square = 5\cos 63^{\circ}$; 3) $\square = 5\sin 63^{\circ}$; 4) $\square = 5\sin 27^{\circ}$.

3. У прямокутному трикутнику ABC $(\angle C = 90^{\circ})$ $AB = 12$ см, $\angle A = 30^{\circ}$. Скориставшись цими даними, заповніть порожні комірки таблиці.

$\angle B$	AC	BC

➢ ***Тестові завдання з подальшою взаємоперевіркою і взаємооцінюванням***

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Яке з наведених тверджень є правильним?

А	Катет, протилежний до гострого кута прямокутного трикутника, дорівнює відношенню гіпотенузи до синуса цього кута
Б	Катет, протилежний до гострого кута прямокутного трикутника, дорівнює добутку гіпотенузи на косинус цього кута
В	Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює відношенню катета до синуса кута, протилежного до цього катета
Г	Катет, прилеглий до гострого кута прямокутного трикутника, дорівнює добутку другого катета на тангенс цього кута

2. Катет прямокутного трикутника дорівнює a, а прилеглий до нього кут — β. Чому дорівнює гіпотенуза цього трикутника?

А	Б	В	Г
$\dfrac{a}{\cos\beta}$	$\dfrac{a}{\sin\beta}$	$a\cos\beta$	$a\,\mathrm{tg}\,\beta$

3. Катет прямокутного трикутника дорівнює b, а протилежний йому кут — β. Чому дорівнює гіпотенуза цього трикутника?

А	Б	В	Г
$b\,\mathrm{tg}\,\beta$	$\dfrac{b}{\cos\beta}$	$b\sin\beta$	$\dfrac{b}{\sin\beta}$

4. Катет прямокутного трикутника дорівнює a, а протилежний до нього кут — α. Чому дорівнює другий катет цього трикутника?

А	Б	В	Г
$\dfrac{a}{\sin\alpha}$	$\dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$	$a\,\mathrm{tg}\,\alpha$	$a\cos\alpha$

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Яке з наведених тверджень є правильним?

А	Катет, прилеглий до гострого кута прямокутного трикутника, дорівнює добутку гіпотенузи на косинус цього кута
Б	Катет, прилеглий до гострого кута прямокутного трикутника, дорівнює добутку другого катета на тангенс цього кута
В	Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює добутку катета на косинуса кута, протилежного до цього катета
Г	Катет, протилежний до гострого кута прямокутного трикутника, дорівнює відношенню другого катета до синуса цього кута

2. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює c, а один з гострих кутів — α. Чому дорівнює катет, протилежний до цього кута?

А	Б	В	Г
$c\cos\alpha$	$c\sin\alpha$	$\dfrac{c}{\sin\alpha}$	$\dfrac{c}{\cos\alpha}$

3. Катет прямокутного трикутника дорівнює a, а прилеглий до нього кут — α. Чому дорівнює другий катет?

А	Б	В	Г
$\dfrac{a}{\mathrm{tg}\,\alpha}$	$a\sin\alpha$	$\dfrac{a}{\cos\alpha}$	$a\,\mathrm{tg}\,\alpha$

4. Катет прямокутного трикутника дорівнює a, а протилежний до нього кут — α. Чому дорівнює гіпотенуза?

А	Б	В	Г
$\dfrac{a}{\sin\alpha}$	$a\cos\alpha$	$\dfrac{a}{\cos\alpha}$	$a\operatorname{tg}\alpha$

Відповіді. Варіант 1. 1. В. 2. А. 3. Г. 4. Б. Варіант 2. 1. А. 2. Б. 3. Г. 4. А.

➢ *Тестові завдання*

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

Варіант 1

1. У трикутнику ABC $\angle A = 60°$, $\angle C = 90°$, $AB = 6\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює AC?

А	Б	В	Г
3 см	$3\sqrt{3}$ см	6 см	9 см

2. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $BC = 4\frac{4}{5}$ см, $AB = 9\frac{3}{5}$ см. Чому дорівнює кут B?

А	Б	В	Г
30°	45°	50°	60°

3. У трикутнику ABC $\angle A = 60°$, $\angle C = 90°$, $CB = 4\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює AB?

А	Б	В	Г
$8\sqrt{3}$ см	$\dfrac{8}{\sqrt{3}}$ см	8 см	4 см

4. У трикутнику ABC $\angle A = 45°$, $\angle C = 90°$, $AC = 5\sqrt{2}$ см. Чому дорівнюють AB і кут B?

А	Б	В	Г
10 см і 45°	10 см і 30°	$10\sqrt{2}$ см і 45°	$5\sqrt{2}$ см і 45°

Варіант 2

1. У трикутнику ABC $\angle B = 30°$, $\angle C = 90°$, $BC = 20$ см. Чому дорівнює AB?

А	Б	В	Г
$10\sqrt{3}$ см	40 см	$\dfrac{10}{\sqrt{3}}$ см	$\dfrac{40}{\sqrt{3}}$ см

2. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $CB = 3\frac{3}{10}$ см, $AB = 6\frac{3}{5}$ см. Чому дорівнює кут A?

А	Б	В	Г
70°	60°	30°	35°

3. У трикутнику ABC $\angle A = 30°$, $\angle C = 90°$, $AC = 3\sqrt{3}$ см. Чому дорівнює BC?

А	Б	В	Г
3 см	$3\sqrt{3}$ см	$6\sqrt{3}$ см	$\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ см

4. У трикутнику ABC $\angle B = 45°$, $\angle C = 90°$, $AB = 10$ см. Чому дорівнюють AC і кут A?

А	Б	В	Г
$10\sqrt{2}$ см і 60°	$5\sqrt{2}$ см і 45°	5 см і 30°	$10\sqrt{2}$ см і 45°

Відповіді

Варіант 1. 1. Б. 2. Г. 3. В. 4. А.

Варіант 2. 1. Г. 2. В. 3. А. 4. Б.

➢ *Робота в парах*

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / вчительці для оцінювання.

Варіант 1

1. Обчисліть периметр прямокутного трикутника, якщо один з його катетів дорівнює 4 см, а протилежний йому кут — 30°.
2. Чому дорівнюють висота й основа рівнобедреного трикутника, у якому бічна сторона дорівнює 14 см, а кут між ними — 120°?
3. З точки A до кола з центром у точці O проведено дотичну AB (B — точка дотику). Обчисліть діаметр кола, якщо $AO = 10$ см, $\cos\angle BAO = 0,6$.

Варіант 2

1. Обчисліть периметр прямокутного трикутника, якщо один з його катетів дорівнює 6 см, а прилеглий до нього кут — 60°.
2. Чому дорівнюють висота й основа рівнобедреного трикутника, у якому бічна сторона дорівнює 12 см, а кут при основі — 45°?
3. З точки A до кола з центром у точці O проведено дотичну AB (B — точка дотику). Обчисліть діаметр кола, якщо $AO = 13$ см, $\sin\angle AOB = \frac{5}{13}$.

➢ ***Робота в групах***

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / вчительці для оцінювання.

Задача 1

У рівнобічній трапеції бічні сторони дорівнюють a, більша основа — b, кут при більшій основі — α. Чому дорівнюють висота й менша основа трапеції?

Задача 2

У рівнобедреному трикутнику ABC AC — основа, $\angle A = 30°$, CD — висота. Обчисліть довжину висоти, проведену з вершини B, якщо $AD = 20$ см.

Задача 3

У трапеції $ABCD$ $(BC \parallel AD)$ $AD = 14$ см, $DC = 2\sqrt{6}$ см, $\angle A = 30°$, $\angle C = 135°$. Чому дорівнює основа BC трапеції?

Задача 4

Сторона AD прямокутника $ABCD$ дорівнює m, а кут між діагоналями, протилежний до цієї сторони, — α. Обчисліть довжини сторони AB і діагоналей прямокутника.

➢ ***Завдання на встановлення відповідності***

Варіант 1

Установіть відповідність між елементом прямокутного трикутника (1–4) та його довжиною (А–Д).

1	Катет, протилежний куту 30°, якщо гіпотенуза дорівнює 8 см	А	3 см
2	Катет, прилеглий до кута 60°, якщо гіпотенуза дорівнює 10 см	Б	1 см
3	Катет, протилежний куту 30°, якщо другий катет дорівнює $3\sqrt{3}$ см	В	4 см
4	Гіпотенуза, якщо катет, прилеглий до кута 30°, дорівнює $\sqrt{3}$ см	Г	5 см
		Д	2 см

Варіант 2

Установіть відповідність між елементом прямокутного трикутника (1–4) та його довжиною (А–Д).

1	Катет, прилеглий до кута 30°, якщо гіпотенуза дорівнює $2\sqrt{3}$ см	**А**	6 см
2	Катет, протилежний куту 60°, якщо гіпотенуза дорівнює $4\sqrt{3}$ см	**Б**	4 см
3	Катет, протилежний куту 45°, якщо другий катет дорівнює 4 см	**В**	2 см
4	Гіпотенуза, якщо катет, прилеглий до кута 60°, дорівнює 1 см	**Г**	5 см
		Д	3 см

Відповіді. Варіант 1. 1 — В. 2 — Г. 3 — А. 4 — Д. Варіант 2. 1 — Д. 2 — А. 3 — Б. 4 — В.

➢ ***Самостійна робота***

Варіант 1

1. Чому дорівнює висота рівностороннього трикутника, сторона якого — 8 см? Розв'яжіть задачу двома способами.
2. У рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює 30°, а основа — 12 см. Обчисліть довжину:
   1) бічної сторони цього трикутника; 2) висоти, проведеної до основи;
   3) висоти, проведеної до бічної сторони.
3. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC $(\angle C = 90^\circ)$, якщо:
   1) $AB = 9$ см, $\angle B = 40^\circ$; 2) $AB = 10$ см, $AC = 8$ см.
   Відповідь округліть до сотих.
4. Трикутник ABC вписано в коло так, що сторона AB є його діаметром. Обчисліть радіус цього кола, якщо $\angle B = 45^\circ$, $BC = 6\sqrt{2}$ см.
5. Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює 60°, а висота — $6\sqrt{3}$ см. Обчисліть периметр трапеції, якщо відомо, що її можна описати навколо кола.

Варіант 2

1. Чому дорівнює висота рівностороннього трикутника, сторона якого — 6 см? Розв'яжіть задачу двома способами.
2. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює 120°, а висота, проведена до основи, — 10 см. Обчисліть довжину:
   1) бічної сторони цього трикутника; 2) основи цього трикутника;
   3) висоти, проведеної до бічної сторони.
3. Розв'яжіть прямокутний трикутник ABC $(\angle C = 90^\circ)$, якщо:
   1) $AC = 8$ см, $\angle A = 20^\circ$; 2) $AC = 5$ см, $BC = 12$ см.
   Відповідь округліть до сотих.
4. Трикутник ABC вписано в коло так, що сторона AB є його діаметром. Обчисліть радіус цього кола, якщо $\angle A = 60^\circ$, $BC = 4\sqrt{3}$ см.
5. Гострий кут рівнобічної трапеції дорівнює 45°, а висота — $6\sqrt{2}$ см. Обчисліть периметр трапеції, якщо відомо, що її можна описати навколо кола.

Відповіді. Варіант 1. 1. $4\sqrt{3}$ см. 2. 1) $4\sqrt{3}$ см; 2) $2\sqrt{3}$ см; 3) 6 см. 3. 1) $\angle A = 50^\circ$, $AC \approx 5{,}76$ см, $BC \approx 6{,}93$ см; 2) $BC = 6$ см, $\angle A \approx 37^\circ$, $\angle B \approx 53^\circ$. 4. 6 см. 5. 48 см. Варіант 2. 1. $3\sqrt{3}$ см. 2. 1) 20 см; 2) $20\sqrt{3}$ см; 3) $10\sqrt{3}$ см. 3. 1) $\angle B = 70^\circ$, $AC \approx 7{,}52$ см, $BC \approx 5{,}12$ см; 2) $AB = 13$ см, $\angle A \approx 67^\circ$, $\angle B \approx 23^\circ$. 4. 4 см. 5. 48 см.

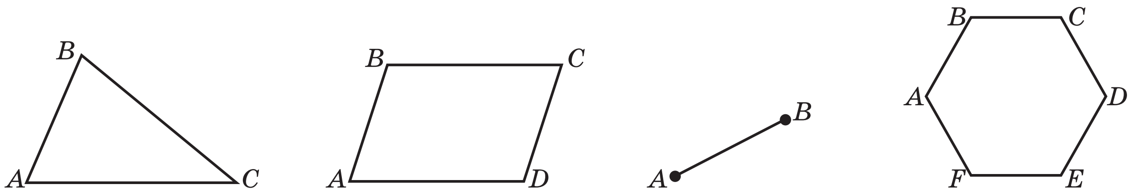
МНОГОКУТНИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ. ОПУКЛИЙ І НЕОПУКЛИЙ МНОГОКУТНИКИ. СУМА КУТІВ ОПУКЛОГО МНОГОКУТНИКА[1]. МНОГОКУТНИК, УПИСАНИЙ У КОЛО, І МНОГОКУТНИК, ОПИСАНИЙ НАВКОЛО КОЛА

Очікувані результати: учні мають уміти пояснювати, що таке многокутник та його елементи; розпізнавати на рисунках і зображати многокутник та його елементи, многокутник, уписаний у коло, та описаний навколо кола; пояснювати, яке коло називають описаним навколо многокутника та яке коло називають уписаним у многокутник; уміти обчислювати периметр многокутника та суму градусних мір кутів опуклого многокутника.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може запропонувати учням таке завдання:

— Розгляньте геометричні фігури, зображені на рисунку. Що спільного мають ці фігури? Чим вони різняться? Яку із цих геометричних фігур ви б видалили як зайву? Чому?



Після обговорення учні / учениці доходять висновку, що зайвим є відрізок. Решта фігур складається з точок, що не лежать на одній прямій, і відрізків, що послідовно сполучають ці точки, причому кількість таких точок і відрізків не менша від трьох. Різняться ці фігури саме кількістю точок і відрізків, що їх сполучають.

Потім педагог може провести таку бесіду:

— Ви знаєте, які геометричні фігури називають трикутником і чотирикутником. Знаєте, які чотирикутники називають опуклими, вписаними в коло та описаними навколо кола, чому дорівнює сума кутів трикутника й чотирикутника. А чи існують геометричні фігури, у яких не три або чотири вершини й сторони, а 5, 6, 7, ..., n ? Якщо існують, то як їх називають? Які означення мають ці фігури? Чи існують з-поміж них опуклі й неопуклі? Чому дорівнює сума кутів у цих фігурах? На найближчих уроках ми дізнаємося відповіді на ці запитання.

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

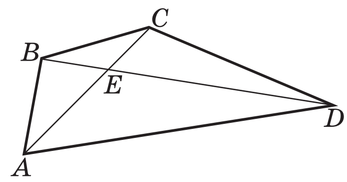
➢ ***Фронтальне опитування (означення трикутника, чотирикутника та їхніх елементів)***

1. Яку геометричну фігуру називають трикутником?
2. Сформулюйте означення чотирикутника.
3. Які геометричні фігури є вершинами трикутника? чотирикутника?
4. Які геометричні фігури є сторонами трикутника? чотирикутника?

---

[1] Відповідно до модельних навчальних програм «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти — автор: Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С. та Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В. — тему «Сума кутів многокутника» у 8-му класі не вивчають.

5. Що називають діагоналлю чотирикутника?
6. На які геометричні фігури ділить чотирикутник кожна з його діагоналей?
7. Укажіть вершини, сторони, кути, діагоналі чотирикутника, зображеного на рисунку.
8. Що називають периметром чотирикутника?
9. Який чотирикутник називають опуклим?



