Збірник задач Всеукраїнських учнівських Інтернет-олімпіад з фізики та «Фізичного марафону» 2020-2025

Навчально-методичний посібник

За редакцією Пашка М. І. та Олійника А. О.

Київ

ФОП Вольф І.Є.

2026

УДК 53(076)

З-41

Авторський колектив:

Пашко М. І., Орлянський О. Ю., Гельфгат І. М., Олійник А. О., Шевчук О.Г., Мєшков О. Ю., Триліс О. В., Овсянніков О.А., Сапсай В. Ю., Микуленко О. І., Рідкокаша І. П., Майзеліс З. О., Ткачов О. М., Засєдка Л. М., Югай М. Е, Ненашев І Ю., Меланіч Г. А, Катц А. М., Абдулханов А. М., Кельнік О. І., Прасолов О. К., Дмитрук І. М., Березовський А. М., Григор'єв С. Б, Горєв В. М., Даценко І. П., Карасик В. Д., Маслечко А. М.

Рецензенти:

Ушкац Михайло Вікторович - завідуючий кафедри Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова, м. Миколаїв, професор, доктор фізико-математичних наук.

Пашко Іван Михайлович - Заслужений учитель України, вчитель фізики Херсонського фізико-технічного ліцею

ISBN 978-617-8031-21-3

З-41 Збірник задач Всеукріїнських учнівських Інтернет-олімпіад з фізики та «Фізичного марафону» : 2020-2025 : навч.-метод. посіб. / Пашко М. І., Орлянський О. Ю., Гельфгат І. М. та ін.; за ред. Пашка М. І. та Олійника А.О., Київ: ФОП Вольф І.Є. 2026 – 574 с.

Запропонований збірник містить понад 350 оригінальних авторських фізичних задач, створених колективом відомих українських вчителів за роки карантину та воєнного часу. Ці завдання були запропоновані школярам на Всеукраїнських учнівських Інтернет-олімпіадах з фізики та Відкритому всеукраїнському фізичному марафоні у 2020-2025 рр.

Усі задачі супроводжуються коментарями, розв'язками, рисунками та відповідями, що робить цей збірник максимально корисним не тільки для учнів, які готуються до участі в олімпіадах з фізики всіх рівнів, а й для вчителів, які готують школярів до інтелектуальних фізичних змагань та працюють у журі олімпіад.

УДК 53(076)

ISBN 978-617-8031-21-3

Книга видана за підтримки

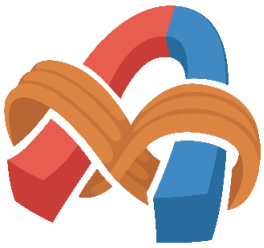
- Благодійного фонду "Razom for Ukraine"
- Громадської організації "Асоціація підтримки та розвитку української природничо-математичної освіти, науки і техніки "МАГНЕТ"
- Всеукраїнської відкритої безкоштовної онлайн-школи з фізики: OnlinePhysicsSchool





RAZOM

Together We Are Ukraine



МАГНЕТ

Вступ…….5

Теоретичні завдання Інтернет-олімпіади……..8

9 клас……..9

10 клас……..39

11 клас……..76

Експериментальні завдання Інтернет-олімпіади……112

Відкритий всеукраїнський фізичний марафон 2021 рік……120

8 клас……..121

9 клас……..132

10 клас……140

11 клас……148

Розв'язки…….158

Розв'язки теоретичних завдань Інтернет-олімпіади 9 клас…….159

Розв'язки теоретичних завдань Інтернет-олімпіади 10 клас……250

Розв'язки теоретичних завдань Інтернет-олімпіади 11 клас……369

Розв'язки експериментальних завдань Інтернет-олімпіади…….493

Розв'язки завдань Фізичного марафону 8 клас……509

Розв'язки завдань Фізичного марафону 9 клас……527

Розв'язки завдань Фізичного марафону 10 клас……..535

Розв'язки завдань Фізичного марафону 11 клас……..553

Переможці Інтернет-олімпіади……567

Вступ

Шановні друзі!

Перед вами – не просто збірник задач з розв'язками, а результат синергії та тривалої спільної праці потужного колективу українських авторів: науковців, викладачів та вчителів, аспірантів та інженерів, які попри всі виклики продовжують тримати інтелектуальний фронт. Усіх цих людей об'єднують справжня закоханість в фізику як науку, високий професіоналізм, великий досвід, фанатична відданість викладанню цієї науки школярам та розуміння важливості олімпіадного фізичного руху для майбутнього нашої країни. Їх досвід та віра в потенціал української молоді втілені у кожній лекції, яку вони прочитали, кожній задачі, яку створили, і кожній олімпіаді, в організацію та проведення яких вони вклали свої душу та інтелект.

2020 рік започаткував важку епоху гострої невизначеності перспектив української природничої освіти, яка і без того була на шляху глибокого занепаду. У зв'язку з карантинними обмеженнями, коли країна була змушена перейти на дистанційну форму навчання, а проведення традиційних очних змагань опинилося під реальною загрозою, ініціативу взяли на себе вчителі, які як ніхто інші завжди розуміли критичність ситуації в освіті і потенційні наслідки такого переходу.

Розвиток науково-технічного потенціалу нашої країни і її обороноздатність напряму залежить від стану фізичної освіти, зацікавленості учнів в заняттях фізикою, на які не останнім чином впливає участь в олімпіадному та турнірному русі всіх: учнів, батьків, вчителів, науковців, меценатів. Дітям притаманно змагатися, вчителям – створювати для дітей цікави проблеми, а людям взагалі – досліджувати світ навколо себе і отримувати задоволення від своїх перемог в такій інтелектуальній діяльності.

Чому ми вважаємо фізику і фізичні олімпіади критично важливими для нашої країни саме зараз? По-перше, фундаментальні знання з фізики є основою для розвитку оборонних технологій, сучасної інженерії та енергетичної незалежності. По-друге, відновлення України потребуватиме фахівців, здатних розв'язувати нестандартні задачі та впроваджувати інновації. По-третє, перемоги української молоді на міжнародних змаганнях сьогодні — це авторитет української науки на міжнародній арені завтра.

Історично в Україні існувало дві державні традиційні олімпіади: Всеукраїнська учнівська та Всеукраїнська учнівська Інтернет-олімпіади з фізики. Звісно, для підтримки змагального духу та тренування олімпійців цього замало і ентузіасти з провідних закладів освіти України з міст Вінниця, Львів, Одеса, Харків проводили протягом року додаткові цікаві фізичні (і не тільки) змагання: «Турнір Чемпіонів», «Левеня», «Регата» та інші. Карантин і війна, на жаль, майже унеможливили проведення олімпіад, позбавили як учнів, так і вчителів можливості збиратися разом, змагатися, спілкуватися, якісно вивчати фізику, мати доступ до фізичного обладнання.

У таких умовах актуальність другої по значущості всеукраїнської учнівської олімпіади – Інтернет-олімпіади зросла не аби як. За затвердженим положенням ця олімпіада завжди проводилася в два етапи з декілька турів. Перший етап був дистанційним, що дозволяло учням розв'язувати не звичайні «швидкісні» задачі, а справжні задачі-дослідження на декілька місяців. А вже фінальний тур проводився очно в форматі всеукраїнської олімпіади. Особливою родзинкою олімпіади, було те, що вона виступала справжнім трампліном для учнів, які з якихось причин не змогли потрапити на традиційну олімпіаду, перемогти на ній і потрапити в команду області на всеукраїнський етап. Переможці «інтернетки» запрошувалися на фінальний етап

автоматично за наказом МОН. Але і її проведення було під великим питанням. Бажання ж дітей займатися фізикою і змагатися не зникло і потребувало реалізації.

Команда вчителів **Херсонського фізико-технічного ліцею** разом із відданими спільній справі колегами з Харкова та Дніпра, з метою не дати згаснути олімпіадному руху об'єднала зусилля і взяла на себе ініціативу організації та проведення Всеукраїнської учнівської інтернет-олімпіади з фізики, спочатку на базі Херсонського фізико-технічного ліцею, а з початком повномасштабної військової агресії — та окупації Херсону, на базі Українського фізико-математичного ліцею Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Усвідомлюючи важливість підтримки обдарованих дітей та вчителів-практиків, організатори створили унікальний простір для інтелектуальних змагань з:

- цілком авторськими задачами українських авторів, до яких постійно залучалися молоді вчителі та науковці з олімпіадним минулим;
- програмним середовищем, що забезпечує шифрування, зручність перевірки, зворотній зв'язок та офіційним оголошенням результатів, матеріалів олімпіади;
- цілком безкоштовну участь для всіх учасників та керівників команд як у заочному, так і в очному етапах;
- потужний призовий фонд для переможців;
- проведення фінальної частини у форматі потужного кількаденного дійства з лекторієм, культурною програмою, безкоштовним проживанням та харчуванням;
- проведення експериментального туру, що дало можливість учням нарешті користуватися справжнім фізичним обладнанням.

Реалізація такого масштабного проєкту стала можливою завдяки щирій підтримці небайдужих людей. Висловлюємо глибоку вдячність **Благодійному фонду «Разом для України» (Razom for Ukraine)** та **Громадській організації «Магнет»**. Ваша фінансова та організаційна підтримка олімпіади, а також повне фінансування видання цієї книги – це неоціненний внесок у розвиток людського капіталу України та її майбутню технологічну міць.

Те, що проєкт був насправді масштабним, підтвердила неймовірна велика кількість учнів (приблизно півтори тисячі учасників), які взяли участь в інтернет-олімпіадах за ці роки, а також у ще одному змаганні, яке організували Фізико-математична гімназія №17 м. Вінниці, Харківський фізико-математичний науковий ліцей №27, Дніпровській ліцей інформаційних технологій, Херсонський фізико-технічний ліцей, які взяли на себе проведення змагання по паралелям 8-11 класів відповідно – у «Відкритому всеукраїнському фізичному марафоні».

За ці роки співпраця нашого колективу авторів переросла межі олімпіад та турнірів. Для підтримки українських учнів, розпорошених війною по всьому світу, було створено відкриту безкоштовну школу **«OnlinePhysicsSchool»**. Цей проєкт вже майже чотири роки доводить свою ефективність, допомагаючи сотням дітей здобувати якісну фізичну освіту незалежно від їхнього місця перебування. Майже 4 роки поспіль ми готуємо національні збірні України до успішного виступу на міжнародних змаганнях з фізики (IPhO, EPhO, EOES, IJSO), залучені в повному обсязі до підготовки та проведення всеукраїнської олімпіади з фізики, організації та проведення відбіркових та тренувальних зборів.

Звісно, за цей час у нашої команди накопичилася велика кількість цікавинок для допитливого розуму юних українських фізиків і їх вчителів, і ми з задоволенням хотіли б поділитися ними. Ось саме зараз наша команда виступила з ініціативою поширити наші спільні напрацювання за ці п'ять важких для всієї країни років створенням і розповсюдженням серед усіх зацікавлених цієї книги, присвяченої розбору завдань описаних вище Всеукраїнських учнівських інтернет-олімпіад з фізики та змагання «Відкритому всеукраїнському фізичному марафоні». Це буде перша, але, сподіваємося, не остання наша книга, які є і будуть цілком авторським

продуктом українських вчителів-фізиків, тренерів національної збірної України, членів журі фізичних олімпіад всіх рівнів.

У тексті збірника вказані автори кожної задачі. В ці задачі вони вклали свою душу та інтелект, і сподіваємося, що ця збірка допоможе вам відточити майстерність розв'язання задач, навчить вас бачити фізичні моделі там, де інші бачать хаос, і знаходити рішення там, де інші здаються. Багато завдань базуються на аналізі реальних явищ і процесів, вчать нестандартним методам розв'язання та дослідження. Упевнені, що матеріали збірки допоможуть вам як почати свій шлях в олімпіадній фізиці, так і підготуватися до змагань найвищого рівня.

Фізика – це сила, якою ми відбудуємо нашу державу. Бажаємо кожному читачеві невичерпної цікавості до пізнання світу та впевненості у власних силах! Нехай невеликі перемоги кожного з вас наблизять перемогу нашої України!

До зустрічі на сторінках наших книжок і олімпіад!

Теоретичні завдання Інтернет-олімпіади

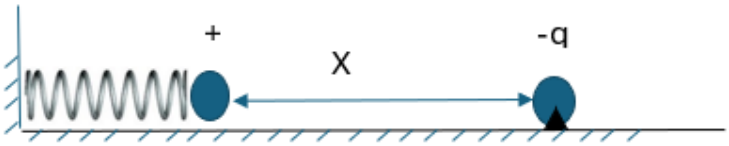
9 клас

2020-2021 роки

І заочний тур

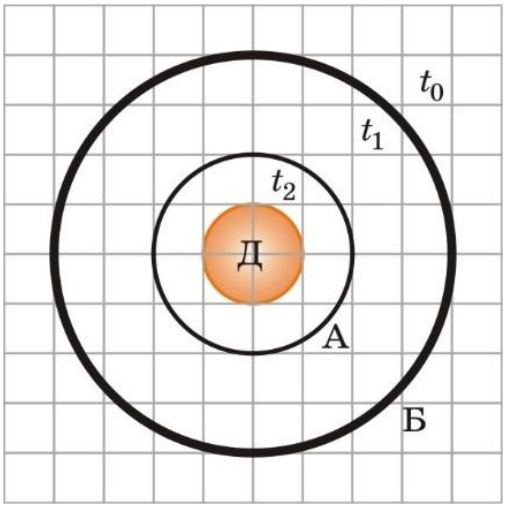
(1) «**Вигадай сам».** У вашому розпорядженні є чотири однакових резистори опором R=1 кОм кожен, резистор опором r=1 Ом, ідеальні з'єднувальні дроти та гальванометр опором Rg=0,1 Ом зі шкалою, розрахованою на максимальний струм 5 мА. Запропонуйте таку схему з'єднання цього обладнання, яка, на ваш погляд, може дозволити виміряти максимальну за значенням незмінну напругу на джерелі. ***Наведіть схему, її пояснення та розрахунок значення*** цієї напруги.

(2) «Усе віддам за рівновагу!» На діелектричній горизонтальній поверхні розташовані дві однакові дуже маленькі кульки з зарядами q_1=+1,2 мкКл та q_2= -1,2 мкКл. Кульки утримують у стані спокою, при цьому позитивно заряджена кулька приєднана до вертикальної стіни непровідною недеформованою пружиною жорсткістю 1,8 Н/м, а негативно заряджена кулька жорстко з'єднана з підлогою (див. рис). Кульку, що з'єднана з пружиною, відпускають. ***Знайти збільшення внутрішньої енергії*** системи за час встановлення стану рівноваги між кульками, якщо довжина пружини в недеформованому стані 2 см, а відстань від негативно зарядженої кульки до стіни 40 см. Силами опору повітря, тертям між поверхнями, прогином пружини знехтувати.

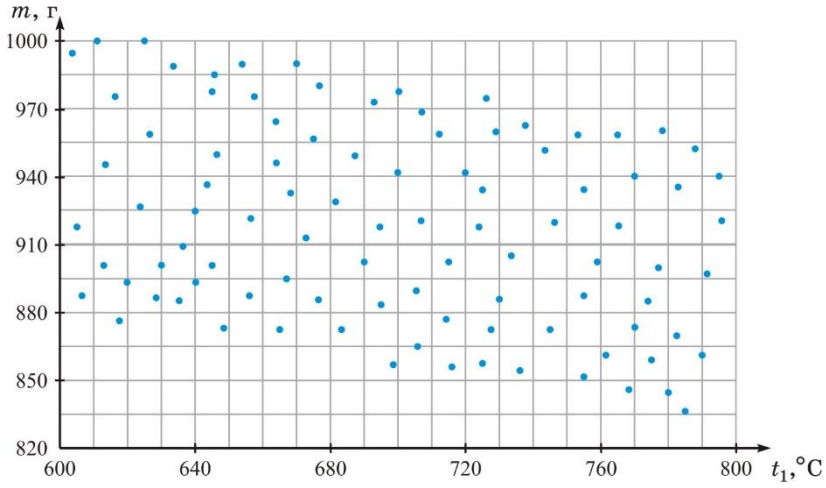


(3) «**Естафета».** Команда з двох скейтбордистів після виконання трюків у першій частині змагань втратила один скейтборд. Допоможіть команді показати найкращий результат у другій частині, де трасу довжиною l треба подолати за найменший час хоч пішки, хоч на скейтборді. На фініші відмічають прибуття кожного учасника, але час команди визначається за часом останнього, хто перетнув фінішну лінію. ***Запропонуйте оптимальну логістику*** руху й ***розрахуйте час*** команди. Швидкість спортсмена на скейборді v, без скейтборду u ($u<v$).

(4) «**Кулька в кульках».** Юні винахідники побудували джерело тепла, що працює за рахунок дуже темної енергії. Це джерело має форму кулі та відносно невелику потужність. Його оточують дві тонкі концентричні сферичні оболонки А і Б з однакового матеріалу. Товщина оболонки А удвічі менша, ніж оболонки Б. Простір між оболонками заповнений речовиною з дуже високою теплопровідністю. Відносні розміри джерела Д й оболонок показані на рисунку. Установка працює в стаціонарному режимі, температура навколишнього середовища $t_0 = 20$ °C, усередині оболонки А температура речовини $t_2 = 170$ °C. ***Визначте температуру*** речовини t_1 між оболонками А і Б, вважаючи її всюди однаковою. Втратами енергії на випромінення знехтувати.



(5) «Вдаримо паром по карантину!» Експериментатори, яким протягом карантину набридла бездіяльність, час від часу відвідують лабораторію та повторюють експеримент, на якому зупинилася їхня робота: нагрівають у спеціальній печі металеву гирю масою $m_1 = 1{,}5$ кг до певної високої температури t_1 (цю температуру можна вибирати різною в різних дослідах) та занурюють цю гирю у воду масою $m_2 = 1$ кг. Вода перебуває у відкритій зверху посудині за нормального атмосферного тиску. Після встановлення теплової рівноваги вимірюють масу m води, що залишилася в посудині. Умови експерименту такі, що вода не виливається з посудини, єдиною причиною втрат тепла є пароутворення виключно під час кипіння. Початкова температура води t_2 в усіх дослідах була однаковою. «Дуже акуратні» експериментатори записали цю температуру на клаптику паперу, а потім загубили цей клаптик, залишивши тільки рисунок з результатами дослідів, що відповідають точкам у координатах t_1, m . ***Поясніть отримані результати***. ***Визначте питому теплоємність*** c_1 металу гирі та ***початкову температуру*** t_2 води. Питома теплоємність води $c_2 = 4200$ $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$, її питому теплоту пароутворення вважайте рівною $L = 2{,}3$ $\frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$.



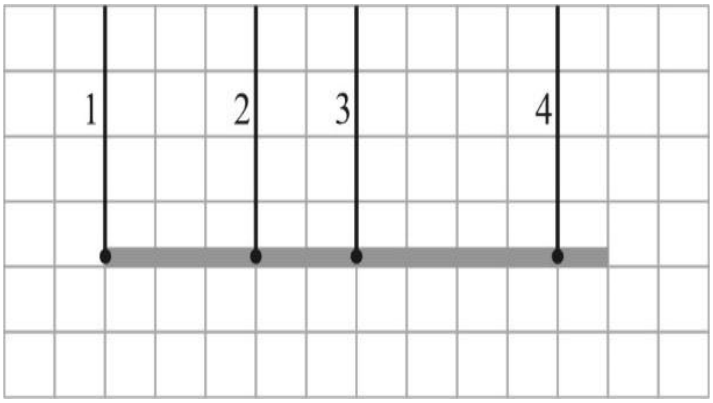
Задачі запропонували:

1, 2 Пашко М.І., 3 Орлянський О.Ю., 4, 5 Гельфгат І.М.

II заочний тур

(6) «Спробуй бути жорстким, невагомим та горизонтальним!».

Невагомий горизонтальний стрижень підвішений до стелі на чотирьох однакових вертикальних дротах (див. рисунок). Коли до стрижня підвісили вантаж, сила натягу дроту 1 виявилася рівною 10 Н, а дроту 3 — 35 Н. Визначте точку підвісу вантажу та масу цього вантажу. Видовження дротів малі, стрижень уважайте абсолютно жорстким, $g = 10$ м/с^2.



(7) «Ротаційний фонтан 1». На фото 1,2 зображено ротаційний фонтан в Умані на набережній. Шість патрубків фонтану однаково відхилені в радіальному напрямку і утворюють деякий кут α з горизонтом.

А) Поясніть, для чого уманському фонтану два додаткові патрубки внизу, на які вказують стрілки на другому фото.

Б) На фото 3,4 можна побачити ротаційні фонтани на п’ять патрубків. Розгляньте загальний випадок фонтану на *n* патрубків і знайдіть кількість візуальних перетинів струменів води, що рухаються вгору. Знехтуйте відстанню від патрубків до осі обертання і вважайте, що за час підйому води (від патрубків до найвищої точки) фонтан робить *m* повних обертів.



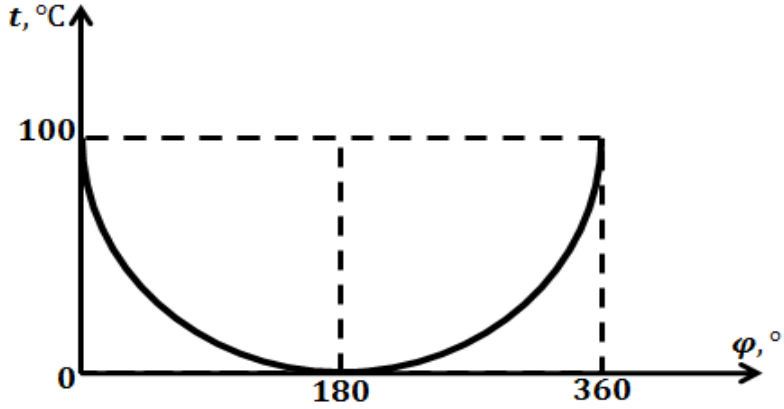


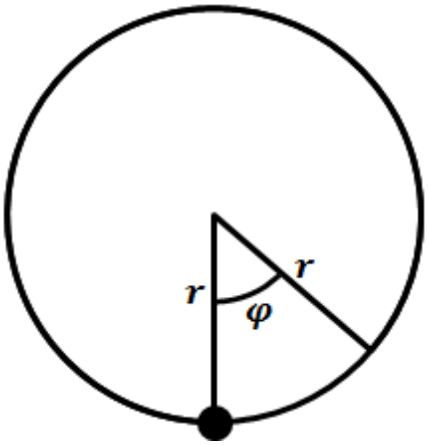




(8) «Екстремальні гойдалки». Широка горизонтальна дошка довжиною L і масою M використовується як гойдалка. На одному краю дошки стоїть дівчинка масою m_1 з собакою масою m_2, а на іншому краю дошки стоїть її тато масою m_3. У початковий момент гойдалка знаходиться в рівновазі. Дівчинка починає рухатись до тата з постійною швидкістю v_1, а собака – бігти до тата з постійною швидкістю v_2 ($v_2 > v_1$). Добігши до тата, собака миттєво розвертається, і біжить до дівчинки з тією ж швидкістю, а, добігши до дівчинки, розвертається і знову біжить до тата – і так до самої зустрічі тата і дівчинки. **Як** і **з якою швидкістю** повинен рухатись тато, щоб гойдалка увесь час залишалась горизонтальною і нерухомою? **Яку відстань пройде кожен** із персонажів до моменту їх зустрічі? Вібраціями та малими коливаннями та зсувами гойдалки, які виникають під час руху персонажів, знехтувати.

(9) «Омметр-мандрівник». Дротяне металеве кільце почали нагрівати, унаслідок чого у ньому встановився такий розподіл температури, як показано на рисунку. За допомогою ідеального омметра, під'єднаного до довільних точок кільця ковзними контактами, вимірюють його опір між різними точками. Знайти, яке **максимальне значення показів омметра** може бути отримане при цьому? Питомий опір матеріалу при 0^0C дорівнює 10^{-6} Ом*м, середній радіус кільця та площу поперечного перерізу можна вважати незмінними при нагріванні та рівними 42,5см та 1мм^2 відповідно. Температурний коефіцієнт опору матеріалу можна вважати сталим і рівним $2{,}33*10^{-2}$ $1/^0$C.





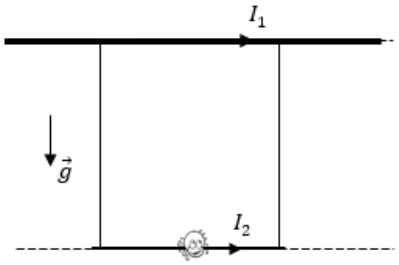
Задачі запропонували:

6 Гельфгат І.М., 7 Орлянський О.Ю., 8 Мєшков О.Ю., 9 Пашко М.І.

Фінал

(10) «Павук на павутинці». Павук у безвітряну погоду відвідує свого друга на сусідньому дереві. Між двома гілками дерев він протягнув павутинку. Кінці павутинки закріплені на однаковій висоті, а її довжина 8 м удвічі перевищує відстань між гілками. Павук перебирає павутинку лапами зі швидкістю 1 см/с. Побудуйте залежність модуля переміщення павука (відстані від павука до місця його старту) від часу. Знайдіть найбільшу швидкість павука відносно дерев під час руху. Довжина павутинки 8 м. Масою павутинки у порівнянні з масою павука знехтуйте. Павутинку вважайте нерозтяжною.

(11) «Павук на дротинці». Павук сидить на горизонтальній дротинці, що підвішена до горизонтального нескінченого дроту двома однаковими вертикальними діелектричними павутинками жорсткістю $\boldsymbol{k}$ кожна і нехтовно малою довжиною у нерозтягнутому стані. По дротах йдуть однаково спрямовані струми I_1 та I_2 (див.рис.). Визначити відстань між дротами у положенні рівноваги, якщо відомо, що верхній дріт створює навколо себе магнітне поле, значення вектору індукції якого залежить від відстані $\boldsymbol{x}$ від дроту за законом: $B= 16*10^{-4}/\boldsymbol{x}$ (Тл). Довжина дротинки 1м, струм $I_2 = 10$А, маса дротинки з павуком 100гр, жорсткість кожної павутинки 5Н/м, $g=10$м/с^2.



(12) «Охолодження випаровуванням». Для охолодження речовини до дуже низьких температур на останньому етапі часто використовують випаровування цієї ж самої речовини.

T, K	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
C, × 10^3 Дж/ (кг ∗ К)	0.20	0.38	0.54	0.70	0.84	0.97	1.06	1.13	1.15	1.11	1.00
L,× 10^3Дж/кг	30.00	29.56	29.00	28.33	27.44	26.30	24.90	23.16	21.00	18.30	15.00

З метою дослідження процесів у надхолодних тілах знадобилось охолодити певну рідину масою 1 г з 4 К до 3 К. У таблиці наведені значення питомої теплоємності та питомої теплоти

випаровування цієї рідини для потрібного нам інтервалу температур. Визначте, яку **масу рідини** треба випарувати для необхідного охолодження?

(13) «Плавлення охолодженням». Експериментатор вирішив розплавити тонкий циліндричний дріт опором 40 Ом, пропускаючи по ньому струм від джерела сталої напруги 300 В. «Для зручності», він розрізав дріт на 100 однакових секцій та під'єднав до джерела послідовно. Але, на жаль, досягти температури плавлення 750 ºС не вдалося, дріт нагрівся тільки до 500 ºС. Тоді експериментатор почав за допомогою льоду охолоджувати частину секцій дроту до 0 ºС та підтримувати їх температуру на цьому рівні. Чи зможе він таким чином досягнути початку плавлення дроту і якщо так, то яку мінімальну кількість секцій потрібно охолодити для цього? Вважати, що процес теплопередачі йде тільки через бічну поверхню дроту, потужність теплових втрат прямо пропорційна різниці температур між дротом і навколишнім середовищем, температура в кімнаті незмінна і дорівнює 0 ºС, температурний коефіцієнт опору 0.001 1/ºС. Тепловим розширенням дроту знехтувати.

Задачі запропонували:

10 Орлянський О.Ю., 11, 13 Пашко М.І., 12 Олійник А.О.

2021-2022 роки

І заочний тур

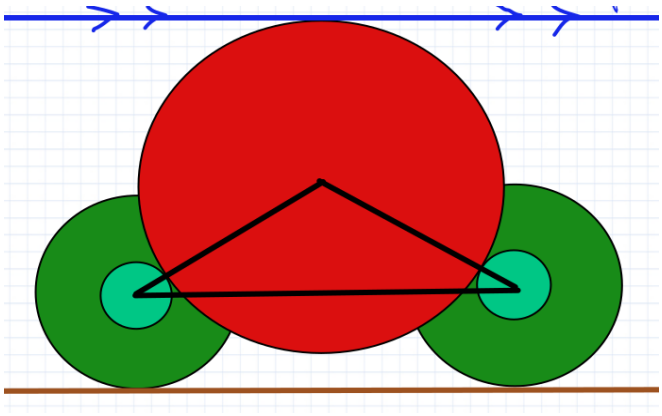
(14) «Корисне Кавове Дослідження» Наприкінці XX сторіччя в Україні вперше з'явилася відносно недорога розчинна кава у металевих банках однакової форми хоча й різного об'єму. Автор задачі 13 листопада 1999 року на ринку спеціально занотував, що стограмова банка NESCAFE коштувала 8 грн. 40 коп, а двохсот п'ятдесяти грамова – 19 грн. 10 коп.

А) **Визначте вартість** п'ятидесятиграмової банки такої кави. Вважати, що вартість NESCAFE складається з вартості кавового порошку і вартості металевої оболонки. Останні виготовляються для всіх банок з однакової жерсті.

Б) Введіть самостійно поняття ККД банки кави і взагалі будь-яких консервів і **визначте ККД** стограмової банки NESCAFE для нашого випадку. **Як залежить ККД** від відношення діаметру банки до висоти?

(15) «Сніданок туриста». На першій ділянці сходження на вершину, де ще була хоч якась дорога, туристичну групу підвезли з середньою швидкістю 12 км/год. Далі туристи піднімалися стежкою зі швидкістю 3 км/год. Потім схил став крутішим, і швидкість людей зменшилась. Після коротенького відпочинку на вершині (треба було встигнути назад до заходу сонця) туристи рушили тим самим маршрутом назад. Крутою ділянкою вони спускалися зі швидкістю 6 км/год (на щастя, ніхто не травмувався), потім стежкою зі швидкістю 4 км/год, і далі, уже втомлені, йшли кам'янистою дорогою зі швидкістю 2 км/год. Знайдіть**: А) середню швидкість** підйому на вершину крутою ділянкою; **Б) середню швидкість** туристичної групи на всьому шляху. Вважайте, що однозначні відповіді на ці питання задачі існують.

(16) «Швидше за вітер». Ось цікава історія про механічний (без двигуна, без електрики) вітромобіль, який, на думку автора, може стабільно рухатися швидше вітру – під дією вітру (подивіться відео Risking My Life To Settle A Physics Debate з каналу Veritasium. Чи справді можливо таке? Щоб краще розібратися в цьому питанні розглянемо візок зроблений з трьох коліщаток (двох зелених і червоного), центри яких скріплені між собою (чорним трикутником). Коричнева лінія внизу зображає землю, синя вгорі – вітер. Коліщатка можуть обертатися навколо своїх осей, але в точках дотику (червоного до «вітру», червоного до зелених, зелених до землі) проковзування нема, можна уявляти, що це шестерні. Вітер рухається з певною швидкістю вправо.



А) **Швидше чи повільніше** за вітер і **в якому напрямку** буде рухатися візок?

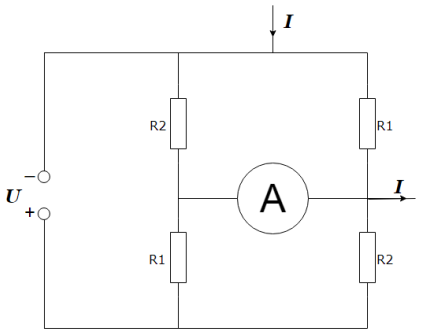
Б) Чи є в цій задачі **аналогія** з вітромобілем з відео?

В) Якою буде відповідь на основне питання – **чи можливий стабільний рух** вітромобіля швидше вітру? Якщо так, то у **скільки разів** може бути перевищена швидкість вітру? Радіуси червоного $R_ч$, темнозеленого $R_з$ та світлозеленого $r_з$ кіл вважати відомими.

(17) «У куті». У вершинах прямокутного трикутника зі сторонами 30 см, 40 см і 50 см розміщені три точкові електричні заряди: позитивний 1 нКл у прямому куті і два негативних заряди в гострих кутах, такі, що загальний заряд всієї системи дорівнює нулю.

А) Якою може бути **величина сили**, що діє на позитивний заряд?
Б) **Побудуйте** “годограф” сили, тобто лінію, яку описуватиме з прямого кута вектор сили, що діє на заряд 1 нКл, при зміні співвідношення зарядів у гострих кутах (можна за допомогою математичного пакету або написаної програми).

(18) «Входить та відходить».
На рисунку зображена частина електричної схеми, до неї підходить струм I = 5А і відходить такий самий струм. Резистори мають опори: R_1 = 1 Ом, R_2 = 2 Ом.
Напруга джерела U = 10 В.
А) Яке значення **сили струму** показує амперметр?
Б) Яким буде значення **сили струму**, якщо змінити полярність джерела на протилежну?

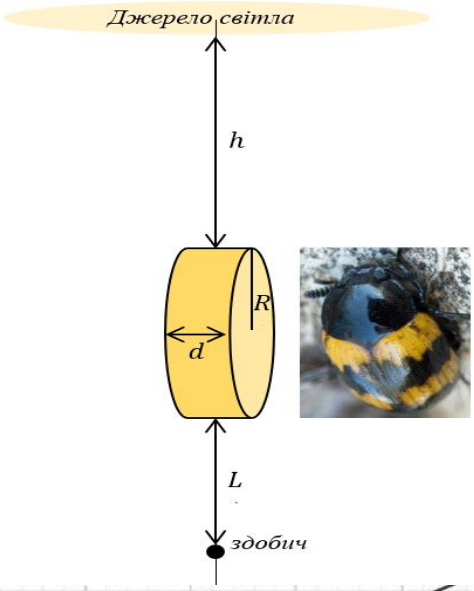


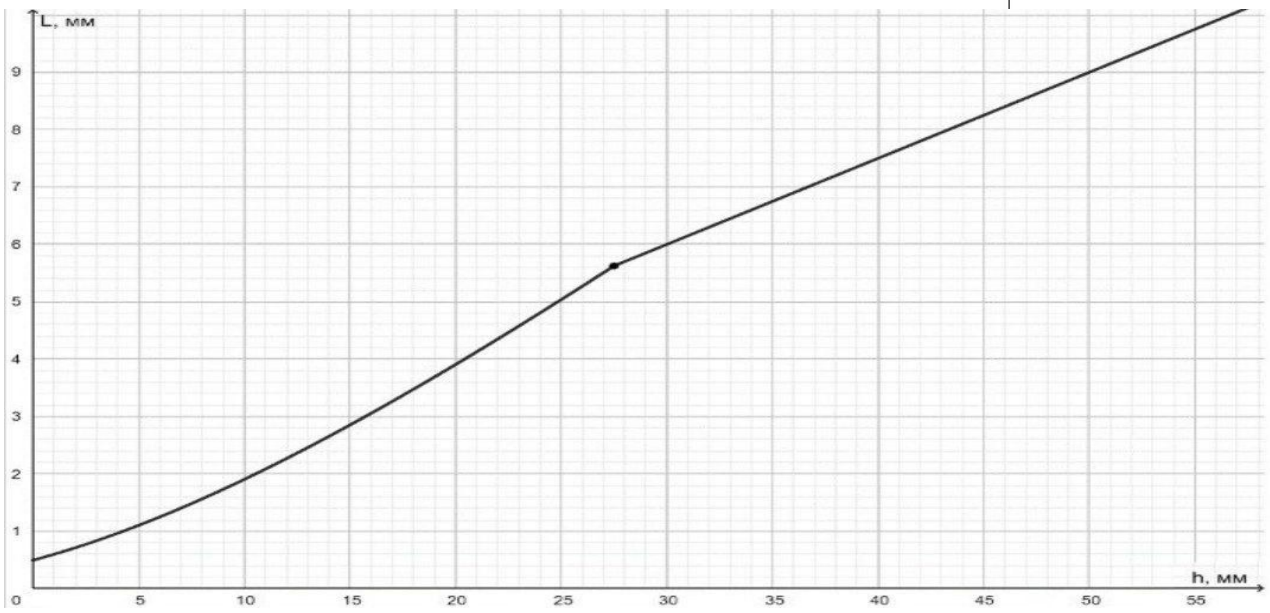
Задачі запропонували:

14,15,17 Орлянський О.Ю., 16 Триліс О.В., 18 Овсянніков О.А.

II заочний тур

(19) «Тримай свою здобич у тіні!» Жук (наприклад Diaperis boleti) разом зі своєю здобиччю ховався від дощу під центром плоского круглого вимкненого джерела світла. Несподівано джерело увімкнули, жук злякався і, знаючи, що світло погано впливає на його їжу, почав спускатися вертикально вниз по тонкій та міцній павутинці (дивись рисунок). Будемо вважати, що жук має форму диску, з радіусом R, і товщиною d.
Під час спуску жук постійно утримує свою здобич у області власної повної геометричній тіні. На графіку наведена залежність максимального вертикального розміру цієї області L від відстані h між жуком та лампою (L та h відраховуються від нижньої та верхньої точок





поверхні тіла жука відповідно). Нехтуючи розмірами здобичі, А) **пояснити цей графік**, та визначити: Б) **радіус жука R**; В) **товщину жука d; Г) діаметр джерела світла D.** Інших джерел світла, окрім лампи немає.

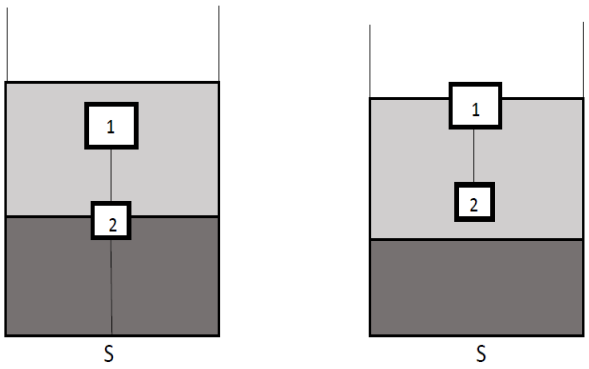
(20) «Дрон під контролем». Оператор біостанції у безвітряну погоду запустив дрон і провів його маршрутом над важливими місцями біосферного заповідника. Через дві години спостережень дрон приземлився у місці старту біля біостанції. Дрон записав послідовність і час дії всіх команд, щоб потім використовувати в автономному режимі. Наступного дня стажер оператора запустив дрон в автономному режимі з вимкненим GPS, не помітивши, що дує північний вітерець зі швидкістю 1 м/с. Штучний інтелект дрона вирішив повторити послідовність і час дії всіх команд, записаних напередодні. Швидкість вітру рівномірно збільшувалась, і через 2 години, коли дрон мав повернутися, досягла вже 4 м/с. Допоможіть стажеру розшукати дрон, який приземлився після 2 годин польоту. В **обгрунтованій** відповіді вкажіть **напрям і відстань** до дрону.

(21) «Раціоналізаторське рішення». Космічний апарат, що має форму кулі радіусом R_0, має здійснити міжзоряний переліт. Оболонка апарату металева, температуру поверхні можна вважати всюди однаковою. Для нормальної роботи всіх систем ця температура має дорівнювати T_0. Поверхню вважайте абсолютно чорною, тобто з одиниці її площі випромінюється потужність σT_0^4, де σ —стала Стефана — Больцмана. Інтенсивність реліктового випромінювання у міжзоряному просторі вважайте малою. Конструктори розглядають різні способи зменшити потрібну потужність радіоізотопного джерела тепла всередині апарату.

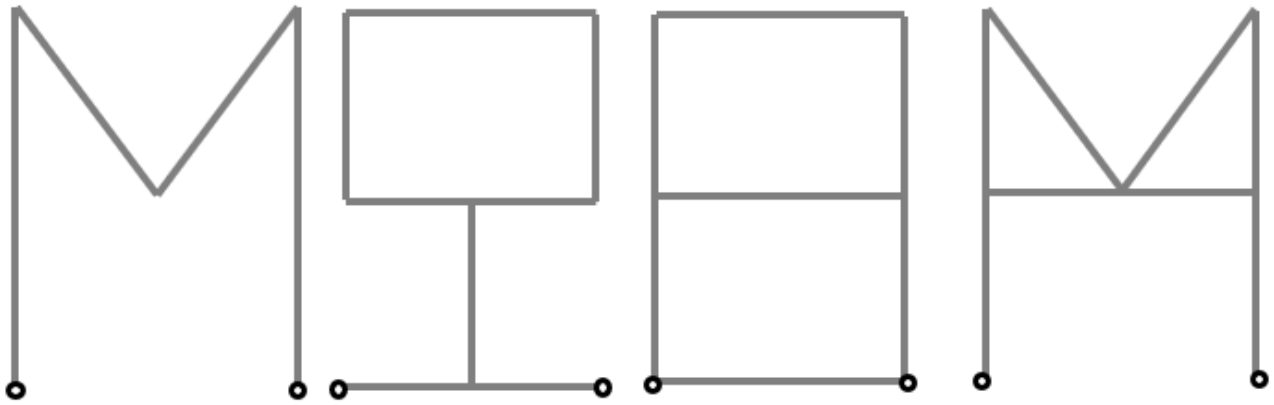
а) **У скільки разів зменшиться** потрібна **потужність**, якщо оточити апарат дуже тоненькою концентричною сферичною металевою оболонкою з чорною поверхнею (зовнішньою та внутрішньою), радіус якої $R_1 > R_0$? Якщо додати ще одну таку оболонку, радіус якої $R_2 > R_1$? Який **максимальний виграш у потужності** можуть дати дві оболонки? Уважайте теплопровідність оболонки дуже великою.

б) Інша група конструкторів розглядає виключно варіант з однією оболонкою. Вони провели експеримент і переконалися, що заміна матеріалу оболонки на такий, що має дуже низьку теплопровідність, дозволяє зменшити потужність джерела тепла в 2 рази. **У скільки разів треба збільшити** товщину h оболонки, щоб зменшити цю потужність ще вдвічі? Уважайте, що $h \ll R_0$.

(22) «Подвійний поплавець». У посудині з площею дна S знаходиться ртуть та вода. В посудині знаходяться два кубики (не обов'язково однакового об'єму), які зв'язані між собою ниткою. Якщо нижний кубик прикріпити то дна посудини ще однією ниткою таким чином, що він розташується на межі розділу ртуті та води, то сила натягу цієї нитки дорівнюватиме T. При цьому верхній кубик буде повністю занурений у воду. Якщо нитку, що кріпить кубики до дна, перерізати, то нижній кубик буде повністю занурений у воду, а верхній плаватиме на поверхні води частково занурений у неї. **Знайти зміну товщини шару води** після перерізання нитки, якщо зміна товщини шару ртуті дорівнює Δh_2. Вважати, що густини кубиків ρ_1 та ρ_2 й густини ртуті $\rho_р$ та води $\rho_в$ відомі.



(23) «Той, хто керує Лабіринтом». Для відбору учасників очного туру Інтернет-олімпіади організатори помістили їх у Лабіринт. У кожного учасника на стіні сформовано магічний шифр із чотирьох символів із провідника однакового питомого опору та перерізу. Ширина усіх символів є однаковою, висота також. (Горизонтальні провідники, якщо вони є, розміщені точнісінько на половині висоти символів). Символи мають сформувати деяку послідовність, яка підпорядкована певній тенденції та дозволяє звільнитися з лабіринту. Під кожним із символів (окрім четвертого) записано величину його опору, якщо підключити джерело струму до крайніх нижніх кінців кожного символу.



1183,00 **273,00** **183,00**

Учасники знають, що повний варіант шифру містить 9 послідовних символів, і кожен наступний символ сам собою з'являтиметься на стіні рівно за тиждень. У момент, коли на стіні з'явиться останній, 9-й символ, Лабіринт рухне, та врятуватися вже не буде можливості. Ви, звісно, можете вибігти з Лабіринту достроково, відмовившись від розв'язання задач олімпіади (ні), а можете встигнути самостійно **відгадати послідовність** та **сформувати** із достатнього запасу аналогічних провідників **5 символів, яких недостає у шифрі, визначити і записати опір кожного елементу**, і, пройшовши таким чином випробування, евакуюватись із Лабіринту. Бажаємо вам успіхів та чекаємо ваші шифри і цифри. І стережіться гріверів.

Задачі запропонували:

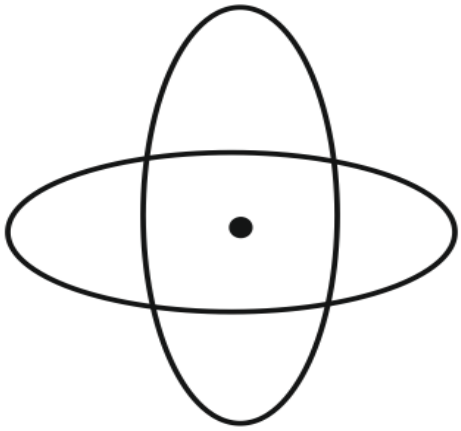
19 Пашко М.І., Богдан М.А., 20 Орлянський О.Ю., 21 Гельфгат І.М., 22 Овсянніков О.А., 23 Мєшков О.Ю.

Фінал

(24) «Перед олімпіадою не надихаєшся». У стані спокою кінь масою 500 кг у середньому робить 10 вдихів-видихів за хвилину. Оцініть скільки вдихів-видихів робить за тих самих умов карликовий кінь масою 62 кг. Вважайте, що вся енергія, яку отримують тварини під час хімічних процесів, в яких приймає участь кисень, йде на втрати у навколишнє середовище за законами теплопровідності.

(25) «Володар перстнів». Два майже однакових тонких заряджених діелектричних кільця з лінійними густинами зарядів $\lambda = \frac{10^{-3}}{2\pi}$ Кл/м сумістили центрами так, що кільця опинились у

взаємоперпендикулярних площинах. Радіуси кілець майже однакові та з великою точністю дорівнюють R=10 см. У центр системи поміщають точковий заряд $q = 10^{-6}$ Кл. Константа з закону кулона k=9·10^9 Н·м^2/Кл^2.



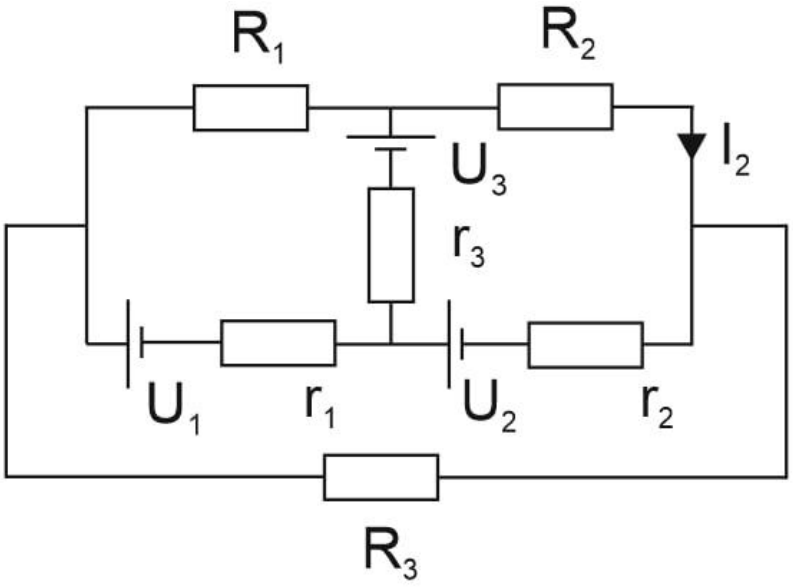
а) Якщо цей заряд змістити вздовж обертальної осі симетрії, перпендикулярної до площини одного з кілець, на x=1 мм, то, виявляється, що сила, яка в такому положенні діє на заряд, дорівнює F_a =0.45 Н. Якою буде сила F_b, що діє на цей заряд, якщо його змістити від центру на ту саму відстань уздовж осі, на якій лежать точки дотику кілець?

б) Обидва кільця розкрутили навколо їх обертальних осей симетрії. Період обертання кожного з кілець – T=$\sqrt{2} \times 10^{-6}$ с. Яка сила буде діяти на цей заряд, що знаходиться в центрі системи, якщо йому поштовхом надати швидкість V=10/ π м/с вздовж вісі, на якій лежать точки дотику кілець?

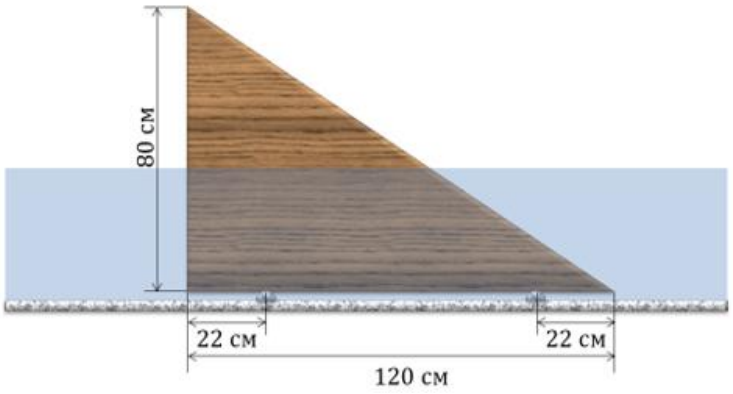
Примітка: струм, який іде по кільцевому дроту, створює в центрі кільця магнітне поле (спрямоване перпендикулярно площині кільця) з індукцією $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$, де $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\text{Н/А}^2$, I – сила струму в дроті, R – радіус кільцевого дроту.

(26) «Сяйво на підлозі». Невелике джерело світла, вмонтоване у стелю кімнати на висоті h над підлогою, рівномірно випромінює світло в усіх напрямках. Ви маєте доволі слабку збиральну лінзу з фокусною відстанню F. На якій відстані від підлоги паралельно до неї слід розташувати лінзу, щоб отримати на підлозі під лінзою максимальну освітленість? Лінзу вважати ідеальною.

(27) «Хитрі схеми». На рисунку зображена схема, в якій через резистор R_2 тече струм $I_2 = 1$ А. Як треба змінити напругу ідеальної батарейки U_2 щоб струм через R_2 став рівним нулю? Опори на схемі мають наступні номінали: $r_1 = 12$ Ом, $r_2 = 8$ Ом, $r_3 = 6$ Ом, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 4$ Ом.



(28) «Машинка-амфібія». Модель гоночної машинки у формі суцільної однорідної дерев'яної трикутної призми висотою 80 см, довжиною 120 см та шириною 40 см (як показано на рисунку) стоїть на горизонтальному дні дуже широкої ванни на двох циліндричних прикріплених до дна опорах, розмірами яких у порівнянні з габаритними розмірами машинки можна знехтувати. Машинка може вільно рухатись по них без тертя. Відстані від країв машинки до опор становлять 22 см (див. рисунок). Ванну дуже повільно починають наповнювати водою. До якої висоти необхідно наповнити ванну водою, щоб машинка почала рухатись? Густина дерева 750 кг/м^3, густина води 1000 кг/м^3, хвиль при наповненні ванни не виникає.



Задачі запропонували:

24, 25, 27 – Олійник А.О., 26 - Орлянський О.Ю., 28 - Мєшков О.Ю.

2022-2023 роки

І заочний тур

(29) «Спробуй не заплутатися». Із села Полуничне у село Паляничне дорогою, що проходить через місто, виїхав автомобіль. Поза містом його середня шляхова швидкість дорівнювала 60 км/год, а в межах міста 40 км/год. У Паляничному з'ясувалося, що середня шляхова швидкість автомобіля на всьому шляху була 50 км/год.

А) **Яка частина шляху проходила містом?**

Назад з Паляничного у Полуничне водій вирішив скористатися об'їзною дорогою замість повільного руху через місто, не зважаючи на те, що та у стільки ж разів довша за відрізок через місто, у скільки півколо довше за діаметр. Середня швидкість поза містом залишилася такою ж, як і була, 60 км/год, проте об'їзну дорогу автомобіль проїхав зі швидкістю 80 км/год.

Б) **На скільки відсотків зворотна подорож виявилася швидшою?**

В) **Яку максимальну площу** міста можуть обмежувати дорога крізь нього і частина об'їзної траси, якими рухався автомобіль? Впливом рельєфу у відповідь знехтуйте, довжина частини об'їзної траси l.

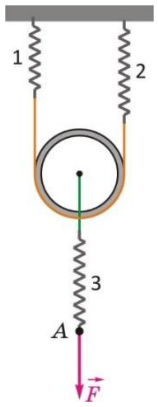
(30) «Електричний трикутник». Кінці вольфрамового дроту з'єднали і надали форму трикутника зі сторонами a, b, c. До вершин сторони a приклали напругу, і через деякий час її дріт нагрівся на 600 ºС, а дріт двох інших сторін на 400 ºС, після чого температура вже не змінювалась. Потім дослід повторили зі стороною b. Її дріт остаточно нагрівся на 1600 ºС вище за температуру навколишнього середовища, і через деякий час після цього пірометр, яким вимірювали температуру, вийшов з ладу. Розв'язати задачу для двох випадків: а) зміною опору при нагріванні нехтуємо; б) враховуємо температурний коефіцієнт опору вольфраму 0,005 град$^{-1}$. Теплопровідністю і зміною геометричних розмірів провідника знехтувати. Вважати, що теплові втрати пропорційні площі поверхні нагрітого тіла і різниці температур між ним і навколишнім середовищем.

А) Розрахуйте, якою в останньому досліді була **температура дроту сторін *a* і *c***.

Б) Знайдіть **співвідношення сторін** вольфрамового трикутника.

В) **Оцініть час** нагріву вольфрамового дроту сторони ***a*** на перші 100 ºС (для першого досліду), якщо на кожний 1 см дроту припадала напруга 10 В. Густина вольфраму 19250 кг/м^3, питомий опір $55 \cdot 10^{-9}$ Ом·м та питома теплоємність 140 Дж/(кг·^{0}С).

(31) «Крижинка у воді». В акваріум, який має форму куба з довжиною внутрішнього ребра 12 см, на шорстке дно ставлять крижину, яка має форму прямокутного паралелепіпеда 11 см × 9 см × 4 см. У геометричному центрі крижини вмерзла металева кулька масою 30 г. Потім у акваріум наливають 812 г води. Знайдіть **на скільки зміниться** рівень води у посудині, коли крижина повністю розтане. Густина льоду 0,9 г/см^3, води 1 г/см^3, металу 3 г/см^3.



(32) «Розрізана, але не менш міцна?» Невагому пружину жорсткістю k з великою кількістю витків розрізали на три частини (у загальному випадку отримали пружини різної довжини). З цих трьох пружин, невагомих нерозтяжних ниток і невагомого блока зібрали показану на рисунку систему. У точці A до неї прикладають напрямлену вниз силу. Визначте, **в яких межах може змінюватися** ефективна жорсткість цієї системи.

(33) «Пошкодження ізоляції». Двохдротову лінію протягнули на велику відстань під водою (кінці дротів виходять на сушу). Один з дротів отримав невеличке пошкодження

ізоляції на певній відстані від обох кінців, інший дріт повністю цілий. Через пошкодження ізоляції струм може витікати у навколишнє середовище. Нам відомий опір одиниці довжини дроту λ. У наявності у нас є доволі точний амперметр, великий арсенал резисторів різних відомих нам з високою точністю номіналів та джерело з відомою з певною похибкою напругою. Довжину кожного дроту L ми знаємо. З одного кінця дводротової лінії ми можемо як завгодно підключати будь-які резистори, робити заземлення, закорочувати накоротко, підключати джерело та амперметр. З іншого кінця можемо лише заземлювати, підключати резистори чи закорочувати накоротко. Тягнути якісь дроти з одного кінця дводротової лінії до іншого ми не можемо.

А) **За допомогою яких** найпростіших **дій** ми можемо визначити, який саме дріт є пошкодженим?

Б) **Придумайте** нескладний **спосіб**, за допомогою якого ми могли б виміряти відстань від одного з кінців до місця пошкодження та продемонструйте **як** за допомогою даного метода можна **обрахувати** місцезнаходження пошкодження.

В) Для знаходження місця пошкодження можна використовувати мостову схему підключення резисторів, заземлень, амперметру та джерела до дводротової лінії. Кажуть, що такий підхід дозволяє проводити особливо точні вимірювання. Покажіть **як** саме можна **використати** для даної задачі **мостову схему** та продемонструйте **як** за допомогою даного метода можна **обрахувати** місцезнаходження пошкодження.

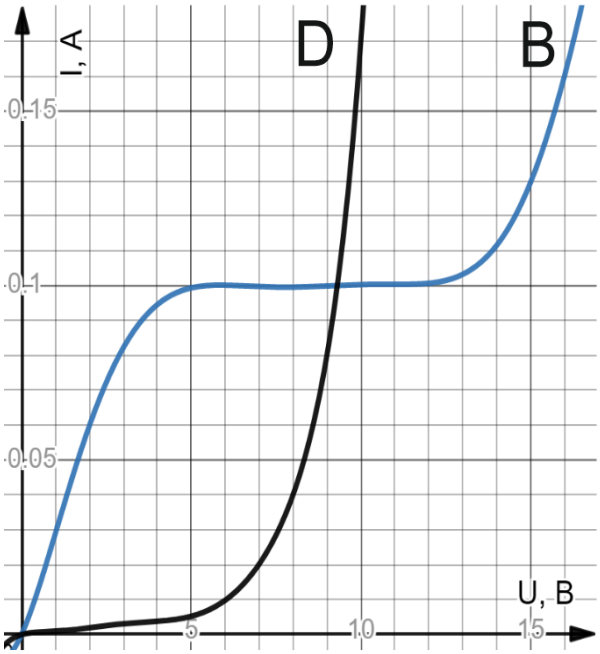
Задачі запропонували:

29, 30 Орлянський О.Ю., 31 Сапсай В.Ю., 32 Гельфгат І.М., 33 Олійник А.О.

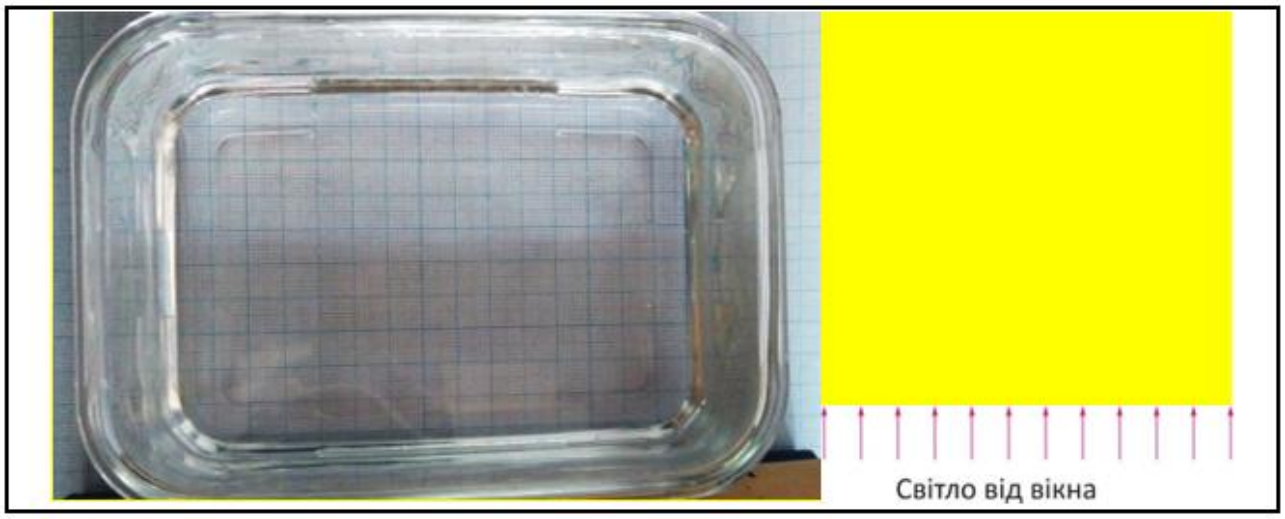
II заочний тур

(34) «Героям – слава!» Ворожа гіперзвукова ракета була запущена з точки, відстань від якої до українського військового аеродрому становить 510 км, а відстань від цього аеродрому до лінії руху ракети 240 км. **У якому напрямку** до лінії руху ракети слід вийти на курс перехоплення українському винищувачу, щоб **якнайшвидше** перехопити ракету і знищити? Вважайте, що час, необхідний на підйом літака з аеродрому і вихід на курс, займає 2 хвилини. Середня швидкість літака $v_{\text{В}}$ удвічі менша за швидкість ракети $\boldsymbol{v}_{\text{р}}$ =4500 км/год, яка рухається прямолінійно.
Розгляньте два випадки. Для знищення цілі: 1) літак має безпосередньо наблизитись до неї; 2) літак має наблизитись до цілі на відстань 60 км, і запустити ракету-перехоплювач класу повітря-повітря, яка швидко дожене і знищить ціль.

(35) «Стабілізація струму» Від нестабільного джерела потрібно отримати сталий струм через резистор $\boldsymbol{R}$=100 Ом. Для цього резистор підключають до цього джерела послідовно із діодом D та деяким елементом B. Вольт-амперні характеристики приладів D та B показані на графіку. На джерелі написано, що воно видає напругу $\boldsymbol{U_0}$ =28 В, проте на практиці джерело забезпечує цю напругу з певною похибкою (максимальне значення напруги, яке випадково може дати джерело, це $\boldsymbol{U_0 + \Delta U}$, а мінімальне $\boldsymbol{U_0 - \Delta U}$). Знайдіть максимальне значення похибки напруги джерела $\boldsymbol{\Delta U}$, за якої струм через резистор буде майже незмінним.



(36) «Кювета контрастів». Наведену тут фотографію зроблено в «темному» кутку кімнати вдень, у похмуру погоду. Світло надходило тільки від вікна. Прямокутна скляна кювета, доверху заповнена водою, стояла на столі, вкритому аркушем міліметрового паперу. Ви можете знехтувати товщиною стінок кювети та вважати ці стінки вертикальними. Стопка книг на столі не дозволяє світлу потрапити в кювету через «нижню» на фотографії бокову стінку (поверхня верхньої книги знаходиться на одному рівні з поверхнею води).

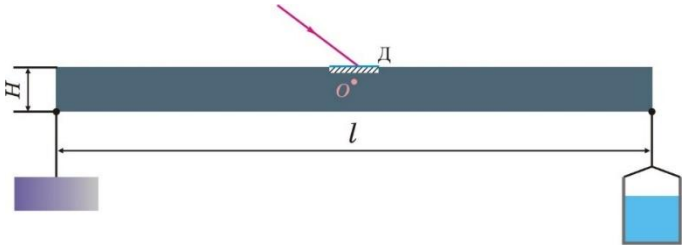


А) **Поясніть** коротко **картину**, що спостерігається.

Б) **Оцініть товщину** шару води.

(37) «Чутливість до випаровування». Показану на рисунку систему юний експериментатор вирішив застосувати для дослідження швидкості випаровування рідини. З великої алюмінієвої пластини завтовшки 2 мм він вирізав прямокутник завдовжки $\boldsymbol{l} = 1$ м і заввишки $\boldsymbol{H} = 7{,}5$ мм, який може без тертя обертатися навколо тонкої осі O, розташованої на $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}\boldsymbol{H}$ вище геометричного центра прямокутника. До лівого кінця цього важеля підвішений тягарець, до правого — відкрита посудина з рідиною. На початку досліду маси тягарця та посудини дорівнюють по 20 г. Для підвищення точності визначення кута повороту важеля до нього прикріплено легке плоске дзеркало Д, на яке падає пучок лазерного випромінювання. Відбитий промінь нормально падає на шкалу, розташовану на відстані $\boldsymbol{L} = 5$ м від дзеркала. Визначте чутливість такої установки, тобто відношення переміщення s світлового зайчика по шкалі до маси m рідини, яка

перетворилася на пару. Густина алюмінію дорівнює 2700 кг/м^3.



(38) «Тепло в теплиці». У теплиці встановлений нагрівальний елемент для опалення самої теплиці, також всередині теплиці встановлено закритий бак, в якому за допомогою іншого нагрівального елементу нагрівається вода для поливу. Якщо ці елементи з'єднати паралельно і увімкнути в мережу, то температура води в баку встановиться й дорівнюватиме $\mathbf{t_1}$, а температура повітря в теплиці – $\mathbf{t_2}$. Якщо ж їх з'єднати послідовно, то температура води в баку дорівнюватиме $\boldsymbol{t'_1}$, а температура повітря в теплиці – $\boldsymbol{t'_2}$. Знайдіть температуру навколишнього середовища $\mathbf{t_0}$. Уважати потужність теплопередачі прямо пропорційною до різниці температур. Залежністю опору нагрівачів від їх температури знехтуйте.

Задачі запропонували:

34 Орлянський О.Ю., 35 Олійник А.О., 36, 37 Гельфгат І.М., 38 Овсянніков О.А.

Фінал

(39) «Чорні схеми». На рис. 1 показано непрозору пластикову пластинку з дев'ятьма електричними клемами. На зворотному боці пластинки «сховано» приєднані до певних клем елементи електричного кола: ідеальне джерело струму, дроти з нехтовно малим опором і, можливо, певна кількість резисторів. Для «розшифровки» прихованої схеми учень здійснив з'єднання та вимірювання, показані на рис. 2, 3. Застосовані прилади можна вважати ідеальними, опір кожного резистора 200 Ом. Результати вимірювань: верхній амперметр показав 10 мА, нижній 20 мА; вольтметр між клемами 5 і 9 показав 4,5 В, решта вольтметрів — по 1,5 В.

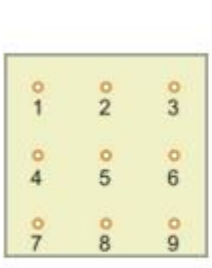


Рис. 1

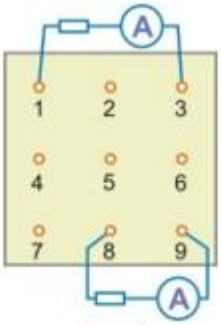


Рис. 2

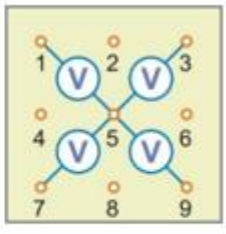


Рис. 3

Запропонуйте можливу схему з'єднання елементів на зворотному боці пластинки з мінімально можливою кількістю резисторів та зазначте параметри всіх елементів.

(40) «Знервований квадрокоптер». Під час випробування вертикального руху нової моделі квадрокоптера, той за будь-яких 10 секунд руху збільшував висоту рівно на 10 м. Максимально можливе прискорення руху квадрокоптера 10 м/с^2.

А) **На яку висоту** піднявся квадрокоптер під час цього випробування, якщо його середня швидкість проходження всього шляху (від старту з поверхні землі до зупинки руху вгорі) виявилася найбільшою з можливих і якою саме?
Б) **Знайдіть найменший та найбільший інтервал часу** між надходженням звукових сигналів, які реєстрували від квадрокоптера у точці запуску, якщо квадрокоптер передавав сигнали з інтервалом у 10 мілісекунд. Швидкість звуку 330 м/с.

(41) «Майже «чорна» посудина». У циліндричній посудині з площею основи $\boldsymbol{S}$, що відкрита зверху, знаходиться вода за температури 0 °С. Температура навколишнього середовища також 0 °С. Усередині посудини знаходиться нагрівальний елемент невідомої постійної потужності, що рівномірно повільно передає теплову потужність усьому вмісту посудини. Крім того, на дні посудини знаходиться кулька з льоду, в якій розташовані дуже маленькі ошурки з металу, що рівномірно розподілені по об'єму кульки. Температура льоду та ошурків також 0 °С. У початковий момент вмикається нагрівач, і рівень води в посудині починає змінюватися з деякою невідомою постійною швидкістю $\boldsymbol{v_1}$. Через деякий час ця швидкість стрибкоподібно змінюється до величини $\boldsymbol{v_2}$, і відразу після цього повільно змінюється із часом за нелінійним законом.
Вважаючи площу основи посудини $\boldsymbol{S}$, густину, питомі теплоємності, питомі теплоти плавлення та пароутворення наведених речовин, швидкість $\boldsymbol{v_2}$ відомими, враховуючи, що за температури 0 ^{0}С за будь-яких інших умов 20 % енергії від нагрівача йде на компенсацію втрат на випаровування, нехтуючи тепловим розширенням речовин,
А) **Пояснити** наявність стрибкоподібної зміни швидкості та наведіть найважливіші, на ваш погляд, причини її подальшої нелінійної зміни.
Б) **Знайти потужність** нагрівача.
В) **Знайти швидкість зміни** рівня $\boldsymbol{v_1}$ води в посудині до її стрибкоподібної зміни.

(42) «Бережіть зір змолоду!» Короткозора людина, що носить окуляри, трохи змістила їх вбік і дивлячись вперед крізь них, несподівано для себе помічає попереду два зображення невеликої яскравої лампи, що розташована позаду неї. Відстань від окулярів до цих зображень 3/49 м, та 6/17 м. Повернувшись обличчям до лампи, вона бачить з тієї ж самої відстані до лампи її зображення на відстані 0,3 м від окулярів.
А) Вважаючи лінзу тонкою, та такою, що зроблена зі скла з коефіцієнтом заломлення 1.8 та має опукло-увігнуту форму з опуклими поверхнями ближче до ока, **знайти** її **оптичну силу** та **відстань до лампи**.
Підказки: - оптичну силу лінзи, виготовленої з матеріалу з коефіцієнтом заломлення **n**, що знаходиться у повітрі, та має бічні поверхні з радіусами кривизни **R1** та **R2**, можна розрахувати як: $\boldsymbol{D = (n-1)(\pm\frac{1}{R_1}\pm\frac{1}{R_2})}$**.** Причому, знак «+» ставиться коли лінза знаходиться між своєю бічною поверхнею та центром кривизни цієї поверхні, а знак «-», коли ззовні цього інтервалу.
- Формула сферичного дзеркала майже повністю дублює формулу тонкої лінзи з фокусом, що дорівнює половині радіусу кривизни її бічної поверхні.
Б) Дивлячись на лампу, людина починає піднімати окуляри зі швидкістю **V**.
З якою швидкістю $\mathbf{V_1}$ почне рухатися зображення лампи? Вважати, що швидкість спрямована перпендикулярно до головної оптичної осі, а лампа та око людини знаходяться на ній.

(43) «Чорно-білий одяг». Ви влітку хочете піти на прогулянку і обираєте одяг: повністю темний чи світлий? Звісно, що ви оберете світлий, адже ви добре знаєте фізику. А давайте подивимось як буде почувати себе людина у чорному одязі. Будемо вважати людину тонкою

пластинкою. Нехай сонячні промені падають перпендикулярно виключно на одну із двох сторін цієї пласкої людини. Потік сонячного випромінювання на людину A=1000 Вт/м^2. Людина поглинає лише частину $a*A$ від цієї енергії, а іншу енергію відбиває. Коефіцієнт a залежить від кольору поверхні (для абсолютно чорного тіла a=1). Поверхня людини охолоджується двома шляхами: теплопровідністю із повітрям біля освітленої поверхні людини, та за допомогою теплового випромінювання освітленою поверхнею. Інша «сторона людини» участі не бере. Якщо поверхня менше поглинає випромінювання, то вона й сама менше випромінює. Опишемо потужність теплового випромінення законом Стефана-Больцмана з урахуванням «коефіцієнту чорноти» ε (для абсолютно чорного тіла $\boldsymbol{\varepsilon = 1}$, для інших кольорів – менше), який залежить від кольору поверхні, що випромінює: $\boldsymbol{P = \varepsilon \sigma S T^4}$, де $\boldsymbol{\sigma} = 5.67 * 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 K^4}$ – стала Стефана-Больцмана, $\boldsymbol{S}$ – площа поверхні тіла, $\boldsymbol{T}$ – температура поверхні в кельвінах. Визначити «коефіцієнт чорноти» кольорового тіла можна з гіпотетичного уявного досліду, в якому кольорове тіло та абсолютно чорне мають однакову температуру, а значить знаходяться в тепловій рівновазі. Теплопередача описується законом Ньютона-Ріхмана $\boldsymbol{P = \alpha S (T - T_{\text{п}})}$. Коефіцієнт теплопередачі $\boldsymbol{\alpha}$=23.0 Вт/м^2*К. Температура навколишнього повітря $\boldsymbol{T_{\text{п}}} = 293$ К. Теплоту, яку виділяє тіло людини внаслідок своєї життєдіяльності, не враховуйте.

А) **Виразити** «коефіцієнт чорноти» $\boldsymbol{\varepsilon}$ через інші параметри, що дані в задачі, та порахувати його для **a**=0.9.

Б) **Знайдіть температуру** освітленої поверхні людини, якщо вона вдягнула темний одяг, для якого **a**=0.9, не враховуючи втрату тепла людиною за рахунок теплового випромінення.

В) **Уточніть температуру** поверхні для **a**=0.9, враховуючи теплове випромінення, з точністю до 0.5 К. Можете використовувати для цього результат отриманий в п. Б.

Задачі запропонували:

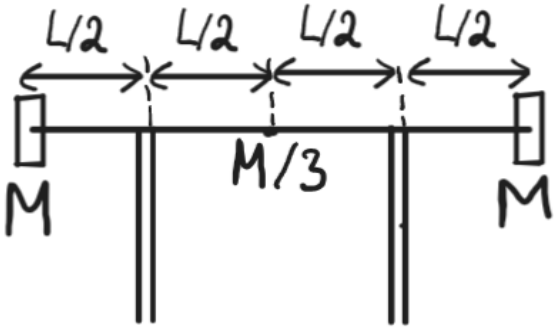
39 Гельфгат І.М., 40 Орлянський О.Ю., 41 Овсянніков О.А., 42 Пашко М.І., 43 Олійник А.О.

2023-2024 роки

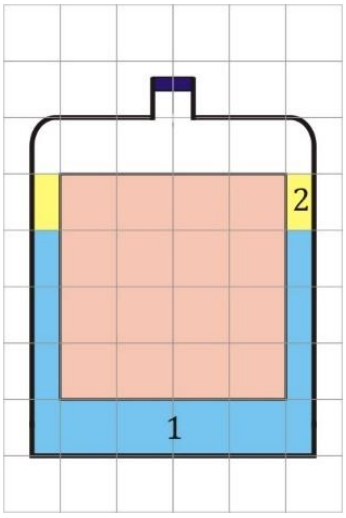
І заочний тур

(44) «І сила є, і розум треба». Хлопчик займався спортом та підіймав штангу масою M/3 з додатковою масою 2M. Штанга має довжину 2L та лежить на двох однакових опорах, які разом витримують вагу 2.5Mg. Опори розташовані симетрично на відстані L/2 від центру штанги. Хлопець хоче зменшити навантаження на штангу, але розуміє, що не може зняти одразу всю масу M з одного боку. Підкажіть юному спортсмену, **яку максимальну масу** він може безпечно зняти з одного боку штанги за раз.





(45) «Втопити не можна дістати». На рисунку показано однорідний куб, який плаває за тиску p_0 на межі двох рідин, густини яких $\rho_{01} = 1000$ кг/м^3 і $\rho_{02} = 800$ кг/м^3. Рідини не змішуються одна з одною. Бічна сторона кожної клітинки на рисунку $a = 1$ см. Тиск p у посудині поступово збільшують. При цьому густини матеріалу кубу та рідини 1 змінюються за законами $\rho_к = \rho_{0к}(1 - \beta_к + \beta_к p^2/p_0^2)$, $\rho_1 = \rho_{01}(1 - \beta_1 + \beta_1 p^2/p_0^2)$.
Тут $\beta_к = 0{,}02, \beta_1 = 0{,}01$; рідину 2 та матеріал посудини вважатимемо нестисливими. Тепловим розширенням знехтувати.

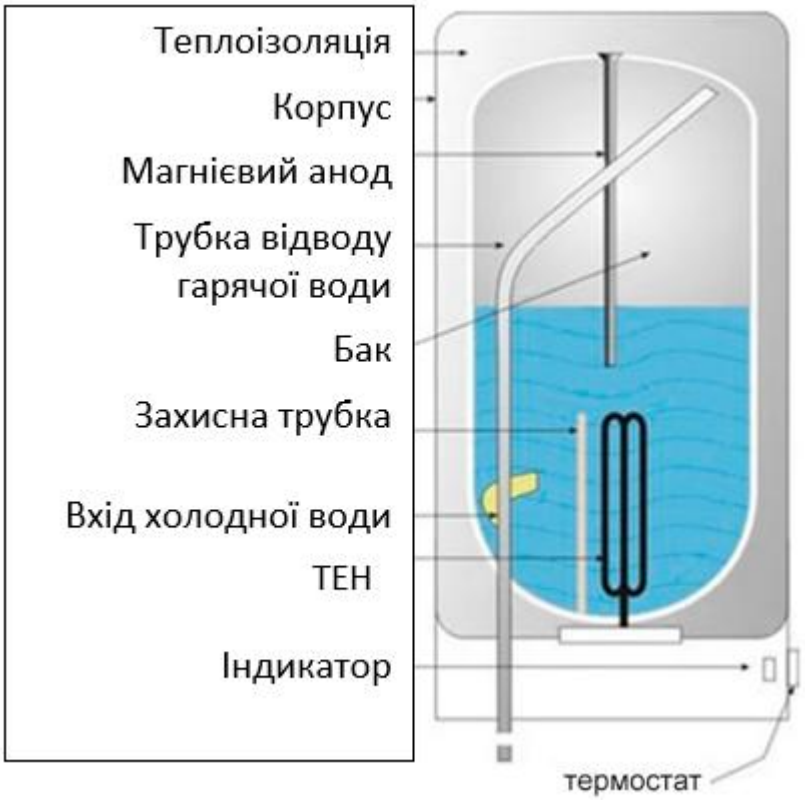


Побудуйте графік залежності глибини h занурення нижньої грані куба в рідину 1 від величини p/p_0. Уважайте, що горизонтальний переріз посудини має форму квадрата, нижня грань куба залишається весь час горизонтальною, а гідростатичний тиск рідини набагато менший від p_0.

(46) «Суперклей vs закон Гука!» Для виготовлення пружної системи юний дослідник застосував l_0= 50 см пружної гумової нитки з жорсткістю k_0= 72 Н/м, трохи суперклею та гачок. Систему випробували, дослідивши залежність видовження x від прикладеної сили F (див. таблицю). **Запропонуйте можливу конструкцію** виготовленої системи, **зазначте всі її параметри**. Наведені результати вимірювань уважайте точними.

F, Н	0	18	36	72	108	144
x, см	0	5	10	15	20	25

(47) «Зливай воду поки гаряча!»



У перерізі накопичувальний бойлер має вигляд, як на схематичному рисунку. Принцип дії бойлера полягає у нагріванні повністю заповненого баку до певної температури. Як тільки за рахунок теплообміну температура води в баку зменшується на деяку величину відносно заданої, вмикається теплоелектронагрівник (ТЕН). Якщо бойлером не користуються, то таке вмикання, завдяки теплоізоляції, відбувається приблизно один раз на дві доби. При відкриванні крану гарячої води вона витікає крізь трубку (дивись рисунок), верхній кінець якої знаходиться біля верхньої частини баку (в реальності, на відміну від рисунка, вода завжди повністю заповнює бойлер), а знизу, біля самого дна, через іншу трубку, надходить вода з водогону так, щоб бак весь час залишався заповненим. На кінці трубки холодної води є розсікач, що не дозволяє утворювати струмінь холодної води всередині баку й розподіляє холодну воду на його дні. Одночасно з початком потрапляння в бак холодної води вмикається ТЕН. Уважайте, що бак має циліндричну форму та його об'єм дорівнює V, початкова температура води в баку — t_1, температура води у водопроводі t_2, швидкість об'ємної витрати гарячої води $\boldsymbol{v_0}$ (вимірюється в м^3 на секунду).

А) За якої потужності $\boldsymbol{P_1}$ ТЕН після відкриття крану гарячої води зможе весь час підтримувати її температуру незмінною?

Б) Якщо потужність $\boldsymbol{P}$ ТЕНу для цього недостатня, через який час після відкриття крану гарячої води температура води на виході знизиться і на скільки градусів?

В) Кран гарячої води після такого зниження температури (як у пункті Б) починають закручувати, рівномірно зменшуючи кількість води, що витікає з нього. Швидкість об'ємної витрати гарячої води $\boldsymbol{v(t)}$ зменшується на $\boldsymbol{\alpha}$ за одиницю часу ([$\boldsymbol{\alpha}$]=м$^3/c^2$) аж до повного перекриття крану. Через який час температура води на виході з крану почне підвищуватись?

Конвекцію та теплопровідність між горизонтальними шарами води у бойлері, які можна вважати рівномірно прогрітими, не враховуйте; також уважайте, що ТЕН знаходиться на дні бойлера та його розмірами можна знехтувати.

(48) «Шукай струм за координатами». Для вимірювання невідомого опору R_2 зібрана мостова схема, яка зображена на рисунку На рисунку 2 наведений графік залежності величини струму через гальванометр від величини x/L, де L – початкова довжина дротини реохорда постійного перерізу. По вісі абсцис позначено відношення координати повзунка до довжини дротини реохорда. Наступного разу кріплення гальванометра до реохорда виконується у вигляді вальцювальних роликів (*Волочильний елемент (В)*) для дротини, що зменшують площу поперечного перерізу дротини в 2 рази рухаючись вздовж дротини. Кріплення кінців дротини

з’єднані таким чином, що дротина при вальцюванні залишається відрізком прямої (для цього використовується, наприклад, якась гідравлічна система або пружина, прикріплена до кінців дротини реохорда), що показано на рисунку
А) **Знайдіть координати точки** А на рисунку 2.

Б) На рисунку 4 зображена залежність струму через гальванометр від положення *волочильного елементу* ***x*** по відношенню до довжини недеформованої дротини *L.* **Знайдіть координати точок B,C,D**, що вказані на рисунку Опором гальванометра, вальцювального пристрою та з’єднувальних дротин знехтувати. Напруга, що подається на мостову схему, є однаковою та сталою в обох випадках. Уважайте, що точка D на рисунку відповідає моменту, коли (B) пройшов всю довжину проволоки.

Що таке «Волочильний елемент» можете прочитати в мережі Інтернет.

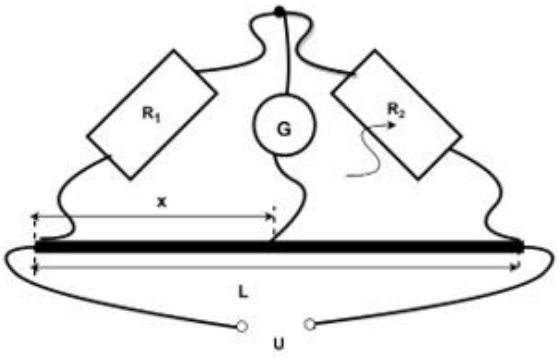


Рис. 1

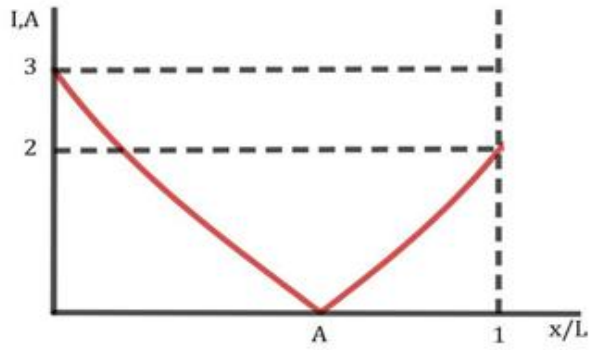


Рис. 2

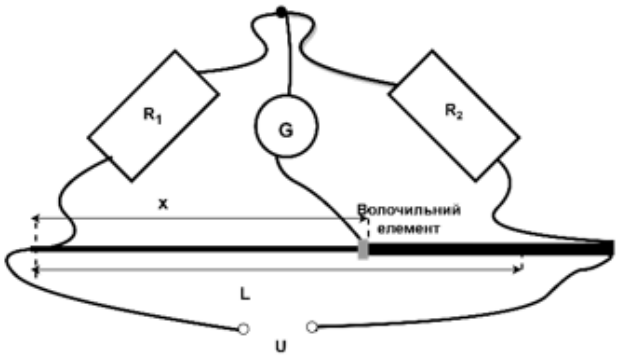


Рис.3

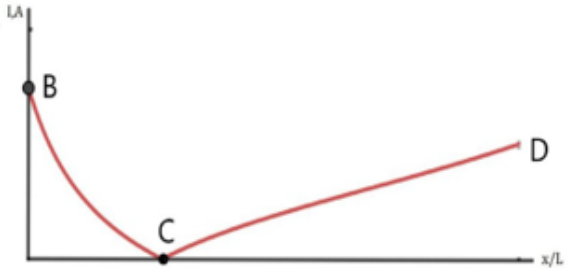


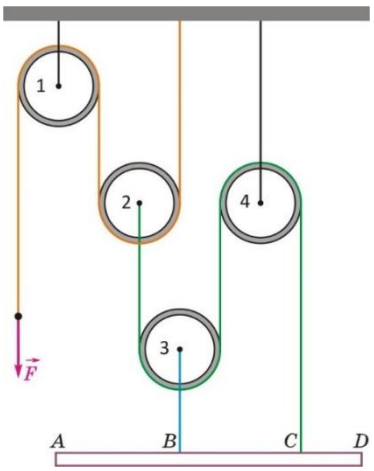
Рис 4

Задачі запропонували:

44 Микуленко О.І., 45,46 Гельфгат І.М, 47 Бойлеров Арістон Онлайнскулович, Овсянніков О.А., 48 Овсянніков О.А.

II заочний тур

(49) «Непрості механізми». Підвішений горизонтально однорідний стрижень масою $M = 3$ кг утримують в рівновазі за допомогою системи блоків (див. рисунок). Тертя в осях блоків відсутнє, нитки невагомі та нерозтяжні. Усі ділянки ниток, що не торкаються блоків, вертикальні. Радіус кожного блока $R = 5$ см. Уважайте, що $g = 10$ Н/кг.