➢ ***Фронтальне опитування (сума кутів трикутника й чотирикутника)***

1. Чому дорівнює сума кутів трикутника?
2. Обчисліть градусні міри кутів трикутника, якщо вони пропорційні числам 1, 2 і 3.
3. Чи може в трикутнику бути два прямих кути? два тупих кути? Відповідь обґрунтуйте.
4. Що називають зовнішнім кутом трикутника?
5. Скільки зовнішніх кутів трикутника існує при кожній його вершині?
6. Чому дорівнює сума зовнішніх кутів трикутника, узятих по одному при кожній вершині?
7. Чому дорівнює сума кутів чотирикутника?
8. Обчисліть градусні міри кутів чотирикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як $2:3:5:8$.
9. Чи існує опуклий чотирикутник, усі кути якого є гострими? Відповідь обґрунтуйте.

➢ ***Фронтальне опитування (вписані й описані трикутники й чотирикутники)***

1. Де розміщені точки, рівновіддалені від кінців заданого відрізка; від сторін заданого кута?
2. Сформулюйте означення трикутника, вписаного в коло; описаного навколо кола.
3. Де розміщений центр кола, описаного навколо трикутника; вписаного в трикутник?
4. Чи будь-який трикутник можна вписати в коло? описати навколо кола?
5. Сформулюйте означення чотирикутника, вписаного в коло; описаного навколо кола.
6. Чи будь-який чотирикутник можна вписати в коло? описати навколо кола?

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Означення многокутника, його вершин і сторін.
   ! Многокутником називають фігуру, що складається з відрізків A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$, A_nA_1, які розміщені так, що жодні два сусідніх не лежать на одній прямій, а несусідні — не мають спільних точок.
   Вершинами многокутника $A_1A_2...A_n$ називають точки A_1, A_2, ..., A_n, а сторонами — відрізки A_1A_2, ..., A_nA_1.
2. Що називають кутом многокутника.
   ! Кутом многокутника називають кут, утворений сусідніми сторонами.
3. Назви многокутників.
   ! Многокутник називають за кількістю його кутів: трикутник, чотирикутник, п’ятикутник тощо.
4. Позначення многокутників.
   ! Многокутник позначають за його вершинами; при цьому букви, що стоять у назві многокутника поруч, мають позначати вершини, які належать одній стороні (сусідні вершини).

5. Означення діагоналі многокутника.

   ❗ Діагоналлю многокутника називають відрізок, що сполучає дві несусідні вершини.

6. Що називають периметром многокутника.

   ❗ Периметром многокутника називають суму довжин усіх його сторін.

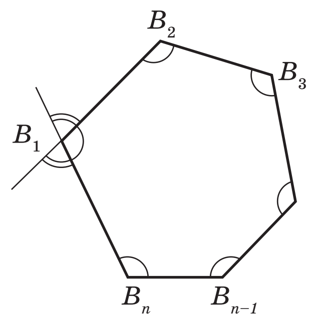
7. Означення опуклого многокутника.

   ❗ Многокутник називають опуклим, якщо він лежить по один бік від будь-якої прямої, яка містить його сторону.

8. Внутрішні та зовнішні кути опуклого многокутника.

   ❗ Кути $B_1B_2B_3$, $B_2B_3B_4$, ..., $B_{n-1}B_nB_1$, $B_nB_1B_2$ многокутника $B_1B_2B_3...B_n$, зображеного на рисунку, називають внутрішніми кутами многокутника.

   ❗ Кути, суміжні з внутрішніми кутами, називають зовнішніми кутами многокутника.



9. Теорема про суму кутів опуклого многокутника.

   ❗ Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n-2)$.

10. Сума зовнішніх кутів многокутника.

    ❗ Сума зовнішніх кутів опуклого n-кутника, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює $360°$.

11. Означення многокутника, вписаного в коло.

    ❗ Многокутник називають уписаним, якщо існує коло, якому належать усі його вершини.

12. Де розміщений центр кола, описаного навколо многокутника.

    ❗ Центр кола, описаного навколо многокутника, розміщений у точці перетину серединних перпендикулярів усіх сторін уписаного многокутника.

13. У якому випадку навколо многокутника можна описати коло.

    ❗ Навколо многокутника можна описати коло, якщо існує точка, рівновіддалена від усіх його вершин, тобто якщо серединні перпендикуляри всіх сторін многокутника перетинаються в одній точці, то такий многокутник є вписаним.

14. Означення многокутника, описаного навколо кола.

    ❗ Многокутник називають описаним, якщо існує коло, яке дотикається до всіх його вершин.

15. Де розміщений центр кола, вписаного в многокутник.

    ❗ Центр кола, вписаного в многокутник, розміщений у точці перетину бісектрис усіх кутів описаного многокутника.

16. У якому випадку в многокутник можна вписати коло.

    ❗ У многокутник можна вписати коло, якщо існує точка, рівновіддалена від усіх його сторін, тобто якщо бісектриси всіх кутів многокутника перетинаються в одній точці, то такий многокутник є описаним.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

➢ ***Усні вправи***

1. Обчисліть довжину сторони п’ятикутника, усі сторони якого рівні, а периметр дорівнює:

   1) 30 см; 2) 42 см.

2. Периметр опуклого многокутника дорівнює 20 см. Чи може його діагональ дорівнювати 10 см? Відповідь обґрунтуйте.

3. Обчисліть суму кутів опуклого дванадцятикутника.

4. В опуклому n-кутнику всі кути рівні. Обчисліть градусні міри цих кутів, якщо $n = 15$.

5. Чому дорівнює сума всіх зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині, опуклого…
   1) дев'ятикутника;
   2) двадцятикутника?

6. Чи можливо встановити кількість сторін опуклого многокутника, якщо відомо…
   1) суму внутрішніх кутів многокутника;
   2) суму зовнішніх кутів многокутника?

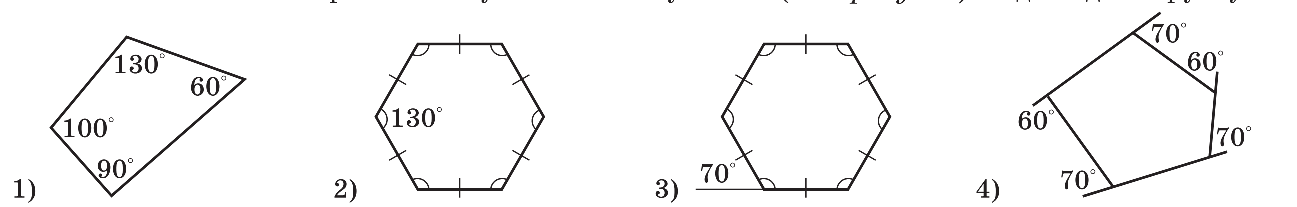
7. Скільки сторін має многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює сумі зовнішніх?

8. Чи існує опуклий многокутник, кожний кут якого дорівнює 165°?

9. Чи існує опуклий многокутник, сума кутів якого дорівнює 2026°?

10. Чи може найменший кут опуклого семикутника дорівнювати 136°?

11. Укажіть помилки в зображенні опуклих многокутників (*див. рисунок*). Відповідь обґрунтуйте.



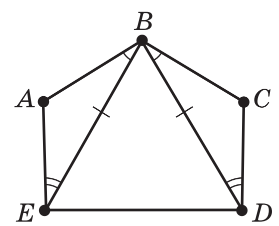
12. Доведіть, що не існує опуклого шестикутника, градусні міри якого відносяться як $1:2:3:3:4:5$.

➢ *Письмові вправи*

1. Відомо, що многокутник $PTKLM$ — опуклий, а многокутник $ACFNKL$ — неопуклий. Побудуйте ці многокутники.

2. Побудуйте опуклий шестикутник.
   1) Проведіть діагональ, що ділить цей шестикутник на два чотирикутники. Скільки існує таких діагоналей?
   2) Проведіть діагональ, що ділить цей шестикутник на трикутник і п'ятикутник.

3. В опуклому п'ятикутнику $ABCDE$ вершина B сполучена рівними діагоналями з двома іншими вершинами (*див. рисунок*). Доведіть, що якщо $\angle ABE = \angle CBD$, $\angle BEA = \angle BDC$, то периметри чотирикутників $ABDE$ і $BEDC$ рівні.



4. За формулою $S_n = 180^\circ(n-2)$ обчисліть значення…
   1) S_n, якщо $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$;
   2) n, якщо $S_n = 180^\circ$, $S_n = 1800^\circ$, $S_n = 900^\circ$.

5. За формулою $\alpha = \dfrac{180^\circ(n-2)}{n}$ обчисліть значення…
   1) α, якщо $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$;
   2) n, якщо $\alpha = 108^\circ$.

6. Два кути опуклого п'ятикутника є прямими, а решта три — рівними. Обчисліть градусну міру кожного з рівних кутів п'ятикутника.

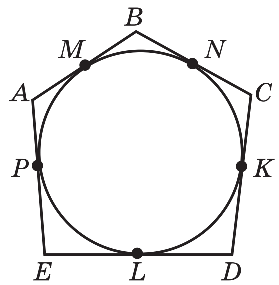
7. Обчисліть градусні міри найменшого й найбільшого кутів опуклого п'ятикутника, якщо їхні градусні міри відносяться як…

1) $5:6:8:8:9$; 2) $3:5:6:7:9$.

8. Обчисліть градусні міри невідомих кутів опуклого п'ятикутника, якщо один з них на 30° більший за другий, третій — на 10° більший за другий, четвертий дорівнює півсумі першого й третього кутів, а п'ятий кут — 120°.
9. Чому дорівнює кількість сторін опуклого многокутника, сума градусних мір кутів якого…

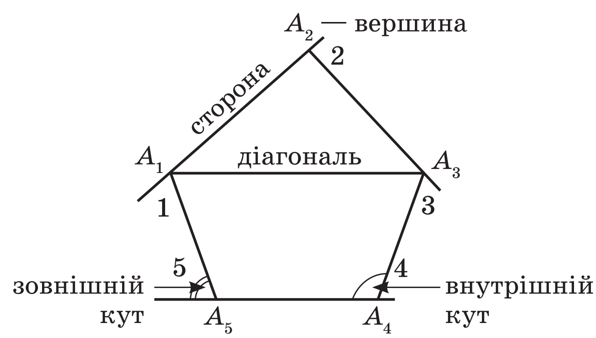
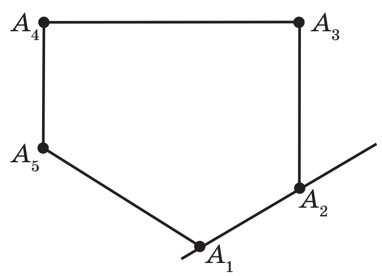
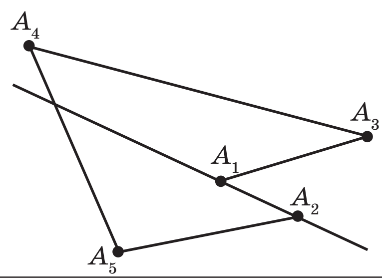
1) 1260°; 2) 1620°?

10. Градусні міри трьох кутів опуклого многокутника дорівнюють по 80°, а решта — по 160°. Визначте кількість сторін многокутника.
11. П'ятикутник $ABCDE$ описаний навколо кола, M, N, K, L, P — точки дотику кола до сторін п'ятикутника (*див. рисунок*). Обчисліть периметр п'ятикутника, якщо $AE = ED = DC$, $MB = 7$ см, $NC = 5$ см, $KD = AP = 8$ см.



12. Многокутник $ABCDE$ вписаний у коло з центром у точці O. Доведіть, що якщо $\angle AOB = \angle COD$, то сторони AB і CD розміщені на однаковій відстані від центра кола.

➤ ***Картка-підказка для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

<table>
<tr><th colspan="2">Многокутник</th></tr>
<tr><td>Сума внутрішніх кутів $S_n = 180^\circ(n-2)$.
Сума зовнішніх кутів, узятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Опуклий</td><td>Не є опуклим</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

➤ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. В опуклому чотирикутнику $ABCD$ $AB = BC$, $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, O — точка перетину діагоналей чотирикутника. Порівняйте периметри п'ятикутників $ABCOD$ і $ABOCD$.

Відповідь. $P_{ABCOD} = P_{ABOCD}$.

2. Доведіть, що в опуклому шестикутнику з рівними кутами сторони попарно паралельні.

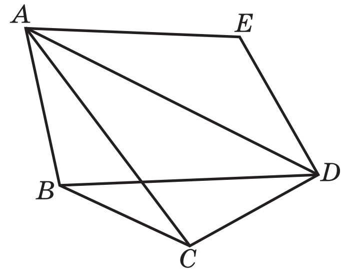
3. П'ятикутник $ABCDE$ вписаний у коло так, що AC є діаметром кола й $AC \parallel DE$. Обчисліть градусні міри кутів п'ятикутника, якщо $\angle BAC = 30°$, $\angle CAE = 50°$.
Відповідь. 80°, 90°, 110°, 130°, 130°.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➢ ***Бліцопитування***

Скориставшись рисунком, дайте відповіді на запитання:

1) Які з наведених позначень можуть бути позначеннями цього многокутника?
А $ABCDE$ **Б** $ACDBE$ **В** $CDEAB$ **Г** $ABDCE$
2) Яку назву має цей многокутник?
3) Укажіть вершини многокутника.
4) Укажіть сторони многокутника.
5) Назвіть діагоналі многокутника, зображені на рисунку.
6) Назвіть ще дві діагоналі многокутника.
7) Як знайти периметр цього многокутника?
8) Опуклим чи неопуклим є цей многокутник?



➢ ***Математичний диктант***

1. Обчисліть суму кутів опуклого двадцятикутника.
2. В опуклому n-кутнику всі кути рівні. Обчисліть градусні міри цих кути, якщо $n = 10$.
3. Скільки сторін має опуклий многокутник, кожен кут якого дорівнює 120°?
4. Обчисліть кількість кутів опуклого многокутника, якщо сума їхніх градусних мір дорівнює 1080°.
5. Обчисліть кількість сторін опуклого многокутника, сума кутів якого дорівнює 1800°.
6. Обчисліть градусну міру найменшого кута опуклого семикутника, якщо градусні міри його кутів відносяться як $1:2:3:3:3:3:3$.

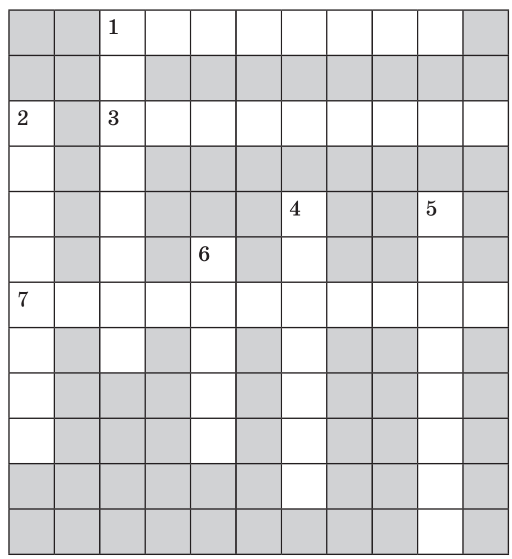
➢ ***Дидактична гра «Кросворд»***

Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у декілька команд (залежно від їхньої кількості). Усі команди отримують картки з кросвордом. Гравці розгадують кросворд і здають учителеві / учительці для перевірки. Перемагає команда, яка першою правильно розгадає кросворд.