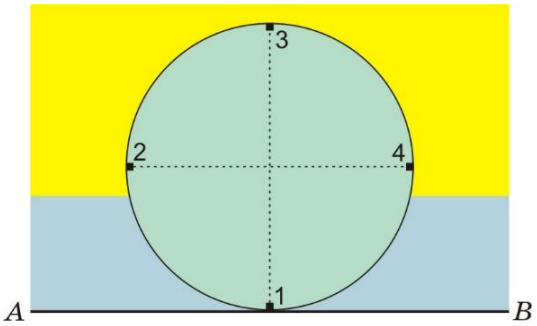


А) Уважаючи всі блоки невагомими, **визначте модуль F_1** прикладеної до нитки сили.

Б) Уважаючи, що всі блоки невагомі та $AB = BC$, **визначте довжину ділянки CD** стрижня.

В) **Визначте модуль F_2** прикладеної до нитки сили та довжину стрижня, якщо $BC = 2CD$, а маса кожного блока $m = 150$ г.

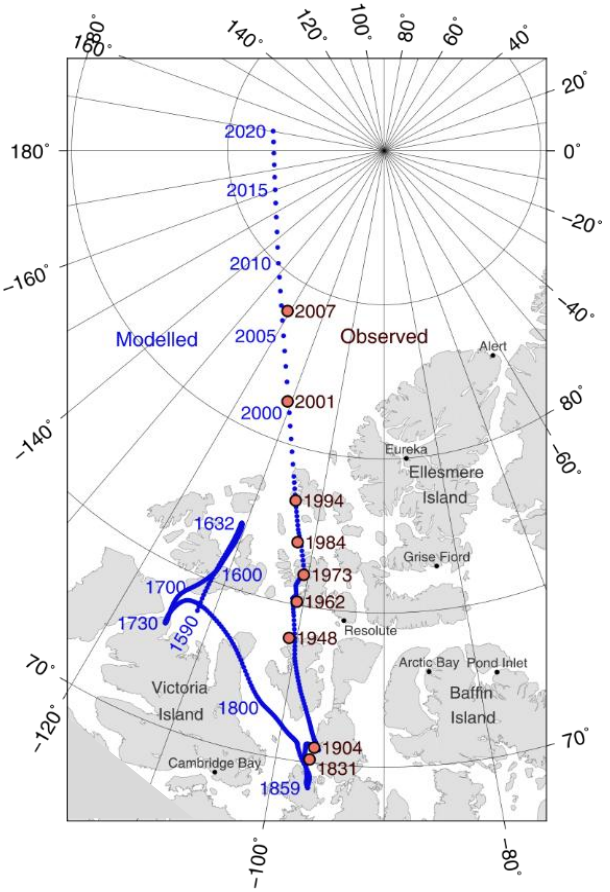
(50) «Тепловий тиск». Однорідний диск радіусом $R = 10$ см і масою $m = 1$ кг, має однакові маленькі ніжки 1–4, та стоїть на горизонтальній поверхні, торкаючись вертикальної стінки AB (на рисунку показано вигляд згори). Зафарбована блакитним ділянка поверхні є гладенькою; коефіцієнт тертя між ніжками 2, 3, 4 і «жовтою» ділянкою поверхні $\mu = 0{,}3$. Температуру диску збільшили на $\Delta t = 200$ °C, а потім зменшили до початкового значення. Температура горизонтальної поверхні під час цього процесу не змінювалася. Температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалу диска $\alpha = 2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$.



А) **З якою силою диск** тиснув на стінку під час нагрівання?

Б) **Визначте ширину зазору**, який утворився між диском і стінкою після охолодження диска.

(51) «Полювання за полюсом». На карті наведені результати моделювання руху магнітного полюсу Землі (Modelled) і дані спостережень (Observed).



А) За даними моделювання **знайдіть середню швидкість** магнітного полюсу Землі (у км/рік) за період з 2000 по 2020 роки.

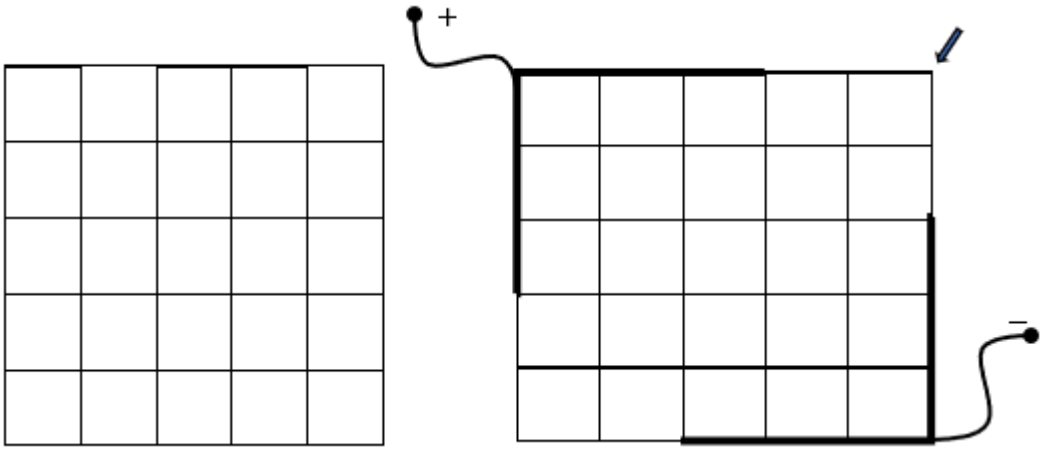
Б) Уявіть, що магнітний полюс рухається рівномірно, не змінюючи напрям швидкості v вздовж поверхні планети. Коли він проходив на мінімальній відстані повз географічний полюс, з того стартував дослідницький зонд з такою ж за величиною швидкістю v вздовж поверхні Землі. **Як має рухатись зонд**, щоб досягти магнітного полюса за найменший час? Якщо таке можливо, укажіть **відстань, яку пройде** за цей час магнітний полюс. Землю вважати кулею.

(52) «Теплова труба». Довгою тонкою трубою передають гарячу воду. Під час руху вода остигає, віддаючи теплоту навколишньому середовищу, температура якого $t_0 = 10$ ℃. Вимірювання показали, що на вході у трубу температура води $t_1 = 90$ ℃, а посередині 50 ℃.
А) **Яку температуру** має вода при виході з труби? Б) **Як зміняться значення температури** води посередині труби і на її виході, якщо швидкість води a) зменшити удвічі? b) збільшити удвічі? В) **У скільки разів** за тієї самої швидкості води слід **збільшити діаметр** труби, щоб відсоток загальних теплових втрат зменшився вдвічі? Г) Спробуйте отримати загальну **залежність температури від відстані** уздовж труби і зобразити її графічно.

Для відповіді на останні питання можете скористатися такою моделлю: розбиваємо подумки трубу, наприклад, на $n = 4$ рівні частини. Уявимо, що по краях цих частин є термометри. Тоді кожній частині можна приписати деяку середню температуру її країв для того, щоб знайти потужність теплових втрат. Чим більше n, тим, мабуть, буде точнішою відповідь.

Теплоізоляційні матеріали мають однакову якість уздовж усієї труби, теплопередачею уздовж труби знехтувати. *Потужність теплових втрат пропорційна різниці температур і площі.*

(53) «Електричні перегони». Квадратна сітка 5×5 виготовлена з ніхромового дроту площею перерізу 0,1 мм^2. Кожний відрізок між точками з'єднання має довжину 0,1 м. На сітку наклали дві шини (електроди), опором яких можна знехтувати, і приклали до них напругу U=66 В.
А) **Який струм** йтиме через кут квадрату між шинами (на рисунку вказаний стрілочкою)? Питомий опір ніхрому $\rho = 10^{-6}$Ом·м.
Б) **Визначте опір** сітки між шинами.
Уявіть, що команда електронів у момент подачі напруги одночасно стартувала з одного електроду в бік іншого.
В) Знайдіть і зобразіть на сітці **найбільш швидкий і найбільш повільний маршрути** досягнення електронами другого електроду.
Г) **У скільки разів відрізнятиметься час** руху електронів уздовж них?



Задачі запропонували:

49-50 Гельфгат І.М., 51-53 Орлянський О.Ю.

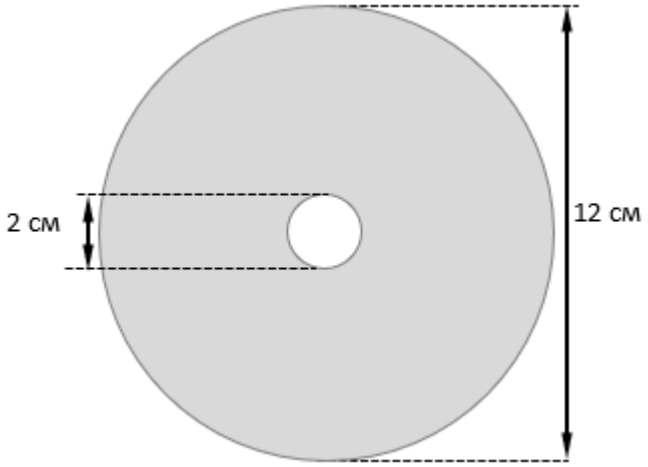
Фінал

(54) «Небезпечне джакузі». У посудині з водою плаває тіло. **Оцініть**, тіло якої **густини** може потонути, якщо з деяких причин виключно на дні посудини починають з'являтися і одразу спливати бульбашки повітря, так, що щосекунди на кожному 1 мм^2 дна посудини з'являється 200 бульбашок, радіусом 0.1 мм кожна. Злипанням декількох бульбашок в одну та зміною їх розмірів під час спливання знехтуйте. Уважайте, що бульбашки до тіла не прилипають та рухом води можна знехтувати.
Вам також може знадобитись закон Стокса: сила опору руху, що діє на кульку радіуса R з боку рідини при русі кульки зі швидкістю v відносно цієї рідини, дорівнює $F_{\text{оп}} = 6\pi R\eta v$, де η – відомий коефіцієнт в'язкості. Для води $\eta = 8.9 \cdot 10^{-4}$ Па · с.

(55) «Летюча миша». Над горизонтальною поверхнею під кутом α ($\alpha = 60°$) до горизонту зі швидкістю v з поверхні землі кидають спеціальний акустичний датчик «Летюча миша», який з великою частотою випромінює короткі звукові сигнали і ловить їх відлуння від горизонтальної поверхні.
А) **Побудуйте** схематичний **вигляд** траєкторії «летючої миші».
Б) Знайдіть **максимальний та мінімальний час** між випромінюванням сигналу й отриманням його відбиття датчиком. Швидкість звуку c, рухом повітря і його опором руху датчика знехтувати.
В) Якою стане відповідь на попереднє питання, якщо припустити, що початкова швидкість датчика v перевищує швидкість звуку c у 2,5 рази?

Довідка: сила тяжіння діє на датчик у вертикальному напрямі і змінює лише вертикальну складову швидкості, а горизонтальна складова весь час польоту має стале значення. При цьому внаслідок сталого значення сили тяжіння, вертикальна складова швидкості змінюється рівномірно на 9,8 м/с за кожну секунду руху ($g = 9{,}8$ м/с^2). Вважати, що кут падіння звукового сигналу на горизонтальну поверхню дорівнює куту відбиття.

(56) «Крізь DVD». Круглий вмонтований у стелю плафон діаметром 30 см знаходиться на висоті 3 м від підлоги.



А) **На якій найменшій відстані** від підлоги слід розмістити паралельно їй лазерний дисковий накопичувач інформації DVD (див. Рис), щоб той не відкидав на підлогу повної тіні?

Б) На круглий отвір у центрі непрозорого диску поклали тонку лінзу розміром з цей отвір з метою змінити результат, але після численних дослідів з підсиленим лінзою диском з'ясувалося, що відповідь на запитання А залишається без змін. **Якого типу** ця лінза та **яка в неї оптична сила**?

(57) «Теплові явища». У цьому завданні ми розглянемо нагрівання води в посудині з урахуванням теплообміну, потужність якого пропорційна різниці температур води t і навколишнього середовища t_0, а також площі поверхні посудини S, через яку цей теплообмін проходить.
А) **Побудуйте схематичні графіки** залежності ККД такої нагрівальної системи (корисна енергія – пішла на нагрів води, затрачена – відібрана з електромережі) від температури води.

Б) Тепер розглянемо конкретну ситуацію. У посудині з вимкненим електронагрівником знаходиться суміш масою 2 кг води з льодом у співвідношенні $m_{\text{в}}/m_{\text{л}} = 1:3$. Через $\tau_1 = 20$ хв, коли співвідношення змінилося до $m_{\text{в}}/m_{\text{л}} = 3:1$, увімкнули електронагрівник, і вже через $\tau_2 = 100$ с останній лід в посудині розтанув, і вода почала нагріватися. Знайдіть а) потужність нагрівника; б) чи закипить вода? Якщо так, то яким буде ККД нагрівальної системи у цей момент часу. Якщо ні, до якої максимальної температури вода нагріється?

В) Знайдіть швидкість нагріву води v (на скільки °С нагрівається за секунду, $[v] = ℃/\text{с}$) у моменти початку і кінця зміни її температури.

Теплоємністю посудини і електронагрівника знехтуйте. Теплоємність води $c = 4200$ Дж/(кг·°С), питома теплота плавлення льоду $\lambda = 330$ кДж/кг, температура навколишнього середовища $t_0 = 20$°С.

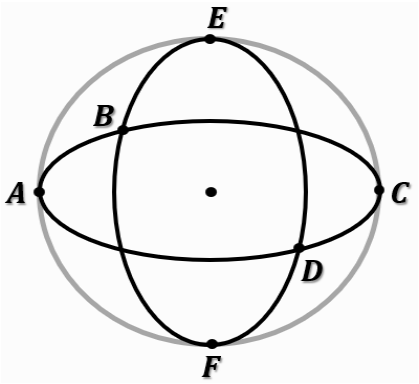
Задачі запропонували:

54 Рідкокаша І.П., 55-57 Орлянський О.Ю.

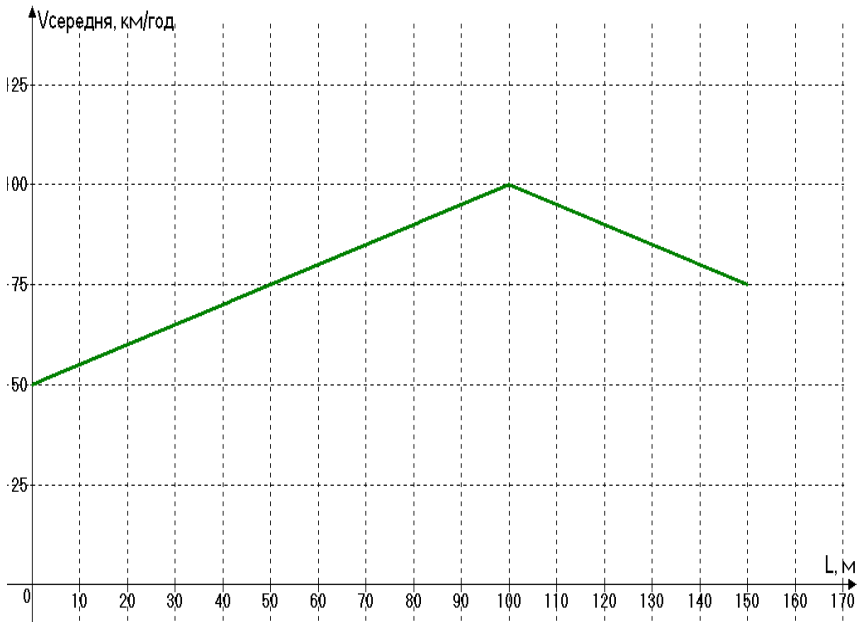
2024-2025 роки

І заочний тур

(58) «Закільцьовані». Три металеві обручі однакового діаметру та однакової товщини, що розташовані у взаємно перпендикулярних площинах, з'єднані між собою в усіх зазначених на рисунку точках. Два з трьох обручів (на рисунку вони показані чорними) зроблені з металу А, третій обруч (на рисунку він сірий) — з металу Б. Омметр, приєднаний до точок з'єднання A і C, показав опір $R_{AC} = 16$ Ом, а приєднаний до точок A і E — опір $R_{AE} = 13$ Ом. Визначте відношення $\rho_А/\rho_Б$ питомих опорів металів.



(59) «І знов середня швидкість». Машина їде по горизонтальній прямій ділянці дороги. У момент проїзду машини повз автобусну зупинку пасажир почав будувати графік залежності середньої швидкості машини на шляху L, пройденому після автобусної зупинки, від величини L. За наведеним графіком середньої швидкості руху машини від пройденої відстані:

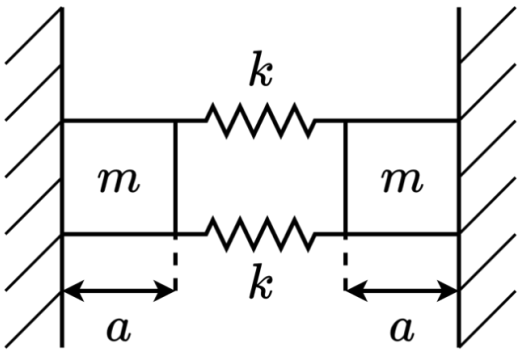


А) **Знайдіть середню швидкість** на шляху від 50 до 125 м;

Б) **Отримайте та зобразіть графічно** залежність пройденого шляху від часу руху;

В) **Чи немає** в цьому русі чогось підозрілого та нефізичного? Якщо так, то вкажіть, **чому** ви так вважаєте?

(60) «Тиснемо-перетиснемо». Два однакових кубики зі стороною ***a*** та масою ***m*** з'єднані двома однаковими пружинами як зображено на рисунку. Кожна пружина має жорсткість ***k*** та початкову довжину в нестисненому стані L_0. Систему розміщують між двома вертикальними стінками (див. рисунок). Знайдіть, **за якої відстані** між стінками система буде в рівновазі. Коефіцієнт тертя між кубиками та стінкою дорівнює μ та $\mu<1$. Уважати, що пружини залишаються горизонтальними.



(61) «Дрова і вода». Відомо, що при згорянні вологої деревини виділяється менша кількість теплоти, ніж при згорянні сухої. У таблиці наведені дані для тепловиділення і густини трьох порід деревини за різної вологості й умови повного згоряння.

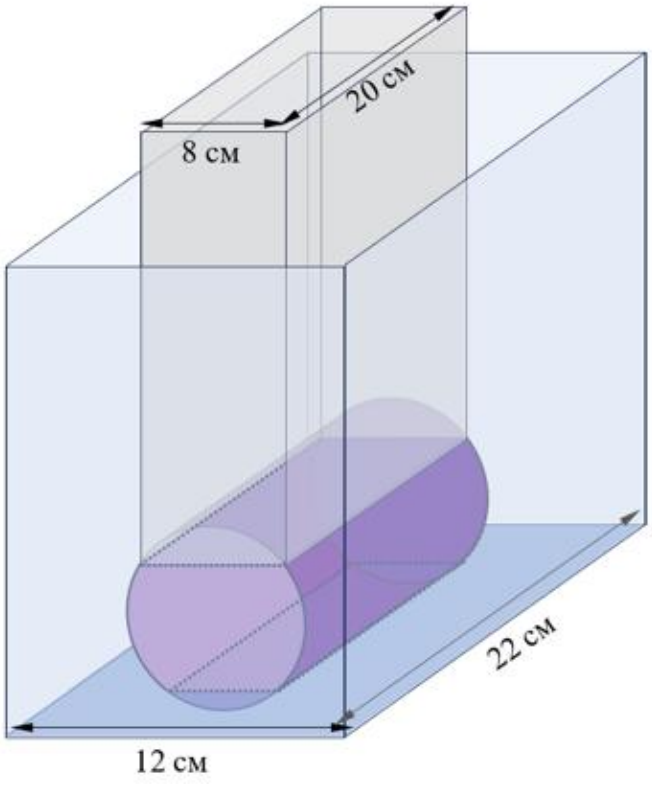
А) Не використовуючи інших довідкових даних по деревині, **проаналізуйте** таблицю, **знайдіть спільне** у різних видах деревини, **висуньте** гіпотезу і **дозаповніть таблицю** розрахованими чисельними значеннями.

Б) За **якої відносної вологості** деревини та взагалі не буде горіти? Початкова температура деревини, яку підкладають у вогонь, 20^0C. Уважайте, що дрова горять за температури 800^0C, всі утворені речовини нагріваються до цієї температури, питома теплота пароутворення води за 100^0C дорівнює 2,3 МДж/кг, а питома теплоємність водяної пари така ж як і льоду - 2,1 кДж/(кг*^{0}C)

Одна калорія – це кількість теплоти, яка необхідна, щоб 1 г води з питомою теплоємністю 4,18 Дж/(г·^{0}C) нагріти на 1^0C. Вологість у таблиці – відношення маси води у деревині до маси цієї ж деревини в абсолютно сухому стані. Зазначимо, що нагрівання самої сухої деревини до температури горіння вже враховано у значенні теплотворної здатності.

	Вологість 0%	Вологість 12%			Вологість 25%		
	Теплотворна здатність, ккал/кг	Теплотворна здатність, кВт·год/м^3	Густина кг/м^3	Теплотворна здатність, ккал/кг	Теплотворна здатність, кВт·год/м^3	Густина, кг/м^3	Теплотворна здатність, ккал/кг
Береза		3000	630		2700	650	
Сосна		2400	500		2200	530	
Ялина		2100	440			470	

(62) «Циліндр в акваріумі». Високий акваріум з основою 12 см × 22 см посередині дна має прямокутний отвір 6 см × 20 см. Для того, щоб вода не витікала, перед заповненням акваріуму на його отвір спробували поставити вертикальний порожній короб, зроблений з міцного тонкого прозорого пластику у формі паралелепіпеду без двох протилежних основ розмірами 8 см × 20 см. Але співпадіння довжин отвору і коробу не дозволили забезпечити герметичність. Тоді в отвір спочатку поклали сталевий циліндр діаметром 10 см і висотою 20 см, а вже на нього наділи зверху короб (див. схематичний Рис.). Стінки короба і циліндру вертикальні, вода крізь місця дотику ніде не протікає, маса коробу нехтовно мала.



В акваріум почали наливати воду зі сталою швидкістю 100 мл за секунду. А) З **якою**

швидкістю (у см/с) рухається лінія розділу води і повітря: вздовж вертикальної стінки акваріуму та вздовж бокової (циліндричної) поверхні циліндру?
Б) Для обох випадків знайдіть **залежність швидкостей від висоти** рівня води (або іншої наочної координати) та
В) їх **максимальне і мінімальне значення**.
Г) **Чи може** сталевий циліндр почати трохи «підстрибувати» і періодично випускати воду при достатньо високих стінках акваріуму і коробу через деякий час після початку заповнення акваріуму водою? Якщо так, **через який час**, якщо ні, **чому**?

Задачі запропонували:

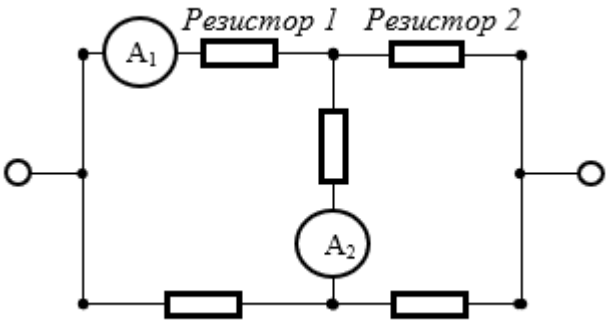
58 Гельфгат І.М., 59 Олійник А.О., 60 Рідкокаша І.П., 61-62 Орлянський О.Ю.

II заочний тур

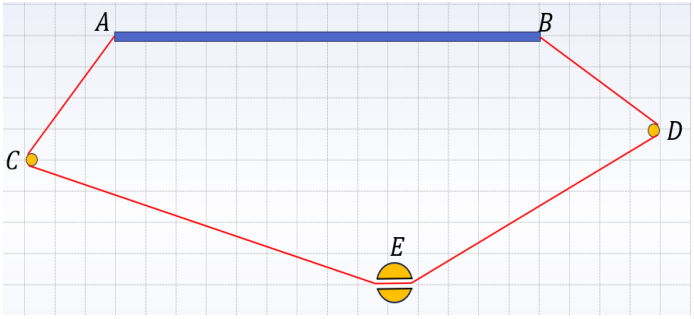
(63) «Серед морів, серед крижин живе розумненький пінгвін!» Пінгвін Понго полюбляє не тільки спортивне плавання, але і фізику, і вміє знаходити найвигідніші шляхи, добираючись до цілі за найкоротший час. Однак при цьому Понго завжди поспішає і розглядає лише траєкторії, які мало відхиляються від прямої, що з'єднує точку старту та фінішу. Сьогодні перед Понго стоїть непроста задача. Він повинен добратися до фінішу F, який знаходиться у області з крижинами, де його швидкість пересування зменшується втричі, з u до $u/3$ (див. рис.). Радіус крижаної області R, відстань до неї $L=5R$. Виявилося, що якщо фініш знаходився достатньо близько до дальньої границі крижаної області, то Понго не плив по прямій, а обирав інший шлях, що представляв собою ламану з двох відрізків, у воді і у крижаній області. Однак при наближенні фінішу F до центру кола стратегія Понго перестала давати виграш.
А) Яким було це **критичне положення** фінішу $F_{кр}$, після якого Понго мав змінити стратегію? Відстань вкажіть від дальньої точці крижаної області.
Б) **За яких відстаней** L такої точки не буде і Понго завжди буде вигідно рухатися по прямій?
В) Нехай тепер відстань L буде набагато перевищувати радіус області R, а фініш буде поблизу дальньої точки крижаної області. Якою тепер, на ваш погляд, буде **оптимальна траєкторія** Понго, якщо він врахує навіть такі траєкторії, які сильно відрізнятимуться від прямолінійної?
Примітки: а) *уважайте, що початкова позиція Понго, центр області і фініш знаходяться завжди на одній прямій; б) розмірами Понго порівняно з важливими відстанями у задачі знехтуйте; в) для x, значення яких набагато менше за одиницю, справедлива наближена рівність* $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$.



(64) «Вангуємо покази амперметра!» У схемі, показаній на рисунку, потужності, що виділяються на резисторах 1 і 2 дорівнюють відповідно P і $2P$, напруга на колі U, а амперметр A_1 показує значення сили струму I_0. Що може показувати амперметр A_2? Прилади вважайте ідеальними, опором з'єднувальних дротів знехтуйте.



(65) «Важіль на намистинці» На рисунку показаний важіль AB, до кінців важеля прив'язані кінці невагомої нитки, що огинає два нерухомі блоки C, D. Уздовж нитки може ковзати масивна «намистинка» E. Важіль і нитка невагомі, тертя відсутнє.



А) **Де** крізь важіль АВ має проходити **вісь обертання**, якщо його горизонтальне положення відповідає стану рівноваги системи?
Б) **Чи не припущено на рисунку неточності** у виборі положення «намистинки»? **Обґрунтуйте** свою відповідь.

(66) «Безсенсовий камін». Уявіть собі камін, який не віддає жодного тепла в кімнату, в якій він знаходиться, хоча в ньому й спалюється вугілля. Висота теплоізольованої від навколишнього середовища труби димаря каміна дорівнює **h**. Вважайте, що:

- при спаленні вугілля (яке складається лише з вуглецю) єдиними наслідками процесу є утворення вуглекислого газу та віддача тепла повітрю, що підіймається по трубі;

- при проходженні повітря через полум'я в хімічній реакції задіюється лише відсоткова (за масою) частина $\boldsymbol{\beta}$ від всієї кількості кисню в повітрі (масова частка кисню в повітрі складає $\boldsymbol{\delta}$**=23%**). Значення $\boldsymbol{\beta}$ є відомим і набагато меншим за 100%, тож склад повітря майже не змінюється;

- швидкість повітря в трубі каміна всюди однакова та описується наступним виразом: $V = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$, де Δp – різниця тисків на вході в камін зі сторони кімнати перед полум'ям та в димарі каміна в його нижній точці, ρ – густина повітря в трубі димаря;

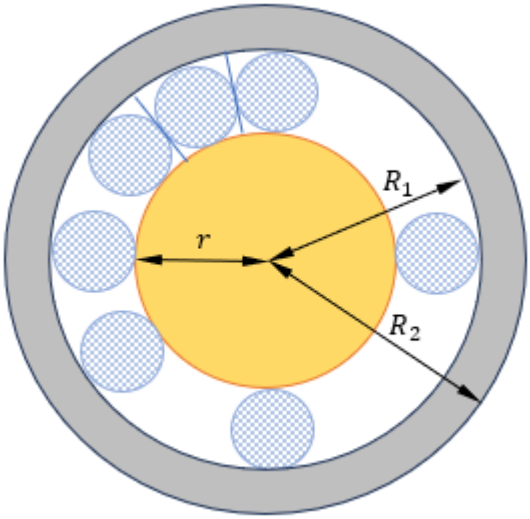
- повітря в димарі однорідне, має майже однакову густину та температуру в будь-якій точці. Питому теплоємність повітря вважайте відомою $\boldsymbol{c_p}$. Площа поперечного перерізу труби димаря рівна $\boldsymbol{S}$;

- температури навколишнього середовища та кімнати однакові та рівні $\boldsymbol{T_0}$ (камін явно не виконує свої обов'язки). Зв'язок між температурою повітря та його густиною наближено можна описати формулою $\rho = \frac{\gamma}{T}$, де $\boldsymbol{\gamma}$ – відомий коефіцієнт.

- Питома теплота згоряння вугілля **q** та будь-які необхідні маси атомів хімічних елементів та молекул відомі.

Знайдіть, **яка маса вугілля** спалюється за одиницю часу.

(67) «Гламурний кулькопідшипник». Один з приладів космічного корабля потребує використання відшліфованих до сферичної форми алмазів, діаметром $d = 1$ см кожний. Алмазні кулі мають розміщатися ззовні золотого циліндру і всередині платинового (див. схем. Рис.). Цей прилад має використовуватись у широкому діапазоні температур, але будь-які механічні напруження алмазних кульок або їх випадання з зазору між циліндрами не допускаються. Температурні коефіцієнти лінійного розширення за температури 20℃ і діаметру кульок 1 см: алмазу $\alpha = 10^{-6}\ ℃^{-1}$, золота $\alpha_з = 14 \cdot 10^{-6}\ ℃^{-1}$, платини $\alpha_п = 9 \cdot 10^{-6}\ ℃^{-1}$. Ці коефіцієнти можуть бути використані під час розрахунків в інтервалі температур $20℃ \pm 200℃$ роботи цього приладу. За рахунок великої теплопровідності алмазу і металів температуру усіх елементів приладу у будь-який момент часу можна вважати однаковою.



А) Якими мають бути **радіус золотого циліндру r і радіуси платинового R_1, R_2** за температури 20℃, щоб прилад працював у широкому інтервалі температур?

Б) **Оцінити максимальну кількість алмазних куль**, які в один ряд помістяться навколо золотого циліндра? Урахуйте, що для унеможливлення дотику сусідніх куль між ними вставлені тонкі прокладки товщиною 50 мкм з таким самим коефіцієнтом α, що й у алмаза.

В) **У якому інтервалі температур** за цієї кількості куль прилад вдасться експлуатувати?

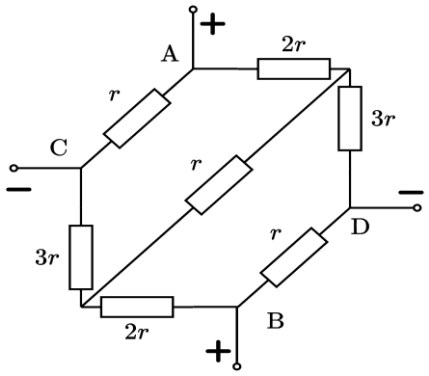
Задачі запропонували:
63-64 Майзеліс З.О., 65 Гельфгат І.М., 66 Олійник А.О., 67 Орлянський О.Ю.

Фінал

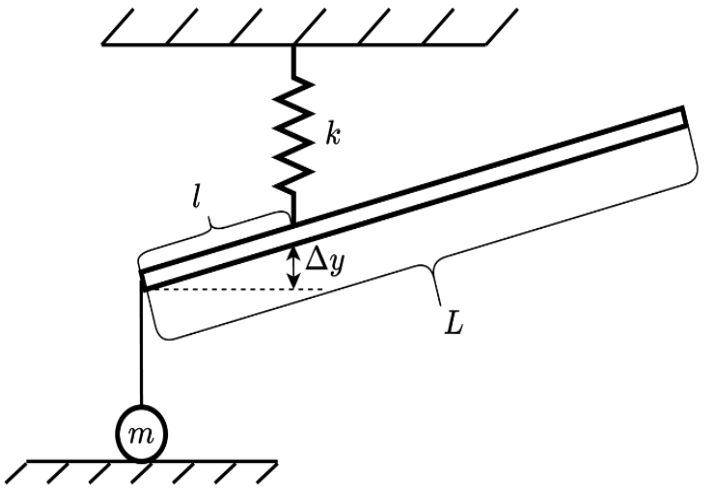
(68) «Теплова напруга». Є два стрижні, виготовлені з різного матеріалу. Довжини стрижнів дорівнюють l і $2l$, а їх площі перерізу однакові. Якщо підвісити на перший стрижень вантаж деякої маси, то він видовжується на вдвічі більшу величину, ніж другий від того ж вантажу. Якщо збільшити температуру першого стрижня на Δt, його довжина збільшується на Δl, а другий стрижень при такому ж нагріванні збільшує довжину на $3\Delta l$. Другий стрижень розрізають навпіл і три отримані стрижні однакової довжини скріпляють жорстко з обох кінців, отримуючи зразок потрійної площі перерізу. **Знайдіть його коефіцієнт теплового розширення**. Уважайте, що при розширенні всі три стрижні не вигинаються.

(69) «Лити-не перелити». У великій ємності з гарячою водою плаває маленька теплоізольована циліндрична посудина, маса якої m, внутрішній радіус R, а товщина стінок і дна d. У посудині знаходиться холодна вода, температура якої на Δt_0 менша за температуру води у ємності. Початкова висота рівня води в посудині (відрахована уздовж її внутрішньої стінки) дорівнює h_0. З ємності переливають порцію гарячої води у посудину, у результаті чого температура в ній підвищилася на Δt_1. Однак після ще одного переливання такої ж порції вода почала переливатися через краї посудини. **Знайдіть повну висоту стінок посудини**. Знехтуйте тепловими втратами між водою і навколишнім середовищем за час проведення цього експерименту.

(70) «Two in, two out? What is the current, figure out!?» Знайдіть струм, який буде текти **через** ідеальне **джерело напруги U_0**, якщо його підключити до схеми на рисунку таким чином: контакти A, B з'єднати між собою та підключити до позитивного полюса джерела, а контакти C, D – так само до негативного.



(71) «Пружинний важіль». Петру треба підняти вантаж маси m. Оскільки Петро добре вчив фізику, він вирішив спростити свою задачу та використати майже невагомий важіль довжини L. Він вирішив підвісити важіль не на нитку, а на пружину жорсткості k. Повна конструкція зображена на рисунку: тіло прикріплене до лівого краю, пружина прикріплена на відстані l від лівого краю. У початковий момент мотузка була не натягнута, але вертикальна, а важіль нахилений так, що точка кріплення пружини на Δy вище за лівий край (уважайте що нахил важелю невеликий).



Знайдіть: А) **Яку мінімальну роботу** треба виконати Петру, прикладаючи силу до правого краю вертикально вниз, щоб перевести важіль в горизонтальне положення?
Б) **На скільки** при цьому **підніметься** тіло m?

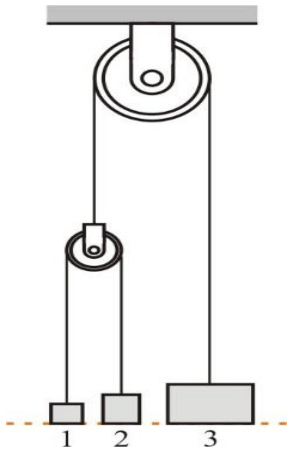
(72) «Біфокальна лінза». Тонка кругла лінза зроблена з двох двоопуклих половинок однакового радіуса кривизни (площина, яка розділяє половинки лінзи, містить головну оптичну вісь) та знаходиться в повітрі. Одна з половинок зроблена зі скла з коефіцієнтом заломлення $n=1.5$, а інша з невідомої речовини. На лінзу спрямовують циліндричний плоскопаралельний потік світла з радіусом, рівним радіусу лінзи. Вісь симетрії потоку співпадає з головною оптичною віссю. З іншого боку лінзи перпендикулярно головній оптичній вісі ставлять великий рухомий плаский екран-детектор, який рахує інтенсивність світла наступним чином: повну потужність світлового потоку, яка падає на детектор, він ділить на площу освітленої області. Максимальна інтенсивність, яка була виміряна детектором, в α разів більша, ніж та, що падає на лінзу. Розглянувши два варіанта: **1) α=2; 2) α=8**,
Знайдіть:
А) Коефіцієнт заломлення матеріалу другої половинки лінзи.
Б) Чи є якісь **обмеження** на можливу величину α?
Примітка. Нагадаємо, що оптична сила двоопуклої лінзи з радіусом кривини сферичних поверхонь r та коефіцієнтом заломлення n дорівнює $D = \frac{2(n-1)}{r}$.

Задачі запропонували:
68-69 Майзеліс З.О., 70-71 Рідкокаша І.П., 72 Олійник А.О.

10 клас

2020-2021 роки

І заочний тур



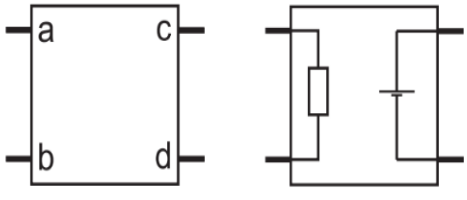
(73) «Бережись цеглини!» У зображеній на рисунку системі всі блоки та нитки невагомі, нитки дуже довгі та нерозтяжні, тертя в осях блоків та опір повітря відсутні. Усі тягарці утримують на одному рівні на невеликій висоті **H** над землею. ***Який*** із тягарців торкнеться землі першим, якщо їх відпустити одночасно без початкової швидкості? **Через який час**? Вважати, що $m_1 = \text{m}$, $m_2 = 3\text{m}$, $m_3 = 4\text{m}$.

(74) «Естафета». Команда з трьох скейтбордистів після виконання трюків у першій частині змагань втратила один скейтборд. Допоможіть команді показати найкращий результат у другій частині змагань з двома скейтбордами на трьох, де трасу довжиною L треба подолати за найменший час хоч пішки, хоч на скейтборді (удвох їхати на одному скейтборді забороняється). На фініші має зібратися вся команда, тобто час команди визначається часом t останнього, хто перетнув фінішну лінію і приєднався до своїх. Відомо, що чим довшу **загальну відстань** l після старту долає учасник, тим сильніше за рахунок утоми зменшується його швидкість. Залежності швидкостей від l мають вигляд: $v = \frac{v_0}{1+\alpha l}$, $u = \frac{u_0}{1+\beta l}$, де v – швидкість учасника на скейтборді, u – без скейтборду, коефіцієнти α і β характеризують ступінь утомлюваності.

Запропонуйте оптимальну логістику руху. **Знайдіть** у загальному вигляді **мінімальний час t**.

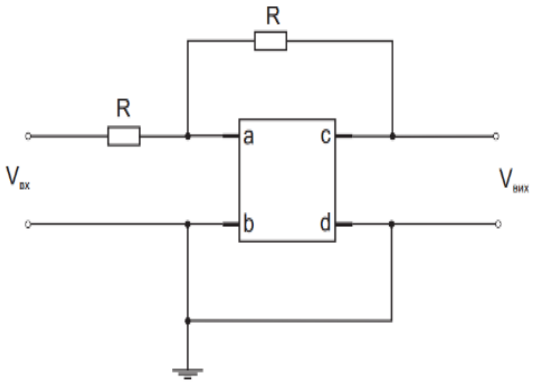
Вважаючи, що наприкінці всієї траси швидкість і на скейтборді, і без нього зменшується на 20%, **обчисліть, на скільки відсотків** час t виявиться більшим за час t_0 подолання траси без фактору втоми, тобто, за умови, що початкові стартові швидкості v_0 і u_0 залишалися незмінними протягом усієї гонки.

(75) «Короткозорий баскетболіст-нумізмат». Ближня та дальня межі акомодації короткозорої людини складають 9 та 13 см відповідно, і вона носить окуляри, у яких, не напружуючи очі, бачить віддалені предмети. Окуляри при цьому вона розміщує безпосередньо перед очима. **Як може скористатися** цими окулярами людина, щоб, так само не напружуючи зір, роздивитись старовинну монету, яка лежить у неї під ногами на дні басейну? Глибина басейну 1 м, очі людини знаходяться на висоті 2 м над дном, показник заломлення води 4/3, показник заломлення матеріалу окулярів 1,25, вода повністю прозора, хвиль немає, людина не нахиляється і дивиться вертикально вниз.



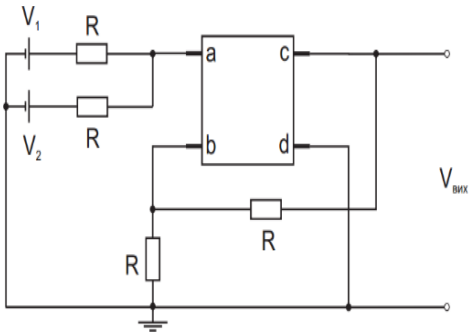
(76) «Дорослі схеми». Розглянемо таку собі «просту» схему з чотирма клемами, яка дуже часто зустрічається в техніці. Усередині схеми між виводами ***a*** та ***b*** включено резистор, опір якого можна вважати нескінченно великим. Між виводами ***c*** та ***d*** підключено особливе джерело напруги. Зв'язок напруг між виводами ***a*** та ***b***, а також ***c*** та ***d*** задається таким чином: $U_{cd} = KU_{ab}$, де K - дуже великий за чисельним значенням коефіцієнт $K \gg 1$, точне значення якого для розв'язання цієї задачі знати не потрібно.

а) **Визначте залежність значення вихідної напруги** $V_{вих}$ в залежності від вхідної напруги $V_{вх}$ в наведеній схемі. Значення опорів двох додаткових резисторів (див. рис.) R=1 кОм.



б) Схеми такого типу можна розв'язувати, використовуючи певне наближення. **Яке спрощення** можна зробити, виходячи із того, що K є дуже великою за чисельним значенням величиною?

в) Розгляньте наведену схему. **Визначте залежність значення вихідної напруги** $V_{вих}$ від напруг V_1 та V_2. Значення опорів усіх додаткових резисторів (див. рис.) R=1 кОм.

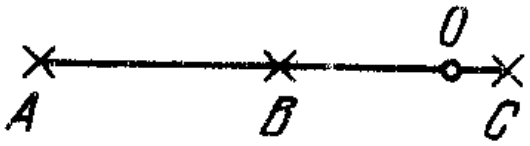


(77) «Специфічний напій». Добре теплоізольована посудина для напою має форму циліндра з внутрішнім радіусом 30 мм, загальною висотою 200 мм, масою 100 г і початковою температурою 250 °C. Циліндр розміщують вертикально на горизонтальному столі. Досвідчений експериментатор швидко і охайно вливає через невеликий отвір у кришці напій (рідину) за температури 0 °C доки центр мас системи припинить опускатися. (Вважайте, що під час процесу вливання рідини в посудину процес теплопередачі йде дуже повільно!)
Відразу після додавання рідини експериментатор кладе посудину на бічну поверхню. **Визначте відстань** від осі циліндра до центру мас системи циліндра разом з рідиною через великий проміжок часу. Товщина дна та кришки циліндричної посудини складають 5 мм кожна, коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу циліндра $98{,}9 \cdot 10^{-5}$ 1/К, а питома теплоємність складає 1600 Дж/(кг°C). Коефіцієнт об’ємного теплового розширення рідини 10^{-3} 1/К, її густина 1000 кг/м^3, питома теплоємність напою становить 4200 Дж/(кг·°C). Рідина із циліндра не виливається, теплообміном з навколишнім середовищем можна знехтувати. Вважайте, що речовини під час теплового розширення розширюються у всі сторони однаково та коефіцієнти лінійного теплового розширення матеріалу циліндра й об’ємного теплового розширення рідини є незмінними у всьому інтервалі температур, що зустрічається в задачі. Усі розміри посудини надані для температури 250 °C.

Задачі запропонували:

73 Гельфгат І.М., 74 Орлянський О.Ю., 75 Мєшков О.Ю., 76 адаптована з американської олімпіади (USAPhO), 77 Ткачов О.М.

ІІ заочний тур



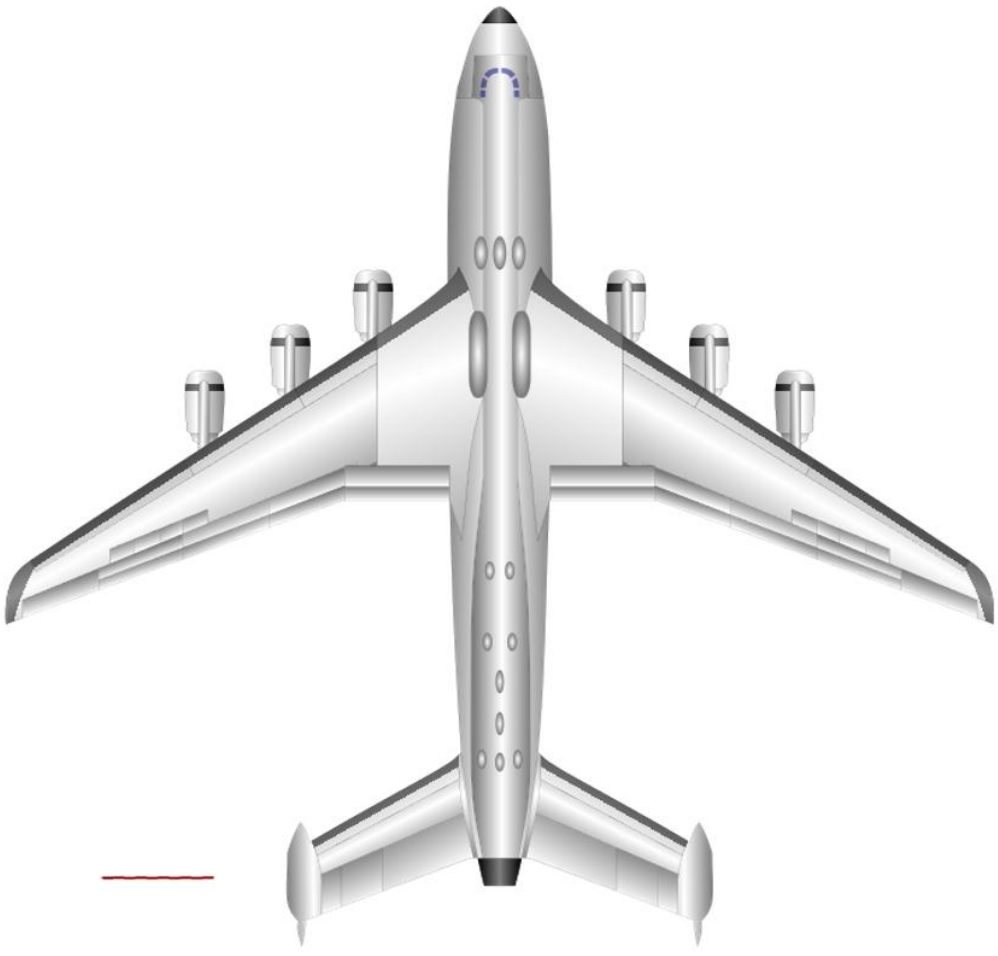
(78) «Озадачені звуками». У відомому збірнику задач за редакцією О.Я. Савченко (Задачи по физике, Наука, 1988) задача 1.1.5* має наступну умову: «Три мікрофони, розташовані на одній прямій у точках А, В, С, зареєстрували послідовно в моменти часу $t_A > t_B > t_C$ звук від вибуху в точці О, що лежить на відрізку АС. Знайдіть відрізок АО, якщо АВ = ВС = L. У який момент часу відбувся вибух? Швидкість звуку c.»

Можливо, колись Ви розв'язували цю задачу і цілком імовірно, що отримали відповідь, яка не збіглася з громіздкою відповіддю в кінці задачника. Насправді ж обидві відповіді були правильними. Справа в тому, що ця задача є перевизначеною (в умові зайві дані або між ними існує зв'язок), і тому відповідь може бути записана багатьма способами. Довести, що ця задача є перевизначеною дуже легко: задані в умові довжина L, швидкість звуку c і моменти часу t_A і t_B пов'язані зрозумілим співвідношенням: $AB = L = c(t_A - t_B)$.

Тому, залишивши питання задачі без змін, послабимо її геометричні умови.

1. Точка О належить відрізку ВС, але точки А, В, С не розташовані на одній прямій. До речі, **які положення** точки О **не можливі**?
2. Точки А, В, С розташовані на одній прямій, але точка О має довільне розташування. **Скільки положень** точки О відповідає заданим L, c, t_A, t_B, t_C?

(79) «Тіньові» рекорди». Як відомо, тіні утворюються за рахунок освітлення земної поверхні Сонцем, яке має радіус 700 000 км і віддалене на відстань 150 млн км.

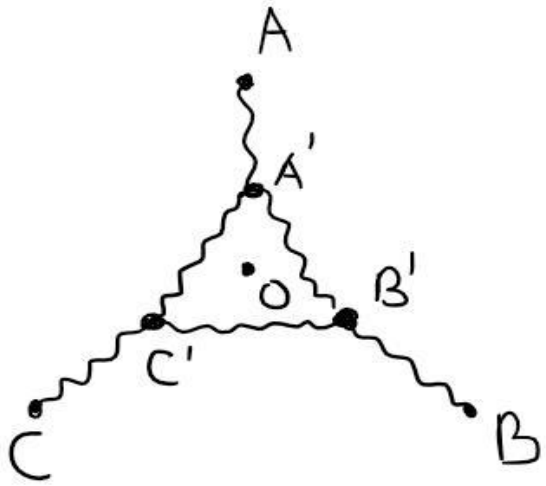


Найбільший у світі літак АН-225 Мрія, який встановив понад 240 світових рекордів, розроблений і виготовлений в Україні. Розрахуйте нові ще не зареєстровані рекорди. Визначте, на якій **найбільшій висоті** може летіти АН-225, щоб удень на горизонтальній поверхні все ще спостерігалась від нього тінь? На якій **найменшій висоті** він може летіти, щоб тіні від нього не було? Для яких **найбільших висот** тінь на землі нагадуватиме форму літака і приблизно який вигляд вона матиме? **Якими стануть відповіді**, якщо напрям на сонце буде утворювати кут 30° з горизонтом?

Вважайте, що літак летить уздовж горизонтальної прямої. При розв'язуванні задачі використайте наведене зображення Ан-225, на якому довжина масштабного відрізку зліва у нижній частині відповідає 10 м.

(80) «**Мавп´ячі перегони**». Через ідеально гладеньку горизонтальну колоду перекинута невагома нерозтяжна ліана довжиною 2L. Дві невеликі за розмірами мавпи стрибають з поверхні землі вертикально вгору, одночасно хапають кінці ліани і відразу синхронно починають протягувати ліану, перебираючи її лапами зі сталими швидкостями відносно себе.
Перша мавпа має масу M, застрибує на ліану зі швидкістю V та протягує її зі швидкістю V відносно себе. Друга мавпа масою 2M, застрибує на ліану зі швидкістю 3V та протягує її зі швидкістю 2V відносно себе.
За яких значень L мавпа масою 2M досягне колоди першою? Перед початком перегонів кінці ліани знаходяться на однаковій висоті.

(81) «Чи то трикутник, чи то зірка». Система пружин має вигляд, зображений на малюнку. Трикутник ABC є рівностороннім, точка O — його центр. Точки A, B, C закріплені, точки A', B', C' можуть вільно рухатись у межах площини. Пружини можуть вільно обертатися навколо точок, до яких вони приєднані, та завжди знаходяться в площині малюнка. Жорсткості пружин, що приєднані до точок A та A', B та B', C та C' дорівнюють k. Жорсткості пружин, що приєднані до точок A' та B', B' та C', A' та C', дорівнюють k/3. У недеформованому стані довжини пружин, приєднаних до A та A', B та B', C та C', дорівнюють довжині відрізка AO, а пружин між точками A' та B', B' та C', A' та C' – довжині відрізка AB. Довжина відрізка AO відома та дорівнює l. Тертям знехтувати. При стисканні пружин виконується закон Гука.



А) Знайти **довжини пружин** у початковому стані рівноваги.

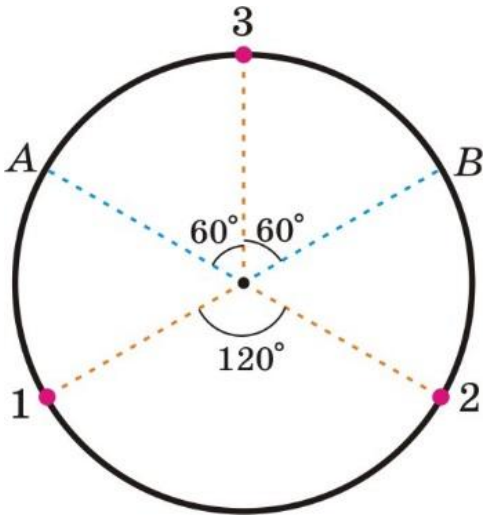
Б) **Довести**, що це положення рівноваги не є стійким відносно невеликих обертів трикутника A´B´C´ навколо центру O.

В) Знайти **кут**, на який повернеться трикутник після втрати рівноваги, коли коливання припиняться та система перейде в новий рівноважний стан.

(82) «Невгамовна намистинка». На тонкому горизонтальному діелектричному обручі радіусом R перебувають три однакові намистинки. Маса кожної намистинки дорівнює m, її заряд q. Намистинки 1 і 2 закріплені (див. рисунок), намистинка 3 може ковзати обручем без тертя.

1) Визначте **період малих коливань** намистинки 3 навколо її положення рівноваги.

2) Визначте **максимальну швидкість** намистинки 3, якщо вона здійснює коливання між точками A і B.



Задачі запропонували:

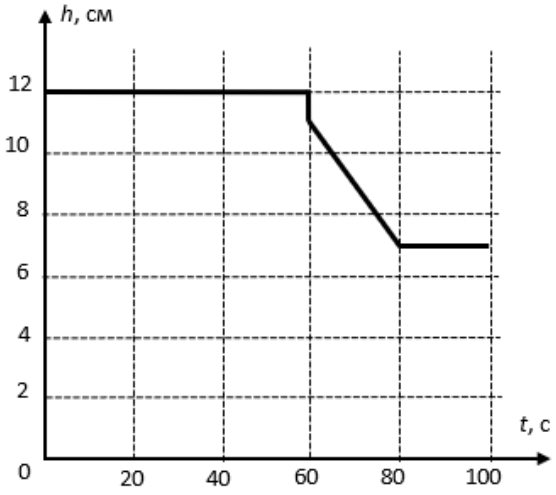
78, 79 Орлянський О.Ю., 80 Пашко М.І., 81 Микуленко О.І., 82 Гельфгат І.М.

Фінал

(83) «З ніг на голову». Поверхня столу ламінована двома різними матеріалами. Стіл нахилили паралельно лінії дотику ламінатів і поклали на нього вирізаний з лінолеуму рівнобедрений трикутник основою впритул до лінії розділу. Трикутник відпустили, і він, проїхавши вниз свою висоту h, зупинився. **Скільки проїде вниз трикутник**, якщо його покласти перевернутим, тобто так, щоб вершина дотикалася лінії розділу, а основа була їй паралельною? **У скільки разів** максимальна швидкість руху трикутника цього разу буде більшою, ніж попереднього?



(84) «Каструля в каструлі». У циліндричній каструлі, заповненій по вінця водою, плаває порожня залізна каструля меншого розміру. Воду починають обережно переливати з великої каструлі у малу (щосекунди переливають 20 г води). Залежність рівня води у великій каструлі від часу переливання наведено на графіку.



А) **Поясніть** цю залежність.

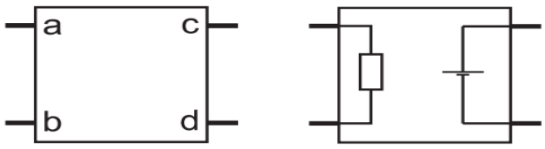
Б) **Визначте масу** меншої каструлі і **об'єми обох** каструль.

(85) «Не жалять не кусають у хату не пускають». Гігантський шершень Vespa mandarinia japonica полює на японських бджіл. Однак, якщо один із шершнів намагається вторгнутися у вулик, кілька сотень бджіл швидко формують компактну кулю навколо шершня, щоб зупинити його. Вони не жалять, не кусають, не розчавлюють і не задушують шершня. Бджоли щільно притискаються одна до одної та до шершня і досить швидко перегрівають його, підвищуючи температуру свого тіла до 48°C, що смертельно для шершнів, але не для бджіл. Можна вважати, що тепратура шершня стає такою ж, як і у бджіл. Цікаво, що бджоли майже завжди формують компактну кулю постійного радіусу, таким чином на шершня налітає не весь вулик, а тільки необхідна кількість бджіл.

За навколишньої температури 25°C для боротьби із шершнем потрібно 500 бджіл, а за температури навколишнього повітря 30°C тільки 400. Скільки бджіл потрібно для перемоги над шершнем за температури навколишнього повітря 35 °C. При розв'язанні задачі вважайте, що потужність теплових втрат прямо пропорційна різниці температур між тілом і навколишнім середовищем. Бджоли в цьому випадку борються за виживання і кожна з них виділяє однакову максимально можливу теплову потужність.

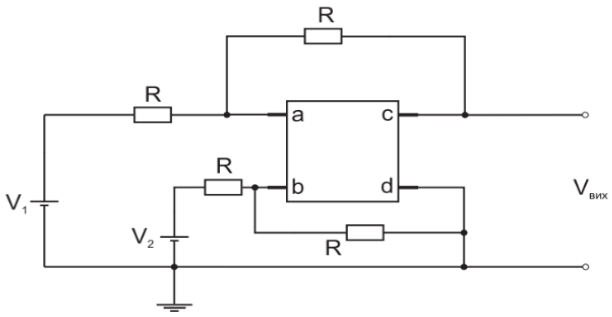


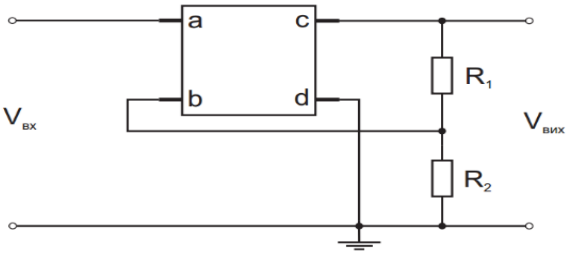
(86) «Дуже дорослі схеми». Розглянемо таку собі «просту» схему з чотирма клемами, яка дуже часто зустрічається в техніці. Усередині схеми між виводами ***a*** та ***b*** включено резистор, опір якого можна вважати нескінченно великим. Між виводами ***c*** та ***d*** підключено особливе джерело напруги. Зв'язок напруг між виводами ***a*** та ***b***, а також ***c*** та ***d*** задається таким чином: $U_{cd} = KU_{ab}$, де K - дуже великий за чисельним значенням коефіцієнт $K \gg 1$, точне значення якого для розв'язання цієї задачі знати не потрібно.



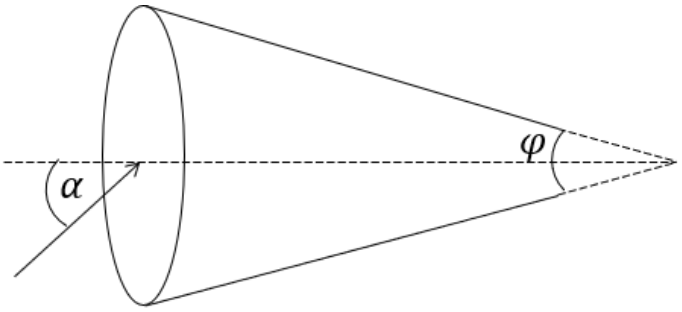
а) Розгляньте наведену схему. **Визначте залежність значення вихідної напруги** $V_{вих}$ від напруг V_1 та V_2. Значення опорів усіх додаткових резисторів (див. рис.) R=1 кОм.

б) **Визначте залежність значення вихідної напруги** $V_{вих}$ в залежності від вхідної напруги $V_{вх}$ в наведеній схемі. Значення опорів R_1=10 кОм, R_2=1 кОм.





(87) «Неприступний світловод». Світло падає під кутом α на торцеву поверхню світловода у формі конуса з дуже малим кутом φ, що знаходиться у повітрі. Показник заломлення світловода n, діаметр вхідного торця D. **Знайти відстань L**, на яку промінь може проникнути всередину світловода, якщо його бічна поверхня прозора. Поглинанням світла знехтувати.



Задачі запропонували:

83,84 Орлянський О.Ю., 85 Ткачов О.М., 86 адаптована з американської олімпіади (USAPhO), 87 Пашко М.І.

2021-2022 роки

І заочний тур

(88) «Підступний м'яч». Юний дослідник вивчив рух м'яча, підкинутого вертикально вгору з поверхні землі. Він отримав такі результати: початкова швидкість $v_0 = 18$ м/с, максимальна висота підйому $h = 10$ м, швидкість безпосередньо перед падінням $v = 8$ м/с. Погода була безвітряна. Уважайте, що $g = 10$ м/с^2. Дослідник глибоко впевнений, що наведені результати абсолютно точні.

А) Чи готові ви йому **повірити**? Обґрунтуйте свою відповідь.

Б) Якщо помилковим було тільки вимірювання максимальної висоти, то які її **значення** ви вважаєте принципово можливими?

В) Визначте **час польоту** за наведених значень v_0 і v. Уважайте, що сила опору повітря прямо пропорційна швидкості руху м'яча.

(89) «Хатні справи». Домогосподарка хоче повісити вішалку з важкою мокрою сорочкою на горизонтально підвішену легку, нерозтяжну мотузку довжиною **L**=2,3 м. Відстань між точками підвісу мотузки **l**=2 м. Виявилось, що якщо після підвішування сорочки кут найбільшого відхилення натягнутої мотузки від горизонталі є більшим за **α**=50^0, то вішалка з'їжджає по мотузці. Маса мокрої сорочки з вішалкою дорівнює

m=0,5 кг. Визначте:

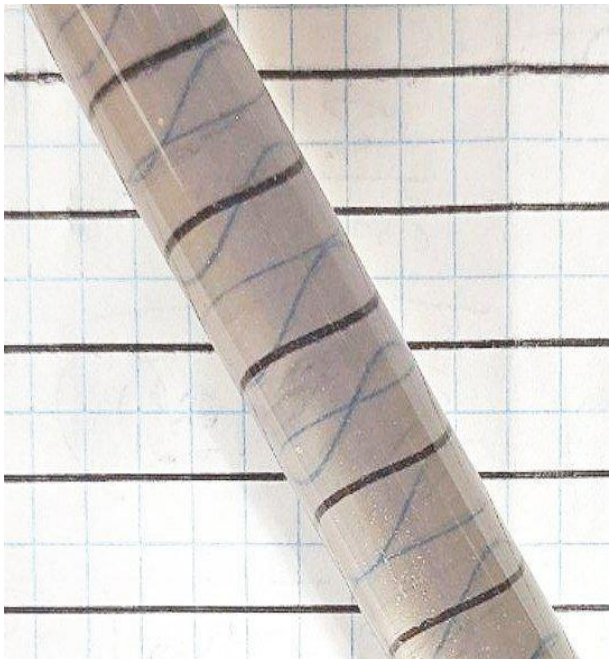
А) **максимальне та мінімальне значення сили**, що може діяти на ліве кріплення мотузки, за умови, що вішалка є нерухомою;

Б) **за яких кутів** нахилу мотузки до горизонту з лівого боку від сорочки ці значення сили досягаються.

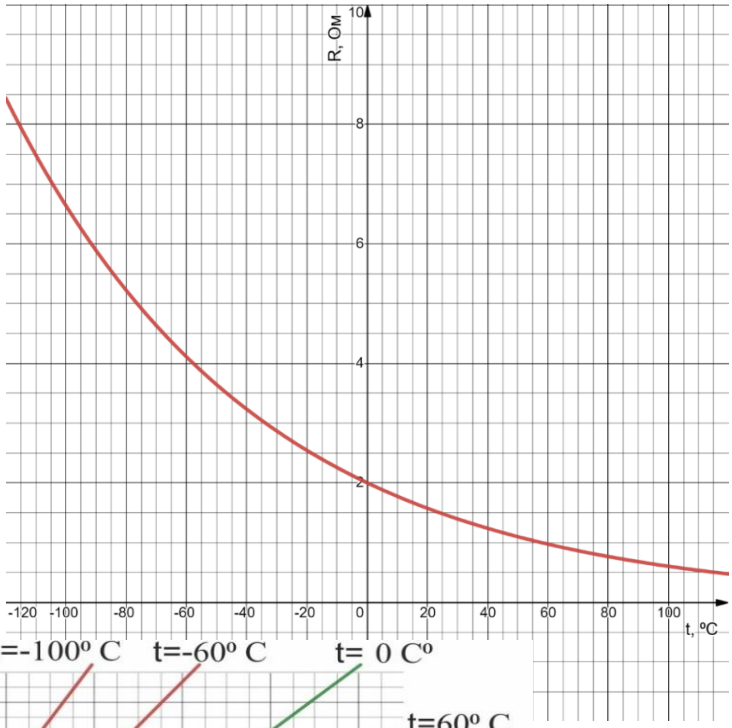
(90) «Викривлення реальності». На світлині наведено зображення паралельних рівновіддалених ліній, накреслених на аркуші в клітинку. На аркуші знаходиться скляне циліндричне тіло (скляна паличка з набору «Електростатика»).

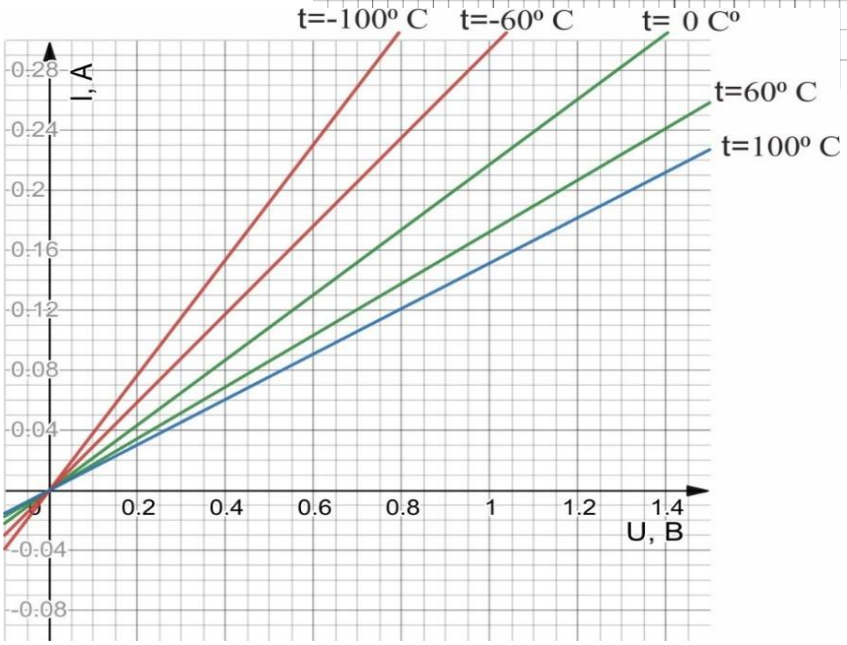
А) Спираючись на фізичні закони та якісно зроблену геометричну побудову, **поясніть викривлення** зображення прямих ліній, яке ви бачите на світлині.

Б) Користуючись наведеною у задачі світлиною, спробуйте розрахувати **показник заломлення** цієї скляної палички.



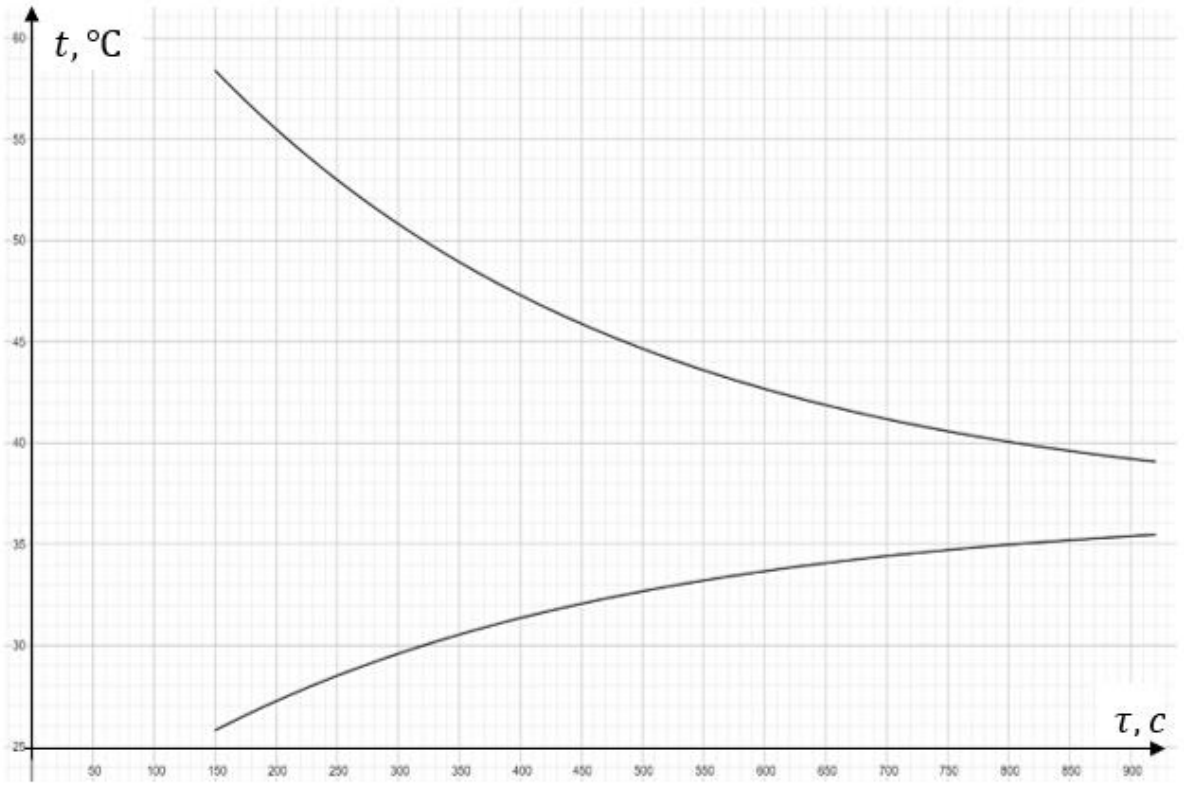
(91) «Тонке налаштування». Для того щоб амперметр з лінійною шкалою міг працювати за різних температур, його вмикають послідовно із напівпровідниковим елементом, залежність опору якого від температури зображена на графіку нижче. Знайдіть, **в околі якого значення температури** покази амперметра в такому комбінованому приладі будуть найменш чутливими до невеликих коливань температури середовища? Вольт-амперні характеристики амперметра для різних значень температури дивіться нижче.





(92) «Людський фактор». В лабораторії проводять деякі досліди з водою($c = 4200 \frac{Дж}{кг*°C}$), для яких використовують теплоізольовану, циліндричну посудину, що знаходиться на горизонтальній поверхні. В посудину заливають воду масою 300 г. В центр посудини вставляють тонкостінну циліндричну трубу так, що частина води залишається в середині труби, а частина ззовні. Воду всередині труби дуже швидко нагрівають, а потім одночасно вимикають нагрівач та вмикають секундомір. Деякий час після цього експериментатори слідкують за зміною температури води в обох частинах посудини (на рисунку наведено графіки залежності цих температур від часу). Визначити: А) **Масу води** всередині труби. Б) Яка **температура** встановиться в посудині через достатньо тривалий час. В) Вважаючи потужність теплопередачі крізь трубу прямо пропорційною до різниці температур по обидва боки труби, визначити **коефіцієнт** цієї пропорційності. Г) **Чи можливо** за цими даними визначити **температури води** всередині та ззовні труби у той момент, коли вимкнули нагрівач? Якщо так, то **знайдіть ці температури**. Втратами енергії у навколишнє середовище та випаровуванням знехтувати.

Примітка. На жаль, експериментатори були достатньо неквапливими, для того щоб своєчасно почати виміри і дуже нетерплячими, щоб довести їх до кінця.

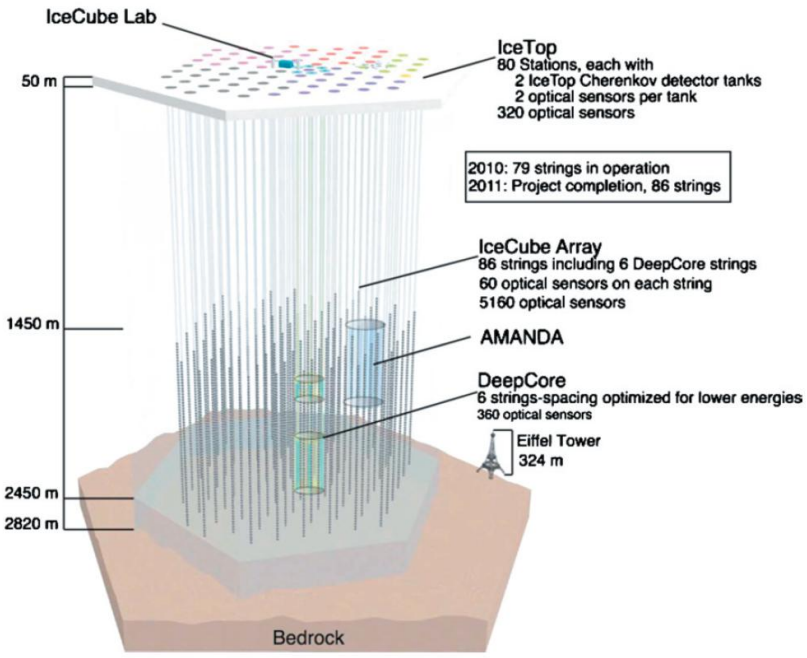


Задачі запропонували:

88 Гельфгат І.М., 89,91 Олійник А.О., 90,92 Пашко М.І.

ІІ заочний тур

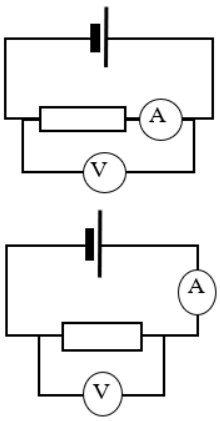
(93) «Нейтринна обсерваторія». Перед вами схематичне зображення нейтринної обсерваторії IceCube, розташованої над південним полюсом Землі. **На скільки** відсотків **відрізняється** прискорення вільного падіння на льодовій поверхні біля IceCube Lab від прискорення вільного падіння під обсерваторією біля скельних порід? **За якої середньої густини** планети прискорення вільного падіння у будь-якому місці розташування детектора подібної обсерваторії буде практично однаковим?



(94) «Майже точний постріл». Навідник гармати встановлює перед пострілом її ствол під кутом α до горизонту. Механізми наведення припускають випадкові відхилення ствола на кут не

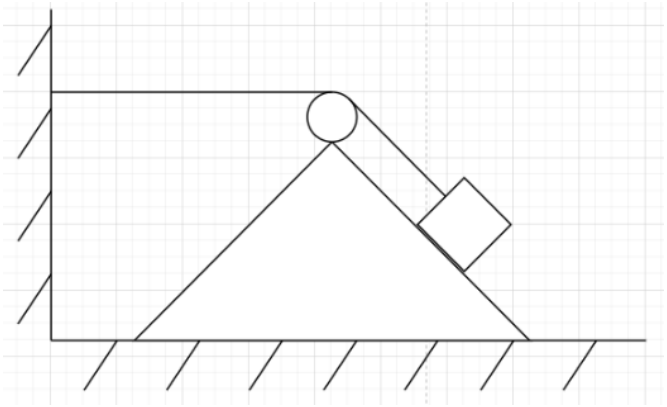
більше ніж $\varphi = 0{,}5°$ у будь-якій площині. Розрахункова початкова швидкість снаряду $v_0 = 500\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, проте можливі відхилення до $\Delta v_0 = 2{,}5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Визначте площу ділянки, в яку може влучити снаряд. Опір повітря не враховуйте, поверхню Землі вважайте плоскою, $g = 10\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Розгляньте два випадки: $\alpha_1 = 60°$ і $\alpha_2 = 45°$.

(95) «Два виміри». Для того, щоб знайти опір резистора, учень двічі зробив виміри, по-різному під'єднавши вольтметр і амперметр. Одного разу він отримав 30 В і 10 А, а другого 29 В і 11 А. Він відволікався, і наприкінці навіть не був впевнений до якої зі схем які виміри відносяться. Але оскільки вийшли різні значення опору, учень вирішив, що закон Ома все одно виконується лише приблизно, а значення опору резистору лежить десь між 2,8 і 3 Ом. **Чи був він правий**? Спробуйте більш точно **визначити опір резистора**. У якості джерела струму учень використовував:
а) джерело сталої напруги
б) батарею з ЕРС 32 В та невідомим внутрішнім опором.



(96) «Потужний гелікоптер». Важкий гвинтокрил нерухомо висить у повітрі. Швидкість, з якою його лопаті відкидають повітря вниз, дорівнює u=10 м/с. Повну механічну потужність двигуна збільшують вдвічі і гвинтокрил починає злітати вверх зі швидкістю $V_1 = 2.0$ м/с. **Знайдіть швидкість** підйому гвинтокрила V_2, якщо потужність, яку розвиває двигун, збільшити ще вдвічі. Вважайте, що сила опору руху гвинтокрила пропорційна квадрату його швидкості, а швидкість, з якою лопаті відкидають повітря вниз відносно гелікоптера, незмінна для всіх трьох випадків.

(97) «Поїде – не поїде». Маса рівнобедреної прямокутної призми на малюнку дорівнює M, а маса тіла, що знаходиться на призмі, дорівнює m. **Знайдіть,** за якого **відношення коефіцієнтів тертя** між призмою та горизонтальною поверхнею та тілом й призмою система знаходиться у стані спокою. Нитка невагома та нерозтяжна, тертя в блоці немає.



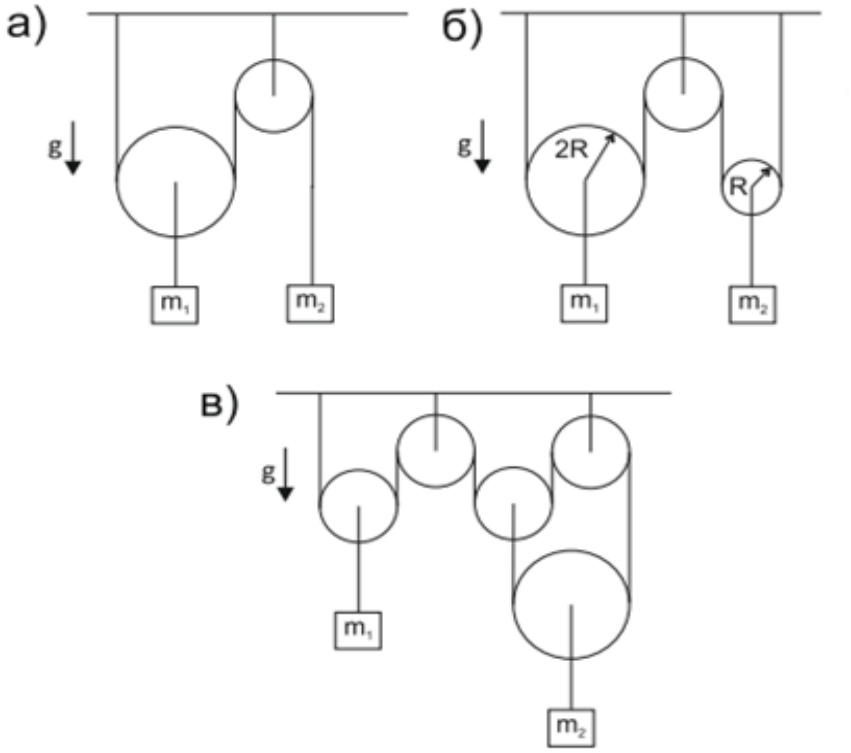
Задачі запропонували:

93, 95 Орлянський О.Ю., 94 Гельфгат І.М., 96 Олійник А.О., 97 Олійник А.О.,

Гельфгат І.М., Овсянніков О.А.

Фінал

(98) «Звичайні блоки))» Розрахуйте прискорення вантажу m_1. Блоки та нитки невагомі, тертя нема. Усі ділянки ниток, що не торкаються блоків, вертикальні.



(99) «Завжди вертикальна!» Тонкостінна циліндрична пробірка масою 10 г площею основи 2 см^2 та довжиною 41 см має плавати у рівновазі у вертикальному положенні в воді. Для підтримання такого положення в пробірку заливають рідину густини 2000 кг/м^3. Густина води 1000 кг/м^3, g=10 м/с^2. $\pi^2 \approx 10$. Вважати, що центр мас незаповненої пробірки знаходиться в її геометричному центрі, а саму пробірку вузькою.

а) Якої висоти може бути стовпчик цієї рідини у пробірці?

б) Якої висоти має бути стовпчик цієї рідини у пробірці, щоб період малих вертикальних її коливань у ванні з дуже великою площею поверхні води склав 1,2 с? Затуханням коливань у цьому та наступних пунктах цієї задачі знехтувати. Рухом рідини у цьому пункті можете також знехтувати.

в) Яким стане період малих вертикальних коливань пробірки з пункту б), якщо перенести її в посудину з водою, площа поверхні якої складає 10 см^2? Уважати, що вода у проміжку між пробіркою та стінкою посудини рухається тільки вертикально та всюди з однаковою швидкістю.

г) Якою стане глибина занурення у воду у стані рівноваги та період малих вертикальних коливань пробірки з пункту в), якщо посудину рухати з прискоренням g/2, спрямованим вгору.

(100) «Геометрія амперметра». На першому рисунку наведений китайський амперметр, який дозволяє міряти силу струму в двох діапазонах від –0,2 А до 0,6 А і від –1 А до 3 А. Як можна побачити з позначень біля клем, опір власне вимірювальної частини амперметра дорівнює 10 Ом, а одне з надрукованих значень не видно з-за червоної плями.

а) Відновіть значення під червоною плямою і зайдіть струм, що йде через вимірювальну частину амперметра при максимальному відхиленні стрілки.

б) Чи буде працювати амперметр, якщо увімкнути його у коло червоними клемами? Якщо ні, поясніть чому, якщо так, який максимальний струм можна буде при такому підключенні міряти?

в) Принципова схема вимірювальної частини амперметра магнітоелектричної системи взята з підручника фізики за 9 клас (Рис.7.6.). До переваг системи з рухомою рамкою і нерухомим магнітом відносять точність і рівномірну шкалу. Для спіральних пружин 2 виконується закон Гука – момент сил пружності M, що повертає стрілку в початкове положення, пропорційний до кута відхилення φ. Поясніть, яку роль у забезпеченні рівномірності шкали 7 відіграє форма магнітів поблизу рамки, які разом з феромагнітним сталевим осердям 5 утворюють вузький округлий зазор. Знайдіть на Рис. 7.6 помилку у початковому розташуванні рамки 4, що обертається разом зі стрілкою 6.



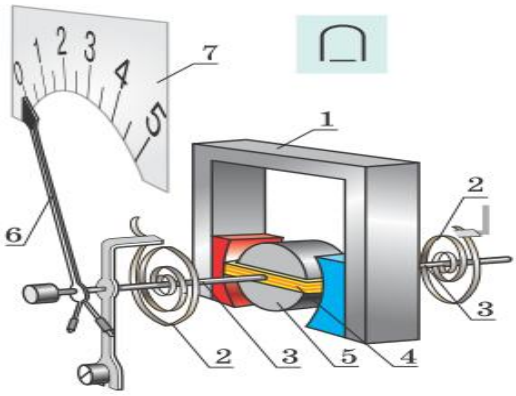


Рис. 7.6. Схема вимірювального механізму приладів магнітоелектричної системи:
1 — постійний нерухомий магніт; 2 — спіральні пружини; 3 — півосі; 4 — рамка, жорстко закріплена на півосях; 5 — нерухоме осердя; 6 — стрілка; 7 — шкала

г) Вважаючи, що у китайському амперметрі рамка має вигляд квадрату, на який намотано 100 витків дроту площею перерізу 0,01 мм^2, і знаходиться у магнітному полі 0,1 Тл, знайдіть коефіцієнт пружності пружин $k = M/\varphi$. Питомий опір міді 17 нОм·м.

(101) «Upgrade людського ока». Більшість джерел електромагнітних хвиль випромінюють одночасно в усіх діапазонах довжин хвиль: видимому, ультрафіолетовому, інфрачервоному і т.д. Наше око сприймає лише так званий видимий діапазон довжин хвиль: приблизно від 400 нм до 750 нм. А уявіть собі, як було б круто для людини бачити ще й в ультрафіолетовому діапазоні: скажемо, до 100 нм! Але, насправді, є підозра, що можуть виникнути проблеми внаслідок явища дисперсії світла (залежності показника заломлення речовини від довжини світлової хвилі).

Змоделюємо наступну ситуацію: нехай зоровий апарат людини складається з симетричної опуклої лінзи (кришталика), що може змінювати свій радіус кривизни й оточена з обох боків речовиною з показником заломлення, що практично дорівнює 1, та екрана-сітківки. Нехай відстань від кришталика до сітківки буде незмінною і дорівнює 2.4 см.

а) На якій максимальній відстані людина ще може розрізнити дві близькі точки, якщо око сфокусоване на них так, щоб їх можна було чітко розглядати в ультрафіолетовому діапазоні для довжини хвиль в 100 нм? Використовуйте той факт, що точки знаходяться близько: уважайте,

що відстань між цими точками приблизно дорівнює діаметру зіниці ока, а також що людина розрізняє дві точки, якщо вона бачить їх розділеними для всіх довжин хвиль.
б) Так все ж, враховуючи ваші розрахунки, чи було б круто мати у арсеналі такий додатковий інтервал хвиль, в якому може бачити людське око? Відповідь аргументувати. Можливо для відповіді на це питання вам будуть корисними деякі відомості про людське око: кутова роздільна здатність сітківки для однієї фіксованої довжини хвилі близько $1.5'$ (1 кутова хвилина дорівнює 1/60 градусу), а середній діаметр зіниці близько 4 мм.
Примітка: Залежність квадрата показника заломлення від довжини хвилі має вигляд:

$$n^2 = a + \frac{b}{\lambda^2},$$ де a, b – деякі константи.

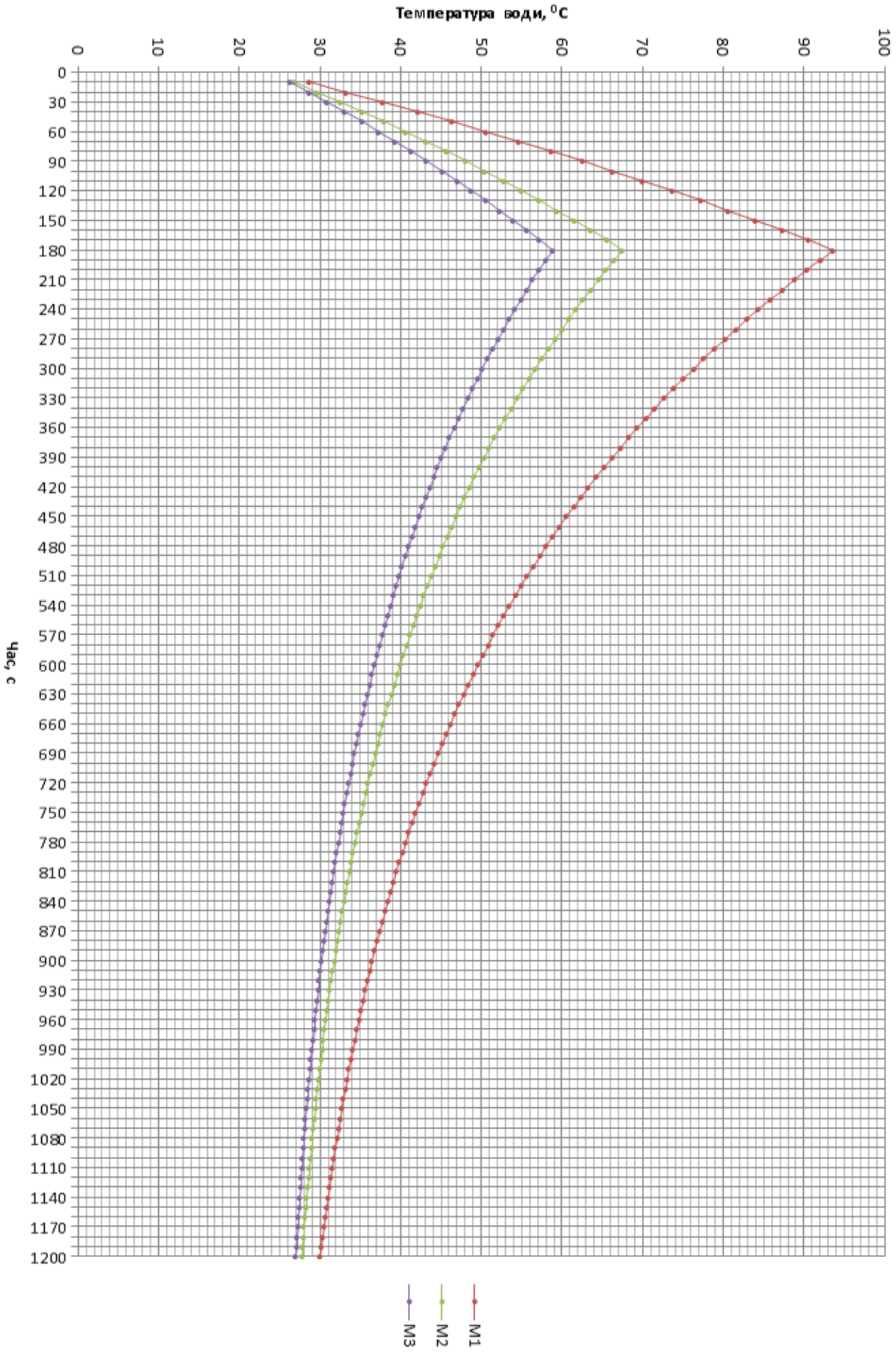
Відомо, що для довжини хвилі $\lambda_1 = 400$ нм коефіцієнт заломлення матеріалу кришталика $n_1 = 1.22036$, а для довжини хвилі $\lambda_2 = 660$ нм коефіцієнт заломлення $n_2 = 1.21995$.

(102) «Змагання з синхронного нагрівання». У трьох герметичних однакових циліндричних посудинах з внутрішнім радіусом 10 см, у кожній з яких розміщено однакові нагрівники та термометри, проводиться дослідження процесів нагрівання та охолодження води. Маса води у першій посудині M_1=500 г, маса води у другій посудині M_2=800 г. У всіх трьох посудинах одночасно вмикають нагрівники і визначають температуру води всередині через кожні 10 с. Через 3 хвилини усі нагрівники вимикають, але вимірювання температури продовжуються. На наступній сторінці наведені графіки залежності температури води від часу у кожній з посудин. Уважаючи, що нагрівання води відбувається рівномірно по всьому об`єму, теплопередача відбувається виключно у радіальному напрямку (теплопередачою вздовж стінок посудини у вертикальному напрямку можна знехтувати), що дно та кришки посудин теплоізольовані, а теплові втрати у навколишнє середовище від посудин прямо пропорційні до площі бокової поверхні води та різниці температур вмісту посудини та навколишнього середовища, за отриманими даними оцініть:
а) коефіцієнт пропорційності теплових втрат;
б) температуру навколишнього середовища;
в) потужність нагрівника; г) масу води M_3 у третій посудині.

Підказка. Як опорні точки для побудови Ваших залежностей рекомендуємо використовувати ті, які найбільш точно лягають на вимірювальну сітку. Для підвищення якості обробки результатів, оберіть діапазон температур, в яких процес охолодження протікає не дуже швидко, але й не дуже повільно.

Задачі запропонували:

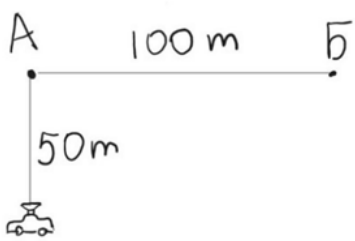
98, 101 Олійник А.О., 99, 102 Пашко М. І., 100 Орлянський О.Ю.


Температура води, °С
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Час, с
0
30
60
90
120
150
180
210
240
270
300
330
360
390
420
450
480
510
540
570
600
630
660
690
720
750
780
810
840
870
900
930
960
990
1020
1050
1080
1110
1140
1170
1200
M3
M2
M1

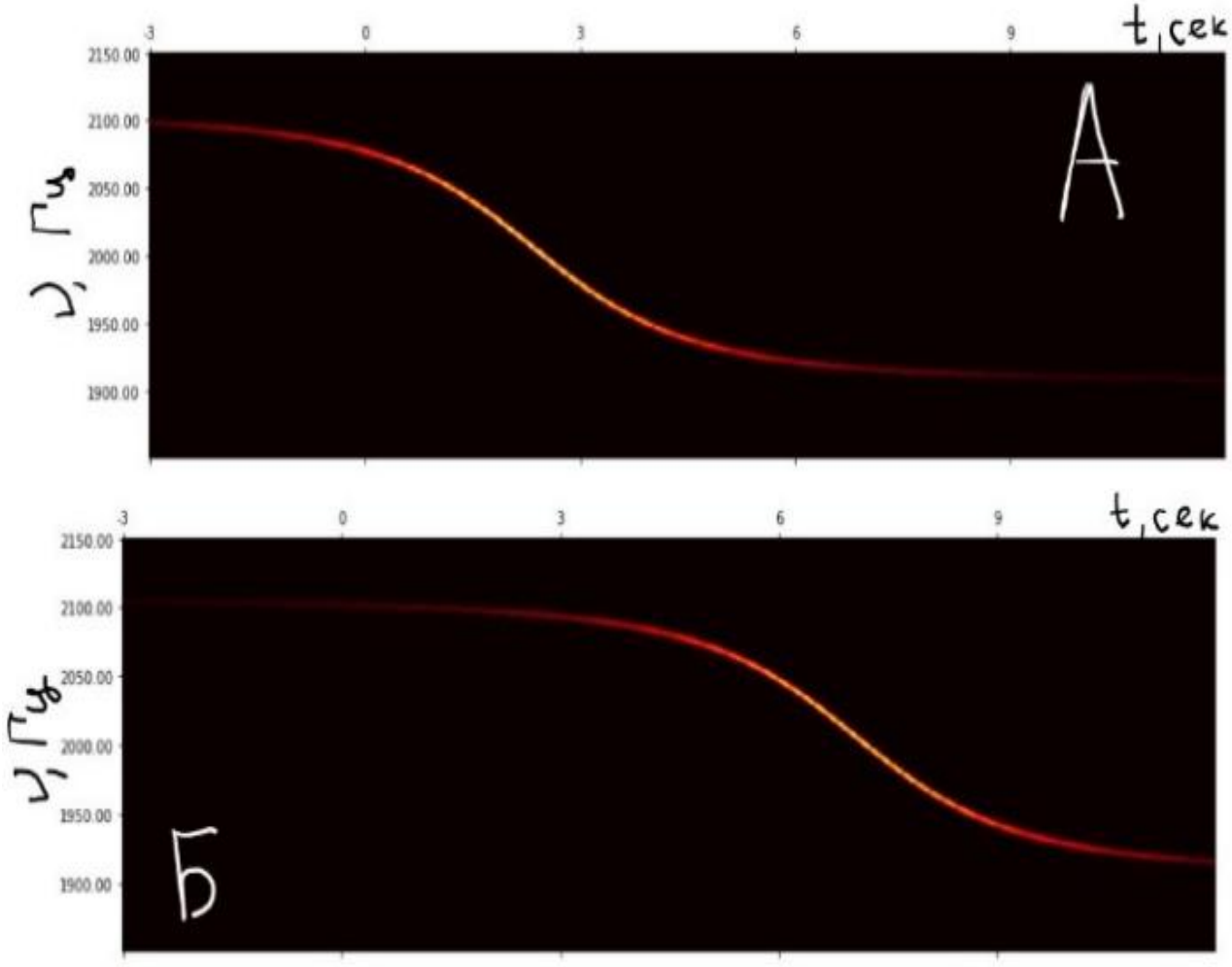
2022-2023 роки

І заочний тур

(103) «Стереоефект». Два мікрофони А та Б розташовані на відстані 100 м один від одного. Повз них проїжджає машина, що рухається вздовж прямої зі сталою швидкістю. На машині встановлений динамік, який звучить на деякий фіксованій частоті звуку.
В момент часу t = 0 секунд машина розташована відносно мікрофонів як показано на рисунку 1.

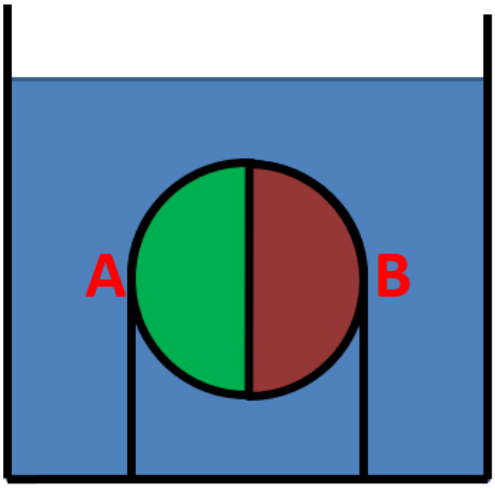


На рисунках 2, 3 зображено спектрограми звуків, які сприймають мікрофони.



Знайдіть:
А) **Швидкість** машини v.
Б) **Частоту** ν_0, на якій звучить динамік.
В) **Мінімальні відстані** r_A, $r_Б$, на якій машина проїжджає повзж мікрофонів А та Б відповідно.
Спектрограма показує інтенсивність звуку для різних частот як функцію часу. Швидкість звуку с = 300м/с. Часом поширення звуку знехтувати.

(104) «Солеві ванни». Куля складається з двох півкуль, виготовлених із матеріалів відношення густин яких до густини води дорівнює 1,1:1,05:1. Куля знаходиться у воді і утримується на вертикальних опорах A і B, що з'єднують діаметрально протилежні кінці кулі (див. рис). У воду поступово добавляють кухонну сіль, ретельно та обережно розмішуючи її. **За якого значення** масової долі солі у розчині деформації стиснення опор зміняться на деформації розтягу? Густина хлориду натрію 2160 кг/м^3. Уважати, що густину розчину можна розрахувати як відношення загальної маси компонент до суми їх об'ємів до змішування.



(105) «Кільцева станція». У фантастичному романі космічна станція масою M_1 має вигляд однорідного тонкого кільця і обертається навколо перпендикулярної до своєї площини осі симетрії для створення всередині ефекту штучної гравітації.
А) Знайдіть **період обертання станції**, якщо радіус кільця станції R, а вага при стандартному зважуванні у будь-якій точці кільця mg, де m – маса, g – прискорення вільного падіння на Землі.

Космічний корабель масою M_2 підлітає по дотичній до обводу кільця і, вирівнюючи швидкість до швидкості обводу, м'яко швартується і вимикає двигун.

Б) **Як зміниться** після цього період обертання станції?

В) **У якому місці** на станції вага тіла при стандартному зважуванні збільшиться на максимальну величину і якою стане?

Г) **Де** на станції важок на нитці відхилиться від перпендикуляра до поверхні на максимальний кут і на який саме?

(106) «Дизайнерський глобус». Поверхню глобусу, зроблену з теплонепровідного діелектрику, щільно та рівномірно вкрили вздовж меридіанів дротами з незвичними характеристиками: вони, як метали, гарно проводять електричний струм, але, як діелектрики, погано проводять теплоту (зазвичай, ці характеристики матеріалів збігаються). Паралелі цього глобусу виготовлені зі звичайного мідного дроту, який гарно проводить і електрику, і тепло. Вони доволі щільно вкривають поверхню глобусу і з'єднані з меридіанами. Глобус за полюси підвісили посеред кімнати водночас як елемент дизайну й обігрівач, і до місць з'єднання між собою меридіанних дротів приклали сталу напругу. Спеціальний амперметр показав, що загальний струм через глобус від 10 А (відразу після подання напруги) зменшився до 8 А, після чого перестав змінюватися.

А) Знайдіть α – **температурний коефіцієнт електричного опору** матеріалу меридіанного дроту, якщо точні виміри температури пірометром в екваторіальній частини глобусу показали 75°C, а на північній широті 46°40′ (у районі Херсону) 100°C.

Б) **Чому** на широті Херсону температура виявилась вищою, ніж на екваторі? Вважати, що теплові втрати пропорційні площі поверхні нагрітого тіла і різниці температур (його і навколишнього середовища). Температура у кімнаті 25°C.

В) **Побудуйте схематичну залежність** температури поверхні глобуса від географічної широти між полярними колами.

Г) **Чому** отриманою залежністю **не можна** користуватися для всіх широт?

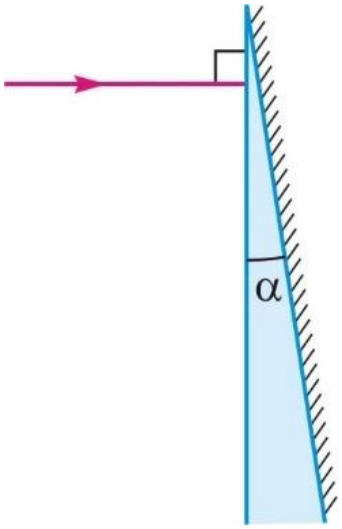
(107) «Театр тіней». Ліхтарик з діаметром матового скла 10 см освітлює непрозорий диск діаметром 5 см, розташований на відстані 10 см. У початковий момент часу рухомий квадратний екран зі стороною 1м розміщують впритул до диску, а потім починають рівномірно віддаляти. **Які фігури** тіні, півтіні і світлої плями при цьому з'являються на екрані? **Намалюйте ці фігури** вказавши їх характерні **розміри** (мінімальні та максимальні) та **відстані** між диском та екраном при яких ці фігури виникають. Центри ліхтарика, диска та екрана знаходять на одній прямій, що перпендикулярна їхнім поверхням.

Задачі запропонували:

103 Микуленко О.І., 104 Шевчук О.Г., 105, 106 Орлянський О.Ю., 107 Засєдка Л.М.

II заочний тур

(108) «Дзеркальний клин». Показаний на рисунку клин виготовлений із прозорого матеріалу та має гладенькі поверхні. Права поверхня клину посріблена. Кут біля вершини клину $\boldsymbol{\alpha} = 3°$. На ліву поверхню нормально падає вузький пучок лазерного випромінювання. Коли клин перебував у повітрі, спостерігач зліва від клину нарахував 5 відбитих пучків світла. Коли ж клин помістили у воду, кількість відбитих пучків збільшилася до 8. Уважайте, що показники заломлення повітря та води дорівнюють відповідно 1 і 1,33.



А) Визначте за результатами проведених дослідів **абсолютний показник заломлення** матеріалу клину та похибку вимірювання.

Б) **Як зміниться** результат, якщо не вважати значення кута біля вершини клину відомим точно, а врахувати похибку цієї величини: $\boldsymbol{\alpha} = 3° \pm 0{,}2°$?

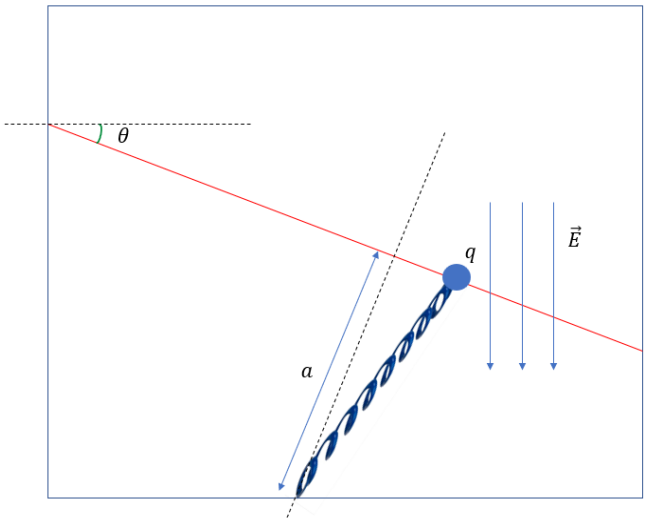
В) **Наскільки просто (чи наскільки складно) реалізувати** такий спосіб для вимірювання показника заломлення? **Чи знадобиться** якесь високотехнологічне обладнання, крім лазера?

(109) «заХмарні коливання». Дві розріджені кулясті хмари позитивно зарядженого аерозолю (рівномірно розподілені дрібні заряджені частинки) розташовані так, що відстань між їх центрами дорівнює **10R**. Радіус першої хмари $\boldsymbol{R_1 = 2R}$, а другої $\boldsymbol{R_2 = 4R}$. Заряд рівномірно розподілений по об'єму хмарин, об'ємна густина заряду хмар однакова для них обох та дорівнює $\boldsymbol{\rho}$ ($\boldsymbol{\rho} > 0$). Знайдіть: а) **розташування положення рівноваги** точкової порошинки із зарядом **q** та маси m в даній системі **(**порошинка має бути в повній рівновазі лише під дією електростатичних сил) та б) **період малих коливань** (виключно для коливань, що здійснюються вздовж лінії, що поєднує центри хмар) даного заряду біля такого положення рівноваги. Уважайте, що хмари під дією кулонівських сил не деформуються, не рухаються та розподіл заряду в них не змінюється. **Чи залежить** відповідь від знаку заряду порошинки? Ймовірність зіткнення точкового заряду та частинок, з яких складаються хмари, є нехтовно малою.

(110) «Крапля у тумані». Водяна краплина народжується в тумані та починає падати в полі тяжіння з дуже невеликою початковою швидкістю та дуже малим початковим радіусом. Густина туману $\boldsymbol{\rho_т}$, краплинки туману нерухомі та набагато менші за розмірами ніж наша капля в будь-який момент руху (навіть на початку). Зіткнення між краплею та краплинками туману абсолютно непружні. Краплина завжди лишається сферичною. З боку повітря краплина також відчуває дію сили опору $\boldsymbol{kSV^2}$, $\boldsymbol{k}$ – відомий нам коефіцієнт, який пов'язаний із геометрією краплини і коефіцієнтом в'язкості, $\boldsymbol{S}$ – площа поперечного перерізу краплини, **V** – швидкість краплини. Відомо, що через деякий незначний час після початку руху, закон руху можна наближено описати у вигляді залежності $\boldsymbol{x = Ct^n}$, де **x** - відстань, яка пройдена краплиною від моменту її народження, **t** - час від народження. Знайдіть: А) Коефіцієнти **C** та **n**. Б) **Залежність прискорення краплини від часу** для випадку, коли силою опору можна знехтувати.

(111) «Дротовий конструктор». До жорсткого каркасу з неізольованої звареної арматури у вигляді квадрату із стороною $\boldsymbol{a}$ до протилежних діагональних вершин підключено джерело напруги $\boldsymbol{U}$. Арматура плавиться при умові, що по стрижню тече струм $\boldsymbol{I_0}$. У зварній конструкції у вигляді такого квадратного каркасу арматура не плавиться. У вас є ще два окремих жорстких шматка такої ж неізольованої арматури довжиною, що дорівнює довжині сторони квадратного каркасу. **Як треба зварити** каркас та ці два шматка арматури, щоб конструкція при цьому не плавилась, а потужність, що виділяється у отриманому колі, була максимальною з усіх можливих. Опір одиниці довжини арматури дорівнює $\boldsymbol{\lambda}$. Контактним електричним опором в будь-якому місці дотику дротів арматури одна з одною та місцях їх зварювання можна знехтувати. Уважати, що до початку плавлення, конструкція залишається жорсткою.

(112) «Невгамовна намистинка». В діелектричній коробці знаходиться позитивно заряджена намистинка, що нанизана на непровідну спицю, яка розташована під кутом $\boldsymbol{\theta}$ до горизонтальної площини. Намистинка з'єднана з стінкою коробки за допомогою діелектричної пружини, точка контакту зі стінкою знаходиться на відстані $\boldsymbol{a}$ від спиці. Вся система знаходиться в однорідному електричному полі $\boldsymbol{E}$. Заряд намистинки $\boldsymbol{q}$, жорсткість пружини $\boldsymbol{k}$. **Дослідіть** можливі положення намистинки в стані рівноваги, в залежності від параметра $\boldsymbol{\varepsilon = \frac{a}{l_0}}$, де $\boldsymbol{l_0}$ – пружина в нерозтягнутому стані та від кута $\boldsymbol{\theta}$. Рекомендуємо почати дослідження з положення, в якому $\boldsymbol{\theta = 0}$, після чого почати акуратно змінювати параметри системи. Уважати, що ***kl_0/qE=2, дією сили тяжіння можна знехтувати.***

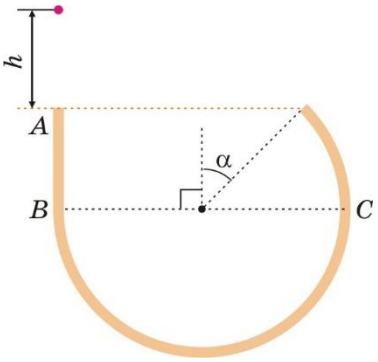


Задачі запропонували:

108 Гельфгат І.М., 109, 110 Олійник А.О., 111 Овсянніков О.А., 112 Югай М.Е., Олійник А.О.

Фінал

(113) «Справа – труба!» Тонка трубка з гладенькою внутрішньою поверхнею вигнута так, що складається з прямолінійної ділянки та ділянки у вигляді дуги кола радіуса $\boldsymbol{R}$. Трубка закріплена так, що її прямолінійна ділянка вертикальна (див. рисунок). Кулька, діаметр якої трохи менший за внутрішній діаметр трубки, вільно падає з висоти $\boldsymbol{h}$ у вертикальну частину трубки. Опір рухові не враховуйте.



А) **За якого значення** $\boldsymbol{h}$ кулька може двічі пройти через трубку?
Б) **Чи може** вона пройти через трубку тричі?
В) **Знайдіть час** між двома проходженнями точки A з похибкою, меншою від 5 %, якщо $\boldsymbol{\alpha = \frac{5\pi}{12}}$.

(114) «Електричний термометр». В наявності у експериментатора є: вольтметр (можна вважати ідеальним), резистор 1кОм (при 0^0C) з температурним коефіцієнтом опору $5\cdot10^{-3}$ C^{-1}, три резистори 1кОм кожен, опір яких не залежить від температури, джерело живлення.
А) За допомогою запропонованого обладнання **складіть схему** електричного термометра, в якому вольтметр показував би температуру, причому покази вольтметра 0 В відповідали б температурі 0 ^{0}C.
Б) **Знайдіть напругу** живлення, при якій покази вольтметра у мілівольтах приблизно відповідатимуть градусам Цельсія поблизу 0 ^{0}C.
В) **Знайдіть, в яких межах** температури похибка вимірювання термометра складатиме не більше 10%.

(115) «Не плюй у космос!» У сусідній галактиці знайшлася планета-двійник нашої Землі. І проблеми у мешканців цієї планети теж схожі на наші. Нещодавно прихильники тамтешньої юної захисниці всього від усіх добилися мудрого рішення: все сміття (обгортки від цукерок, старі шкільні щоденники, підручники фізики тощо) тепер будуть викидати в далекий космос. Ракети стартуватимуть з полюсів вертикально вгору. А задля економії цим ракетам мають надавати точнісінько другої космічної швидкості (на верхній межі атмосфери). Проте прихильники такої програми кожну місцеву п'ятницю пропускали школу, тому погано вивчили місцеву фізику. Через це початкова швидкість першої ж ракети виявилася на 10 м/с меншою від потрібної.

А) Через який час $\boldsymbol{t}$ після старту викинуте сміття повернеться на історичну батьківщину?

Б) На якій відстані перебувала б ракета через час $\boldsymbol{t}$ після старту, якби не прикра помилка?

Підказка. Нехай функція $\boldsymbol{f(x) = x^a}$ (тут $\boldsymbol{a}$ — будь-яке дійсне число, що не дорівнює –1) задана на проміжку від $\boldsymbol{x_1}$ до $\boldsymbol{x_2}$. Тоді площу $\boldsymbol{S}$ під графіком функції $f(x)$ можна знайти за формулою:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{a+1}\left(x_2^{a+1} - x_1^{a+1}\right)}.$$

(116) «Тунельний ефект». Астероїд, густину якого можна вважати сталою, а форму сферичною (радіусом $\boldsymbol{R}$), освоюється людьми. Було вирішено зробити наскрізний тунель у вигляді дуги кола радіусом $\boldsymbol{l}$ з центром на поверхні астероїда і в площині, що проходить через його центр. Вивчить рух цим тунелем спеціального вагончика, для якого втратами механічної енергії на тертя, тощо можна знехтувати. Прискорення вільного падіння на поверхні астероїда $\boldsymbol{g}$.

А) Вагончик відпускають в одному з кінців тунелю. Якою буде **максимальна швидкість** руху вагончика?
Б) **Чи можлива** невагомість на якомусь етапі руху вагончика? Якщо так, **під яким кутом** її можна спостерігати з точки на поверхні астероїду, яка є центром дуги кола тунелю до лінії "центр тунелю-центр астероїду"? Якщо ні, то **чому**?
В) Якщо вагончик опиниться у центрі тунелю і матиме маленьку початкову швидкість, чому дорівнюватиме **період його коливань**?

(117) «Глобальне потепління». Відомо, що випромінення будь-якого нагрітого тіла складається із електромагнітних хвиль різної довжини. Проте, у Сонця через дуже високу температуру поверхні більша частина випромінення є у видимому для людини діапазоні. Вважатимемо, що все випромінення Сонця знаходиться у видимому діапазоні, яке вільно проходить через атмосферу Землі. Вважайте, що Земля поглинає $\boldsymbol{a}$=70% випромінення Сонця, яке на неї падає, а поверхня Землі (нехтуємо впливом атмосфери) випромінює як абсолютно чорне тіло за формулою Стефана- Больцмана $\boldsymbol{P = \sigma S T^4}$, де $\boldsymbol{\sigma} = 5.67 * 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 K^4}$ – стала Стефана-Больцмана, $\boldsymbol{S}$ – площа поверхні тіла, $\boldsymbol{T}$ – температура поверхні в кельвінах. Потужність випромінення Сонця $\boldsymbol{P_c}$ =3.83*10^{26} Вт, радіус орбіти Землі $\boldsymbol{R_0}$ =150 млн км, радіус Землі $\boldsymbol{R_з}$ =6370 км.

А) **Обрахуйте середню температуру** поверхні Землі.

Врахуємо тепер вплив атмосфери, який проявляється у так званому «парниковому ефекті». Як і раніше, сонячні промені нехай проходять через атмосферу вільно, закони поглинання та випромінення поверхні Землі лишаються такими ж. Змоделюємо атмосферу як сферичну поверхню, що має радіус дуже близький до радіусу Землі. Земля, внаслідок нагрітості до невеликих температур (порівняно із Сонячними), випромінює майже виключно інфрачервоні хвилі, $\boldsymbol{b}$=50% яких поглинається атмосферою, а інші проходять наскрізь. Внаслідок не повного поглинання інфрачервоного випромінення атмосфера теж випромінює за законом Стефана-Больцмана, проте з безрозмірною поправкою $\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\boldsymbol{P = \varepsilon \sigma S T^4}$), яку можна визначити з уявного досліду, в якому наше частково прозоре та абсолютно чорне тіла мають однакову температуру, а значить знаходяться в тепловій рівновазі, тепло між ними не перетікає.

Б) **Знайдіть значення поправки $\boldsymbol{\varepsilon}$**.

В) **Порахуйте середню температуру** поверхні Землі для цієї моделі атмосфери, яка частково пропускає інфрачервоне випромінювання.

Якщо $C0_2$ в повітрі стане дуже багато, то атмосфера буде поглинати більше інфрачервоного випромінення Землі і температура поверхні Землі виросте.

Г) **Порахуйте** температуру поверхні Землі вважаючи, що атмосфера є абсолютно чорним тілом: повністю поглинає інфрачервоне випромінення Землі та випромінює за законом Стефана-Больцмана ($\boldsymbol{P = \sigma S T^4}$).

Задачі запропонували:

113, 115 Гельфгат І.М., 114 Триліс О.В., 116 Орлянський О.Ю., 117 Олійник А.О.

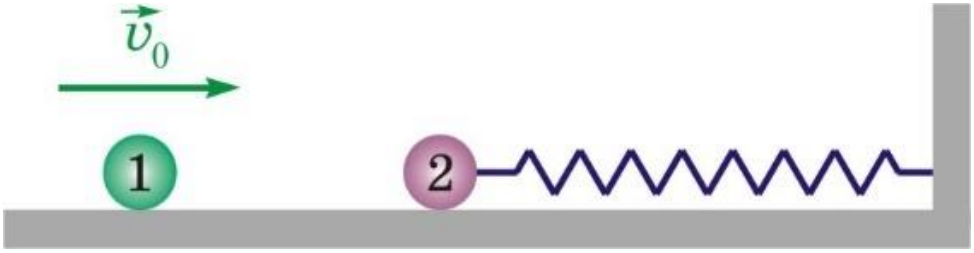
2023-2024 роки

І заочний тур

(118) «Неминуча зустріч». Кулька масою m_1 зазнає лобового пружного зіткнення з нерухомою кулькою масою $m_2 = 1{,}9$ кг, прикріпленою до стінки пружиною жорсткістю $k = 16$ Н/м (див. рисунок). Тертя в системі відсутнє; радіуси куль однакові. Відомо, що $m_1 > m_2$.

А) За якої умови друге зіткнення кулі 1 знов відбудеться з *нерухомою* кулею 2?

Б) За якого значення m_1 друге зіткнення куль відбудеться через $\tau = 1$ с після першого? Знайдіть відносну швидкість куль у момент перед цим зіткненням (виразіть її через v_0).



(119) «Річні кільця». На аналізі кількості радіоактивного Карбону-14 (С14), який утворюється внаслідок дії космічних променів у верхніх шарах атмосфери, заснований радіовуглецевий метод датування. Рослини поглинають вуглекислий газ, у молекули якого з невеликим, але стабільним, відсотком входять атоми С14 замість найбільш розповсюдженого С12. На фото знизу зображено зріз стовбура сосни з річними кільцями, на якому поставлені дві червоні точки.

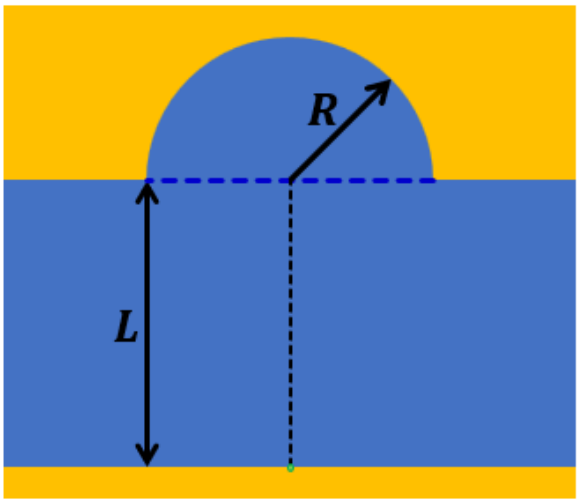


А) **Знайдіть у скільки разів** кількість Карбону14 у пробі деревини у точці **1** менша за його кількість у точці **2**. В обидві проби входить однакова маса сухої деревини. Період напіврозпаду Карбону14 дорівнює 5730 років.

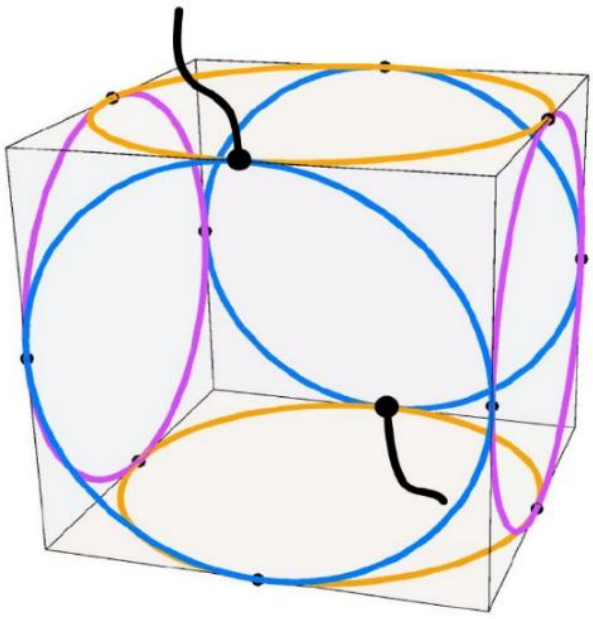
Б) Для дуже старих дерев товщина кілець зменшується з відстанню від центру. **З'ясуйте, чи може** у стовбурі дуже старого дерева кількість атомів С14 у середньому залишатися незмінною або навіть, досягнувши максимального значення, зменшуватись від року до року. Якщо так, то **розрахуйте вік** такого дерева, якщо ні, доведіть розрахунками свою точку зору. При відповіді на питання вважайте, що товщина кільця Δr є малою у порівнянні з його радіусом r і обернено пропорційна до квадрату радіусу. Розгляньте модель конусоподібної форми стовбура дерева (див. рис.).



(120) «Просто ти живеш не на тому березі ріки». Необхідно якомога швидше переправитись з одного берега ріки шириною L на інший. На протилежному березі є заплава, яка має форму півкола радіусом R. Центр заплави знаходиться точно навпроти точки старту А (див. рисунок). Швидкість течії річки по усій її ширині однакова за модулем та напрямком і дорівнює u. Швидкість руху води у заплаві дорівнює нулю. Для переправи можна використовувати моторний катер, який може розвивати максимальну швидкість v відносно води у будь-якому напрямі, при цьому миттєво змінюючи напрям цієї швидкості у будь-який момент часу. **За який мінімальний час** можна пристати до протилежного берегу ріки? Уважайте катер матеріальною точкою і те, що його можна пришвартувати до будь-якої точки протилежного берега, а на межі ріки та заплави, показаній на рисунку синім пунктиром, течія все ще зберігається.



(121) «Сферичний куб у магнітному вакуумі». У дизайнерському макеті куба кожну квадратну грань замінили на дротове коло, як показано на рисунку. Радіус кожного кола дорівнює 10 см, опір одиниці довжини провідника становить 15 Ом/мм. Усі точки, у яких кола дотикаються одне до одного, є з'єднаннями з нульовим опором. До двох протилежних «діагональних» вершин новоствореної конструкції прикладають постійну напругу 3,14 В. Система знаходиться у вакуумі.



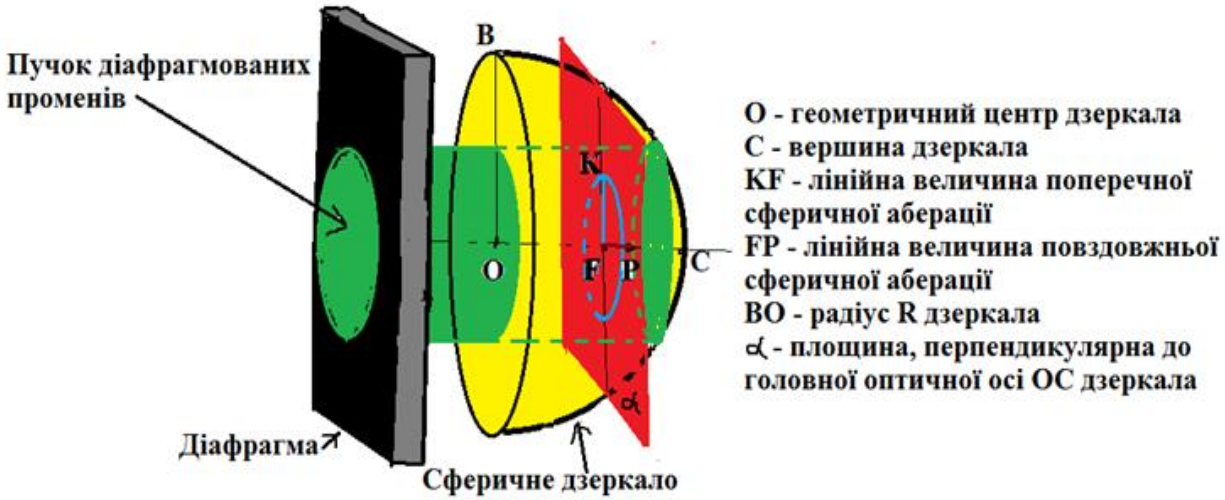
А) **Визначте силу струму**, яка протікає у кожному елементі конструкції.

Б) **Визначте величину та напрям індукції магнітного поля**, яке створюється усіма струмами, що йдуть через «куб», у його центрі. Уважайте π=3,14.

(122) «Ідеальна неідеальність». На поверхню ідеального сферичного ввігнутого дзеркала, радіус кривизни якого R, паралельно до його головної оптичної вісі падає циліндричний паралельний пучок променів. Вісь цього пучка збігається з головною оптичною віссю дзеркала.

А) Знайдіть **лінійну величину розмиття FK** зображення пучка після відбивання від поверхні дзеркала вздовж площини, що перпендикулярна до головної оптичної вісі дзеркала і проходить через головний фокус (точку F) дзеркала (поперечна сферична аберація; див. рис.). Відповідь подайте через радіус кривизни дзеркала та ξ – ступінь екранування пучка діафрагмою ($\xi = h/R$).

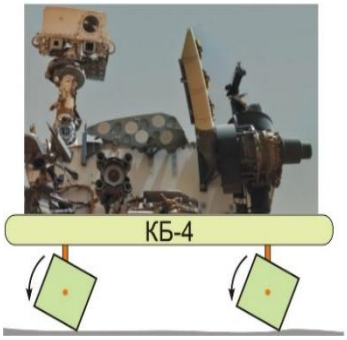
Б) **Якою є глибина розмиття** FP зображення пучка після відбивання від поверхні дзеркала вздовж головної оптичної осі дзеркала (повздовжня сферична аберація; див. рис.)? Відповідь подайте через радіус кривизни дзеркала та ступінь екранування пучка діафрагмою.

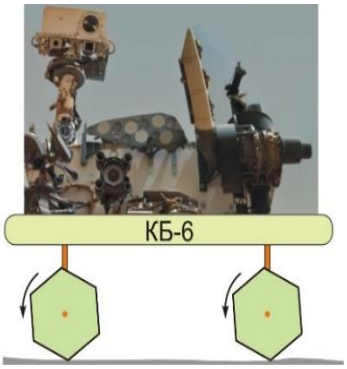


Задачі запропонували:

118 Ненашев І.Ю., Гельфгат І.М, 119 Орлянський О.Ю., 120-121 Мєшков О.Ю., 122 Шевчук О.Г.

II заочний тур





(123) «Оптимізація колеса». Два конкуруючі конструкторські бюро розробили різні проекти чотириколісних платформ для пересування величезними кам'янистими плато нещодавно відкритої планети. З урахуванням певних обставин КБ-4 пропонує зробити «колеса» квадратними, а КБ-6 наполягає на «колесах» у формі правильних шестикутників. В обох проектах передбачено зробити «колеса» легкими та жорсткими, вони мають обертатися «синхронно», щоб дно платформи весь час залишалося горизонтальним під час руху горизонтальною поверхнею (див. рисунок). Зіткнення поверхонь «коліс» з ґрунтом можна вважати непружними. «Колеса» не проковзують по поверхні та не відриваються від неї, кутова швидкість ω їх обертання незмінна, опір повітря відсутній.

А) Порівняйте витрати енергії для подолання платформами КБ-4 і КБ-6 відстані 1 км горизонтальною поверхнею.

Б) Незакріплений вантаж лежить на платформі КБ-4. Платформа рухається по горизонтальній поверхні. За якого коефіцієнту тертя між вантажем і платформою вантаж не проковзуватиме? Надайте відповіді для двох випадків:

А) $g_1 = 6$ м/с^2, $l_1 = 17$ см, $\omega_1 = 5$ рад/с;

Б) $g_2 = 7{,}5$ м/с^2, $l_2 = 60$ см, $\omega_2 = 4$ рад/с.

Тут l — довжина бічної сторони «колеса», g — прискорення вільного падіння на досліджуваній планеті.

(124) «Кулька-стрибунець». З гладкої похилої площини, яка складає кут $\boldsymbol{\alpha}$ з площиною горизонту, зісковзує кулька дуже малого радіуса масою $\boldsymbol{m}$ та зарядом $\boldsymbol{+q}$. Висота похилої площини $\boldsymbol{h}$. У вершині прямого кута знаходиться точковий заряд $\boldsymbol{+2q}$. Силами тертя, опором повітря та явищами, пов'язаними з електростатичною взаємодією кульки та площини, знехтуйте.

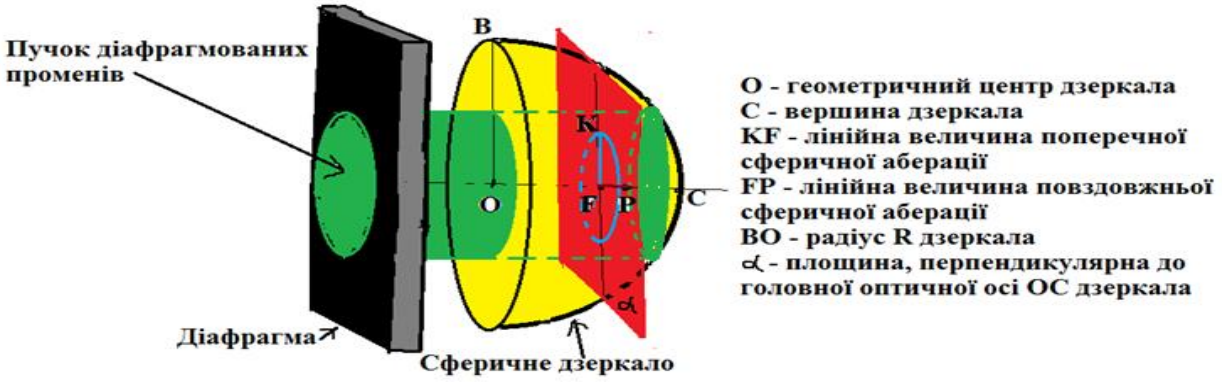
А) **Якою є умова відриву** кульки від похилої площини?

Б) **Якої максимальної швидкість може набути** заряджена кулька в момент відриву від похилої площини?

(125) «Ідеальна неідеальність-2». На поверхню ідеального сферичного дзеркала радіусом $\boldsymbol{R}$ паралельно до його головної оптичної осі падає паралельний пучок променів, вісь якого збігається з головною оптичною віссю дзеркала.

А) Для спостереження зображень, які формує дзеркало, використовують окуляр (лупу). Осі дзеркала і окуляра співпадають (центрована оптична система). Яким має бути **збільшення окуляра** для того, щоб при візуальних спостереженнях зображень, сформованих дзеркалом, не були б помітними ефекти від поперечної сферичної аберації? Роздільну здатність ока вважати відомою. Відповідь виразіть через ступінь екранування пучка діафрагмою $\boldsymbol{\xi}$. ($\xi = h/R$, де $\boldsymbol{h}$ – це діаметр отвору діафрагми).

Б) Збільшення нашої системи можна знайти з формули $\boldsymbol{\Gamma = F/f}$. Яким може бути **максимальне значення збільшення** нашої оптичної системи для того, щоб виконувались вимоги попереднього пункту відносно дії сферичної поперечної аберації? Відповідь також виразіть через ступінь екранування пучка діафрагмою $\boldsymbol{\xi}$.



(126) «Картопля завжди на висоті!» Два цілком однакових електродвигуна постійного струму послідовно приєднали до джерела сталої напруги. Під час першого тесту даної системи до шківа першого двигуна чіпляють трос з одним мішком картоплі, а другий двигун лишають ненавантаженим. Виявилось, що в цьому випадку шків другого двигуна обертається з частотою $\boldsymbol{\nu_1}$. Потім, у другому тесті, на другий двигун підвісили стільки мішків, що його шків перестав обертатись. При цьому, частота обертання першого двигуна виявилась рівною $\boldsymbol{\nu_2}$ і він зміг рівномірно підняти мішок картоплі. У третій раз кожен двигун навантажили двома мішками картоплі і обидва двигуна змогли при цьому рівномірно піднімати цей вантаж.

В яких межах може лежати відношення частот $\boldsymbol{\nu_2/\nu_1}$? Вважайте, що тертя при обертанні шківа двигунів відсутнє.

(127) «Дивні терези». На рисунку зображені врівноважені тягарцем незвичні терези, головна частина яких зроблена з чотирьох однорідних дощечок, скріплених шістьма шарнірами, навколо яких ті можуть вільно обертатися. У дві однакові між собою короткі вертикальні дощечки (див. рис.) жорстко вмонтовані однакові горизонтальні полички, на які можна класти тягарці. Дві довгі однакові між собою горизонтальні дощечки мають по три отвори. Центральні отвори необхідні для шарнірного з'єднання з нерухомою вертикальною стійкою. Тягарець масою $m_0 = 100$ г лежить посередині лівої полички і врівноважує конструкцію (див. рис.).

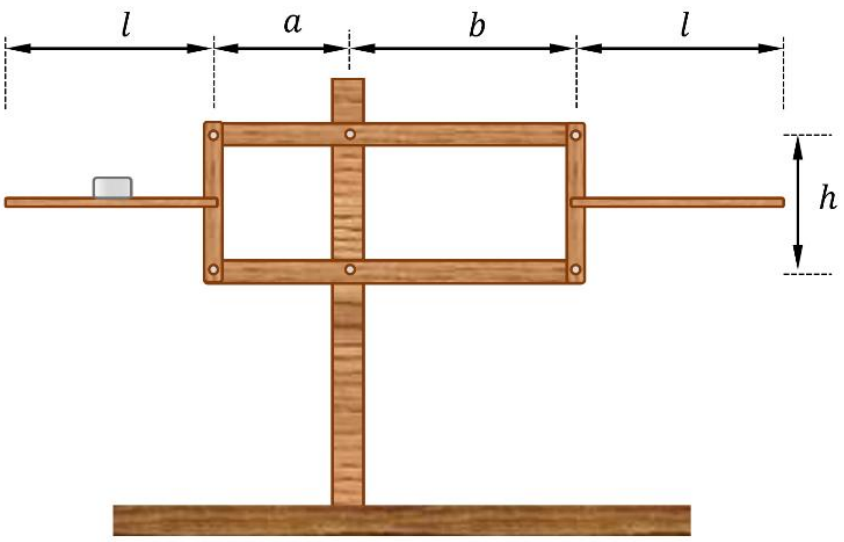
А) Визначте масу m рухомої частини терезів. Тут і далі силами тертя нехтуємо. $a = h = 20$ см, $b = l = 40$ см.

Б) Виведіть формулу рівноваги тягарця масою m_1 на лівій поличці з тягарцем масою m_2 на правій і визначте чи може тягарець масою $m_1 = 1$ кг, який поклали лівіше від середини лівої полички, бути врівноваженим тягарцем масою $m_2 = 450$ г на правій?

Покладемо тепер на ліву поличку тягарець масою $m_3 = 3$ кг, а на праву – тягарець масою $m_1 = 1$ кг і відпустимо.

В) Нехтуючи масою терезів, **знайдіть швидкості тягарців** у момент, коли горизонтальні важелі терезів нахиляться на кут 30°.

Г) За якого кута нахилу α почнеться проковзування тягарця вздовж полички, якщо коефіцієнт тертя між тягарцем і поверхнею полички $\mu = 0{,}5$? Прискорення вільного падіння $g = 9{,}8$ м/с^2. Опором повітря і тертям у самій конструкції терезів нехтуємо.

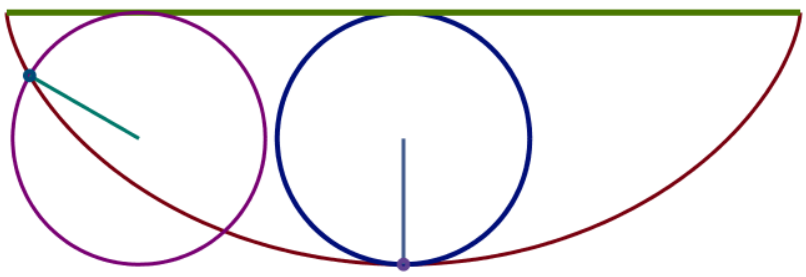


Задачі запропонували:

123 Гельфгат І.М., 124-125 Шевчук О.Г., 126 Олійник А.О., 127 Орлянський О.Ю.

Фінал

(128) «Швидкий транспорт». У 1696 р. Йоганн Бернуллі поставив перед найрозумнішими людьми світу «проблему, яка перевірить їхні методи та силу їхнього інтелекту», оскільки «для розумних людей немає нічого більш привабливого, ніж чесна, складна проблема, можливе вирішення якої подарує славу та залишиться пам'ятником на віки». Це була задача про брахістохрону – лінію,



вздовж якої матеріальна точка в однорідному полі тяжіння «починаючи рух з точки А досягає точки В за найменший час». Як з'ясувалося, ця лінія співпадає з перевернутою циклоїдою – кривою, яку описує точка обіду колеса, що без проковзування котиться горизонтальною поверхнею.
Розгляньте наступну ситуацію: точки А і Б знаходяться на однаковій висоті і з'єднані тунелем у вигляді брахістохрони з відкачаним зсередини повітрям. У тунель без початкової швидкості відпускають тіло і воно, збільшуючи швидкість, починає рух. Силами тертя знехтуйте.

А) **Знайдіть**, **як швидкість центру** колеса u **має залежати** від кута його повороту α, щоб деяка точка на його ободі рухалась весь час разом з тілом у тунелі.

Б) **Визначте час руху** тіла брахістохроною з Дніпра до Херсону, відстань між якими 270 км.

В) **Знайдіть залежність** реакції опори N від швидкості v руху тіла, і оцініть, чи є перевантаження під час такого руху ризикованими для людини.

Г) Чи знаєте Ви якусь **силу** (наприклад, силу, що діє на тіло з боку фізичного поля), яка б могла повністю замінити реакцію опори N, щоб тіло пролетіло увесь тунель, не дотикаючись до його стінок?

(129) «Космічна балістика». Снаряд випустили з поверхні планети радіусом $R = 6000$ км під кутом α до горизонту. Початкова швидкість снаряда дорівнює першій космічній швидкості для даної планети. Планета не обертається навколо власної осі та не має атмосфери, прискорення вільного падіння поблизу поверхні планети дорівнює $g = 10$ м/с^2. Визначте відстань по прямій та вздовж поверхні планети між точками пострілу та падіння снаряду. Наведіть відповіді для випадків $\alpha_1 = 0{,}1$ рад і $\alpha_2 = \left(\frac{\pi}{2} - 0{,}1\right)$ рад.

(130) Натягнута стрічка. На столі лежать дві однакові позитивно заряджені кульки масою m та додатнім зарядом q. Кожна з них з'єднана нерозтяжною стрічкою довжини $L/2$ з рухомим легким циліндром, закріпленим на дуже довгій горизонтальній спиці. В початковий момент стрічки перпендикулярні до спиці. Здалеку по спиці починає рухатись третя така ж кулька масою m, але з від'ємним зарядом $-Q$, $Q>0$. Початкова швидкість кульки $V = \sqrt{\frac{3kqQ}{mL}}$. Всі тіла в задачі рухаються без тертя. Стрічка, спиця та циліндр зроблені з ізоляторів. Якщо кулька Q вдариться о циліндр, то вони злипнуться і стануть одним цілим. Уважайте, що впродовж всього руху в системі зберігається симетрія відносно спиці. Геометричними розмірами кульок та циліндру знехтуйте.
А) За якого максимального значення $\boldsymbol{Q}$, стрічки не провиснуть **до моменту зіткнення?**
Б) Якщо $\boldsymbol{Q}$ менше значення з попереднього питання, на яку мінімальну відстань зблизяться одне до одного заряди q?
В) Чому дорівнює сила пружності стрічки в момент максимального зближення? Вважати, що до цього моменту стрічка завжди натягнута.
Г) За якого мінімального значення заряду $\boldsymbol{Q}$ стрічки прогнуться в момент максимального зближення?



(131) «Круговерть під куполом». На фото нічне небо і 31-метровий купол 3,6-метрового телескопу ESO – одного з 18 телескопів астрономічної обсерваторія Ла-Сілья в Чилі (29.26° пд. ш. 70.74° зх. д.), що належить Європейській південній обсерваторії.

А) Поясніть світлі дуги на фото (дивись наступну сторінку).

Б) Вважаючи, що центром фотозйомки був центр світлих дуг, визначте під яким кутом до горизонту проводилась зйомка.

В) Визначте час експозиції зйомки.

Г) Оцініть відстань від місця зйомки до купола телескопу ESO.



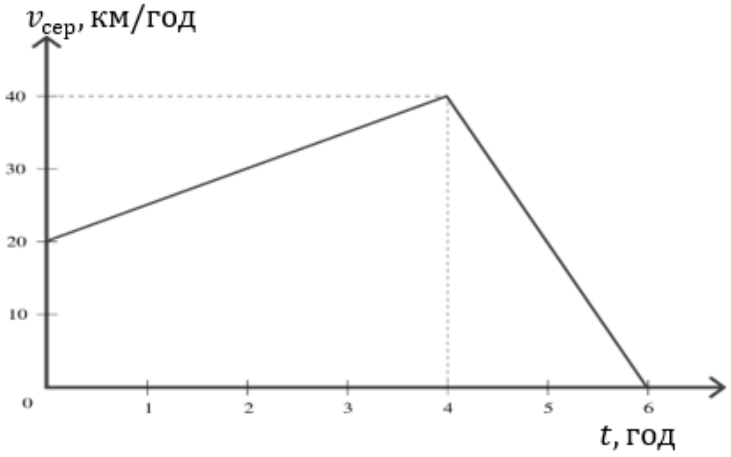
Задачі запропонували:

128, 131 Орлянський О.Ю., 129 Гельфгат І.М., 130 Микуленко О.І.

2024-2025 роки

І заочний тур

(132) «І знов середня швидкість»
Частина І.



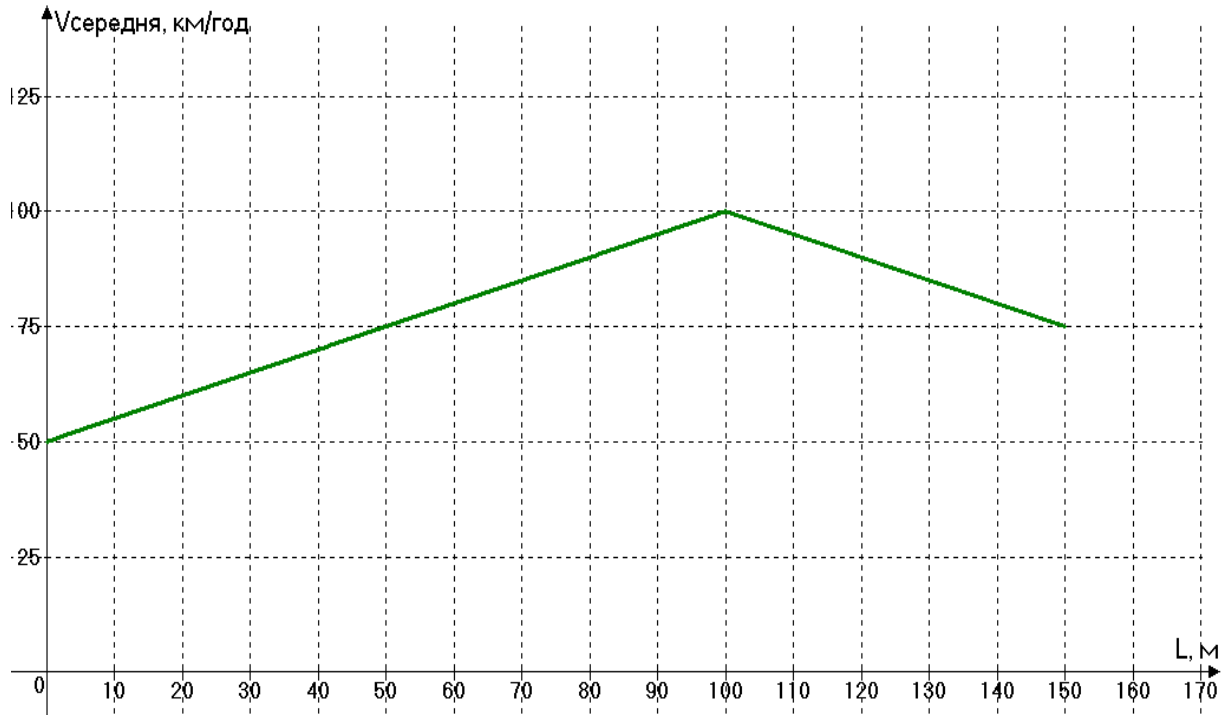
Автомобілям заборонено рухатись автотрасою швидше, ніж 50 км/год. А) За наведеним графіком залежності середньої швидкості автомобілю від часу встановіть, **чи не порушував** автомобіль цю заборону? Б) Якщо порушував, то **в який** проміжок часу?

Частина ІІ. Машина їде по горизонтальній прямій ділянці дороги. У момент проїзду машини повз автобусну зупинку пасажир почав будувати графік залежності середньої швидкості машини на шляху, пройденому після зупинки, від відстані до зупинки. За наведеним графіком середньої швидкості руху машини від пройденої відстані:

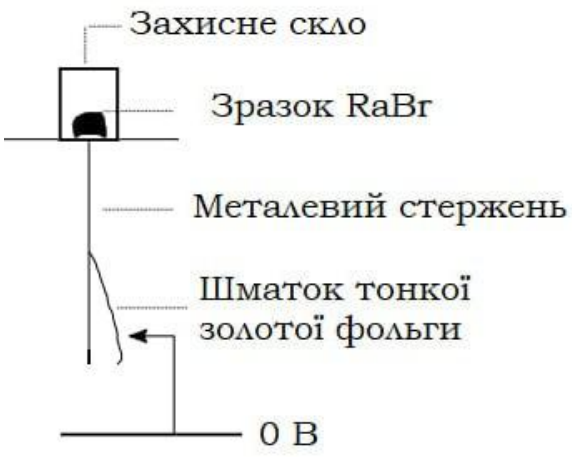
А) Знайдіть **середню швидкість** на шляху від 50 до 125 м;

Б) **Отримайте та зобразіть залежність** пройденого шляху від часу руху;

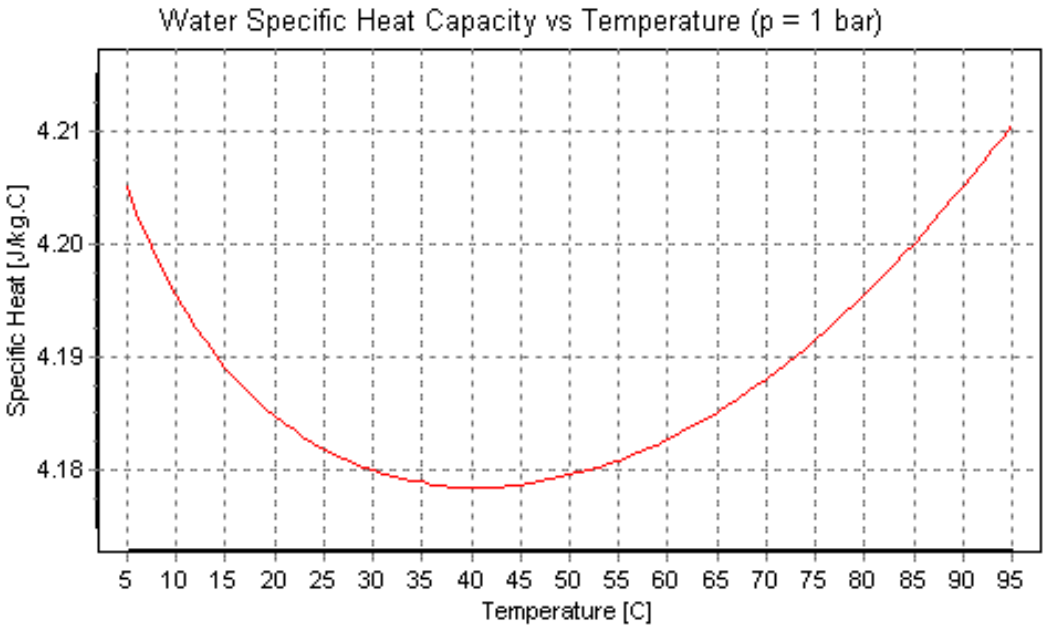
В) **Чи немає** в цьому русі чогось підозрілого та нефізичного? Якщо так, то вкажіть, **чому** ви так вважаєте?



(133) «Як вимірюють період напіврозпаду». Для вимірювання періоду півроспаду ізотопу радію-226 використовують наступну схему, що показана на рисунку. Під час бета-розпаду металева пластина, на якій знаходиться препарат броміду радію, за рахунок постійного випромінення електронів, заряджається до потенціалу 220 В, унаслідок чого гнучкий лист золотої фольги поступово піднімається, поки не торкнеться заземленого електрода. Зрозуміло, що це приведе до того, що фольга розрядиться. Припустимо, що всі випромінені бета-частинки вилітають крізь скло та покидають прилад. Вимірювання на приладі показують, що потенціал металевого стержня пропорційний до заряду, а константа пропорційності становить 156,25 ГВ/Кл. Атомні маси радію і брому прийняти рівними 226 г/моль і 80 г/моль відповідно. Маса препарату броміду радію 3.62 мг. Під час експерименту виявилося, що золотий листок піднімається і опускається кожні 85 секунд. За цими даними: А) **Визначити активність** даного препарату; Б) Визначити **період півроспаду** радію-226; В) Якби цей прилад зі зразком радію-226 використовувався б як годинник, **скільки років** знадобилося б, щоб цей годинник за кожні 24 години відставав від реального часу на одну годину?



(134) «**Вода**». Подивіться на графік. Теплоємність води має мінімум. Існує гіпотеза, що температура теплокровних істот на Землі обумовлена мінімумом теплоємності води. А) **Знайдіть найбільшу і найменшу** середні питомі теплоємності води, які слід використовувати в розрахунках при нагріванні води в рідкому стані на 20°C за атмосферного тиску. Б) Опишіть **залежність питомої теплоємності c від температури t** дугою кубічної параболи, тобто підберіть коефіцієнти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ у рівнянні $c = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$. В) **Побудуйте графік** залежності швидкості зміни температури 100 г води (одиниця виміру °C/c) від температури, якщо воді щосекундно передають 4,2 Дж теплової енергії. Тепловими втратами, випаровуванням знехтувати. Примітка: *Зверніть увагу на одруківку в одиницях питомої теплоємності!!! Так, і таке буває.*



(135) «Мерефо-Херсонський міст».



Рис.1

Частина 1. Через Монастирський острів у м. Дніпро проходить найбільший в Україні і один з найбільших у світі арочних мостів. Довжина Мерефо-Херсонського моста понад 1600 м (ширина ріки Дніпро під ним 1250 м). Ці дані легко знайти в інтернеті, але висоту моста знайти практично неможливо. На Монастирському острові розташований і найбільший у світі пам'ятник Тарасу Шевченко (Рис. 1). Висота фігури поета 9,5 метри, висота п'єдесталу 10,5 метра.

Скориставшись супутниковим фото з GoogleEarth:

А) Поясність форму тіні від пам'ятника Кобзарю (Рис. 2) і **знайдіть висоту** Мерефо-Херсонського моста над рівнем пішохідної доріжки (Рис. 3).

Б) **Під яким кутом до горизонту** падали сонячні промені під час зйомки?

Довідка: GoogleEarth дозволяє змінювати точку зору і висоту демонстрації за рахунок відповідної зміни масштабів на супутниковому фото. Вважайте, що Рис. 2 і Рис. 3 відповідають позиціюванню над пам'ятником і над частиною моста на фрагментах одного супутникового фото. Наведені Google-лінійки дозволяють звичайною вимірювальною лінійкою знаходити відстані на поверхні острову.

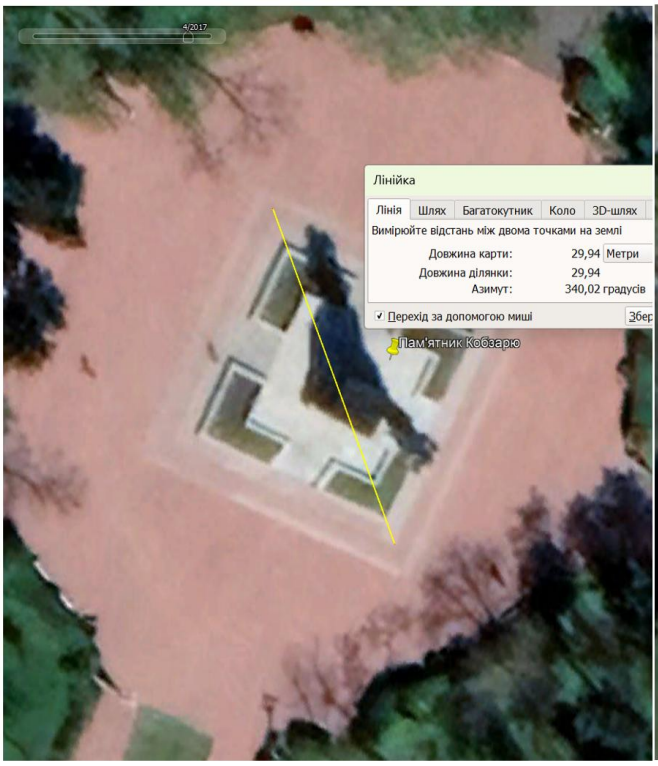


Рис.2

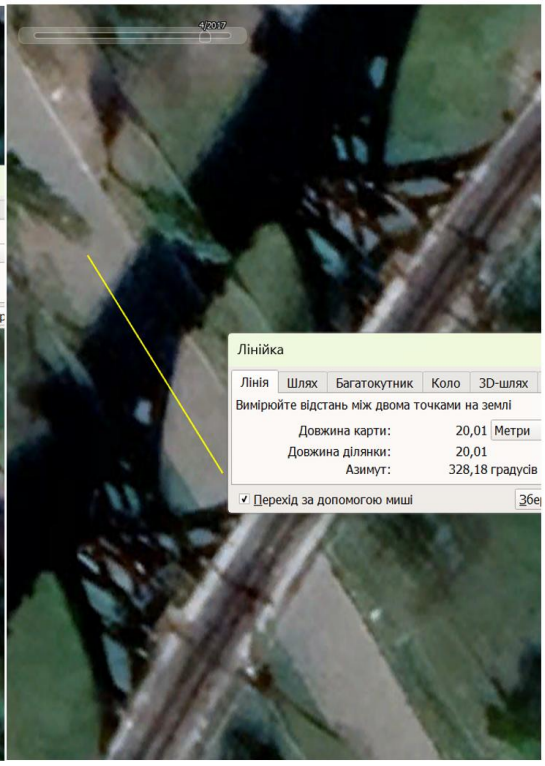


Рис.3

Частина 2. Розгляньте проблему проходу корабля під аркою арочного мосту на наступному прикладі. Арка моста має вигляд над водою дуги кола у 120° (радіус 25 м). Капітан вирішив звичайний для баржі вантаж, річковий пісок, насипати однорідним шаром нижче звичайної висоти, щоб поверх піску всю площу баржі заставити контейнерами і пройти під аркою моста без зіткнення. За рахунок цього верхня площина контейнерів довжиною у 60 м і шириною у 14 м підніматиметься над водою на 12 м (Рис.4).

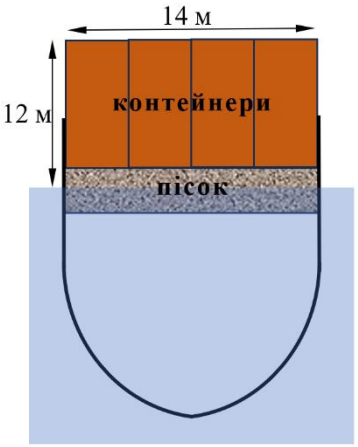
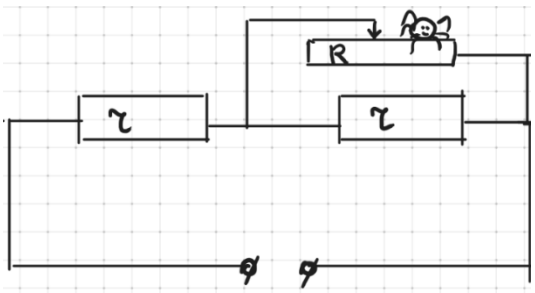


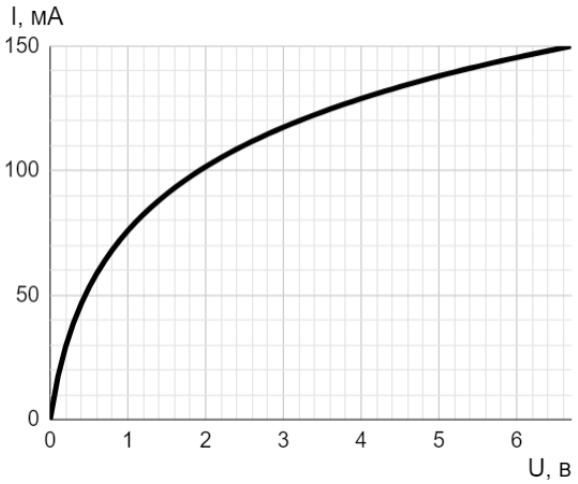
Рис.4

А) Чи пройде така баржа під аркою моста? Глибина ріки під аркою достатня, борта баржі вертикальні і вся її площа 60×14 м заповнена піском і заставлена поверх контейнерами.

Б) Надайте кількісне обґрунтування більш раціонального завантаження баржі, залишивши всі контейнери на борту. Густина насипного піску 1,5 т/м^3.

(136) «Лабораторна комашка». Невеличка комаха-мерзлячка повадилася відпочивати в фізичній лабораторії, гріючись на розжареній електричним струмом проволоці реостата (див. малюнок). За тривалий час відпочинку, комаха, штовхаючи лапками ковзний контакт, знайшла таке його розташування, за якого та частина, на якій вона відпочивала, видавала максимальну теплову потужність серед усіх інших можливих положень ковзного контакту. А) Розрахуйте, **на якому опорі** знаходиться це положення та яка саме теплова потужність на ній виділяється. Електрична напруга у колі $U_0 = 10$ В, і опір r = 10 Ом.





Б) Одного разу, повернувшись в лабораторію, комаха побачила поряд із своєю «пічкою» лампочку! Її під'єднали замість резистора який був паралельним до реостата, а контакт реостата був на тому ж місті де комаха його залишила. Тепер комасі стало дуже спекотно від тепла від двох «печей». **Розрахуйте сумарну теплову потужність** від них. Лампочка не є лінійним елементом, її вольт-амперна характеристика показана на малюнку. Важливо зауважити, що лампочка перегорає при потужності більше ніж 1 Вт.

В) Комаха захотіла повернути суму теплових потужностей до минулого значення, за якого їй було комфортно. **На яке положення** треба їй поставити реостат?

Г) Яку максимальну **сумарну теплову потужність** можна отримати від лампи і реостата? **На яке положення** при цьому треба поставити реостат?

Задачі запропонували:
132 Меланіч Г.А., Олійник А.О. 133 Катц А.М., 134,135 Орлянський О.Ю., 136 Пашко М.І.

II заочний тур

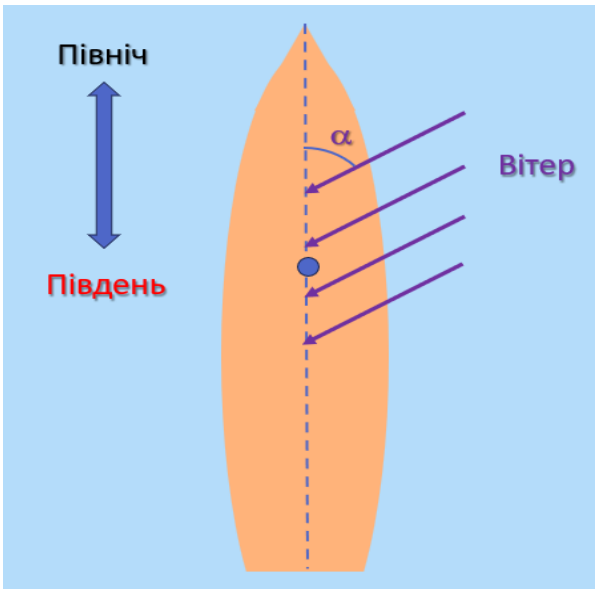
(137) «Під градусом». У безвітряну погоду йде дощ. На горизонтальному шосе стоїть автомобіль, на боковому склі якого періодично з'являються водяні риски, паралельні вертикальній границі скла.

А) **З якою швидкістю v_k** падають краплі дощу на землю, якщо після розгону автомобіля до швидкості v_a, риски на боковому склі відхилилися на кут α?

Б) Водій вирішив зберегти кут α на склі, незважаючи на те, що дорога стала періодично опускатися вниз і підніматися вгору. **Як має залежати швидкість автомобіля від кута** нахилу дороги β до горизонту, щоб нові водяні риски на боковому склі весь час залишалися паралельними до попередніх?

В) У гірський місцевості треба підніматися серпантином – звивистою дорогою, яка всюди утворює сталий кут до горизонту β. **Знайдіть відношення** частоти ударів крапель по корпусу автомобіля, коли той їде горизонтально, до частоти ударів крапель по корпусу автомобіля, коли той їде вгору таким серпантином (інтенсивність дощу однакова).

(138) «Реклама – двигун прогресу». Після аварії судна група пасажирів опинилася на безлюдному острові. Вони не сиділи без діла — з уламків свого судна спорудили нове, своєрідний вітрильник. Замість вітрила вони пристосували великий вертикальний рекламний щит, який можна було повертати навколо вертикальної осі (щогли). Серед пасажирів виявився юний фізик, який встановив: коли вітер дме перпендикулярно площині вітрила, це вітрило «перехоплює» певний повітряний потік та «відбирає» в нього весь імпульс. Якщо ж вітер дме паралельно площині вітрила, то вплив на рух судна відсутній. Так само відсутні й будь-які вихорі в повітряному потоці. Саморобне судно виявилося не дуже досконалим: навіть за попутного вітру швидкість руху судна була набагато меншою за швидкість вітру. Судно вийшло дуже вузьким і довгим, тому могло рухатися *тільки* в напрямі свого кіля (від корми до носу). Сила опору води, була пропорційною до квадрата швидкості руху судна. Попередні розрахунки показали: навіть якщо вітер попутний (південний), швидкість руху буде лише 0,33 км/год. Але виявилося, що цієї пори року вітер весь час зустрічний і дме під кутом $\alpha = 60°$ до меридіану (див. рисунок). **Визначте максимальну можливу швидкість** руху судна на північ.



(139) «Ядерний більярд». Яку мінімальну енергію повинна мати α-частинка (ядро гелію-4) масою m_α щоб при лобовому ударі з нерухомим ядром хімічного елемента з порядковим номером Z та масою m_z напевне потрапити у ядро-мішень і стати причиною ядерної реакції. Зрозуміло, що в даній ситуації потрібно брати до уваги ядерні сили, які виникають між ядрами, тому можете вважати, що енергія ядерної взаємодії дорівнює $W_{\text{яд}} = -\frac{\alpha}{r^2}$, де $\alpha > 0$, а r – відстань між ядрами. Уважайте, що початкова швидкість руху α-частинки значно менша за швидкість світла.

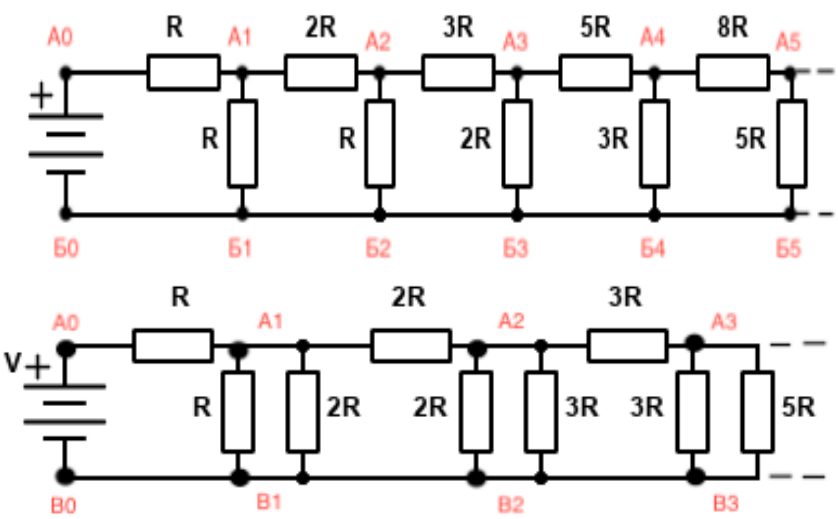
(140) «Допоможіть Робінзонам!». Біля берегів безлюдного тропічного острова потонуло торгівельне судно. У катастрофі вижило декілька членів екіпажу, які висадились на березі острова. Разом з ними хвилі викинули на берег декілька скринь, в яких «новоприбулі аборигени» знайшли масу потрібних та не зовсім речей, серед яких була й зорова труба. Діаметр об'єктива труби 5 см, оптична сила його лінзи +1,25 дптр, а оптична сила окуляра + 14 дптр. У результаті контакту зорової труби з морською водою її тубус намертво заклинило в позиції, яка відповідає ідеальному наведенню на різке зображення для об'єктів, які знаходяться на відстані 400 м від об'єктиву. Мешканці острова хотіли б мати можливість не напружуючи очі чітко бачити в трубу об'єкти й на великій від берега відстані для того, щоб подати сигнал про допомогу, причому мирному, а не піратському кораблю. Підкажіть «Робінзонам», **що і як вони повинні зробити** для того, щоб зорова труба працювала так, як їм потрібно? Розбирати трубу та використовувати інші лінзи не дозволяється.



Уважайте, що оптична система зорової труби є ідеальної центрованою, а кутова роздільна здатність ока людини складає 2'. Прийміть, що під чітким (не розмитим) зображенням необхідно розуміти таке, яке забезпечує відхилення від ідеального (стигматичного) зображення не більш ніж на величину кутової роздільної здатності ока людини (2').

(141) «Електричне коло від Фібоначчі». На рисунку зображено нескінченне коло з резисторів.

Опори резисторів між точками A_iA_{i+1} та $A_iБ_i$ мають вам нагадати числовий ряд Фібоначчі. Відомо, що опір кола дорівнює **α·R,** де **α** - відомий коефіцієнт, **R** - опір першого резистора. Замінимо кожен з резисторів між точками $A_iБ_i$ на два паралельно з'єднаних резистори, опори яких дорівнюють наступним двом за значенням числа в ряду Фібоначчі (див. рис.)



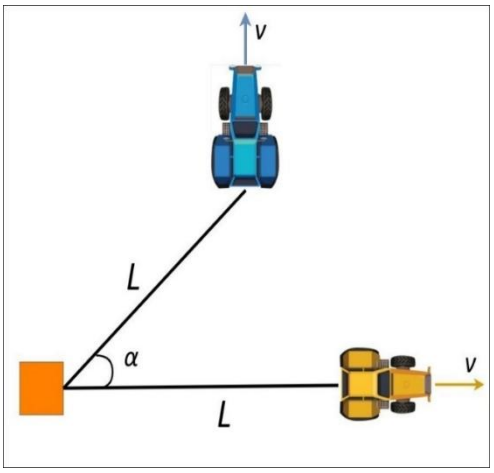
Спробуйте якомога точніше **знайти опір нової схеми** у вигляді R_∞=**f(α)·R**

Задачі запропонували:

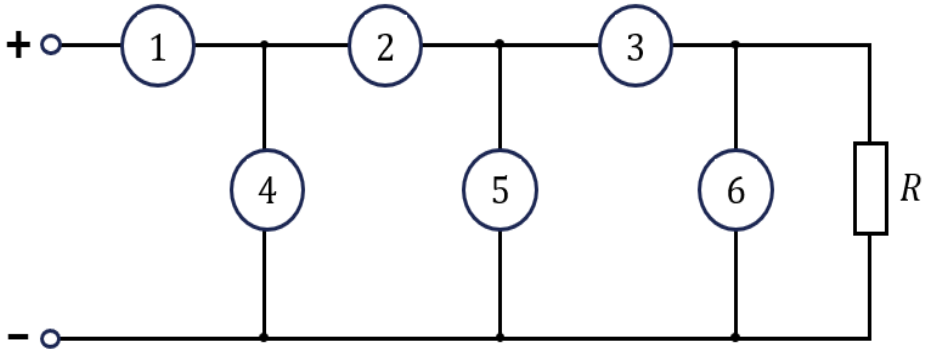
137 Орлянський О.Ю., 138 Гельфгат І.М., 139 Олійник А.О., 140 Шевчук О.Г., 141 Абдуллханов А.М.

Фінал

(142) «Два тра́ктори мої, два трактори́!». Вантаж прив'язаний за допомогою мотузок довжиною L до двох тракторів: *Синього та Жовтого*. У початковий момент кут між мотузками дорівнює α, як зображено на рисунку, а самі мотузки ледве натягнуті. Трактори одночасно починають рух з однаковою швидкістю v. Трактор *Жовтий* тримає курс вздовж напряму своєї мотузки, а трактор *Синій,* побачивши рух Жовтого, починає рухатися в напрямку, перпендикулярному до початкової швидкості жовтого. **Знайти швидкість руху вантажу** одразу після різкої зміни напрямку цієї швидкості, якщо $\sin(\alpha) = 5/13$.



(143) «Детективна електрика». Учень, який глибоко засвоїв закони постійного струму, вирішив застосувати для вимірювання опору R резистора аж три однакових амперметра та три однакових вольтметра (він уважає, що так буде надійніше). Учень зібрав коло, схему якого показано на рисунку. Одна біда — він забув написати на схемі, якими номерами позначено амперметри, а якими — вольтметри. А от покази приладів записані: 50 мкА, 200 мкА, 0,8 мА, 24 В, 6 В, 1,5 В. *Придивіться уважно до співвідношення між числовими значеннями показів приладів. Можливо, вам допоможе та закономірність, яку ви побачите.* Визначте значення **опору резистора та опори приладів**. Якщо ви вважаєте, що задача має декілька розв'язків, то обмежтеся одним з них.



(144) «Збиваємо дрони!» Оптична система пункту спостереження ППО складається із збиральної лінзи (об'єктив) та розсіювальної (окуляр). Найменша відстань між лінзами, за якої ми можемо отримати чітке зображення предмету, визначається конструкцією системи і дорівнює 950 мм. Для цієї відстані кутові розміри зображень предметів у 20 разів більші за їх видимі кутові розміри, якщо проводити спостереження неозброєним оком. Дрон був помічений в оптичну систему тоді, коли його кутова висота над горизонтом була рівною 20°. Відомо, що дрон рухається на сталій висоті 100 м та має сталі швидкість 400 км/год та напрямок руху. Траєкторія польоту має спільну точку з перпендикуляром, проведеним до поверхні землі через пункт ППО. Система ППО приводиться в бойовий стан за час 1,92 с від моменту виявлення ворожої цілі. Після цього з інтервалом часу 0,35 с можливо випускати снаряди по цілі з початковою швидкістю 800 м/с.

А) Розрахуйте, з якої **найбільшої кількості пострілів** пункт ППО збив дрон, якщо його знешкодження відбулось тоді, коли БПЛА перебував на висоті 65° над горизонтом. Розміри дрону та снарядів достатньо малі; розмірами пункту ППО – нехтуйте.

Б) Знайдіть, **як змінилась** при спостереженні за дроном **відстань** між лінзами труби від моменту виявлення БПЛА до його знешкодження. Уважайте лінзи тонкими, а систему – ідеальною центрованою.

(145) «Ші-болід». Конструкторське бюро займалося розробкою та підбором такого двигуна для боліду, який би дозволяв на прямій горизонтальній трасі, з однаковими повними масами авто (1200 кг), з однаковими для всіх моделей властивостями дороги та гуми, починаючи зі стану спокою, якомога швидше досягти зазначеної в правилах змагань швидкості V_{max}. Для змагань використовувалося закрите спеціально обладнане приміщення, де будь-яким впливом повітря на рух болідів під час змагань і силою тертя кочення можна було знехтувати, а значення прискорення вільного падіння можна уважати рівним 10,0 м/с^2.
Під час змагань болідом керує ШІ, який підбирає такий режим розгону, який не тільки є оптимальним за часом, але й не допускає проковзування. Уважайте значення коефіцієнту тертя ковзання між шинами та покриттям траси постійним, а всі колеса ведучими.