Приклад кросворда

По горизонталі. 1. Многокутник, усі вершини якого належать колу. 3. Відрізок, що сполучає несусідні вершини многокутника. 7. Геометрична фігура.

По вертикалі. 1. Геометрична фігура, що є стороною многокутника. 2. Сума довжин усіх сторін многокутника. 4. Многокутник, який лежить по один бік від будь-якої прямої, що містить його сторону. 5. Многокутник, усі сторони якого дотикаються до кола. 6. Геометрична фігура, що є вершиною многокутника.

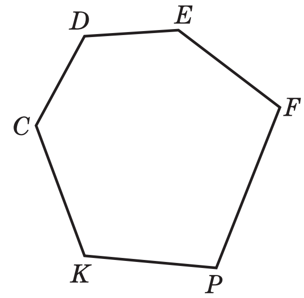


➢ *Робота на картках із друкованою основою*

Варіант 1

Заповніть пропуски.

1) Нарисункузображеномногокутник ____________________;
   вершини многокутника — ______________________________;
   сторони — ______________________________________;
   діагоналі — _____________________________________.
   Щоб знайти периметр цього многокутника, потрібно ____
   ____.

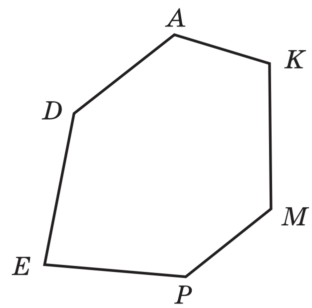


2) Суму кутів опуклого дев’ятикутника обчислюють так: ____
   ____

Варіант 2

Заповніть пропуски.

1) На рисунку зображено многокутник ____________________;
   вершини многокутника — ______________________________;
   сторони — ______________________________________;
   діагоналі — _____________________________________.
   Щоб знайти периметр цього многокутника, потрібно ____
   ____.



2) Суму кутів опуклого десятикутника обчислюють так: ____
   ____

➢ *Тестові завдання*

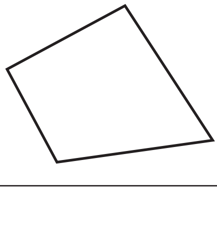
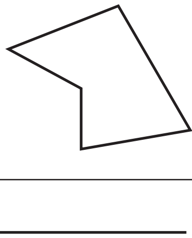
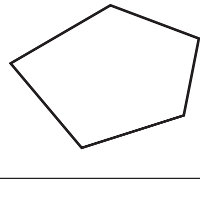
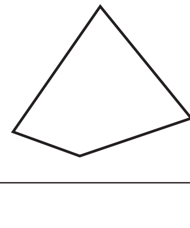
Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Який з наведених відрізків не є стороною многокутника $ABCDEF$?

А	Б	В	Г
BD	CB	AF	DE

2. На якому з рисунків зображено многокутник, що не є опуклим?

А	Б	В	Г
			

3. Чому дорівнює сума градусних мір кутів семикутника?

А	Б	В	Г
1060°	900°	700°	1440°

4. В опуклому восьмикутнику всі кути рівні. Чому дорівнюють градусні міри цих кутів?

А	Б	В	Г
240°	144°	150°	135°

5. Чому дорівнює кількість сторін опуклого многокутника, сума кутів якого — 1440°?

А	Б	В	Г
5	7	10	11

6. Чому дорівнює кількість сторін многокутника, усі кути якого — по 140°?

А	Б	В	Г
9	10	11	13

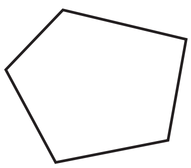
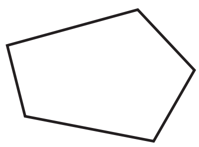
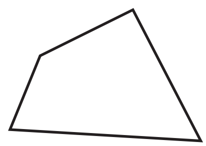
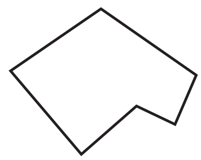
Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Який з наведених відрізків не є стороною многокутника $ABCDEF$?

А	Б	В	Г
BA	CD	AC	EF

2. На якому з рисунків зображено многокутник, що не є опуклим?

А	Б	В	Г
			

3. Чому дорівнює сума градусних мір кутів восьмикутника?

А	Б	В	Г
1060°	2020°	1080°	1440°

4. В опуклому дванадцятикутнику всі кути рівні. Чому дорівнюють градусні міри цих кутів?

А	Б	В	Г
150°	216°	120°	144°

5. Чому дорівнює кількість сторін опуклого многокутника, сума кутів якого — 2340°?

А	Б	В	Г
7	15	11	13

6. Чому дорівнює кількість сторін многокутника, усі кути якого — по 144°?

А	Б	В	Г
11	9	7	10

Відповіді. Варіант 1. 1. А. 2. Б. 3. Б. 4. Г. 5. В. 6. А. Варіант 2. 1. В. 2. Г. 3. В. 4. А. 5. Б. 6. Г.

➢ ***Робота в парах***

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. В опуклому семикутнику сполучили відрізками середини кожних двох сусідніх сторін. Чому дорівнює сума внутрішніх кутів утвореного многокутника?

2. Точку O, що лежить усередині опуклого восьмикутника, сполучили відрізками з усіма вершинами цього многокутника. Чому дорівнює сума внутрішніх кутів усіх утворених трикутників з вершиною в точці O?

Варіант 2

1. В опуклому восьмикутнику сполучили відрізками середини кожних двох сусідніх сторін. Чому дорівнює сума внутрішніх кутів утвореного многокутника?
2. Точку O, що лежить усередині опуклого десятикутника, сполучили відрізками з усіма вершинами цього многокутника. Чому дорівнює сума внутрішніх кутів усіх утворених трикутників з вершиною в точці O?

➢ *Робота в групах*

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Шестикутник, усі сторони якого рівні й дорівнюють 12 см, уписаний у коло радіуса 10 см. Обчисліть відстані від центра кола до сторін шестикутника.

Задача 2

П'ятикутник $ABCDE$, усі кути якого рівні, описаний навколо кола з центром у точці **O**. Чому дорівнює $\angle ABO$?

➢ *Завдання на встановлення відповідності*

Варіант 1

Установіть відповідність між многокутником (1–3) і градусною мірою його найменшого кута (А–Г).

1	Чотирикутник, градусні міри кутів якого відносяться як $1:3:3:5$	**А**	30°
2	П'ятикутник, градусні міри кутів якого відносяться як $2:3:3:5:5$	**Б**	40°
3	Шестикутник, градусні міри кутів якого відносяться як $3:4:4:4:4:5$	**В**	60°
		Г	90°

Варіант 2

Установіть відповідність між многокутником (1–3) і градусною мірою його найбільшого кута (А–Г).

1	Чотирикутник, градусні міри кутів якого відносяться як $3:4:5:6$	**А**	140°
2	П'ятикутник, градусні міри кутів якого відносяться як $2:3:3:5:5$	**Б**	120°
3	Шестикутник, градусні міри кутів якого відносяться як $2:3:3:3:3:4$	**В**	160°
		Г	150°

Відповіді. Варіант 1. 1 — А. 2 — В. 3 — Г. Варіант 2. 1 — Б. 2 — Г. 3 — В.

➢ *Самостійна робота*

Варіант 1

1. Периметр п'ятикутника $ABCDE$ дорівнює 36 см. Обчисліть довжину сторони AB цього п'ятикутника, якщо сторони BC і CD рівні, сума сторін AE і DE дорівнює 8 см, а сторона AB удвічі більша за сторону BC.
2. На скільки градусів сума кутів опуклого восьмикутника більша, ніж сума кутів опуклого чотирикутника?
3. В опуклому шестикутнику сума трьох кутів дорівнює 270°, а решта три кути є рівними. Обчисліть градусну міру кожного з рівних кутів.
4. В опуклому п'ятикутнику $AMKCB$ сторони KM, AM, AB і BC рівні, а сторона KC дорівнює діагоналям AK і AC цього п'ятикутника. Обчисліть градусну міру кута MKC, якщо $\angle MAB = 120^\circ$.

Варіант 2

1. Периметр шестикутника $ABCDEF$ дорівнює 45 см. Обчисліть довжину сторони AB цього шестикутника, якщо сторони BC і CD рівні, сторона AB вчетверо більша за сторону BC, сторона DE дорівнює півсумі сторін AB, BC і CD, а сума сторін FE і AF дорівнює 18 см.
2. У скільки разів сума кутів опуклого десятикутника більша, ніж сума кутів опуклого шестикутника?
3. В опуклому семикутнику сума трьох кутів дорівнює 380°, а решта чотири кути є рівними. Обчисліть градусну міру кожного з рівних кутів.
4. В опуклому п'ятикутнику $ABCKM$ сторони AB, BC, AM і MK рівні, а сторона CK дорівнює діагоналям AC і AK цього п'ятикутника. Обчисліть градусну міру кута CKM, якщо $\angle BAM = 140^\circ$.

Відповіді. Варіант 1. 1. 14 см. 2. На 720°. 3. 150°. 4. 90°. Варіант 2. 1. 12 см. 2. У 2 рази. 3. 130°. 4. 100°.

ПОНЯТТЯ ПЛОЩІ МНОГОКУТНИКА. ПЛОЩІ ПРЯМОКУТНИКА, ПАРАЛЕЛОГРАМА, РОМБА

Очікувані результати: учні мають усвідомлювати, на яких практичних знаннях про площу будується означення площі многокутника; розуміти сутність процесу вимірювання площі многокутника; знати одиниці вимірювання площі та співвідношення між ними; вміти обирати доцільні одиниці вимірювання для обчислення площі многокутника; розуміти доведення формул для обчислення площ паралелограма, ромба; застосовувати формули обчислення площ прямокутника, квадрата, паралелограма, ромба під час розв'язування задач, зокрема практичного змісту.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може провести таку бесіду:

— Восьмикласники на пришкільній ділянці облаштували два квітники. Дівчата зробили свій квітник у вигляді паралелограма зі сторонами 6 м і 8 м, а хлопці — у вигляді прямокутника зі сторонами 6 м і 8 м. Потім у них виникло запитання: площа якого квітника більша?

Ви, певно, стикалися із поняттям площі — площа підлоги кімнати, площа садової ділянки тощо. А що в математиці називають площею? Які властивості має площа? Як вимірюють площу фігури? Які фігури називають рівновеликими?

Ви знаєте формулу для обчислення площі прямокутника, вмієте обчислювати площу прямокутника. Але, крім прямокутника, існують інші види чотирикутників, зокрема паралелограм. Постає запитання: як обчислити площу паралелограма, чи можливо формулу для обчислення площі прямокутника використати, щоб довести формули для обчислення площі довільного паралелограма? Відповідь ствердна. На найближчих уроках ми вивчимо поняття площі та її властивостей, повторимо формули для обчислення площі прямокутника й площі квадрата, удосконалимо вміння розв'язувати задачі на обчислення площ прямокутників і квадратів, вивчимо теорему про площу паралелограма, навчимося розв'язувати задачі на застосування цієї теореми.

З метою зацікавленості учнів / учениць у вивченні математики й активізації пізнавальної діяльності вчитель / учителька може розповісти, як обчислюють площу многокутника за формулою Піка (*див. додатковий матеріал*).

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➢ ***Фронтальне опитування (одиниці вимірювання площі, означення прямокутника й квадрата, їхні властивості)***

1. Які одиниці вимірювання площі ви знаєте?
2. Якими одиницями вимірювання площі зазвичай користуються для вимірювання площі:
   1) квартири;
   2) присадибної ділянки;
   3) сільськогосподарських полів?
3. Що означає одиниця площі 1 см^2?
4. Один квадратний метр розрізали на квадратні сантиметри й склали смугу, поклавши квадратики поряд один з одним. Якою завдовжки вийшла смуга?
5. Яку геометричну фігуру називають прямокутником?
6. Сформулюйте властивості прямокутника.
7. Як називають прямокутник, у якого всі сторони рівні?

➢ ***Усні вправи***

1. Чому дорівнює периметр прямокутника, сторони якого — 5 см і 7 см?
2. Бісектриса кута прямокутника ділить його сторону на відрізки завдовжки 4 см і 5 см. Чому дорівнює периметр прямокутника? Скільки розв'язків має задача?
3. Чому дорівнює периметр квадрата, сторона якого — 4 см?
4. Чому дорівнює сторона квадрата, периметр якого — 36 см?

➢ ***Фронтальне опитування (означення паралелограма й ромба, їхні властивості)***

1. Який чотирикутник називають паралелограмом?
2. Сформулюйте властивості паралелограма.
3. Сформулюйте ознаки паралелограма.
4. Що називають висотою паралелограма?
5. Скільки висот можна побудувати в одному паралелограмі?
6. Що можна сказати про довжини висот, проведених до однієї сторони паралелограма (або її продовження)?
7. Що називають ромбом?
8. Чи будь-який ромб є паралелограмом?
9. Чи будь-який паралелограм є ромбом?
10. Сформулюйте властивості ромба.
11. Скільки висот різної довжини можна провести в ромбі?

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Поняття площі многокутника.

   ! Площею многокутника називають додатну величину, що має такі властивості:

- рівні многокутники мають рівні площі;
- якщо многокутник складено з кількох многокутників, то його площа дорівнює сумі площ цих многокутників;
- за одиницю вимірювання площі приймають площу одиничного квадрата, тобто квадрата зі стороною, що дорівнює одиниці вимірювання довжини;
- кожний многокутник має певну площу, яка однозначно визначається в заданих одиницях вимірювання.

2. Що означає виміряти площу многокутника.

   ! Виміряти площу многокутника означає порівняти його площу із площею одиничного квадрата.

3. Означення рівновеликих многокутників.

   ! Многокутники, що мають рівні площі, називають рівновеликими.

4. Теорема про площу прямокутника.

   ! Площа прямокутника дорівнює добутку його сусідніх сторін: $S = ab$, де a і b — сторони прямокутника.

5. Наслідок теореми про площу прямокутника.

   ! Площа квадрата дорівнює квадрату його сторони: $S = a^2$, де a — сторона квадрата.

6. Теорема про площу паралелограма.

   ! Площа паралелограма дорівнює добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони: $S = ah_a$, де a — сторона паралелограма, h_a — висота, проведена до сторони a.

7. Наслідок теореми про площу паралелограма.