Згідно інсайдерської інформації, конструктори, використовуючи в болідах двигуни різних потужностей, отримали наступні значення часу розгону до потрібної швидкості в залежності від максимальної корисної потужності встановленого в болід двигуна (дивись таблицю).

Номер двигуна	Максимальна корисна потужність двигуна, кВт	Час розгону до необхідної швидкості, с
1	30	18,5
2	120	6,5
3	210	6
4	300	6

А) **Поясніть, чому** для двигунів № 3 та № 4 час розгону однаковий.
Б) Знайдіть, **до якої швидкості** V_{max} мали розганятися болiди?
В) У другому турі змагання гонки проходили на тих самих болідах на такому ж покритті і в тому ж приміщенні за цілком попередніх умов руху, але болiди мали стартувати в гору по похилій трасі з кутом нахилу покриття до горизонту в 11^0. **За який час** цей болід з корисною потужністю двигуна 180 кВт досягне тієї ж самої швидкості V_{max}?

(146) «Кава з молоком». Декан хімічного факультету - пунктуальна людина, що цінує точність і холодну каву з молоком.
– Чашку кави через 5 хвилин, – сказав декан, збираючись на ділову зустріч. Через хвилину його робот-помічник вже перелив 200 г кави з кавомашини у високу тонкостінну мензурку, щоб кава там скоріше охолола. Але ще через хвилину кава остигла з 95°С лише до 80°С, і робот у паніці дістав з холодильника іншу таку ж мензурку з охолодженим молоком. Він знав, що до кави треба додати 100 г молока. Але не знав як вчинити, щоб досягти найнижчої температури напою за ті 3 хвилини, що залишилися? Долити відразу? Трохи пізніше? Наприкінці через 3 хвилини?
Допоможіть штучному інтелекту знайти правильне рішення цієї задачі:
На столі стоять дві вузькі тонкостінні (для кращого теплообміну) мензурки, одна з кавою вже за температури 80°С, інша з холодним молоком.

А) Спробуйте отримати формулу залежності температури кави від часу τ. Для цього розбийте τ на n малих проміжків часу $\Delta\tau$ і запишіть рівняння теплового балансу для декількох перших з них. Виразите останню температуру через початкову і «впіймайте» закономірність.
Б) Через який час після початку останніх трьох хвилин слід додати молоко в каву, щоб наприкінці температура напою «кава з молоком» виявилась найменшою?
В) Якою буде ця температура?
Температура в кімнаті підтримується на рівні 20°C, а у холодильнику на рівні 5°C.
Фізичні характеристики кави й молока вважати такими ж, як і у води.
Урахуйте, що потужність теплопередачі пропорційна площі поверхні і різниці температур з навколишнім середовищем. Тепловими втратами через циліндричні основи у мензурках знехтуйте.
Якщо не вдається отримати точний розв'язок, зробіть наближений, оціночний.

Задачі запропонували:
142 Микуленко О.І. 143 Гельфгат І.М., 144 Шевчук О.Г., 145 Пашко М.І., 146 Орлянський О.Ю.

11 клас

2020-2021 роки

І заочний тур

(147) «Гелій за Томсоном». У 1897 р. Джозеф Джон Томсон відкрив електрон і виміряв відношення його маси до заряду, а в 1904 р. (за 15 років до відкриття протона Ернестом Резерфордом) запропонував модель атома, у якому електрони рухались уздовж орбіти радіусом ***r*** навколо центру однорідно зарядженої кулі радіусом ***R***, знаходячись усередині неї, і розділені між собою рівними кутами. Для забезпечення електронейтральності атому загальний позитивний заряд кулі дорівнював за модулем сумі зарядів електронів. *Для пояснення серій спектральних ліній Томсон розглядав декілька таких орбіт-кілець з різною кількістю електронів. Зазначимо також, що свою модель атома Томсон ніколи не порівнював з пудингом.*

Розгляньте найпростішу модель атома $^4_2$He за Томсоном. Вважаючи діаметр атома гелію 10^{-10}м, **знайдіть можливі значення радіуса орбіти *r***, відповідні частоти обертання та енергії повної іонізації атома до альфа-частинки та двох електронів.

Порівняйте частоти та енергію з частотою першої спектральної лінії Гелію (довжина хвилі 587,5 нм), *відкритою в 1868 р. П'єром Жансеном у сонячному спектрі (що й обумовило назву нового елементу)*, та енергією 79 eV повної іонізації Гелію. Елементарний заряд $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, маса електрона $9 \cdot 10^{-31}$ кг, стала в законі Кулона $9 \cdot 10^9$ Н $\cdot$ м^2/Кл^2, швидкість світла у вакуумі $3 \cdot 10^8$ м/с.

(148) «Інопланетні технології». Астронавти, що здійснили аварійну посадку на маленькій планеті, яка не обертається навколо своєї осі, не має атмосфери і має форму кулі, почали її дослідження з буріння наскрізного тунелю вздовж діаметра та побудови вертикальної надвисокої вишки. Під час буріння вони визначили, що густина цієї планети лінійно зростає з глибиною занурення в тунель.

У вільний час один з астронавтів зробив з нитяного маятника годинник і почав аналізувати покази цього годинника на різних висотах та глибинах.

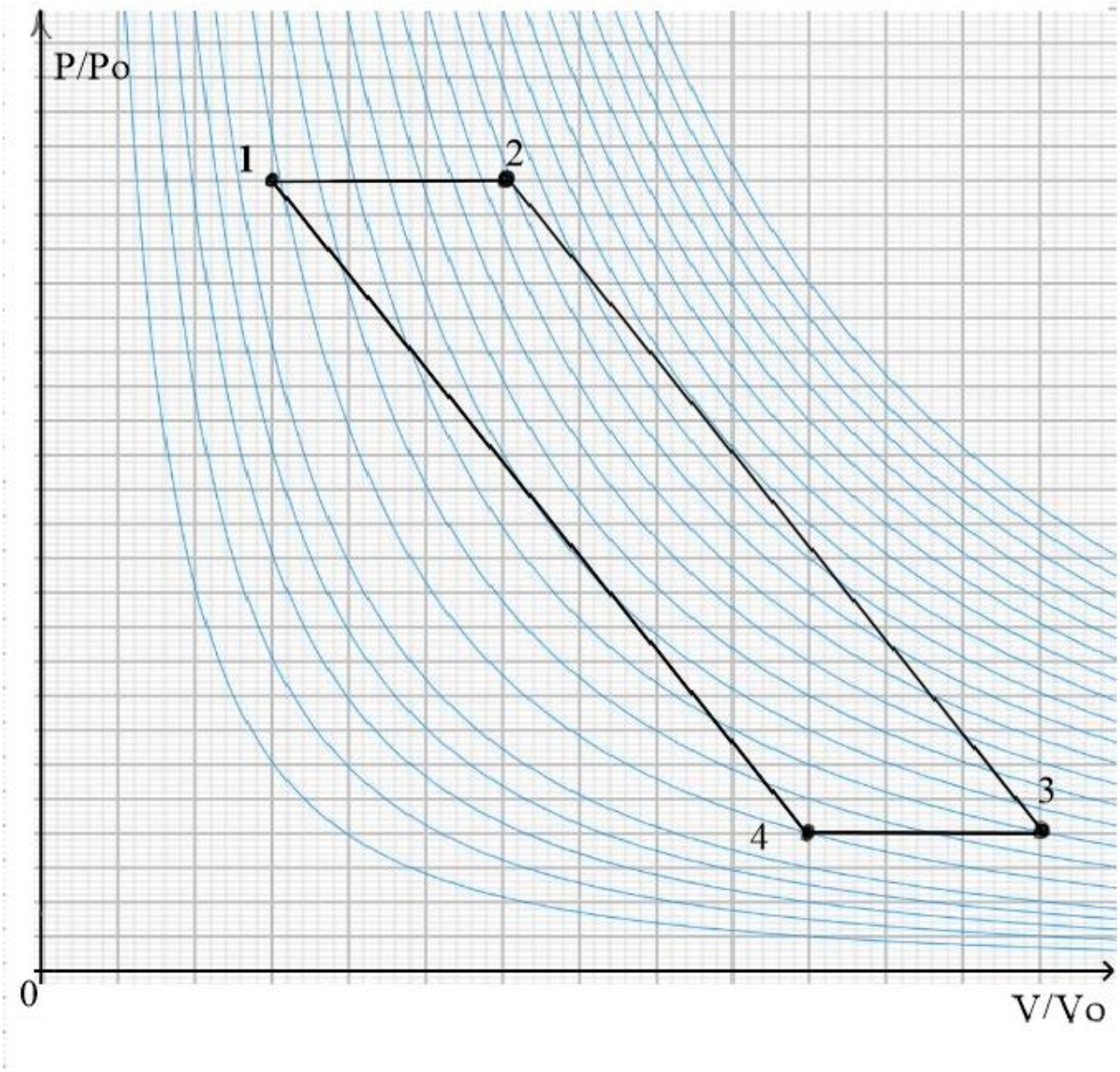
Експеримент показав, що за 25 хвилин, виміряних цим годинником на поверхні планети (місцевий час), він поспішає на 21 «місцеву» секунду як на відстані 53км, так і на відстані 97км від центру планети.

1) **На який відстані** від центру планети годинник відстає на ту ж саму кількість секунд, що й на відстані 105 км?

2) **Знайти середню густину** планети, якщо на поверхні її густина дорівнює 1000кг/м^3.

3) **Де потрібно розташувати** годинник, щоб він поспішав сильніше за все? **На скільки секунд** він буде поспішати за 25 хвилин?
Коливання вважати малими.

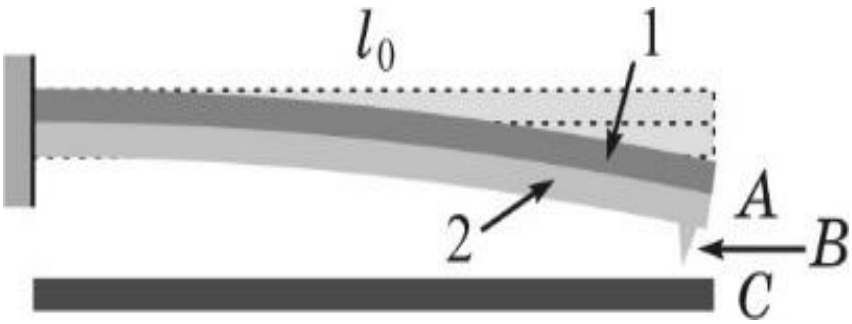
(149) «Цикл на смугастому фоні». На наведеній діаграмі надана залежність тиску ідеального газу від його об'єму у відносних одиницях під час циклічного процесу. **Знайти ККД** цього процесу. Блакитними лініями накреслені адіабати для цього газу.



(150) «Електробезпека — перш за все!». Автомат, що забезпечує знеструмлення у випадку надмірного збільшення сили струму в електричній мережі, є важливим елементом системи електробезпеки. У випадку перевантаження «працює» тепловий розмикач. Це біметалева пластинка A, яка через надмірне нагрівання вигинається аж до торкання виступом B провідної пластини C, після чого й відбувається роз'єднання контактів основного кола та знеструмлення. На рисунку схематично показано таку систему в нагрітому стані (уважайте, що за температури 0 °C біметалева пластинка пряма та паралельна пластині C).

Довжина біметалевої пластинки $l_0 = 4$ см, товщина кожної з її двох частин $s = 1$ мм, їхні температурні коефіцієнти лінійного теплового розширення відповідно $\alpha_1 = 1,8 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$ і $\alpha_2 = 1,2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$, а модулі пружності однакові. Виступ B торкається пластини C, коли опускається на $h = 0{,}6$ мм.

За якої температури біметалевої пластинки відбувається знеструмлення кола?



Задачі запропонували:

147 Орлянський О.Ю., 148 Пашко М.І., 149 Овсянніков О.А, Пашко М.І., 150 Гельфгат І.М.

ІІ заочний тур

(151) «Ротаційний фонтан 2». На фото можна побачити ротаційні фонтани на п’ять патрубків.

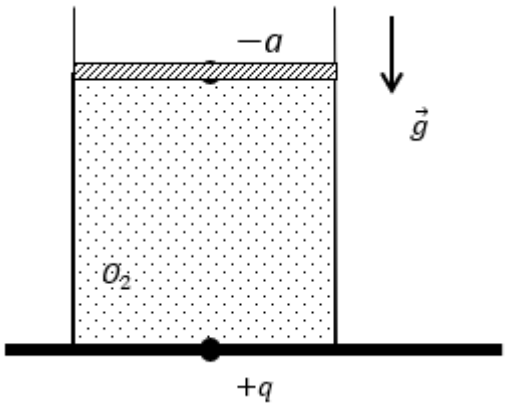
А) Розгляньте загальний випадок фонтану на n патрубків і знайдіть **кількість візуальних перетинів** струменів води, що рухаються вгору. Знехтуйте відстанню від патрубків до осі обертання і вважайте, що за час підйому води (від патрубків до найвищої точки) фонтан робить m повних обертів.

Б) Для випадку великої кількості патрубків знайдіть **діаметри найвужчої та найширшої частин** фонтану та його **висоту**. Відстань від осі обертання до отвору патрубку R, кутова швидкість обертання ω, початкова швидкість води відносно патрубків v_0, патрубки відхилені в радіальному напрямку і утворюють кут α з горизонтом.





(152) «Поршень з «родзинкою». У циліндричній вертикальній посудині під поршнем площею S знаходиться у рівновазі 1 моль ідеального газу (кисню) за температури T. У середині поршня та середині основи закріплені точкові заряди q та –q. Посудину починають повільно нагрівати. Теплоємність самої посудини з поршнем дорівнює C, прискорення вільного падіння g. Нехтуючи зовнішнім атмосферним тиском, втратами енергії в навколишнє середовище та поляризацією кисню (вважати, що його діелектрична проникливість дорівнює 1).

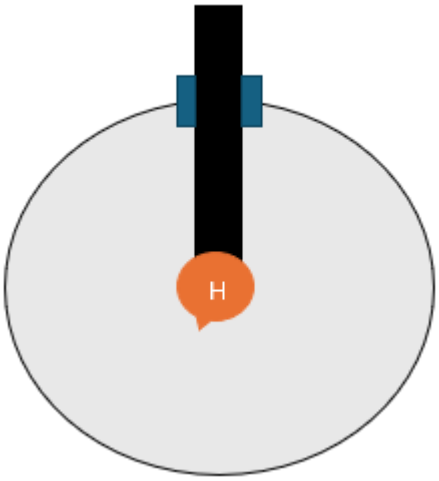


Визначити **теплоємність усієї системи** (або функцію її залежності від температури) під час розширення в таких випадках:

А) Поршень невагомий.

Б) Маса поршня дорівнює M.

(153) «ВАХ, яка батарейка!». Електрична батарейка сконструйована за допомогою β-радіоактивного препарату тритію. Батарейка складається з металевої сфери, провідного стержня, який ізольований від сфери та на кінці якого безпосередньо в центрі сфери знаходиться радіоактивний препарат. Щосекунди проходить $\upsilon=5*10^{18}$ актів розпаду. Енергія випромінених електронів рівномірно розподілена в діапазоні значень від Wmin=12кеВ до Wmax=16кеВ.



1) **Розрахувати** та **побудувати** вольт-амперну характеристику цієї батарейки (ВАХ) та вказати значення всіх характерних точок на цій ВАХ.

2) Яка **кількість теплоти** виділиться на реостаті, якій був під'єднаний до цієї батарейки, якщо його опір протягом 1хв рівномірно збільшився з часом від 10кОм до 20кОм?

(154) «…фузія». Ліву половину закритого горизонтального циліндра заповнили розрідженою киснево-гелієвою сумішшю (концентрація молекул кисню становить 20 % загальної концентрації частинок суміші). У правій половині циліндра — вакуум. Посередині циліндра розташована пориста перегородка (ширина пор набагато менша від довжини вільного пробігу молекул газів). Початковий тиск у лівій частині циліндру p_0. Через певний час τ тиск у правій частині зростає до 0,5 % від p_0. При цьому концентрація молекул кисню у правій частині становить 8,1 % від загальної концентрації молекул. 1) **Через який час** тиск у правій половині зросте до 25 % від p_0? 2) **Яку частку** від усіх молекул у правій частині циліндра становитимуть у цей момент молекули кисню? 3) **Порівняйте імовірності** відбивання від перегородки молекули кисню та атома гелію.

(155) «Ой летіли дикі … тіла …». Багато всесвітньо відомих вчених займалися знаходженням розв'язків славнозвісної задачі трьох тіл, що рухаються в просторі і взаємодіють виключно один з одним гравітаційними силами.

Навіть, якщо отримати точний аналітичний розв'язок у загальному вигляді не вдається, за допомогою чисельних методів можна будувати траєкторії тіл, що складають систему для окремих випадків. Розглянемо один з цих випадків: три тіла рівної маси рухаються по незмінній траєкторії у вигляді вісімки (див. рисунок) з певним відставанням одне від одного. Траєкторія

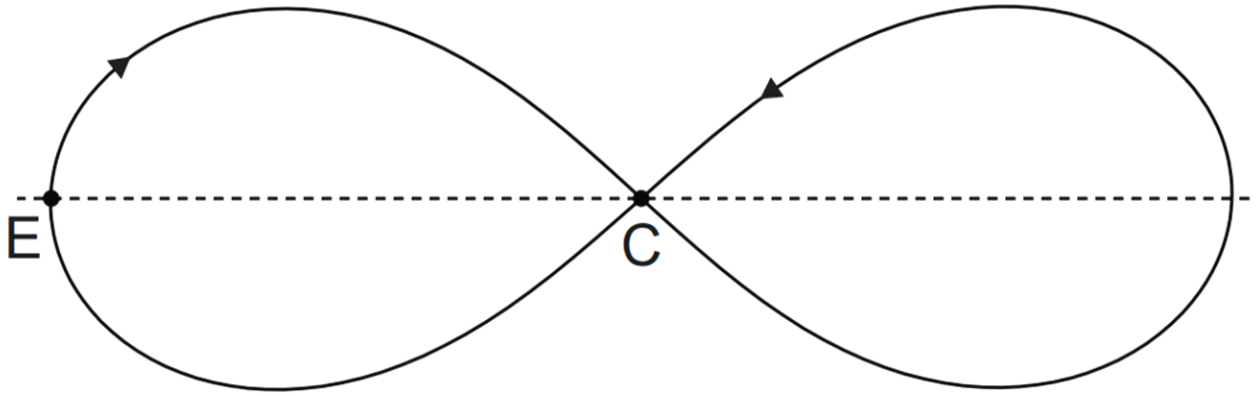
на рисунку отримана за допомогою точного комп'ютерного чисельного моделювання, і тому ви маєте користуватись нею для геометричних побудов, що можуть допомогти вам розв'язати задачу.

А) Спираючись на фізичні закони, **зробіть побудову розташування** трьох тіл у момент часу, коли дві з трьох найкоротших відстаней між парами тіл системи є рівними. Розглянути всі можливі варіанти. Надати пояснення.

Б) Пронумеруємо тіла 1, 2 та 3 в порядку, у якому вони послідовно одне за одним проходять точку Е. Позначимо позиції тіл 2 та 3 відповідно як C_2 та C_3 в момент проходження тіла 1 через точку С. Аналогічно, позначимо позиції тіл 2 та 3 відповідно як E_2 та E_3 в момент проходження тіла 1 через точку Е. Повний період проходження кожного тіла по вісімці – Т.

Знайдіть час проходження кожним тілом відстані від:

а) C_2 в С; б) С в Е; в) C_3 в Е; г) E_2 в C_2.



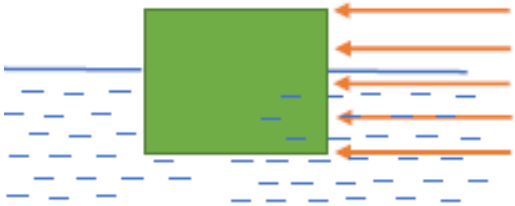
Задачі запропонували:

151 Орлянський О.Ю., 152, 153 Пашко М.І., 154 Гельфгат І.М., 155 адаптовано з олімпіади Nordic-Baltic.

Фінал

(156) «Магнітне запаморочення». У деякий момент часу заряджена частинка має швидкість v_0, спрямовану під кутом α до ліній однорідного магнітного поля. Частинка рухається у середовищі, сила опору якого пропорційна швидкості. Схематично намалюйте можливі траєкторії частинки. На якій відстані від початкової точки руху частинка зупиниться і який шлях пройде? Маса частинки m, її заряд q, індукція магнітного поля B, коефіцієнт пропорційності у силі опору k.

(157) «Маєш вертітись, коли нікуди дітись!» У великій посудині з водою плаває льодяний куб з ребром ***a***. Температура куба, води і повітря дорівнює 0^0C и на протязі всього часу досліду залишається незмінною. З метою розплавити куб, на одну з його сторін



перпендикулярно до неї (горизонтально) спрямовують випромінювання, внаслідок чого куб починає танути з боку спрямованого на нього випромінювання з постійною невеликою швидкістю V(м/с). Через деякий час куб втрачає рівновагу та перевертається на 90^0 (у площині малюнка). Вважаючи, що всі оберти куб робить майже миттєво і що оберт на 90^0 відбувається одразу як тільки куб починає нахилятись, визначте: через ***який час*** розтане половина маси кубу? Густина льоду 895,3кг/м^3, густина води 1000кг/м^3, температура плавлення льоду 0^0С.

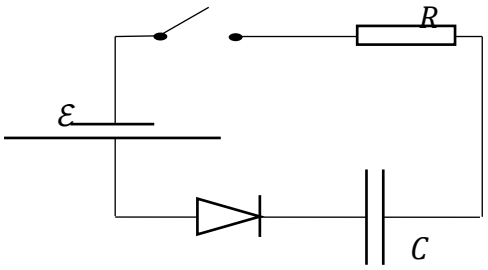
(158) «Радіокуля». Еластичну тонкостінну кулю заповнили радіоактивним одноатомним газом с температурою T_0. Внаслідок радіоактивного розпаду ядра атомів розпадається на дві стабільні частинки з виділенням енергії q_0. Знайти температуру Т через тривалий проміжок часу. Газ вважати ідеальним, а оболонку непроникливою для частинок. Будь-якими втратами енергії системи, а також атмосферним тиском знехтувати.

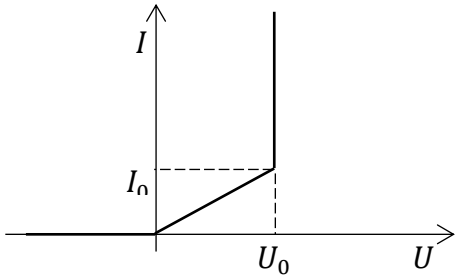
(159) «Сферичний полон». У нижній точці нерухомої тонкостінної діелектричної сфери радіусом *R* закріплений точковий заряд q_1. По внутрішній гладенької поверхні цієї сфери може ковзати невелике тіло масою *m* та зарядом q_2 ($q_2 \cdot q_1 > 0$).
А) **Знайти період** малих коливань тіла навколо положення рівноваги.

Б) **За яких умов** період коливань не залежить від конкретних значень маси тіла *m* і зарядів q_1, q_2 та чому він дорівнює?

Електризацією сфери під час руху тіла, силами тертя та опору знехтувати.

(160) «На зарядку ставай та всіх нагрівай!» Для повільної зарядки конденсатора використовують схему, що зображена на рисунку. Визначити, яка **кількість теплоти** виділиться на резисторі ***R*** після того як замкнути ключ, якщо спочатку конденсатор був незаряджений. Вольт-амперна характеристика діода наведена на малюнку. Батарейку вважати ідеальною.





Задачі запропонували:

156,159 Орлянський О.Ю., 158 Микуленко О.І., 157,160 Пашко М.І.

2021-2022 роки

І заочний тур

(161) «Ловці комах». В деякій лабораторії займаються дослідженням рідкісних комах, яким притаманні наступні особливості життєдіяльності:

- комах дуже багато і всі вони мають однакову масу та однакові дуже невеликі розміри, а середовище, в якому комахи відчувають себе найкраще – це теплоізольовані герметичні резервуари деякої фіксованої висоти H, що мають або кубічну, або конічну, або сферичну форму з вакуумом в середині (див. рис.);

- комахи цілодобово знаходяться у своєму рої у стані постійного хаотичного руху, займаючи весь об'єм резервуару наче молекули газу, а всі зіткнення комах з перешкодами, стінками, одна з одною є абсолютно пружними.



На жаль в резервуарах іноді з'являються жуки-комахоїди. Вони можуть самостійно змінювати свій об'єм, для того, щоб підніматися/спускатися і полювати на комах виключно на тій висоті, на якій комах знаходиться більше ніж на будь-якому іншому рівні над землею.

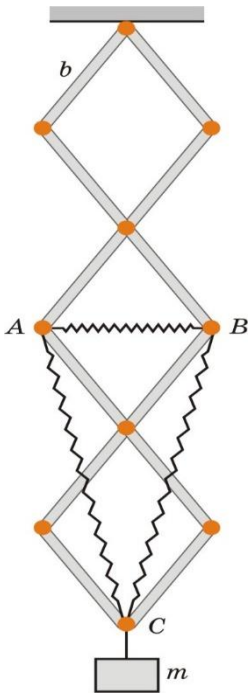
При цьому виявилося, що:

- висота шару, де комах більш за все, залежить від швидкості хаотичного руху комах. Самі комахи дуже рухливі, швидко змінюють свою швидкість, але середня кінетична енергія комах в кожному шарі одного того ж резервуару однакова і не залежить від висоти самого шару;

- коли посудина кубічна, то за будь-якої швидкості комах, жуки полюють на них поблизу дна (що вважається логічним внаслідок впливу на рій комах сили тяжіння);

- коли посудина конічна або сферична, жуки знаходять цей шар на деякій далеко ненульовій висоті над поверхнею землі.

Під час одного з спостережень, жуки полювали в конічних та сферичних резервуарах на одній тій самій висоті 2,5 м. При чому виявилося, що швидкість руху комах у сферичному резервуарі була у $\sqrt{3}$ разів більше ніж у конічному. Знайдіть за цими даними висоту резервуарів H.



(162) «Шарнірна конструкція». Показана на рисунку конструкція складається з 8 легких стрижнів, з'єднаних шарнірами. Чотири стрижні мають довжину b, інші чотири — довжину $2b$. Шарніри A, B, C з'єднали трьома однаковими пружинами жорсткістю k та підвісили до конструкції вантаж масою m. У положенні рівноваги кожен із стрижнів утворює кут 45° з вертикаллю. Визначте **довжину l_0** недеформованої пружини.

(163) «Репортаж з майбутнього». Космічна експедиція виявила на далекій околиці Сонячної системи (у 200 а.о. від Сонця) астероїд — однорідну кулю радіусом 1 км, густина якої дорівнює середній густині Землі. Земляни

стали свідками того, як унаслідок зближення з іншим небесним тілом швидкість астероїда зменшилася практично до нуля. Подальшою взаємодією астероїда з небесними тілами, крім Сонця або Землі, можна знехтувати. Точні розрахунки показали, що згодом на астероїд чекає лобове зіткнення з Землею. Астрономічна одиниця (а.о.) дорівнює середній відстані між Землею і Сонцем (150 млн км). Орбітальна швидкість Землі дорівнює 30 км/с, перша космічна швидкість для Землі — 7,9 км/с.

А) Оцініть, через **який час** очікується зіткнення астероїда з Землею.

Б) Якою буде **швидкість астероїда** відносно Землі безпосередньо перед зіткненням?

Юні фізики пропонують врятувати світ, направивши до астероїда спеціальну експедицію. Ця експедиція має забезпечити зміну траєкторії астероїда, викидаючи з його поверхні у космос каміння з поверхні. Загальна енергія, яку можна передати камінню, не може перевищувати $W = 700$ МДж.

В) Визначте **максимальний імпульс**, який можна передати астероїду таким чином.

Г) Оцініть, якого **імпульсу** слід надати астероїду на відстані 50 а.о. від Сонця, щоб дійсно забезпечити проходження астероїда на відносно безпечній відстані (30 000 км) від Землі.

Довідкова інформація. У полярній системі координат, центр якої розташований у центрі Сонця, рівняння еліптичної орбіти має вигляд $r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$. Параметр p і ексцентриситет ε є сталими характеристиками орбіти.

(164) «Заряджені». До зарядженої великої металевої пластини піднесли на деяку відстань l маленьке за розмірами заряджене тіло (тіло можна вважати точковим зарядом q, а площину нескінченною). З'ясувалося, що в усіх точках поблизу площини, які видні із заряду під кутом 60° до l, напруженість електричного поля дорівнює нулю.

А) Визначте **силу**, що діє на заряд.

Б) Схематично зобразіть **картину силових ліній**.

В) Знайдіть **відношення** точкового заряду до заряду на площині всередині окресленого кутом 60° кола.

(165) «Де світліше?». Планета «Диня» являє собою двовісний еліпсоїд поперечний полярний переріз якого – еліпс з великою піввіссю ***a*** та малою – ***b***. На відміну від «Дині» планета «М'яч» – ідеальна сфера радіусом ***a***. Планети однорідні і обертаються однією коловою орбітою навколо материнської зорі. Нехтуючи явищами рефракції та вважаючи, що розміри планети та зорі значно менші за відстань між ними, а осі добового обертання планет «Диня» та «М'яч» перпендикулярні до площини їхніх орбіт і проходять через центри мас планет, знайдіть:

А) чому дорівнює **відношення освітленостей**, створюваних зорею на поверхні «Дині» в точці з планетографічною широтою φ та на поверхні планети «М'яч» в точці з таким же значенням широти в місцеві полудні?
Б) **На якій** з планет середня освітленість точок полуденного меридіану **більша**?

Довідкова інформація. 1. Планетографічною широтою φ точки А називають центральний кут між площиною екватора планети та радіус-вектором напрямленим в цю точку. 2. Полуденний меридіан – геометричне місце точок перетину поверхні планети з площиною, що проходить

через полюси планети та центр зорі. 3. Вам може бути корисним рівняння еліпса в декартових координатах:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Задачі запропонували:

161 Пашко М.І., 162, 163 Гельфгат І.М., 164 Орлянський О.Ю., 165 Шевчук О.Г.

II заочний тур

(166) «Гравітаційна теорема». Відомо, що густина ρ планети або зорі збільшується до центру і залежіть від відстані r до нього. Уявіть таку сферичну планету, на відстані r_0 від центру якої прискорення вільного падіння дорівнює $\vec{g}$. **Доведіть** наступну теорему: Існує поверхня, яка ділить планету на дві частини, внесок від кожної з яких у прискорення вільного падіння дорівнює $\vec{g}/2$, а рівняння поверхні не залежить ні від маси планети M, ні від її радіусу R, ні від розподілу густини $\rho(r)$. **Напишіть рівняння** цієї поверхні та обґрунтуйте його. *Зверніть увагу на метод, який використовується при «шкільному» доведенні того, що прискорення вільного падіння всередині сферично-симетричної оболонки дорівнює нулю.*

(167) «Невтопний метал». Алюмінієва циліндрична спиця довжиною 20 см и густиною 2700 кг/м^3 вкрита дуже тонким шаром парафіну, і внаслідок цього може плавати на поверхні води (густина води 1000 кг/м^3, коефіцієнт поверхневого натягу 70 мН/м) **Знайти** настільки точно, наскільки зможете, **максимальну масу** спиці, що може ще утриматися на поверхні води. Уважати g=9,81 м/с^2.

(168) «Інструкція для агрономів». Вирощуючи гречку, фізик-агроном помітив, що швидкість росту рослини, а відповідно й врожай, дуже сильно залежать від середньодобової температури. На наступний рік він ретельно записував результати і взимку вирішив обробити їх, щоб спрогнозувати, яким буде наступний врожай за різних погодних умов. Середня температура повітря за сезон сягнула 20 градусів.

Висота рослини, см	1	6	16	50	64	78	90	95
День після посадки	5	13	22	31	35	38	44	64

Таблиця 1 Для апроксимації агроном вирішив використовувати логістичну функцію наступного вигляду:

$$l(t)=l_{max}*\frac{1}{a*\mathrm{e}^{-\mu t}+1},\text{ де } l-\text{максимальна висота рослини,}$$

$$a-\text{деякий коефіцієнт, що залежить від рослини,}$$

$$\mu-\text{стала швидкості росту (питома швидкість росту), } l_{max}=100\text{ см}$$

Відомо, що питома швидкість росту пропорційна наступному виразу

$$\frac{(T - 10℃)(30℃ - T)}{100℃}, \text{де T} - \text{середня температура}$$

Також відомо, що гречка не росте при середніх температурах нижче 10 градусів, та вище 30. Уважаючи, що в наступному році гречка виросла до висоти в 80 см за 50 днів, знайти середньодобову температуру під час періоду росту. Уважаючи, що за цей період максимальна температура змінювалася таким чином як показано на графіку (див. рис.) та знаючи, що вологість повітря з 12 по 40 день була приблизно такою (таблиця 2), оцінити **кількість днів**, в які агроном не міг працювати на своєму полі.

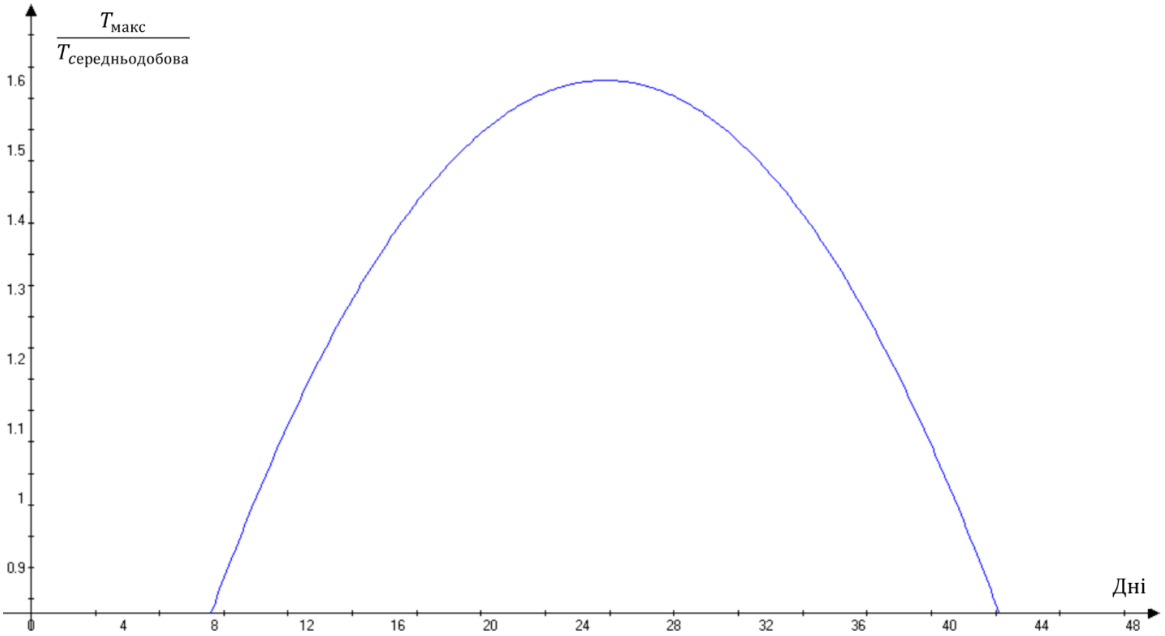


Рис. Залежність максимальної температури від кількості днів після посадки

12-16	17-21	22-26	27-31	32-36	37-40	День
60%	50%	55%	40%	50%	65%	Відносна вологість

Таблиця 2 Відносна вологість в різні дні після посадки

Уважати, що можливість виходити на роботу залежить від температури точки роси. За температури точки роси 26 градусів і вище працювати шкідливо для здоров'я.
Пропонуємо скористатися формулою розрахунку точки роси:

$$T_p = T - \frac{1 - RH}{0.05}, \text{де } T - \text{поточна температура}, RH - \text{відносна вологість}.$$

Як змінилися б результати якщо б з 12 по 16 день йшла злива?

- Питома швидкість росту – приріст біомаси за одиницю часу на одиницю біомаси.

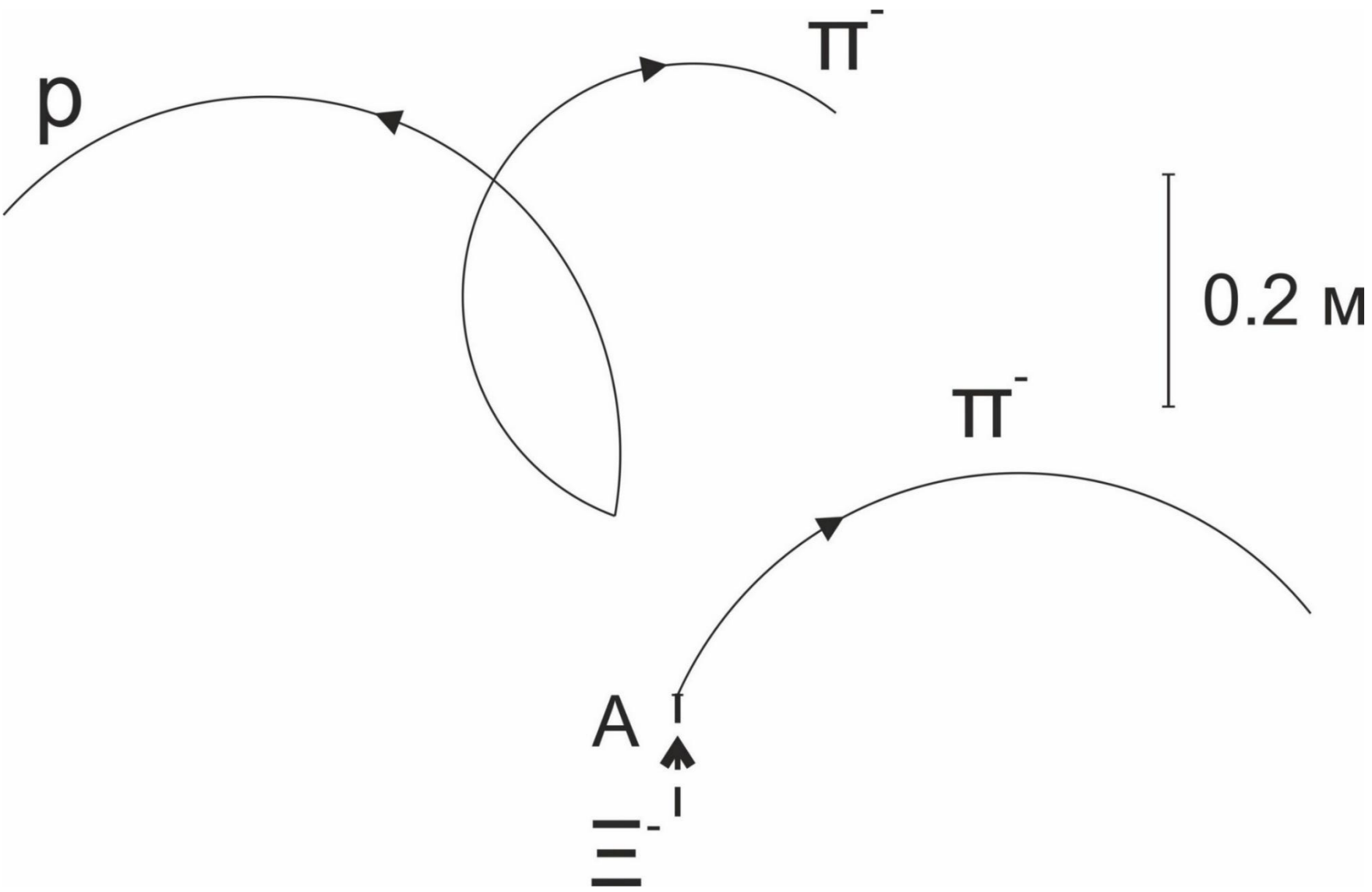
(169) «Збагачення урану». Важливою процедурою в ядерній енергетиці є збагачення урану – збільшення концентрації ^{235}U відносно ^{238}U. Одним з методів є самочинне пропускання суміші гексофторидів $^{235}UF_6$ та $^{238}UF_6$ (початкова природна концентрація $^{235}UF_6$ в суміші дорівнює 0.7%) крізь пористу мембрану, розмір отворів в якій значно менший за довжину вільного пробігу молекул в суміші. Вважайте, що початкова маса суміші є дуже великою. Через короткий проміжок часу після початку проходження суміші крізь пори, суміш, що пройшла крізь мембрану, відкачують і знову дають їй проходити крізь мембрану за тих самих умов. Такий

процес повторюють багато разів. Оцініть, скільки знадобиться таких «просіювань», щоб підвищити концентрацію $^{235}UF_6$ вдвічі.

(170) «Бульбашкова камера». Для дослідження розпаду елементарних частинок група вчених вивчає треки продуктів розпаду ксі-гіперону Ξ^- (заряд дорівнює $-e$, маса 1321.71 МеВ/c^2) в так званій бульбашковій камері. Ці треки, які лежать в одній площині, ви можете побачити на рисунку на наступній сторінці. Трек Ξ^- не зберігся, відомо лише те, що швидкість Ξ^- була дуже велика та орієнтована вертикально вверх (на рисунку). Відомо, що в точці А ксі-гіперон Ξ^- розпався на пі-мезон π^- (заряд дорівнює $-e$, маса 139.57 МеВ/c^2) та нейтральний лямбда-гіперон Λ^0 (маса 1115.683 МеВ/c^2), який не треку, адже не взаємодіє із речовиною в бульбашковій камері. Лямбда-гіперон Λ^0, у свою чергу, розпадається на протон p (маса 938.272 МеВ/c^2) та пі-мезон π^-. Магнітне поле, що орієнтоване перпендикулярно площині рисунку, дорівнює B=2 Тл. Користуючись наведеним рисунком, визначте енергію та імпульс ксі-гіперону Ξ^- перед розпадом. Уважайте, що взаємодія частинок із речовиною в камері майже не впливає на їх рух.

Задачі запропонували:

166 Орлянський О.Ю., 167 Пашко М.І., 168 Югай М.Е., 169,170 Олійник А.О.


p
π-
0.2 м
π-
A
Ξ-

Фінал

(171) «Світлові хвилі». Вночі з дна глибокого басейну вертикально вгору б'є лазерний промінь (елемент підсвітлення). По поверхні води розповсюджуються невисокі хвилі амплітудою 2 см, форму яких у перерізі можна вважати синусоїдальною. Гребні хвиль переміщуються зі швидкістю 1 м/с. Опишіть рух плями променю по стелі басейну. Висота стелі над поверхнею води 6 м. Відомо, що на глибокій воді невисока хвиля довжиною 16 м розповсюджується зі швидкістю 5 м/с. Вважайте, що показник заломлення води 4/3, а прискорення вільного падіння $9{,}81\ \text{м}/\text{с}^2$.

(172) «Довіряй, перевіряй та модифікуй!» Недовірливий учень вирішив виготовити найпростішу модель зоряної системи, щоб перевірити закони Кеплера. Для цього учень вбив у гладеньку діелектричну горизонтальну поверхню цвях-«зорю», а «планету» — маленьку кульку масою m — прив'язав до цвяху легкою гумовою ниткою з жорсткістю k. Потім він розтягнув нитку до довжини r_0 і надав кульці початкової швидкості $\vec{v}_0$, напрямленої перпендикулярно до нитки. Дослід було повторено за різних значень m, k, r_0, v_0. У всіх випадках довжиною недеформованої нитки можна знехтувати порівняно з іншими характерними відстанями.

а) Які закони Кеплера виконуються для такої системи? Які, на Вашу думку, потребують модифікації та якої саме?
б) Нехай тепер «зоря» та «планета», що досі зв'язані ниткою, мають заряди відповідно $-q$ і q. Запишіть рівняння, якому мають задовольняти максимальна та мінімальна відстані між «зорею» та «планетою». Спробуйте знайти хоча б один розв'язок цього рівняння та зробити схематичний рисунок можливих траєкторій руху «планети».
в) Розгляньте випадок, коли рух відбувається в однорідному магнітному полі, індукція $\vec{B}$ якого напрямлена вертикально. Чи можна запропонувати таку залежність вектора магнітної індукції B від часу, щоб сила Лоренца в будь-який момент компенсувала кулонівську силу?
Примітка: не враховуйте ефекти, що пов'язані з виникненням вихрового електричного поля, поляризацією поверхні та випромінюванням електромагнітних хвиль. Уважайте, що нитка на цвях не намотується і в місці кріплення до цвяха може обертатися без втрат енергії.

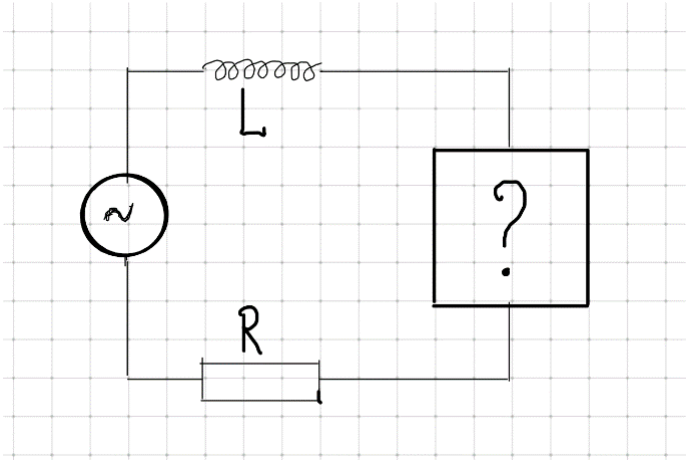
(173) «Пружній велосипед». На рисунку наведений німецький велосипед часів першої світової війни, в якому замість звичних сьогодні шин використовувались пружини, що розташовані між двома ободами.
а) Вважаючи жорсткість кожної пружини k, визначте жорсткість такого колеса. Вважайте просідання малим, а обводи колес жорсткими.
б) Наскільки просідало переднє колесо велосипеду, коли на ньому по горизонтальній дорозі 1) рівномірно їхала людина масою m і 2) коли вона екстремально гальмувала, зупинивши обертання заднього колеса?
в) Схематично нарисуйте пружини заднього колеса при такому гальмуванні.
Вважайте, що центр мас людини і центри колес утворюють трикутник з відношенням сторін 3:4:5, а відстань між центрами колес дорівнює чотирьом їх радіусам.
Коефіцієнт тертя зовнішнього ободу о поверхню μ, масою велосипеду у порівнянні з масою людини можна знехтувати.



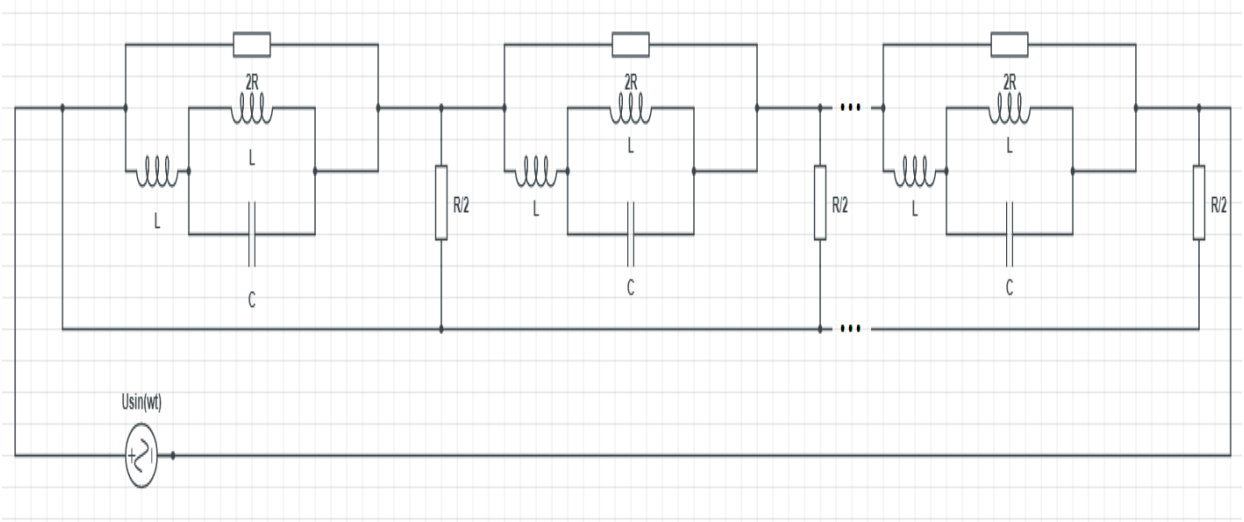


(174) «Металевий дирижабль». Юні винахідники розробляють проект апарата для повітроплавання. Дійшли згоди, що це має бути жорстка тонкостінна герметично закрита куля радіусом 10 м, заповнена гелієм. Оболонку планують виготовити з металу густиною 3000 кг/м^3, максимально припустима механічна напруга в ньому 30 МПа. Апарат має підняти вантаж на висоту 1 км. Температура повітря на висоті до 1 км вважається всюди однаковою, температура гелію така сама, тиск на рівні землі 100 кПа. Молярна маса гелію 0,004 кг/моль; середня молярна маса повітря — 0,029 кг/моль. Уважайте, що $g = 10\ \text{м/с}^2$. За якої температури повітря така система взагалі підніметься на потрібну висоту? За якої температури максимальна маса вантажу дорівнюватиме 60 кг?

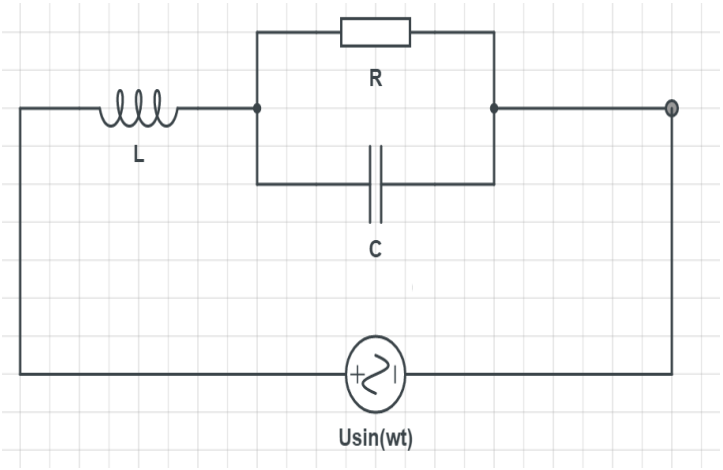
(175) «Реактивні ланцюги». а) На рисунку зображена електрична схема дослідження «чорної скрині» за допомогою ідеального джерела змінної синусоїдальної напруги частоти $\omega = 10^3$ рад/с та амплітуди $U_0 = 20$ В , резистора опором R=2 Ом та ідеальної котушки індуктивності $L = 10^{-3}$ Гн . Відомо, що всередині «чорної скрині» можуть знаходитися різні схеми з резисторів, ідеальних конденсаторів та котушок індуктивності. Запропонуйте найпростішу на Ваш погляд схему всередині «скрині», таку, щоб теплова потужність, яка на ній виділялася, була б максимальною з усіх можливих. Розрахуйте параметри всіх елементів, з яких складається ця схема. Знайдіть значення цієї потужності.



б) Розрахуйте теплову потужність, що виділяється на схемі з 2022 елементів, що повторюються. Резистор, котушка та конденсатор ідеальні, їх опори, індуктивність та ємність відомі. Амплітуда напруги у мережі змінного струму U_0. Частота коливань у мережі $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$).



в) Знайдіть, яка теплова потужність буде виділятися на резисторі R на схемі, якщо амплітуда напруги у мережі змінного струму U_0, а частота коливань у мережі $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. Котушка та конденсатор ідеальні, їх індуктивність та ємність відомі.



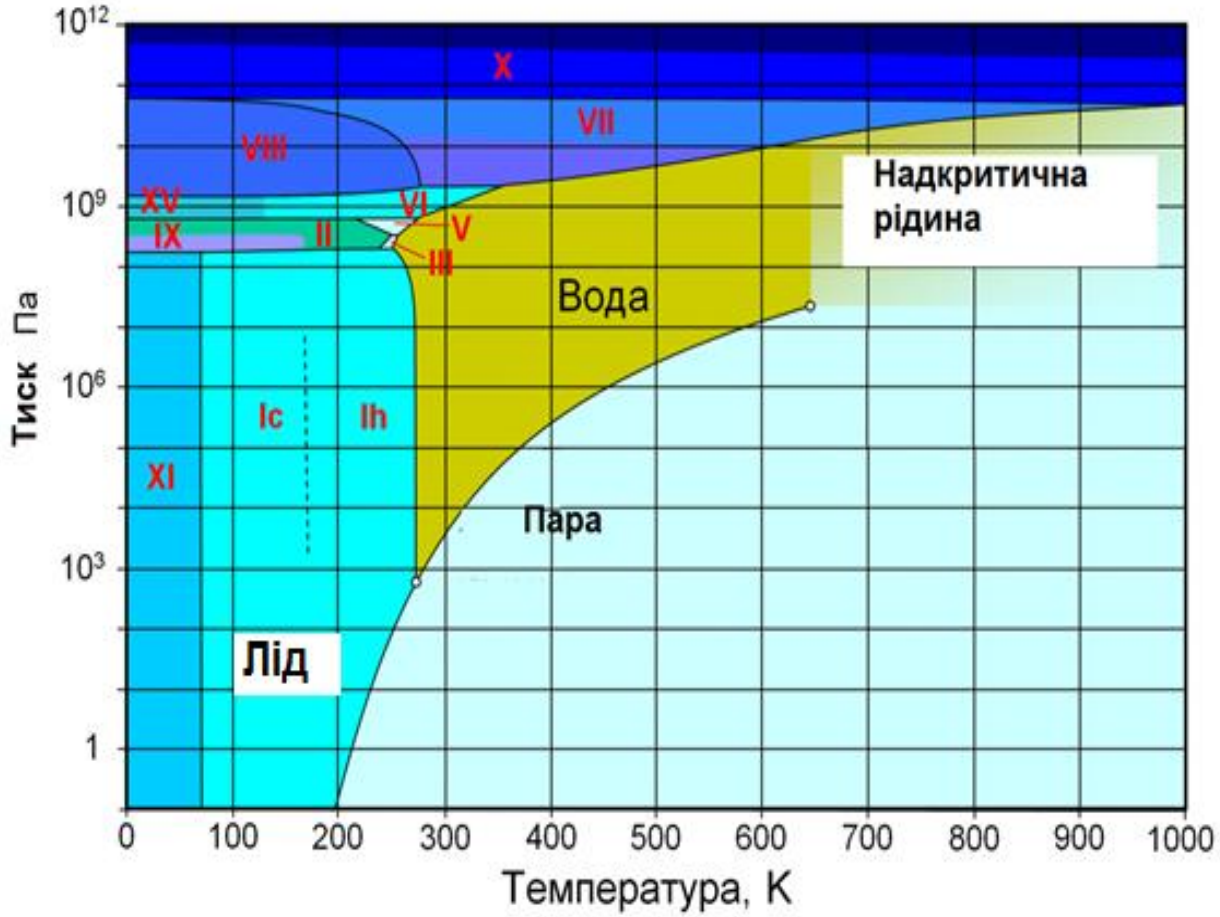
Задачі запропонували:

171, 173 Орлянський О.Ю., 172, 174 Гельфгат І.М., 175 Пашко М.І.

2022-2023 роки

І заочний тур

(176) «Не гірше за ідеальний». Ідеальна теплова машина Карно в якості охолоджувача використовує брилу льоду температура якої стала і дорівнює -3 °C. Нагрівачем є кипляча вода, що знаходиться у міцній герметично закритій посудині. **За якого тиску** в цій посудині ККД машини Карно буде не меншим за максимально теоретично можливий ККД теплової машини, робочий цикл якої складається з двох ізохор та двох ізобар? Робочим тілом останньої машини є ідеальний одноатомний газ.
Не забудьте скористуватися наведеною діаграмою.



(177) «НеВеликий вибух». Планета обертається коловою орбітою великого радіуса R навколо масивної зорі. Зоря вибухає, викинувши половину своєї маси у вигляді сферичної газової оболонки, що швидко розширюється. Будь-яким впливом цієї оболонки на рух планети, крім гравітаційного, можна знехтувати.
А) Визначте, якою стане **траєкторія руху** планети.

Б) **Як зміниться** відповідь, якщо до вибуху зорі планета рухалася еліптичною траєкторією з найбільшою та найменшою відстанями від зорі відповідно R і $R/2$, а газова оболонка «зустрілася» з планетою в найбільш віддаленій від зорі точці? Визначте **геометричні параметри траєкторії**. Якщо рух буде періодичним, визначте **нову тривалість року** на планеті.

(178) «Транзисторна схема». Визначити потужність, що споживатиметься схемою (рис.1), яка складається з маленької лампочки розжарювання та біполярного транзистора BC546, струм бази якого обмежується активним опором R = 60 кОм. Опір лампочки розжарювання

визначається формулою $R_Л = R_0 \cdot (1+\alpha \cdot I)$, $R_0 = 17$ Ом, $\alpha = 100$ A^{-1}. Залежності струму колектора транзистора $I_К$ від напруги $U_{КЕ}$ між колектором та емітером при різних струмах бази $I_Б$ (його вихідні характеристики, різні гілки відповідають різним $I_Б$, як μA позначені мікроампери: 1μA = 1 мкА = 10^{-6} А) наведені на рис. 2. Між точками А та В прикладено сталу напругу $U_0 = 12$ В. Напругою $U_{БЕ}$ між базою та емітером транзистора знехтувати.

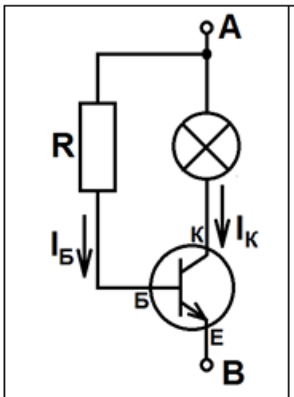


Рис.1

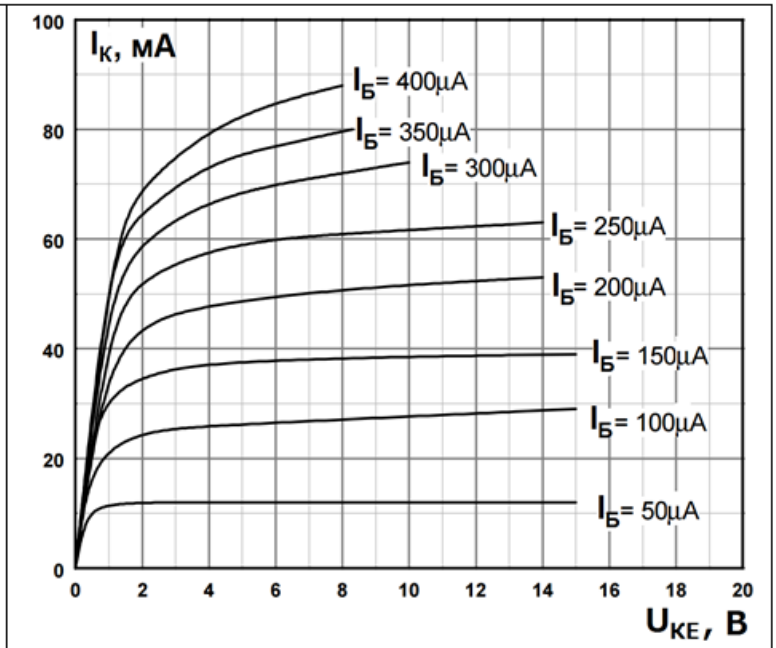
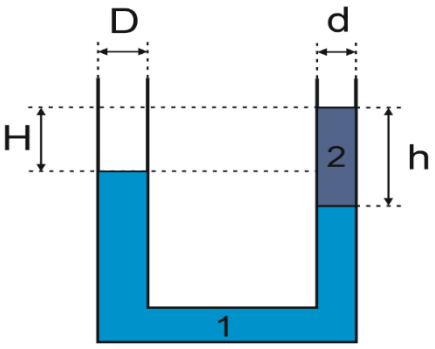


Рис.2

(179) «Сполучені капіляри». Ви звикли працювати із скляними сполученими посудинами без врахування поверхневого натягу. Давайте це виправимо. Нехай ми маємо сполучені капіляри з двома вертикальними колінами, що знаходяться біля поверхні Землі. Діаметр першого D, а другого d. В першому коліні у нас є лише рідина 1 з густиною ρ_1, а в другому над рідиною 1 є ще стовпчик рідини 2 з густиною ρ_2 висотою h. Знайдіть різницю висот H верхніх поверхонь рідини 2 та 1 в другому та першому колінах відповідно. Ви звикли до того, що при роботі із поверхневим натягом у вас є лише один коефіцієнт поверхневого натягу, а ми дамо вам їх аж шість! Отже, ви маєте коефіцієнт поверхневого натягу на границях:



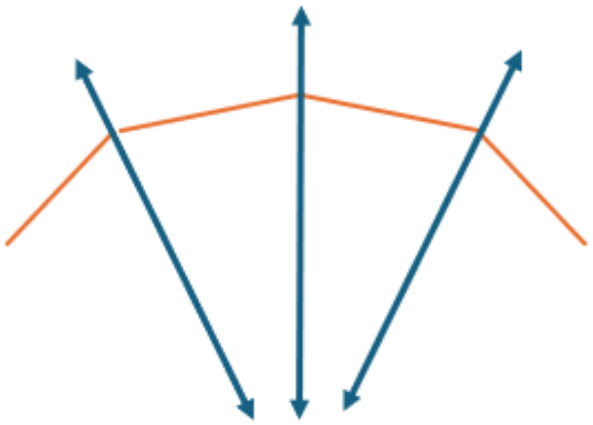
- рідини 1 та повітря $\sigma_{1-п}$;
- рідини 1 та скла $\sigma_{1-с}$;
- повітря та скла $\sigma_{п-с}$;
- рідини 1 та рідини 2 σ_{1-2};
- рідини 2 та скла $\sigma_{2-с}$;
- рідини 2 та повітря $\sigma_{2-п}$.

Розв’яжіть дану задачу двома способами:

А) через розрахунок балансу **тисків або сил**;

Б) з **енергетичних міркувань**, використовуючи **метод маленьких зміщень** системи від положення рівноваги.

(180) «Замкнений промінь». На схематичному рисунку зображений фрагмент оптичної системи.



А) Яку найменшу кількість однакових тонких лінз слід взяти до цієї системи, щоб лазерний промінь міг рухатись крізь неї у площині вздовж сторін замкненого правильного багатокутника? Оптична сила лінзи 2 дптр, діаметр 2 см.

Б) Уважаючи, що за рахунок часткового відбиття при проходженні кожної лінзи втрачається 2% енергії, **знайдіть, у скільки разів** ослабне промінь після одного такого оберту.

В) Цю оптичну систему занурили у воду (з показником заломлення 1,33). **До якого значення** слід змінити показник заломлення лінз 1,5, щоб лазерний промінь рухався тією ж траєкторією?

Задачі запропонували:

176 Шевчук О.Г., 177 Гельфгат І.М., 178 Кельнік О.І., 179 Олійник А.О., 180 Орлянський О.Ю.

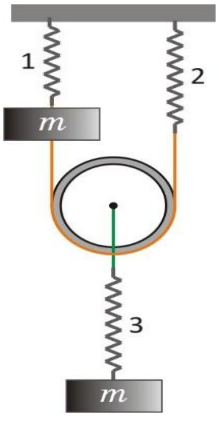
ІІ заочний тур

(181) «Дискотека». Металевий диск радіусом **R**=10см обертається електричним двигуном через редуктор таким чином, що кутова швидкість обертання: $\omega=\alpha U_д$, де $\alpha=100рад/(В\cdot с)$, $U_д$ - напруга, що подається на двигун. Напруга $U_д$, в свою чергу, забезпечується підсилювачем з автоматичним регулюванням, на вхід якого подається напруга U, що знімається струмознімачами з диску на його осі та ободі. В результаті напруга $U_д$ залежить від напруги U за законом $U_д = U_0 - \beta U$, де $U_0=5В$, $\beta=10^8$.

А) Вважаючи диск та струмознімачі добре заекранованими (нехтуючи впливом на диск електромагнітного поля двигуна, Землі та інших зовнішніх шумів), знайти **кутову частоту обертання** диску та напругу U між його віссю та ободом.

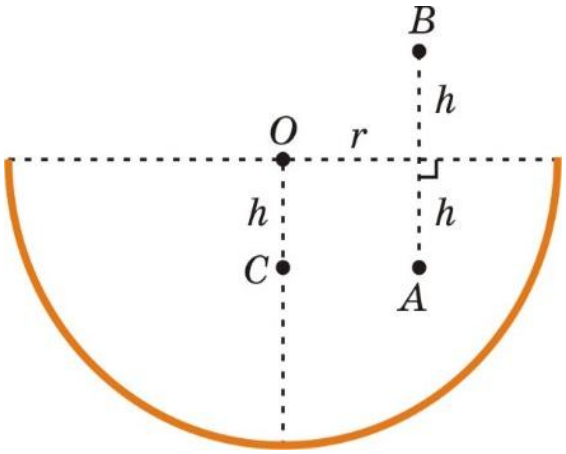
Б) Як **буде працювати** система, якщо напруга на двигуні буде мати вигляд: $U_д = U_0 + \beta U$**?**

(182) «Непрості відношення». Показана на рисунку система складається з трьох невагомих пружин, невагомих нерозтяжних ниток, невагомого блока та двох важків масою m. Жорсткості k_1, k_2 пружин 1 і 2 однакові; осі цих пружин вертикальні. Важки відводять від положень рівноваги вгору або вниз на маленькі відстані та відпускають, спричиняючи рух системи. Втрати механічної енергії відсутні. Численні експерименти за різних початкових відхилень важків показали, що рух системи завжди є періодичним. Знайдіть хоча б одне **значення відношення** $\alpha = \frac{k_1}{k_3}$, за якого це можливо.



(183) «Напівсферичний заряджений «кінь» у вакуумі)».

У вакуумі розташована тонка діелектрична півсферична оболонка радіусом $\boldsymbol{R}$ (див. рисунок). Ця оболонка рівномірно заряджена, поверхнева густина заряду $\sigma > 0$.



А) **Порівняйте напруженості** електричного поля в точках A і B.

Б) Яка **напруженість** електричного поля в **центрі** O півсфери?

В) Яка **напруженість** електричного поля в **точці** $\boldsymbol{C}$?

(184) «Охолодження … магнітом». Є багато способів охолодження речовини. Одним з найбільш цікавих, на думку журі, є охолодження за допомогою магнітного поля.

Нехай у нас є атомарна речовина з концентрацією **n**. Кожен атом цієї речовини можна уважати маленьким магнітом з однаковим за модулем магнітним моментом $\vec{\boldsymbol{\mu}}$, який при відсутності зовнішніх полів може бути орієнтований в будь-яку сторону. Якщо атом цієї речовини знаходиться в магнітному полі, то магнітний момент може орієнтуватись лише або вздовж магнітного поля, або проти. Енергія атому у магнітному полі дорівнює $\boldsymbol{E_{\text{магн}} = -\vec{\mu}\vec{B}}$.

Спосіб охолодження полягає у наступному. Початково температура речовини за допомогою термостата підтримується сталою і дорівнює **T**. Не від'єднуючи від термостату, повільно включається магнітне поле, що пронизує речовину. Внаслідок цього речовина намагнічується. Після цього систему від'єднують від термостату, ізолюють та плавно прибирають зовнішнє магнітне поле, внаслідок чого речовина повністю розмагнічується. **Визначте температуру тіла** в кінці даного процесу. Також **визначте намагніченість** (магнітний момент одиниці об'єму) цієї речовини тоді, коли магнітне поле було включеним. Теплоємність одиниці об'єму речовини **C**. Дією магнітного поля атомів один на одного знехтуйте.

(185) «Поближче до Сонця». Космічний апарат (КА) призначений для дослідження Сонця і проводить спостереження за його полярними північними регіонами, включаючи полюс. Зрозуміло, що для досягнення кращої роздільної здатності КА повинен наближатись до Сонця на якомога меншу відстань. Водночас, апаратура супутника призначена для роботи при температурах, які не перевищують 350 °C. Завдяки серії гравітаційних маневрів поблизу Венери КА рухається витягнутою еліптичною геліоцентричною орбітою з віддаленням в афелію на 0,92 астрономічні одиниці (а. о). Форма космічного апарата – сферична з альбедо 0,7. КА швидко обертається навколо власної осі, яка проходить через його геометричний центр. Уважаючи, що температура всередині КА дорівнює рівноважній температурі його оболонки, а також приймаючи, що Сонце та КА випромінюють за законами випромінювання абсолютно чорних тіл знайдіть:

А) На яку **мінімальну відстань** (в а. о.) може наближатись до Сонця КА?

Б) Яким є **період обертання** КА (в земних роках) та **ексцентриситет** його орбіти?

В) Яким є **мінімальне значення кута нахилу** площини орбіти КА відносно площини орбіти Землі (екліптики) для того, щоб КА міг гарантовано виконувати заплановані дослідження?

Довідкові дані: 1 а. о. – середня відстань від Землі до Сонця (150 млн км). Температура поверхні Сонця 5800 К. Кут нахилу екваторіальної площини Сонця до екліптики прийняти рівним 7,5°. Радіус Сонця 700 000 км.

Задачі запропонували:

181 Кельнік О.І., 182,183 Гельфгат І.М., 184 Олійник А.О., 185 Шевчук О.Г.

Фінал

(186) «Бульбашкова труба». Неприємним та небезпечним явищем в гідротехніці є так звана кавітація, коли вода проходячи через звуження у трубі закипає. В результаті це може призводити до гідроударів. Розглянемо широку горизонтальну трубу, по якій тече вода при температурі $\boldsymbol{t_0} = 40$ ℃ зі швидкістю $\boldsymbol{V_0} = 1$ м/с з тиском, який близький до нормального атмосферного. Труба має звуження.
Знайдіть, у скільки разів може зменшитись площа труби щоб у звуженні не відбувалось закипання води? Вважайте, що температура всюди лишається сталою.
Вам може знадобитись рівняння Клапейрона-Клаузіуса, яке пов'язує параметри речовини під час фазових переходів: $\frac{\boldsymbol{dp}}{\boldsymbol{dT}} = \frac{\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{T}\Delta v}$, де $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{T}$ – тиск та температура фазового переходу, $\boldsymbol{L}$ – питома теплота фазового переходу, яку будемо вважати незмінною, Δv – зміна питомого об'єму речовини при фазовому переході.

Деякі табличні дані: $\boldsymbol{p_A} = 101300$ Па – нормальний атмосферний тиск, $\boldsymbol{\rho} = 1000$ кг/м^3 – густина води, $\boldsymbol{L} = 2.3 * 10^6$ Дж/кг – питома теплота випаровування води, $\boldsymbol{\mu} = 18$ г/моль – молярна маса води, $\boldsymbol{R}$=8.31 Дж/К*моль – універсальна газова стала.

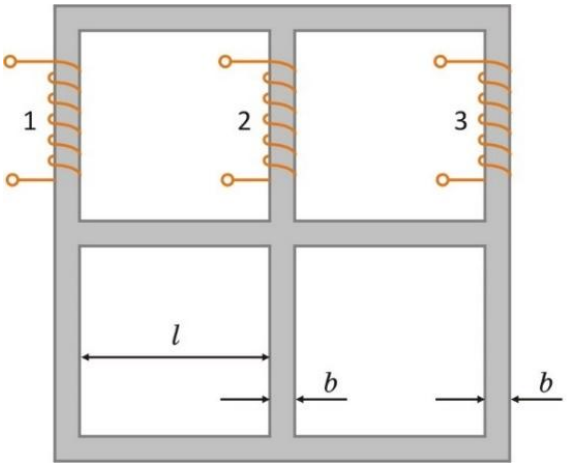
(187) «Наелектризовані відносини». У невагомості у вакуумі на двох паралельних нескінченно довгих тонких діелектричних стержнях нанизані дві маленькі однакові намистинки, які мають протилежні за знаком заряди ($\boldsymbol{q}$ і $-\boldsymbol{q}$) і знаходяться у стані спокою на мінімально можливій відстані $\boldsymbol{h}$ одна від одної.
Маса кожної намистинки $\boldsymbol{m}$. Вільна намистинка може рухатись вздовж стержня, не дотикаючись його. Втратами енергії на електромагнітне випромінювання знехтувати.

А) **На якій відстані** одна від одної намистинки можуть перебувати у стані спокою на цих стержнях, якщо коефіцієнт тертя між намистинкою і стержнем дорівнює $\boldsymbol{\mu}$?

Б) Одній із частинок надають вздовж стержня невелику швидкість $\boldsymbol{v}$. **Математично опишіть рух частинок** для двох випадків: а) тертям нехтуємо і б) коефіцієнт тертя між намистинкою і стержнем дорівнює $\boldsymbol{\mu}$.

В) Якою є **найменша можлива швидкість** $\boldsymbol{v}$, щоб система намистинок розпалася, тобто, відстань між ними з часом прямувала до нескінченності? Розгляньте два випадки: а) **знехтуйте тертям** і знайдіть вираз для швидкості $\boldsymbol{v}$; б) **за наявності тертя** якісно обгрунтуйте або спростуйте можливість сценарію розпаду.

(188) «Моделі трансформаторів». Феромагнітне осердя виготовили з квадратної пластини завтовшки $\boldsymbol{b}$, вирізавши чотири квадратні отвори зі стороною $\boldsymbol{l \gg b}$ (див. рисунок). Показані на рисунку ідеальні котушки намотані на ділянки осердя, що мають квадратний переріз розміром $\boldsymbol{b \times b}$. Кількості витків у котушках дорівнюють відповідно $\boldsymbol{N_1, N_2, N_3}$. Магнітна проникність осердя $\boldsymbol{\mu \gg 1}$, магнітне поле практично не виходить за межі осердя.



А) Визначте індуктивність котушки 1, якщо котушки 2 і 3 розімкнені.

Б) Котушку 1 приєднують до джерела змінної напруги з діючим значенням $\boldsymbol{U_1 = 7}$ В. Визначте діючі значення напруги на клемах розімкнених котушок 2 і 3, якщо $\boldsymbol{N_2 = 4N_1, N_3 = 6N_1}$.

(189) «Моделі діелектриків». Однією з перших та найпростіших моделей неполярних діелектриків була модель провідних шарів. Розглянемо поляризовану речовину (навіть рідку) як чередування плоскопаралельних атомних шарів (площин) та шарів пустоти. Вважайте, що шар атомів є провідною пластиною, всередині якої розділення зарядів може відбуватись так само вільно, як і в металах. Розглянемо, для прикладу, рідкий аргон. Його густина 1440 кг/м^3, молярна маса 40 г/моль, коефіцієнт діелектричної проникності 1.54.

А) Виходячи з цієї моделі **оцініть** лінійний розмір атомів аргону.

Розглянемо поляризацію кожного окремого атому. Нехай до великого листа діелектрика з рідкого аргону товщиною 1 см приклали напругу 200 В. Вважайте, що під дією електричного поля електронна хмара кожного атому зміщується як ціле на певну відстань від ядра. Зарядове число аргону дорівнює 18.

Б) **Знайдіть**, на скільки змістяться хмари електронів відносно ядра та порахуйте, **яку долю** від розміру атому (візьміть з першого пункту) складає ця відстань.

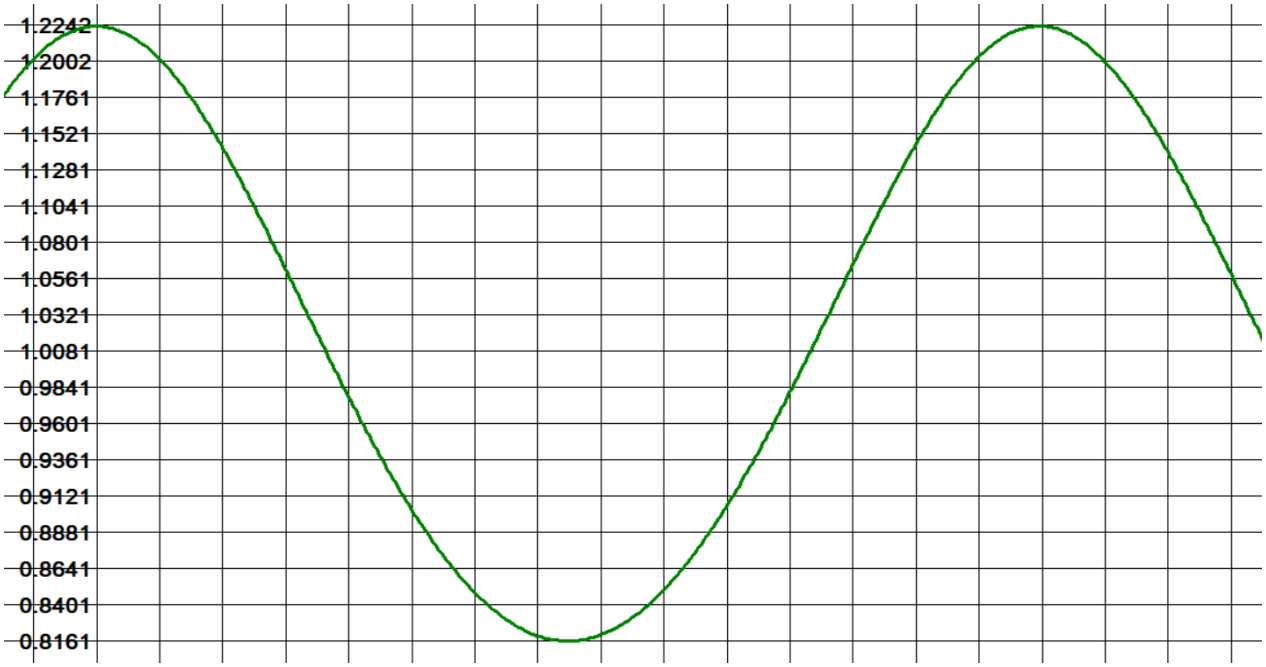
В) **Знайти** поляризуємось атому аргону. Поляризуємось α це коефіцієнт пропорційності між дипольним моментом атома та електричним полем, що діє на цей атом, $\boldsymbol{p = \alpha \varepsilon_0 E}$. В рідких діелектриках при розгляді дії поля на конкретний атом не можна нехтувати полем, що створюють атоми-сусіди. Для врахування дії сусідніх атомів на конкретний атом треба вирізати в діелектрику невелику (проте, значно більшу за відстань між атомами) сферичну порожнину. Вважайте, що поле, яке діє на конкретний атом – поле в цій порожнині.

Г) **Оцініть** лінійний розмір атома виходячи із того, що поляризуємось пропорційна об'єму атома із певним неважливим для нас коефіцієнтом. Використовуйте значення поляризуємості, знайдене в попередньому пункті.

(190) «Подвійна система у видимому Всесвіті». А) Астрономи спостерігають за дуже швидким обертанням подвійної системи (тіла в цій системі близькі до злиття і їх швидкості всього в декілька разів менші за швидкість світла), яка знаходиться на відстані декілька мегапарсек (1 парсек=3.2616 світлових роки) від Землі. Вважайте, що тіла обертаються по коловим орбітам. Внаслідок розширення Всесвіту Земля та ця подвійна система віддаляються одна від одної і швидкість їх відносного віддалення за законом Хаббла пропорційна до відстані між ними: $\boldsymbol{v = Hr}$, де $\boldsymbol{H} \approx 68 \frac{\text{км/с}}{\text{Мпк}}$. Вчені реєструють частоту випромінення певного хімічного елементу від

обох тіл подвійної системи від часу. На фрагменті графіку ви бачите часову залежність відношення частоти випромінення одного з тіл до частоти цього випромінення від нерухомого джерела. **Оцініть відстань** між Землею та подвійною системою у мегапарсеках. Швидкість світла $c \approx 300\,000\ \frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Б) **Знайдіть розмір** видимого Всесвіту (максимальну відстань, яку за час життя Всесвіту подолало світло від точки свого народження), що розширюється (можна уявити це собі, як розтягнення гуми). Вважайте, що внаслідок розширення Всесвіту відстань між двома об'єктами або двома точками простору збільшується з часом пропорційно до кореню з часу від початку народження Всесвіту. Вік Всесвіту $\boldsymbol{t_0}$. Світло рухається із швидкістю **c** відносно точки простору, через яку світло проходить в даний момент (як жук, що повзе по гумі, яка розтягується). Вважайте, що світло отримало змогу подорожувати вільно крізь Всесвіт майже з самого моменту початку його утворення.



Задачі запропонували:

186, 189, 190 Олійник А.О., 187 Орлянський О.Ю., 188 Гельфгат І.М.

2023-2024 роки

І заочний тур

(191) «Напружені відносини». На гладенькій горизонтальній поверхні лежить легка пружина завдовжки $l = 20$ см з двома маленькими кульками масою $m = 40$ г на кінцях. Жорсткість пружини $k = 40$ Н/м, у початковий момент вона не деформована. Кулькам одночасно надають однакові за модулем ($v_0 = 3$ м/с) і протилежні за напрямом початкові швидкості, перпендикулярні до вісі пружини (див. рисунок). **У яких межах** змінюватиметься **довжина пружини? кутова швидкість** її обертання?

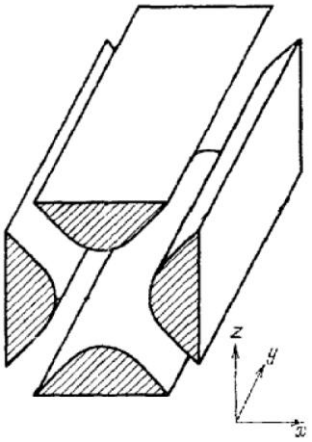


(192) «Чи можна бути в рівновазі з самим собою, навіть якщо ти літій?» Посудина ємністю 1,00 л з діелектричними теплоізолюючими стінками містить пару літію за температури 1001 К, тиск пари 1,00 Па. У посудину потрапляють два пучки заряджених частинок: однозарядні позитивні йони літію та вільні електрони. Кількість частинок кожного типу становить $N = 7{,}24 \cdot 10^{13}$. Кінетичною енергією цих частинок і теплоємністю посудини можна знехтувати. **Оцініть зміну температури** в посудині після встановлення теплової рівноваги. Енергія іонізації атома літію становить 5,40 еВ, а мінімальна енергія його збудження 1,85 еВ.

(193) «Картоплемет у досвідчених руках». А) Фермер хоче засіяти картоплею грядку за допомогою не дуже гарної катапульти, яка завжди кидає картопляний снаряд зі швидкістю V_0, але кут кидання неконтрольований – він може змінюватись абсолютно випадково в певному діапазоні кутів: А) від 15° до 35°; б) від 35° до 50°; в) від 50° до 70°. Для кожного з діапазонів кутів **знайдіть, на якій відстані** від катапульти вздовж поверхні землі кучність падіння картоплі буде найбільшою. Катапульта жбурляє картоплю виключно вздовж однієї грядки (в одній вертикальній площині).

Б) Удосконаливши катапульту, фермер отримав можливість виставляти будь-який потрібний йому кут кидання картоплі. Швидкість кидання завжди однакова $V_0 = 40 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, та направлена у північному напрямку. Перед фермером на відстані $d = 117$ м в полі стоїть міцний паркан висотою h=5 м, розташований з заходу на схід. **Знайдіть, якою буде довжина зони** за парканом, куди картопля не зможе потрапити?

В обох пунктах вплив опору повітря не враховуйте. Уважайте, що прискорення вільного падіння дорівнює $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.



(194) «Катодно-анодне безумство». Чотири дуже довгі електроди (зображені на рисунку, вісь 0y знаходиться по центру між електродами та спрямована вздовж них, співпадаючи з однією з осей симетрії) заряджають 4-ма однаковими за модулем зарядами. Відомо, що проекції напруженості електричного поля, яке створюються цими електродами, виглядає як: $E_x = \alpha Ax, E_y = \beta Ay, E_z = \gamma Az$, де α, β, γ –

невідомі безрозмірні коефіцієнти, а коефіцієнт A – розмірний і відомий. Модуль коефіцієнта α рівний 1.

А) **Знайдіть** та **аргументуйте** всі варіанти розподілу поля між електродами та **запишіть** правильні вирази для проекцій напруженості (тобто, **знайдіть** α, β, γ).

Б) **Покажіть,** зарядами яких знаків треба зарядити кожен електрод, щоб отримати такі розподіли поля.

В) Уявіть, що в один момент неподалік від осі 0y з'являється електрон, початкова швидкість руху якого спрямована паралельно цій осі. **Зобразіть** якісно як буде виглядати траєкторія руху електрона.

Примітка: на рисунку система координат для зручності зміщена.

(195) «Струм за інерцією». У невагомості у вакуумі до кінців прямого алюмінієвого дроту підвели напругу, унаслідок чого через його переріз йде струм густиною $j = 10\,\text{А}/\text{мм}^2$.

А) Чому дорівнює напруженість електричного поля всередині дроту, якщо питомий опір алюмінію $\rho_0 = 27$ мОм $\cdot$ мм^2/м?

Контакти без поштовху миттєво відводять від кінців дроту.

Б**) Куди і з якою швидкістю** почне рухатись дріт? Густина алюмінію ρ =2700 кг/м^3, маса електрону $m_e = 9 \cdot 10^{-31}$кг, елементарний заряд $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$Кл. Впливом зовнішніх електричних, магнітних, гравітаційних полів на дріт знехтувати.

В) Опишіть рух цього ж дроту, якщо він матиме форму майже замкненого кола дугою у 359°.

Г) *Оцініть час* від моменту відведення контактів до моменту першого зникнення струму. Молярна маса алюмінію 27 г/моль, число Авогадро $6 \cdot 10^{23}$моль$^{-1}$.

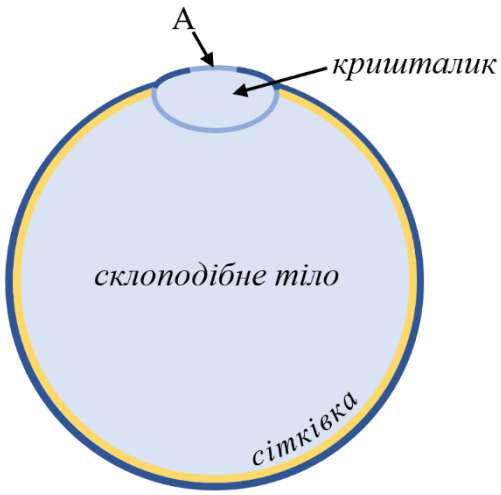
Задачі запропонували:

191-192 Гельфгат І.М. 193-194 Олійник А.О., 195 Орлянський О.Ю.

II заочний тур

(196) «Попутного вітру!» На космічному апараті масою m, що перебував на коловій орбіті радіусом R_0 навколо Сонця, розгортають «сонячне вітрило» загальною площею S з ідеально дзеркальною поверхнею, і надалі орієнтують апарат таким чином, щоб сонячні промені завжди падали на «вітрило» перпендикулярно. Як зміниться орбіта космічного апарату? Якою буде відстань від апарату до Сонця в точці нової орбіти, протилежній до точки розгортання «вітрила»? Маса Сонця M, повна потужність його випромінювання W_S, гравітаційна стала γ, швидкість світла c. Уважайте, що власна площа перерізу космічного апарату набагато менша за площу вітрила.

(197) «Око». На схематичному рисунку зображена будова ока. **А) Знайдіть відношення** радіусу кривизни кришталика у точці А до радіусу кривизни сітківки ока, коли людина без вад зору розслаблено дивиться у нескінченність. Уважати, що коефіцієнт заломлення і кришталика, і склоподібного тіла дорівнює 4/3. Для малих кутів x, виражених у радіанах: $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$. Можна вважати систему «кришталик+скловидне тіло» майже сферичною.

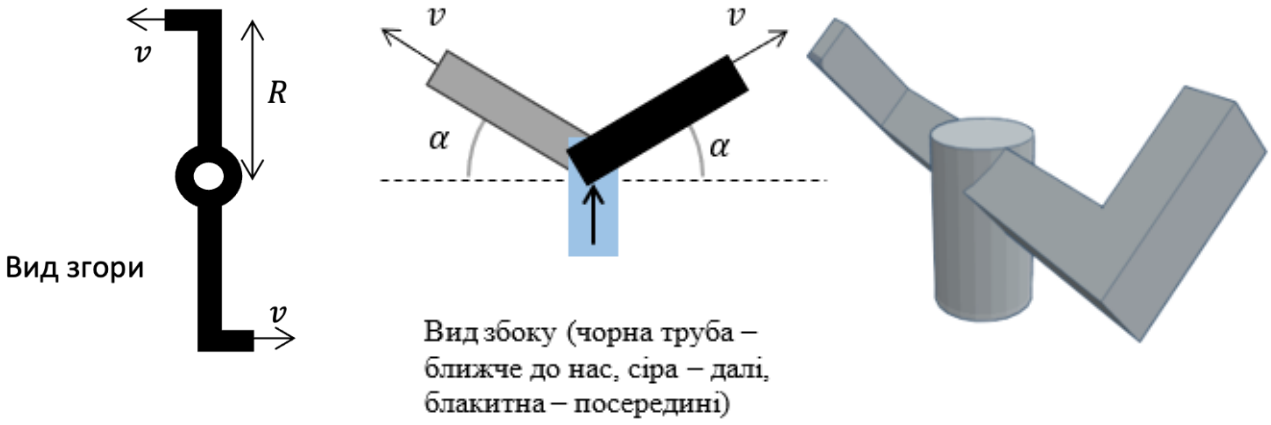


Окуліст з гарним зором без використання оптики розглядає підсвічений ліхтариком фрагмент сітківки цього пацієнта, що розслаблено дивиться у нескінченність. **Б) Ближчою чи віддаленішою** здаватиметься сітківка окулісту? **В)** Оцініть **кутове збільшення**.

Людина пірнула в озеро і відкрила під водою очі без захисної маски чи окулярів для підводного плавання.

Г) За яких умов розмиті плями від двох віддалених точкових джерел світла, на які під водою дивиться людина, вона бачитиме як роздільні (плями не будуть перетинатись)? Радіус зіниці ока (відкритої частини кришталика) у 10 разів менший за радіус кривизни сітківки. Коефіцієнт заломлення води дорівнює 4/3.

(198) «Геометрія фонтану». На рисунках зображений ротаційний фонтан, що складається з двох патрубків. Вода поступає вертикально знизу і далі розходиться по двом горизонтальним трубкам. Кінець кожної труби загнутий під прямим кутом до самої труби і під деяким кутом до горизонту. При обертанні цієї конструкції виникає сила тертя, момент якої дорівнює $\boldsymbol{M(\omega)}$, де $\boldsymbol{\omega}$ – кутова швидкість обертання конструкції. Момент інерції вертушки дорівнює $\boldsymbol{I}$, радіус $\boldsymbol{R}$, швидкість води відносно труби в кожній трубі постійна і дорівнює $\boldsymbol{v}$, площа поперечного перетину труби $\boldsymbol{S}$. Висота фонтану відносно поверхні землі майже нульова.
Знайдіть кут, однаковий для всіх труб, під яким потрібно повернути їх до горизонту, щоб радіус області на поверхні землі, на яку потрапляє вода був максимальним. **Знайдіть значення** цього **радіусу** $\boldsymbol{r}$. Розгляньте два випадки: a) $\boldsymbol{M(\omega) = M_0 = const}$, b) $\boldsymbol{M(\omega) = A \cdot \omega}$, $\boldsymbol{A = const}$. Уважайте, що $\boldsymbol{r \gg R}$, фонтан працює в такому режимі вже досить довго.



(199) «Той щасливий та багатий, у кого УРАНУ хата!» Збагачення урану – збільшення концентрації ^{235}U відносно ^{238}U, є однією з найважливіших та наукоємних дій в ядерній енергетиці. Одним з найрозповсюджених методів є поміщення суміші газів (гексофторидів $^{235}UF_6$ та

$^{238}UF_6$) у замкнену циліндричну посудину (центрифугу), яка складається із внутрішньої циліндричної стінки радіусом r_1 та зовнішньої циліндричної стінки радіусом r_2 ($r_2 >> r_1$). Ця система обертається відносно своєї осі симетрії (уважайте при цьому, що швидкість зовнішньої стінки ωr_2 дорівнює 400 м/с). Температуру суміші можемо всюди вважати однаковою і рівною $T = 100$ ℃. Суміш гексафторидів (початкова природна концентрація $^{235}UF_6$ в суміші дорівнює η=0.7%) поміщають в цю центрифугу. Виявляється, що біля однієї зі стінок центрифуги концентрація $^{235}UF_6$ підвищується. Впливом сили тяжіння знехтуйте. Вважайте, що газ обертається разом із центрифугою без внутрішніх потоків речовини.

А) **Визначте** у скільки разів збільшується концентрація $^{235}UF_6$ біля цієї стінки порівняно із природним значенням.

Б) Під час центрифугування цю суміш із підвищеною концентрацією відкачують і знову пропускають через центрифугування. **Оцініть, скільки знадобиться таких ітерацій**, щоб підвищити концентрацію $^{235}UF_6$ до 3.1%.

(200) «Коливаються ВСІ!» Якщо сферично симетричний атом помістити в електричне поле, в ньому виникає так званий дипольний момент, що пропорційний до зовнішнього поля $\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{\gamma}\vec{\boldsymbol{E}}$. Уважайте, що для постійних в часі полів коефіцієнт $\boldsymbol{\gamma}$, що носить назву «коефіцієнт поляризації», має додатне значення. Масу атому вважайте відомою.

А) **Наведіть обґрунтовану відповідь**, в яку саме область буде рухатись такий атом в неоднорідному, але сталому в часі електричному полі: в область більш сильного поля чи менш сильного?

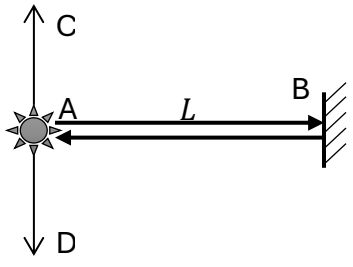
Б) Розглянемо тепер одновимірний рух такого нейтрального атому в полі стоячої (тобто вже змінної в часі) світлової хвилі, амплітуда коливань якої змінюється в просторі як $\mathbf{C \cdot \sin(a \cdot x)}$. Уважайте, що циклічна частота коливань поля є дуже великою, а напрямок коливань поля розташований в одній площині. Уважайте коефіцієнти $\boldsymbol{C}$ та $\boldsymbol{a}$ відомими. Не забудьте врахувати, що для змінного у часі електричного поля коефіцієнт поляризації $\boldsymbol{\gamma}$ може бути як від'ємним, так і додатнім. **Знайдіть період** малих гармонічних коливань атому в даному електричному полі для різних знаків значення $\boldsymbol{\gamma}$.

Задачі запропонували:

196 Кельник О.І., 197 Орлянський О.Ю., 198 Рідкокаша І.П., 199-200 Олійник А.О.

Фінал

(201) «Швидкість світла». Жоден наземний експеримент не може виміряти швидкість світла! Ми можемо виміряти лише так звану прямо-зворотню швидкість світла – середню швидкість з якою світло долає відстань, вилітаючи з однієї точки та повертаючись назад до неї. Але давайте уявимо, що сама швидкість світла може бути різною в різних напрямках.



Наприклад розглянемо таку ситуацію: ми світимо з точки А до дзеркала В (див. рисунок) і вимірюємо за який час світло повернеться до нас. Оскільки відстань між А і В дорівнює L, ми отримаємо: $t = \frac{2L}{c}$, де c – прямо-зворотня швидкість світла.

Проте, швидкість світла від А до В та назад від В до А, як ми домовились, може бути різною. Наприклад, $v_{A\to B} = 2c$, а $v_{B\to A} = \frac{2}{3}c$. Час який ми виміряємо все одно буде такий самий:

$$t = \frac{L}{2c} + \frac{L}{\frac{2}{3}c} = \frac{2L}{c}.$$

Можна довести, що жоден експеримент не зможе відрізнити випадок, коли швидкість світла в усі сторони однакова, і випадок, коли в одну сторону вона $2c$, а в протилежну $\frac{2}{3}c$.

А) Розгляньте випадок, коли $v_{A\to B} = 2c$, а $v_{B\to A} = \frac{2}{3}c$. Уважайте, що швидкість світла перпендикулярна до напрямку A->B (наприклад, A -> C та A->D на рисунку), однакова. Знайдіть швидкість світла під кутом 45° та 135° до A->B.

Б) Знайдіть швидкість світла під довільним кутом до A->B.
***Примітка**: пам'ятайте, що в будь-якому випадку вимірювання середньої швидкості «туди та назад» в будь-якому напрямку має давати **c**.*

(202) «Модель ядра». Нерухома куля з електрично зарядженої рідини ділиться на 2 однакових кулястих уламки-краплини, що розлітаються. Початковий радіус кулі дорівнює $\boldsymbol{R}$, заряд $\boldsymbol{q}$, маса $\boldsymbol{m}$. Поверхневий натяг рідини $\boldsymbol{\sigma}$.

А) Знайти швидкості краплин після достатньо великого проміжку часу. Гравітаційною взаємодією знехтувати. **Б)** Проаналізувати, **чи** обов'язково утворені при розпаді уламки-краплини **будуть стійкі** відносно подальшого поділу на дві половинки.

В) Трохи модернізуємо таку краплинну модель та застосуємо її до розрахунку реакції розпаду ядра. Ядерним силам буде відповідати енергія, яка пропорційна до об'єму ядра, адже кожен нуклон притягається до своїх найближчих сусідів. Коефіцієнт пропорційності між модулем цієї енергії та об'ємом $\alpha_1 = 1.7\ \text{МеВ}/\text{фм}^3$. Уважаємо, що нуклони на поверхні ядра оточені «сусідами» не з усіх сторін, тому введемо доданок-поправку до енергії, що пропорційна площі поверхні ядра (це є аналогом поверхневого натягу). Коефіцієнт пропорційності між модулем цієї поправки та площею поверхні ядра $\alpha_2 = 0.81\ \text{МеВ}/\text{фм}^2$. Уважайте, що протони розподілені в ядрі рівномірно, густина ядерної матерії стала для будь-яких ядер.

Знайти **яка кількість енергії** буде виділятися в реакції розпаду нерухомого ядра урану-238 на два однакових уламки. Радіус ядра урану-238 приблизно дорівнює 8 фм, його порядковий номер в таблиці Менделєєва - 92. ***Примітка: 1 фм = 10^{-15}м.***

(203) «Теплий дім». Для обігріву приміщення використовують ідеальний тепловий насос. Двигун теплового насосу працює від джерела змінного гармонічного струму з амплітудними значеннями сили струму та напруги $\boldsymbol{I_o}$ та $\boldsymbol{U_o}$ відповідно. Зсув фаз між миттєвими значеннями сили струму та напруги при цьому можна плавно регулювати в межах від нуля до $\boldsymbol{\varphi_m}$.

Приміщення має початкову температуру $\boldsymbol{T_o}$, яка більша за температуру $\boldsymbol{T_c}$ зовнішнього середовища. Ефективна площа зовнішньої поверхні приміщення дорівнює $\boldsymbol{S}$. Процес тепловідводу відбувається за законом Ньютона-Ріхмана з коефіцієнтом теплопередачі $\boldsymbol{\alpha}$.

Обігрів приміщення здійснюється в умовах сталого об'єму та тиску в приміщенні. Уважати, що розподіл температури та тиску у приміщенні встановлюється миттєво. Необхідно, щоб в

приміщенні була досягнута температура $T_н$. Початкова маса повітря в приміщенні m_o, його молярна маса M. Гази повітря мають i ступенів вільності. При розрахунках можна замінити миттєві значення коефіцієнту ефективності теплового насосу його середнім за температурою значенням від початку до закінчення нагрівання. Знайдіть:

А) залежність рівноважної температури в приміщенні як функцію часу, відрахованого від початку обігріву;

Б) мінімальний час, який знадобиться для того, щоб забезпечити температуру $T_н$ в приміщенні;

В) максимальне значення температури яка могла б встановитись в приміщенні в умовах вибраного режиму обігріву;

Г) мінімальну температуру оточуючого середовища за якої ще можна нагріти приміщення до потрібної температури $T_{пр}$.

Довідка:
В процесі інтегрування часто виникає необхідність у представленні дробу $\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}$ *у вигляді суми двох «табличних» дробів* $\frac{\gamma}{ax+b}+\frac{\beta}{cx+d}$, *де x – змінна інтегрування, a, b, c, d – задані числа (коефіцієнти); γ та β – невідомі числа (коефіцієнти), які можна легко знайти.*

(204) «*Фітбол*». Гімнастичний м’яч діаметром 55 см має повну масу 800 г (це маса оболонки та повітря всередині). Температура м’яча та навколишнього повітря 27 °С, за цієї температури внутрішній тиск у м’ячі дорівнює 120 кПа (атмосферний тиск 100 кПа). Середня молярна маса повітря становить 29 г/моль, $g = 10$ м/с^2. Оболонка м’яча гнучка та практично нерозтяжна. М’яч падає без початкової швидкості, пролітає 1,5 м і після зіткнення з підлогою підстрибує вгору. У завданнях А — В опір повітря та теплопровідність оболонки не враховуйте.

А) Скільки триває зіткнення м’яча з підлогою?

Б) Оцініть максимальні **збільшення температури** та тиску повітря всередині м’яча під час зіткнення.

В) Визначте максимальне збільшення внутрішньої енергії повітря всередині м’яча. Порівняйте цю величину з роботою сил тяжіння та Архімеда. Чи погоджується результат з законом збереження енергії?

Г) Оцініть зміни часу падіння та кінцевої швидкості, зумовлені силою опору повітря. Уважайте, що ця сила $F_{оп} = \frac{\rho_{air} v^2}{2} S_\perp$, де ρ_{air} — густина повітря, $S_\perp$ — максимальна площа поперечного перерізу тіла площиною, перпендикулярною напряму руху.

***Довідка*. 1.** Формула об’єму сферичного сегменту висоти x: $V = \frac{\pi x^2 (3r-x)}{3}$.

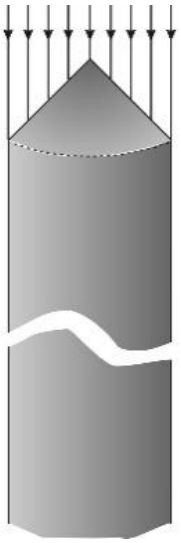
2. Вам може знадобитися інтеграл: $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

Задачі запропонували:

201 Рідкокаша І.П., 202 Олійник А.О., 203 Шевчук О.Г., 204 Гельфгат І.М.

2024-2025 роки

І заочний тур

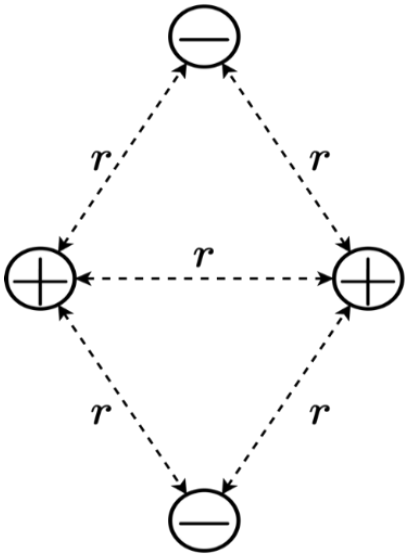


(205) «Оптика циліндру». Налагоджуючи нове обладнання, молоді робітники навчилися виготовляти на ньому довгі циліндри радіусом $\boldsymbol{r} = 10$ мм з прозорого пластика. Технологічний процес давав на нижньому кінці циліндра плоску поверхню, перпендикулярну до осі циліндра, а на верхньому кінці — конічну поверхню з кутом біля вершини 90° (див. рисунок). Усі поверхні виробу виходили гладенькими, а висоту циліндра можна було змінювати в широких межах. Робітники дізналися, що показник заломлення пластика дорівнює 1,41. Вони дослідили проходження паралельних пучків світла (в напрямі осі) через циліндри різної висоти, наближаючи нижні торці циліндрів близько до аркушу паперу на столі. Виявилося, що на папері може утворюватися світла пляма в формі круга або в формі кільця, залежно від висоти h циліндра. Збільшуючи h, вони спостерігали періодичну зміну форми світлої плями з періодом Δh. Визначте **найбільше можливе значення внутрішнього радіуса** кільця та **значення періоду** $\boldsymbol{\Delta h}$. Поглинанням світла в пластику знехтуйте.

(206) «Молекула водню». Юний дослідник, знаючи, що в хімічній реакції горіння, виділяється купа енергії, почав висувати теорії, які, на його думку, могли б пояснити це явище: звідки ж ця енергія береться?

Після нетривалих роздумів, хлопець, спираючись на свої знання про будову молекули водню H_2, та найпростішої хімічної реакції $2H \rightarrow H_2$, висунув таку теорію…

Атом водню H складається з одного протону і електрону. Нехай вони будуть просто знаходитись у спокої на відстані $r = 0.1$ нм і ближче один до одного вони наблизитись не можуть. Два таких атоми поряд теж почнуть притягуватись і в нашій моделі в кінці утворять систему з двох рівносторонніх трикутників як на рисунку, де плюсами позначені протони, а мінусами – електрони. Сторона трикутників має таку ж довжину $r = 0.1$ нм. Ця система, згідно запропонованій теорії, і буде відповідати молекулі водню H_2.



А) **Чи не здається** вам ця будова молекули водню нереалістичною? Якщо так, то **обґрунтуйте** свою відповідь.

Б) **Знайдіть, скільки енергії за цією моделлю** виділиться, якщо $m = 1$ кг атомарного водню повністю перетвориться на молекулярний водень.

Заряд протону $q_p = e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, заряд електрону $q_e = -e = -1.6 \cdot 10^{-19}$ Кл, маса одного атому водню $m_H = 1.67 \cdot 10^{-27}$ кг, 1 нм $= 10^{-9}$ м.

(207) «Безпечні перевезення». Маршрут автомобіля, що перевозить в закритій та повністю заповненій цистерні рідину густиною $\boldsymbol{\rho}$, проходить низкою прямолінійних та криволінійних ділянок. Криволінійні ділянки – дуги кіл. Найбільший радіус криволінійної ділянки $\boldsymbol{R_{max}}$ менш,

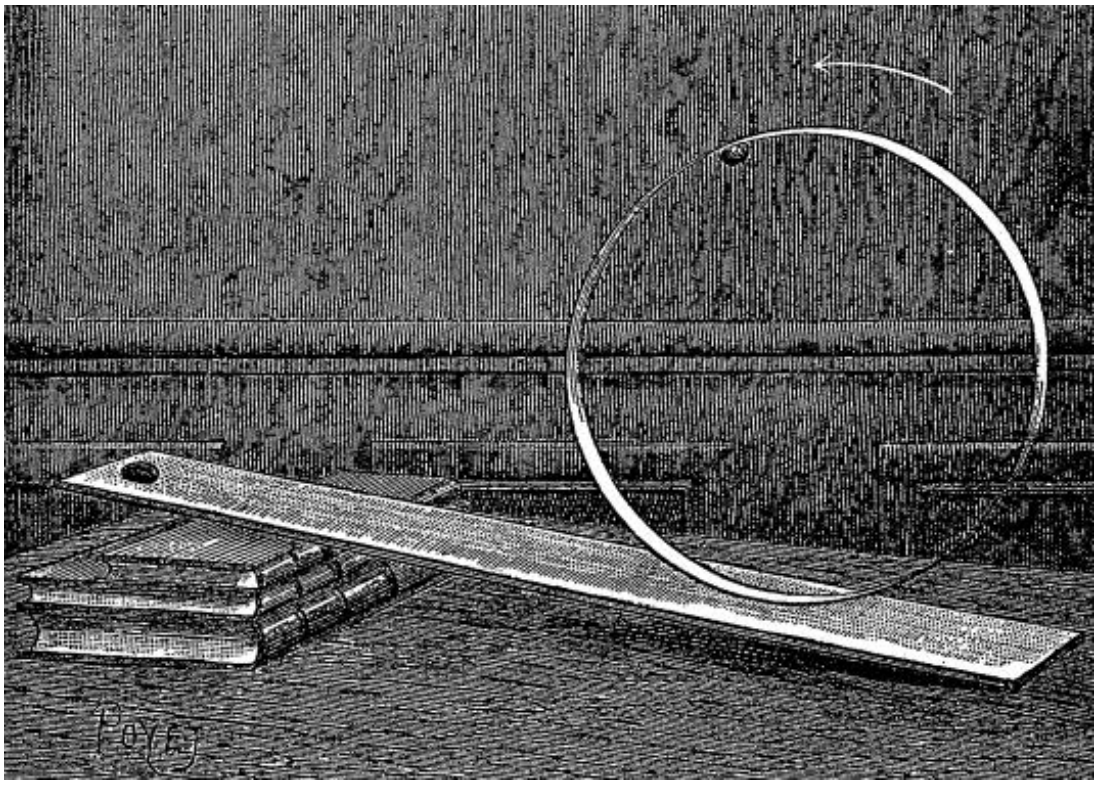
ніж в два рази, більший за найменший радіус R_{min} заокруглення дороги. Відомо, що гальмівний шлях автоцистерни в умовах сталої дії гальм не повинен бути більшим за піврізницю між найбільшим та найменшим радіусами заокруглень дороги. Чому дорівнює **максимальне дозволене значення швидкості руху** автоцистерни на цьому маршруті, якщо відомо, що припустиме граничне навантаження на стінку цистерни дорівнює $F_{гр}$? Цистерна має форму кубу з довжиною ребра h. Коефіцієнт тертя між шинами та дорогою вважати великим, проковзування шин ніколи не наступає. Уважати, що автомобіль може розганятися чи гальмувати тільки на прямолінійних ділянках.

(208) «Котимося вгору». У всесвітньо відомій книжці «Наукові забави. Фізика: досліди, фокуси, розваги» Тім Тома пропонується зробити кільце з цупкого картону і зсередини прикріпити до нього монету чи просто шматочок пластиліну. Поставити кільце на похилу площину приблизно так, як зображено на рисунку, й обережно відпустити – кільце покотиться вгору.

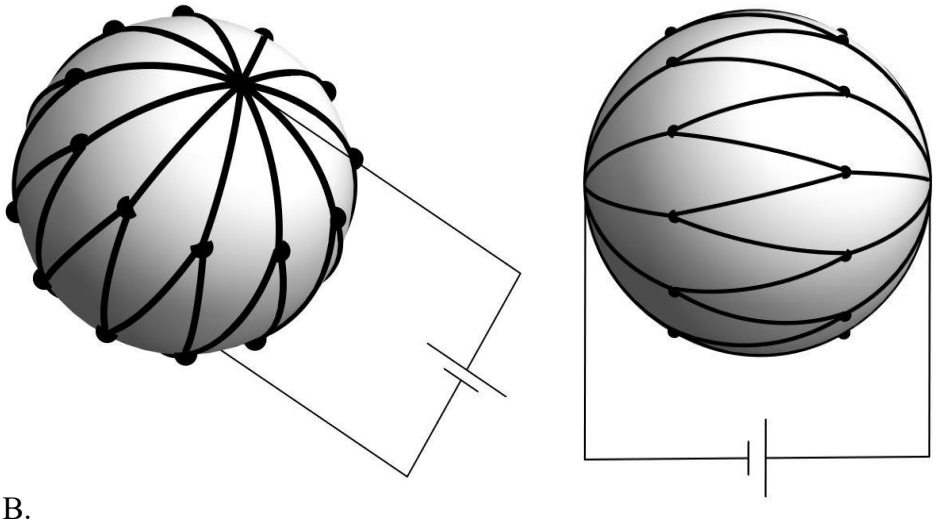
А) Припустимо, що прикріплений тягарець має таку ж масу, як і паперове кільце, але його розмірами у порівнянні з розмірами кільця можна знехтувати. За якого **відношення висоти похилої площини до її довжини** кільце може покотитися вгору?

Б) Уявіть, що висота похилої площини вчетверо менша за її довжину, а кільце ставлять на неї також у напрямку підйому, але навмання відносно місця положення пластиліну. Яка **ймовірність** того, **що** воно **покотиться вгору**? (у якій частині випадків у середньому воно покотиться вгору).

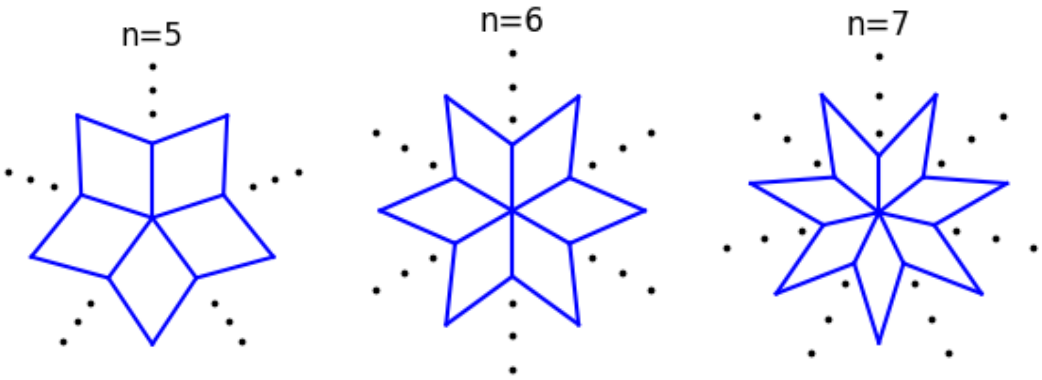
В) Якої **найбільшої швидкості** може досягти кільце при цьому (див. п.Б), якщо вважати, що кільце не проковзує і не підстрибує? Радіус кільця R =15 см, опором повітря знехтувати.



(209) «Сферичний обігрівач». Сашко хотів зробити обігрівач з кулі радіусом $\boldsymbol{R}$ = 10 см. Куля зроблена з ізолятору, який має дуже велику теплопровідність. Ідея Сашка полягає в тому, щоб наклеїти на сферу схему однакових дротів, як зображено на рисунку в двох різних ракурсах. Дроти зображені чорними лініями, місця спайки кульками. До полюсів цієї схеми Сашко хоче під'єднати батарею з напругою $\boldsymbol{U}$ = 5 В.



Ця схема задається числом $\boldsymbol{n}$ – кількістю дротів, що виходять з полюсів сфери. Різні можливі випадки, як виглядає полюс для різних n, зображені нижче.



Сашко може замовити в магазині набір з однакових дротів. Довжина дроту може бути довільною, її обирає замовник, а опір дроту на одиницю довжини дорівнює $\boldsymbol{\rho}$ = 1/15 Ом/см. З урахувань безпеки кулька не має розігріватись більш ніж до 80 градусів Цельсія. У кімнаті Сашка температура зазвичай 20 градусів. Уважаючи, що матеріал сфери має поверхневий коефіцієнт теплообміну з повітрям $\boldsymbol{\alpha}$ = 1.4 мВт/(см$^2\cdot$°C), знайти, **яке значення $\boldsymbol{n}$** треба обрати Сашку для отримання максимальної потужності? Передачу тепла безпосередньо від дротів до повітря можна не враховувати.

Задачі запропонували:
205 Гельфгат І.М., 206 Рідкокаша І.П., 207 Шевчук О.Г., 208 Орлянський О.Ю., 209 Микуленко О.І.

ІІ заочний тур

(210) «Поневолений заряд». Усередину тонкої металевої сфери радіуса R, повний заряд якої рівний Q, та яка віддалена від всіх інших об'єктів, поміщено точковий заряд q на відстань r $(0 < r < R)$ від центру сфери. Маса заряду m, маса сфери M.
А) **Опишіть розподіл** електричного поля за межами сфери та знайдіть її потенціал.
Б) Знайдіть відносне **прискорення**, з яким в даному положенні рухаються заряд та сфера.

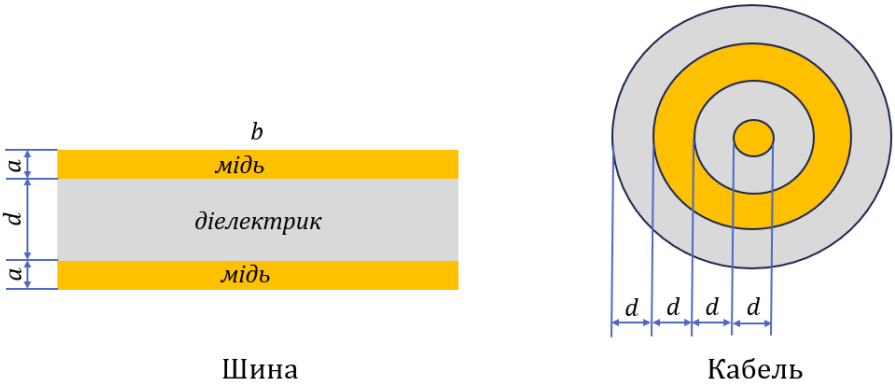
(211) «Індуктивність». Визначте індуктивність двох систем завдовжки $\boldsymbol{l}$, поперечні перерізи яких показані на рисунку: А) двосмугової електричної шини ($a \ll d \ll b$); Б) коаксіального кабелю.

Вказівки.

1) Магнітна проникність усіх застосованих матеріалів дорівнює одиниці, а струм розподіляється по перерізу провідників рівномірно.

2) В обох пунктах можна вважати, що магнітне поле струму зосереджене всередині системи (практично не виходить назовні).

Для визначення магнітного поля радимо скористатися законом повного струму (теоремою про циркуляцію магнітного поля).

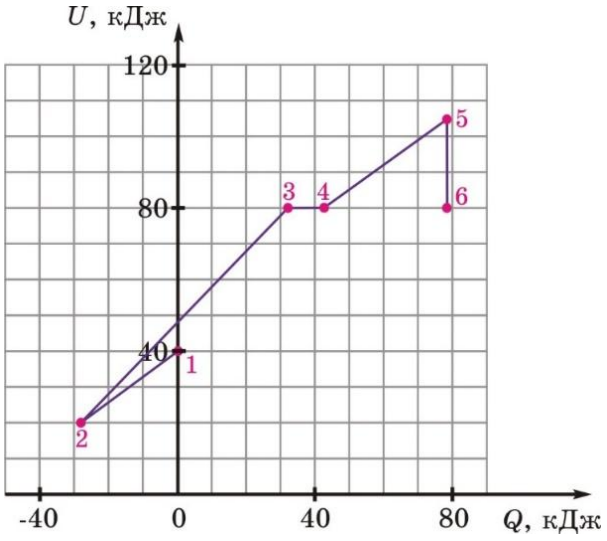


Шина Кабель

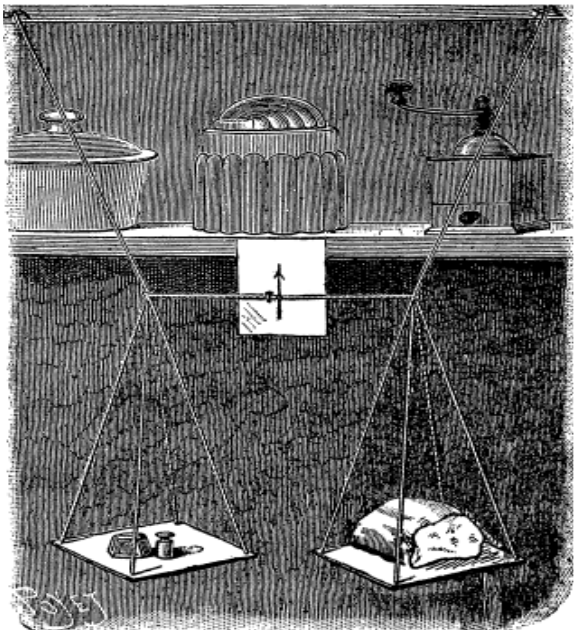
(212) «Термодинамічна карта». На рисунку наведений графік процесу з ідеальним газом (розрідженим вуглекислим газом) у координатах U, Q (тут U — внутрішня енергія газу, Q— отримана газом кількість теплоти). Накресліть графік цього процесу в координатах p, V (p — тиск газу,V — його об'єм). Дотримуйтесь правильного співвідношення між координатами характерних точок. Опишіть характер кожного з етапів процесу.

Підказка 1. *Існують газові процеси, які називають політропними — це процеси, під час яких теплоємність C газу є сталою. Для таких процесів виконується рівняння $pV^n = const$, де $n = \frac{c_p - C}{c_V - C}$.*

Підказка 2 (в першу чергу для тих, хто працює на маленькому екрані). *Координати точок на графіку (надані в кДж): точка 1 (0; 40), точка 2 (–28; 20), точка 3 (32; 80), точка 4 (43; 80), точка 5 (78; 105), точка 6 (78; 80).*



(213) «Терези Тараса». У всесвітньо відомій книжці Тім Тома «Наукові забави. Фізика: досліди, фокуси, розваги» пропонується зробити терези з нитки, кінці якої прикріпити на однаковій висоті, а однакові шальки терезів підвісити симетрично (див. Рис.). Пропонується під час зважування врівноважувати тіло тягарцями. Тарас зробив вдома такі терези з міцної нитки і вирішив перевірити масу великого батону хлібу. Всі тягарці, які йому вдалося знайти вдома (загальною масою 183 г), Тарас поклав на ліву шальку терезів, а хліб на праву, але той все одно переважив і нахилив середню «горизонтальну» частину нитки на 30°. При цьому ліва частина нитки нахилилася до горизонту на кут 45° до горизонту, а права на 60°.

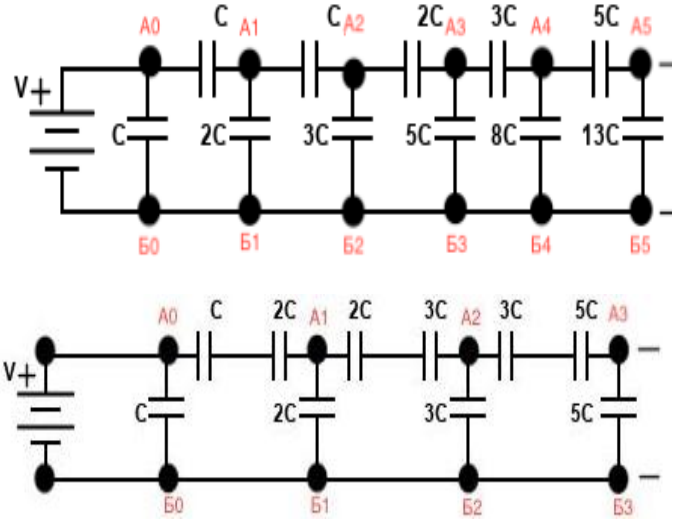


А) Нехтуючи масою шальок, **знайдіть масу** батону.

Б) Тарас обережно змістив групу тягарців на 5 см вздовж діагоналі квадрату який утворюють точки прикріплення ниток до шальки, від чого основа лівої шальки нахилилася на кут 10°. **Знайдіть масу шальки** й **уточніть масу батону**. Довжина кожної з чотирьох ниток, прикріплених до шальки у кутах квадрату (з діагоналлю 20 см), дорівнює 26 см.

В) Уявіть, що маси шальок з навантаженням зосереджені у місцях їх приєднання до основної нитки у вигляді точкових тіл, і цим тілам надали електричні заряди q_1 і q_2. **За якого добутку зарядів $q_1 q_2$** період малих коливань у вертикальній площині нитки не залежатиме від зарядів? Чому цей **період** дорівнюватиме? Довжина середньої частини нитки 50 см. Прискорення вільного падіння 9,8 м/с^2.

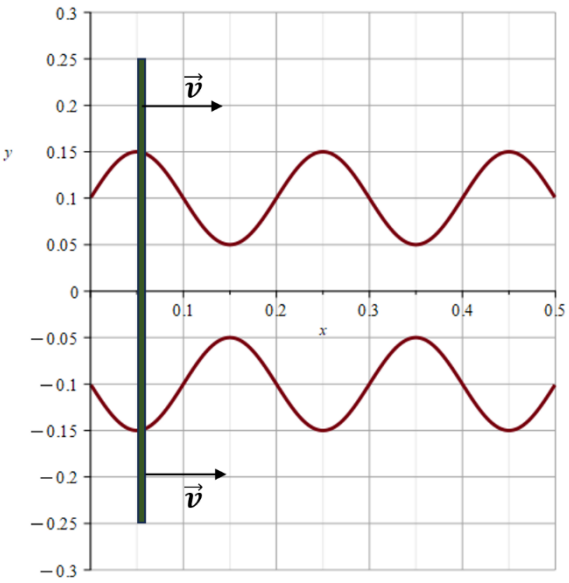
(214) «Коло конденсаторів від Фібоначчі». На рисунку зображене нескінченне коло з конденсаторів. Ємності конденсаторів між точками A_iA_{i+1} та $A_iБ_i$ мають вам нагадати числовий ряд Фібоначчі. Відомо, що ємність кола дорівнює **α·C**, де **α** - відомий коефіцієнт, **C** – ємність першого конденсатора. Замінимо кожен з конденсаторів між точками A_iA_{i+1} на два з'єднаних послідовно конденсатори, ємності яких дорівнюють наступним двом за значенням числам в ряду Фібоначчі (див. рис.). Спробуйте якомога точніше **знайти ємність нової схеми** у вигляді C_∞=**f(α)·C.**



Задачі запропонували:
210 Олійник А.О., 211-212 Гельфгат І.М., 213 Орлянський О.Ю., 214 Абдулханов А.М.

Фінал

(215) «Магнітна синусоїда». Вертикальна складова магнітного поля Землі у м. Дніпро дорівнює 44 мкТл.



А) **Яка різниця потенціалів** наводиться на кінцях металевого стержня довжиною 50 см, який ковзає зі швидкістю 50 см/с вздовж горизонтальної поверхні гладенького дерев'яного столу перпендикулярно до своєї довжини?

Б) Уявіть тепер, що стержень ще й обертається з кутовою швидкістю 2 $с^{-1}$, а зі швидкістю $u = 50$ см/с рухається його центр мас. Якого максимального **значення набуватиме різниця потенціалів** на кінцях стержня?

В) На цей стіл поклали два мідні дроти у вигляді синусоїд, розміри і розташування яких вказані на рисунку. Одну з пар кінців двох дротів-синусоїд з'єднали мікроамперметром з внутрішнім опором 10 Ом. **Визначте залежність струму від часу** через мікроамперметр, коли вздовж синусоїд з тією ж швидкістю 50 см/с поступально рухають той самий стержень як показано на рисунку. За початковий момент часу взяти момент проходження стержнем початку координат. Опором стержня і дротів знехтувати.

Г) Яка **середня теплова потужність** виділяється в мікроамперметрі?

(216) «До зустріч на орбіті!» Космічна станція рухається навколо Землі коловою орбітою радіусом 6700 км. Транспортний космічний корабель (ТКК) масою 6 т, що мав пристикуватися до станції, через неточність у розрахунках вийшов на *ту саму* орбіту, але опинився «попереду» від космічної станції на якихось 12,6 км. ТКК має пристикуватися до станції протягом найближчих годин, щоб передати критично важливе обладнання. ТКК має невеликий запас палива, якого вистачить на маленький час роботи двигуна. Швидкість витікання розпечених газів із сопла двигуна дорівнює 3 км/с. Визначте:

А) **мінімальну масу палива**, за якої ТКК може зблизитися з космічною станцією та дуже м'яко стикуватися з нею.

Б) **Скільки вмикань** двигуна для цього знадобиться? Маса Землі дорівнює $\boldsymbol{M} = 6 \cdot 10^{24}$ кг, гравітаційна стала $\boldsymbol{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$. Зміну маси ТКК через витрату палива не враховуйте.

(217) «Труба трубі». При виготовленні ділянки труби, що має форму чверті кола радіуса *R*, верхній кінець якої відкритий у атмосферу, використали занадто неміцний матеріал: коли в трубу залили воду до рівня $\varphi=\varphi_0$ (див. рис.) труба не витримала. Проектувальники вирішили виправити становище і виготовили трубу зі стінками, товщина яких наростала донизу за законом $d=d_0+\alpha\cdot\sin^2\varphi$, де $\mathbf{d_0}$ – товщина стінок у трубі-прототипі, а α – константа. Матеріал труби в обох випадках однаковий.

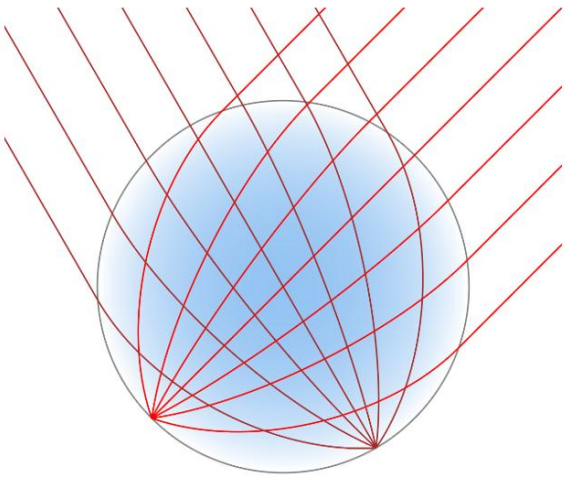


А) **За яких значень** параметра $\boldsymbol{\alpha}$ це рішення допоможе, якщо метою є заповнити всю ділянку труби?
Б) Уявімо собі, що тепер трубу заповнюють газом під деяким тиском p, при цьому верхній кінець трубки закривають. Яким буде **критичне значення цього тиску** для труби прототипу і для «зміцненої труби»?
В) Як, на вашу думку, треба було спроектувати зміну **товщини** труби найоптимальнішим чином (у випадку заповнення водою)? Знайдіть, як вона **повинна змінюватися вздовж труби**. Уважайте, що товщина стінок труби набагато менша від її діаметру, який в свою чергу набагато менший від $\boldsymbol{R}$.

(218) «Ігри з пласкою Планетою». У цьому завданні ми розглянемо планету у формі диску і її особливості. Впродовж всієї задачі можна уважати товщину планети набагато меншою за її радіус.
Деякі числові дані: гравітаційна константа $\boldsymbol{G} = 6.67 \times 10^{-11}$ Н м^2/кг^2, товщина планети $\boldsymbol{h} = 100$ км, радіус планети $\boldsymbol{R} = 10\,000$ км, густина матеріалу планети $\boldsymbol{\rho} = 5000$ кг/м^3.

А) **Стабільність.** На даний момент не було відкрито жодної такої планети. Оцініть, **як відносяться власні гравітаційні потенційні енергії** дискової планети і планети у формі кулі такої ж маси і густини.
Б) **Міцність.** Такі планети не можуть сформуватись в результаті натурального формування планет. Та чи **можливо** зробити їх штучно? Основним обмеженням є міцність матеріалу такої штучної планети. **Оцініть механічне напругу** в її перерізі і порівняйте з границею міцності сталі $\boldsymbol{\sigma_M} \approx \mathbf{1}$ ГПа.
В) **Швидка? доставка.** Уявімо, що така планета все ж існує, і крізь її центр вздовж вісі симетрії пробурили вузький гладкий канал, що з'єднує дві її протилежні пласкі поверхні. Біля однієї з поверхонь в цей канал відпустили без початкової швидкості вантаж. Знайдіть, **через який час** $\boldsymbol{T}$ він досягне іншої поверхні.

(219) «Лінза Люнеберга». Лінза Люнеберга все частіше використовується на дешевих дронах-приманках для відволікання вогню протиповітряної оборони. Лінза Люнеберга це куля з діелектрику з показником заломлення, який збільшується від краю до центру, завдяки чому та фокусує паралельний пучок променів, що на неї падає, у протилежній точці на своїй сферичній поверхні. На рисунку зображені два різні паралельні пучки, які фокусуються у різних точках. Якщо поверхню у місцях фокусування вкрити відбивним матеріалом, то відбиті промені пройдуть лінзою шлях назад і вийдуть з неї паралельним пучком точно у зворотному напрямку. Це створює ілюзію високої відбивної здатності, а отже й значно більшого за розмірами літального апарату.



А) Розгляньте спочатку спрощений випадок: куля зроблена з однорідного прозорого матеріалу і знаходиться всередині паралельного пучка променів. Рівновіддалені від осі симетрії промені з кутом падіння $\boldsymbol{\alpha}$ на поверхню кулі, потрапляють разом з центральним променем в одну точці

внутрішньої поверхні лінзи. **Як залежить показник заломлення $\boldsymbol{n}$** від кута $\boldsymbol{\alpha}$ і в якому інтервалі змінюється?

У подальших пунктах розгляньте лінзу **Люнеберга**, у якій всі промені, що падають на неї з повітря, повністю проходять в неї. Тобто показник заломлення лінзи на її поверхні радіусом *R* дорівнює показнику заломлення повітря. Формула залежності показнику заломлення $\boldsymbol{n}$ цієї лінзи від відстані $\boldsymbol{r}$ до її центру має вигляд: $\boldsymbol{n(r) = \sqrt{A - B \cdot r^2}}$.

Додатково врахуйте, що при потраплянні такої лінзи у паралельний пучок променів електромагнітне випромінювання пронизує весь її об'єм.

Б) **Який час** промінь, що падає на поверхню такої лінзи під кутом α, рухатиметься в ній?

В) **Знайдіть коефіцієнти** $\boldsymbol{A}$ *і* $\boldsymbol{B}$ *в* формулі $\boldsymbol{n(r)}$.

Задачі запропонували:

215, 219 Орлянський О.Ю., 216 Гельфгат І.М., 217 Майзеліс З.О., 218 Пашко М.І., Прасолов О.К.

Експериментальні завдання Інтернет-олімпіади

2023-2024

(220) «Чорний електричний ящик». За допомогою відомого способу зняття вольт-амперної характеристики (зображений на фото) вимірюється напруга та струм на невідомій схемі, яка схована в чорному (ну майже) ящику.

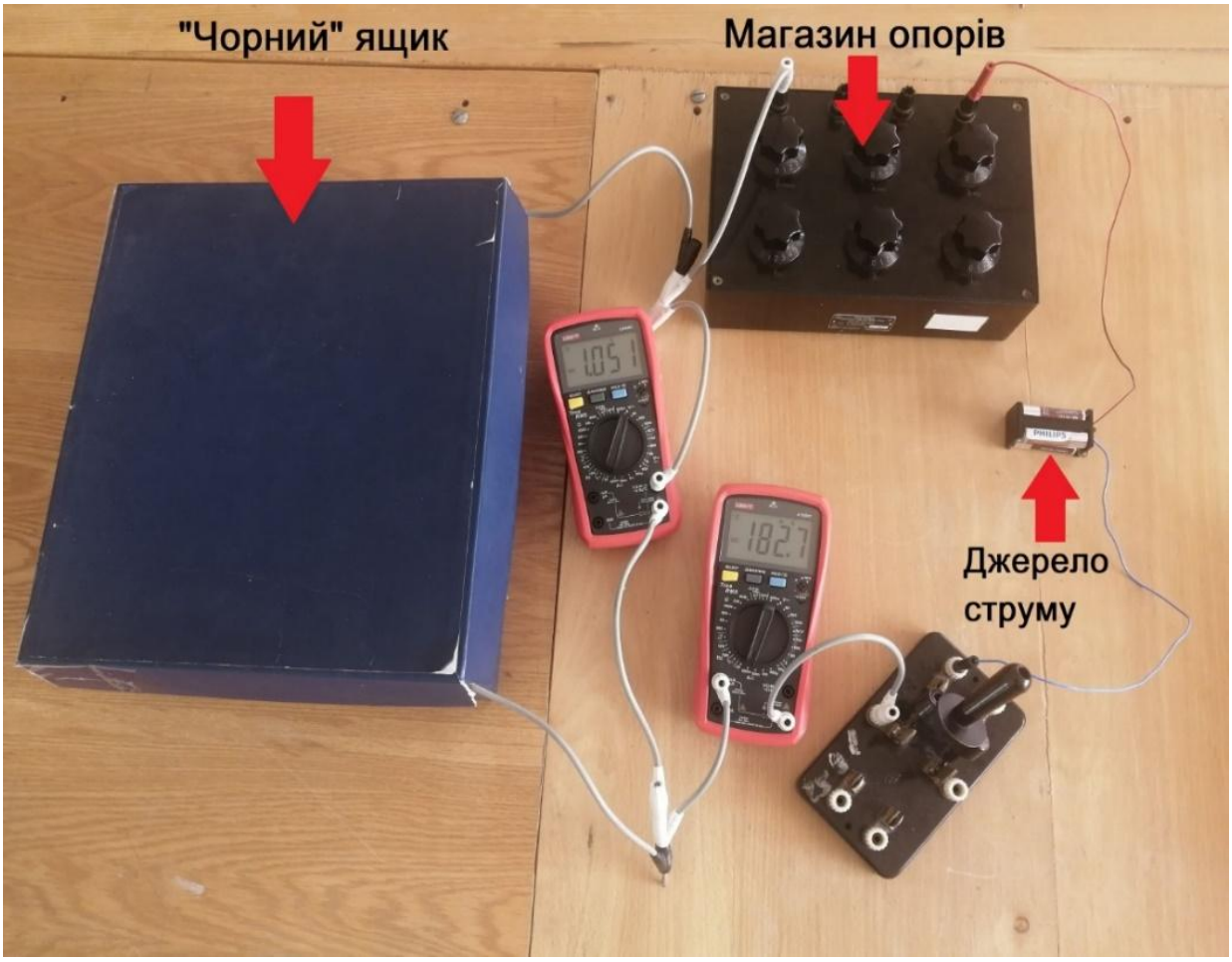
За допомогою наведених в таблиці 1 результатів вимірів струму та напруги на «чорному» ящику:

А) **запропонуйте та аргументуйте** свій найпростіший **варіант схеми** в «чорному» ящику;

Б) **побудуйте приблизні вольт-амперні характеристики** кожного приладу в цій схемі (наявність таблиці не обов'язкова). Чистовий варіант усіх вольт-амперних (залежність струму від напруги) характеристик приладів мають бути зображені на одному графіку, що має займати не менше ніж 80% від площі аркушу «міліметровки» А4 формату.

Інші аркуші «міліметровки» ви маєте використовувати для будь-яких необхідних вам проміжних побудов, масштаб і розмір яких ви обираєте самостійно. Ці допоміжні аркуші «міліметровки» також оцінюються. Знак мінус перед чисельними значеннями у таблиці 1 означає змінену на протилежну полярність джерела.

У звіті надати графіки, пояснення до них та дій з ними, методику розв'язання, розрахунки та аргументовані відповіді на запитання беспосередньо.



Таблиця 1. Виміряні значення сили струму та напруги на чорному ящику

U, В	I, А	U, В	I, А
-0.0190	-0.0050	0.000	0.0000
-0.0470	-0.0126	0.010	0.0025
-0.0632	-0.0165	0.020	0.0048
-0.130	-0.0295	0.049	0.0135
-0.227	-0.0422	0.131	0.0310
-0.322	-0.0487	0.221	0.0410
-0.397	-0.0529	0.278	0.0476
-0.502	-0.0582	0.351	0.0550
-0.619	-0.0645	0.401	0.0600
-0.774	-0.0722	0.449	0.0625
-0.978	-0.0820	0.472	0.0650
-1.265	-0.0943	0.552	0.0697
-1.67	-0.110	0.619	0.0781
-2.26	-0.131	0.663	0.0792
-2.66	-0.144	0.695	0.0834
-2.84	-0.150	0.723	0.0861
-3.05	-0.156	0.755	0.0924
-3.18	-0.160	0.771	0.0982
-3.28	-0.163	0.803	0.1061
-3.47	-0.166	0.827	0.1140
-3.64	-0.167	0.835	0.1214
-3.77	-0.168	0.859	0.1319
-3.90	-0.169	0.883	0.1472
-4.20	-0.174	0.907	0.1635
-4.31	-0.178	0.919	0.1756
-4.49	-0.180	0.939	0.1909
-4.55	-0.181	0.951	0.2062
-4.60	-0.183	0.975	0.2304
		0.987	0.2446
		1.003	0.2609
		1.023	0.2804
		1.039	0.2957
		1.047	0.3126
		1.063	0.3352
		1.090	0.3584
		1.106	0.3805
		1.122	0.3963
		1.134	0.4179

(221) «Вгадай мелодію». Відомо, що гітарна струна, яка жорстко кріпиться на корпусі гітари з обох боків і натягнута за допомогою кілків, може створювати звукові хвилі. Гриф гітари функціонує таким чином, що при затисканні струни на певній довжині, сила натягу, яка виникає у ній, практично не змінюється. Пересовуючи палець вздовж грифу гітари і затискаючи струну на різних ладах, можна змінювати довжину тої частини струни, яка звучить.



У таблиці 1 наведено експериментально отриману залежність основної частоти звучання двох гітарних струн, виготовлених зі сталі, від довжини струни у затиснутому стані.

Таблиця 1

Довжина частини струни, яка звучить, см	Основна частота звучання струни 1, Гц	Основна частота звучання струни 2, Гц
21,0	1035,6	790,5
22,1	992,2	746,6
23,3	935,2	714,6
24,6	880,0	664,6
26,0	839,5	632,7
27,5	786,4	590,9
29,1	743,2	560,1
30,8	700,1	532,5

Уважайте, що швидкість поширення поперечних хвиль не залежить від довжини струни, що звучить, у межах даного експерименту.

А) **Визначте швидкість поперечних хвиль у кожній струні.**

Б) **Визначте відносне видовження кожної струни.**
Модуль Юнга сталі $E = 2 * 10^{11}$Па, густина сталі $\rho = 7800$ кг/м^3.

В) У таблиці 2 для кожної із цих струн наведено ряд вимірювань основної частоти звучання та довжини струн у затиснутому стані. Для частини вимірювань втрачено значення основної частоти, однак для кожної струни указана її довжина у затиснутому стані у процесі гри. З іншого боку, для частини вимірювань не вказано, на якій довжині треба затискати струну, але відома основна частота її звучання.
Допоможіть гітаристу-початківцю – відновіть усі дані у таблиці. Уважати, що під час проведення обох частин експерименту сила натягу струни не змінювалася.

Таблиця 2

Номер струни	Довжина струни у затиснутому стані, см	Основна частота звучання, Гц
1	32,6	
1	34,5	
1		588,5
1		555,5
1		495,8
2	32,6	
2	34,5	
2		442,2
2		417,5
2		371,2

У звіті надати розрахункові формули та малюнки до них, розрахунки за ними, обробку наведених даних та її методику, заповнену таблицю 2.

Задачі підготували: Олійник А.О., Мєшков О.Ю.

2024-2025

9 клас

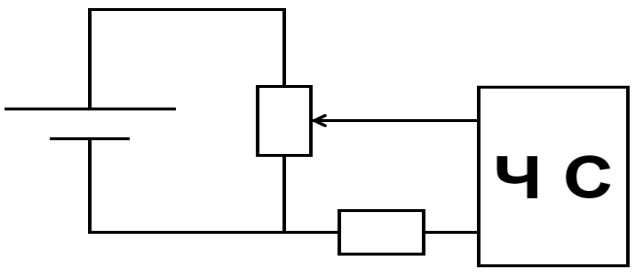
(222) Обладнання: «чорна скринька» з двома виводами, мультиметр, 2 аркуші міліметрового паперу, батарейка, потенціометр (реостат з трьома виводами), резистор, з'єднувальні дроти. Завдання. Відомо, що всередині чорної скриньки знаходяться два однакових діоди та резистор.
А) Зібрати електричну схему для зняття вольт-амперної характеристики (ВАХ - залежність сили струму від напруги, або навпаки: наруги від сили струму) і зняти ВАХ «чорної скриньки» в обох напрямках. Обидві ВАХ накреслити на одному графіку.

Б) Визначити схему з'єднання елементів в скриньці.
В) Запропонувати методику, за допомогою якої можна, використовуючи отримані ВАХ, знайти опір резистора всередині чорної скриньки.
У звіті навести розрахунки, пояснення, схеми, ВАХ на мм папері, необхідні для отримання відповіді на задачу.
Поради:

- ви завжди можете запитати інструктора в аудиторії, чи правильно ви користуєтесь мультиметром.
- краще не користуватися мультиметром у режимі «амперметр», а знаходити значення сили струму іншими методами (але це лише порада).

Вказівки: напівпровідниковий діод – це елемент, який проводить електричний струм лише при певній полярності прикладеної напруги. При цьому його вольт-амперна характеристика (залежність струму від напруги) має приблизно показниковий вигляд (тому діод називають нелінійним елементом).

Виконуючи вимірювання завжди вмикайте наданий вам резистор послідовно до чорної скриньки. Це збереже заряд батареї та не допустить виходу з ладу діодів всередині. Це також може посприяти вам спрощенню і прискоренню процедури вимірювань.



Примітка. Мультиметр **DT-9208A** – це багатофункціональний електровимірювальний прилад, за допомогою якого можна вимірювати силу струму, напругу (як постійні, так і змінні), опір, ємність, частоту. Також можна перевіряти справність напівпровідникових діодів і біполярних транзисторів, а з допомогою зовнішньої термопари вимірювати температуру. Потрібний тип вимірювання задається обертовим перемикачем в центрі передньої панелі. Мультиметр вмикається і вимикається жовтою клавішею "**ON/OFF**" в лівому верхньому кутку. Один щуп підключають до клеми "**COM**" – загальний, мінус, а другий до клеми позначеної:

- "**V Ω Hz**" – при вимірюванні напруги, опору чи частоти;
- "**mA**", "**20A**" – для вимірювання сили струму в залежності від діапазону вимірювання.

Якщо полярність напруги або струму виявиться протилежною до описаної вище, на екрані з'являється знак "**-**" перед виміряною величиною. Якщо вимірювана величина перевищує межі вибраного діапазону вимірювання, то на екрані з'являється "**OL**". Це відбувається, наприклад, у випадку, коли мультиметр перевели в режим вимірювання опору («зелені» положення

перемикача в лівому верхньому секторі, позначені символом "**Ω**"), а вимірюваний опір не під'єднали, або коли величина опору перевищує вибраний діапазон.

(223) Обладнання: дротинка довжиною 10-20 мм, болт, 2 гайки (що підходять під болт), паспортні данні болта і гайки.
Завдання: визначити товщину дротини.
У звіті навести: методику проведення експерименту, необхідні розрахунки, рисунки та оцінку зробленої вами похибки.

Задачі підготували: Дмитрук І.М., Пашко М.І., Триліс О.В.

10 клас

(224) Завдання: За допомогою запропонованого обладнання:

- визначте теплоємність алюмінієвої банки;
- якомога точніше знайдіть питому теплоту згорання парафіну, побудуйте на міліметровому папері необхідні графіки та рисунки;
- оцініть точність розробленої Вами методики експерименту

У звіті подати:

- теоретичне обґрунтування обраних методик з усіма необхідними рисунками та виведенням формули для визначення питомої теплоти згорання парафіну, теплоємності алюмінієвої банки;
- порядок виконання вимірювань, таблиці з проміжними і остаточними результатами, необхідні графіки та рисунки;
- оцінку точності отриманих результатів.

Матеріали та обладнання. Індивідуальне: аркуш міліметрового паперу; термометр; штатив шкільний з лапками; парафінова свічка; коробок сірників; алюмінієва банка (питома теплоємність алюмінію 920 Дж/(кг*К)); секундомір; ваги; пляшка води (питома теплоємність алюмінію 4200 Дж/(кг*К)).

Групове: ємність для зливу відпрацьованої води, серветки;.

Додаткова інформація:

- термометр вимикається орієнтовно через 7-10 хвилин;
- для зважування теплих предметів, на ваги краще класти підставку у вигляді коробка з сірниками;
- напій в банках, можете випити або вилити.

Увага:

- сплануйте експеримент так, щоб якомога менше гасити\запалювати свічку та використовувати сірники!
- розташовуйте свічку так, щоб не опалювати\псувати обладнання (кільця та лапки від штативу)
- В пляшках 0,5л знаходиться вода, але вона не для пиття! На поточний експеримент розраховуйте не більше 100мл води, решта вам ще може знадобитися.

(225) Визначити показник заломлення прозорої рідини.
Обладнання: пляшка місткістю 0,5 л з прозорою рідиною, штатив з кільцем, картонний одноразовий стакан, маркер/олівець/ручка, лінійка, аркуш білого паперу А4.

Задачі підготували: Пашко М.І., Ткачов О.М., Гельфгат І.М.

11 клас

(226) Обладнання: штатив, нитка (2 м), маленький магніт, дві металеві пластини різної товщини, які виготовлені з різних металів, 2 аркуші міліметрового паперу, маленький шматочок пластиліну, штангенциркуль, секундомір, лінійка.
Завдання:

А) Запропонувати теоретично обґрунтовану методику знаходження відношення питомих опорів металів, з яких виготовлені пластинки.

Б) Експериментально знайти це відношення.
В) Опишіть механізм проведення вимірювань та дії по збільшенню точності.

(227) Обладнання: дві тенісні кульки, одна половинка тенісної кульки, що заповнена пластиліном, скотч (не віскі), два листи білого паперу, нитка, дерев'яна дошка, штатив, лінійка, секундомір, електронні ваги, штангенциркуль.

Завдання:
А) **Визначіть** коефіцієнт тертя матеріалу цілої (!) кульки з листом білого паперу.

Увага! В цьому пункті використовувати можна лише цілі кульки.

Б) **Приведіть** половинку кульки з пластиліном у виключно обертальний рух навколо осі симетрії на листі білого паперу. Знайдіть якомога точніше момент сили тертя з боку білого паперу, що гальмує кульку. Опором повітря підчас обертання нехтуємо.

В) **Оцініть** «плече» d сили тертя, що гальмує напівкульку в попередньому пункті, уявивши, що сила тертя, що створює гальмуючий момент, визначається сила тертя ковзання і прикладена на відстані d від осі обертання напівкульки. Таким чином, **оцініть** характерний розмір плями дотику напівкульки до листа паперу.

Г) **Проаналізуйте причини**, що могли вплинути на точність визначення результатів в попередніх пунктах.

Задачі підготували: Орлянський О.Ю., Олійник А.О., Пашко М.І., Триліс О.В.

Відкритий всеукраїнський фізичний марафон 2021 рік

8 клас

1 етап

(228) Петрик, йдучи до школи розрахував, що, йдучи з постійною швидкістю 4 км/год, він встигне прийти до школи рівно о 8:00. Пройшовши третину шляху, Петрик згадав, що забув вдома зошит із домашнім завданням. Він миттєво розвернувся і побіг до дому за зошитом, рухаючись з постійною швидкістю, а потім з тією ж постійною швидкістю біг до школи. З якою швидкістю біг Петрик, якщо він все ж був у школі о 8:00? Часом, який знадобився Петрику, щоб взяти зошит, знехтувати.

(229) Тіло рухається прямолінійно так, що величина його швидкість змінюється відповідно графіка, зображеного на рис. 1. Використовуючи цей графік, знайдіть величину середньої швидкості тіла за 5 секунд руху.

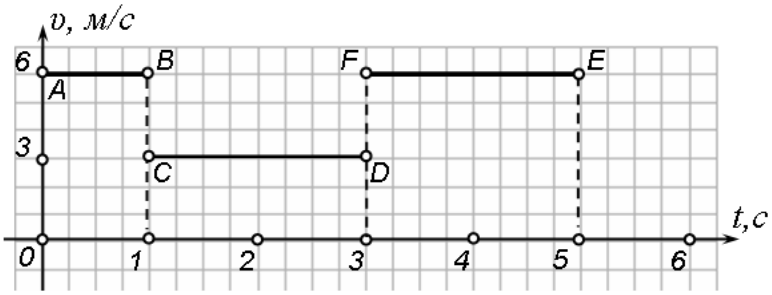


Рис.1

(230) Кількість теплоти, що необхідна для розплавлення суцільного льодяного кубика зі стороною a дорівнює Q. Яка кількість теплоти виділиться при перетворенні одержаної води у суцільну льодяну кульку радіусом R. Об'єм суцільної кулі радіусом R можна знайти за математичною формулою $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

(231) На рис. 2 зображено систему блоків, за допомогою якої передається обертальний рух від блоку 1 до блоку 4. Блоки 2 та 3 нерухомо скріплені між собою та мають спільну вісь обертання. Блоки 1 та 2, 3 та 4 з'єднані нерозтяжними ременями. Проковзування між блоками та ременями відсутнє. Співвідношення між радіусами блоків вказане на рисунку. Знайдіть частоту обертання блоку 4. якщо частота рівномірного обертання блоку 1 становить 30 об/хв.

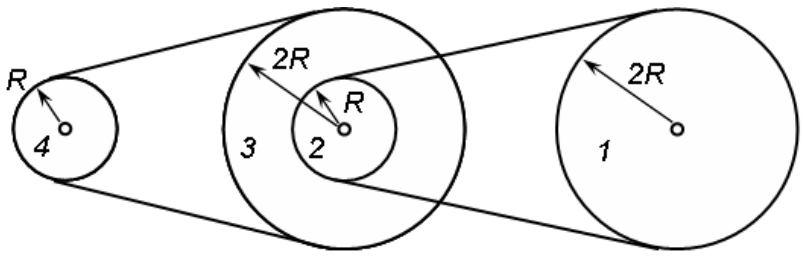


Рис.2

(232) Пружинний маятник являє собою маленьку кульку, яка прикріплена до вертикальної невагомої пружини. Маятник здійснює вільні коливання над горизонтальною поверхнею стола.

На рис. 3 зображено графік залежності висоти кульки над столом *h* від часу *t*. Використовуючи даний графік, знайдіть середню швидкість маятника за час, який складає 75% періоду коливань.

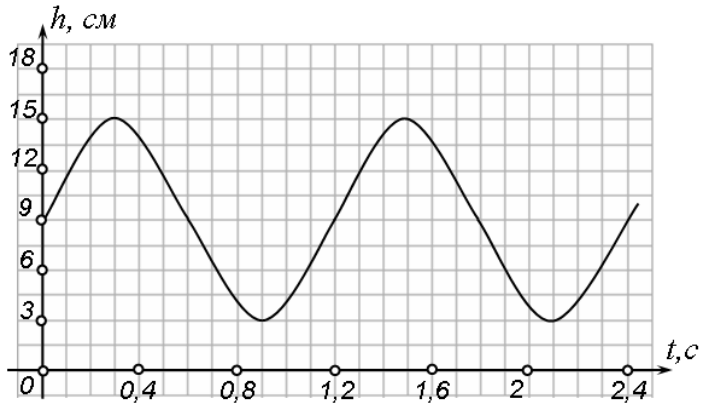


Рис.3

(233) Санчата масою m з'їжджають з гірки, нижня частина якої посипана піском. Профіль гірки має форму, зображену на рисунку 4. Профіль гірки зображений у вертикальній площині. Санчата починають рух у точці А і зупиняються у точці В. Використовуючи рисунок, знайдіть роботу, яку необхідно виконати, щоб втягнути санчата в зворотному напрямі від точки В у точку А, прикладаючи силу паралельно схилу. Коефіцієнт тертя на всьому спуску однаковий. Сторона клітинки на рисунку дорівнює *a*.



Рис. 4

(234) На штативі закріплено однорідний важіль (рис 5). Довжини чорних та білих смуг на важелі однакові. До важеля підвісили однакові важки, так, як показано на рисунку. Яку кількість таких же важків слід підвісити у точці А важеля, щоб він перебував у рівновазі?

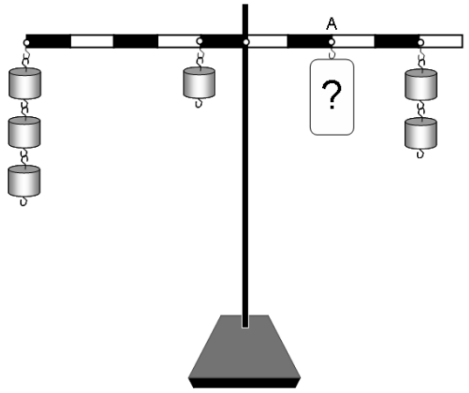


Рис. 5

(235) На рис. 6 зображено систему блоків. Усі нитки на рисунку вертикальні, невагомі та нерозтяжні, блоки невагомі. Радіуси блоків вказані на рисунку. До осі блока 3 в точці А прикладають силу F_1, а до мотузки в точці В силу F_2. Знайдіть відношення сил F_1/F_2.

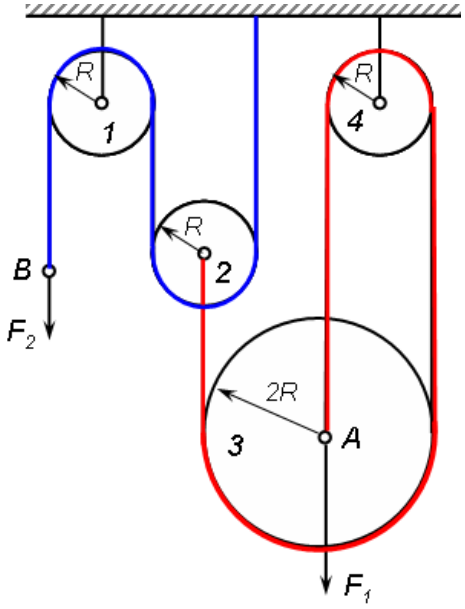


Рис. 6

(236) Брусок масою 200 г знаходиться на горизонтальній поверхні та прикріплений до стінок за допомогою двох однакових пружин жорсткістю k=60 Н/м. Брусок у початковий момент знаходиться посередині між стінками і пружини недеформовані. Брусок зміщують праворуч на 1 см. За якого мінімального коефіцієнту тертя брусок не почне ковзати по поверхні при такому зміщенні? При розрахунках прийняти g=10 Н/кг.

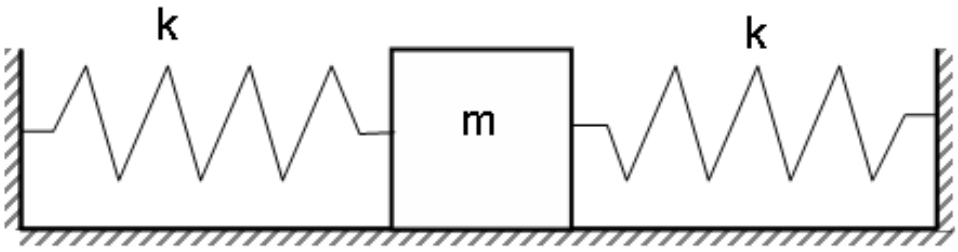


Рис.7

(237) Шматочок льоду занурюють у посудину, яка доверху заповнена деякою рідиною. При цьому з посудини вилилось 100 г цієї рідини. Знайдіть виштовхувальну силу, яка діє на лід. Густина льоду 900 кг/м^3, g=10 Н/кг.

(238) М’ячик перебуває у стані спокою на початковій висоті 1,5 м над поверхнею горизонтальної підлоги. М’ячик відпускають. При ударі об підлогу м’ячик пружно відбивається, втрачаючи 20% кінетичної енергії, яку мав до удару. На яку висоту підніметься м’ячик після третього удару? Опором повітря при падінні м’ячика знехтувати.

(239) На графіку залежності температури речовини t від часу τ представлений процес нагрівання і плавлення деякої речовини масою 5 кг. Потужність нагрівника постійна і дорівнює 200 Вт. Використовуючи даний графік знайдіть питому теплоту плавлення речовини.

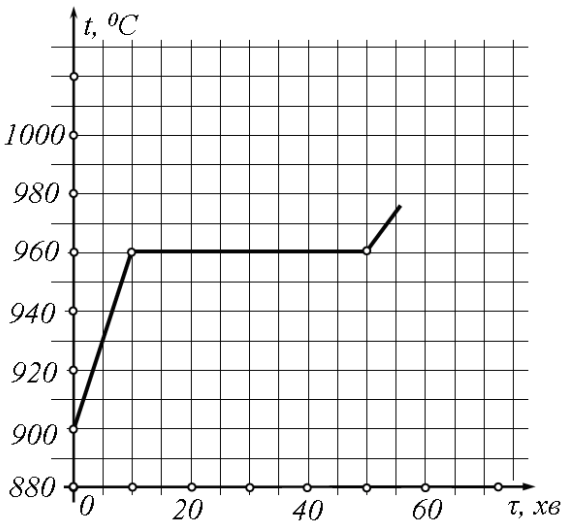


Рис. 8

(240) Брусок штовхають вздовж горизонтальної поверхні. Проїхавши певну відстань, брусок зупиняється, а його поверхня, яка контактує зі столом, нагрівається. Який спосіб зміни внутрішньої енергії бруска описаний у даній задачі?

(241) Нагрівник постійної потужності може нагріти воду об'ємом 5 л до максимальної температури 78 ^{0}C. Після вимкнення нагрівника вода охолоджується до 77 ^{0}C протягом 5 хв. За цими даними знайдіть потужність нагрівника. Питома теплоємність води 4200 Дж/(кг ^{0}C).

(242) Є три маленькі заряджені кульки: заряд першої кульки (-3) мкКл, другої - (+9) мкКл, а третьої - (+5) мкКл перебувають у вакуумі. Перша та друга кульки розташовані на відстані L одна від одної (відстань L значно більша за розміри кульок). Третьою кулькою торкаються спочатку першої, а потім другої кульки. У скільки разів і як зміниться величина сили взаємодії першої та другої кульок після обох дотиків, якщо відстань між ними не змінилась?

(243) Знайдіть опір ділянки електричного кола, яка зображена на рисунку. Опором з'єднувальних провідників та перетинки АВ знехтувати.

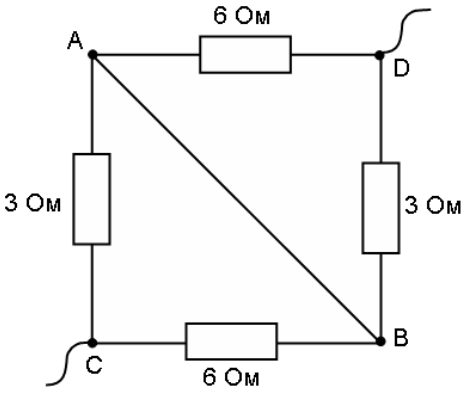


Рис. 9

(244) На рисунку 10 зображене електричне коло, яке складається із трьох двопозиційних перемикачів К1, К2, К3 та трьох лампочок Л1, Л2, Л3 та джерела. Двопозиційний перемикач можна переключати між двома положеннями 1 та 2, які вказані на рисунку. Які лампочки у колі будуть світитись, якщо перемикачі перебувають у положеннях, вказаних на рисунку. Джерело ідеальне, опором з'єднувальних провідників знехтувати.

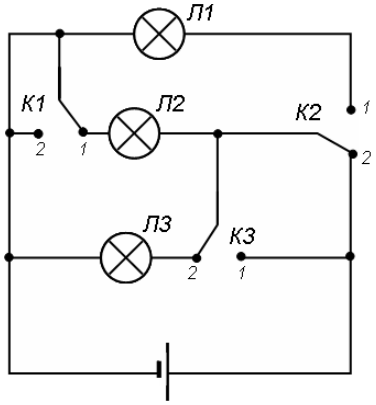


Рис. 10

(245) Три циліндри однакових розмірів виготовлені з заліза, свинцю та алюмінію нагріли в окропі, та помістили на однорідний шматочок льоду, температура якого підтримується сталою 0^0C. Який із циліндрів зануриться у лід найглибше. Вважайте, що в результаті плавлення льоду, утворена вода відразу витікає із утвореної заглибини і після витікання з циліндром не контактує. Густина заліза 7800 кг/м^3, алюмінію 2700 кг/м^3, свинцю 11300 кг/м^3, питома теплоємність заліза 450 Дж/(кг ^{0}C); алюмінію 920 Дж/(кг ^{0}C); свинцю 130 Дж/(кг ^{0}C). Теплообміном з оточуючим середовищем знехтувати.

(246) Під час виконання лабораторної роботи учень записав результат обчислень фізичної величини в такому вигляді $250\frac{Па \cdot кг}{Вт \cdot с}$. Яку фізичну величину визначав учень під час даної лабораторної роботи?

(247) На фотографії рис.11 зображено шкалу приладу авометра. Авометр - це прилад, який може працювати у різних режимах. В залежності від режиму роботи, з допомогою авометра можна вимірювати силу струму у колі, спад напруги на ділянці кола або опір ділянки. Тому на циферблаті приладу є декілька шкал. Цікавою, є шкала для вимірювання опору. Як бачите, вона не лінійна, тобто на різних ділянках має різну ціну поділки. Використовуючи фотографію знайдіть ціну поділки шкали опору авометра на проміжку 0,1 - 0,2 кОм.



Рис. 11

Задачі запропонували:
Березовський А.М., Григор'єв С.Б., Сапсай В.Ю.

2 етап

(248) Неуважний фізик, йдучи рівномірно по берегу вздовж струмка проти його течії, тримав у рухах капелюх. Зачепившись капелюхом за кущ, фізик впустив капелюх у воду, але не помітив цього і продовжив рух в тому ж напрямі з тією ж швидкістю. Через 15 хв після цього фізик помітив втрату капелюха, розвернувся і пішов вздовж течії струмка, не змінюючи своєї швидкості. Через певний час фізик наздогнав капелюх, але на 1,5 км нижче за течію від куща, біля якого загубив капелюх. Знайдіть швидкість руху фізика, якщо швидкість струмка постійна на всіх ділянках і дорівнює 2 км/год. Відповідь запишіть в кілометрах за годину (км/год).

(249) Між пунктами *A* та *B*, відстань між якими *96 км*, курсує пароплав. Власна швидкість пароплава *14 км/год*. Течія річки направлена від *A* до *B*, а її швидкість *2 км/год*. У той момент часу, коли пароплав почав рух з пункту *B*, з пункту *A* вирушив пліт. Знайдіть кількість зустрічей пароплава і плота. Швидкості пароплава та ріки сталі на всіх ділянках шляху. Час зупинок пароплава не враховувати.

(250) Ведуча зірка велосипеда обертається з частотою 30 об/хв і має 50 зубців (рис. 1). Яку кількість зубців повинна мати ведена зірка велосипеда (див рис), щоб велосипед рухався зі швидкістю 6,28 м/с? Ведена зірка нерухомо скріплена з заднім колесом і має з ним спільну вісь обертання. Радіус заднього колеса велосипеда 40 см. Колесо велосипеда не проковзує по поверхні землі під час руху. Прийняти $\pi = 3{,}14$.

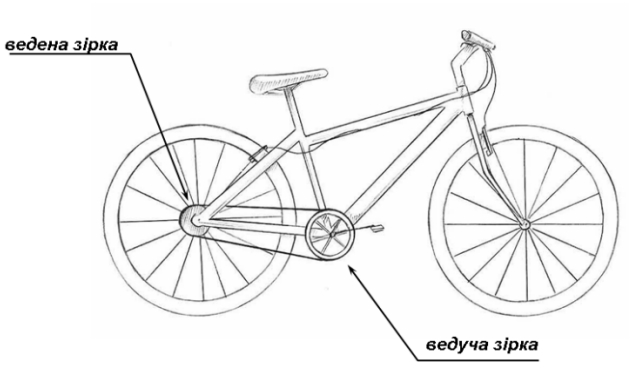


Рис. 1

(251) Два бруски масами $m_1=2$ кг та $m_2=3$ кг лежать на горизонтальній поверхні (рис. 2). Коефіцієнт тертя між кожним бруском і поверхнею $\mu=0{,}2$. Бруски з'єднані невагомою і нерозтяжною ниткою, яка у натягнутому стані паралельна поверхні стола. До бруска m_2 прикладають силу F=8 Н. Знайдіть силу тертя, що діє на брусок масою m_1. Відповідь запишіть в *ньютонах* (Н). При розрахунках прийняти g=10 Н/кг.



Рис.2

(252) У озері плаває однорідний шматочок корка, що має форму кубика зі стороною 10 см. Корок плаває так, що дві грані кубика паралельні поверхні води. Яку мінімальну роботу необхідно виконати, щоб підняти кубик так, щоб нижня грань була на висоті 5 см над поверхнею

води. Густина корка 500 кг/м^3, густина води 1000 кг/м^3, g=10 Н/кг. Відповідь запишіть в *мілі-джоулях* (мДж).

(253) Для нагрівання води іноді пропонують встановлювати на лійки кранів спеціальні електричні водонагрівачі. Відомо, що витрата води, яка витікає з крана, 12 л/хв, а її температура 10 °С. На кран встановили такий водонагрівач потужністю 1,68 кВт і такої ж площі поперечного перерізу. Знайдіть температуру води, яка витікатиме з крана при ввімкненні водонагрівача. Густина води 1000 кг/м^3, питома теплоємність води 4200 Дж/(кг °С). Теплообміном з оточуючим середовищем при нагріванні води знехтувати. Відповідь запишіть в *градусах Цельсія* (°С).

(254) При запалюванні сірник притискають до коробочки з постійною силою 17,5 Н і переміщують рівномірно на відстань 5 см. Коефіцієнт тертя сірника об коробочку 0,8. При цьому сірка на кінчику сірника нагрівається від 20 °С до 170 °С. Питома теплоємність сірки 700 Дж/(кг °С), маса частини сірки, яка контактує з коробком, 2 мг. За цими даними визначте ККД процесу нагрівання сірки. Відповідь запишіть у відсотках (%).

(255) Лід масою 1 кг, початкова температура якого 0 °С, занесли до теплої кімнати. Графік залежності потужності *P,* яку тіло передає навколишньому середовищу, від температури *t* цього тіла показаний для даної кімнати на рисунку 3. Знайдіть час, за який внесений шматок льоду розплавиться і нагріється до кімнатної температури. Вважайте, що температура у кімнаті підтримується завжди сталою. Питому теплоту плавлення льоду прийняти рівною 330 кДж/кг; питома теплоємність води 4200 Дж/(кг °*С*). Відповідь запишіть у *хвилинах* (хв).

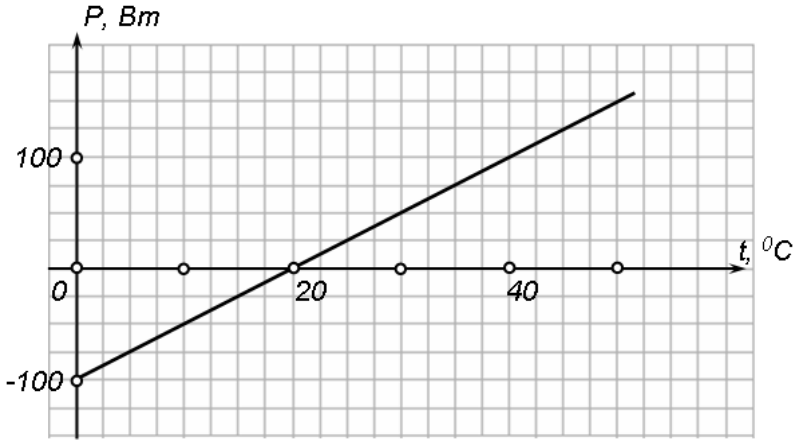


Рис. 3

(256) Якими будуть покази амперметра у колі, яке зображене на рис. 4. Опори резисторів, вказані на рисунку вважати відомими. Напруга на клемах джерела 36 В. Опором амперметра та з'єднувальних провідників знехтувати. Відповідь запишіть в амперах (*А*).

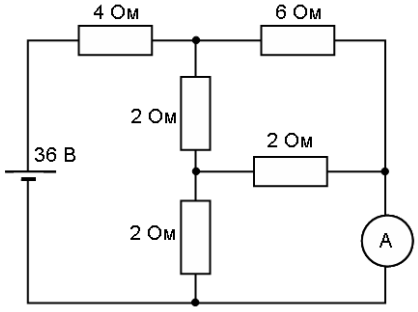


Рис. 4

(257) Учень 8-го класу проводить лабораторну роботу по визначенню питомої теплоти плавлення льоду. У посудині знаходиться вода при температурі 0 °С, в якій плаває шматок льоду. Лід повністю занурений під воду та утримується у такому положенні за допомогою тонкої нитки, один кінець якої вмерз у лід, а інший - прикріплений до дна посудини. Посудину поміщують на нагрівник постійної потужності та через рівні проміжки часу вимірюють об'єм речовини у посудині. Графік залежності об'єму речовини V у посудині (в літрах) від часу τ (в хвилинах) показаний на рисунку 5. Яке значення питомої теплоти плавлення льоду отримав учень? Питома теплоємність води 4200 Дж/(кг °*C*), густина води $\rho_В$=1000 кг/м^3, густина льоду $\rho_Л$=900 кг/м^3. Теплообміном з посудиною та оточуючим середовищем, тепловим розширенням води знехтувати, атмосферний тиск нормальний. Вважайте, що під час нагрівання води від 0 °*C* до 100 °*C* випаровування відсутнє. Вважайте, що під час усього процесу плавлення лід повністю занурений під воду. Відповідь запишіть в *кілоджоулях на кілограм* (кДж/кг).