   ! Площа ромба дорівнює добутку його сторони на висоту: $S = ah$, де a — сторона ромба, h — висота.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

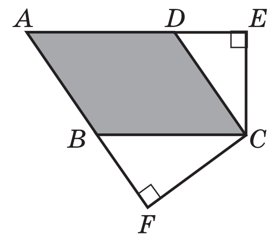
➤ ***Усні вправи***

1. Площа одного з многокутників дорівнює 16 см^2. Чому дорівнює площа другого многокутника, якщо вони рівні?
2. Прямокутник складається із двох квадратів, сторони кожного з яких дорівнюють 4 см. Обчисліть площу прямокутника. Розв'яжіть задачу двома способами. Які властивості площі було застосовано?
3. Квадрат складається із трьох рівних прямокутників зі сторонами 3 см і 9 см. Обчисліть площу квадрата. Розв'яжіть задачу двома способами. Які властивості площі було застосовано?
4. Діагональ п'ятикутника ділить його на трикутник, площа якого дорівнює 15 см^2, і чотирикутник, площа якого дорівнює 20 см^2. Чому дорівнює площа п'ятикутника?
5. Чи може площа одного й того самого многокутника мати два різних значення?
6. Чи може площа многокутника дорівнювати:
   1) 5 см^2; 2) 0,45 мм^2; 3) $6\frac{3}{5}$ дм^2; 4) -25 см^2?
7. Площа прямокутника дорівнює 40 см^2. Чому дорівнює площа рівновеликого йому шестикутника?
8. У трикутнику проведено середні лінії. Вони поділили трикутник на чотири частини. Площа однієї з частин дорівнює 10 см^2. Чому дорівнює площа трикутника?
9. Обчисліть площу прямокутника зі сторонами:
   1) 3 см і 7 см; 2) 40 дм і 2 см; 3) 0,6 м і 50 см.
10. Обчисліть площу квадрата зі стороною:
   1) 9 см; 2) 5 м; 3) 0,7 дм; 4) $\sqrt{11}$ м.
11. Чому дорівнює сторона квадрата, площа якого…
   1) 100 см^2; 2) 64 м^2; 3) 144 дм^2; 4) 35 см^2?
12. Площа квадрата дорівнює 81 см^2. Чому дорівнює…
   1) сторона квадрата;
   2) діагональ квадрата;
   3) периметр квадрата?
13. Сторона квадрата дорівнює меншій стороні прямокутника. Яка з цих фігур має більшу площу?
14. Площа якого з чотирикутників більша: прямокутника зі сторонами 6 см і 8 см чи паралелограма зі сторонами 6 см і 8 см? (*Завдання, запропоноване на етапі мотивації навчальної діяльності*.)
15. Обчисліть периметр паралелограма, якщо:
   1) його площа дорівнює 36 см^2, а довжини висот — 3 см і 4 см;
   2) його площа дорівнює 12 см^2, а довжини висот — 3 см і 2 см;
   3) його площа дорівнює 70 см^2, а довжини висот — 5 см і 7 см.
16. Чому дорівнює площа ромба $ABCD$, якщо сторона AB дорівнює 3 см, а висота DH — 2 см?
17. Сторона ромба дорівнює 4 см, а його площа — 12 см^2. Чому дорівнює відстань між протилежними сторонами ромба?
18. У паралелограмі $ABCD$ до сторони a проведено висоту h_a, а до сторони b — висоту h_b. Порівняйте довжини висот h_a і h_b, якщо $a > b$.
19. Чи існує паралелограм, сторони якого мають довжини 3 см і 6 см, а відповідні висоти — 4 см і 1 см?
20. Чи може площа паралелограма дорівнювати одному квадратному метру, якщо довжина кожної зі сторін менша від одного метра?

➢ *Письмові вправи*

1. Сторони прямокутника дорівнюють 16 см і 3 см. Обчисліть довжини сторін рівновеликого йому прямокутника, якщо відомо, що вони відносяться як $3:4$.
2. Периметр прямокутника дорівнює 26 см, а одна з його сторін — 4 см. Обчисліть довжину сторони квадрата, рівновеликого прямокутнику.
3. Обчисліть площу прямокутника $ABCD$, якщо:

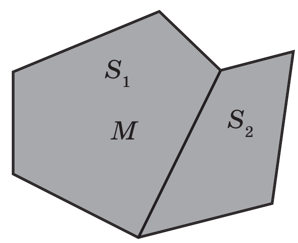
   1) $AB=9$ см, $BC=4$ см; 2) $AB:BC=5:7$, $P_{ABCD}=48$; 3) $AD=8$ см, $AC=17$ см.
4. Бісектриса кута A прямокутника $ABCD$ перетинає сторону BC і ділить її на відрізки 5 см і 3 см. Обчисліть площу прямокутника. Скільки розв'язків має задача?
5. На діагоналі квадрата як на стороні побудовано інший квадрат. Доведіть, що його площа удвічі більша за площу заданого квадрата.



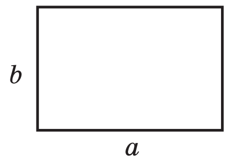
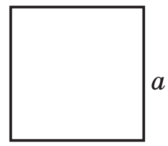
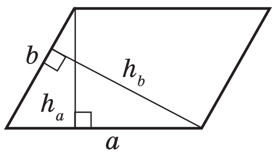
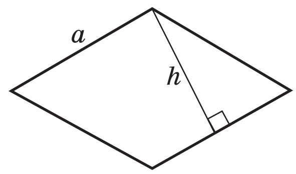
6. У паралелограмі $ABCD$ CF і CE — висоти (*див. рисунок*). Доведіть, що $AB\cdot CF=AD\cdot CE$.
7. Площа паралелограма дорівнює 24 см^2. Обчисліть відстань між його протилежними сторонами, якщо вони дорівнюють 6 см.
8. У паралелограмі $ABCD$ кут B тупий. На продовженні сторони AD за вершину D позначено точку M так, що $\angle MCD=60°$, $\angle CMD=90°$, $AB=6$ см, $AD=9$ см. Обчисліть площу паралелограма.
9. У паралелограмі $ABCD$ на стороні AD позначено точку M, $\angle AMB=90°$, $\angle ABM=45°$, $AM=4$ см, $MD=7$ см. Обчисліть площу паралелограма.
10. Обчисліть градусні міри кутів паралелограма, якщо його площа дорівнює 20 см^2, а висота, проведена з вершини тупого кута, ділить одну зі сторін на відрізки 2 см і 8 см, починаючи від вершини гострого кута.
11. Периметр і площа ромба відповідно дорівнюють 24 см і 24 см^2.Чому дорівнює висота ромба?
12. Обчисліть площу паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 4 см і 5 см, а кут між ними — 30°.
13. Обчисліть площу ромба, якщо його сторона дорівнює 10 см, а один з кутів — 150°.
14. Родина Степаненків замовила насіння газонної трави для засівання дачної ділянки прямокутної форми. Одна зі сторін цього прямокутника дорівнює 48 м, а друга — у 4 рази менша від першої. Менеджер із продажу повідомив, що вартість насіння становить 6 000 грн. Чи не припустився помилки менеджер, якщо вартість насіння для засівання 1 м^2 становить 10 грн? Якщо припустився, то наскільки?
15. Для спортивного майданчика прямокутної форми замовили штучне покриття вартістю 300 грн/м^2. Одна зі сторін цього майданчика дорівнює 18 м, а друга становить 90 % довжини першої. У замовника є 90 000 грн, щоб розрахуватися за це покриття. Скільки гривень у нього залишиться або скільки гривень йому не вистачить для розрахунку?

➢ *Картки-підказки для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань*

Картка 1

Властивості площ	
Для площі S многокутника M виконуються властивості: 1) $S>0$; 2) якщо M розбити на частини з площами S_1 і S_2, то $S=S_1+S_2$; 3) якщо $M_1=M_2$, то $S_1=S_2$; 4) якщо $S_1=S_2$, то M_1 і M_2 — рівновеликі	

Картка 2

Формули для обчислення площі прямокутника, квадрата, паралелограма, ромба	
Площа прямокутника	**Площа квадрата**
 $S = ab$	 $S = a^2$
Площа паралелограма	**Площа ромба**
 $S = ah_a = bh_b$	 $S = ah$

➤ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. На продовженні сторони AD квадрата $ABCD$ за точку D позначено точку M так, що $AD = DM$, $MB = 8$ см, $\angle AMB = 30°$. Обчисліть площу квадрата.
   Відповідь. 16 см².
2. Площа паралелограма дорівнює 24 см². Точка перетину його діагоналей віддалена від прямих, що містять сторони паралелограма, на 2 см і 3 см. Обчисліть периметр паралелограма.
   Відповідь. 20 см.
3. Точка A ділить відрізок CD навпіл, а точка B — на нерівні частини. Доведіть, що площа прямокутника зі сторонами CB і BD дорівнює різниці площ квадратів, сторони яких дорівнюють AD і AB.
   Указівка. Нехай $CB = x$, $BD = y$. Тоді потрібно довести тотожність $xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(y-x)^2}{4}$.

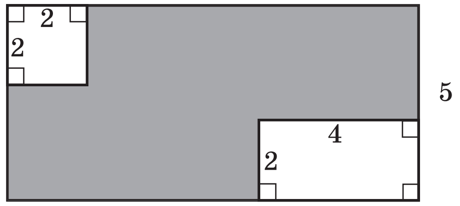
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➤ ***Математичний диктант***

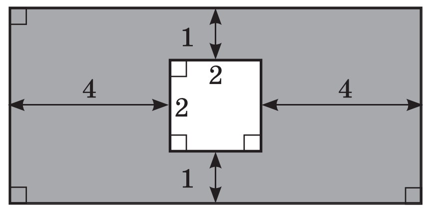
1. Чому дорівнює площа однієї з двох рівних фігур, якщо площа другої — 15 см²?
2. Фігуру розділено на дві частини, площі яких відповідно дорівнюють 15 м² і 5 м². Чому дорівнює площа цієї фігури?
3. Чому дорівнює площа прямокутника зі сторонами 15 м і 5 м?
4. Площа прямокутника дорівнює 20 см², а одна з його сторін — 5 см. Чому дорівнює друга сторона?
5. Чому дорівнює площа квадрата зі стороною 5 м?
6. Площа квадрата дорівнює 36 см². Чому дорівнює сторона квадрата?
7. Чому дорівнює площа паралелограма, якщо його сторона — 8 см, а проведена до неї висота — 6 см?
8. Площа паралелограма дорівнює 18 см², а одна зі сторін — 3 см. Чому дорівнює висота, проведена до цієї сторони?
9. Чому дорівнює площа ромба, якщо його сторона — 8 см, а висота — 5 см?
10. Чому дорівнює висота ромба, якщо його площа — 14 см², а сторона — 5 см?

➢ ***Завдання за рисунками***

Обчисліть площу зафарбованої фігури, зображеної на рисунку.



1)



2)

➢ ***Дидактична гра «10 балів»***

Учитель / учителька обирає одного або декількох асистентів (залежно від кількості учнів / учениць у класі), решта бере участь у грі. Після цього педагог називає певне число. Гравці мають назвати елементи прямокутника, квадрата, паралелограма або ромба так, щоби площа цієї геометричної фігури дорівнювала названому числу. Асистенти фіксують, хто з гравців правильно називає такі геометричні фігури, і за кожну правильну відповідь нараховують 1 бал. Наприклад, учитель / учителька називає число 48. Приклади фігур, площа яких дорівнює 48: прямокутники зі сторонами 16 і 3, 48 і 1, 9,6 і 5 тощо; квадрат зі стороною $4\sqrt{3}$; паралелограм зі стороною 12 і висотою до цієї сторони 4; ромб зі стороною 24 і висотою 2 тощо. Можна поставити додаткову умову: гравець, який назвав певну фігуру, більше не має права називати цю саму фігуру.

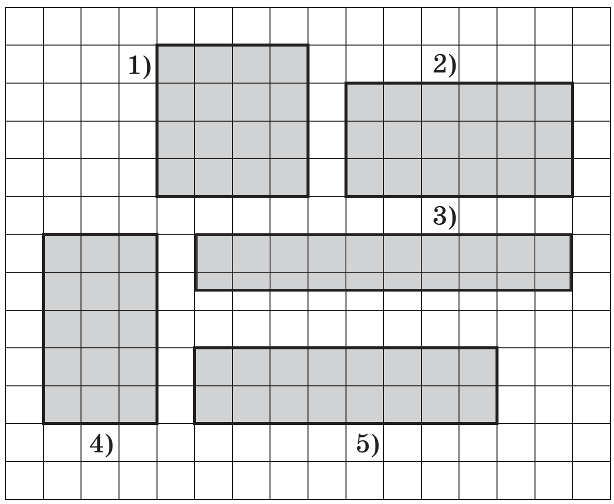
Після того як у гравців будуть вичерпані всі варіанти, учитель / учителька називає інше число. Перемагає гравець, який першим набере певну кількість (наприклад, 10) балів.

➢ ***Робота на картках із друкованою основою***

Варіант 1

1. Які з фігур, зображених на рисунку, є рівновеликими?

Відповідь. ______________________.



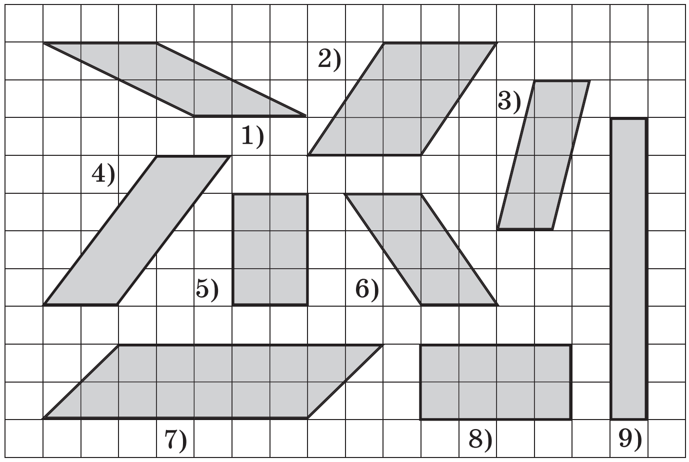
2. Заповніть порожні комірки таблиці (a, b — сторони паралелограма, h_a, h_b — відповідні висоти, S — площа паралелограма).

a, см	b, см	h_a, см	h_b, см	S, см^2
25	40	8		
50		20	25	
40	50		8	
10	20			100
		20	15	300

Варіант 2

1. Які з паралелограмів, зображених на рисунку, є рівновеликими?

   Відповідь. ________________________________.



2. Заповніть порожні комірки таблиці (a, b — сторони паралелограма, h_a, h_b — відповідні висоти, S — площа паралелограма).

a, см	b, см	h_a, см	h_b, см	S, см^2
30	20		15	
40	20	15		
50		30	20	
		15	20	450
20	10			140

➢ *Тестові завдання*

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 4 см, а його площа — 25 см^2. Чому дорівнює друга сторона прямокутника?

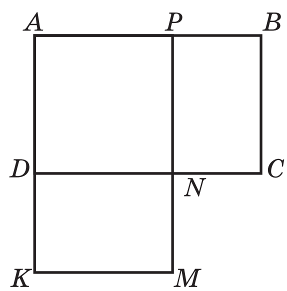
А	Б	В	Г
6,25 см	5 см	16 см	5,5 см

2. Як зміниться площа прямокутника, якщо кожну з його сторін збільшити в чотири рази?

А	Б	В	Г
збільшиться удвічі	збільшиться в 16 разів	збільшиться в 4 рази	збільшиться у 8 разів

3. Сторони кожного із зображених на рисунку прямокутників $ABCD$ і $APMK$ дорівнюють 6 см і 10 см. Чому дорівнює площа многокутника $ABCNMK$?

А	Б	В	Г
100 см^2	94 см^2	120 см^2	84 см^2



4. Сторона паралелограма дорівнює 6 см, а висота, проведена до цієї сторони, — 2,5 см. Чому дорівнює площа паралелограма?

А	Б	В	Г
2,4 см^2	30 см^2	15 см^2	8,5 см^2

5. Чому дорівнює площа паралелограма з гострим кутом 45°, якщо одна з його діагоналей є висотою паралелограма і дорівнює 5 см?

А	Б	В	Г
12,5 см^2	25 см^2	20 см^2	24,5 см^2

6. Площа паралелограма дорівнює площі квадрата, периметр якого дорівнює 24 см, а одна зі сторін паралелограма дорівнює 9 см. Обчисліть висоту паралелограма, проведену до цієї сторони.

А	Б	В	Г
8 см	6 см	4 см	3 см

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

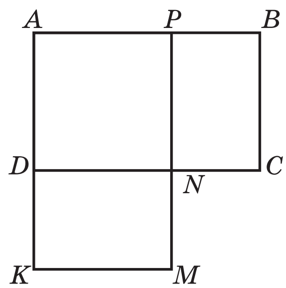
1. Одна зі сторін прямокутника дорівнює 2 см, а його площа — 49 см^2. Чому дорівнює друга сторона прямокутника?