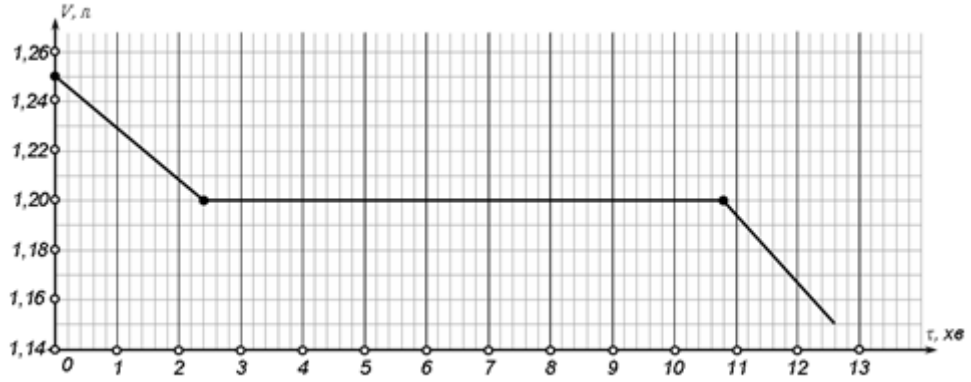
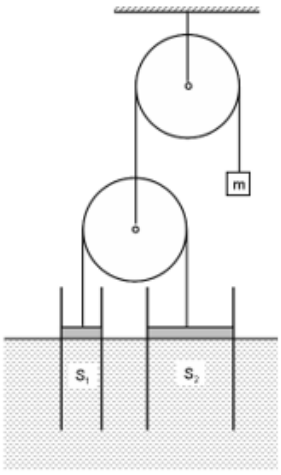


Рис. 5

(258) У басейн з водою опущені дві довгі тонкі трубки, площі поперечного перерізу яких S_1=2 дм^2 та S_2=12 дм^2. Трубки закриті невагомими поршнями такої ж площі, які лежать на поверхні води в кожній з трубок. Тертя між поршнями та внутрішніми поверхнями трубок відсутнє. За допомогою невагомих блоків та невагомих і довгих нерозтяжних ниток поршні з'єднані з вантажем масою m=24 кг, який утримують у спокої. На рисунку 6 показане положення системи у початковий момент часу. Потім вантаж починають повільно відпускати. Знайдіть висоту, на яку опуститься вантаж, перш ніж зупинитись. Густина води ρ=1000 кг/м^3. Прийняти g=10 Н/кг. Тертя в осі блоків при переміщенні відсутнє. Нитки прикріплені Відповідь запишіть у *сантиметрах* (см).



(259) Два циліндричні вантажі 1 та 2 однакової висоти h=10 см, масами m_1 та m_2 (m_2=2*m_1) і густинами ρ_1=0,6 г/см^3 та ρ_2=0,4 г/см^3 підвішені за допомогою довгої невагомої нерозтяжної нитки, що перекинута через нерухомий блок. Нижня основа вантажу 1 перебуває на висоті h=10 см над дном пустої посудини (див. рис. 7). В посудину наливають повільно воду. Густина води ρ_0=1 г/см^3. Знайдіть висоту рівня води у посудині, коли вантажі будуть занурені у воду на однакову глибину. Відповідь запишіть в *сантиметрах* (см).

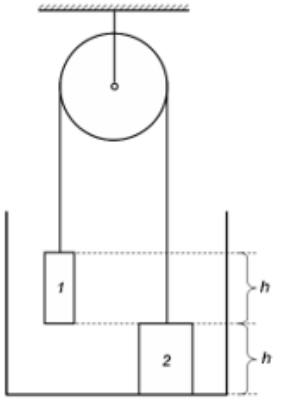


Рис. 7

(260) Система, зображена на рис. 8, складається з двох однорідних стержнів однакового поперечного перерізу, які виготовлені з одного і того ж матеріалу, чотирьох невагомих нерозтяжних ниток і вантажу масою 800 г. Визначте масу довшого стержня, якщо система знаходиться в рівновазі, стержні горизонтальні. Довжини усіх чорних та білих смуг на рисунку рівні. Відповідь запишіть у *грамах* (г).

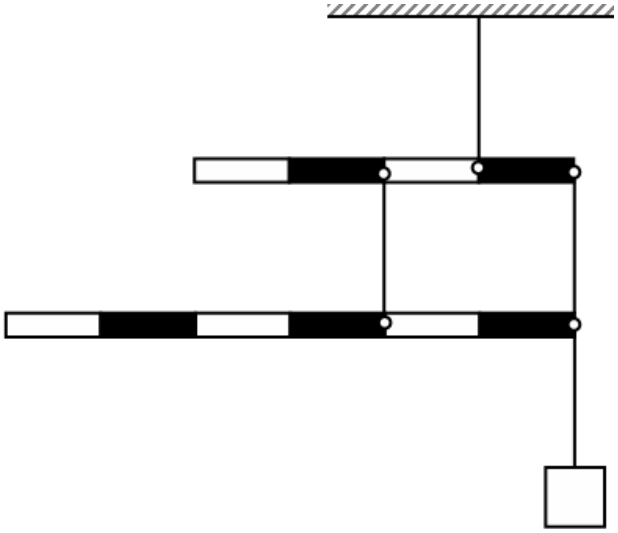


Рис. 8

(261) Невагома вертикальна пружина довжиною 13 см і жорсткістю 1 кН/м верхнім кінцем нерухомо прикріплена до стелі. До нижнього кінця пружини підвішують маленьку заряджену кульку масою 1 кг і переводять систему у стан рівноваги. Якщо біля верхнього краю пружини помістити таку ж кульку з таким самим зарядом, то в стані рівноваги видовження пружини зросте у два рази. Знайдіть модуль заряду кульки. Система перебуває у вакуумі. Стала Кулона $K = 9 \cdot 10^9\ Н \cdot м^2 / Кл^2$. Відповідь запишіть в *мікрокулонах* (мкКл).

(262) Один кінець довгої горизонтальної невагомої пружини жорсткістю 10 Н/м закріпили нерухомо, а до іншого приєднали невелику кульку масою 100 г, яка може без тертя ковзати по горизонтальній спиці (рис. 9). У початковий момент часу пружина недеформована. Кульці поштовхом надають початкової швидкості 0,5 м/с у горизонтальному напрямі. Після чого кулька починає здійснювати вільні незатухаючі коливання з періодом 0,6 с. Знайдіть шлях, пройдений кулькою за перші 6 хв, які минули від моменту поштовху. Відповідь запишіть в *метрах* (м).

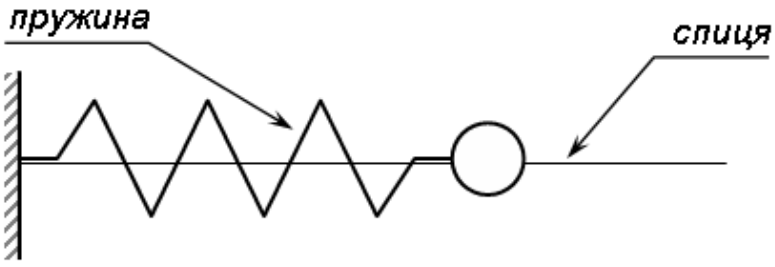
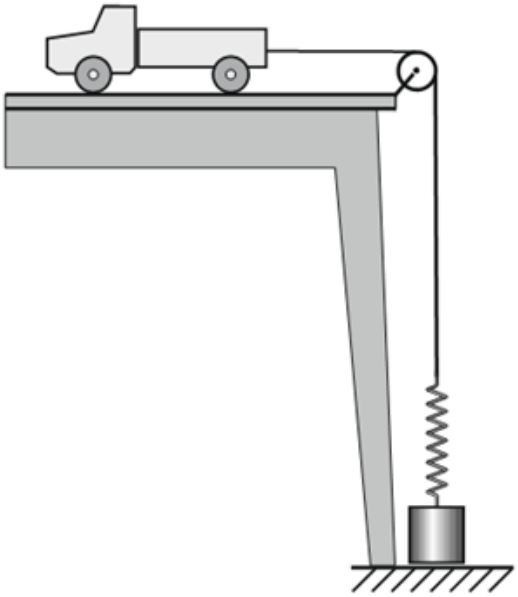


Рис.9

Задачі запропонували:
Березовський А.М., Григор'єв С.Б., Сапсай В.Ю.

Фінал

(263) Суцільний алюмінієвий кубик, що лежить на підлозі під столом, прикріпили до невагомої пружини. Ця пружина (жорсткістю k=4 Н/м) в свою чергу прив'язана легкою ниткою перекинутою через нерухомий блок до іграшкової вантажівки на гумових колесах масою M=200 г. Вважаючи, що густина алюмінію 2700 кг/м^3, а g=10 Н/кг, знайдіть:

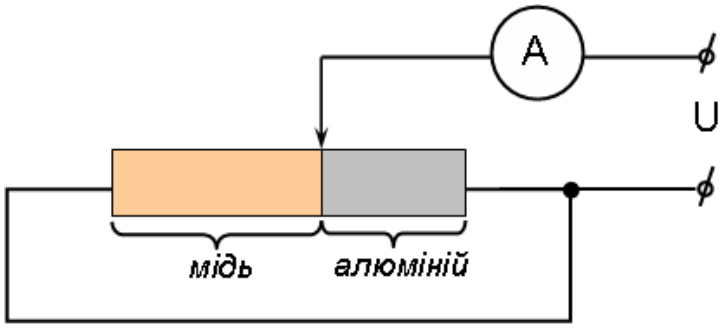


1) масу кубика m, якщо відомо, що він створює на підлогу тиск 0,9 кПа. Пружина в початковий момент недеформована.
2) Машинку заводять і всі її колеса починають обертатись з постійною та однаковою швидкістю. Коефіцієнт тертя коліс по поверхні стола 0,4. Заведену машинку розміщують на поверхні стола так, що система перебуває в рівновазі. Знайдіть видовження пружини у цьому випадку.
3) З якою силою в цей момент буде діяти кубик на підлогу?
4) В певний момент у вантажівку юний дослідник почав щосекунди класти монетки масою m_0=5 г кожна. Через який час після того, як поклали першу монету кубик відірветься від підлоги?

(264) Реостат являє собою керамічний циліндр діаметром *6 см*, на який намотано мідний та алюмінієвий дроти однакового діаметру *0,75 мм*, одні кінці яких спаяні між собою. На циліндрі виявилось *220 витків* мідного дроту та *200 витків* алюмінієвого. Вільні кінці дротів та повзунок підключені до джерела постійної напруги *12 В*, так як показано на рисунку. Витки дроту щільно прилягають один до одного та ізольовані один від одного. Нехтуючи опором амперметра і з'єднувальних провідників знайдіть:

1) покази амперметра для випадку коли повзунок знаходиться у місці з'єднання алюмінієвого та мідного дротів;
2) покази амперметра, коли повзунок знаходиться посередині мідної намотки;
3) мінімальні покази амперметра;

Питомий опір міді $1{,}7 \cdot 10^{-8}\,Ом \cdot м$, питомий опір алюмінію $2{,}9 \cdot 10^{-8}\,Ом \cdot м$.

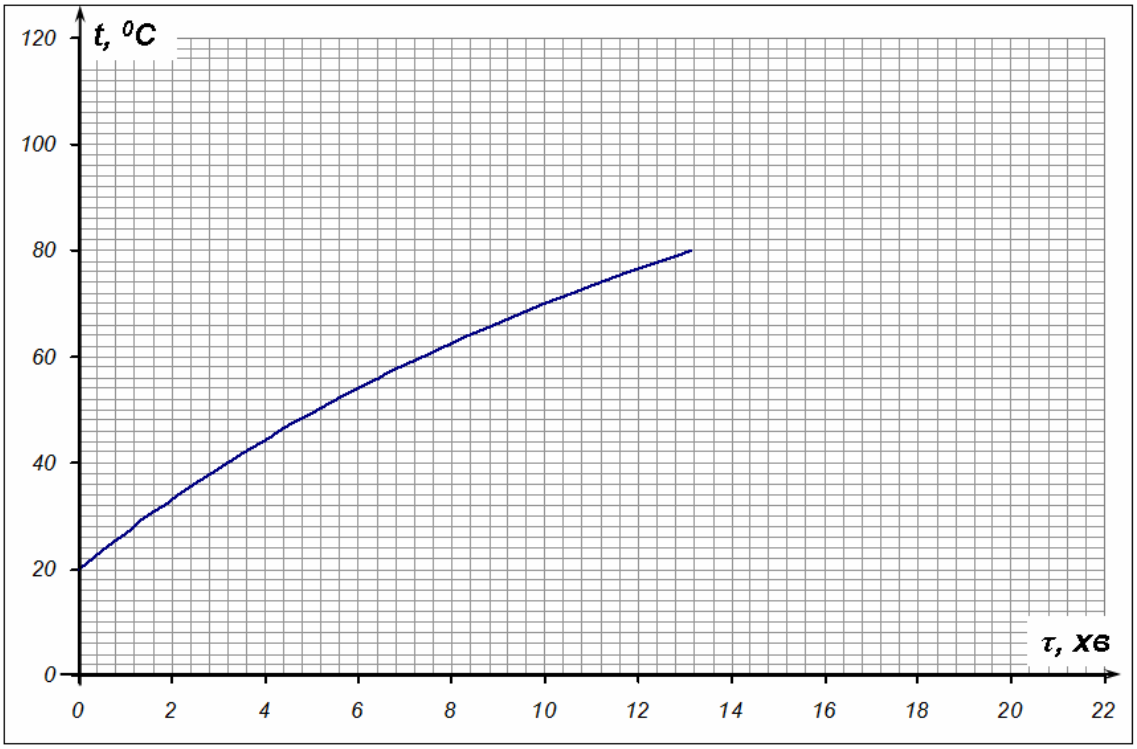


(265) Виконуючи лабораторну роботу, учень поставив на електроплитку плитку постійної потужності посудину з водою, початкова температура якої дорівнює температурі оточуючого середовища 20 °С. Маса води 1 кг. Після ввімкнення нагрівника учень вимірював температуру води через рівні проміжки часу, нагріваючи воду до температури кипіння 100 °С. Графік залежності температури води t від часу τ показаний на рисунку. Вважайте, що потужність

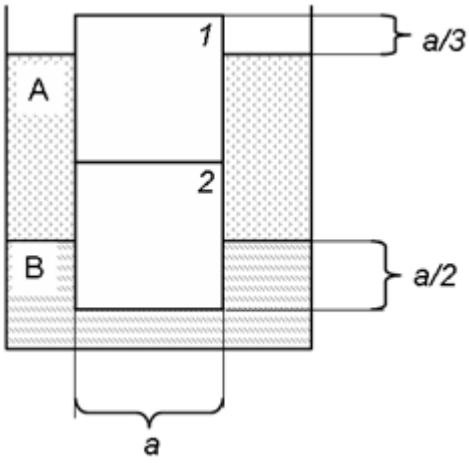
теплообміну з оточуючим середовищем пропорційна різниці температур води та середовища. Нехтуючи випаровуванням води та теплоємністю калориметра, дайте відповіді на такі запитання:

1) якою є потужність електроплитки?
2) яка потужність теплообміну з оточуючим середовищем при температурі 100 °C?
3) через який час від моменту закипання уся вода википить?

Питома теплоємність води 4,2 кДж/(кг °C); питома теплота кипіння 2,3 МДж/кг.



(266) Два скріплені між собою кубики *1* та *2* з однаковими ребрами довжиною a та густинами ρ_1 і ρ_2 відповідно плавають у двох рідинах А та В так, що верхній кубик густиною ρ_1 виринає на *a/3* над рівнем рідини А, а межа поділу рідин проходить через середину нижнього кубика густиною ρ_2. Густина рідини В на *20%* більша за густину рідини А. Визначте:



1) Які густини рідин?

2) З якими силами діють кубики один на одного.

3) Якими будуть напрямки цих сил?

Для пунктів 2) та 3) розгляньте два випадки: а) рідина потрапляє у простір між кубиками; б) рідина не проникає у простір між кубиками.

Задачі запропонували:
Березовськй А.М., Григор'єв С.Б., Сапсай В.Ю.

9 клас

1 етап

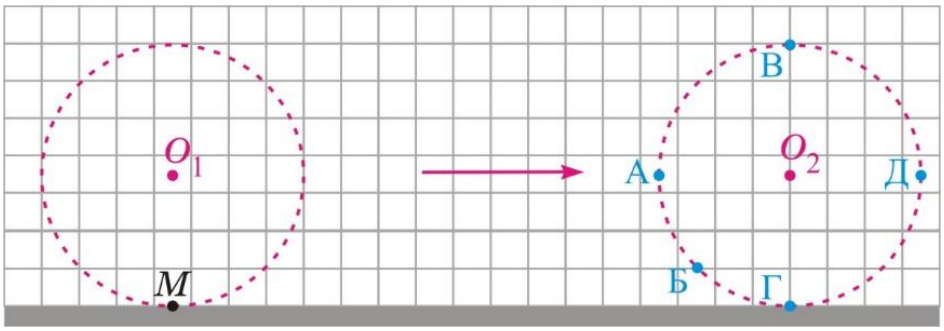
(267) Снігоочисник рухається вздовж прямолінійної ділянки шосе. За перші 10 хв він пройшов 200 м, за наступні 5 хв — ще 150 м. Визначте середню швидкість руху снігоочисника за 15 хв.

(268) Катер дістався від однієї пристані до іншої, рухаючись прямолінійно. 25 % шляху він рухався зі швидкістю 5 м/с, а решту — зі швидкістю 10 м/с. Визначте середню швидкість руху катера на всьому шляху.

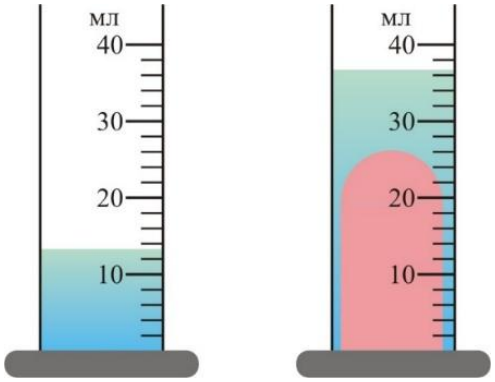
(269) Комаха відпочиває, сидячи на кінці хвилинної стрілки баштового годинника. Відпочинок триває 1 урок, тобто 45 хвилин. Увесь цей урок учень з вікна спостерігає за рухом комахи відносно циферблата. У скільки разів шлях комахи перевищує модуль її переміщення?

(270) Юний дослідник-дев'ятикласник, нудьгуючи під час карантину, «удосконалив» конструкцію свого цілком справного механічного годинника. Після цього рух хвилинної стрілки став у чотири рази швидшим, а рух секундної — втричі повільнішим. Через які найменші проміжки часу секундна стрілка наздоганяє хвилинну?

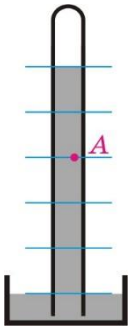
(271) Колесо автомобіля котиться асфальтом без проковзування. У момент 1 вісь колеса проходить через точку O_1, а точка M колеса торкається поверхні дороги (див. рисунок нижче). У момент 2 вісь колеса проходить через точку O_2. Де розташована точка M колеса в момент 2?



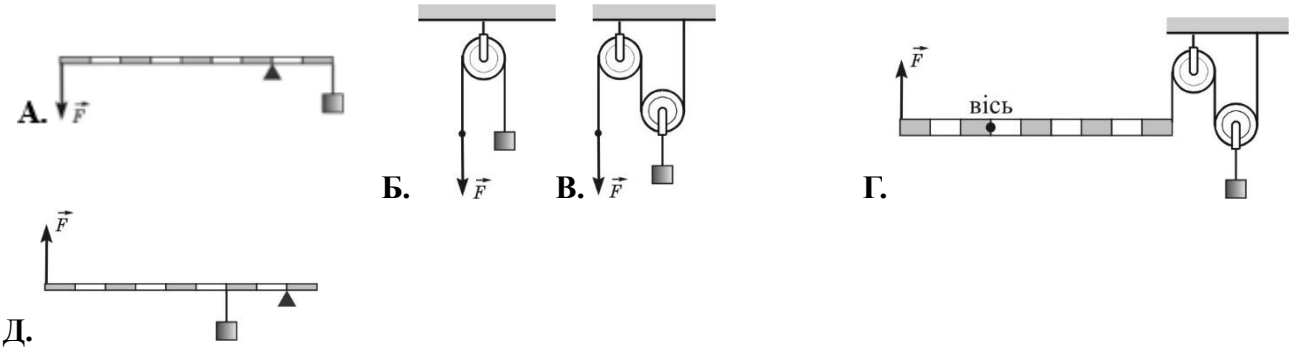
(272) Відомо, що суцільну деталь виготовлено з якогось із наведених сплавів: α з густиною 4400 кг/м^3, β — 5000 кг/м^3, χ — 5200 кг/м^3, δ — 5600 кг/м^3. Діти зважили деталь на дуже точних електронних вагах і отримали значення маси 120 г. Потім для вимірювання об'єму вони занурили цю деталь у мірний циліндр з водою. Результати показано на рисунку справа. З якого сплаву може бути виготовлена деталь?



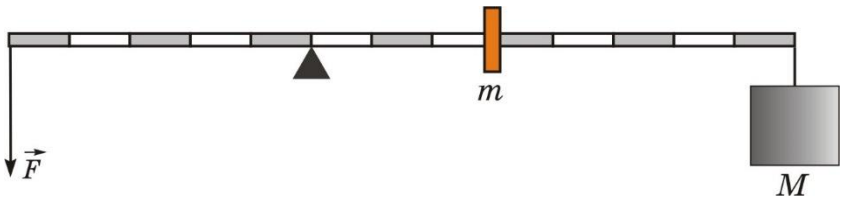
(273) Значення атмосферного тиску, яке показує ртутний барометр (див. рисунок справа), дорівнює 750 мм рт. ст. Визначте тиск ртуті в точці A.



(274) Який із показаних на схематичних рисунках механізмів дає найбільший виграш у силі під час піднімання вантажу, якщо всі механізми можна вважати ідеальними (див. рис. нижче)?



(275) Щоб підняти вантаж масою $M = 30$ кг за допомогою напрямленої вниз сили $\vec{F}$, застосовують важіль. Стрижень цього важеля дуже легкий, але на ньому закріплене металеве кільце масою $m = 20$ кг (див. рисунок нижче). Визначте коефіцієнт корисної дії такого механізму. Відповідь наведіть у *відсотках*, за необхідності округліть до цілого числа.



(276) Кулька масою 8 г плаває в гасі, занурившись наполовину. Яка сила Архімеда діє на цю кульку, коли вона плаває у воді? Густина води дорівнює 1000 кг/м^3, густина гасу — 800 кг/м^3. Уважайте, що прискорення вільного падіння дорівнює 10 м/с^2 (10 Н/кг).

(277) Однакові металеві кульки знаходяться у воді, температуру якої підтримують на рівні 95 °C. Одну кульку перемістили в калориметр з холодною водою. Внаслідок цього температура в калориметрі збільшилася від 20 до 35 °C. Визначте температуру в калориметрі після перенесення туди ще двох кульок (з точністю до 1 °C). Теплоємність калориметра та теплообмін з навколишнім середовищем не враховуйте.

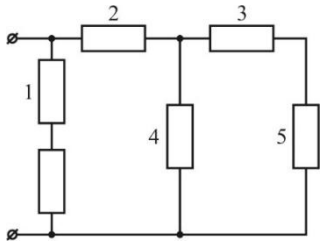
(278) У калориметр, що містив лід за температури 0 °C, впустили водяну пару масою 1 г за температури 100 °C. Після встановлення теплової рівноваги калориметр містив тільки рідину за температури 100 °C. Нехтуючи тепловими втратами та теплоємністю калориметра, визначте початкову масу льоду. Питома теплота плавлення льоду становить 336 кДж/кг, питома теплоємність води — 4,2 кДж/(кг · °C), питома теплота пароутворення води — 2268 кДж/кг.

(279) Резистор опором 30 Ом з'єднали послідовно з реостатом та приєднали до джерела струму, напруга на полюсах якого є незмінною. Опір реостата можна змінювати від нуля до 60 Ом. У скільки разів при цьому змінюватиметься потужність струму в резисторі?

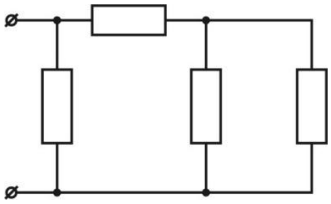
(280) Учень розрізав провідник опором 40 Ом на 5 однакових частин. Один із відрізків провідника він тут же загубив, а решту скрутив разом, отримавши джгут із провідників. Визначте опір цього джгута.

(281) Правильний трикутник ABC зібрали з трьох провідників. Відношення питомих опорів провідників $\rho_{AB} : \rho_{BC} : \rho_{AC} = 1 : 4 : 9$, відношення площ перерізу проводів $S_{AB} : S_{BC} : S_{AC} = 1 : 2 : 3$. До точок A і C підключено напругу. Визначте відношення загального опору трикутника до опору відрізка AB.

(282) У колі, схему якого наведено на рисунку нижче, всі резистори однакові. Визначте номер резистора, сила струму в якому найбільша.



(283) Щоб замінити резистор опором 30 Ом, який вийшов з ладу, застосували показане на рисунку нижче з'єднання чотирьох однакових резисторів. Визначте опір кожного з цих резисторів.



(284) Дівчина спостерігає зображення свого обличчя в плоскому вертикальному дзеркалі, відстань до якого дорівнює 2 м. Потім вона робить крок до дзеркала, перемістившись на 50 см ближче до нього. Як змінився розмір зображення її обличчя в дзеркалі?

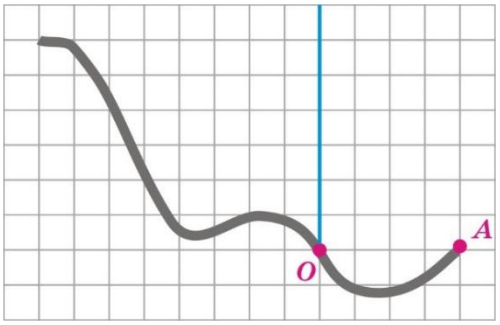
(285) Предмет розташований на головній оптичній осі лінзи, а екран — по інший бік від лінзи. Відстань між предметом і екраном дорівнює 75 см. На екрані спостерігається зображення предмета, збільшене в 1,5 разу. Визначте фокусну відстань лінзи.

(286) Скільки заряджених частинок містить позитивний іон $^{7}_{3}\mathrm{Li}^{+}$?

Задачі запропонували:

Горєв В.М., Гельфгат І.М.

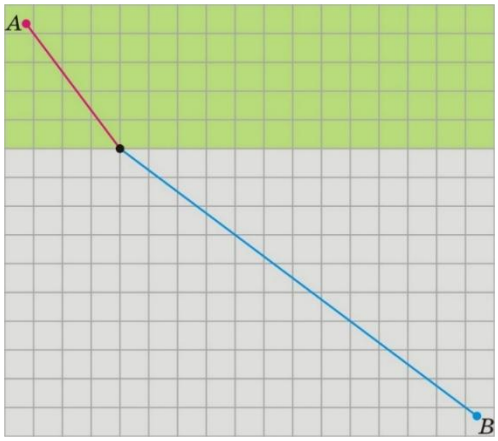
2 етап



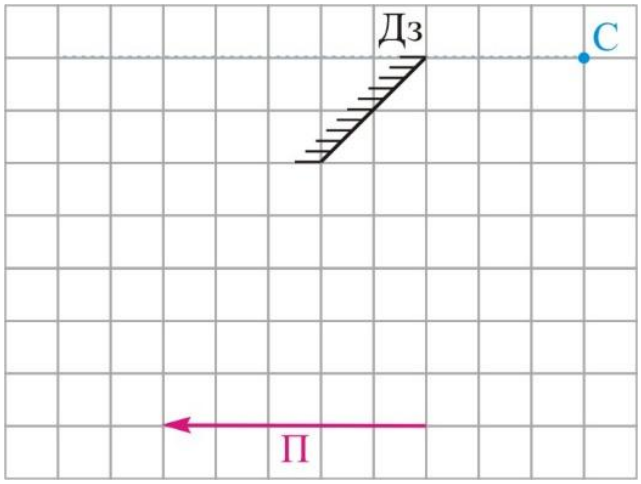
(287) Легкий жорсткий дріт (див. рисунок справа) підвісили на мотузці в точці O та застосовують як важіль для піднімання вантажу, прикріпленого в точці A. Який

максимальний виграш у силі можна отримати за допомогою такого важеля?

(288) Робітнику потрібно щодня багато разів переміщатися між точками A (на зеленому газоні) і B (на асфальтованій площадці). Асфальтом робітник рухається в N разів швидше, ніж газоном. Перепробувавши багато варіантів, він знайшов «найшвидшу» траєкторію руху, що відповідає найменшому витраченому часу. Цю траєкторію показано на рисунку нижче. Визначте, якому інтервалу належить значення N. *Нагадаємо, що світло завжди «вибирає» саме таку траєкторію між двома точками, яка потребує найменшого часу.*

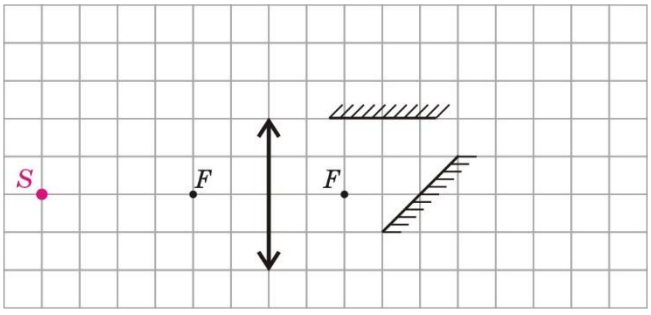


(289) Яку частку предмета П (червоної стрілки) може побачити спостерігач С у показаному на рисунку нижче дзеркалі?



(290) Над центром циркової арени на висоті 8 м розміщене горизонтальне кругле дзеркало діаметром 1 м. Під час циркового номеру вмикають тільки маленьку потужну лампу, розташовану серед місць для глядачів на висоті 6 м над ареною. Світло від лампи потрапляє на арену тільки після відбиття від дзеркала. Визначте форму та розміри освітленої плями на арені.

(291) Світна точка S розташована перед показаною на рисунку справа оптичною системою, що створює кілька зображень світної точки. Довжину бічної сторони кожної клітинки на рисунку нижче прийміть за одиницю. Якому інтервалу належить відстань



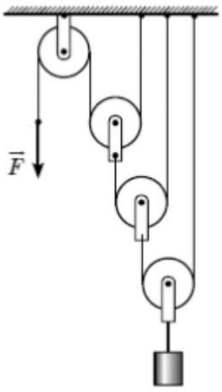
між точкою S та її найближчим зображенням?

(292) За допомогою лінзи отримали зображення предмета AB. На рисунку нижче це зображення показано штриховою лінією, а довжина бічної сторони кожної клітинки дорівнює 1 см. Оцініть відстань між точкою A та оптичним центром лінзи.



(293) З пункту A до пункту B виїхав «Запорожець» зі швидкістю 60 км/год. Через 40 хвилин слідом за ним виїхав «Ланос» зі швидкістю 90 км/год. Через 20 хвилин після виїзду «Ланоса» з пункту B до пункту A виїхав «Мерседес» зі швидкістю 120 км/год. Дорогою він зустрічається з двома першими автомобілями. За якої найбільшої довжини шляху між пунктами A і B «Мерседес» між цими зустрічами проїхав рівно 10 км? Відповідь наведіть у *кілометрах*, округліть до цілого числа. Запишіть відповідь тільки цифрами (не треба вводити одиниці відповідної величини).

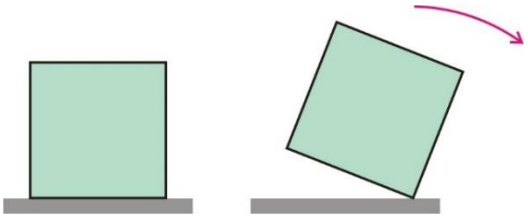
(294) Показану на рисунку нижче систему блоків застосовують для піднімання вантажу масою 18 кг. Тертя в осях блоків відсутнє. Визначте коефіцієнт корисної дії цього механізму, якщо маса кожного блоку становить 1 кг. Відповідь наведіть у *відсотках*, за необхідності округліть до цілого числа. Запишіть відповідь тільки цифрами (не треба вводити знак %).



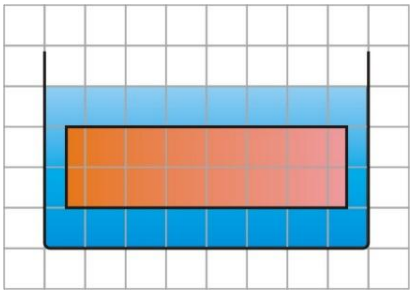
(295) У дуже спекотний день на стіл поставили дві однакові склянки, вщерть заповнені: перша — водою, а друга — водою, в якій плавають маленькі крижані кульки (їх маса становить 10 % від загальної маси вмісту склянки). Температура речовини в обох склянках дорівнює 0 °С. У першій склянці температура піднялася до 1 °С через 5 хв. Скільки часу знадобилося для такого самого нагрівання речовини в другій склянці? Відповідь наведіть у *хвилинах*, округліть до цілого числа. Запишіть відповідь тільки цифрами (не треба вводити одиниці відповідної величини). Питома теплота плавлення льоду дорівнює 336 кДж/кг, питома теплоємність води — 4,2 кДж/(кг · °С).

(296) Спекотного дня, коли дме теплий вітер, в тіні підвісили дві тонкостінні кубічні посудини, вщерть заповнені льодом за температури 0 °С. Місткість першої посудини 250 мл, місткість другої — 1 л. У першій посудині весь лід розтанув через 20 хв. Визначте, через який час розтанув увесь лід у другій посудині. Відповідь наведіть у *хвилинах*, округліть до цілого числа. Запишіть відповідь тільки цифрами (не треба вводити одиниці відповідної величини).

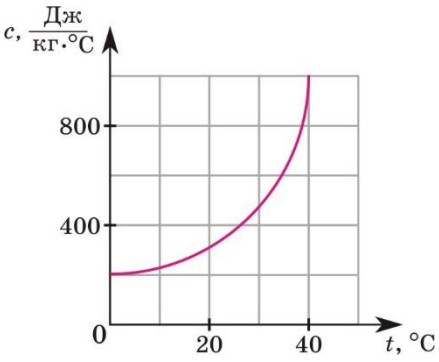
(297) Для маленької дитини зробили сучасну легку іграшку: суцільний кубик масою 750 г з довжиною ребра 50 см. Дитина переміщає цей кубик по підлозі, кантуючи його, тобто повертаючи навколо ребра (див. рисунок нижче). Яку найменшу роботу має виконати дитина для одного такого перевертання? Уважайте, що прискорення вільного падіння дорівнює 10 м/с^2 (10 Н/кг), а густина повітря — 1,2 кг/м^3. Відповідь наведіть у *міліджоулях*, округліть до числа, кратного 10. Запишіть відповідь тільки цифрами (не треба вводити одиниці відповідної величини).



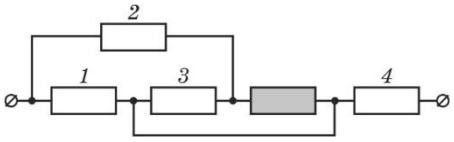
(298) У циліндричній посудині утримують в рідині циліндр, густина якого втричі менша за густину рідини, див. рисунок справа (бічна сторона кожної клітинки дорівнює 10 см, основа циліндра горизонтальна). Площа основи циліндра дорівнює ¾ площі основи посудини. Циліндр відпускають без початкової швидкості. Його рух уважатимемо поступальним. Визначте, на яку максимальну висоту над поверхнею рідини підстрибнула б нижня основа циліндра, якби на циліндр діяли *тільки* сила тяжіння та сила Архімеда. Відповідь наведіть у *міліметрах*, округліть до цілого числа. Запишіть відповідь тільки цифрами (не треба вводити одиниці відповідної величини).



(299) На рисунку справа зображено залежність питомої теплоємності деякої речовини від температури, дану криву можна вважати чвертю кола. Знайдіть, скільки треба надати теплоти даній речовині масою 400 г, щоб нагріти її від 0 до 40 °C. Агрегатний стан речовини в даному інтервалі не змінюється. Відповідь наведіть у *кілоджоулях*, округліть до цілого числа. Запишіть відповідь тільки цифрами (не треба вводити одиниці відповідної величини).



(300) Учень склав ділянку кола (див. рисунок нижче) з однакових резисторів. Потужність струму в резисторі, виділеному сірим кольором, дорівнює 30 мВт. Визначте потужність струму в резисторі 4. Відповідь наведіть у *міліватах*, округліть до цілого числа. Запишіть відповідь тільки цифрами (не треба вводити одиниці відповідної величини).



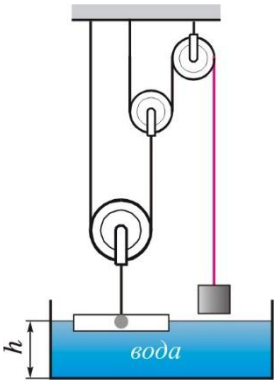
(301) Точкове джерело світла розташоване на висоті 2 м від підлоги. На скільки відсотків збільшиться освітленість найближчої до джерела точки підлоги, якщо на 1 м вище від джерела розмістити горизонтальне плоске дзеркало? Відповідь наведіть у *відсотках*, округліть до цілого числа. Запишіть відповідь тільки цифрами (не треба вводити знак %).

Задачі запропонували:

Горєв В.М., Гельфгат І.М.

Фінал

(302) У тонку крижану пластинку масою 270 г вморожена алюмінієва кулька масою 81 г. Ця пластинка через систему блоків урівноважує тягарець масою 10 г (див. рисунок). Блоки та нитки невагомі, тертя відсутнє, температура всієї показаної на рисунку системи 0 °С. Площа поверхні води набагато більша за площу пластинки, глибина води $h = 40$ см, довжина червоної ділянки нитки більша за 1,6 м. У воді вмикають електронагрівник потужністю 330 Вт, що спричиняє повільний рух тягарця. Визначте приблизно середню швидкість переміщення тягарця між моментами початку та закінчення його руху. Опір під час руху в воді не враховуйте. Густини води, льоду та алюмінію дорівнюють відповідно 1000, 900 і 2700 кг/м^3; питома теплота плавлення льоду становить 330 кДж/кг.



(303) Головна оптична вісь лінзи з оптичною силою 2 дптр горизонтальна. Траєкторія руху світної кульки К, що вільно падає, проходить через точку головної оптичної осі на відстані 2 м від лінзи. Одночасно з цим гладенькою похилою площиною П з'їжджає маленька плоска пластина. Протягом певного часу лінза та розташоване за нею плоске дзеркало (див. рисунок) утворюють на поверхні пластини, як на екрані, зображення кульки. Визначте кути нахилу площини дзеркала та похилої площини до горизонту. ***Підказка.*** Тіло зісковзує з гладенької похилої площини з прискоренням $g\sin\alpha$, де α — кут нахилу площини до горизонту.



(304) Щоб доставити групу туристів з готелю до музею, треба подолати відстань 18 км. Для цього можна скористатися автобусом, швидкість руху якого по місцевих дорогах дорівнює 45 км/год. Проте автобус вміщує тільки половину групи, до того ж має обмежений запас ходу через обмежену кількість пального. Туристи можуть пересуватися пішки зі швидкістю 5 км/год. Визначте мінімальний час t доставки всієї групи, якщо запас ходу s автобусу становить: а) 12 км; б) 30 км; в) 45 км. Накресліть графік залежності $t(s)$. Час посадки та висадки пасажирів не враховуйте.

(305) Однакові циліндри виготовлено зі сплаву з великим питомим опором. На боковій поверхні кожного циліндра зроблено чотири симетричні плоскі «зрізи», паралельні осі циліндра; їх поверхню посріблено для кращого електричного контакту (див. рис. 1). Електричний опір циліндра між контактами A і C виявився рівним r (див. рис. 2). Опір між контактами A і B виявився таким самим (під час останнього вимірювання контакти C і D були з'єднані провідниками з нехтовно малим опором, на рис. 3, 4 такі провідники показані як зелені лінії).

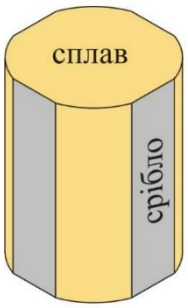


Рис. 1

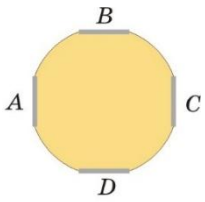


Рис. 2

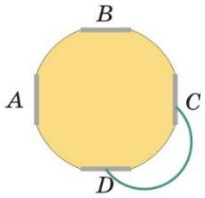


Рис. 3

З дев'яти циліндрів склали систему, показану на рис. 4, щільно притиснувши сусідні плоскі поверхні одну до одної, та приєднали цю систему до ідеального джерела струму з напругою U.

1) Визначте силу струму через джерело струму.

2) Яку напругу покаже ідеальний вольтметр, приєднаний до контактів A і B?

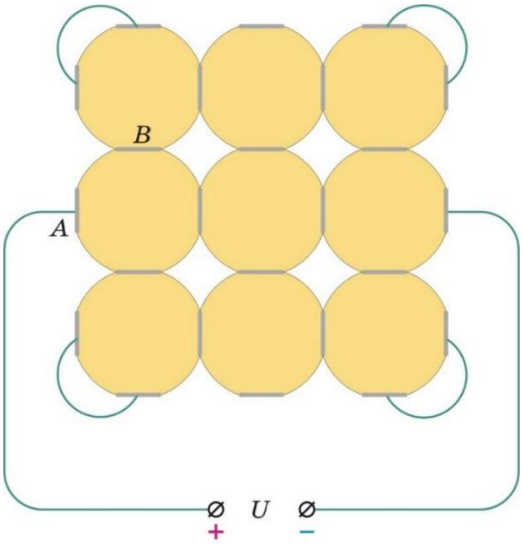


Рис. 4

Задачі запропонували:

Гельфгат І.М., Горєв В.М.

10 клас

1 етап

(306) Промінь світла падає на прозору кулю. Оберіть правильно показаний подальший хід променя (Рис.1).

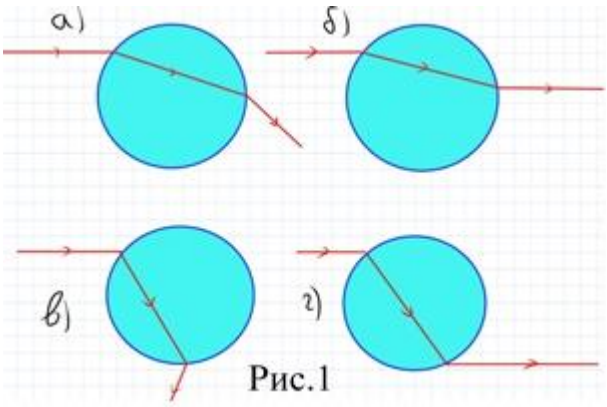


Рис.1

(307) Дві «секції моста», шарнірно закріплені на «берегах», симетрично опираються одна об одну (Рис.2). Знайдіть силу взаємодії між секціями в місці дотику. Відстань між «берегами» 40 м, висота моста 10 м, маса кожної секції 20 тонн.

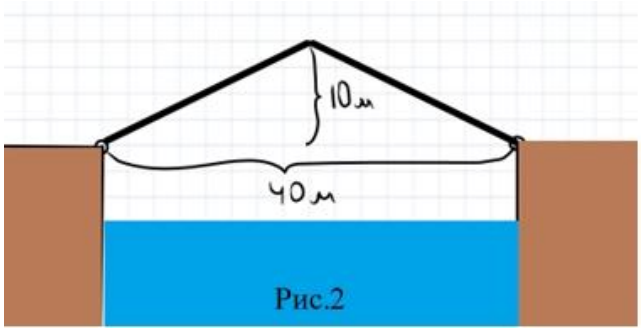


Рис.2

(308) Стрілець з лука випустив стрілу під кутом 30 градусів до горизонту зі швидкістю 50 м/с. Знайдіть швидкість стріли через 2 с руху. Опором повітря знехтувати. Вважати, що прискорення вільного падіння 10 м/с^2. Виберіть відповідь, найближчу до правильної.

(309) Два автомобіля одночасно стартували наввипередки по шоссе – перший з прискоренням 5 м/с^2, другий – з прискоренням 10 м/с^2, обидва досягли швидкості 40 м/с і далі рухалися з постійною швидкістю. В якому порядку і з яким інтервалом часу автомобілі прийдуть до фінішу?

(310) Відро з водою стоїть но підлозі ліфту. У воді плаває дерев'яний брусок. Ліфт починає рухатися вгору з прискоренням 4 м/с^2. Яка частина бруска буде занурена у воду? Густина деревини 500 кг/м^3, густина води 1000 кг/м^3, прискорення вільного падіння 10 м/с^2.

(311) Люба йде до школи і розраховує встигнути якраз на початок першого уроку. Пройшовши дві третини шляху, вона згадує, що залишила вдома телефон. У скільки разів їй треба збільшити свою швидкість, щоб добігти додому, швидко взяти телефон, і якраз встигнути на перший урок?

(312) За допомогою системи з нерухомого та рухомого блоків рівномірно підіймають вантаж. Визначити у скільки разів маса вантажу має перевищувати масу рухомого блоку, щоб ККД механізму дорівнював 80%. Силами тертя знехтувати.

(313) Гірлянда складається з послідовно з'єднаних 10 електричних лампочок, підключених до джерела сталої напруги. При нормальній роботі кожна лампочка споживає 1Вт. Одна з лампочок перегоріла і її замінили шматком дроту. Яку тепер потужність споживатиме кожна лампочка? Опір лампочок вважати постійним. Виберіть відповідь, найближчу до правильної.

(314) 4 березня 2021 р. прототип міжпланетного багаторазового корабля Starship SN10 приватної космічної компанія SpaceX Ілона Маска (найбагатшої людини світу і фізика за базовою освітою) піднявся на висоту 10 км, потім, економлячи паливо, розвернувся у горизонтальне положення і з вимкненими двигунами спустився майже до поверхні Землі, де знову увімкнув двигуни, розвернувся й сів поряд зі стартовим майданчиком. На фото (Рис.3) з інтервалом в 1 с показані старт і фініш. У скільки разів середня швидкість переміщення корабля під час старту була більшою за відповідну швидкість під час приземлення? Примітка: порівнювати середні швидкості на відрізку між поверхнею і червоним пунктиром.


Рис.3

(315) На головній оптичній осі тонкої лінзи з оптичною силою 3 дптр на відстані 1 м від лінзи знаходиться світлодіод. Не зміщуючи оптичний центр, лінзу повертають навколо її діаметру на кут 60 градусів. На скільки переміститься зображення світлодіоду у лінзі?

(316) На Рис. 4 зображена гранецентрована кубічна ґратка (атоми розташовані у вершинах кубу та центрах граней). Уявіть собі матеріал з такою ґраткою, що складається із двох сортів атомів: золота Au197 – у вершинах куба, та срібла Ag108 – у центрах граней. Відстань між двома атомами золота 0,5 нм. Визначити густину такого матеріалу у SI.

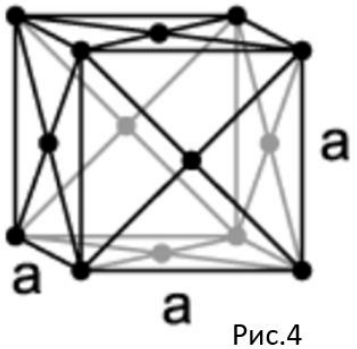
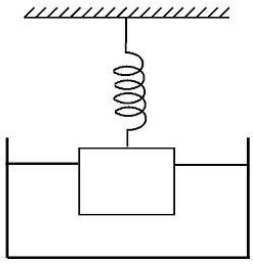


Рис.4

1 а.о.м.=1,66·10^{-27} кг.

(317) У посудині з водою плаває шматок льоду $M = 5$ кг. Зверху на нього діє пружина стиснута на $\Delta L = 2$ см з коефіцієнтом жорсткості $k = 100$ Н/м (Рис.5). Знайти в який бік і на скільки зміниться рівень води в посудині після того, як весь лід розтане. Площа перетину дна посудини 200 см^2, прискорення вільного падіння 10 м/с^2.


Рис. 5

(318) Яка маса міді виділиться на катоді за час 200 с під час електролізу мідного купоросу ($CuSO_4$), якщо протягом перших 100 с сила струму рівномірно зростає від нуля до 6 А, а протягом наступних 100 с вона рівномірно зменшується до 2 А? Електрохімічний еквівалент двовалентної міді 0,33 мг/Кл.

(319) Яка сила струму протікає в провіднику AB (Рис. 6), якщо $R_1 = R_4 = 10$ Ом, а $R_2 = R_3 = 40$ Ом? До кола прикладено напругу 80 В. Опором провідника AB можна знехтувати.

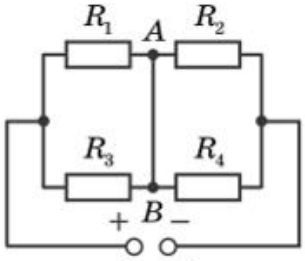


Рис.6

(320) Три однакові позитивні заряди розташовані на площині і мають координати $(0,0), (a, 0), \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. Визначте координати точки, де треба розташувати четвертий заряд, щоб він знаходився у рівновазі.

Задачі запропонували:

306, 307, 309 Триліс О.В., 310, 318, 319 Ненашев І.Ю., 311 Даценко І.П., 312, 316, 320 Катц А.М., 314, 315 Орлянський О.Ю., 317 Карасик В.Д.

2 етап



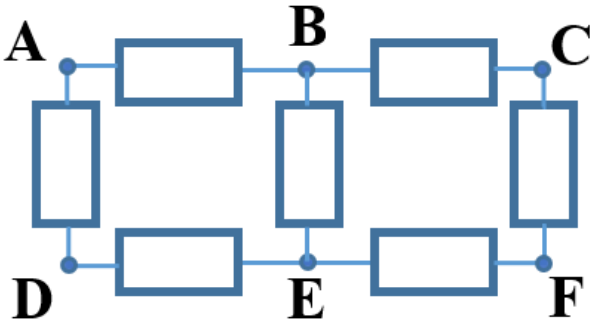
(321) На фото креативний стіл на ланцюгах. Він відрегульований так, що ланцюги однакової довжини натягнуті однаково. Знайдіть максимальну силу натягу ланцюга, якщо мінімальна дорівнює 50 Н, маса верхньої частини столу 12 кг, а маса довгого ланцюга 800 г (короткий удвічі коротший). Вважати, що прискорення вільного падіння 10 м/с^2.

(322) Стрілець з лука випустив дві стріли з проміжком 4 с під кутом 60° до горизонту зі швидкістю 50 м/с. Знайдіть найменшу відстань між стрілами у повітрі. Опір повітря не враховувати.

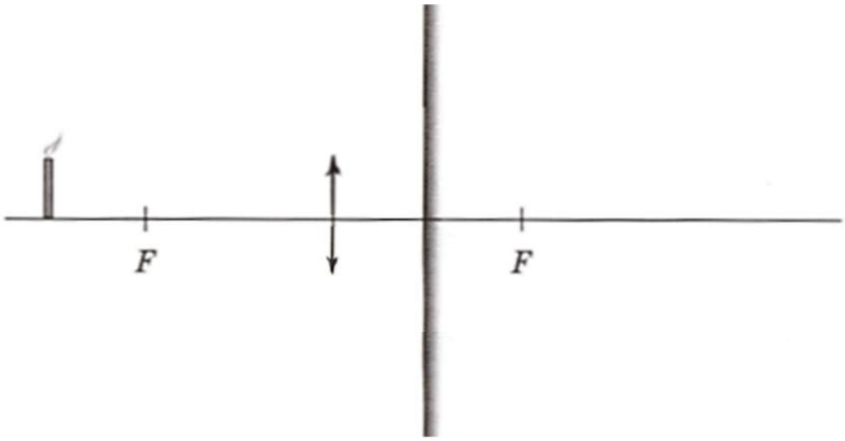
(323) Ійон Тихий, герой циклу фантастичних оповідань Станіслава Лема розповідає про викинуту з космічного корабля банку консервів: «замість того, щоб полетіти далі, не хотіла залишати корабель і кружляла навколо нього, як штучний супутник, призводячи до регулярних (з інтервалом в 11 хвилин і 4 секунди) короткотривалих затемнень сонця». Для колової орбіти консервів розрахуйте, якою може бути найменша середня густина космічного корабля Ійона Тихого. Вважайте, що корабель мав форму кулі, а гравітаційна стала $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

(324) У кров людини ввели розчин солі NaCl, що містив 250 мільярдів атомів радіоактивного ізотопу натрію, період піврозпаду якого дорівнює 15 год. Через 30 год після цього активність проби крові об'ємом 1 мл становила 175 Бк. Знайдіть за цими даними об'єм крові в тілі людини (**в літрах**). Відповідь **округліть до десятих**. Виведенням солі з крові людини за цей проміжок часу знехтуйте.

(325) Є 6 точок, з'єднаних однаковими резисторами, як показано на схемі. Розгляньте усі можливі варіанти опорів електричного кола між указаними точками і знайдіть відношення максимального значення опору до мінімального значення.



(326) Оптична система складається з невеликої збиральної лінзи з фокусною відстанню $F = 12$ см і великого плоского дзеркала, що розташоване паралельно лінзі на відстані 6 см від неї. Перед лінзою на відстані 18 см горить свічка. Знайдіть відстань між зображеннями свічки, які утворює ця оптична система.



(327) Дошка лежить на гладенькому льоду. Людина починає бігти дошкою від одного до іншого її кінця. Якої максимальної горизонтальної швидкості відносно льоду може досягти людина? Маса людини 100 кг, маса дошки 50 кг, довжина дошки 6 м, коефіцієнт тертя між підошвами взуття людини і дошкою 0,4. Вважати, що прискорення вільного падіння 10 м/с^2.



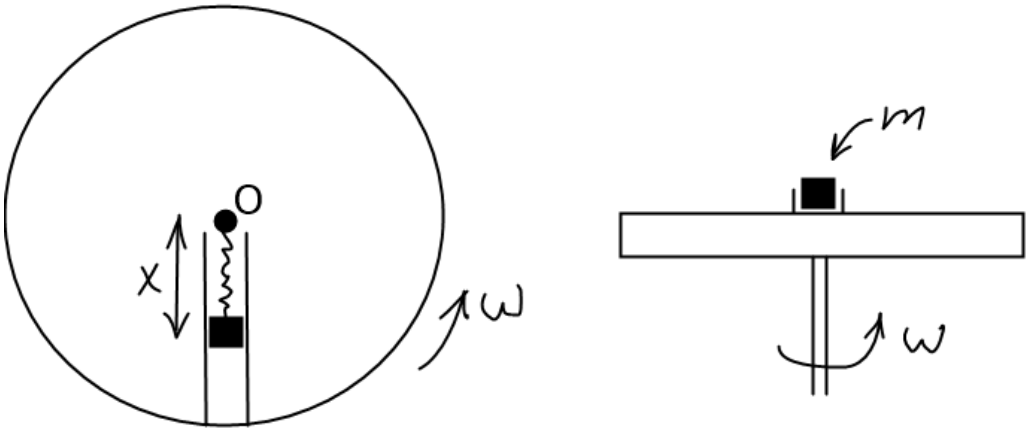
(328) 4 березня 2021 р. прототип міжпланетного багаторазового корабля Starship SN10 компанії SpaceX піднявся на висоту 10 км, потім, економлячи паливо, розвернувся у горизонтальне положення і з вимкненими двигунами спустився майже до поверхні Землі. На фото з інтервалом в 1 с показаний спуск корабля поблизу земної поверхні. За заявами Ілона Маска кораблі Starship призначені для колонізації Марса. Знайдіть швидкість аналогічного спуску такого ж корабля в марсіанській атмосфері поблизу поверхні. Прискорення вільного падіння на Марсі 3,7 м/с^2 (на Землі 9,8 м/с^2), густину марсіанської атмосфери можна вважати у 80 разів меншою за земну. Діаметр корпусу SN10

дорівнює 9 метрів. Виміри можна робити лінійкою або використати якийсь додаток. Можливу зміну режиму руху у зв'язку з переходом через звуковий бар'єр не враховуйте.

(329) Диск старого електролічильника має діаметр 8 см. Під час споживання енергії він обертається. З якою швидкістю буде рухатись червона мітка на краю диску, якщо квартира споживатиме максимальну потужність, на яку розрахований лічильник? Увага: на електролічильнику виробник припустився помилки у розмірності енергії. Має бути: 1 кВт·год = 1250 обертів диску.



(330) Горизонтально розташований диск обертається зі сталою кутовою швидкістю. Від центру O вздовж радіусу обертаються разом з диском дві паралельні гладенькі направляючі, між якими може рухатись шайба, з'єднана пружиною з центром диску. Маса шайби $m = 0{,}1$ кг, коефіцієнт тертя між шайбою і диском $\mu = 0{,}3$, коефіцієнт жорсткості пружини $k = 100$ Н/м, частота обертання диску $\nu = 5{,}0$ $с^{-1}$. Шайба знаходиться на відстані X від центру диску і відносно нього не рухається. Знайти можливі значення X. У відповіді вказати **довжину інтервалу** можливих значень X **у см, з точністю до цілих. Розмірність не записуйте, тільки число.** Вважати, що прискорення вільного падіння 10 м/$с^2$.



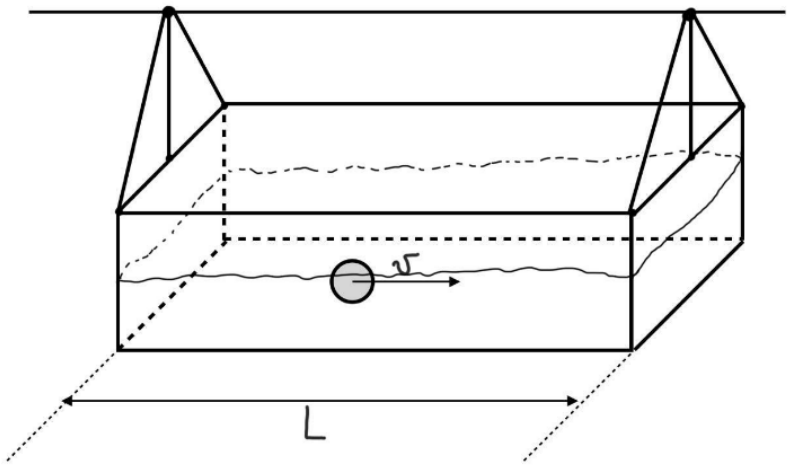
Задачі запропонували:

321, 328, 329 Орлянський О.Ю., 322, 323 Триліс О.В., 324, 325 Даценко І.П., 326, 327 Ненашев І.Ю., 330 Карасик В.Д.

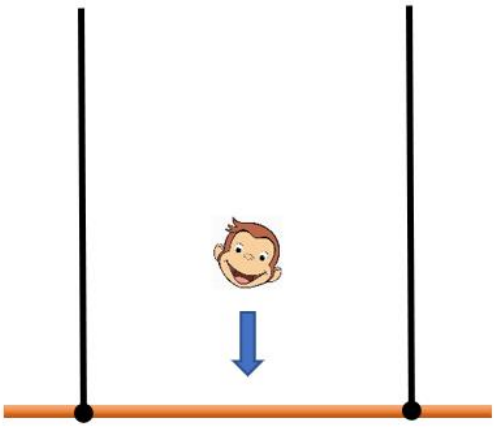
Фінал

(331) «Кулька і коробка». Вздовж горизонтального стрижня, як по направляючий ковзає без тертя коробка масою m=90 г та довжиною L=27 см. Коробка частково занурена у рідину, а її задня та передня стінки перпендикулярні до стрижня. Посередині коробки знаходиться алюмінієва кулька такою ж масою, як і коробка m=90 г. Кулька без тертя може переміщуватися по дну коробки.

У початковий момент коробка не рухається, а кульці надають горизонтальну швидкість v=2,7 м/с, спрямовану вздовж стрижня. Вважаючи зіткнення кульки зі стінками абсолютно пружними, знайдіть на яку відстань ***S*** переміститься до зупинки коробка і скільки ударів ***n*** о стінки зробить кулька за цей час? З боку рідини на коробку діє пропорційна швидкості руху сила в'язкого тертя $F=kv$, де k=0,2 кг/с. Відстань S надати у м з точністю до десятих.



(332) «Мавпа на жердині». Легка жердина підвішена на двох однакових паралельних легких гумових стрічках. Мавпа забралася на середину жердини і трохи погойдалася.



1) Доведіть у загальному випадку, що період малих вертикальних коливань мавпи на жердині менший за період її малих горизонтальних погойдувань.

2) Занудьгувавши, мавпа перелізла на кінець жердини і зависла на ньому. Намалюйте можливі положення мавпи і жердини у новому стані рівноваги.

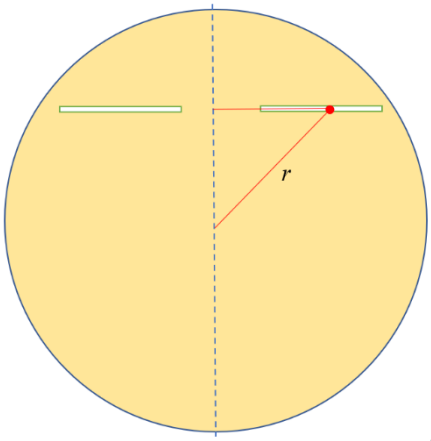
3) Визначте, яку найменшу роботу має виконати мавпа, щоб перебратися назад з кінця жердини на її середину, якщо довжина жердини $s = 3$ м, довжина кожної гумової стрічки до того як мавпа забралася на жердину $l = 2{,}5$ м, відстань між стрічками $d = 2$ м. Коли мавпа всілася посередині жердини, гумові стрічки видовжилися до $L = 3$ м кожна. Маса мавпи $m = 10$ кг.

(333) «Невидима геометрія». На блакитній горизонтальній поверхні дна басейну глибиною h лежить жовтий опуклий многокутник площею S і периметром p.

1) Знайдіть найменшу площу тонкого плоту, який слід розмістити на поверхні води над многокутником, щоб з повітря цей многокутник не можна було побачити.

2) Проілюструйте на конкретному випадку яку форму матиме такий пліт. Коефіцієнт заломлення води n. Хвиль на поверхні немає.

(334) «Астероїдне місто». Освоєння астероїдів задля корисних копалин – одна з найближчих амбітних комерційних задач, над якою вже активно працюють приватні компанії та навіть окремі країни. Уявіть, що у надрах астероїду, який можна вважати однорідною кулею, вирішили побудувати велике місто. Як зробити поверхню міста зручною, такою, щоб, незважаючи на кривизну астероїду, вона була пласкою з перпендикулярно спрямованою до себе силою тяжіння? Проаналізуйте, чи можна цього досягти на астероїді, що обертається? Якщо так, проведіть розрахунки, намалюйте площину розташування такого міста, визначте прискорення вільного падіння g у ньому та кутову швидкість ω обертання астероїду. За якою траєкторією рухатиметься запущене вздовж цієї поверхні тіло, якщо знехтувати силами тертя та опору?



В аргументації «так, це можливо» чи «ні, не можливо» використайте розрахунки та стандартні позначення: густина речовини астероїду ρ, відстань до центру r, гравітаційна стала G. ***Підказка:*** *з міркувань симетрії пропонується розглянути перпендикулярне до осі обертання розташування міста і сили, що діють на деяке тіло в ньому (див. рис.).*

(335) «Зіткнення». Свинцеву і пластилінову кульки одночасно кидають з поверхні землі під кутами α_1 і α_2 до горизонту і швидкостями v_{01} і v_{02}, відповідно.

1) Запишіть необхідну умову їхнього зіткнення (у термінах α_1, α_2, v_{01}, v_{02}).

2) За якого відношення маси свинцевої кульки m_1 до маси пластилінової m_2 їхня температура після непружного зіткнення збільшиться на максимальне значення Δt ? Чому воно дорівнюватиме? Питомі теплоємності кульок c_1 і c_2, їхні початкові температури однакові. Опором повітря знехтувати.

(336) «Циліндричний опір». У технологічному процесі провідник вкривають захисною циліндричною оболонкою і занурюють у розплавлений метал. Струми розходяться від провідника крізь оболонку у радіальних напрямах (Рис.1). За нормою захисна циліндрична оболонка повинна мати зовнішній радіус $r_1 = 10$ см, але з часом, знаходячись в агресивному середовищі, вона зменшується. Коли її зовнішній радіус суттєво зменшився, циліндр відшліфували до $r_2 = 5$ см і вкрили поверх шаром товщиною d більш стійкої речовини з удвічі меншим питомим опором (Рис.2).

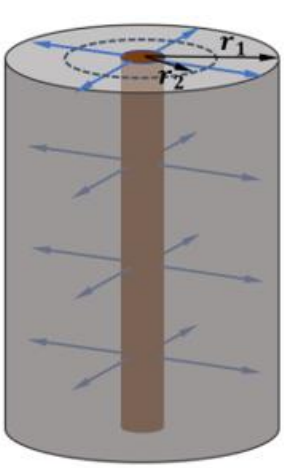


Рис.1

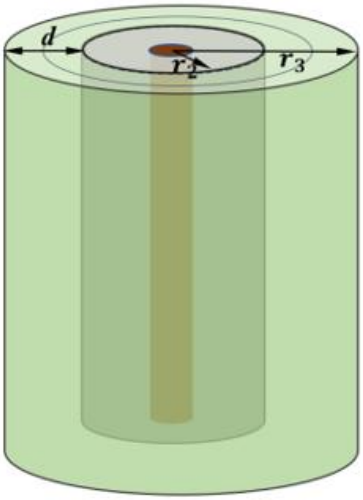


Рис.2

1) Виходячи з міркувань розмірності та геометрії, запропонуйте загальну формулу залежності опору R такої циліндричної оболонки від її питомого опору ρ та геометричних розмірів: висоти h, внутрішнього та зовнішнього радіусів r_0 та r.

2) Розрахуйте товщину d нової оболонки, за якої загальний опір відновленого циліндру (Рис. 2) буде таким самим, як у нового нормативного (Рис.1). Опором центрального мідного стержня знехтуйте.

(337) «Майже експеримент». Для визначення атмосферного тиску відкриту з обох кінців скляну трубку занурюють у воду у вертикальному положенні після чого верхній кінець перекривають і виймають трубку з води (вода частково залишається у трубці).

1) На скільки слід занурити нижній кінець у воду, щоб з найменшою відносною похибкою визначити атмосферний тиск?

2) Опишіть, як слід проводити вимірювання, та спрогнозуйте найменше значення цієї похибки за нормальних зовнішніх умов.

Вимірювання проводяться лінійкою з міліметровими поділками. Довжина трубки 1 м. Капілярними явищами для цієї трубки можна знехтувати.

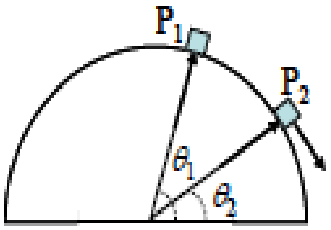
Задачі запропонували:

331 Карасик В.Д., 332-337 Орлянський О.Ю.

11 клас

1 етап

(338) Маленьке тіло зісковзує з точки P1 зі стану спокою по поверхні гладкого круглого циліндра, як показано на рис. У точці P2 тіло відривається від циліндру. Рівняння, що зв'язує кути θ_1 і θ_2 має вигляд:

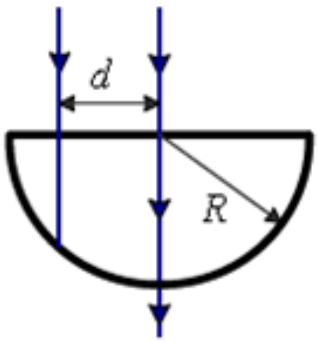


А. $\sin\theta_1 = \frac{3}{2}\sin\theta_2$;
Б. $\sin\theta_1 = \frac{2}{3}\cos\theta_2$;
В. $\sin\theta_1 = \cos\theta_2$;
Г. $\cos\theta_1 = \sin\theta_2$;
Д. $\cos\theta_1 = \frac{3}{2}\sin\theta_2$.
Е. Немає правильної відповіді.

(339) На тонку пластинку товщиною h=0.1 мкм, яка знаходиться в повітрі та має коефіцієнт заломлення n=1.5, перпендикулярно до її поверхні падає плаский пучок лінійно поляризованого світла зі спектром в діапазоні від 110 до 190 нм. Випромінювання з якою довжиною хвилі майже не будуть відбиватись від пластинки?

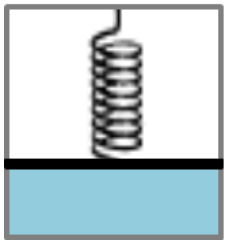
А) 150 нм
Б) 120 нм
В) 180 нм
Г) 166,(6) нм
Д) 133,(3) нм
Е. Немає правильної відповіді.

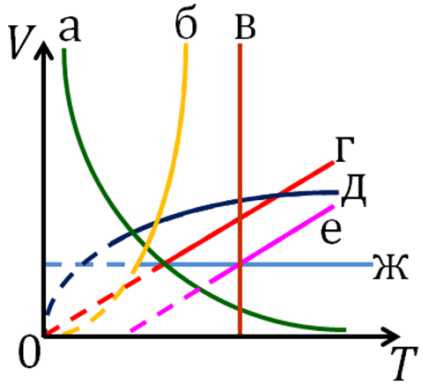
(340) Уявіть собі планету радіуса R. З якої висоти від поверхні потрібно відпустити тіло без початкової швидкості, щоб воно, падаючи вертикально вниз в безповітряному просторі, при ударі о поверхню мало швидкість, рівну першої космічної для цієї планети? Обертанням планети знехтувати.



(341) Вузький пучок світла падає на напівкруглий скляний циліндр радіусом R, як показано на рис. Світло може вийти з циліндра, коли промінь падає в центр. Коли промінь паралельно зміщують на відстань d від центральної лінії, світло не виходить з нижньої поверхні циліндра. Знайдіть коефіцієнт заломлення скла. Циліндр знаходиться у повітрі.

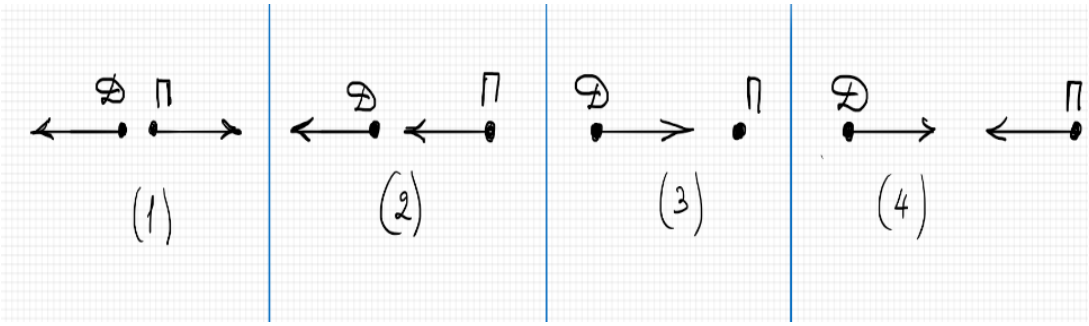
(342) До верхньої грані вертикального високого циліндра прикріплено ідеальну пружину жорсткістю K з тонким поршнем, маса якого дорівнює M (див. рисунок). Поршень щільно прилягає до стінок циліндра, а довжина пружини у недеформованому стані дорівнює висоті циліндра, тертя відсутнє. У нижній частині циліндра знаходиться ідеальний газ, у верхній частині – вакуум. Визначте основну термодинамічну діаграму, яка відповідає поведінці даної системи.



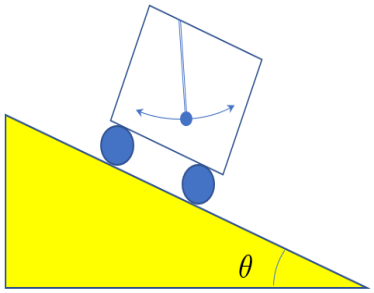


(343) На малюнку показані чотири ситуації, в яких джерело звуку Д і приймач П або рухаються, або нерухомі. Стрілками показані напрямки руху. Швидкості однакові. Приймач в третьому

випадку нерухомий. Розташуйте ситуації в порядку зростання частоти, що реєструється приймачем.



(344) Звичайний математичний маятник довжини L, підвішений до стелі масивної візка, що скачується по похилій площині з кутом α в основі. Знайти період коливань маятника, якщо візок з'їжає без проковзування. Силою тертя кочення і опором повітря знехтувати.



(345) На первинну обмотку ідеального трансформатора з числом витків n_1 подається вхідна змінна напруга. До вторинної обмотки з числом витків n_2 підключено конденсатор. На скільки фаза струму у вторинній обмотці відрізняється від фази вхідної напруги у первинній.

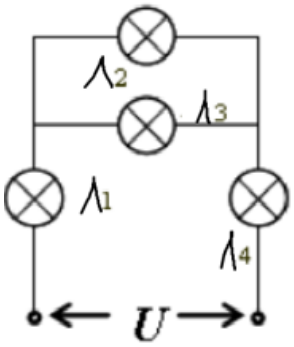
(346) Котушку із нехтовно малим опором та кількістю витків n_1 вносять в постійне магнітне поле B_1. При цьому струм через кільце стає рівним I_1. Після цього котушку вносять в постійне магнітне поле B_2. Яким стане струм в котушці?

(347) З ідеальним газом проводять ряд послідовних термодинамічних процесів, що утворюють прямий цикл з двох адіабат та двох ізотерм. Відомо, що робота газу при ізотермічному розширенні дорівнює 10 Дж, а при ізотермічному стисканні -8 Дж. Знайти ККД цього циклу.

(348) Два конденсатора ємністю 50 мФ кожен заряджені до напруги 20 В та 60 В відповідно з'єднують один з одним різнойменними обкладинками. Яка кількість енергії виділиться в системі внаслідок такого з'єднання?

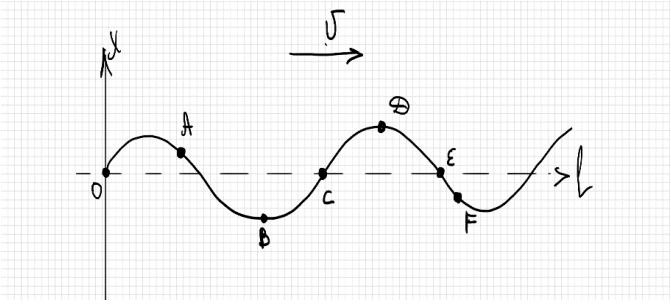
(349) Генератор змінного струму складається з дротяної котушки, що має 9 витків. Кожен виток має площу 0.04 м^2. Котушка обертається в однорідному магнітному полі індукцією 0.20 Тл зі сталою частотою 50 Гц. Знайдіть, що покаже вольтметр змінного струму, що під'єднаний до виводів цієї котушки.

(350) Ядро тритію (маса $3m_0$ заряд q_0) знаходиться у стані спокою далеко від інших тіл. На яку найменшу відстань може наблизитися до цього ядра протон (маса m_0 заряд q_0), який на дуже великій відстані має швидкість Vo, спрямовану точнісінько на ядро тритію? Силу тяжіння, силу опору повітря, випромінення не враховувати. Вважати, що частинки рухаються виключно по одній самій прямій. Зрозуміло, що відповідь має вигляд: $J*к*q_0^2/m_0*V_0^2$. Оберіть правильне значення коефіцієнта J.

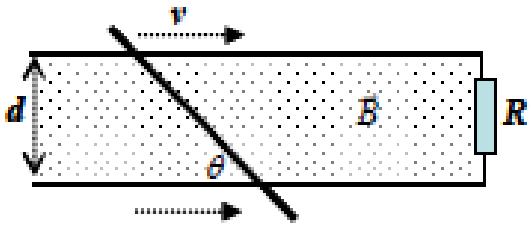


(351) До мережі під'єднані 4 лампи. На лампі 1 та 2 написано 200В 25Вт, на лампах 3 та 4: 200В 50Вт. Розташувати лампи за зменшенням їх яскравості. Уважати, що опір ламп майже не залежить від сили струму.

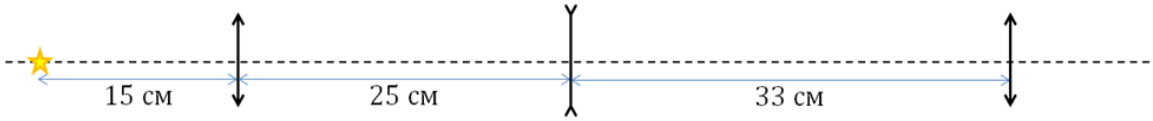
(352) На малюнку зроблене миттєве фото бігучої хвилі. Відстань між точками О та Е дорівнює 9,42 м. Відомо, що т. Д повертається у положення рівноваги за 0,5с проходячи відстань 0,5м. Знайти, у скільки разів швидкість самої хвилі більша за максимальну швидкість точок хвилі. π=3.14.



(353) Металевий стрижень, з опором r на одиницю довжини, рухається у вертикальному магнітом поле B, зі швидкістю v, по двом горизонтальним, паралельним, ідеальним, металевим рейках. Кінці рейок з'єднані з резистором R. Відстань між рейками дорівнює d. Стрижень підтримується під кутом θ до рейок. Знайдіть зовнішню силу, необхідну для підтримки руху стрижня з цією швидкістю під цим кутом.



(354) Визначте на якій відстані від першої лінзи утвориться зображення точкового предмета у оптичній системі , показаній на рисунку. Фокусні відстані збиральних лінз дорівнюють 10 см, оптична сила розсіювальної лінзи дорівнює -16 Дптр. Інші розміри системи показано на рисунку.



(355) Два однакових постійних магніти, що мають циліндричну форму (радіус торця 2см), створюють поблизу своїх торців майже однорідне магнітне поле індукції $B_0 = 0.1$Тл, в початковому положенні, магніти з'єднані торцями. Яку силу треба прикласти до кожного з магнітів, перпендикулярно до торців, щоб їх роз'єднати?

(356) Коливальний контур складається з конденсатора C, котушки індуктивності L та активного опору R. Знайдіть відношення енергії магнітного поля котушки до енергії електричного поля конденсатора в той момент, коли струм у контурі максимальний.

Задачі запропонували:

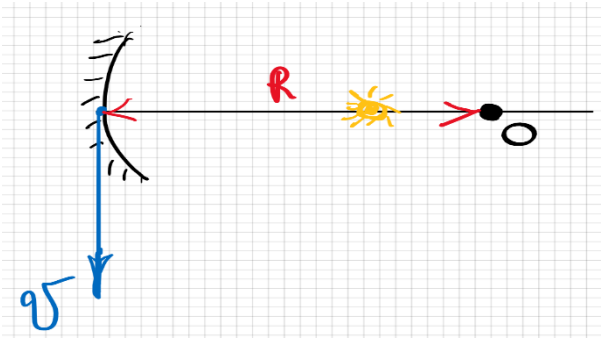
Пашко М.І., Олійник А.О.

2 етап

(357) Археологи знайшли доісторичний дерев'яний артефакт і вирішили оцінити його вік. Уявіть, що для цієї задачі вони застосували радіовуглецевий метод. Через наявність космічної та земної радіації серед стабільних атомів вуглецю-12 завжди є дуже невелика кількість радіоактивних атомів вуглецю-14. Коли дерево зрубують, то накопичення у ньому вуглецю-14 припиняється. Активність 1 г живого дерева дорівнює 800 розпадів на годину. Період напіврозпаду вуглецю-14 дорівнює приблизно 5700 років. Оцініть вік артефакту, якщо виміряна археологами активність знизилась у 8 разів. Відповідь надайте у цілій кількості років.

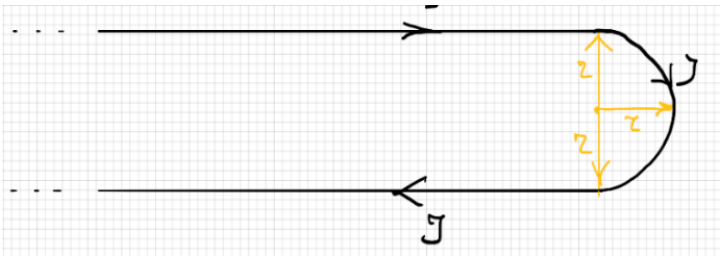
(358) Космічний корабель маси M починає прискорюватися зі сталим прискоренням a значно поодаль від інших тіл. Визначити, яку силу тяги розвиває двигун корабля у той момент, коли його швидкість менша швидкості світла у вакуумі у $\sqrt{2}$ разів? Швидкість та прискорення корабля завжди залишаються спрямованими в одному напрямку.

(359) На головній оптичній вісі маленького увігнутого дзеркала із великим радіусом кривизни R знаходиться невелике за розмірами джерело світла на відстані 3R/4 від дзеркала. Знайти відношення швидкості зображення до швидкості дзеркала в момент часу, коли дзеркало почало рухатись перпендикулярно до головної оптичної вісі зі швидкістю V.



(360) Рідкий гелій-4 при температурі 4 К знаходиться в закритій посудині. Об'єм, який займають пари гелію, дорівнює 1 л. Ці пари швидко відкачують з посудини, після чого температура гелію падає на 0.01 К. Знайдіть тиск насичених парів гелію, вважаючи, що він майже не змінюється при пониженні температури. Питома теплоємність гелію c=5 кДж/(кг*К), теплота випаровування L=20 кДж/кг, маса гелію в рідкому стані до відкачування парів m=200 г.

(361) Металевий дріт зі струмом I має форму як показано на рисунку. Який вираз для магнітного поля в центрі напівкільця є правильним?

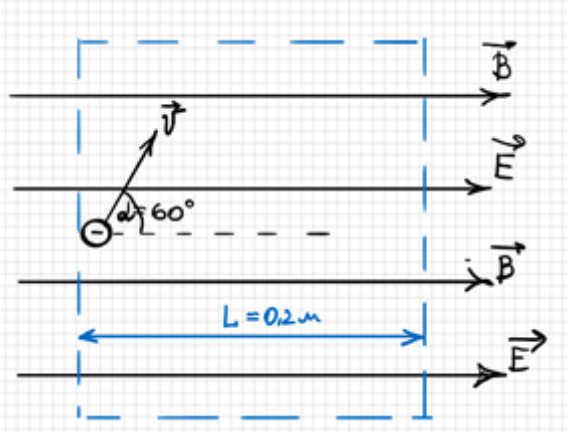


(362) У велику посудину налили рідину густини ρ та коефіцієнтом поверхневого натягу σ. Визначити, на скільки рідина підіймається по стінці посудини в наслідок змочування, якщо кут змочування дорівнює 30 градусів? Зрозуміло, що відповідь має вигляд $J^*\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$, де J – безрозмірний коефіцієнт. У відповіді оберіть значення цього коефіцієнту.

(363) Горизонтальний циліндричний сосуд довжиною L заповнений насиченою водяною парою у кількості ν молів і розділений навпіл вертикальним важким поршнем маси M. Посудину підтримують при постійній температурі T. Визначити період малих коливань поршня. Тертям

поршня о посудину знехтувати. З розмірності зрозуміло, що відповідь має вигляд: $J*\pi L\sqrt{\frac{M}{\nu RT}}$, де J-безрозмірний коефіцієнт. Знайти значення цього коефіцієнту.

(364) Електрон рухається у просторі, у якому індукція магнітного поля B=30 мкТл, співпадає за напрямком з напруженістю електричного поля E=1 мВ/м. Прямокутник на рисунку відображає поперечний переріз області, в яку цей електрон потрапляє зі швидкістю 12.56 км/с під кутом 60° до напрямку силових ліній. Довжина області магнітного поля складає 0.2 м. Знайдіть число обертів, зроблених електроном за час знаходження в області спостереження. Маса електрона $9*10^{-31}$ кг, заряд $1,6*10^{-19}$ Кл.



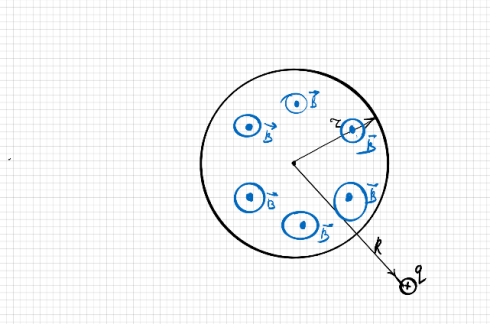
(365) Коефіцієнт відновлення між тенісним м'ячиком і ракеткою визначається як γ = v2/v1, де v1-швидкість м'яча, який підлітає, v2 - швидкість м'яча після відскоку від нерухомої ракетки. Тенісний м'яч падає з висоти H на нерухому ракетку і, після відбиття піднімається на висоту 0.81 H. Тенісист використовує ракетку, щоб вдарити по тенісному м'ячу, який наближається зі швидкістю 40 м/с і рухає її зі швидкістю 20 м/с назустріч м'ячу. Яка швидкість м'яча після удару в м/с? (Вважайте, що маса ракетки набагато більше, ніж маса м'яча).

(366) Плоска хвиля нормально падає на чотири рівномірно рознесені, однакові вузькі щілини S1, S2, S3 і S4. Точка X знаходиться на майже однаковій дуже великій відстані від щілин. Коли відкриті тільки щілини S2 і S3, інтенсивність хвилі в точці X досягає максимуму A. Коли всі чотири щілини відкриті, то яка буде інтенсивність в точці X?



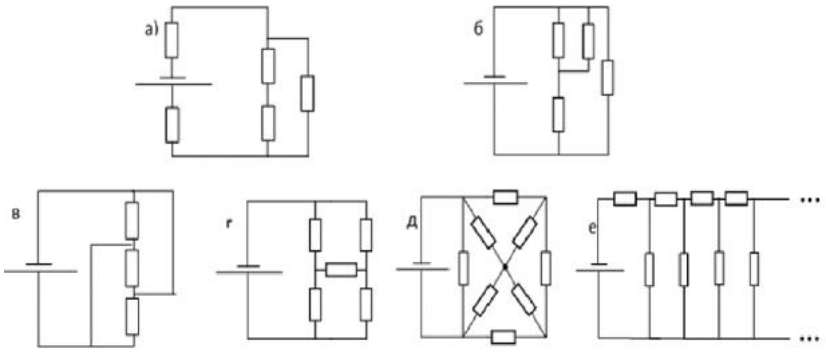
(367) У акваріумі з водою (коефіцієнт заломлення n=4/3) нерухомо завмерла рибка. Вона дивиться вертикально вгору на лампу, що висить над нею в повітрі і випромінює монохроматичне світло на довжині хвилі 500 нм. Визначити, на скільки Гц зміниться частота світла, який сприймає рибка, якщо підвищувати рівень води в акваріумі зі швидкістю V=1,5 мм/с?

(368) На малюнку показана область радіусу r, де може бути ввімкнуте магнітне поле індукції деякого значення B0, перпендикулярне до площини малюнку. На відстані R >r від центру цієї області розташований протон ($1,6*10^{-27}$ кг, $1,6*10^{-19}$ Кл). Якщо дуже швидко ввімкнути таке однорідне магнітне поле, то протон отримає швидкість $V=2*10^6$ м/с.

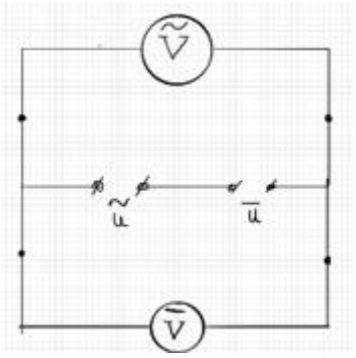


Якщо замість частинки розташувати навколо магнітного поля тонке металеве кільце радіусу R і вимкнути поле за законом $B=B_0(1-at)$, де a=0,5 1/с , то кільце нагріється. Знайти зміну температури кільця внаслідок вимикання поля. Питома теплоємність матеріалу кільця 100 Дж/кг*К, густина 4000 кг/м^3 та питомий опір $5*10^{-10}$ Ом*м.

(369) На малюнках запропоновані схеми з'єднання однакових резисторів опором R. Всі схеми підключені до джерел з однаковими ЕРС і внутрішніми опорами R. У якій схемі на зовнішньому колі виділяється найбільша теплова потужність?



(370) У вашому розпорядженні є джерело сталої напруги 5 В та джерело змінної синусоїдальної напруги великої частоти 12 В. А також ідеальний вольтметр постійної напруги та ідеальний тепловий вольтметр змінної напруги. Джерела під'єднують послідовно один до одного і вимірюють напругу на кінцях (див. рис.). Знайти різницю показів вольтметрів.

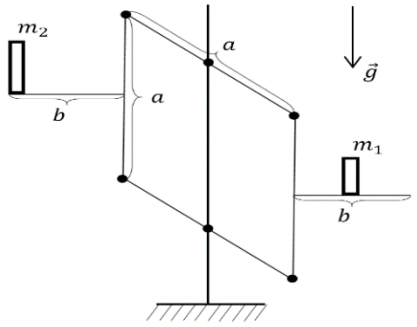


(371) Коливальний контур складається з конденсатора C=0,005 Ф, котушки індуктивності L=0,2 Гн та активного опору R=2 Ом. У деякий момент часу струм у контурі був максимальний і рівний 20 А. Знайти, яка кількість енергії виділиться у системі підчас повного затухання коливань після цього моменту.

(372) При дуже низьких температурах деякі розріджені атомарні гази можуть перейти в особливий квантовий стан, так званий «п’ятий стан речовини». «Температура переходу» T, при якій можна отримати дану речовину, залежить лише від сталої Больцмана k, сталої Планка h, густини речовини ρ та маси атомів m, з яких складається дана речовина. Нагадаємо, що стала Планка - це коефіцієнт пропорційності між енергією фотона та його частотою: Wф=hν. Якщо ми зменшимо густину ρ цієї дивної речовини в 8 разів, то як зміниться «температура переходу» T?

(373) Об'єкт маси M прикріплений до пружини. Повертаюча сила пружини описується законом Fx=-k*X^3, де X-зміщення тіла від положення рівноваги. Період таких коливань залежить від амплітуди коливань. Якщо початковий зсув тіла дорівнює A, то період коливань дорівнює T, яким буде період коливань, якщо початкове зміщення дорівнює 2A?

(374) Вантаж якої маси потрібно поставити на ліву планку в крайнє ліве положення щоб система знаходилась у рівновазі? Вантаж на правій планці (масою 6 кг) стоїть на відстані b/2=0.5 м. Довжина обох планок b=1 м, довжина сторони шарнірного ромбу a=4 м. Менший внутрішній кут ромбу на $\alpha = 30^0$. Розмірами вантажів знехтувати.



(375) Якщо відпустити дві заряджені частинки з однаковими масами та позитивними зарядами q1 та q2, які початково знаходяться на відстані L одна від одної, то відстань між ними подвоїться через час t. Через який час подвоїться відстань між частинками, якщо початкова відстань між ними буде 4L?

Задачі запропонували:

368 Пашко М.І., Маслечко А.М., 357-367, 369-375 Пашко М.І., Олійник А.О.

Фінал

(376) «Розминка-солянка».

1. «Хвильовий тиск». Відомо, що жорстке електромагнітне випромінювання (наприклад, рентгенівське) може проходити крізь шар металу. Нехай плоска лінійно поляризована електромагнітна хвиля падає нормально (Рис.1) на закріплену нерухомо металеву пластинку товщиною **h** (**h** набагато більше довжини хвилі) з питомим опором $\rho_{ел}$ та викликає в ній появу електричних струмів. Амплітудне значення напруженості електричного поля дорівнює **E**, а магнітної індукції **B**. Нехтуючи відбиванням енергії, крайовими ефектами та вторинним випромінюванням струмів, та вважаючи затухання хвилі невеликим, визначте **середній тиск** з боку електромагнітної хвилі на пластинку.

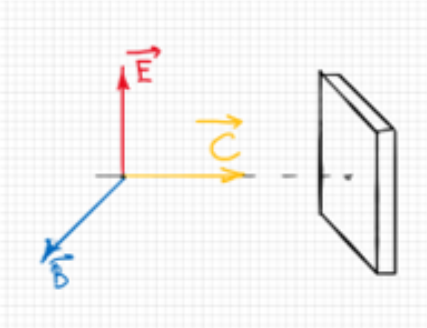


Рис.1

2. «Магнітний годинник». Стрілки циферблата годинника та його **о**бід виконано з металевого дроту з однакового матеріалу. Хвилинна та годинна стрілки мають однакову довжину $L = 9{,}00$ см, що є радіусом циферблату, рухаються плавно (без ривків) і дотикаються до обода. Усі контакти ідеальні. На годинній стрілці міститься маленька лампочка нехтовно малого опору, яка світитися, якщо струм, що проходить через неї, перевищує 0,9 А, і гасне, якщо струм стає меншим, ніж 0,9 А. **Покажіть вид графіку** (вкажіть на ньому характерні значення часу) залежності сили струму у лампочці від часу протягом доби, починаючи від опівночі, якщо годинник помістити в однорідне магнітне поле індукцією $B = 480$ мТл, силові лінії якого перпендикулярні площині годинника (Рис. 2). Опір одиниці довжини дроту, з якого виготовлені стрілки та обід, $\lambda = 1{,}57 * 10^{-5}$ Ом/м. Визначте, **скільки часу** світитиметься лампочка протягом доби. Вважайте $\pi = 3{,}14$.

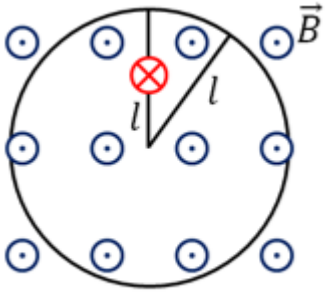


Рис.2.

3. «Вгору по стінці». Деякі рідини здатні підійматись по стінкам посудин значно вище, ніж це дозволяє їх коефіцієнт поверхневого натягу. Оцінити цей ефект можна, розглянувши взаємодію між атомами рідини та атомами стінки посудини. Для моделювання взаємодії одного атому стінки із атомом рідини добре підходить формула Ленарда-Джонса: $U(r) = \frac{\alpha}{r^{12}} - \frac{\beta}{r^6}$, де $U(r)$ – функція залежності енергії взаємодії від відстані між атомами, $\alpha = 53 * 10^{-139}$ Дж$*$ м^{12}, $\beta = 0.73 * 10^{-80}$ Дж$*$ м^6. g=9.8 м/с^2.

Вважати, що енергія взаємодії атома рідини зі стінкою набагато більше за енергію його взаємодії з іншими атомами рідини. Для зручності, враховувати взаємодію лише найближчих атомів. Маса атому рідини m=$66 * 10^{-27}$ кг. **Оцініть**, якої висоти зможе дістатися хоч якась частина рідини.

Оцініть, який коефіцієнт поверхневого натягу має мати рідина, щоб її меніск доходив до такої висоти. Проаналізуйте відповідь на адекватність. Така оцінка буде непогано працювати для дуже багатьох рідин. **Вкажіть** можливі причини того, чому, наприклад, для звичайної води не

спостерігається такої її поведінки при контакті зі стінкою посудин, в яких вона зберігається. Коефіцієнт поверхневого натягу води за температури 20 ^{0}C дорівнює 73 мН/м.

(377) «Фотони-електрони».

1. Проходження світла через зони з різними показниками заломлення є достатньо відомою оптичною задачею. Одним з її результатів є той факт, що при нормальному падінні променів на межу двох прозорих середовищ з різними показниками заломлення, частина світлової енергії відбивається. Енергетичний коефіцієнт відбивання світла при цьому може бути розрахований наступним чином:

$R = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2$, де $\boldsymbol{n_2, n_1}$ – показники заломлення середовищ по різні сторони від поверхні розділу. Цікаво, що аналогічну теорію можна застосувати й до потоку електронів.

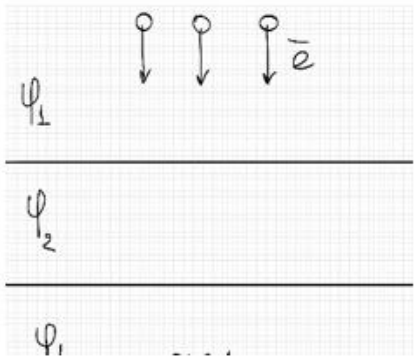


Рис.3.

Уявіть, що в нескінченій області з потенціалом $\boldsymbol{\varphi_1} = 16{,}58$ В знаходиться плоскопаралельна область кінцевої товщини з потенціалом $\boldsymbol{\varphi_2} = 15{,}00$ В (Рис. 3). Пучок електронів падає нормально на цю плоскопаралельну область зі швидкістю $V_1 = 10^6$ м/с. Визначте, **яка частина електронів пройде** крізь область з потенціалом φ_2. Вважайте, що ймовірність зіткнення електронів між собою вкрай мала, кулонівською взаємодією між електронами знехтуйте, інтерференційні ефекти не враховуйте. Заряд електрону $\boldsymbol{q_e} = 1{,}6 * 10^{-19}$ Кл, маса електрону $\boldsymbol{m} = 9{,}1 * 10^{-31}$ кг.

2. Відомо, що мінімальний розмір предметів, які можуть бути розрізненими за допомогою мікроскопу, має значення дуже близьке до довжини хвиль, що використовуються при дослідженнях. Наприклад, для оптичних мікроскопів значення цієї довжини хвилі можна для зручності вважати рівним 500 нм.

Для спостережень за більш дрібними об'єктами використовують електронний мікроскоп, який фокусує потоки електронів замість світлових пучків. Історично в основі квантової механіки лежало припущення, що будь-які частинки (навіть ті, що мають масу) можуть виявляти не тільки корпускулярні, але й хвильові властивості. Тобто, кожна частинка ототожнюється із квантом (порцією) енергії. Співвідношення між енергією та імпульсом такого кванту буде таким самим, як і для фотону.

Оцініть, у скільки разів **зміняться розміри** найдрібніших предметів, що можуть бути досліджені за допомогою мікроскопу, якщо замість оптичного мікроскопу використати електронний. Вважайте, що електрони в мікроскопі розганяються зі стану спокою напругою 150 В. Релятивістськими ефектами знехтувати. Стала Планка $\boldsymbol{h} = 6{,}63 * 10^{-34}$ Дж * с.

3. Під час дослідження розрідженого інертного газу його опромінюють електронним пучком, що прискорюється невеликою напругою, яку можна змінювати. У результаті цих досліджень було отримано графік залежності сили струму від прискорюючої напруги.

Графік являє собою послідовність максимумів та мінімумів струму (Рис.4). **Перший максимум** струму та **наступний** за ним **мінімум** струму спостерігалися за прискорюючих напруг $\boldsymbol{U_1} = 1{,}10$ В та $\boldsymbol{U_2} = 4{,}30$ В.

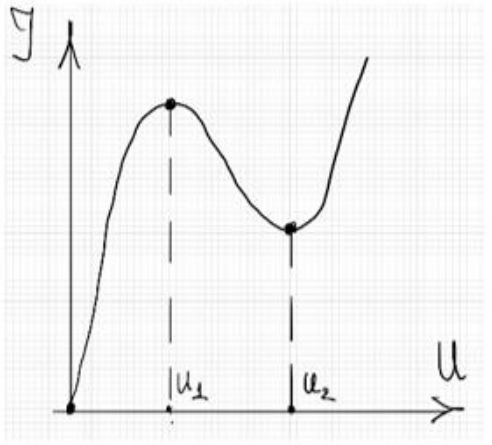


Рис.4.

Для пояснення цього ефекту можна застосувати наближену модель, в якій:

а) атом – це частина простору, з чіткими межами, потенціал якої різко відрізняється від потенціалу електростатичного поля зовні так, як показано на рис.5;

б) електрон – це хвиля, яка пролітає крізь атом, та якій притаманні хвильові властивості – наприклад інтерференція.

Поясніть наявність мінімумів та максимумів на рис.4 та **розрахуйте ефективний розмір** атомів **d** цього інертного газу та **значення потенціалу** атому φ_a.

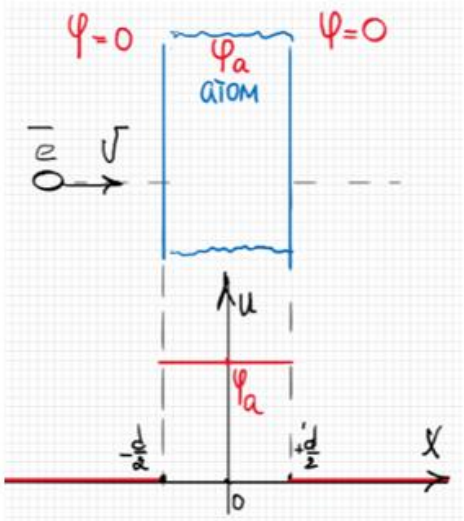


Рис.5

(378) «І знову гравітаційна лінза».

1. Фотон пролітає повз зорю з масою **M**. Головною особливістю гравітаційного поля, як відомо, є той факт, що вона надає однакового прискорення всім тілам. Як наслідок, гравітаційне поле здатне відхиляти світлові промені. Використовуючи цей факт та розмірні оцінки, **знайдіть кут α**, на якій повернеться напрям руху фотону.

Вважати, що:
- цей кут дуже малий;
- гравітація істотно впливає на траєкторію лише на ділянці максимального зближення фотону з зорею коли відстань між ними складає **R**;
- чисельний коефіцієнт біля виразу дорівнює **4**;
- швидкість фотона дорівнює швидкості світла у вакуумі **c**.

Примітки:

а) для спрощення траєкторію променю можна рисувати у вигляді ламаної;

б) якщо Вам не вдалося отримати вираз для кута α, то у наступних пунктах вважайте що він обернено пропорційний до відстані R з деяким відомим коефіцієнтом пропорційності Z.

2. Між спостерігачем **С** та зорею **З** на одній прямій знаходиться галактика масою М. Використовуючи результат з попереднього пункту, **поясніть** який вигляд буде мати зірка для цього спостерігача. Знайдіть **кутовий розмір** зображення цієї зірки? Усі кути вважати малими. Розміром галактики та зорі знехтувати. Відстань між спостерігачем та галактикою $\mathbf{L_1}$, зорею та галактикою $\mathbf{L_2}$ (рис. 6).

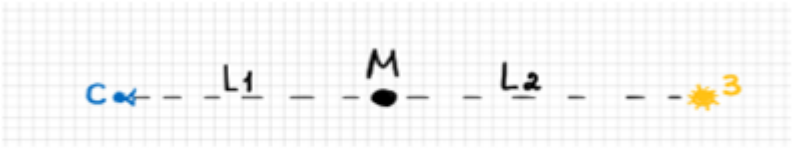


Рис.6

3. Припустимо, що для подальших розрахунків чисельне значення кутового розміру зображення з п. 2. дорівнює 1,73 кутових секунди. Нехай тепер спостерігач у тій самій точці рухається зі швидкістю **c/2** вздовж прямої С- З у напрямку галактики. **c**=$3\cdot10^8$ м/с – швидкість світла у вакуумі.

а) Визначити, яким тепер стане **кутовий розмір** зображення зорі для спостерігача в цьому випадку?

б) Знайти, у скільки разів внаслідок такого руху зміниться **довжина хвилі**, на яку припадає максимум випромінювання зорі?

в) Спробуйте **аргументовано охарактеризувати** зображення зорі, яким його побачить спостерігач, який буде ***віддалятися*** від галактики зі швидкістю, максимально наближеною до **c**?

Задачі запропонували:

376 (1, 3) Олійник А.О., 376 (2) Мєшков О.Ю., 377 Олійник А.О., Пашко М.І., 378 Пашко М.І.

Розв’язки

Розв’язки теоретичних завдань Інтернет-олімпіади 9 клас

(1) Щоб з гальванометра зробити вольтметр, слід приєднати до нього послідовно, додатковий опір максимальний за значенням. Але, якщо резистор 1 (Ом) дуже малий у порівнянні з резисторами 1000(Ом) немає сенсу кріпити його послідовно до гальванометра. Тоді, під’єднавши резистор паралельно до гальванометра, спробуємо послідовно до гальванометра «підставляти» резистори.

1) Досить легко прийти до висновку, що схема на малюнку з гальванометром, з’єднаним з резистором 2R=2000 (Ом) послідовно, та паралельно з резистором R_1=1(Ом), дозволяє виміряти максимальну напругу при послідовному з’єднанні з резистором 2R=2000 (Ом). Загальний струм після цього в добутку с опором резистора на виході схеми дає максимальну загальну напругу.

За законом Ома та властивістю послідовних та паралельних з’єднань:

$$U_{загальне} = U_{GR} + U_{2R}$$

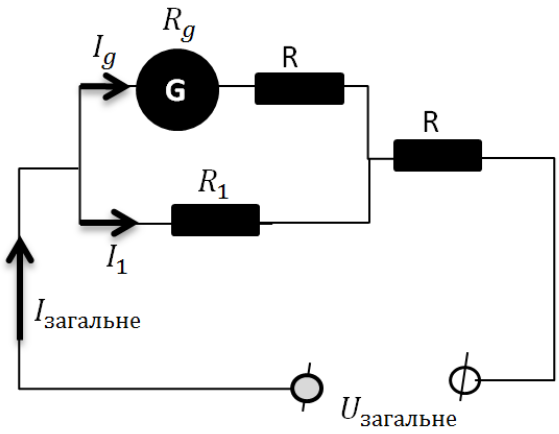
$$U_{GR} = I_g(R_g + 2R)$$

$$U_{2R} = I_{загальне} * 2R$$

$$I_{загальне} = I_g + I_1$$

$$I_1 = \frac{I_g(R_g + 2R)}{R_1}$$

$$U_{загальне} = \frac{I_g(R_1(R_g + 2R) + 2R(R_g + 2R + R_1))}{R_1}$$



$$U_{загальне} = 20\,021.0005\ В \approx 20\,021\ В$$

2) Розглянемо інші варіанти схеми. Наприклад, незбалансованої мостової, коли гальванометр знаходиться «посередині».

За законами Кирхгофа:

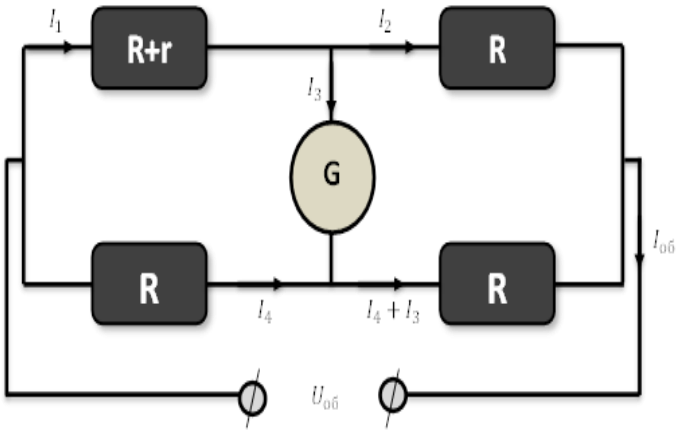
$$0 = I_1(R + r) + I_3R_g + I_4R$$

$$0 = I_1(R + r) + I_2R - I_4R - R(I_4 + I_3)$$

$$U_{загальне} = I_1(R + r) + I_2R$$

$$I_1 = I_2 + I_3$$

$$r = R_1$$

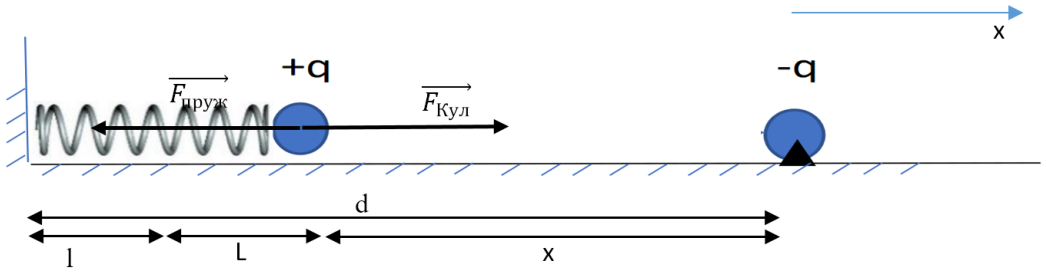


Розв’язуючи систему рівнянь отримуємо

$$U_{загальне} = \frac{I_g(4R^2 + 3RR_1 + 4RR_g + 2RR_g)}{R_1}$$

$$U_{загальне} = 20\,018\ В$$

(2)



1. Запишемо Закон Збереження Енергії:

$$W_{\text{системи до}} = W_{\text{системи після}} + Q$$

$$W_{\text{системи до}} = W_{\text{електрична до}} + W_{\text{потенційна до}}$$

$$W_{\text{електрична до}} = \frac{k_{\text{кул}} q_1 q_2}{d - l}$$

$$W_{\text{потенційна до}} = 0$$

(так як пружина в початковому положені не деформована)

$$W_{\text{системи після}} = W_{\text{електрична після}} + W_{\text{потенційна після}}$$

$$W_{\text{електрична після}} = \frac{k_{\text{кул}} q_1 q_2}{\text{x}}$$

$$W_{\text{потенційна після}} = \frac{k(d - l - x)^2}{2}$$

$$Q = -\frac{k(d - l - x)^2}{2} - \frac{k_{\text{кул}} q_1 q_2}{\text{x}} + \frac{k_{\text{кул}} q_1 q_2}{d - l}$$

d — відстань від негативно зарядженої кульки до стіни.

l — довжина пружини в не деформованому стані.

L — деформація пружини.

Q — збільшення внутрішньої енергії системи за час встановлення стану рівноваги між кульками.

X — відстань між кульками у положенні рівноваги, яку ми маємо ще знайти.

2. Розглянемо положення рівноваги. За законом Ньютона: $\overrightarrow{F_{пруж}} + \overrightarrow{F_{Кул}} = 0$

$F_{Кул} = F_{пруж}$ - на вісь x

$F_{Пруж} = kL$ – за законом Гука

$L = d - l - x$

$$F_{Кул} = \frac{k_{кул}|q_1||q_2|}{x^2}$$

Тоді, маємо рівняння $x = d - l - \frac{k_{кул}|q_1||q_2|}{kx^2}$

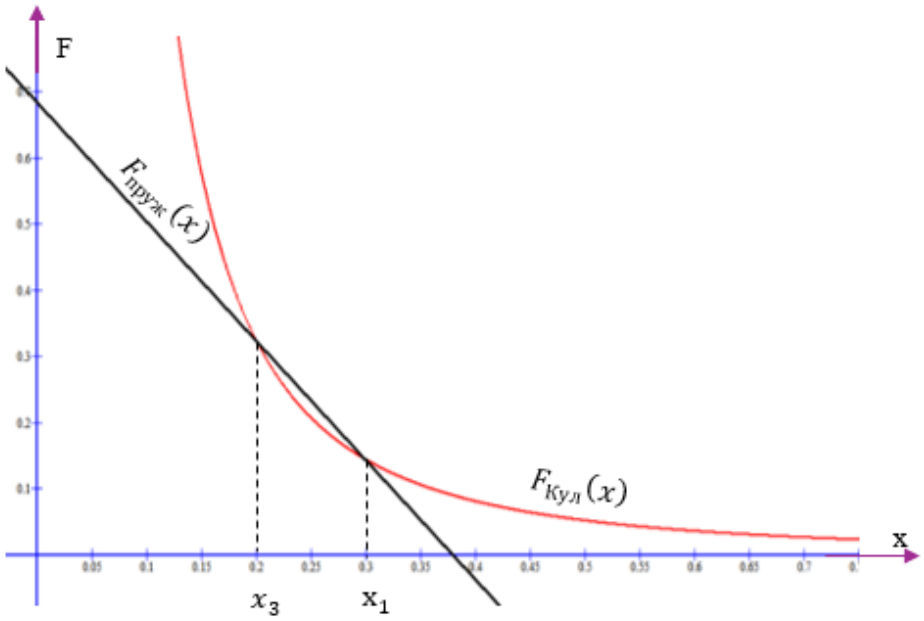
Як бачимо, так як дане рівняння є рівнянням 3-ої степені, вони має три корені, знайти які можна багатьма способами. Можна, наприклад, розв'язати його методом послідовних наближень (ітерацій) і отримаєм наступні корені:

$x_1 = 0.3$м. $x_2 = -0.12$м. $x_3 = 0.2$м.

Відстань між кульками може бути як і x_1 так і x_3(корінь x_2 – відкидуємо, так як відстань не є від′ємною). Тому проаналізуємо обидва положення на стійку/нестійку рівновагу. Для цього, схематично накреслимо графік $F_{\text{Кул}}(x)$ та $F_{\text{пруж}}(x)$, та позначимо на ньому положення x_1 та x_3.

Розглянемо положення x_3, при невеликому збільшенні x, сила пружності стає більшою за силу Кулонівської взаємодії, і рівнодійна буде направлена вліво. Тоді при збільшенні x кульку буде відводити від положення рівноваги силою пружності. Це буде стан нестійкої рівноваги.

Розглянемо положення x_1, при збільшенні x, сила Кулона стає більшою за силу пружності, і рівнодійна буде направлена праворуч. Тоді при збільшенні x сила Кулона буде повертати кульку до стану рівноваги. Це буде стан стійкої рівноваги. X= $x_1 = 0.3$м

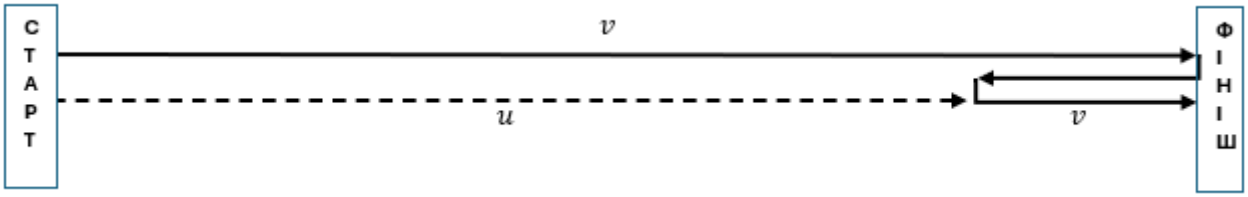


3. Підставимо значення x в формулу з пункту 1. Отримаємо:

$$Q = -\frac{1.8(0.4 - 0.02 - 0.3)^2}{2} + \frac{9 * 10^9 * 1.2^2 * 10^{-12}}{0.3} - \frac{9 * 10^9 * 1.2^2 * 10^{-12}}{0.38}$$
$$\approx 0.003335 \approx 0.0033\text{Дж}$$

Відповідь: 0.0033Дж.

(3) Припустимо, що один з учасників весь час їде на скейті, перетинає фініш, де його відмічають, і відразу повертає назустріч товаришу, щоб віддати тому скейт. Схематично позначимо рух команди наступним чином:

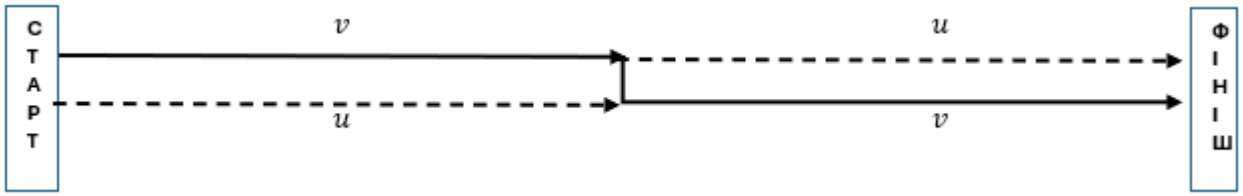


Нехтуємо часом розвороту, тоді скейтбордисти удвох подолають шлях $2l$ і зустрінуться через час $t_з = \frac{2l}{v+u}$, після чого тому, хто йшов пішки, залишиться проїхати зі швидкістю v шлях $vt_з - l$. Отже, загальний час його руху

$$t_I = t_з + \frac{vt_з - l}{v} = 2t_з - \frac{l}{v} = \frac{l}{v}\frac{3v-u}{v+u}. \qquad (1)$$

За умовою слід запропонувати оптимальну логістику руху. Чи є запропонований сценарій руху оптимальним? Один спортсмен фінішував першим, потім поїхав назад, після чого вже на його скейті фінішував другий. Уявимо собі, що ніхто не повертається назад, а вони по черзі користуються скейтом. Тоді вони мають фінішувати одночасно, оскільки той, хто фінішує першим, краще б на більший час віддав скейт товаришу, оскільки саме по ньому реєструють час усієї команди.

Якщо ж вони фінішують одночасно, то кожен має половину відстані пройти пішки, а половину проїхати. Отже, проїхавши половину, перший спортсмен залишає скейт і далі пересувається пішки. Схематично рух команди виглядає наступним чином:



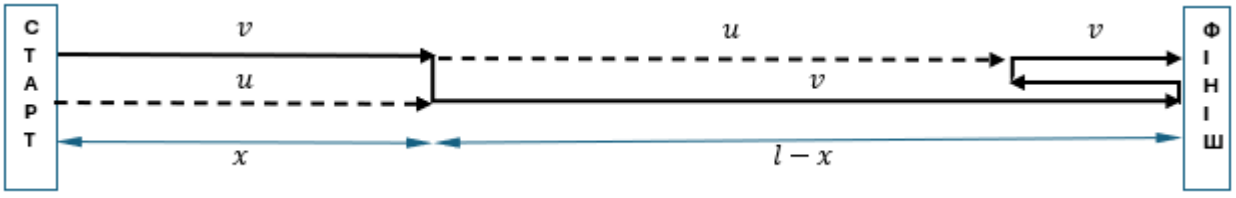
$$t_{II} = \frac{l}{2v} + \frac{l}{2u} = \frac{l}{2}\frac{v+u}{vu}. \qquad (2)$$

Визначимо, яка формула (1) чи (2) дає найменший час. Для цього віднімемо з часу t_{II} час t_I:

$$t_{II} - t_I = \frac{l}{2}\frac{(v-u)(v-3u)}{vu(v+u)}.$$

Як бачимо, якщо швидкість на скейтборді v більш ніж утричі перевищує швидкість пішки u, $t_{II} > t_I$, тому слід скористатися першою логістикою (1). Якщо ж $v < 3u$, $t_{II} < t_I$, виграшною поведінкою буде не повертатися.

Дивний результат, який викликає законне запитання: а якщо поєднати обидві ідеї, скажімо, через деяку відстань x перший спортсмен залишає скейт другому, а другий вже фінішує і повертається зі скейтом назад? Має існувати таке значення x для заданих швидкостей, яке і забезпече насправді найменший час. Схематично рух команди має наступний вигляд:



Позначимо відстань, на якій скейтбордисти зустрілися перед фінішом, через y. Тоді час цієї зустрічі

$$t_з = \frac{x}{v} + \frac{l-x-y}{u} = \frac{x}{u} + \frac{l-x+y}{v}.$$

Звідси виражаємо $y = \frac{v-u}{v+u}(l-2x)$ і підставляємо у загальний час команди

$$t = t_з + \frac{y}{v} = \frac{l}{v}\frac{3v-u}{v+u} + \frac{(v-u)(v-3u)}{vu(v+u)}x. \qquad (3)$$

Отримана формула (3) у граничному випадку $x = 0$ переходить в (1), а у випадку $x = l/2$, у формулу (2).

Взагалі, якщо $v > 3u$, коефіцієнт при x у (3) додатний, і вигідно зменшувати x, щоб отримати найменший час. Найменше значення $x = 0$, і маємо відповідь (1). Якщо ж $v < 3u$, коефіцієнт при x від'ємний, і вигідно, навпаки, збільшувати x аж до $x = l/2$ (при більших x, порядок фінішу зміниться), і тоді найменший час даватиме формула (2). Як бачимо, загальний випадок не дав меншого часу, ніж два граничні.

(4) У стаціонарному режимі температура t_1 незмінна. Це означає, що повітря між оболонками щосекунди віддає через оболонку Б саме стільки енергії, скільки отримує через оболонку А. Передача тепла через оболонки відбувається завдяки теплопередачі. Потужність P теплопередачі через одиничну площадку пропорційна різниці температур Δt між її поверхнями. Крім того, вона обернено пропорційна товщині h оболонки (щоб переконатися в цьому, досить подумки замінити одну оболонку завтовшки $2h$ двома оболонками завтовшки h і скористатися тим, що для кожної такої оболонки Δt виявляється вдвічі меншою). Отже, $P = k\frac{S}{h}\Delta t$. Коефіцієнт k залежить від матеріалу, для оболонок А і Б він однаковий (насправді це теплопровідність матеріалу оболонок). Отже, з умови $P_А = P_Б$ випливає, що $\frac{S_А}{h_А}(t_2 - t_1) = \frac{S_Б}{h_Б}(t_1 - t_0)$. З тексту умови та наведеного рисунку отримуємо $h_Б = 2h_А, r_Б = 2r_А$, тобто $S_Б = 4S_А$. Таким чином, маємо $t_2 - t_1 = 2(t_1 - t_0)$, звідки $t_1 = \frac{2t_0+t_2}{3} = 70$ °C.

(5) За названих умов температура кипіння води становить $t_{кип} = 100$ °C. Можна вважати, що інтенсивне пароутворення починається тільки після досягнення водою цієї температури та закінчується, коли гиря остигне до цієї температури. Маса $m_п$ утвореної пари може бути різною через різні способи занурення гирі. Розглянемо два граничні варіанти.

1) Тіло занурили дуже швидко. Тоді теплообмін відбувається на певній глибині, а пароутворення починається тільки після нагрівання *всієї* води до температури кипіння (бульбашки пари, що виникають у глибині, швидко охолоджуються та пара знов конденсується, нагріваючи навколишню воду). Рівняння теплового балансу: $c_1 m_1(t_1 - t_{кип}) = c_2 m_2(t_{кип} - t_1) + Lm_п$.

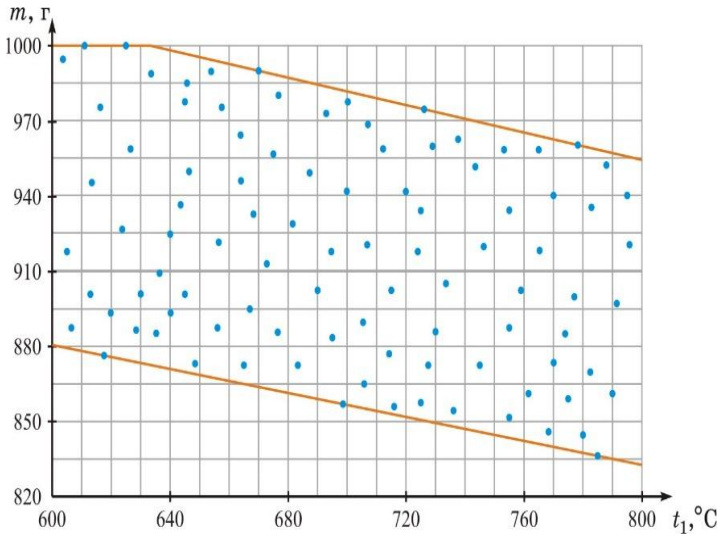
Отже, $m = m_2 - m_п = m_2 - \frac{c_1 m_1(t_1 - t_{кип}) - c_2 m_2(t_{кип} - t_2)}{L}$. Цей випадок відповідає найменшій масі пари та найбільшому можливому значенню m. Надалі позначатимемо отриманий вираз m_{max}.

2) Тіло надовго «затримується» під самою поверхнею води. Тоді воно практично нагріватиме та перетворюватиме на пару тільки сусідні з ним шари води. Рівняння теплового балансу: $c_1 m_1(t_1 - t_{кип}) = c_2 m_п(t_{кип} - t_2) + Lm_п$. Цей випадок відповідає найбільшій масі пари та найменшому можливому значенню m, яке позначимо m_{min}. Отже, $m_{min} = m_2 - \frac{c_1 m_1(t_1 - t_{кип})}{L + c_2(t_{кип} - t_2)}$.

Тепер ми можемо вдатися до аналізу отриманих експериментальних точок. Очевидно, більшість з цих точок нам «нецікава»: вони відповідають проміжним випадкам — не дуже швидкому та не дуже повільному зануренню. Розглянуті ж вище два граничні випадки пов'язані з верхньою та нижньою границями ділянки, де розташовані всі точки. Відповідно до отриманих нами формул ділянка знизу та зверху має прямолінійні границі. Проте слід ще врахувати: формула для $m_{\max}$ справедлива тільки за умови, що температура t_1 досить висока (адже внутрішньої енергії гирі має вистачити, щоб довести *всю* воду до температури кипіння). Отже, існує мінімальне значення t_1, тільки після якого починається утворення пари (за менших значень температури гирі $m = m_2$).

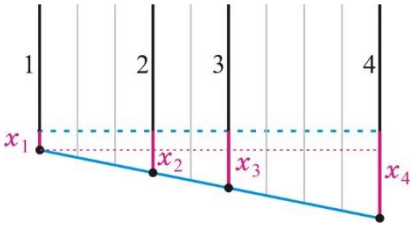
Тепер вам залишається тільки прикласти лінійку до рисунку та знайти знизу пряму, а зверху ламану лінії, що проходять через «крайні» точки та обмежують ділянку, «доступну» для експериментальних точок (див. рисунок). Зрозуміло, що верхня лінія відповідає залежності $m_{\max}(t_1)$, а нижня — залежності $m_{\min}(t_1)$.

Як бачимо, у випадку 1 пара починає утворюватися за $t_{1\,\min} = 633$ °C. Отже, $c_1 m_1 (t_{1\,\min} - t_{\text{кип}}) = c_2 m_2 (t_{\text{кип}} - t_2)$. Друге рівняння для визначення величин c_1 і t_2 можна отримати, наприклад, з умови $m_{\min}(600\ °\text{C}) = 880$ г. Уже цих рівнянь достатньо, щоб знайти $c_1 = 420\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot °\text{C}}$ і $t_2 = 20$ °C. Проте, звісно, краще перевірити отримані відповіді, скориставшись ще й іншими «граничними» точками.



(6) Якщо стрижень абсолютно жорсткий, то він лишається прямим. Отже (див. схематичний рисунок, де штрихова синя лінія позначає положення стрижня без вантажу), видовження дротів пов'язані співвідношеннями

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{3}{5}, \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{9}{5}.$$

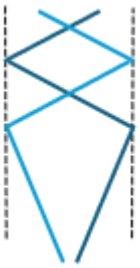


Ці співвідношення випливають з подібності трикутників на рисунку. Оскільки видовження дротів малі, виконується закон Гука. З урахуванням цього закону отримуємо

$$\frac{F_2 - F_1}{F_3 - F_1} = \frac{3}{5}, \frac{F_4 - F_1}{F_3 - F_1} = \frac{9}{5}, \text{ звідки } F_2 = 25 \text{ Н}, F_4 = 55 \text{ Н}.$$

Відповідно до умови рівноваги $mg = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$, маса вантажу $m = 12{,}5$ кг.

Щоб знайти відстань l точки підвісу вантажу від лівого кінця стрижня, застосуємо правило моментів: $mgl = 3aF_2 + 5aF_3 + 9aF_4$. Тут через a позначено бічну сторону однієї клітинки сітки. Записане рівняння дає значення $l = 5{,}96a$. Отже, точка підвісу вантажу розташована між дротами 3 і 4, на відстані $0{,}96a$ від дроту 3.



(7) 1. Два додаткові патрубки потрібні для того, щоб за рахунок реактивної сили фонтан обертався.

2. За один період кожен патрубок зробить повний оберт, отже кожна лінія струменю дотикнеться по одному разу до двох огинаючих фонтану (пунктирні лінії на схематичному малюнку). У кожної пари струменів візуальних перетинів буде два. Якщо струменів n, кількість пар (геометричний аналог – кількість відрізків, якими можна з'єднати n точок) дорівнює $n(n-1)/2$. Отже, за один період кількість перетинів $n(n-1)$, а за m повних періодів $mn(n-1)$.

Можливо, ця лаконічна аргументація для когось не виглядає достатньо переконливою. Мов, чому у двох струменів за період саме два перетину, адже лінії струменів на схематичному малюнку можна намалювати і по іншому? Де гарантія, що якісь дві точки перетину не накладуться одна на одну, і тоді замість двох точок перетину маємо рахувати одну, у якій перетнулися три або чотири струменя?

Що ж, тоді звернемося до іншої аргументації.

У точках візуального перетину двох струменів знаходиться вода, яка була випущена з відповідних патрубків в один момент часу, оскільки вони піднялися на однакову висоту. Тоді всі такі частинки води віддалилися від осі фонтану у горизонтальному напрямку на однакову відстань, отже у горизонтальному перерізі частинки води від n струменів утворюватимуть правильний n-кутник. Якщо подумки переміщати такий переріз від нижньої точки фонтану до висоти, на яку піднялася вода за один період, цей n-кутник розширятиметься і зробить повний оберт. Те, що n-кутник розширятиметься на кількість перетинів не впливає, оскільки це питання масштабу, а не взаємного розташування. Отже, за один оберт кожна точка одного струменю перетнеться з кожною точкою іншого рівно 2 рази, й усього матиме $2(n-1)$ перетинів. Оскільки у n-кутнику таких точок n, а кожний перетин одночасно належить двом точкам, загальна кількість перетинів буде $n(n-1)$. За m повних періодів:

$$N = mn(n-1).$$

Зазначимо, одночасно ми довели, що точки перетину трьох або більше струменів не можливі, оскільки будь-яка пряма, що перетинає опуклий багатокутник, не може проходити більш ніж через дві його вершини.

(8) 1) Початковий стан системи.
Координата центру мас системи у початковому стані:

$$x_{\text{Ц.М.}} = \frac{M\cdot\frac{L}{2}+m_1\cdot 0+m_2\cdot 0+m_3\cdot L}{M+m_1+m_2+m_3} = \frac{\frac{M}{2}+m_3}{M+m_1+m_2+m_3}L. \qquad (1)$$

2) Швидкість руху тата.
Систему можна вважати замкненою, отже за теоремою про рух центру мас, його координата під час руху персонажів не повинна змінюватись.

Під час руху собаки у напрямку до тата через деякий час Δt:

$$x_{ц.м.} = \frac{M\cdot\frac{L}{2}+m_1\cdot v_1\cdot\Delta t+m_2\cdot v_2\cdot\Delta t+m_3\cdot(L-v_3'\cdot\Delta t)}{M+m_1+m_2+m_3}. \quad (2)$$

Прирівнюючи (1) та (2), отримуємо

$$\frac{\left(\frac{M}{2}+m_3\right)\cdot L}{M+m_1+m_2+m_3} = \frac{M\cdot\frac{L}{2}+m_1\cdot v_1\cdot\Delta t+m_2\cdot v_2\cdot\Delta t+m_3\cdot(L-v_3'\cdot\Delta t)}{M+m_1+m_2+m_3}. \quad (3)$$

$$m_1\cdot v_1\cdot\Delta t + m_2\cdot v_2\cdot\Delta t - m_3\cdot v_3'\cdot\Delta t = 0. \quad (4)$$

$$\boxed{\mathbf{v_3' = \frac{m_1\cdot v_1+m_2\cdot v_2}{m_3}}}. \quad (5)$$

Під час руху собаки у напрямку до дівчинки аналогічно маємо:

$$\boxed{\mathbf{v_3'' = \frac{m_1\cdot v_1-m_2\cdot v_2}{m_3}}}. \quad (6)$$

3) Шлях, пройдений дівчинкою і собакою.

Кінець кінцем усі персонажі зустрінуться у одній точці. З урахуванням того, що швидкість дівчинки не змінювалась ні за модулем, ні за напрямком, то можна вважати, що вона пройшла шлях, який дорівнює координаті цієї точки. Координата ж центру мас при цьому не змінювалась, отже

$$x_{ц.м.} = \frac{M\cdot\frac{L}{2}+m_1\cdot L_1+m_2\cdot L_1+m_3\cdot L_1}{M+m_1+m_2+m_3}. \quad (7)$$

Прирівнюючи (1) та (7), отримаємо

$$\frac{L\left(\frac{M}{2}+m_3\right)}{M+m_1+m_2+m_3} = \frac{L\cdot\frac{M}{2}+L_1(m_1+m_2+m_3)}{M+m_1+m_2+m_3}. \quad (8)$$

$$Lm_3 = L_1(m_1+m_2+m_3). \quad (9)$$

$$\boxed{\mathbf{L_1 = \frac{m_3}{m_1+m_2+m_3}L}}. \quad (10)$$

Час, необхідний дівчинці на подолання цієї відстані:

$$\Delta t_{заг} = \frac{L_1}{v_1}. \quad (11)$$

Цей же час витратять усі інші персонажі на переміщення до кінцевої точки. З урахуванням того, що швидкість руху собаки не змінювалась за модулем:

$$L_2 = v_2\Delta t_{заг}. \quad (12)$$

$$\boxed{\mathbf{L_2 = \frac{m_3v_2}{(m_1+m_2+m_3)v_1}L}}. \quad (13)$$

4) Шлях, пройдений татом

Щоб визначити шлях, пройдений татом, необхідно визначити загальний час руху тата зі швидкістю v_3' та загальний час руху зі швидкістю v_3''. Розглянемо для цього декілька етапів руху усіх персонажів задачі.

Етап	Тривалість етапу	Відстань між персонажами в кінці етапу	
1. Перша зустріч тата і собаки	$\Delta t_1' = \frac{L}{v_3' + v_2}$	$L_1' = L - (v_3' + v_1)\Delta t_1' = \frac{v_2 - v_1}{v_3' + v_2} L$	(14)
2. Перша зустріч дівчинки і собаки	$\Delta t_1'' = \frac{L_1'}{v_1 + v_2} = \frac{v_2 - v_1}{(v_1 + v_2)(v_3' + v_2)} L$	$L_1'' = L_1' - (v_3'' + v_1)\Delta t_1'' = \frac{v_2 - v_3''}{v_1 + v_2} L_1' = \frac{(v_2 - v_3'')(v_2 - v_1)}{(v_1 + v_2)(v_3' + v_2)} L$	(15)
3. Друга зустріч тата і собаки	$\Delta t_2' = \frac{L_1''}{v_3' + v_2} = \frac{(v_2 - v_3'')(v_2 - v_1)}{(v_1 + v_2)(v_3' + v_2)^2} L$	$L_2' = L_1'' - (v_3' + v_1)\Delta t_2' = \frac{v_2 - v_1}{v_3' + v_2} L_1'' = \frac{(v_2 - v_3'')(v_2 - v_1)^2}{(v_1 + v_2)(v_3' + v_2)^2} L$	(16)
4. Друга зустріч дівчинки і собаки	$\Delta t_2'' = \frac{L_2'}{v_1 + v_2} = \frac{(v_2 - v_3'')(v_2 - v_1)^2}{(v_1 + v_2)^2(v_3' + v_2)^2} L$	$L_2'' = L_2' - (v_3'' + v_1)\Delta t_2'' = \frac{v_2 - v_3''}{v_1 + v_2} L_2' = \frac{(v_2 - v_3'')^2(v_2 - v_1)^2}{(v_1 + v_2)^2(v_3' + v_2)^2} L$	(17)

З огляду на отримані співвідношення, можна побачити, що час руху тата на етапі, коли собака біжить до нього, на кожному наступному аналогічному етапі змінюється в однакову кількість разів. При цьому час руху тата на етапі, коли собака біжить до дівчинки, на кожному наступному аналогічному етапі змінюється в таку саму однакову кількість разів. Позначимо цей множник як q:

$$q = \frac{(v_2 - v_3'')(v_2 - v_1)}{(v_1 + v_2)(v_3' + v_2)}. \quad (18)$$

Очевидно, що $q < 1$, отже можна стверджувати, що загальний час, який тато рухався зі швидкістю v_3' та загальний час руху зі швидкістю v_3'' визначаються як суми нескінченних геометричних прогресій:

$$\Delta t_{заг}' = \frac{\Delta t_1'}{1 - q};\ \Delta t_{заг}'' = \frac{\Delta t_1''}{1 - q}. \quad (19)$$

Тоді шлях, який пройшов тато визначається як:

$$L_3 = v_3' \frac{\Delta t_1'}{1 - q} + v_3'' \frac{\Delta t_1''}{1 - q} = \frac{v_3' \Delta t_1' + v_3'' \Delta t_1''}{1 - q}. \quad (20)$$

$$L_3 = \frac{\frac{L v_3'}{v_3' + v_2} + \frac{L v_3''(v_2 - v_1)}{(v_1 + v_2)(v_3' + v_2)}}{1 - q} = \frac{L\left(v_3'(v_1 + v_2) + v_3''(v_2 - v_1)\right)}{(1 - q)(v_1 + v_2)(v_3' + v_2)}. \quad (21)$$

$$L_3 = \frac{L\left(v_3'(v_1+v_2)+v_3''(v_2-v_1)\right)}{(v_1+v_2)(v_3'+v_2)-(v_2-v_3'')(v_2-v_1)} = \frac{L(v_3'v_1+v_3'v_2+v_3''v_2-v_3''v_1)}{(v_1v_3'+v_1v_2+v_2v_3'+v_2^2)-(v_2^2-v_1v_2-v_3''v_2+v_3''v_1)} = \frac{L\left(v_1(v_3'-v_3'')+v_2(v_3'+v_3'')\right)}{v_1(v_3'-v_3'')+v_2(v_3'+v_3'')+2v_1v_2}. (22)$$

Підставивши (5) і (6) у (22), отримаємо:

$$L_3 = \frac{L\left(\frac{2m_2v_1v_2}{m_3}+\frac{2m_1v_1v_2}{m_3}\right)}{\frac{2m_2v_1v_2}{m_3}+\frac{2m_1v_1v_2}{m_3}+2v_1v_2} = \boxed{\frac{(m_1+m_2)L}{m_1+m_2+m_3}}. (23)$$

Формула (23) є справедливою лише у тому випадку, якщо напрям руху тата не змінювався у процесі руху. Дійсно, у такому випадку отриманий результат співпадає з відстанню від татиного краю дошки до точки, де зустрінуться усі персонажі задачі:

$$L_3 = L - L_1 = \boxed{\frac{(m_1+m_2)L}{m_1+m_2+m_3}}. (24)$$

Однак, якщо швидкість руху тата, коли собака біжить до дівчинки, яка визначається за формулою (6) виявиться від'ємною, це означатиме, що на таких етапах руху йому доведеться відступати назад. У такому випадку шлях, пройдений татом, не буде співпадати з його переміщенням.

Тому, більш коректним є запис формули (20–22) без урахування знаку швидкості v_3'':

$$L_3 = \frac{v_3'\Delta t_1'+|v_3''|\Delta t_1''}{1-q}. (25)$$

$$L_3 = \frac{L\left(v_1(v_3'-|v_3''|)+v_2(v_3'+|v_3''|)\right)}{v_1(v_3'-|v_3''|)+v_2(v_3'+|v_3''|)+2v_1v_2}. (26)$$

Тоді у випадку, якщо $v_3'' < 0$, тобто $m_1 \cdot v_1 < m_2 \cdot v_2$ (27)

$$|v_3''| = -v_3'' = \frac{m_2 \cdot v_2 - m_1 \cdot v_1}{m_3}. (28)$$

Тоді, підставляючи (5) і (28) у (26), отримаємо:

$$L_3 = \frac{L\left(\frac{2m_1v_1^2}{m_3}+\frac{2m_2v_2^2}{m_3}\right)}{\frac{2m_1v_1^2}{m_3}+\frac{2m_2v_2^2}{m_3}+2v_1v_2}. (29)$$

$$\boxed{L_3 = \frac{L(m_1v_1^2+m_2v_2^2)}{m_1v_1^2+m_2v_2^2+m_3v_1v_2}} (30)$$

(9) Дротяне металеве кільце почали нагрівати, внаслідок чого у ньому встановився такий розподіл температури, як показано на рисунку. За допомогою ідеального омметра, під'єднаного до довільних точок кільця ковзними контактами, вимірюють його опір між різними точками. Знайти, яке **максимальне значення показів омметра** може бути отримане при цьому? Питомий опір матеріалу при 0^0C дорівнює 10^{-6} Ом*м, середній радіус кільця та площу поперечного перерізу можна вважати незмінними при нагріванні та рівними 42,5см та 1мм^2 відповідно. Температурний коефіцієнт опору матеріалу можна вважати сталим і рівним

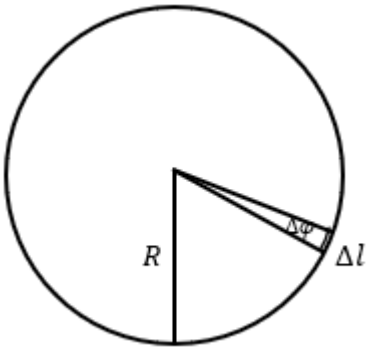
$2{,}33*10^{-2}$ 1/℃.

1. <u>Знайдемо загальній опір кільця</u>.

Для цього, розділимо кільце на безкінечно велику кількість безкінечно малих ділянок кільця довжиною Δl та розглянемо довільну ділянку кільця що має деяку температуру t. Знайдемо опір цієї ділянки.

$$\Delta R = \Delta R_0(1 + at)$$

$$\Delta R = \frac{\rho_{эл} * \Delta l}{S}(1 + \alpha t)$$



Так як приріст кута φ дорівнює відношенню приросту довжини дуги (Δl) до радіуса, запишемо:

$$\Delta l = \Delta\varphi * R$$

Отримаємо,

$$\Delta R = \frac{\rho_{эл} * R}{S}(\Delta\varphi + \alpha t * \Delta\varphi)$$

Загальний опір кільця можемо знайти просуммувавши всі такі ділянки кола

$$R_{загальне} = \frac{\rho_{эл} * R}{S}(\sum \Delta\varphi + \alpha \sum t * \Delta\varphi)$$

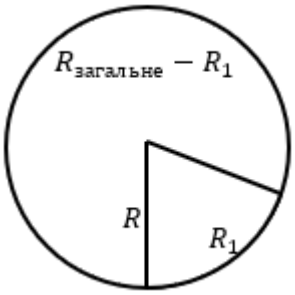
$\sum \Delta\varphi$ від 0 до $2\pi = 2\pi - 0 = 2\pi$

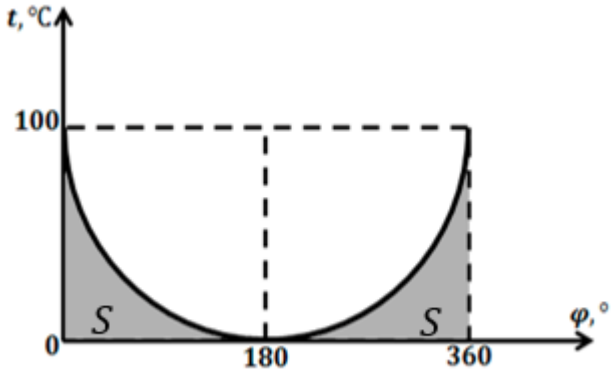
$\sum t * \Delta\varphi$ можемо знайти з графіку залежності $t(\varphi)$.

$$S = 2\pi * t_{100} - \frac{\pi * t_{100} * \pi}{2} = \frac{\pi * t_{100}(4-\pi)}{2}$$

Підставивши у формулу для $R_{загальне}$, отримаємо:

$$R_{загальне} = \frac{\rho_{эл} * R}{2S}(4\pi + \alpha\pi t_{100}(4 - \pi))$$





2. Напишемо опір кола для довільного підключення омметра.

Для цього виділимо деяку ділянку графіку «товщиною» $\Delta\varphi$ (площа цієї ділянки дорівнює $t * \Delta\varphi$) та просумуємо усі такі ділянки графіку. Тоді знайдемо площу фігури під графіком залежності $t(\varphi)$.

$$R_x = \frac{R_1(R_{загальне} - R_1)}{R_{загальне}}$$

Для того щоб R_x було максимальне, потрібно щоб чисельник дробу був максимальним, тоді, $R_1 R_{загальне} - R_1^2 = max$

Бачимо що графіком даної функції є парабола вітками донизу і має чіткий максимум функції вершину параболи.

За формулою для вершини параболи, знаходимо R_1 для максимального значення R_x:

$$R_1 = \frac{-R_{загальне}}{2 * (-1)} = \frac{R_{загальне}}{2}$$

Підставивши у формулу для R_x:

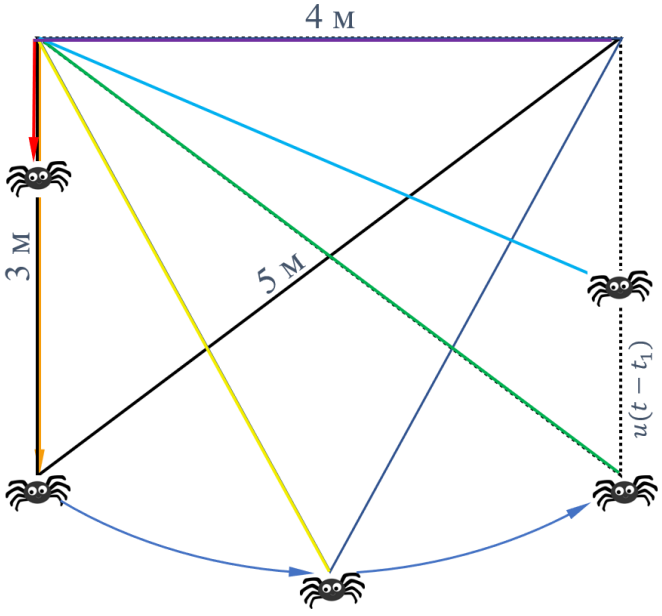
$$R_x = \frac{R_{загальне}}{4}$$

$$R_x = \frac{\rho_{эл} * R}{8S}(4\pi + \alpha\pi t_{100}(4 - \pi))$$

$$R_x = \frac{10^{-6}\ Ом * м * 0.425м}{8 * 10^{-6}\ м^2}\left(4\pi + 2{,}33 * 10^{-2}\ \frac{1}{°C} * \pi * 100(4 - \pi)\right) = 1\ (Ом)$$

Відповідь: 1 Ом.

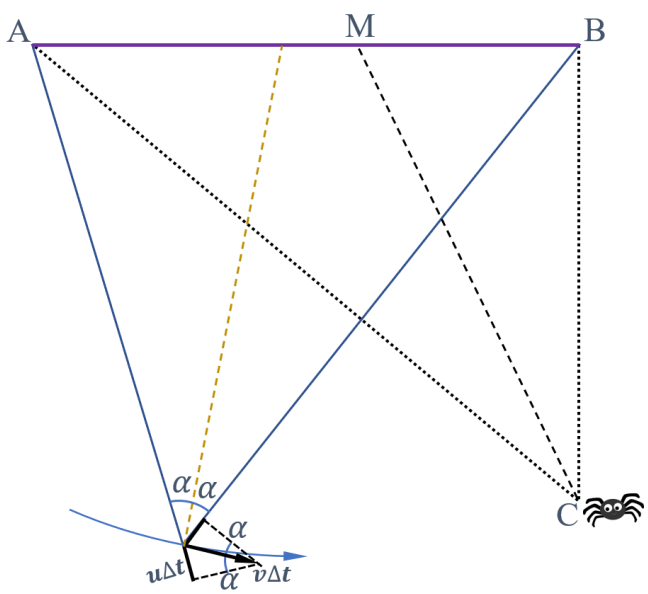
(10) Загальний час руху 800 с, відстань між деревами 4 м. Оскільки масою павутинки можна знехтувати, перші 3 метри (наприкінці матимемо єгипетський трикутник) павук рівномірно спускатиметься вертикально вниз і витратить на це 300 с. Так само й останні 3 метри він підніматиметься вертикально вгору. Між цими дільницями руху протягом 200 с обидві частини павутинки з обох сторін від павука будуть натягнуті. Отже, перші $t_1 = 300с + 200с = 500с$ залежність модуля переміщення павука від часу матиме вигляд $S = ut$, де $u = 1$ см/с. Далі використаємо теорему Піфагора: $S = \sqrt{(4м)^2 + (3м - u(t - t_1))^2}$ або у SI: $S = \sqrt{4^2 + (8 - 0{,}01t)^2}$, де час руху змінюється від 500 с до 800 с. Залежність $S(t)$ зображена на графіку.

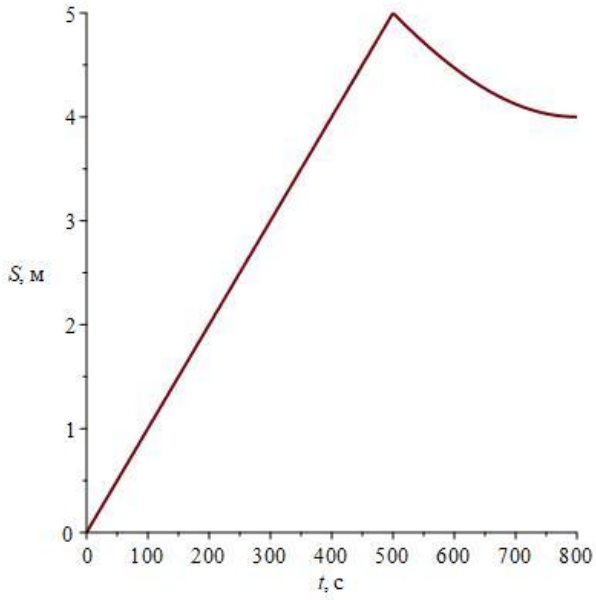


Знайдемо тепер максимальну швидкість павука відносно дерев. Перші й останні 300 с він рухався вертикально зі сталою швидкістю 1 см/с. Найбільшого значення його швидкість набуває десь під час 200 с руху посередині подорожі (за 200 с він долає понад 4 м). У цей час сума відстаней від павука до кінців павутинки стала і дорівнює 8 м (а траєкторія, взагалі кажучи, дуга еліпсу).

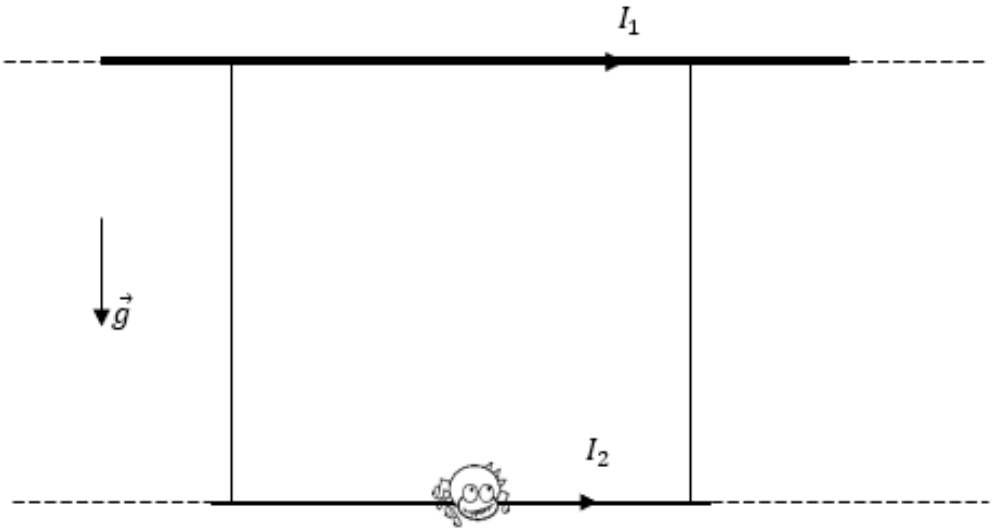
Припустимо, що пройшов малий проміжок часу Δt, ліва (задня) частина павутинки збільшилась на $u\Delta t$, а права (передня) зменшилась на $u\Delta t$ (на рис. дещо перебільшені за розмірами чорні відрізки на вздовж синіх ниток). Переміщення павука при цьому $v\Delta t$ показано чорною стрілкою. $v\Delta t$ є гіпотенузою маленького прямокутного трикутника з катетом $u\Delta t$, протилеглим до кута α. Чим меншим буде α, тим при заданому катеті ($u = 1$ см/с), більшою буде гіпотенуза, а з нею і швидкість v. Отже, найбільшою буде швидкість на початку 301-ї с і наприкінці 500-ї с. На рисунку у точці C показано положення павука наприкінці 500-ї с. CM – бісектриса, яка ділить сторону AB у співвідношенні AC до BC, тобто 5:3. Отже, відрізок MB

має довжину 1,5 м. Тоді за теоремою Піфагора $\text{СМ} = \sqrt{1{,}5^2 + 3^2}\text{м} = 1{,}5\sqrt{5}\text{м}$. Трикутник швидкостей у точці С з гіпотенузою v і катетом u подібний по СМВ. Тоді $v/u = \text{СМ}/\text{МВ} = \sqrt{5}$, звідки й знаходимо максимальну швидкість $\sqrt{5}\frac{\text{см}}{\text{с}} \approx 2{,}24\ \text{см/с}$.





(11)



Так як верхній провідник створює навколо себе магнітне поле, на нижній дріт діє сила Ампера, яка за правилом лівої руки напрямлена проти осі х.

Напишемо закон Ньютона на вісь х:

$$mg - F_A - F_{\text{пр}} - F_{\text{пр}} = 0$$

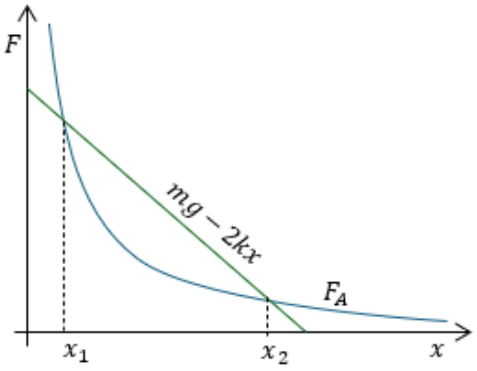
За законом Гука: $F_{\text{пр}} = kx$

$$F_A = I_2LB = I_2L\frac{a}{x}, \text{де } a = 16 * 10^{-4}(\text{Тл} * \text{м})$$

$$mg = I_2L\frac{a}{x} + 2kx$$

Отримаємо квадратне рівняння: $2\mathrm{kx}^2 - \mathrm{mgx} + \mathrm{I}_2\mathrm{La} = 0$.

Коренями цього рівняння є: $\mathrm{x}_{2_1} = \frac{\mathrm{mg} \pm \sqrt{(\mathrm{mg})^2 - 8\mathrm{kI}_2\mathrm{La}}}{4\mathrm{k}}$, маємо 2 дійсних корені. Проаналізуємо обидва корені на стійкість.



Для цього побудуємо графік залежності F_Aта $(\mathrm{mg} - 2\mathrm{kx})$ від x.

Розглянемо положення x_1, при невеликому збільшенні x, сила $\mathrm{mg} - 2\mathrm{kx}$ стає більшою за силу Ампера, і рівнодійна буде направлена по осі x. Тоді при збільшенні x кульку рівнодійна буде відводити систему від положення рівноваги. Це буде стан не стійкої рівноваги.
Розглянемо положення x_2, при збільшенні x, сила Ампера стає більшою за силу $mg - 2kx$, і рівнодійна буде направлена проти осі x. Тоді при збільшенні x рівнодійна буде повертати кульку до стану рівноваги. Це буде стан стійкої рівноваги.

$$x = x_2 = \boxed{\frac{mg + \sqrt{(\mathrm{mg})^2 - 8kI_2La}}{4k}} = 0.08\text{м}$$

(12) Запишемо рівняння теплового балансу в даному процесі для охолодження на малу величину ΔT:

$$\Delta m L(T) = m(T) C(T) \Delta T$$

Розділимо ліву та праву частину на $m(T)L(T)$:

$$\frac{\Delta m}{m(T)} = \frac{\mathrm{C}(T)}{L(T)} \Delta T$$

Відносна маса рідини, що випарувалась, дорівнює:

$$\alpha = \sum \frac{\Delta m}{m(T)} = \sum \frac{\mathrm{C}(T)}{L(T)} \Delta T$$

Помітимо, що $\frac{\mathrm{C}(T)}{L(T)} \ll 1$ для будь-якої температури в нашому інтервалі зміни температури в 1 К.

Отже, гарною оцінкою буде вважати, що повна маса рідини майже не залежить від температури:

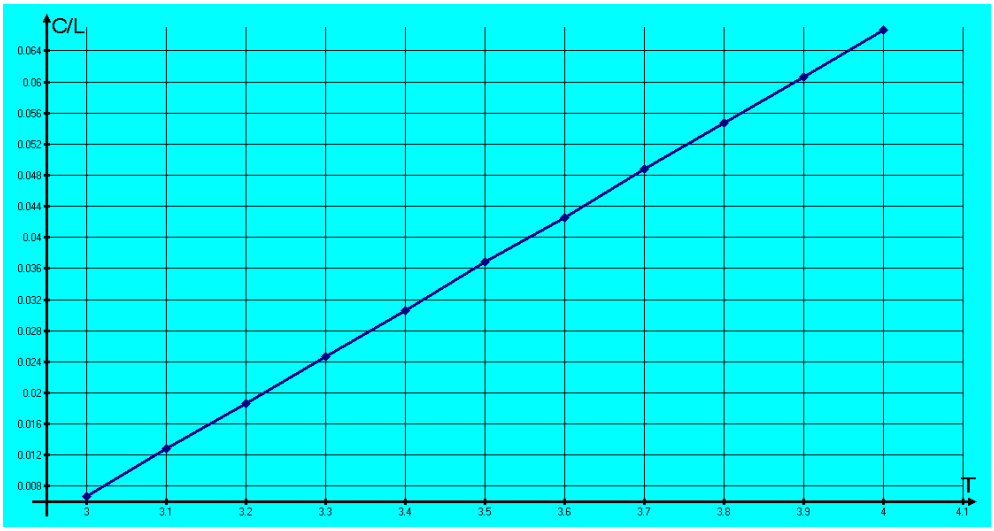
$$\alpha = -\frac{m_{\text{вип}}}{m} = \sum_{4\text{ К}}^{3\text{ К}} \frac{\mathrm{C}(T)}{L(T)} \Delta T,$$

де $m_{\text{вип}}$ – маса рідини, яка випарувалась.

Для того щоб порахувати суму в правій частині рівняння зробимо таблицю залежності величини $\frac{\mathrm{C}(T)}{L(T)}$ від температури.

T, K	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
C/L, × 10^{-3}1/K	6.67	12.86	18.60	24.71	30.61	36.88	42.57	48.79	54.76	60.66	66.67

Побудуємо графік цієї залежності.



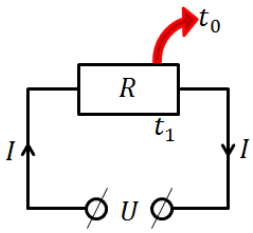
Ця залежність є дуже близькою до лінійної. Отже, порахувати суму $\sum \frac{C(T)}{L(T)} \Delta T$ для такої залежності є дуже просто.

$$\sum_{4\text{ К}}^{3\text{ К}} \frac{C(T)}{L(T)} \Delta T \approx -36.67 * 10^{-3}$$

Звідси:

$$m_{\text{вип}} = -m * \sum_{4\text{ К}}^{3\text{ К}} \frac{C(T)}{L(T)} \Delta T \approx 36.7 \text{ мг}$$

(13) 1) *Резистор у початковому режимі*



Умова збереження постійної температури:

$$P_{\text{ел1}} = P_{\text{втр1}}.$$

За законом Джоуля-Ленца:

$$P_{\text{ел1}} = \frac{U^2}{R_1},$$
$$R_1 = R_0(1 + \alpha t_1),$$
$$P_{\text{ел1}} = \frac{U^2}{R_0(1 + \alpha t_1)}.$$

За законом Ньютона-Ріхмана:

$$P_{\text{втр1}} = \beta S_0(t_1 - t_0),$$

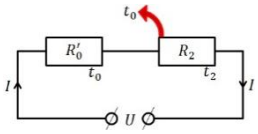
де β – деякий коефіцієнт пропорційності;

S_0 – площа бічної поверхні резистора у початковому стані.

Остаточно для даного режиму маємо:

$$\frac{U^2}{R_0(1+\alpha t_1)} = \beta S_0(t_1 - t_0).$$

2) *Резистор у режимі «охолодженого плавлення»*



Фактично ми маємо два резистори, з'єднані послідовно. Однак теплова енергія, яка виділяється при проходженні струму у частині резистора, обкладеної льодом, витрачається на плавлення льоду, а та, яка виділяється у відкритій частині резистора – на теплові втрати у навколишнє середовище.

Умова збереження постійної температури для відкритої частини:

$$P_{\text{ел2}} = P_{\text{втр2}}.$$

За законом Джоуля-Ленца:

$$P_{\text{ел2}} = I^2 R_2.$$

Загальна сила струму за законом Ома:

$$I = \frac{U}{R_0' + R_2},$$

$$R_0' = R_0\frac{N_1}{N}, R_2 = R_0\left(\frac{N-N_1}{N}\right)(1+\alpha t_2),$$

$$P_{\text{ел2}} = \frac{U^2 R_0\left(\frac{N-N_1}{N}\right)(1+\alpha t_2)}{\left(R_0\frac{N_1}{N} + R_0\left(\frac{N-N_1}{N}\right)(1+\alpha t_2)\right)^2}.$$

За законом Ньютона-Ріхмана:

$$P_{\text{втр2}} = \beta S_2(t_2 - t_0),$$

$$S_2 = S_0\left(\frac{N-N_1}{N}\right),$$

$$P_{\text{втр2}} = \beta S_0\left(\frac{N-N_1}{N}\right)(t_2 - t_0).$$

Остаточно для даного режиму маємо:

$$\frac{U^2 R_0\left(\frac{N-N_1}{N}\right)(1+\alpha t_2)}{\left(R_0\frac{N_1}{N} + R_0\left(\frac{N-N_1}{N}\right)(1+\alpha t_2)\right)^2} = \beta S_0\left(\frac{N-N_1}{N}\right)(t_2 - t_0).$$

Маємо наступну систему:

$$\begin{cases} U^2 = \beta S_0 R_0 (1+\alpha t_1)(t_1 - t_0) \\ U^2(1+\alpha t_2) = \beta S_0 R_0 \left(\frac{N_1}{N} + \left(\frac{N-N_1}{N} \right)(1+\alpha t_2) \right)^2 (t_2 - t_0) \end{cases}$$

Поділивши друге рівняння системи на перше, отримаємо:

$$1+\alpha t_2 = \frac{\left(N_1 + (N-N_1)(1+\alpha t_2)\right)^2 (t_2 - t_0)}{N^2 (1+\alpha t_1)(t_1 - t_0)}$$

Після математичних перетворень остаточно маємо:

$$\boldsymbol{N_1 = \frac{1+\alpha t_2 - \sqrt{\frac{(1+\alpha t_1)(1+\alpha t_2)(t_1 - t_0)}{t_2 - t_0}}}{\alpha t_2} N}$$

Числові розрахунки дають результат $\mathrm{N}_1 = 57$.

Відповідь: 57 секцій.

(14) По-перше, вся історія включно з датами правдива. Незадовго до цього з'явилася "економічна" банка NESCAFE ємністю 50 гр. Стало цікаво, скільки грошей ми платимо за розчинну каву і скільки за фарбу та метал, коли купуємо "економічну" банку.

Вартість кавового порошку в банці пропорційна його масі. Коефіцієнт пропорційності, тобто вартість 1 г, позначимо через *a*. Зі збільшенням всіх лінійних розмірів банки у два рази, її об'єм, а отже і маса порошку зростають у вісім разів. У той час площа поверхні банки, а отже маса фарби і металу (їх товщина не змінилася) збільшуються тільки в чотири рази. Вартість порошку пропорційна кубу лінійних розмірів банки, а вартість порожньої банки пропорційна квадрату лінійних розмірів. Інакше кажучи, вартість порожньої банки пропорційна масі порошку у степені 2/3. Коефіцієнт пропорційності позначимо через *b*. Таким чином, формула, за якою можна обчислити вартість банки NESCAFE має вигляд: $P = am + bm^{2/3}$. Визначимо коефіцієнти *a* і *b* з системи рівнянь, підставляючи масу у грамах, а ціну у копійках:

$$\begin{cases} 840 = 100a + 100^{2/3} b, \\ 1910 = 250a + 250^{2/3} b. \end{cases}$$ b≈13,4 коп/г$^{2/3}$, a≈5,51 коп/г.

Вартість 50 грамової банки NESCAFE буде

$$P_{50} = 50a + 50^{2/3} b \approx \textbf{4 грн 58 коп},$$

з яких 1 грн 82 коп. ми віддаємо за упаковку й оформлення, які потім викидаємо. ККД банки з кавою можна визначити як відношення вартості корисної речовини (взагалі користь розчинної кави доволі сумнівна) до загальної вартості банки, або як

$$\text{ККД} = \frac{am}{P} = \frac{am}{am + bm^{2/3}} = \frac{1}{1 + \frac{b}{am^{1/3}}}.$$

Як бачимо, зі збільшенням маси банки ККД збільшується. ККД найменшої банки (50 г) буде 60%. **ККД стограмової банки 65,6%≈66%**, а ККД банки масою 250 г вже 72%. Це ж стосується будь-яких консервів.

Отже, за нашими підрахунками маса найменшої банки мала бути **4 грн 58 коп.** Насправді 13 листопада вартість 50 грамової банки була 5 гривень 10 копійок, що дещо більше очікуваного. Звичайно ми знехтували особливостями складання цін на ринку (маленький штучний товар має додатковий попит, і цим користуються), витратами на транспортування та виробництво. Можливо, у цьому контексті найбільш цікавою з фізичної точки зору є гіпотеза,

що під час технологічних процесів, наприклад, розрізання жерсті будуть ще витрати, пропорційні лінійним розмірам. Але таке припущення (переконайтеся самі) призводить до неприродних значень складових ціни. Отже, жерсть для банок не розрізають, а їх з неї штампують.

Напередодні Нового року 31 грудня 1999 р. автор статті знову занотував ціни: 100 грамова банка вже коштувала 9 грн 05 коп, 250 грамова – 21 грн 70 коп, 50 грамова – 5 грн 10 коп. Святкові ціни (люди сильно не економлять) звісно не показник, але те, що ціна маленької банки не підвищилась, на відміну від інших свідчить на користь наших людей.

Нарешті ще однією причиною відмінності розрахунків від реалій було те, що банки трохи відрізнялися формою, хоча це було і не дуже помітно. У всіх висота приблизно дорівнювала діаметру. Якщо Ви бажаєте звести до мінімуму витрати на упаковку, виробляючи бюджетну продукцію, форма банок повинна бути такою, щоб площа поверхні була мінімальною при заданому об'ємі. Для циліндра це досягається, коли його висота дорівнює діаметру. Переконатися у цьому можна завдяки мінімізації площі циліндру при заданому об’ємі. Знехтуємо невеликою площею у місцях з’єднання частин банки і розглянемо циліндр радіусом R і висотою h. Площа $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ за об’єму $V = \pi R^2 h$. Отже:

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Мінімум цієї функції можна знайти за допомогою похідної, побудовою графіку у безрозмірних величинах або підстановкою числових значень. Цьому мінімуму й відповідатиме максимальний ККД. На відміну від отриманого перед цим ККД, коли ми порівнювали банки однакової форми але різного об’єму, зараз ми маємо порівняти ККД банок однакового об’єму V, але різної форми. Тепер загальна ціна P складатиметься з однакової ціни за кавовий порошок P_0 і різної за оболонку, яка буде пропорційною площині банки: cS. Вводячи безрозмірну величину $x = 2R/h$ (відношення діаметру банки до висоти), маємо:

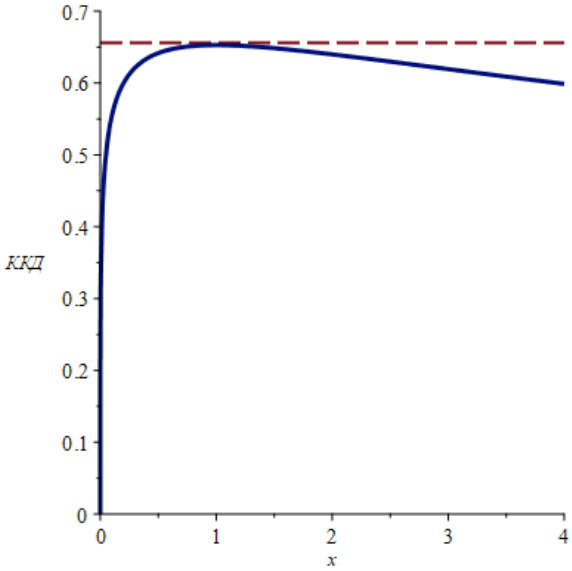
$$P = P_0 + c\sqrt[3]{2\pi V^2}\left(x^{2/3} + 2x^{-1/3}\right).$$

ККД знову визначаємо як відношення ціни того, заради чого купували, до загальної ціни

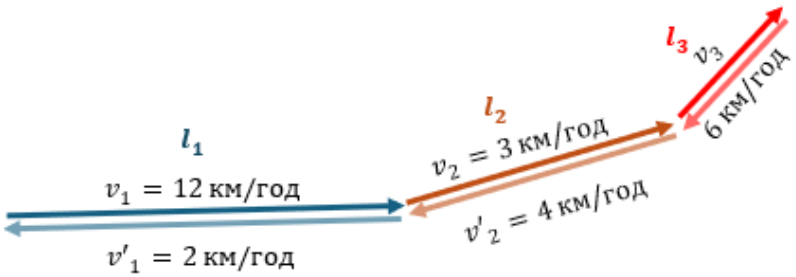
$$\text{ККД} = \frac{P_0}{P} = \frac{1}{1 + C\left(x^{2/3} + 2x^{-1/3}\right)},$$

де $C = cP_0^{-1}\sqrt[3]{2\pi V^2}$. За еталон візьмемо стограмову банку NESCAFE з ККД=65,6%, діаметр якої дорівнював висоті ($x = 1$) і побудуємо графік залежності ККД від x.

Як і очікувалось, ККД має максимум при $x = 1$. Саме тому, щоб заощадити на упаковці, бюджетні продукти (кава, консерви...) запаковують у банки з діаметром, що дорівнює висоті. Можна очікувати таку ж тенденцію й в інопланетних консервах позаземних цивілізацій. Економія ресурсів – те, чого не оминути. То ж бережімо навколишній світ і відрізняймо головне від другорядного.



(15) У задачі багато невідомих, зокрема, як співвідносяться між собою довжини трьох ділянок шляху l_1, l_2, l_3.



Якщо, скажімо, на якійсь з цих ділянок середня швидкість туди-назад (а саме її можна порахувати) виявиться найбільшою, тоді загальна середня швидкість обов'язково залежатиме від того, яку частину від загального шляху ця ділянка займає: майже всю, або незначну. Виникає враження, що задача не має розв'язку. Тим не менш порахуємо те, що можемо. На першій ділянці швидкість туди була 12 км/год, а назад 2 км/год. Отже середня швидкість на першій ділянці дорівнювала $\frac{2v_1v'_1}{v_1+v'_1} = 24/7$ км/год. На другій ділянці швидкості в прямому та зворотному напрямках дорівнювали 3 км/год і 4 км/год. Середня швидкість знову $\frac{2v_2v'_2}{v_2+v'_2} = 24/7$ км/год.

Ось у чому справа! Яку б довжину не мали ділянки, але, якщо середні швидкості на них однакові, то й загальна середня швидкість буде такою ж. Враховуючи умову «що однозначні відповіді на ці питання задачі існують» приходимо до висновку, що це можливо лише коли на всіх ділянках середні швидкості однакові. Отже на всій трасі та на третій крутій ділянці середня швидкість має дорівнювати $24/7$ км/год. Оскільки крутою ділянкою туристи спускалися зі швидкістю 6 км/год, то з рівняння $\frac{2v_3v'_3}{v_3+v'_3} = 24/7$ км/год знаходимо швидкість підйому 2,4 км/год.

Чи можна було розв'язати задачу послідовно, без проб і порівнянь? Так, можна. Середня швидкість на всьому шляху:

$$v = \frac{2(l_1+l_2+l_3)}{\frac{l_1}{v_1}+\frac{l_2}{v_2}+\frac{l_3}{v_3}+\frac{l_3}{v'_3}+\frac{l_2}{v'_2}+\frac{l_1}{v'_1}} = \frac{2(l_1+l_2+l_3)}{l_1\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v'_1}\right)+l_2\left(\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v'_2}\right)+l_3\left(\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v'_3}\right)}$$

Перейдемо до безрозмірних невідомих величин: $x = l_2/l_1$, $y = l_3/l_1$, від зміни яких, згідно умови, відповідь не залежить (бо є «однозначною») і для спрощення запису введемо позначення:

$$\alpha = \frac{1}{v_1}+\frac{1}{v'_1}, \qquad \beta = \frac{1}{v_2}+\frac{1}{v'_2}, \qquad \gamma = \frac{1}{v_3}+\frac{1}{v'_3}.$$

Тоді $v = \frac{2(1+x+y)}{\alpha+\beta x+\gamma y}$, звідки

$$\alpha v - 2 = x(2-\beta v) + y(2-\gamma v).$$

Значення виразу зліва, у який входить середня швидкість на всьому шляху, буде однозначним, якщо справа коефіцієнти при незалежних одна від одної x та y дорівнюватимуть нулю. Отже, маємо системо

$$\begin{cases} \alpha v = 2, \\ \beta v = 2, \\ \gamma v = 2. \end{cases}$$

З неї знаходимо, що $\alpha = \beta = \gamma$, звідки $v_3 = 2{,}4$ км/год, а $v = 2/\alpha = 24/7$ км/год.