А	Б	В	Г
7 см	14	24,5 см	12, 25 см

2. Як зміниться площа прямокутника, якщо кожну з його сторін зменшити втричі?

А	Б	В	Г
зменшиться у 12 разів	зменшиться в 6 разів	зменшиться втричі	зменшиться в 9 разів

3. Сторони кожного із зображених на рисунку прямокутників $ABCD$ і $APMK$ дорівнюють 8 см і 14 см. Чому дорівнює площа многокутника $ABCNMK$?



А	Б	В	Г
160 см^2	124 см^2	150 см^2	120 см^2

4. Висота паралелограма дорівнює 3,5 см, а сторона, до якої вона проведена, — 8 см. Чому дорівнює площа паралелограма?

А	Б	В	Г
56 см^2	28 см^2	14 см^2	24,5 см^2

5. Чому дорівнює площа паралелограма з гострим кутом 45°, якщо одна з його діагоналей є висотою паралелограма й дорівнює 9 см?

А	Б	В	Г
82, 5 см^2	80 см^2	81 см^2	74,5 см^2

6. Площа паралелограма дорівнює площі квадрата, периметр якого дорівнює 16 см, а одна з висот паралелограма — 2 см. Чому дорівнює сторона паралелограма, до якої проведено цю висоту?

А	Б	В	Г
5 см	4 см	6 см	8 см

Відповіді. Варіант 1. 1. А. 2. Б. 3. Г. 4. В. 5. Б. 6. В. Варіант 2. 1. В. 2. Г. 3. А. 4. Б. 5. В. 6. Г.

➢ ***Робота в парах***

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / вчительці для оцінювання.

Варіант 1

1. Прямокутник, сторони якого відносяться як 1:4, рівновеликий квадрату зі стороною 6 см. Обчисліть довжину більшої сторони прямокутника.
2. Побудуйте довільний паралелограм. Проведіть будь-яку пряму, яка розділить побудований паралелограм на два рівновеликих паралелограми.

Варіант 2

1. Квадрат зі стороною 8 см рівновеликий прямокутнику, у якому одна сторона в 16 разів більша за другу. Обчисліть довжину більшої сторони прямокутника.
2. Побудуйте довільний паралелограм. Побудуйте будь-який прямокутник, рівновеликий побудованому паралелограму.

➢ ***Робота в групах***

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Доведіть, що площу паралелограма можна обчислити за формулою $S = ab\sin\alpha$, де a і b — сторони паралелограма, α — гострий кут між ними.

Задача 2

Доведіть, що площу ромба можна обчислити за формулою $S = a^2\sin\alpha$, де a — сторона ромба, α — його гострий кут.

Задача 3

Доведіть, що площу квадрата можна обчислити за формулою $S = \frac{d^2}{2}$, де d — діагональ квадрата.

➢ ***Завдання на встановлення відповідності***

Варіант 1

Установіть відповідність між чотирикутником (1–3) та його площею (А–Г).

1	Прямокутник, одна зі сторін якого дорівнює 5 см, а діагональ — 13 см	А	64 см^2
2	Квадрат, діагональ якого дорівнює $8\sqrt{2}$ см	Б	60 см^2
3	Ромб, сторона якого дорівнює 12 см, а гострий кут — 30°	В	68 см^2
		Г	72 см^2

Варіант 2

Установіть відповідність між чотирикутником (1–3) та його площею (А–Г).

1	Прямокутник, діагональ якого дорівнює 10 см, а одна зі сторін — 6 см	А	46 см^2
2	Квадрат, діагональ якого дорівнює $7\sqrt{2}$ см	Б	49 см^2
3	Ромб, висота якого дорівнює 5 см, а гострий кут — 30°	В	50 см^2
		Г	48 см^2

Відповіді. Варіант 1. 1 — Б. 2 — А. 3 — Г. Варіант 2. 1 — Г. 2 — Б. 3 — В.

➢ ***Самостійна робота з подальшою взаємоперевіркою і взаємооцінюванням***

Варіант 1

1. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 10 см, а висота, проведена до меншої з них, — 8 см. Обчисліть площу паралелограма.
2. Площа ромба дорівнює 30 см^2. Обчисліть довжину висоти ромба, якщо вона в 1,2 раза менша від сторони ромба.
3. У ромбі $ABCD$ проведено висоту BK завдовжки $5\sqrt{2}$ см. Обчисліть площу ромба, якщо $\angle BAD = 45°$.

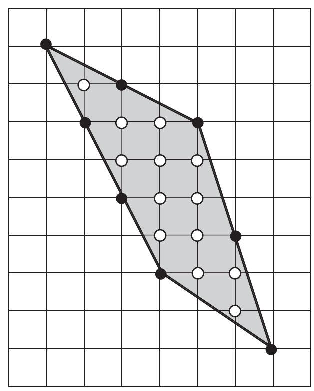
Варіант 2

1. Сторони паралелограма дорівнюють 6 см і 10 см, а висота, проведена до більшої з них, — 5 см. Обчисліть площу паралелограма.
2. Площа ромба дорівнює 54 см^2. Обчисліть довжину його сторони, якщо вона в 1,5 раза більша за висоту ромба.
3. У ромбі $ABCD$ проведено висоту BK завдовжки 6 см. Обчисліть площу ромба, якщо $\angle ABC = 135°$.

Відповіді. Варіант 1. 1. 48 см^2. 2. 6 см. 3. $50\sqrt{2}$ см^2. Варіант 2. 1. 50 см^2. 2. 9 см. 3. $36\sqrt{2}$ см^2.

Додатковий матеріал

ФОРМУЛА ПІКА



Формула Піка дозволяє розв'язувати задачі на обчислення площі простого многокутника, зображеного на папері в клітинку (решітці). Простий многокутник — це многокутник, сторони якого не перетинаються, а всередині многокутника немає «дірок». Основна умова для застосування формули Піка: вершини многокутника мають бути розташованими у вершинах клітинок, тобто бути цілісними.

Теорема. Площа многокутника з цілісними вершинами $S = a + \frac{b}{2} - 1$, де a — кількість вузлів, розташованих усередині многокутника, b — кількість вузлів, розташованих на сторонах многокутника.

Наприклад, на рисунку кількість вузлів, розташованих усередині многокутника, дорівнює 13, а кількість вузлів, розташованих на сторонах многокутника, дорівнює 8, тобто $a = 13$, $b = 8$. Отже, площа многокутника $S = 13 + \frac{8}{2} - 1 = 16$.

Формула (або теорема) Піка названа на честь австрійського математика Георга Піка (1859–1942). Цю теорему він опублікував 1899 року, але тривалий час вона залишалася непоміченою. Лише 1949 року польський математик Гуго Штейнгауз навів цю формулу у своєму знаменитому «Математичному калейдоскопі». Відтоді формула Піка набула популярності й стала широковживаною. Наприклад, у школах Німеччини формулу Піка навіть вивчають на уроках математики.

ПЛОЩА ТРИКУТНИКА

Очікувані результати: учні мають уміти записувати та пояснювати формули для обчислення площі трикутника; розуміти доведення формул для обчислення площі трикутника; застосовувати формули для обчислення площі трикутника під час розв'язування задач, зокрема практичного змісту.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може запропонувати учням / ученицям обговорити таку ситуацію:

— Родина Петренків вирішила замостити тротуарною плиткою садову доріжку. Доріжка має форму прямокутника, ширина якого дорівнює 0,8 м, а довжина — 4,8 м. Вони вибрали плитку у формі трикутника, сторони якого дорівнюють 12 см, 16 см і 20 см. Постало питання: скільки таких плиток потрібно придбати? Син Петренків, Михайло, навчається у 8-му класі (а саме зараз вони вивчають площі многокутників), тож запропонував свою допомогу. Розв'язуючи цю задачу, юнак зрозумів, що потрібно обчислити площу трикутника.

Ви знаєте формули для обчислення площі прямокутника й площі паралелограма. Чи можливо використати яку-небудь з-поміж цих формул для обчислення площі трикутника? (Учні висловлюють припущення.) Відповідь ствердна. На найближчих уроках ми вивчимо формули для обчислення площі трикутника, навчимося розв'язувати задачі на застосування цих формул.

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➢ ***Фронтальне опитування***

1. Що називають висотою трикутника?
2. Скільки висот можна провести в одному трикутнику?
3. Чи існує трикутник, у якого:
   1) дві висоти рівні; 2) три висоти рівні?
4. Чи існує трикутник, висота якого збігається зі стороною?
5. Назвіть геометричну фігуру, що складається з чотирьох рівних прямокутних трикутників.

➢ ***Усні вправи***

1. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Обчисліть:
   1) c, якщо $a = 5$, $b = 12$; 2) a, якщо $c = 10$, $b = 8$;
   3) b, якщо $a = 8$, $c = 17$; 4) c, якщо $a = b = 8$.
2. У трикутнику ABC $AB = BC = 9$ см, $\angle B = 60°$. Чому дорівнює AC?
3. Визначте вид трикутника ABC, у якому $\angle B = 57°$, $\angle A = 33°$.
4. Чому дорівнює сторона ромба, діагоналі якого дорівнюють 30 см і 40 см?

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Теорема про площу трикутника.

   ! Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони: $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$, де a — сторона трикутника, h_a — висота, проведена до сторони a.
2. Обчислення площі прямокутного трикутника за відомими катетами.

   ! Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів: $S = \frac{1}{2} ab$, де a і b — катети прямокутного трикутника.

3. Обчислення площі рівностороннього трикутника.

! Площу рівностороннього трикутника зі стороною a обчислюють за формулою $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

4. Обчислення площі ромба за відомими діагоналями.

! Площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей: $S=\frac{1}{2}d_1d_2$, де d_1 і d_2 — діагоналі ромба.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

➢ *Усні вправи*

1. Сторони трикутника дорівнюють a, b і c, а висоти, проведені до цих сторін, — відповідно h_a, h_b і h_c. Чи можна обчислити площу трикутника, якщо відомі:

   1) a і h_b; 2) c і h_c; 3) h_a і h_b?

2. Площа трикутника ABC дорівнює S. Чому дорівнює площа паралелограма $ABCD$, три вершини якого збігаються з вершинами цього трикутника?

3. Обчисліть площу трикутника, якщо:

   1) його сторона дорівнює 12 см, а висота, проведена до цієї сторони, — 8 см;

   2) один з його кутів прямий, а сторони, що утворюють прямий кут, дорівнюють 6 см і 8 см;

   3) усі кути трикутника дорівнюють 60°, а сторона — 6 см.

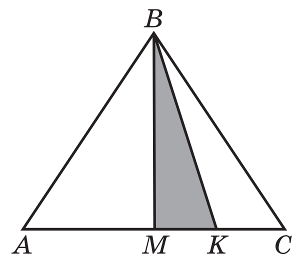
4. Обчисліть площу рівнобедреного прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 18 см.

5. Чому дорівнюють катети прямокутного рівнобедреного трикутника, якщо його площа дорівнює 12,5 см^2?

6. Площа трикутника дорівнює 84 см^2, а одна із його сторін — 8 см. Чому дорівнює висота, проведена до цієї сторони?

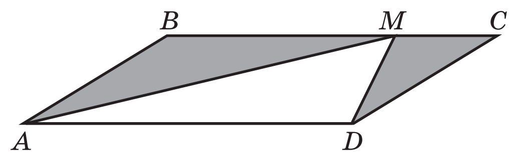
7. Відрізок AD — медіана трикутника ABC. Чому дорівнює площа трикутника ABC, якщо площа трикутника ABD — 8 см^2?

8. Відрізок BM — медіана рівнобедреного трикутника ABC ($AB=BC$), відрізок BK — медіана трикутника BMC (*див. рисунок*). Чому дорівнює площа трикутника BMK, якщо площа трикутника ABC — 48 см^2?



9. На стороні AD паралелограма $ABCD$ позначено точку M. Чому дорівнює площа трикутника BMC, якщо площа паралелограма — 10 см^2?

10. На рисунку зображено паралелограм $ABCD$, площа якого дорівнює 60 см^2. Точка M належить стороні BC. Чому дорівнює площа фігури, що складається з двох зафарбованих трикутників?



11. Чому дорівнює площа ромба, діагоналі якого — 6 см і 8 см?

12. Більша діагональ ромба дорівнює 24 см, а сторона ромба — 26 см. Чому дорівнює площа цього ромба?

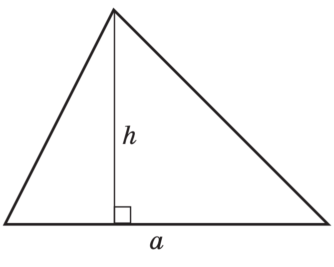
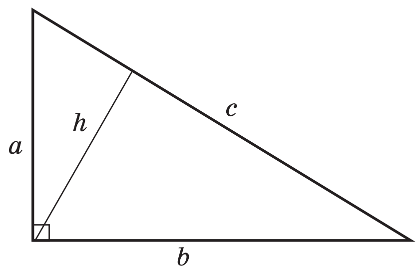
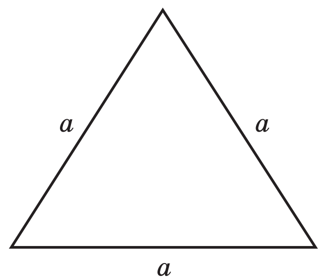
➢ *Письмові вправи*

1. Відрізок CD — висота трикутника ABC. Обчисліть площу трикутника, якщо $AC=13$ см, $CD=5$ см, $BD=4$ см.

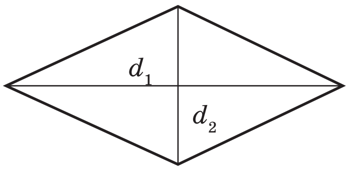
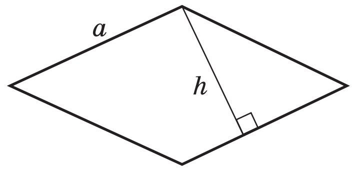
2. Обчисліть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 26 см, а один із катетів — 10 см.
3. Обчисліть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 17 см, а основа — 30 см.
4. Точка K лежить на основі BC рівнобедреного трикутника ABC. Обчисліть площу цього трикутника, якщо довжина його бічної сторони дорівнює 12 см, а відстані від точки K до бічних сторін — 3 см і 5 см.
5. Доведіть, що площу трикутника можна знайти за формулою $S=\frac{1}{2}ab\sin\alpha$, де a і b — сторони трикутника, α — кут між цими сторонами.
6. Обчисліть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 3 см і 7 см, а кут між ними — 30°.
7. Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 30°. Обчисліть бічну сторону трикутника, якщо його площа — 200 см^2.
8. Через вершину трикутника проведіть пряму, яка розділить заданий трикутник на два рівновеликих трикутники.
9. У трикутнику ABC $AB=14$ см, $BC=8$ см, відрізок BK — бісектриса трикутника. Обчисліть відношення площ трикутників ABK і CBK.
10. Скільки тротуарних плиток потрібно для того, щоб замостити доріжку прямокутної форми, якщо ширина доріжки дорівнює 0,8 м, довжина — 4,8 м, а плитка має форму трикутника зі сторонами 12 см, 16 см, 20 см? (*Завдання, запропоноване на етапі мотивації навчальної діяльності*.)
Відповідь. 400 шт.
11. На засівання клумби, що має форму прямокутного трикутника, Марічка витратила 6 г насіння. Потім вона облаштувала ще одну клумбу — такої самої форми (тобто у вигляді подібного трикутника), але зі сторонами, удвічі більшими за відповідні сторони першої клумби. Скільки насіння знадобиться для засівання другої клумби?
12. Площа ромба дорівнює 96 см^2, а одна з його діагоналей — 16 см. Обчисліть довжину другої діагоналі цього ромба.
13. Обчисліть периметр ромба, площа якого дорівнює 120 см^2, а одна з діагоналей — 24 см.
14. Обчисліть площу ромба, сторона якого дорівнює 20 см, а діагоналі відносяться як $3:4$.
15. Обчисліть площу ромба, сторона якого дорівнює 15 см, а сума діагоналей — 42 см.

➢ ***Картки-підказки для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

Картка 1

Площа трикутника		
Довільний трикутник	**Прямокутний трикутник**	**Рівносторонній трикутник**
		
$S=\frac{1}{2}ah$	$S=\frac{1}{2}ab$, $S=\frac{1}{2}ch$	$S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Картка 2

Площа ромба	
 $S=\frac{1}{2}d_1d_2$	 $S=ah$

➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. Площа паралелограма $ABCD$ дорівнює Q. Точка M — середина сторони AB, точка P належить стороні CD. Обчисліть площу трикутника AMP.

   Відповідь. $\frac{1}{4}Q$.

2. Діагоналі ромба $ABCD$ дорівнюють 5 см і 12 см. На діагоналі AC позначено точку M так, що $AM:MC=4:1$. Обчисліть площу трикутника AMD.

   Відповідь. 12 см^2.

3. Трикутники ABC і KBC мають спільну сторону BC. Висоти трикутників, проведені до цієї сторони, відносяться як $6:5$. Обчисліть площу трикутника ABC, якщо вона на 10 см^2 більша за площу трикутника KBC.

   Розв'язання

   Нехай коефіцієнт пропорційності дорівнює x. Тоді висота трикутника ABC дорівнює $6x$, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot 6x=BC\cdot 3x$, а висота трикутника KBC дорівнює $5x$, $S_{KBC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot 5x=BC\cdot 2{,}5x$. За умовою $BC\cdot 3x-BC\cdot 2{,}5x=10$, звідки $x=\frac{20}{BC}$. $S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot BC\cdot 6\cdot\frac{20}{BC}=60$ (см^2).

   Відповідь. 60 см^2.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

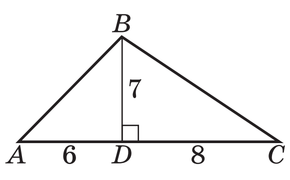
➢ ***Математичний диктант***

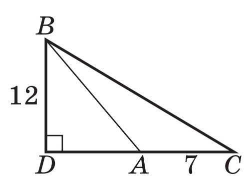
Обчисліть площу:

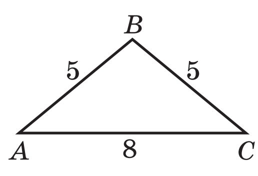
1) трикутника зі стороною a і висотою h, проведеною до цієї сторони, якщо $a=10$ см, $h=6$ см;
2) прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють 6 см і 8 см;
3) прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 5 см, а один із катетів — 3см;
4) рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 13 см, а основа — 10 см;
5) рівностороннього трикутника, якщо його сторона дорівнює 6 см;
6) ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 6 см і 8 см.

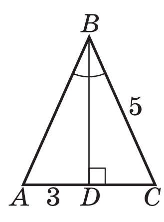
➢ ***Завдання за рисунками***

Обчисліть площу трикутника ABC.









➢ *Дидактична гра «Утворіть слово»*

Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у декілька команд (залежно від їхньої кількості). Кожна команда отримує картку з твердженнями, з-поміж яких є правильні й неправильні. Потрібно з букв, що відповідають правильним твердженням, утворити слово. Перемагає команда, яка першою та правильно назве слово.

Приклад картки

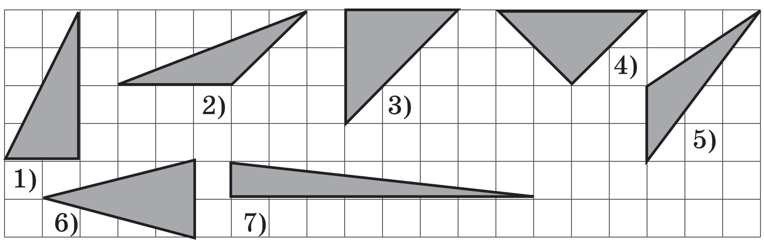
Площа довільного трикутника дорівнює половині добутку його сторони й будь-якої висоти	**К**
Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів	**О**
Площа рівностороннього трикутника дорівнює пополовині добутку його сторін	**Н**
Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони й висоти, проведеної до цієї сторони	**Т**
Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку гіпотенузи й висоти, проведеної до гіпотенузи	**М**
Площа рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює чверті квадрата його гіпотенузи	**И**
Площа рівнобедреного трикутника дорівнює половині добутку його основи й бічної сторони	**Л**
Площа рівностороннього трикутника дорівнює четвертій частині від квадрата його сторони, помноженій на $\sqrt{3}$	**Р**
Висота довільного трикутника ділить його на два рівновеликих трикутники	**Ж**
Бісектриса рівнобедреного трикутника, проведена до його основи, ділить трикутник на два рівновеликих трикутники	**А**
Площа ромба дорівнює добутку його діагоналей	**З**
Площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей	**П**
Площа ромба дорівнює добутку його сторони й висоти	**Б**

Відповідь. ПОБРАТИМ.

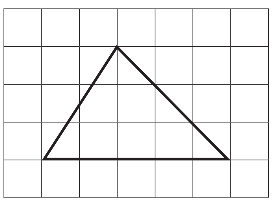
➢ *Робота на картках із друкованою основою*

Варіант 1

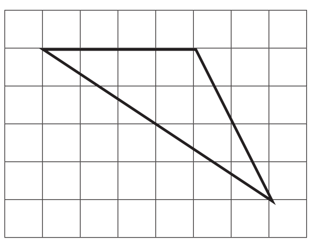
1. Які з трикутників, зображених на рисунку, є рівновеликими?
Відповідь. ________________________



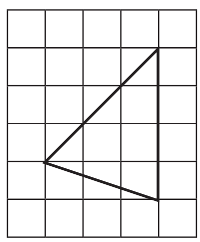
2. Обчисліть площу трикутників, зображених на рисунку, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.

1) 

$S =$ ______________

2) 

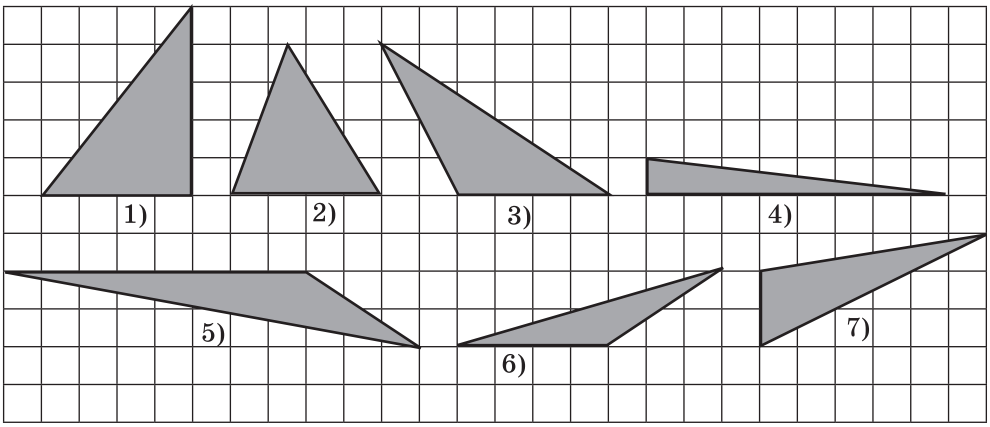
$S =$ ______________

3) 

$S =$ ______________

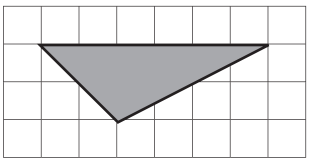
Варіант 2

1. Які з трикутників, зображених на рисунку, є рівновеликими?

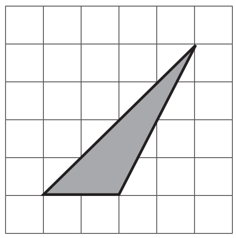


Відповідь. ______________________________

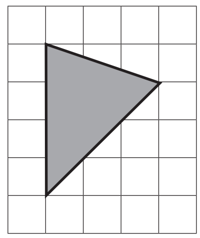
2. Обчисліть площу трикутників, зображених на рисунку, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.

1) 

$S =$ ______________

2) 

$S =$ ______________

3) 

$S =$ ______________

➢ ***Тестові завдання***

Варіант 1

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Чому дорівнює площа трикутника, висота якого — $8\sqrt{3}$ см, а сторона, до якої проведена ця висота, — 10 см?

А	Б	В	Г
$80\sqrt{3}$ см²	$20\sqrt{3}$ см²	$40\sqrt{3}$ см²	120 см²

2. Як зміниться площа трикутника, якщо його сторону й висоту, проведену до цієї сторони, зменшити удвічі?

А	Б	В	Г
не зміниться	зменшиться в 4 рази	зменшиться у 2 рази	зменшиться у 8 разів

3. Катети прямокутного трикутника відносяться як $8:15$, а його площа дорівнює 240 см². Чому дорівнює більший катет трикутника?

А	Б	В	Г
30 см	16 см	15 см	32 см

4. У трикутнику ABC $\angle A = \angle C = 60°$. Чому дорівнює площа трикутника ABC, якщо $AC = 4$ см?

А	Б	В	Г
8 см²	$2\sqrt{3}$ см²	$4\sqrt{3}$ см²	12 см²

5. Одна з діагоналей ромба удвічі більша за другу, а його площа дорівнює 16 см^2. Чому дорівнює довжина більшої діагоналі?

А	Б	В	Г
4 см	8 см	$2\sqrt{2}$ см	2 см

Варіант 2

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

1. Чому дорівнює площа трикутника, сторона якого дорівнює 8 см, а висота, проведена до цієї сторони, — $5\sqrt{3}$ см?

А	Б	В	Г
$40\sqrt{3}$ см^2	120 см^2	$10\sqrt{3}$ см^2	$20\sqrt{3}$ см^2

2. Як зміниться площа трикутника, якщо його сторону й висоту, проведену до цієї сторони, збільшити удвічі?

А	Б	В	Г
збільшиться у 2 рази	збільшиться в 4 рази	збільшиться у 8 разів	не зміниться

3. Катети прямокутного трикутника відносяться як $3:4$, а його площа дорівнює 24 см^2. Чому дорівнює менший катет трикутника?

А	Б	В	Г
3 см	4 см	6 см	4 см

4. У трикутнику ABC $\angle A = \angle B = 60°$. Чому дорівнює площа трикутника ABC, якщо $AB = 6$ см?

А	Б	В	Г
$6\sqrt{3}$ см^2	9 см^2	18 см^2	$9\sqrt{3}$ см^2

5. Одна з діагоналей ромба втричі більша за другу, а його площа дорівнює 6 см^2. Чому дорівнює довжина більшої діагоналі?

А	Б	В	Г
6 см	2 см	$2\sqrt{2}$ см	$\sqrt{2}$ см

Відповіді. Варіант 1. 1. В. 2. Б. 3. А. 4. В. 5. Б. Варіант 2. 1. Г. 2. Б. 3. В. 4. Г. 5. А.

➢ ***Робота в парах***

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. У прямокутнику $ABCD$ діагональ BD дорівнює 12 см. Вершина B віддалена від прямої AC на 4 см. Обчисліть площу трикутника ABD.
2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 6 см і 8 см. Обчисліть довжину висоти трикутника, проведеної до гіпотенузи.
3. Доведіть, що якщо висоти двох трикутників рівні, то відношення площ трикутників дорівнює відношенню їхніх основ.

Варіант 2

1. У прямокутнику $ABCD$ діагональ AC дорівнює 14 см. Вершина C віддалена від прямої BD на 5 см. Обчисліть площу трикутника ABC.

2. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 9 см і 12 см. Обчисліть довжину висоти трикутника, проведеної до гіпотенузи.

3. Доведіть, що якщо основи двох трикутників рівні, то відношення площ трикутників дорівнює відношенню їхніх висот.

➢ *Робота в групах*

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Сторони трикутника дорівнюють a і b, а висоти, проведені до цих сторін, — h_1 і h_2. Обчисліть:

1) h_1, якщо $a=10,\ b=15,\ h_2=4,\ h_1>h_2$;

2) h_1, якщо $a=10$, $b=15,\ h_2=4,\ h_2>h_1$.

Задача 2

Точка D — середина сторони AB трикутника ABC, точка E — середина сторони BC. Площа чотирикутника $ADEC$ дорівнює 27 см^2. Чому дорівнює площа трикутника ABC?

Задача 3

Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 90 см, а висота, проведена до основи, — 15 см. Обчисліть площу трикутника.

➢ *Завдання на встановлення відповідності*

Варіант 1

Установіть відповідність між трикутником (1–3) та його площею (А–Г).

1	Рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює 8 см, а основа — $8\sqrt{3}$ см	А	$16\sqrt{3}$ см^2
2	Прямокутний трикутник, один з катетів якого дорівнює 8 см, а гіпотенуза — 16 см	Б	$8\sqrt{3}$ см^2
3	Рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см	В	$20\sqrt{3}$ см^2
		Г	$32\sqrt{3}$ см^2

Варіант 2

Установіть відповідність між трикутником (1–3) та його площею (А–Г).

1	Прямокутний трикутник, один з катетів якого дорівнює 10 см, а гіпотенуза — 20 см	А	$20\sqrt{3}$ см^2
2	Рівнобедрений трикутник, бічна сторона якого дорівнює 10 см, а основа — $10\sqrt{3}$ см	Б	$50\sqrt{3}$ см^2
3	Рівносторонній трикутник, сторона якого дорівнює $6\sqrt{2}$ см	В	$18\sqrt{3}$ см^2
		Г	$25\sqrt{3}$ см^2

Відповіді. Варіант 1. 1 — А. 2 — Г. 3 — Б. Варіант 2. 1 — Б. 2 — Г. 3 — В.

➢ *Самостійна робота*

Варіант 1

1. Висота BD трикутника ABC ділить сторону AC на відрізки $AD=6$ см і $DC=8$ см. Обчисліть площу трикутника й висоту, проведену до сторони BC, якщо $BC=10$ см.
2. У трикутнику ABC $\angle A=25°$, $\angle B=65°$. Обчисліть площу трикутника, якщо $AB=17$ см, $AC=15$ см.
3. У трикутнику ABC $AB=BC$, $\angle B=60°$. Обчисліть площу трикутника, якщо $AC=12$ см.
4. Чому дорівнюють діагоналі ромба, якщо їхні довжини відносяться як $1:3$, а площа ромба дорівнює 24 см^2?
5. Точки K, M, T і E розташовані відповідно на сторонах AB, BC, CD і AD квадрата $ABCD$ так, що $AK=7$ см, $KB=3$ см, $BM=5$ см, $CT=8$ см і $DE=5$ см. Обчисліть площу чотирикутника $KMTE$.

Варіант 2

1. Висота AD трикутника ABC ділить сторону BC на відрізки $CD=8$ см і $DB=6$ см. Обчисліть площу трикутника й висоту, проведену до сторони AB, якщо $AB=10$ см.
2. У трикутнику ABC $\angle A=35°$, $\angle B=55°$. Обчисліть площу трикутника, якщо $AB=13$ см, $AC=5$ см.
3. У трикутнику ABC $AB=AC$, $\angle A=60°$. Знайдіть площу трикутника, якщо $BC=14$ см.
4. Чому дорівнюють діагоналі ромба, якщо їхні довжини відносяться як $2:3$, а площа ромба дорівнює 48 см^2?
5. Точки K, M, T і E розташовані відповідно на сторонах BC, CD, AD і AB квадрата $ABCD$ так, що $BK=8$ см, $CK=4$ см, $DM=6$ см, $AT=2$ см і $AE=6$ см. Обчисліть площу чотирикутника $KMTE$.

Відповіді. Варіант 1. 1. 42 см^2, 8,4 см. 2. 60 см^2. 3. $36\sqrt{3}$ см^2. 4. 4 см і 12 см. 5. 50 см^2. Варіант 2. 1. 56 см^2, 11,2 см. 2. 30 см^2. 3. $49\sqrt{3}$ см^2. 4. 8 см і 12 см. 5. 72 см^2.

ПЛОЩА ТРАПЕЦІЇ

Очікувані результати: учні мають уміти записувати та пояснювати формули для обчислення площі трапеції; розуміти доведення формули для обчислення площі трапеції; застосовувати формули для обчислення площі трапеції під час розв'язування задач, зокрема практичного змісту.

МОТИВАЦІЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ

Учитель / учителька може запропонувати учням обговорити таку ситуацію:

— Шкільні парти мають кришки у вигляді трапеції (*див. рисунок*). Восьмикласникам доручили визначити кількість фарби, потрібної для фарбування 14 парт.

Шляхом вимірювання учні встановили, що основи трапеції дорівнюють 1,2 м і 0,8 м, ширина парти, тобто висота трапеції, дорівнює 0,52 м. На відповідному сайті в інтернеті восьмикласники прочитали, що витрати фарби становлять 100 г на 1 м^2.

Учні зрозуміли, що для виконання цього завдання потрібно вміти обчислювати площу трапеції.

На найближчих уроках ми вивчимо формулу для обчислення площі трапеції, навчимося розв'язувати задачі на застосування цієї формули.

АКТУАЛІЗАЦІЯ ОПОРНИХ ЗНАНЬ

➢ ***Фронтальне опитування***

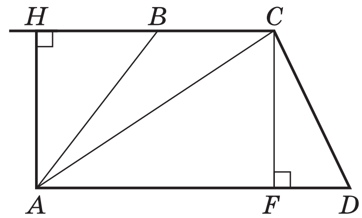
1. Який чотирикутник називають трапецією?
2. Які види трапеції ви знаєте?
3. Яку трапецію називають рівнобічною?
4. Сформулюйте властивості рівнобічної трапеції.
5. Що називають висотою трапеції?
6. Скільки висот можна провести в одній трапеції?
7. У якому випадку висота трапеції збігається з однією зі сторін?
8. Що називають середньою лінією трапеції?
9. Сформулюйте властивість середньої лінії трапеції.
10. Як обчислити довжини відрізків, які висоти рівнобічної трапеції, проведені з вершин тупих кутів, відтинають на більшій основі трапеції, якщо відомі основи трапеції?

12. Як обчислити гіпотенузу прямокутного трикутника, якщо відомі його катети?

13. Як обчислити катет прямокутного трикутника, якщо відомі його гіпотенуза й другий катет?

➢ *Усні вправи*

1. Назвіть висоти трапеції $ABCD$, зображеної на рисунку. Порівняйте ці висоти.



2. Діагональ трапеції є бісектрисою її гострого кута. Чому дорівнюють бічні сторони трапеції, якщо менша основа трапеції дорівнює 6 см?
3. Чому дорівнює середня лінія трапеції, основи якої дорівнюють:

   1) 6 см і 10 см; 2) 5 см і 12 см; 3) a см і b см?
4. Бічна сторона трапеції дорівнює a см і утворює кут α з більшою основою трапеції. Чому дорівнює висота трапеції, якщо:

   1) $a = 16$ см, $\alpha = 30°$; 2) $a = 8$ см, $\alpha = 45°$?

ПЛАН ВИВЧЕННЯ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

1. Теорема про площу трапеції.

   ! Площа трапеції дорівнює добутку півсуми її основ на висоту: $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$,

   де a і b — основи трапеції, h — висота трапеції.
2. Наслідок теореми про площу трапеції.

   ! Площа трапеції дорівнює добутку середньої лінії на висоту.

ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ, ЩО СПРИЯЮТЬ ЗАСВОЄННЮ НОВОГО МАТЕРІАЛУ

➢ *Усні вправи*

1. Обчисліть площу трапеції з основами a, b і висотою h, якщо:

   1) $a = 5$, $b = 7$, $h = 3$; 2) $a = 5$, $b = 8{,}2$, $h = 4$.
2. Обчисліть площу трапеції із середньою лінією m і висотою h, якщо:

   1) $m = 5$, $h = 2$; 2) $m = 6{,}2$, $h = 3$.
3. Площа трапеції дорівнює S, а висота — h. Обчисліть довжину середньої лінії, якщо:

   1) $S = 25$ см^2, $h = 2$ см; 2) $S = 36$ см^2, $h = 6$ см.
4. Площа трапеції дорівнює 36 см^2, а висота — 4 см. Чому дорівнюють основи трапеції, якщо:

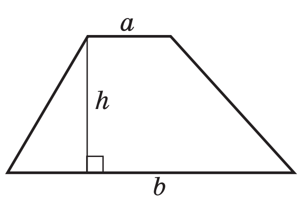
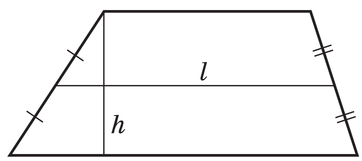
   1) їхні довжини відносяться як $1:5$; 2) одна з них на 5 см довша за іншу?
5. Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 32 см, бічна сторона — 5 см, площа — 44 см^2. Обчисліть висоту трапеції.

➢ *Письмові вправи*

1. У прямокутній трапеції $ABCD$ гострий кут A дорівнює 45°, а висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки 2 см і 6 см, починаючи від точки A. Обчисліть площу трапеції.
2. Висота, проведена з вершини тупого кута прямокутної трапеції, утворює з бічною стороною кут 45°. Основи трапеції дорівнюють 8 см і 4 см. Обчисліть площу трапеції.
3. У рівнобічній трапеції основи дорівнюють 10 см і 24 см, бічна сторона — 25 см. Обчисліть площу трапеції.

4. Обчисліть площу прямокутної трапеції, у якої дві менші сторони дорівнюють по 6 см, а більший кут — 135°.
5. У трапеції $ABCD$ основи AD і BC дорівнюють 10 см і 8 см відповідно. Площа трикутника ACD дорівнює 30 см^2. Обчисліть площу трапеції.
6. Площа прямокутної трапеції дорівнює 30 см^2, периметр — 28 см, а менша бічна сторона — 3 см. Обчисліть довжину більшої бічної сторони.
7. Висота трапеції втричі більша, ніж одна з основ трапеції, але удвічі менша, ніж друга. Знайдіть основи й висоту трапеції, якщо її площа дорівнює 168 см^2.
8. Висота трапеції більша за її меншу основу на 6 см, а різниця основ дорівнює 12 см. Чому дорівнюють основи трапеції, якщо її площа — 64 см^2?
9. Більша основа рівнобічної трапеції дорівнює 70 см, один з кутів — 135°, висота — 10 см. Обчисліть площу трапеції.
10. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 15 см і 33 см, а діагоналі є бісектрисами гострих кутів. Обчисліть площу трапеції.
11. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 39 см і 15, а діагоналі перпендикулярні до бічних сторін. Обчисліть площу трапеції.
12. Бічна сторона рівнобічної трапеції, описаної навколо кола, дорівнює 6 см, а один з кутів — 60°. Обчисліть площу трапеції.
13. Більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнює 16 см, а гострий кут — 30°. Обчисліть площу трапеції, якщо в неї можна вписати коло.
14. Скільки фарби потрібно для того, щоб пофарбувати 14 парт, кришки яких мають форму трапеції, якщо основи трапеції дорівнюють 1,2 м і 0,8 м, ширина парти, тобто висота трапеції, — 0,52 м, а витрати фарби становлять 100 г на 1 м^2? (*Завдання, запропоноване на етапі мотивації навчальної діяльності.*)
Відповідь. 728 г.

➢ ***Картка-підказка для учнів, у яких виникли утруднення під час виконання завдань***

Площа трапеції	
 $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$	 $S = l \cdot h$ (l — середня лінія)

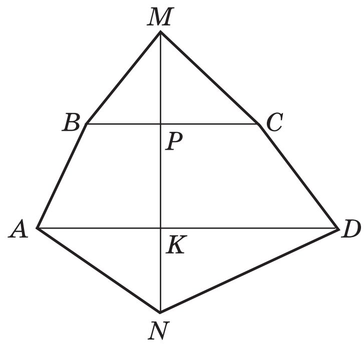
➢ ***Завдання для учнів, які мають підвищений інтерес до вивчення математики***

1. У трапеції $ABCD$ BC і AD — основи, $BC : AD = 3 : 4$. Площа трапеції дорівнює 70 см^2. Обчисліть площу трикутника ABC.
Відповідь. 30 см^2.
2. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює a см, а гострий кут — 30°. Обчисліть площу трапеції, якщо менша діагональ утворює з основою кут 60°.
Відповідь. $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{2}$ см^2.

3. Відрізок MN перетинає основи трапеції $ABCD$ так, що точки A і M лежать по різні боки від прямої BC і $MN \perp BC$. Основи трапеції ділять відрізок MN на три рівні частини. Площі трикутників BMC і AND дорівнюють S_1 і S_2 відповідно. Обчисліть площу трапеції.

Розв'язання

Нехай відрізок MN перетинає основи трапеції AD і BC у точках K і P відповідно (*див. рисунок*).



Тоді за умовою $MP = PK = KN = \frac{1}{3}MN$. MP і KN — висоти трикутників BMC і AND відповідно, PK — висота трапеції.

$$S_1 = \frac{1}{2}BC \cdot MP = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{3}MN,$$

$$S_2 = \frac{1}{2}AD \cdot KN = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{1}{3}MN.$$

Обчислимо: $S_1 + S_2 = \frac{1}{2}BC \cdot \frac{1}{3}MN + \frac{1}{2}AD \cdot \frac{1}{3}MN = \frac{1}{3}MN \cdot \left(\frac{1}{2}(BC + AD)\right) = \frac{BC + AD}{2} \cdot PK = S_{ABCD}$.

Відповідь. $S_1 + S_2$.

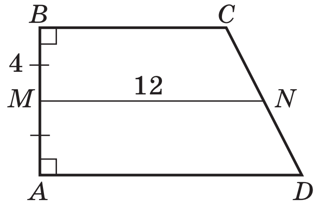
ПРИКЛАДИ ЗАВДАНЬ ДЛЯ ПІДБИТТЯ ПІДСУМКІВ УРОКУ, ПЕРЕВІРКИ ДОМАШНЬОГО ЗАВДАННЯ

➤ ***Математичний диктант***

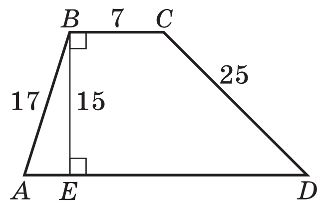
Доповніть твердження.

1) Якщо основи трапеції дорівнюють m і n, а висота — p, то площу трапеції обчислюють так...
2) Якщо середня лінія трапеції дорівнює c, а висота — d, то площу трапеції обчислюють так...
3) Якщо основи трапеції дорівнюють 6 см і 8 см, а висота — 5 см, то площа трапеції дорівнює...
4) Якщо середня лінія трапеції дорівнює 8 см, а висота — 4 см, то площа трапеції дорівнює...
5) Якщо площа трапеції дорівнює 40 см^2, а висота — 5 см, то середня лінія трапеції дорівнює...
6) Якщо площа трапеції дорівнює 21 см^2, а сума основ — 7 см, то висота трапеції дорівнює...

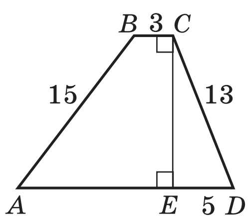
➤ ***Завдання за рисунками***



S_{ABCD} —?



S_{ABCD} — ?, S_{EBCD} — ?



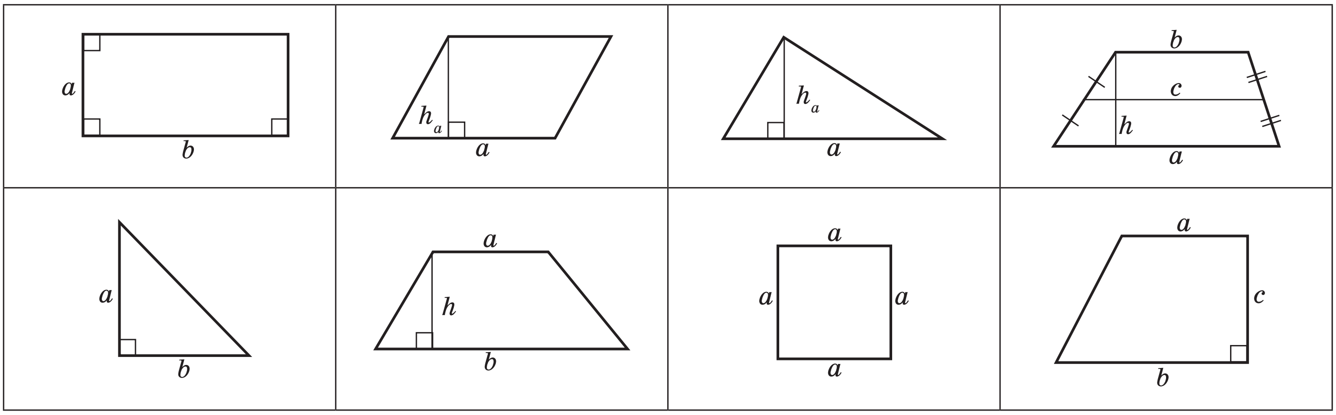
S_{ABCD} — ?, S_{ABCE} — ?

➤ ***Дидактична гра «Утворіть пару»***

Учитель / учителька об'єднує учнів / учениць у декілька команд (залежно від їхньої кількості). Кожна команда отримує по два комплекти карток і канцелярські скріпки. На картках першого комплекту зображено геометричні фігури, а на картках другого — формули, за якими можна обчислити площі цих фігур. Гравці повинні до кожної картки з першого комплекту дібрати відповідну картку з другого комплекту й скріпити ці картки. Зверніть увагу: деякі картки з другого комплекту зайві. Після цього команди передають утворені пари карток учителеві / учительці для перевірки. Перемагає команда, яка першою правильно виконає завдання.

Приклади карток

Комплект 1



Комплект 2

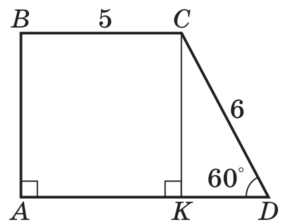
$S=\dfrac{a\cdot b}{2}$	$S=\dfrac{ah_a}{2}$	$S=2ab$	$S=a^2$	$S=c\cdot h$	$S=\dfrac{a\cdot b}{2}\cdot c$
$S=a\cdot b$	$S=\dfrac{a+b}{h}\cdot 2$	$S=4a$	$S=\dfrac{a+b}{2}h$	$S=\dfrac{a+b}{2}\cdot c$	$S=a\cdot h_a$

➢ ***Робота на картках із друкованою основою***

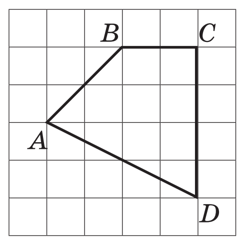
Варіант 1

1. На рисунку зображено трапецію $ABCD$. Скориставшись рисунком, заповніть таблицю.

CK	KD	AD	S_{ABCD}



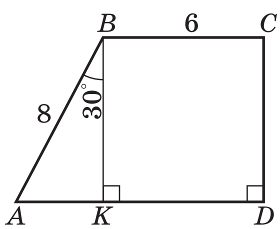
2. Обчисліть площу чотирикутника $ABCD$, зображеного на рисунку, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.
Розв'язання
____
____
Відповідь. ________________________



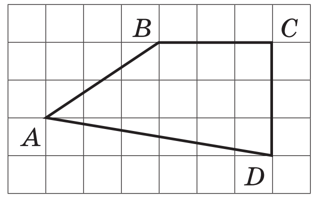
Варіант 2

1. На рисунку зображено трапецію $ABCD$. Скориставшись рисунком, заповніть таблицю.

BK	AK	AD	S_{ABCD}



2. Обчисліть площу чотирикутника $ABCD$, зображеного на рисунку, якщо сторона клітинки дорівнює 1 см.



____

____

Відповідь. ______________________

➤ *Тестові завдання*

Укажіть букву, яка, на вашу думку, позначає правильну відповідь.

Варіант 1

1. Чому дорівнює площа трапеції, основи якої — 3 см і 7 см, а висота — 10 см?

А	Б	В	Г
100 см^2	210 см^2	105 см^2	50 см^2

2. Середня лінія трапеції дорівнює 6 см, а висота — 3 см. Чому дорівнює площа трапеції?

А	Б	В	Г
9 см^2	18 см^2	36 см^2	27 см^2

3. Площа трапеції дорівнює 40 см^2, а її висота — 5 см. Чому дорівнюють основи трапеції, якщо одна з них на 4 см більша за другу?

А	Б	В	Г
10 см і 6 см	13 см і 9 см	15 см і 11 см	6 см і 2 см

4. Чому дорівнює площа прямокутної трапеції, основи якої — 6 см і 9 см, а менша діагональ є бісектрисою прямого кута.

А	Б	В	Г
15 см^2	60 см^2	45 см^2	30 см^2

Відповіді

Варіант 1. 1. Г. 2. Б. 3. А. 4. В.

Варіант 2

1. Чому дорівнює площа трапеції, основи якої — 4 см і 6 см, а висота — 10 см?

А	Б	В	Г
240 см^2	100 см^2	50 см^2	120 см^2

2. Середня лінія трапеції дорівнює 8 см, а висота — 5 см. Чому дорівнює площа трапеції?

А	Б	В	Г
20 см^2	40 см^2	26 см^2	32 см^2

3. Площа трапеції дорівнює 45 см^2, а її висота — 5 см. Чому дорівнюють основи трапеції, якщо одна з них на 6 см більша за другу?

А	Б	В	Г
13 см і 7 см	16 см і 10 см	15 см і 9 см	12 см і 6 см

4. Чому дорівнює площа прямокутної трапеції, основи якої — 4 см і 11 см, а менша діагональ є бісектрисою прямого кута?

А	Б	В	Г
30 см^2	15 см^2	60 см^2	45 см^2

Варіант 1. 1. В. 2. Б. 3. Г. 4. А.

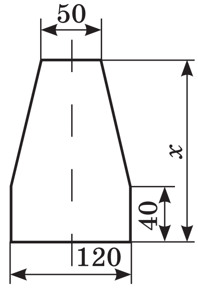
➤ *Робота в парах*

- Обговоріть план виконання завдань.
- Розподіліть, хто виконуватиме завдання варіанта 1, а хто — варіанта 2.
- Виконайте завдання і здійсніть взаємоперевірку.
- Здайте роботу вчителеві / учительці для оцінювання.

Варіант 1

1. Бічні сторони трапеції дорівнюють 13 см і 15 см, а основи відносяться як $2:5$. Обчисліть площу трапеції, якщо радіус уписаного в неї кола дорівнює 5 см.

2. Площа многокутника, зображеного на рисунку, дорівнює 12 110 мм². Скориставшись рисунком, обчисліть x.

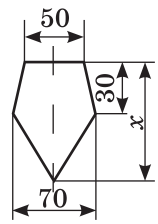


3. Менша основа й менша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнюють a см, а один з кутів — 45°. Обчисліть площу трапеції.

Варіант 2

1. Радіус кола, вписаного в трапецію, дорівнює 4 см. Бічні сторони — 11 см і 14 см, а основи відносяться як $2:3$. Обчисліть площу трапеції.

2. Площа многокутника, зображеного на рисунку, дорівнює 3375 мм². Скориставшись рисунком, обчисліть x.



3. Більша основа й більша бічна сторона прямокутної трапеції дорівнюють a см, а один з кутів — 60°. Обчисліть площу трапеції.

➢ ***Робота в групах***

- Оберіть, хто з членів групи координуватиме роботу й відповідатиме за її кінцевий результат.
- Складіть план роботи.
- Розподіліть, хто який пункт плану виконуватиме.
- Розв'яжіть задачі.
- Обговоріть здобуті розв'язки.
- Здайте роботи вчителеві / учительці для оцінювання.

Задача 1

Основи трапеції дорівнюють 16 см і 30 см, а бічні сторони — 13 см і 15 см. Обчисліть площу трапеції.

Задача 2

Площа трапеції $ABCD$ дорівнює 70 см², основи $AD=9$ см і $BC=5$ см. Через точку B і середину сторони CD проведено пряму, що перетинає промінь AD у точці M. Обчисліть площу трикутника ABM.

Задача 3

Радіус кола, вписаного в трапецію, дорівнює R, а один з кутів трапеції — 45°. Обчисліть площу трапеції.

➢ ***Завдання 1 на встановлення відповідності***

Варіант 1

Установіть відповідність між трапецією (1–3) та її площею (А–Г).

1	Трапеція, основи якої дорівнюють 8 см і 17 см, а висота — 14 см	А	180 см²
2	Прямокутна трапеція, основи якої дорівнюють 8 см і 15 см, а менша бічна сторона — 16 см	Б	175 см²
3	Рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 4 см і 20 см, а бічна сторона — 17 см	В	204 см²
		Г	184 см²

Варіант 2

Установіть відповідність між трапецією (1–3) та її площею (А–Г).

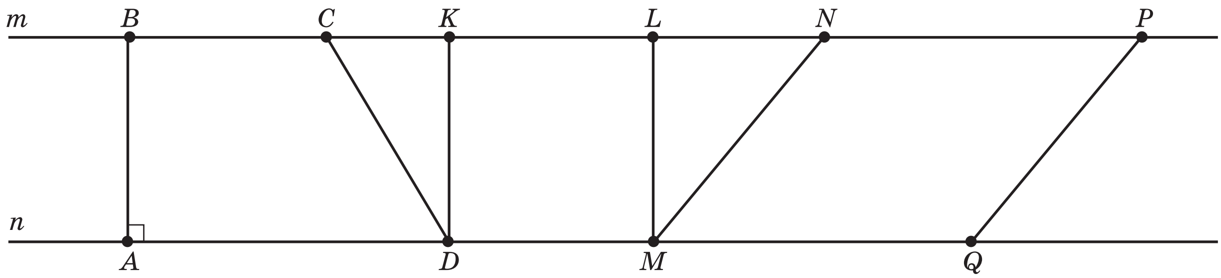
1	Трапеція, основи якої дорівнюють 9 см і 15 см, а висота — 13 см	**А**	132 $см^2$
2	Рівнобічна трапеція, основи якої дорівнюють 2 см і 20 см, а бічна сторона — 15 см	**Б**	165 $см^2$
3	Прямокутна трапеція, основи якої дорівнюють 9 см і 13 см, а менша бічна сторона — 15 см	**В**	156 $см^2$
		Г	150 $см^2$

Відповіді. Варіант 1. 1 — Б. 2 — Г. 3 — А. Варіант 2. 1 — В. 2 — А. 3 — Б.

➢ *Завдання 2 на встановлення відповідності*

Варіант 1

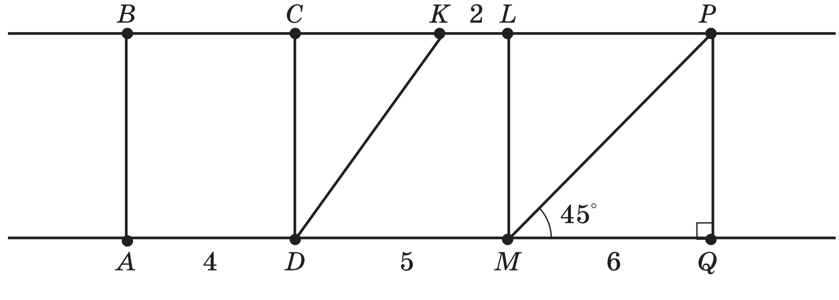
На паралельних прямих m і n розміщено основи трапеції $ABCD$, сторони квадрата $DKLM$ та сторони паралелограма $MNPQ$ (*див. рисунок*). Периметр квадрата дорівнює 24, $BC = KL$, $BC : AD = 2 : 3$, $AD = MQ$. Установіть відповідність між фігурою (1–3) та її площею (А–Д).



1	Квадрат $DKLM$	**А**	48
2	Паралелограм $MNPQ$	**Б**	90
3	Трапеція $ABCD$	**В**	54
		Г	36
		Д	45

Варіант 2

На паралельних прямих m і n побудовано прямокутник $ABCD$, прямокутну трапецію $DKLM$ і прямокутний трикутник MQP (*див. рисунок*). Установіть відповідність між фігурою (1–3) та її площею (А–Д).

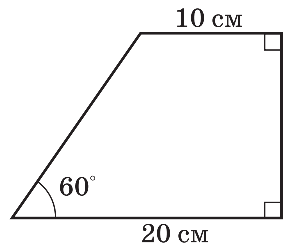


1	Прямокутник $ABCD$	**А**	12
2	Трапеція $DKLM$	**Б**	18
3	Трикутник MQP	**В**	21
		Г	24
		Д	36

Відповіді. Варіант 1. 1 — Г. 2 — В. 3 — Д. Варіант 2. 1 — Г. 2 — В. 3 — Б.

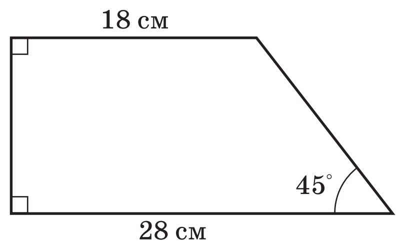
➢ *Самостійна робота*

Варіант 1



1. Обчисліть площу трапеції, зображеної на рисунку.
2. Основи прямокутної трапеції дорівнюють 3 см і 7 см, а більша бічна сторона — 5 см. Обчисліть площу трапеції.
3. Менша основа й бічні сторони рівнобічної трапеції дорівнюють по 4 см. Обчисліть площу трапеції, якщо її тупий кут дорівнює 120°.
4. Чому дорівнюють основи a і b трапеції, площа якої — S, а висота — h, якщо $S = 20$ см^2, $h = 5$ см, $b - a = 2$ см?
5. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 50 см і 30 см, а бічна сторона — 26 см. Обчисліть площу трапеції.

Варіант 2



1. Обчисліть площу трапеції, зображеної на рисунку.
2. Менша основа прямокутної трапеції дорівнює 6 см, а бічні сторони — 8 см і 10 см. Обчисліть площу трапеції.
3. Менша основа рівнобічної трапеції дорівнює 6 см, а бічна сторона — 2 см. Обчисліть площу трапеції, якщо її гострий кут дорівнює 60°.
4. Чому дорівнюють основи a і b трапеції, площа якої — S, а висота — h, якщо $S = 16$ см^2, $h = 4$ см, $a = 3b$?
5. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 50 см і 14 см, а діагональ — 40 см. Обчисліть площу трапеції.

Відповіді. Варіант 1. 1. $150\sqrt{3}$ см^2. 2. 15 см^2. 3. $12\sqrt{3}$ см^2. 4. 3 см і 5 см. 5. 960 см^2. Варіант 2. 1. 230 см^2. 2. 72 см^2. 3. $7\sqrt{3}$ см^2. 4. 2 см і 6 см. 5. 768 см^2.

ДЖЕРЕЛА

1. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти (30 вересня 2020 року). URL: https: //mon.qov.ua
2. Типова освітня програми для 5–9 класів закладів загальної середньої освіти (наказ МОН № 235 від 19.02.2021 року). URL: https: //mon.qov.ua
3. Біляніна О. Я., Білянін Г. І., Семчук А. Р., Ілащук О. Г., Мар'янчук О. Т., Рябий С. І. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти. URL: https: //mon.qov.ua
4. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В. Модельна навчальна програма «Геометрія». 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти. URL: https: //mon.qov.ua
5. Василишин М. С., Миляник А. І., Працьовитий М. В., Простакова Ю. С., Школьний О. В. Модельна навчальна програма «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти. URL: https: //mon.qov.ua
6. Генденштейн Л. Е., Жемчужкіна Г. В. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти. URL: https: //mon.qov.ua
7. Істер О. С. Модельна навчальна програма «Математика. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти. URL: https: //mon.qov.ua
8. Істер О. С. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти. URL: https: //mon.qov.ua
9. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти. URL: https: //mon.qov.ua
10. Панченко С. Ю. Модельна навчальна програма «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти. URL: https: //mon.qov.ua
11. Бабенко С. П. Усі уроки геометрії. 8 клас. Харків : Видавнича група «Основа», 2008.
12. Кушнір Л. Д. Геометрія. 8 клас : розробки уроків. Харків : Вид-во «Ранок», 2016.
13. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Збірник задач і контрольних робіт. Геометрія. 8 клас. Харків : Гімназія, 2016.
14. Старова О. О. Дидактична картотека. Геометрія. 8 клас. Харків : Видавнича група «Основа», 2013.
15. Старова О. О. Геометрія. 8 клас. Харків : Видавнича група «Основа», 2020.

ДЛЯ НОТАТОК

Навчальне видання

Серія «Мій конспект. Матеріали до уроків»

СТАРОВА ОЛЬГА ОЛЕКСАНДРІВНА

ГЕОМЕТРІЯ. 8 КЛАС

Відповідальна за видання *А. В. Бойко*

Підписано до друку 26.05.2025. Формат 84×108/16.
Папір газет. Друк офсет. Гарнітура Шкільна.
Ум. друк. арк. 21,84.
Тираж 3000 пр. Замовлення № 25-06.

ТОВ «Видавнича група “Основа”»
61001, м. Харків, вул. Георгія Тарасенка, 66
тел. +38 (050) 468-49-75
e-mail: office1@osnova.com.ua
https://osnova.com.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи
ДК № 7938 від 14.09.2023 р.
Телефон для замовлення: 0-800-505-212
(Безкоштовно з мобільних та стаціонарних телефонів України).

Надруковано у друкарні ТОВ «ТРІАДА-ПАК»
м. Харків, пров. Сімферопольський, 6. Тел. +38(057)703-12-21
www.triada-pack.com, email: sale@triada.kharkov.ua
ISO 9001:2015 № UA228351, FAMO TRIADA LLC (065445)