(16) **Модель**: три зчеплених колеса, що рухаються без проковзування в усіх точках дотику: низ (зелене колесо ↔ земля), середина (червоне колесо ↔ світло зелене маленьке колесо), верх (червоне колесо ↔ «вітер»). «Вітер» дме вправо зі швидкістю U. Шукаємо швидкість візка V.

Позначення: радіус великого зеленого колеса $R_з$, радіус внутрішнього світлозеленого колеса — $r_з$, радіус червоного колеса — $R_ч$.

Кроки розв`язку

1. Умова відсутності проковзування на «нижньому рівні» (зелене колесо ↔ земля):

$$V = \omega_з R_з$$

2. Умова відсутності проковзування на «середньому рівні» (червоне колесо ↔ світло зелене маленьке колесо): лінійні швидкості в зоні зачеплення рівні за модулем:

$$\omega_ч R_ч = \omega_з r_з$$

3. Умова відсутності проковзування на «верхньому рівні» (червоне колесо ↔ «вітер»): швидкість верхньої точки червоного відносно землі — це швидкість візка як цілого мінус швидкість обертання точок на ободі червоного колеса:

$$U = V - \omega_ч R_ч = V - \omega_з r_з$$

(знак «мінус», бо в цій конфігурації червоне крутиться проти годинникової стрілки, в іншому випадку ми отримаємо несамоузгоджений результат, перевірте це самостійно).

4. Підставляємо з пункту 1 $\omega_з = \frac{V}{R_з}$ у формулу з пункту 3:

$$U = V - \left(\frac{V}{R_з}\right) r_з = V\left(1 - \frac{r_з}{R_з}\right)$$

5. Розв’язуємо відносно V:

$$V = \frac{U}{1 - \frac{r_з}{R_з}} = U \cdot \left(\frac{R_з}{R_з - r_з}\right)$$

Висновки та відповіді

- А) Візок рухається вправо, швидше за вітер:

$$\frac{V}{U} = \frac{R_з}{R_з - r_з} > 1$$

- Б) Аналогія з вітромобілем є. У вітромобілі колеса ↔ земля, гвинт ↔ повітря, а «шестеренчастий зв’язок» ↔ механічний редуктор між колесами та гвинтом.
- В) Так, стабільний рух швидше вітру можливий. В ідеальній моделі (без втрат) відношення швидкостей:

$$\frac{V}{U} = \frac{R_з}{R_з - r_з}$$

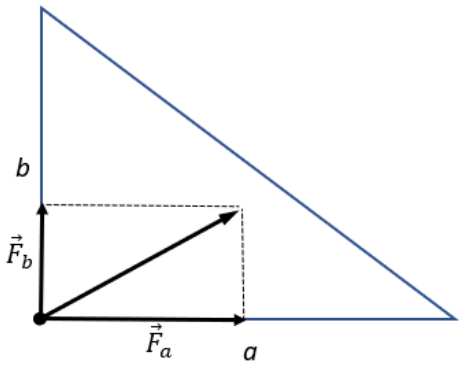
Межі: якщо $r_з \to 0$, маємо $V \to U$(без виграшу). Якщо $r_з \to R_з$, теоретично $\frac{V}{U} \to \infty$(на практиці обмежують втрати, аеродинаміка, міцність).

Корисна примітка. Якщо «контакт» зверху не ідеальний і верхня точка червоного ковзає так, що ефективне зчеплення з повітрям в пункті 3 становить не U, а kU(де $0 < k \leq 1$), тоді:

$$V = \frac{kU}{1 - \frac{r_з}{R_з}}.$$

В даному випадку рух швидше за вітер теж можливий при правильному підборі параметрів.

(17) Максимальною буде сила, коли у найближчому до прямого кута гострому куті трикутника сконцентрується майже весь від'ємний заряд.



$$F_{max} = k\frac{q^2}{b^2} = 100 \text{ нН}.$$

Мінімальна сила

$$F_{min} = k\frac{q^2}{\sqrt{a^4 + b^4}} \approx 49{,}5 \text{ нН}$$

буде при певному розподілі зарядів у гострих кутах трикутника (див. рис.). Її можна знайти без похідної, використавши нерівність Коші або виділивши повний квадрат у загальному виразі $F = \sqrt{F_a^2 + F_b^2}$, де зроблена заміна $|q_1| = q - |q_2|$:

$$F = \frac{kq^2}{b^2}\sqrt{\left(\frac{\sqrt{a^4 + b^4}}{a^2}\frac{|q_2|}{q} - \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^4}}\right)^2 + \frac{b^4}{a^4 + b^4}}.$$

Сила мінімальна, коли вираз у дужках в квадраті має найменше значення, тобто, коли заряд у правому куті $|q_2| = q/(1 + b^4/a^4)$.

Але найбільш зручно знайти мінімальну силу, а далі і годограф, увівши кут α між вектором сили і стороною a, а далі допоміжний кут:

$$F_x = F_a = F\cos\alpha = k\frac{q|q_2|}{a^2},$$

$$F_y = F_b = F\sin\alpha = k\frac{q|q_1|}{b^2}.$$

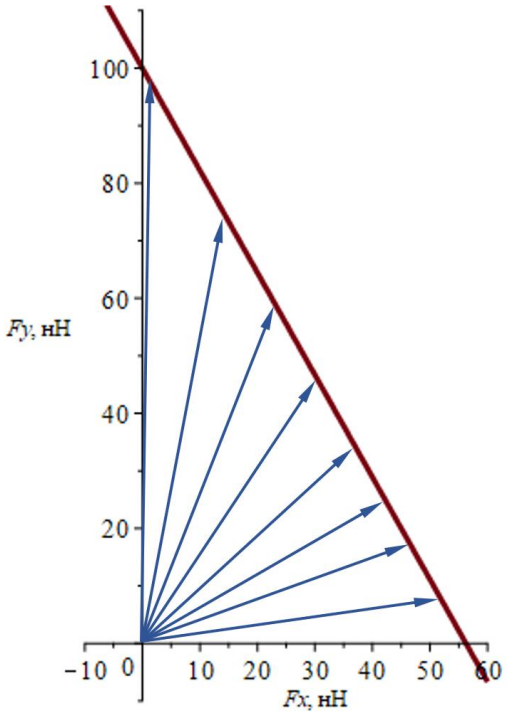
Виражаємо заряди у кутах через силу F і підставляємо у вираз $|q_1| + |q_2| = q$. Звідси виражаємо силу F і вводимо допоміжний кут φ:

$$F = \frac{kq^2}{a^2\cos\alpha + b^2\sin\alpha} = \frac{kq^2}{\sqrt{a^4 + b^4}\sin(\alpha + \varphi)}.$$

Максимальному значенню синуса $\sin(\alpha + \varphi) = 1$ відповідає мінімальне значення сили.

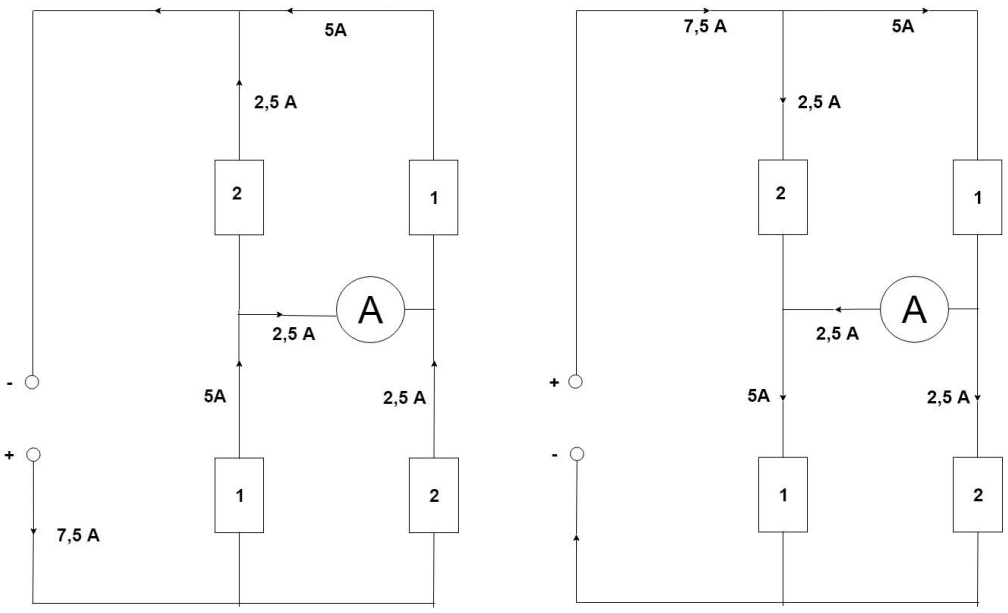
Вирази для F_x і F_y зручні й для побудови годографу. По-перше, вони є координатами сили F, по-друге, з них легко знаходиться $a^2F_x + b^2F_y = kq^2$, або $F_y = F_{max} - \frac{16}{9}F_x$. Це рівняння прямої ($F_y \to y, F_x \to x$), яка і є годографом сили. Тепер мінімальну силу можна знайти й геометрично, як довжину (вимірюється у ньютонах) перпендикуляру, проведеного до цієї прямої з прямого кута.

Як Ви вважаєте, якій фізичній ситуації відповідають точки на продовженні цього годографа за межі трикутника зарядів?

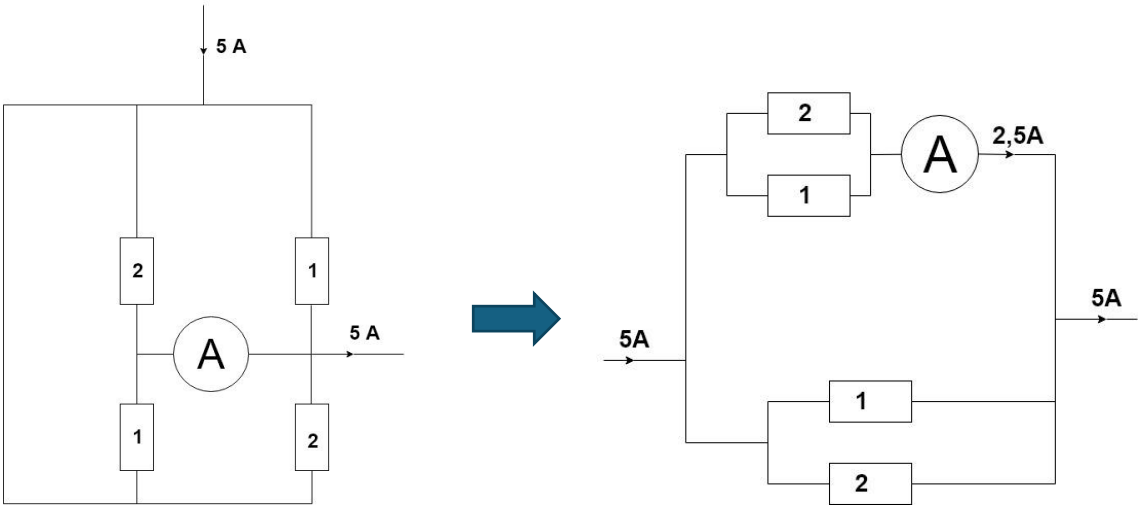


(18) Зрозуміло, що задача може бути розв’язана за допомогою законів Кірхгофа. Пропонуємо зробити це іншим способом. Розглянемо розподіл струмів у ділянках схеми, які відокремлени від зовнішньої схеми, тобто без зовнішнього струму.

Розподіл струмів можна знайти використовуючи закони послідовного та паралельного з’єднання провідників.



Тепер розглянемо як розподіляється по схемі зовнішній струм без урахування джерела.



Накладаючи ці дві схеми отримаємо, що у першому випадку струм через амперметр дорівнюватиме 5 А, а в другому – 0.

(19) А) Розглянемо, яким чином формується тінь від жука. Так як джерело і жук не точкові, тінь формується одночасно за рахунок двох перерізів жука, як 3D-об'єкту (див. рис. 1). Область повної тіні утворюється там, де маємо перетин цих компонент.

Розглянемо поданий графік. Його можна умовно розбити на дві частини, які залежать від того, яка саме компонента визначає повну тінь. На першій частині графіка можна побачити перебування здобичі у повній тіні від компоненти 1, а друга частина задається компонентою 2. Покажемо це через знаходження функції L(h) у обох випадках.

Зрозуміло, що наведена жирним точка на графіку, відповідає тому моменту, коли розмірі тіні за рахунок обох факторів співпадають по параметру L.

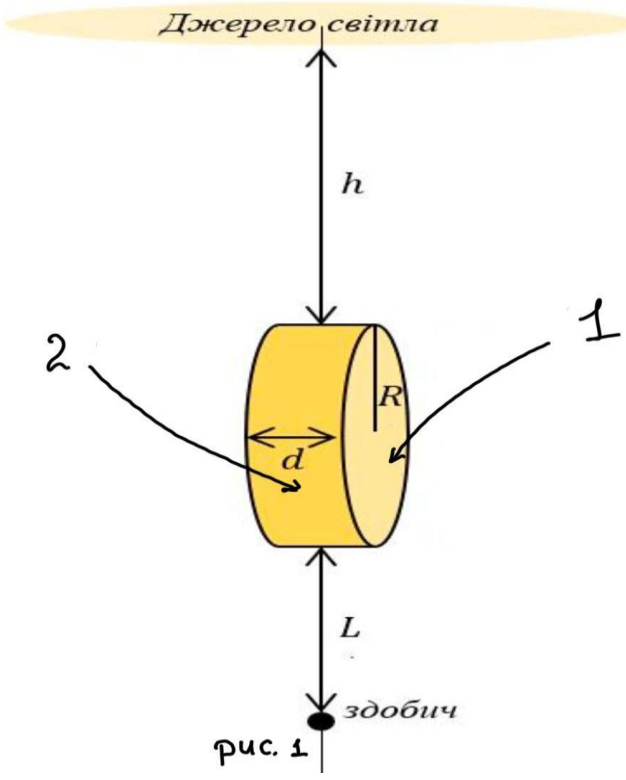


рис. 1

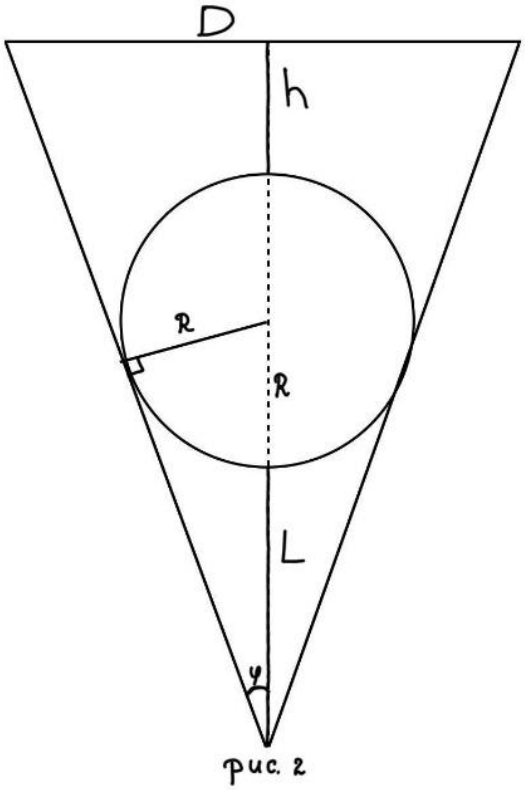


рис. 2

Отримаєм вирази для довжини тіні L для кожного випадку і знайдемо їх відповідність наведеному графіку.

Для отримання виразу L(h) застосуємо подібність трикутників на рисунку та тригонометричні перетворення:

$$\begin{cases} \tan\varphi = \dfrac{D}{2(h+2R+L)} \\ \sin\varphi = \dfrac{R}{R+L} \\ \dfrac{1}{(\sin\varphi)^2} = 1 + \dfrac{1}{(\mathrm{t}g\,\varphi)^2} \end{cases}$$

Підставивши значення синуса і тангенса та спростивши, отримуємо таку залежність:

$$L^2(D^2 - 4R^2) + 2LR(D^2 - 16R^2 - 4hR) - 4R^2(h+4R)^2 = 0$$

$$L^2 = \frac{4R^2(h+4R)^2 - 2LR(D^2 - 16R^2 - 4hR)}{(D^2 - 4R^2)}$$

Бачимо нелінійну залежність розміру тіні, що визначається перекриттям променів перерізом 1 від відстані до лампи.

Розглянемо розмір тіні, що утворюється за рахунок іншого перерізу жука. І у цьому випадку скористаємось подібністю трикутників.

$$\frac{d}{L} = \frac{D}{h+2R+L}$$

Звідси

$$L = \frac{2R+h}{D-d}d$$

Отримали пряму залежність, що і треба було довести.

Б) Для знаходження радіуса скористаємось ділянкою з прямою залежністю на графіку.

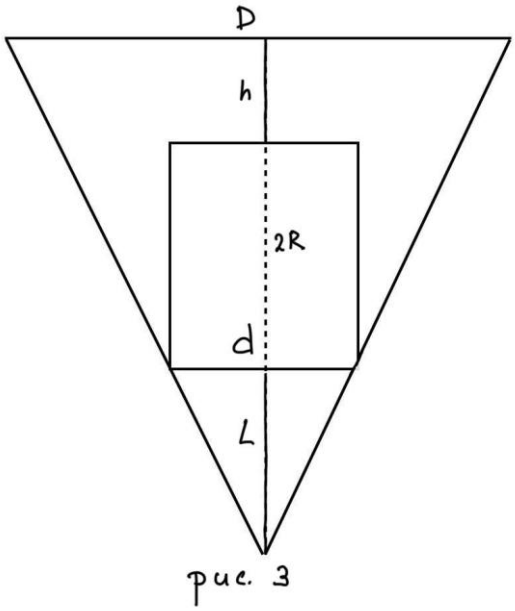
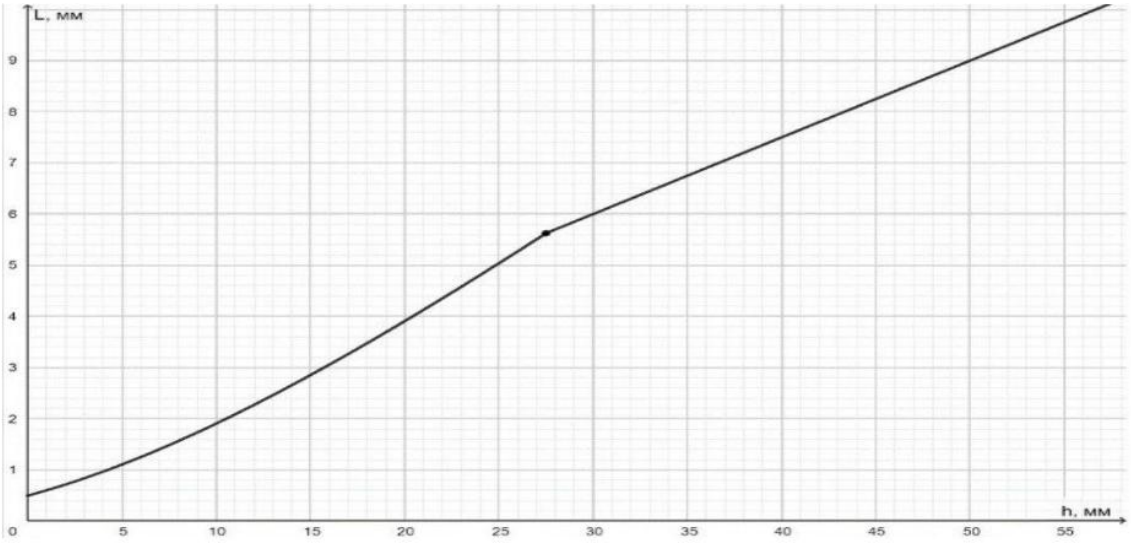


рис. 3



$$L = \frac{d}{D-d}h + \frac{2R}{D-d}d$$

Таким чином, чітко видно, що коефіцієнт нахилу прямої $k = \frac{d}{D-d}$ можна визначити за двома точками на графіку. Візьмемо (30;6) та (50;9).

$$k = \frac{9-6}{50-30} = \frac{3}{20} = \frac{d}{D-d}$$

$$L = h \cdot k + 2R \cdot k$$

Для знаходження R достатньо використати будь-яку точку з другої частини графіка, наприклад, (30;6). Тоді

$$R = \frac{L}{2k} - \frac{h}{2} = \frac{6 \cdot 20}{2 \cdot 3} - \frac{30}{2} = 5(\text{мм})$$

В-Г) Для знаходження характерних розмірів жука d та D знов скористаємось графіком та коефіцієнтом k з п.Б.

$$\sin\varphi = \frac{R}{R+L}$$

$$\cos\varphi = \sqrt{1-(\sin\varphi)^2} = \frac{\sqrt{2RL+L^2}}{R+L}$$

$$\tan\varphi = \frac{D}{2(h+2R+L)} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{R}{\sqrt{2RL+L^2}}$$

Звідси

$$D = \frac{2R \cdot (h+2R+L)}{\sqrt{2RL+L^2}}$$

Оберемо таку точку на першій частині графіка, щоб L та h можна було співставити з мінімальною похибкою. Наприклад, (25;5). Тоді

$$D = \frac{2 \cdot 5 \cdot (25+2 \cdot 5+5)}{\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 5 + 5 \cdot 5}} = \frac{80 \cdot \sqrt{3}}{3} \approx 46.19\ (\text{мм})$$

$$k = \frac{d}{D-d} \Longrightarrow d = \frac{k \cdot D}{k+1} \approx 6.02 \text{ (мм)}$$

Відповідь: R = 5 мм, d = 6.02 мм, D = 46.19 мм.

(20) Найпростіше розв'язати задачу у векторній формі з використанням інтегралів. Але можна обійтися і без цього.

Введемо систему координат з початком на біостанції. Вісь OX традиційно спрямуємо вправо, тобто, на схід, а вісь OY вниз на південь вздовж холодного північного вітру. Під час першого польоту вітру не було, і дрон через 2 години повернувся назад. Умову «дрон записав послідовність і час дії всіх команд, щоб потім використовувати в автономному режимі» можна інтерпретувати як відомі залежності проекцій швидкості дрону від часу, які дрон набував у нерухомому повітрі за рахунок роботи двигунів і зміни напрямку руху. Тоді координати у будь-який проміжок часу можуть бути записані як суми їхніх змін за маленькі проміжки часу Δt.

$$x = \sum \Delta x = \sum v_x(t)\Delta t,$$

$$y = \sum \Delta y = \sum v_y(t)\Delta t.$$

Через 2 години координати знову дорівнювали нулю.

Під час другого польоту дув північний вітер, швидкість $v_в$ якого рівномірно збільшувалась. Ця швидкість зносила дрон, і за законом додавання швидкостей додавалася до швидкості дрона відносно повітря. Оскільки вітер дув вздовж осі OY для другого польоту маємо:

$$x = \sum \Delta x = \sum v_x(t)\Delta t,$$

$$y = \sum \Delta y = \sum \big(v_y(t) + v_в\big)\Delta t = \sum v_x(t)\Delta t + \sum v_в \Delta t.$$

Згідно записаної програми польоту через 2 години

$$\sum v_x(t)\Delta t = \sum v_y(t)\Delta t = 0,$$

Отже координати посадки дрона будуть:

$$x = 0$$

$$y = \sum v_в \Delta t.$$

Не складно довести (алгебраїчно або арифметично), що під час рівномірного збільшення швидкості пройдену відстань можна знайти як добуток середньоарифметичної швидкості на весь час руху. У нашому випадку:

$$y = \sum v_в \Delta t = \frac{v_{в1} + v_{в2}}{2} t = 18 \text{ км}.$$

Отже, незалежно від траєкторії та режиму обльоту біосферного заповідника, дрон слід шукати на 18 км південніше біостанції.

(21) а) За відсутності оболонок потрібна потужність $P_0 = 4\pi R_0^2 \cdot \sigma T_0^4$. Якщо є одна оболонка, то вона отримує випромінювання від апарату та випромінює енергію як назовні, так і

всередину. Температура T_1 внутрішньої та зовнішньої поверхонь оболонки однакова. Проте слід урахувати, що частина випромінювання всередину поглинається знов-таки самою оболонкою. Якби температура оболонки була T_0, то між апаратом і оболонкою встановилася б теплова рівновага. Отже, коли температура оболонки T_1, апарат отримує від оболонки потужність $4\pi R_0^2 \cdot \sigma T_1^4$ (а не $4\pi R_1^2 \cdot \sigma T_1^4$, як могло б здатися). Баланс енергії має вигляд:

$$P_1 = 4\pi R_0^2 \cdot \sigma(T_0^4 - T_1^4) = 4\pi R_1^2 \cdot \sigma T_1^4.$$

Звідси $T_1^4 = \frac{R_0^2}{R_0^2+R_1^2} T_0^4$, $P_1 = \frac{R_1^2}{R_0^2+R_1^2} P_0$. Легко бачити, що найбільший виграш у потужності отримуємо за умови $R_1 \approx R_0$, тоді $P_1 = \frac{1}{2} P_0$ (цей результат легко було передбачити).

Якщо застосовуються дві концентричні з апаратом оболонки, то

$$P_2 = 4\pi R_0^2 \cdot \sigma\left(T_0^4 - T_{1/2}^4\right) = 4\pi R_2^2 \cdot \sigma T_2^4,\ T_{1/2}^4(R_0^2 + R_1^2) = T_0^4 R_0^2 + T_2^4 R_1^2.$$

Тут $T_{1/2}$ — температура першої оболонки за наявності ще й другої.

Звідси $T_2^4 = \frac{R_0^2 R_1^2}{R_0^2 R_1^2 + R_0^2 R_2^2 + R_1^2 R_2^2} T_0^4$, $T_{1/2}^4 = \frac{R_0^2(R_1^2+R_2^2)}{R_0^2 R_1^2 + R_0^2 R_2^2 + R_1^2 R_2^2} T_0^4$ і потужність $P_2 = \frac{R_1^2 R_2^2}{R_0^2 R_1^2 + R_0^2 R_2^2 + R_1^2 R_2^2} P_0$. Якщо переписати це співвідношення у вигляді $\frac{P_0}{P_2} = 1 + \frac{R_0^2}{R_1^2} + \frac{R_0^2}{R_2^2}$, то очевидно, що максимальний виграш у потужності отримуємо за умови $R_2 \approx R_1 \approx R_0$, тоді $P_2 = \frac{1}{3} P_0$ (виграш у потужності в 3 рази).

b) З умови та результату пункту *a* випливає, що тепер потрібна потужність джерела тепла $\frac{1}{4} P_0$. Позначимо температури внутрішньої та зовнішньої поверхонь оболонки відповідно T_{in} і T_{out}. Різниця цих температур пропорційна тепловому потоку крізь оболонку:

$$T_{\text{in}} - T_{\text{out}} = A \cdot \frac{1}{4} P_0,$$

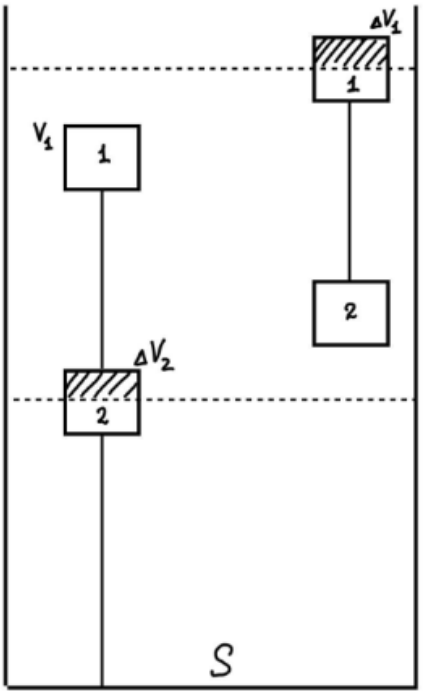
де A — коефіцієнт, що залежить від матеріалу та товщини оболонки. Тоді баланс енергії має вигляд $\frac{1}{4} P_0 = 4\pi R_0^2 \cdot \sigma(T_0^4 - T_{\text{in}}^4) = 4\pi R_1^2 \cdot \sigma T_{\text{out}}^4$.

Звідси $T_{\text{in}}^4 = \frac{3}{4} T_0^4, T_{\text{out}}^4 = \frac{R_0^2}{4R_1^2} T_0^4$. Якщо відразу обмежитися оптимальним випадком $R_1 \approx R_0$, маємо $T_{\text{out}}^4 = \frac{1}{4} T_0^4$. Отже, $A = \frac{3^{1/4}-1}{\pi\sqrt{2}\sigma R_0^2 T_0^3}$.

Повторивши ці розрахунки для потужності $\frac{1}{8} P_0$, отримаємо нові значення температур поверхонь оболонки: $T_{\text{out}}^* = \frac{1}{8^{1/4}} T_0$, $T_{\text{in}}^* = \frac{7^{1/4}-1}{8^{1/4}} T_0$. Отже, нове значення коефіцієнту $A^* = \frac{2\left(7^{1/4}-1\right)}{8^{1/4}\pi\sigma R_0^2 T_0^3}$.

Таким чином, $A^* = \frac{2^{3/4}\left(7^{1/4}-1\right)}{3^{1/4}-1} A \approx 3{,}33A$. Відповідний коефіцієнт для *тонкої* сферичної оболонки, як і для плоскої, пропорційний її товщині. Це означає, що товщину оболонки слід збільшити в 3,33 рази.

(22) Запишемо умови рівноваги на всю систему в двох випадках. В першому випадку сили Архімеда діють на два тіла протидіють силі натягу нижньої мотузки та сумарній силі тяжіння mg двох тіл. В другому випадку сили Архімеда протидіють лише силі тяжіння.



$$\begin{cases} \rho_в g V_1 + \rho_в g \Delta V_2 + \rho_р g (V_2 - \Delta V_2) = mg + T \\ \rho_в g (V_1 - \Delta V_1) + \rho_в g V_2 = mg \end{cases}$$

$\Delta h_2 = \frac{V_2 - \Delta V_2}{S}$ – зниження рівня ртуті

$\Delta h_1 = -\frac{\Delta V_1}{S} + \frac{V_2 - \Delta V_2}{S}$ – збільшення товщини шару води.

Віднімемо два рівняння в системі вище щоб mg зникло.

$$\rho_в g \Delta V_2 + \rho_в g \Delta V_1 + (\rho_р - \rho_в) g V_2 - \rho_р g \Delta V_2 = T$$

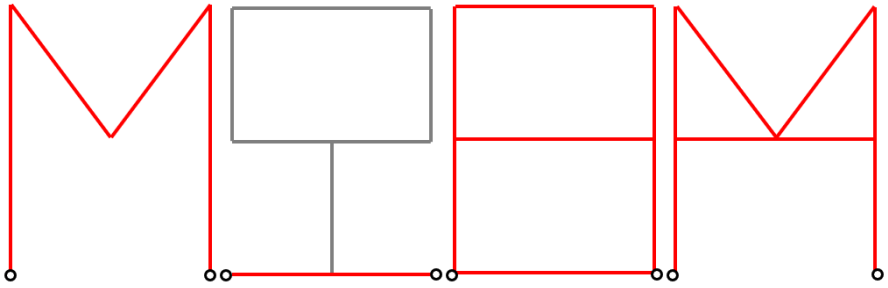
$$\rho_р g (V_2 - \Delta\, V_2) - \rho_в g (V_2 - \Delta V_2) + \rho_в g \Delta V_1 = T$$

$$\Delta h_1 = \Delta h_2 - \frac{\Delta V_1}{S}$$

$$\Delta V_1 = \frac{T - \rho_р g \Delta h_2 S + \rho_в g \Delta h_2 S}{\rho_в g}$$

$\Delta h_1 = \Delta h_2 - \frac{T}{\rho_в g S} + \frac{(\rho_р - \rho_в)\Delta h_2}{\rho_в} = \Delta h_2 \frac{\rho_р}{\rho_в} - \frac{T}{\rho_в g S}$ – збільшення товщини шару води. Якщо $\Delta h_1 < 0$, то буде зменшення товщини шару води.

(23) *Частина 1. Геометричні параметри символів.* Позначимо висоту кожного символу h, а ширину a, а опір одиниці довжини провідника ρ. Тоді запишемо опори усіх трьох символів, для яких відомі опори (з урахуванням того, що по частині провідників струм у них не протікає):



$$\begin{cases} R_1 = \rho\left(2h + \sqrt{h^2 + a^2}\right) \\ R_2 = \rho a \\ R_3 = \rho\left(\dfrac{\left(\dfrac{(a+h)a}{2a+h} + h\right)a}{\dfrac{(a+h)a}{2a+h} + h + a}\right) \end{cases}$$

Визначимо з даної системи співвідношення між висотою та шириною символів. Для цього знадобиться лише два рівняння. Якщо обрати для цієї мети перший та другий елемент:

$$\begin{cases} R_1 = \rho\left(2h + \sqrt{h^2 + a^2}\right) \\ R_2 = \rho a \end{cases} \rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{2h + \sqrt{h^2 + a^2}}{a} = z = \frac{13}{3}$$

$$za - 2h = \sqrt{h^2 + a^2}$$

$$z^2a^2 - 4zah + 4h^2 = h^2 + a^2$$

Отримуємо однорідне квадратне рівняння:

$$(z^2 - 1)\left(\frac{a}{h}\right)^2 - 4z\frac{a}{h} + 3 = 0,$$

звідки:

$$\frac{a}{h} = \frac{2z \pm \sqrt{z^2 + 3}}{z^2 - 1}$$

Числові значення:

$$\frac{a}{h} = \frac{\frac{26}{3} \pm \sqrt{\frac{169}{9} + 3}}{\frac{160}{9}} = \frac{\frac{26}{3} \pm \frac{14}{3}}{\frac{160}{9}}$$

Отримується два можливі варіанти співвідношень:

$$\frac{a}{h} = \frac{9}{40}$$

$$\frac{a}{h} = \frac{3}{4}$$

Для перевіри оберемо другий та третій елемент:

$$\begin{cases} R_3 = \rho\left(\frac{\left(\frac{(a+h)a}{2a+h} + h\right)a}{\frac{(a+h)a}{2a+h} + h + a}\right) \\ R_2 = \rho a \end{cases} \rightarrow \frac{R_3}{R_2} = \frac{\left(\frac{(a+h)a}{2a+h} + h\right)}{\frac{(a+h)a}{2a+h} + h + a} = y = \frac{61}{91}$$

$$\frac{a^2 + 3ah + h^2}{3a^2 + 4ah + h^2} = y$$

$$a^2 + 3ah + h^2 = 3ya^2 + 4yah + yh^2$$

Отримуємо однорідне квадратне рівняння:

$$(1 - 3y)\left(\frac{a}{h}\right)^2 + (3 - 4y)\frac{a}{h} + (1 - y) = 0,$$

звідки:

$$\frac{a}{h} = \frac{4y - 3 \pm \sqrt{(3 - 4y)^2 - 4(1 - 3y)(1 - y)}}{2(1 - 3y)}$$

Числові значення:

$$\frac{a}{h} = \frac{-\frac{29}{91} \pm \sqrt{\left(\frac{29}{91}\right)^2 + 4 * \frac{92}{91} * \frac{30}{91}}}{-\frac{184}{91}} = \frac{-29 \pm 109}{-184}$$

Отримується два можливі варіанти співвідношень:

$$\frac{a}{h} = -\frac{10}{23}$$

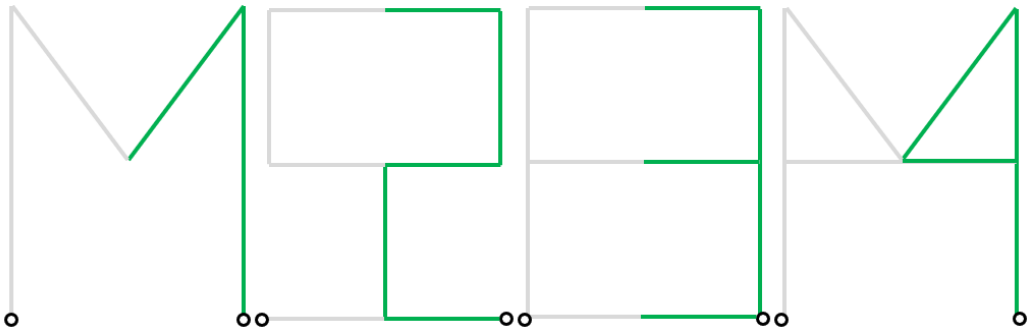
$$\frac{a}{h} = \frac{3}{4}$$

Отже, якщо обрати лише 2 та 3 елемент, співвідношення можна було визначити одразу. Остаточно $\frac{a}{h} = \frac{3}{4}$.

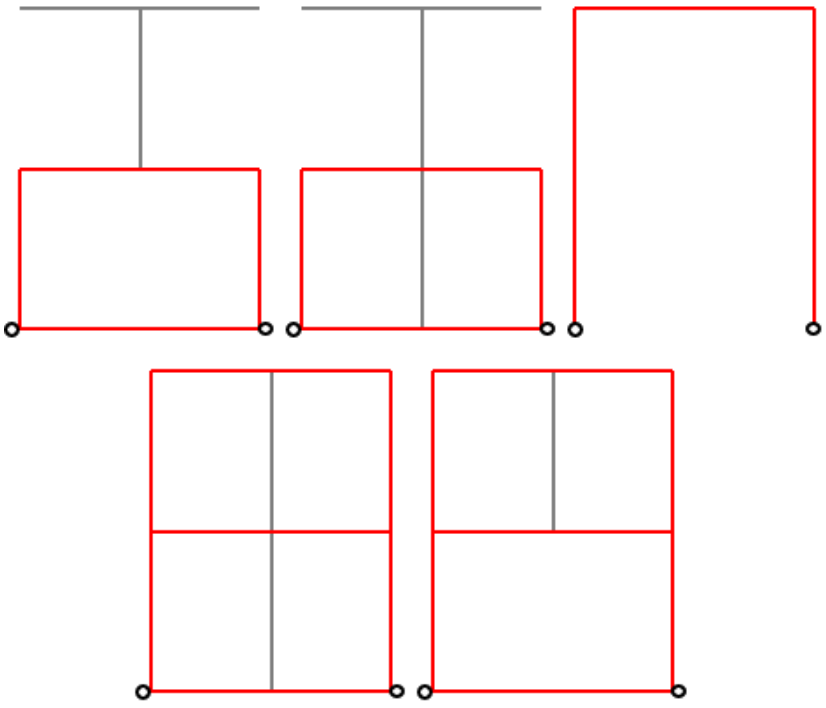
Можна, звичайно, розглянути 1 та 3 елемент, але чомусь видається, що цей варіант також не дасть остаточної відповіді одразу. Пропонуємо учасникам перевірити це самостійно☺

Частина 2. Символи, яких недостає.

Можна помітити, що кожен із наведених символів є симетричним. Якщо закрити ліву частину цього символу, можна побачити, що це звичайні арабські цифри, написані у калькуляторному форматі:



У такому випадку, 5 символів, які залишилось додати до повного коду, мають вигляд:



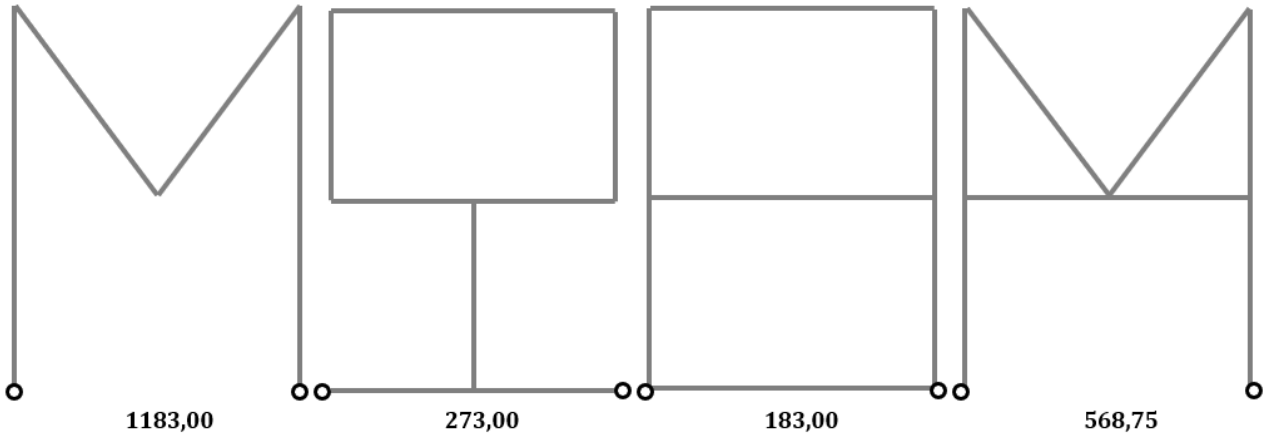
Частина 3. Опори усіх символів

Визначимо опори усіх нових символів (з урахуванням того, що по деяких провідниках у них струм не протікає, див попередній рисунок). Варто зазначити, що у восьмого та дев'ятого символу цей опір повністю буде дорівнювати опору третього символу. А для усіх інших (з урахуванням відомих значень опорів, припустимо, другого елементу, та співвідношення сторін):

$$\begin{cases} R_2 = \rho a \\ h = \frac{4}{3}a \\ R_4 = \rho\left(\frac{\left(\sqrt{h^2+a^2}+h\right)a}{\sqrt{h^2+a^2}+h+a}+\frac{4}{3}a\right) \\ R_5 = R_6 = \frac{\rho(h+a)a}{2a+h} \\ R_7 = \rho(2h+a) \\ R_8 = R_9 = R_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{R_4 = \rho\left(\frac{\left(\frac{5}{3}a+\frac{4}{3}a\right)a}{\frac{5}{3}a+\frac{4}{3}a+a}+\frac{4}{3}a\right) = \frac{25}{12}R_2} \\ \boldsymbol{R_5 = R_6 = \frac{\rho\left(\frac{4}{3}a+a\right)a}{2a+\frac{4}{3}a} = \frac{7}{10}R_2} \\ \boldsymbol{R_7 = \rho\left(\frac{8}{3}a+a\right) = \frac{11}{3}R_2} \\ \boldsymbol{R_8 = R_9 = R_3} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{R_4 = 568,75} \\ \boldsymbol{R_5 = R_6 = 191,10} \\ \boldsymbol{R_7 = 1001,00} \\ \boldsymbol{R_8 = R_9 = R_3 = 183,00} \end{cases}$$

Остаточна відповідь:



(24) Потужність втрат з тіла тварин у навколишнє середовище пропорційна до площі тіла та різниці температур тварини й навколишнього середовища. Температури сталі для звичайного та карликового коня. Отже,

$$P_{\text{втрат}} \sim S.$$

Для життєдіяльності тварини отримують енергію в хімічних реакціях з використанням кисню. Чим більше кисню поглинає тварина, тим більше теплової енергії виділяється. Отже,

$$P_{\text{хім}} \sim \frac{\Delta m_{\text{пов}}}{\Delta t} \sim \frac{\Delta V_{\text{пов}}}{\Delta t}.$$

Звідси, прирівнюючи потужності втрат та виділення тепла:

$$\frac{\Delta V_{\text{пов}}}{\Delta t} \sim S.$$

Кількість вдохів-видохів за одиницю часу дорівнює:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{\Delta V_{\text{пов}}}{\Delta t V_{\text{легень}}},$$

де $V_{\text{легень}}$ – об'єм легень, що пропорційний загальному об'єму тіла тварини, а отже й масі $V_{\text{легень}} \sim M$.

Таким чином,

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \sim \frac{S}{M}.$$

Площа тіла $S \sim V^{2/3} \sim M^{2/3}$. Тоді, остаточно

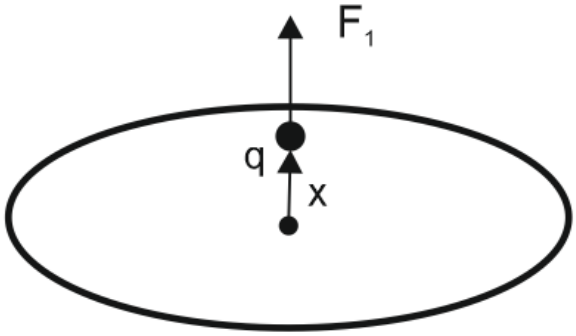
$$\frac{\Delta N}{\Delta t} \sim M^{-1/3}$$

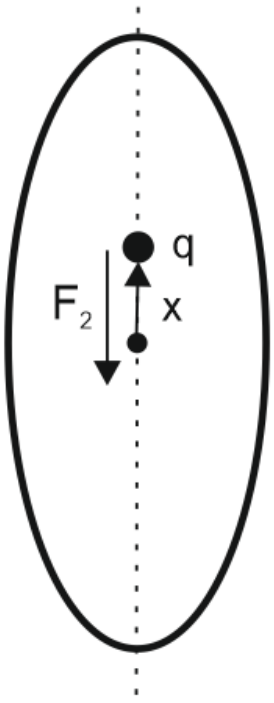
Тварини подібні одна до одної, отже

$$\left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)_{\text{карл.кінь}} = \left(\frac{\Delta N}{\Delta t}\right)_{\text{норм.кінь}} \times \left(\frac{M_{\text{норм.кінь}}}{M_{\text{карл.кінь}}}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 20$$

Тобто, за оцінкою, карликовий кінь за одну хвилину робить вдвічі більше вдохів-видохів, ніж звичайний.

(25) А) При зміщенні заряду від центру системи вздовж осі симетрії одного з кілець на заряд починає діяти дві сили: F_1 перпендикулярно площині одного кільця (див. на рис. внизу зліва) та F_2 вздовж дзеркальної осі симетрії до центру (див. на рис. внизу справа). Сила F_1 відштовхує заряд від центру кільця, адже вони заряджені зарядом однакового знаку. Сила F_2 повертає заряд назад в центр кільця, адже при зміщенні заряду від центру кільця частина зарядів на кільці відштовхують точковий заряд назад в центр із більшою силою, ніж інша частина зарядів виштовхує точковий заряд від центру, адже до одних зарядів на кільці ми наближаємось, а від інших віддаляємось. З симетрії ця сила має обов'язково діяти проти зміщення. Обидві сили діють вздовж однієї прямої, але в різні сторони.





Отже, нехай сила F_a спрямована вздовж F_1 і дорівнює:

$$F_a = F_1 - F_2.$$

Якщо ми зміщуємо заряд від центру вздовж вісі, на якій лежать точки дотику кілець, то сила F_b формується двома силами F_2, які спрямовані в одному напрямку до центру системи. Отже, $F_b = 2F_2$.

Визначити силу F_2 без знання інтегрального числення неможливо. Проте, можна легко визначити силу F_1. Розіб'ємо кільце на велику кількість маленьких ділянок зарядом Δq (див. рис. внизу). Проекція сили, що діє від кожного такого шматочка на наш заряд q, на вертикальний

напрямок (горизонтальні проекції компенсуються з міркувань симетрії) з закону Кулона дорівнює

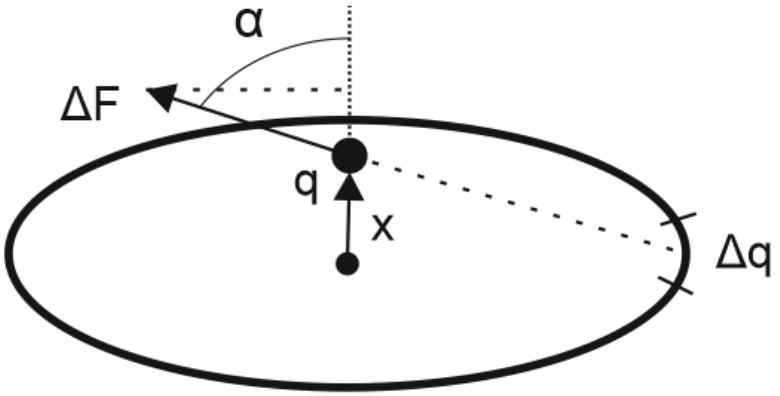
$$\Delta F = k\frac{q\lambda\Delta l}{R^2+x^2}\cos(\alpha) = k\frac{q\lambda\Delta l x}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

Підсумуємо по довжині кола і отримаємо:

$$F_1 = k\frac{2\pi q\lambda R x}{(R^2+x^2)^{3/2}} \approx k\frac{2\pi q\lambda x}{R^2}$$

В результаті $F_b = 2\left(k\frac{2\pi q\lambda x}{R^2} - F_a\right) = 0.9$ Н.

Б) Знайдемо струм, який створює обертання одного зарядженого кільця.



$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{2\pi R\lambda}{T}.$$

Тоді, враховуючи примітку:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 2\pi R\lambda}{2RT} = \frac{\mu_0\pi\lambda}{T}.$$

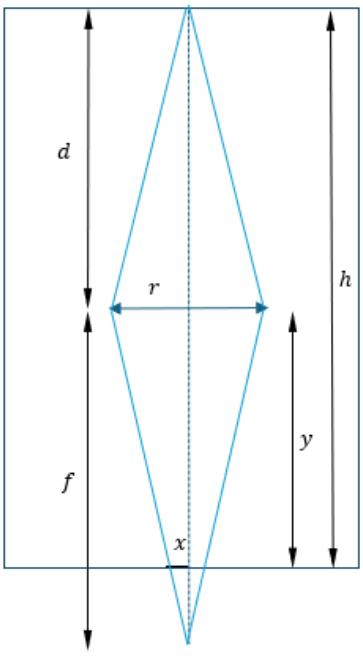
Розглянемо дію одного струму на заряд. Від одного кільця на заряд маємо дію сили Лоренца:

$$F_{\text{л}} = qBV.$$

Така сама за модулем сила діятиме на заряд й з боку другого кільця, але буде спрямована перпендикулярно до сили від першого. Тоді результуюча сила:

$$F_{\text{р}} = \sqrt{2}qBV = \sqrt{2}qV\frac{\mu_0\pi\lambda}{T} = 2\times10^{-9}\text{ Н}.$$

(26) У розрахунках вважатимемо, що лінза має круглу форму радіусом r, який значно менший за відстань від лінзи до джерела d. Припустимо, що внаслідок довгофокусності лінзи під нею на підлозі утворюється світлова пляма несфокусованого світла радіусом x (див. Рис.). Освітленість цієї плями буде пропорційна частині світла $\frac{\pi r^2}{4\pi d^2}$, яку перехоплює лінза своєю площею, й обернено пропорційна до площі світлової плями πx^2, на яку ця енергія спрямовуватиметься. Тобто, якщо загальна потужність джерела P_0, то потужність, що припадає на одиницю площі плями



$$u = \frac{\pi r^2}{4\pi d^2}\frac{P_0}{\pi x^2} \sim \frac{1}{(xd)^2}.$$

Максимальній освітленості відповідає мінімальне значення добутку xd. Знайдемо його з системи рівнянь (див. Рис.) як функцію від y (відстані від лінзи до підлоги)

$$\begin{cases} \frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}, \\ d+y=h, \\ \frac{f}{r}=\frac{f-y}{x}, \end{cases}$$

$$xd=\frac{r}{F}(y^2-hy+hF)=\frac{r}{F}\left(\left(y-\frac{h}{2}\right)^2+h\left(F-\frac{h}{4}\right)\right).$$

Мінімального значення xd набуває, якщо $y=\frac{h}{2}$. Це значення буде додатним, коли $F>\frac{h}{4}$. Така слабка лінза неспроможна сфокусувати зображення (найменша відстань між предметом і дійсним зображенням $4F$). Можна переконатися, що відповідь не зміниться, навіть якщо промені після лінзи розходитимуться (наприклад, за $F>\frac{h}{2}$).

Якщо ж $F<\frac{h}{4}$, прирівняємо xd до нуля, й отримаємо два положення, у яких лінза дає чітке зображення джерела на підлозі:

$$y=\frac{h}{2}\pm\sqrt{h\left(\frac{h}{4}-F\right)}.$$

При чіткому зображенні слід врахувати розмір джерела, щоб вибрати одну з двох відповідей і не отримати формально нескінченної освітленості внаслідок нескінченно малої площі.

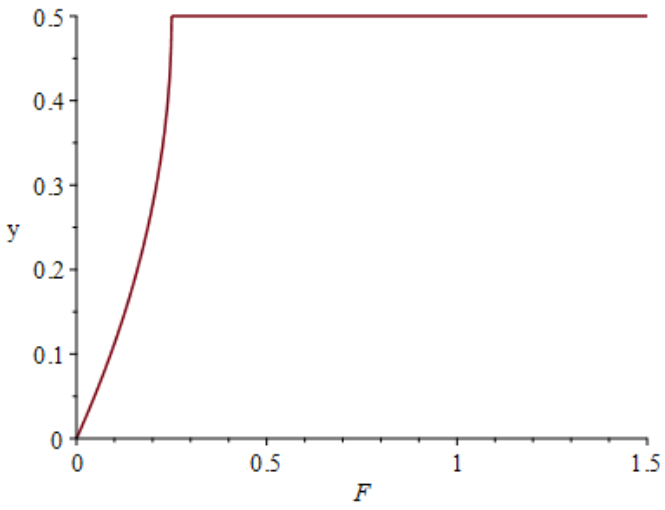
Тепер вже x слід розглядати як відстань між зображеннями центру джерела до і його краю. Якщо джерело має відповідний розмір R, то розмір зображення через лінійне збільшення:

$$x=R\frac{f}{d}=\frac{Ry}{d},$$

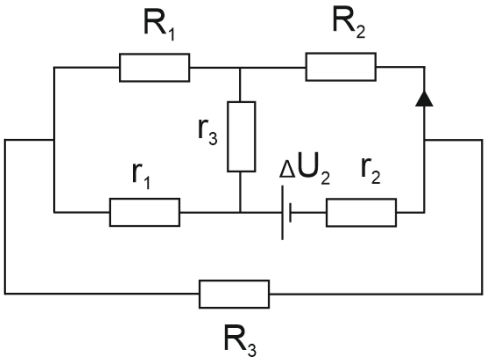
або $xd=Ry$. Мінімум xd відповідає мінімальному y, або

$$y=\frac{h}{2}-\sqrt{h\left(\frac{h}{4}-F\right)}.$$

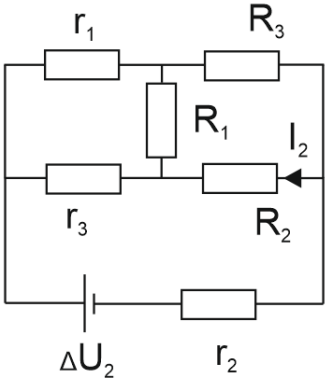
Отже, в залежності від фокусної відстані, маємо або останню формулу для більш короткофокусних лінз $F<\frac{h}{4}$, або $y=\frac{h}{2}$ для всіх інших $F\geq\frac{h}{4}$. Графічно в одиницях висоти стелі h залежність відстані від лінзи до підлоги від фокусною відстані має вигляд як на рисунку справа.



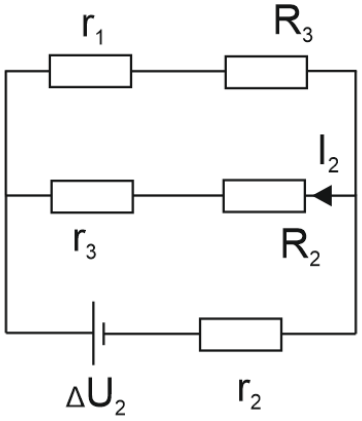
(27) Будемо використовувати метод накладання. Розглянемо схему, яка утворюється з попередньої шляхом заміни $U_1=U_3=0$, а $U_2=\Delta U_2$, тобто шуканій в задачі зміні значення напруги другої батарейки. При цьому в такій новій схемі струм через R_2 має змінити напрямок. Тоді, при накладанні нової схеми на стару струм через R_2 стане рівним 0.



Цю схему можна перерисувати наступним чином.



Далі можна помітити, що $\frac{r_1}{R_3} = \frac{r_3}{R_2}$. Отже, через резистор R_1 струм не тече і ми отримуємо більш просту схему.



Звідси легко отримати, що

$$I_2 = -\Delta U_2 \frac{r_1 + R_3}{r_2(r_1 + R_3 + r_3 + R_2) + (r_1 + R_3)(r_3 + R_2)}$$

Значить, $\Delta U_2 < 0$ і дорівнює $\Delta U_2 = -20$ В.

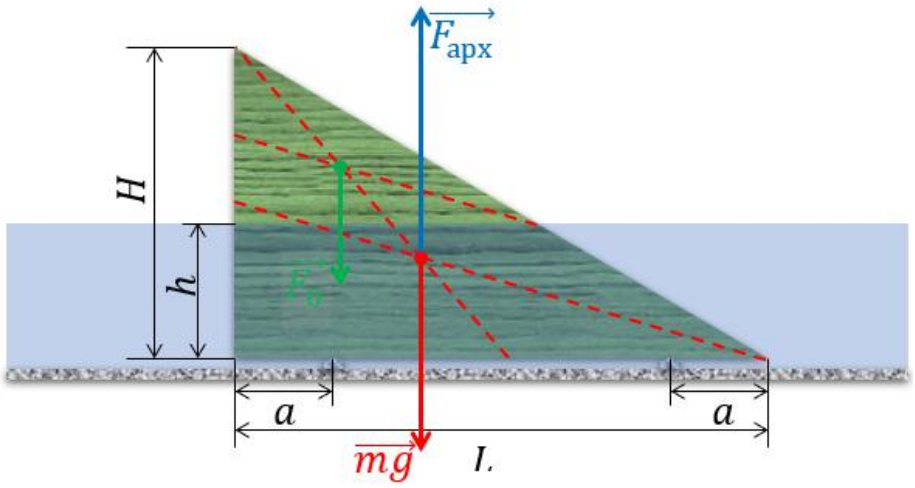
Тобто, потрібно зменшити U_2 на 20 В.

(28) На перший погляд, машинка має декілька варіантів руху: вона може почати спливати поступально під дією сили Архімеда, або ж спливати, обертаючись навколо лівої опори (див. рисунок). Розглянемо сили, які діють на машинку у цих випадках.

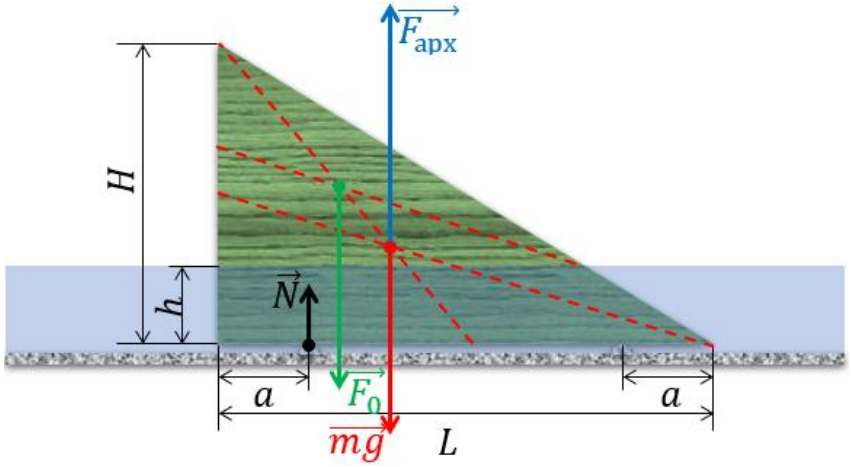
В обох випадках на машинку діє сила Архімеда, оскільки її нижня частина з усіх боків оточена водою, адже вода підтікає під неї.

Характеризувати дію сили Архімеда на машинку можна декількома способами, оскільки її підводна частина має неправильну форму. У даному випадку будемо розглядати ситуацію, немов би уся машинка занурена під воду, а її верхня частина при цьому оточена рідиною з такою ж густиною, як у води, за модулем, але протилежною за знаком. У такому випадку на верхню (надводну) частину машинки буде діяти «обернена» сила Архімеда, спрямована донизу. Такий спосіб обрано для зручності, оскільки у такому випадку усі сили Архімеда будуть прикладені до центрів мас усієї машинки та її надводної частини (точок перетину медіан трикутників на рисунку).

Варіант №1. Машинка спливає поступально (умова початку руху – відсутність сил нормальної реакції опори):



Варіант №2. Машинка спливає, обертаючись навколо лівої опори (умова початку руху – відсутність сили нормальної реакції опори на правій опорі):



У такому випадку з боку лівої опори на машинку діє деяка сила нормальної реакції опори, спрямована вгору.

Оскільки в обох випадках машинка все ще перебуває у стані спокою, рівнодійна сил, що діють на неї, повинна дорівнювати нулю. З огляду на це, у другому випадку обернена сила Архімеда F_0 повинна бути більшою, ніж у першому випадку, для того, щоб компенсувати силу нормальної реакції опори. Тобто **другий варіант настане за меншої висоти води у ванні h, а отже раніше за умовою задачі. Тому розглядати треба саме його.**

Окрім закону рівноваги для поступального руху, дана ситуація описується також законом рівноваги для обертального руху (правилом моментів), оскільки машинка тільки починає обертатись. У якості вісі обертання оберемо ліву опору машинки і врахуємо, що медіани трикутників діляться у точці перетину у співвідношенні 2:1, починаючи від вершини:

$$(F_a - mg)\left(\frac{L}{3} - a\right) = F_0\left(\frac{L(H-h)}{3H} - a\right),$$

$$F_a = \rho_в g \frac{HLb}{2},$$

$$mg = \rho g \frac{HLb}{2},$$

$$F_0 = \rho_в g \frac{(H-h)^2 Lb}{2H}.$$

Підставимо вирази усіх сил у першу формулу:

$$g\frac{HLb}{2}(\rho_в - \rho)\left(\frac{L}{3} - a\right) = \rho_в g \frac{(H-h)^2 Lb}{2H}\left(\frac{L(H-h)}{3H} - a\right),$$

$$\left(1 - \frac{\rho}{\rho_в}\right)\left(\frac{L}{3} - a\right) = \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2\left(\frac{L}{3}\left(1 - \frac{h}{H}\right) - a\right),$$

$$\left(1 - \frac{\rho}{\rho_в}\right)\left(1 - \frac{3a}{L}\right) = \left(1 - \frac{h}{H}\right)^2\left(\left(1 - \frac{h}{H}\right) - \frac{3a}{L}\right).$$

Введемо заміни:

$$x = 1 - \frac{\rho}{\rho_в}; \quad y = 1 - \frac{3a}{L}; \quad z = 1 - \frac{h}{H}.$$

Тоді:

$$xy = z^2(z + y - 1),$$

або

$$z^3 + (y-1)z^2 - xy = 0.$$

Отримане кубічне рівняння розв'яжемо, підставивши числові значення:

$$x = 1 - \frac{750}{1000} = 0{,}25 = \frac{1}{4}; \quad y = 1 - \frac{3 * 0{,}22}{1{,}2} = 0{,}45 = \frac{9}{20}.$$

$$z^3 - \frac{11}{20}z^2 - \frac{9}{80} = 0.$$

Методів розв'язання даного кубічного рівняння багато: можна скористатись методом ітерацій, чи схемою Горнера. Приміром, за схемою Горнера необхідно шукати розв'язок даного рівняння серед дільників вільного члена 9/80 і вони повинні бути додатними за умовою задачі:

	1	$-\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{20}}$	**0**	$-\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{80}}$	**0**
$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{20}$	$-\frac{1}{40}$	$-\frac{1}{8}$	Не корінь
$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{3}{40}$	$-\frac{21}{160}$	Не корінь
$\mathbf{\frac{3}{4}}$	**1**	$\mathbf{\frac{1}{5}}$	$\mathbf{\frac{3}{20}}$	**0**	**Корінь**

Аналогічний корінь можна отримати при розв'язанні даного рівняння будь-яким іншим методом. Пропонуємо переконатись вам у цьому самостійно.

Квадратне рівняння відносно z, яке отримується у залишку:

$$z^2 + \frac{1}{5}z + \frac{3}{20} = 0,$$

має дискримінант:

$$D = \frac{1}{25} - \frac{3}{5} = -\frac{14}{25},$$

а отже не має дійсних коренів.

Тобто, єдиний дійсний корінь вихідного кубічного рівняння:

$$z = 1 - \frac{h}{H} = \frac{3}{4},$$

звідки

$$\boxed{\boldsymbol{h = \frac{H}{4} = 20\ \text{см} = 0,2\ \text{м}}}.$$

Окремо слід зауважити, що дію сили Архімеда можна розглядати і розбиваючи підводну частину машинки на будь-які прості фігури, не вводячи обернену силу Архімеда. Не дивлячись на те, що такі методи є важчими з точки зору математичних перетворень, вони все одно приводять до наведеного вище кубічного рівняння і дають той же результат. Пропонуємо вам переконатись у цьому самостійно.

(29) А) Позначимо через x частину дороги, що проходить крізь місто, а через L її загальну довжину. Тоді середня швидкість на всьому шляху:

$$v = \frac{L}{\frac{(1-x)L}{v_1} + \frac{xL}{v_2}} = \frac{v_1 v_2}{(1-x)v_2 + xv_1},$$

звідки

$$x = \frac{v_2(v_1 - v)}{v(v_1 - v_2)} = 0{,}4.$$

Б) Півколо довше за діаметр у $\pi/2$ разів. Час руху, який дорівнював

$$t_0 = \frac{(1-x)L}{v_1} + \frac{xL}{v_2} = \left(\frac{3}{v_1} + \frac{2}{v_2}\right)\frac{L}{5},$$

стане

$$t = \frac{(1-x)L}{v_1} + \frac{\pi}{2}\frac{xL}{v_3} = \left(\frac{3}{v_1} + \frac{\pi}{v_3}\right)\frac{L}{5}.$$

Зворотна подорож виявиться швидшою на

$$(t_0 - t)/t_0 \cdot 100\% = \frac{4-\pi}{8} \cdot 100\% \approx 10{,}73\%.$$

В) Уявимо точки в’їзда і виїзда з міста з’єднані двома дорогами: початковою крізь місто довжиною xL і об’їзною довжиною $l = \pi xL/2$, і задамося питанням, яку форму слід надати цим дорогам, щоб обмежена ними площа була максимальною. Обмеживши свою уяву закріпленими точками з фіксованою відстанню між ними ми, ймовірно, отримаємо не найбільше значення

площі. Якщо можна подумки деформувати лінію доріг, то чому б у пошуках максимальної площі не рухати разом з ними і ці точки наче два вузли на замкненій вірьовці? Найбільшу площу з заданим периметром має коло. Оскільки у нашого кола периметр $xL + \pi xL/2 = xL(1 + \pi/2) = 2l(1 + \pi/2)/\pi$, його радіус

$$R = \frac{l(2+\pi)}{2\pi^2},$$

а площа

$$S_{max} = \frac{l^2}{4\pi^3}(\pi + 2)^2.$$

(30) При збільшенні температури, збільшується тепловіддача, і наступає тепловий баланс, коли все тепло, що виділяється при проходженні струму, йде врешті-решт на нагрів навколишнього середовища. Отже

$$\frac{U^2}{R_0(1+\alpha\Delta t)} = kS\Delta t,$$

де $R_0 = 4\rho_0 l/(\pi d^2)$, $S = \pi dl$, l – довжина дроту, d – його діаметр.

Маємо рівняння

$$\frac{A}{l^2} = \Delta t(1 + \alpha\Delta t), \qquad (1)$$

де $A = \frac{U^2 d}{4k\rho_0}$ – стала величина. Випадок, коли нехтуємо зміною опору при нагріванні, отримуємо, дорівнявши α до 0. Запишемо систему однотипових рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{A}{a^2} = \Delta t_a(1 + \alpha\Delta t_a), \\ \dfrac{A}{(b+c)^2} = \Delta t_{b+c}(1 + \alpha\Delta t_{b+c}), \\ \dfrac{A}{b^2} = \Delta t_b(1 + \alpha\Delta t_b), \\ \dfrac{A}{(a+c)^2} = \Delta t_{a+c}(1 + \alpha\Delta t_{a+c}), \end{cases}$$

з якої знаходимо:

$$\Delta t_{a+c}(1 + \alpha\Delta t_{a+c}) = \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta t_{b+c}(1+\alpha\Delta t_{b+c})}} + \frac{1}{\sqrt{\Delta t_a(1+\alpha\Delta t_a)}} - \frac{1}{\sqrt{\Delta t_b(1+\alpha\Delta t_b)}}\right)^{-2}.$$

Для першого випадку ($\alpha = 0$):

$$\Delta t_{a+c} = \left(\frac{1}{\sqrt{\Delta t_{b+c}}} + \frac{1}{\sqrt{\Delta t_a}} - \frac{1}{\sqrt{\Delta t_b}}\right)^{-2} = \left(\frac{60}{\sqrt{6}+1}\right)^2 ℃ \approx 231℃.$$

Для другого випадку маємо квадратне рівняння:

$$\alpha\Delta t_{a+c}^2 + \Delta t_{a+c} = \left(\frac{10}{1/\sqrt{6}+1/4}\right)^2 ℃ \approx 596\ ℃,$$

додатний розв'язок якого $\boldsymbol{\Delta t_{a+c} \approx 260}$℃, що приблизно на $\boldsymbol{30}$℃ більше за розрахунок без врахування залежності опору від температури.

Співвідношення сторін вольфрамового трикутника легко знайти з системи рівнянь. Так, поділивши третє рівняння системи (2) на перше і друге, отримаємо:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\Delta t_b(1+\alpha\Delta t_b)}}{\boldsymbol{\Delta t_a(1+\alpha\Delta t_a)}}} = \begin{cases} \boldsymbol{\sqrt{8/3} \approx 1,63}, \text{якщо } \boldsymbol{\alpha = 0}, \\ \boldsymbol{\sqrt{6} \approx 2,45}, \text{якщо } \boldsymbol{\alpha \neq 0} \end{cases}$$

і

$$\frac{\boldsymbol{b+c}}{\boldsymbol{b}} = \sqrt{\frac{\boldsymbol{\Delta t_b(1+\alpha\Delta t_b)}}{\boldsymbol{\Delta t_{b+c}(1+\alpha\Delta t_{b+c})}}} = \begin{cases} \boldsymbol{2}, \text{якщо } \boldsymbol{\alpha = 0}, \\ \boldsymbol{2\sqrt{3} \approx 3,46}, \text{якщо } \boldsymbol{\alpha \neq 0}. \end{cases}$$

З останнього маємо, що

$$\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}} = \begin{cases} \boldsymbol{1}, \text{якщо } \boldsymbol{\alpha = 0}, \\ \boldsymbol{2\sqrt{3} - 1 \approx 2,46}, \text{якщо } \boldsymbol{\alpha \neq 0}. \end{cases}$$

Отже, співвідношення сторін вольфрамового трикутника

$$\boldsymbol{a : b : c} \approx \begin{cases} \boldsymbol{1,63 : 1 : 1}, \text{якщо } \boldsymbol{\alpha = 0}, \\ \boldsymbol{2,45 : 1 : 2,46}, \text{якщо } \boldsymbol{\alpha \neq 0}. \end{cases}$$

Якщо знехтувати зміною опору при нагріванні ($\alpha = 0$), отримуємо рівнобедрений трикутник зі сторонами $b = c$. Якщо врахувати лінійну залежність опору від температури, отримуємо трикутник, близький до рівнобедреного, тільки тепер ці бедра будуть a і c.

В) Оцінимо час τ нагріву вольфрамового дроту на перші 100 ºС, взявши, наприклад, середню різницю температур $\Delta t = 50$℃. Тоді енергія за час τ піде не тільки на теплові втрати у навколишнє середовище, але й на нагрів вольфрамового дроту:

$$\frac{U^2}{R_0(1+\alpha\Delta t)}\tau = kS\Delta t\tau + cm \cdot 2\Delta t,$$

звідки

$$\tau = \frac{2cm\Delta t}{\dfrac{U^2}{R_0(1+\alpha\Delta t)} - kS\Delta t} = \frac{2c\rho_0\rho\Delta t(1+\alpha\Delta t)}{\left(\dfrac{U}{l}\right)^2\left(1 - l^2\dfrac{\Delta t(1+\alpha\Delta t)}{A}\right)},$$

де сталу A визначимо з першого рівняння системи:

$$\tau = \frac{2c\rho_0\rho\Delta t(1+\alpha\Delta t)}{\left(\dfrac{U}{l}\right)^2\left(1 - \dfrac{\Delta t(1+\alpha\Delta t)}{\Delta t_a(1+\alpha\Delta t_a)}\right)} = \frac{2c\rho_0\rho}{\left(\dfrac{U}{l}\right)^2\left(\dfrac{1}{\Delta t(1+\alpha\Delta t)} - \dfrac{1}{\Delta t_a(1+\alpha\Delta t_a)}\right)} \approx 19 \text{ мкс}.$$

Час нагріву вольфрамового дроту на перші 100 ºС без врахування зміни опору з температурою ($\alpha = 0$) дорівнює приблизно 16 мкс.

Отже дріт нагрівається на перші 100 ºС дуже швидко, приблизно за 20 мкс.

(31) Позначимо ребра крижини *a=11 см*, *b=9 см* та *c=4 см*. Довжина ребра акваріума *L=12 см*.

Маса льоду: $m_Л = \rho_Л V_Л = \rho_Л (abc - \frac{m_M}{\rho_M}) = 347{,}4 (г)$, де $m_Л$ – маса льоду; $\rho_Л$ – густина льоду; m_M – маса металевої кульки; ρ_M – густина металу

Початковий об'єм води в акваріумі (до танення льоду): $V_П = \frac{m_B}{\rho_B} = 812\ (см^3)$, де m_B – початкова маса води; ρ_B – густина води.

Розглянемо різні випадки занурення крижини.

I. Крижину ставлять на грань <u>ac</u> .

Визначимо чи буде крижина плавати чи стоятиме на дні.

Запишемо умову плавання крижини:

$(m_л + m_м)g = F_A$

$(m_л + m_м)g = \rho_B g V_0$

$m_л + m_м = \rho_B\, ac\, h_0$, звідки $h_0 = \frac{m_л + m_м}{\rho_B\, ac} \approx 8{,}58\ (см)$ (1) - висота підводної частини крижини

Визначимо яким буде рівень води в акваріумі h_1 після занурення крижини, якщо крижина стоятиме на дні: $V_П = h_1 (L^2 - ac)$, звідки $h_1 = \frac{V_П}{L^2 - ac} \approx 8{,}12\ (см)$ (2)

Оскільки $h_1 < h_0$, отже, за такого розташування крижина плавати НЕ буде, а стоятиме на дні і буде занурена на 8,12 см.

Об'єм води, який витіснятиме крижина, стоячи на дні: $V_{ДО} = h_1 ac \approx 357{,}28\ (см^3)$

Коли лід розтане, а металева кулька потоне, об'єм утвореної із льоду води та води, яка витіснена металевою кулькою, дорівнюватиме: $V_{ПІСЛЯ} = \frac{m_Л}{\rho_B} + \frac{m_M}{\rho_M} \approx 357{,}4\ (см^3)$

Тоді, зміна висоти рівня води: $\Delta h = \frac{V_{ПІСЛЯ} - V_{ДО}}{L^2} \approx 0{,}00083\ (см)$

Отриманий числовий результат має значущі цифри на четвертому місці після коми, що значно перевищує точність вхідних даних. Отже, можна вважати, що при такому зануренні крижини після її танення рівень рідини в посудині не зміниться.

Висновок: якщо крижину поставити на грань ac, то після танення крижини рівень води в посудині не зміниться.

II. Крижину ставлять на грань <u>ab</u> .

Визначимо чи буде крижина плавати чи стоятиме на дні. Запишемо умову плавання крижини:

за формулою (1) знайдемо висоту зануреної частини крижини: $h_0 = \frac{m_л + m_м}{\rho_B\, ab} \approx 3{,}81\ (см)$

за формулою (1) визначимо яким буде рівень води в акваріумі h_1 після занурення крижини, якщо крижина стоятиме на дні:

$$h_1 = \frac{V_П}{L^2 - ab} \approx 18\ (см)$$

$$h_1 > 4\ см$$

Оскільки $h_0 < h_1$, отже, за такого розташування крижина БУДЕ ПЛАВАТИ у воді занурена на 3,81 см своєї висоти ($a=4$ *см*).

Об'єм води, який витіснятиме крижина при плаванні можна знайти з умови плавання:

$$(m_л + m_м)g = F_A$$

$(m_л + m_м)g = \rho_B g V_{ДО}$, звідки $V_{ДО} = \frac{m_Л}{\rho_B} + \frac{m_М}{\rho_B} \approx 377{,}4$ (см^3)

Коли лід розтане, в металева кулька потоне, об'єм утвореної із льоду води та води, яка витіснена металевою кулькою, дорівнюватиме: $V_{ПІСЛЯ} = \frac{m_Л}{\rho_B} + \frac{m_М}{\rho_М} \approx 357{,}4\ (см^3)$

Тоді, зміна висоти рівня води: $\Delta h = \frac{V_{ПІСЛЯ} - V_{ДО}}{L^2} \approx -0{,}14\ (см)$

Висновок: якщо крижину поставити на грань ab, то після танення крижини рівень води в посудині зменшиться на 0,14 см.

III. Крижину ставлять на грань <u>bc</u>.

Визначимо чи буде крижина плавати чи стоятиме на дні.
Запишемо умову плавання крижини:

за формулою (1) знайдемо висоту зануреної частини крижини: $h_0 = \frac{m_л + m_м}{\rho_B\, bc} \approx 10{,}5\ (см)$

за формулою (1) визначимо яким буде рівень води в акваріумі h_1 після занурення крижини:

$$h_1 = \frac{V_П}{L^2 - bc} \approx 7{,}5\ (см)$$

Оскільки $h_1 < h_0$, отже, за такого розташування крижина плавати НЕ буде, а стоятиме на дні і буде занурена на 7,5 см.

Об'єм води, який витіснятиме крижина, стоячи на дні: $V_{ДО} = h_1 bc \approx 270\ (см^3)$

Коли лід розтане, а металева кулька потоне, об'єм утвореної із льоду води та води, яка витіснена металевою кулькою, дорівнюватиме: $V_{ПІСЛЯ} = \frac{m_Л}{\rho_B} + \frac{m_М}{\rho_М} \approx 357{,}4\ (см^3)$

Тоді, зміна висоти рівня води: $\Delta h = \frac{V_{ПІСЛЯ} - V_{ДО}}{L^2} \approx 0{,}6 (см)$

Висновок: якщо крижину поставити на грань bc, то після танення крижини рівень води в посудині збільшиться на 0,6 см.

Відповідь:
1) якщо крижину поставити на грань ac, то після танення крижини рівень води в посудині не зміниться.

2) якщо крижину поставити на грань ab, то після танення крижини рівень води в посудині зменшиться на 0,14 см.
3) якщо крижину поставити на грань bc, то після танення крижини рівень води в посудині збільшиться на 0,6 см.

(32) Ефективна жорсткість $k_{\text{еф}}$ системи визначається співвідношенням

$s_A = s_{\text{блок}} + x_3 = \frac{F}{k_{\text{еф}}}$. Тут s_A і $s_{\text{блок}}$ — переміщення відповідно точки A та блока під дією сили F, x_3 — видовження пружини 3. Очевидно, $x_3 = \frac{F}{k_3}$. З умови рівноваги блока випливає, що сила натягу верхньої нитки (жовтої на рисунку) дорівнює $F/2$. Тоді видовження двох верхніх пружин $x_1 = \frac{F}{2k_1}$ і $x_2 = \frac{F}{2k_2}$, а з умови нерозтяжності нитки маємо рівняння $2s_{\text{блок}} = x_1 + x_2$.

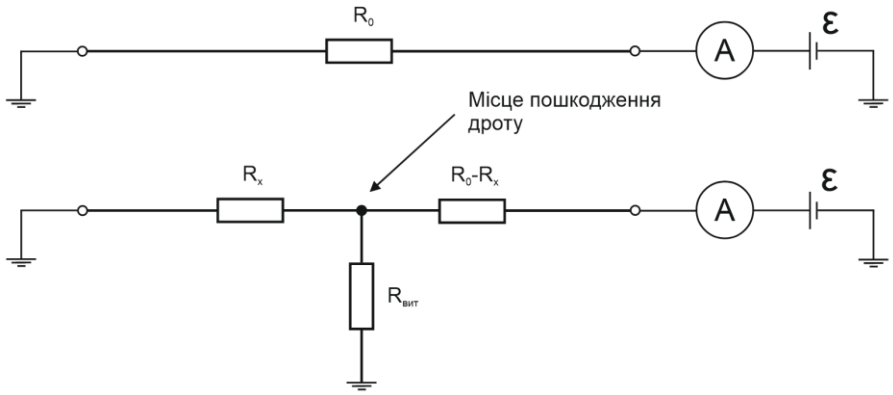
Підставивши ці вирази в перше рівняння, отримаємо $\frac{1}{k_{\text{еф}}} = \frac{1}{4k_1} + \frac{1}{4k_2} + \frac{1}{k_3}$.

Тепер розберемося зі значеннями коефіцієнтів жорсткості k_1, k_2, k_3. Якщо позначити кількість витків у пружині N, то після розрізання маємо $N = N_1 + N_2 + N_3$. Оскільки під дією певної сили F кожний виток розтягається однаково, то видовження пружини пропорційне кількості витків і, відповідно, жорсткість *обернено* пропорційна кількості витків. Отже, $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$ і $\frac{1}{k_{\text{еф}}} = \frac{1}{4k} + \frac{3}{4k_3}$. Таким чином, ефективна жорсткість залежить тільки від довжини відрізаної третьої (нижньої на рисунку) ділянки, а розподіл решти витків між пружинами 1 і 2 не є суттєвим. Значення k_3 формально може змінюватися від k (коли третя пружина містить практично всі витки вихідної) до нескінченності (коли довжина третьої пружини прямує до нуля).

Відповідно значення $k_{\text{еф}}$ може змінюватися в інтервалі ***від k до 4k*** (у правильності цих граничних значень легко переконатися й безпосередньо).

(33) Нехай ми можемо підключати будь-які прилади саме з правого боку.

1) Опір справного дроту ми знаємо з умови $R_0 = \lambda L$. Проводячи вимірювання за схемою зображеною на рисунку нижче можемо порівняти опори дротів (початок та кінець нормального та пошкодженого дротів показані круглими клемами).



Трьома горизонтальними лініями різної довжини показане заземлення. Джерело позначене як батарейка з ЕРС ε. Витік струму в пошкодженому кабелі позначено як витікання струму в оточуюче середовище («на Землю») через резистор з невідомим опором $R_{\text{вит}}$. R_x – опір ділянки

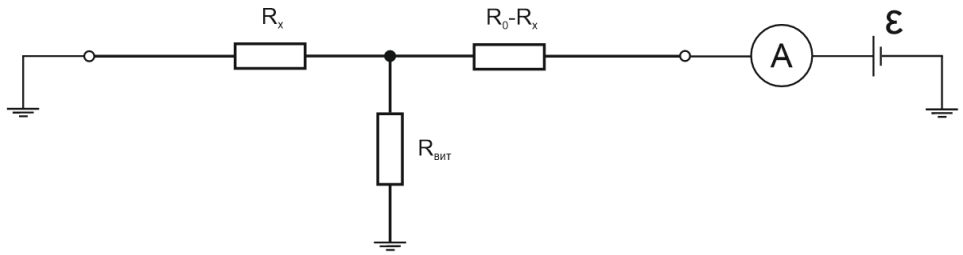
дроту від лівого краю до пошкодження, $R_0 - R_x$ – опір ділянки дроту від правого краю до пошкодження.

Очевидно, що пошкодженим буде той провідник, у якого опір відмінний від R_0.

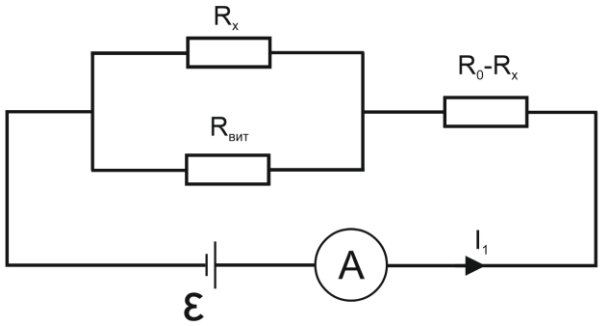
2) Приведемо один із можливих простих варіантів визначення положення місця пошкодження. Очевидно, якщо ми знайдемо опір ділянки дроту від лівого краю до пошкодження R_x, то поділивши на опір одиниці довжини λ знайдемо й положення пошкодження.

В цьому пункті будемо працювати лише із пошкодженим дротом, тому другий не показаємо.

А) Спочатку зберемо схему з першого пункту задачі.



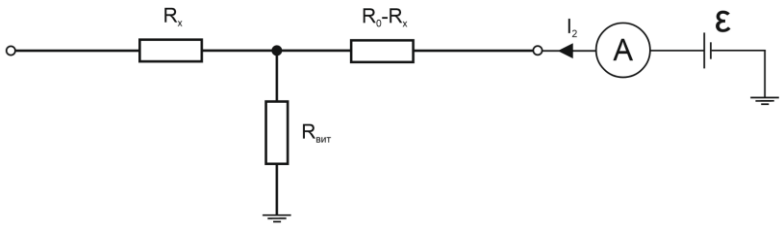
З огляду на те, що потенціали заземлених дротів є однаковими, то можемо перерисувати схему наступним чином:



Звідси за законом Ома для повної ділянки кола отримуємо:

$$R_0 - R_x + \frac{R_x R_{\text{вит}}}{R_x + R_{\text{вит}}} = \frac{\varepsilon}{I_1} \qquad (1)$$

Б) Тепер не будемо підключати ліву клему пошкодженого дроту і отримаємо наступну ще більш просту схему:



В даному випадку струм через R_x не тече і за законом Ома для повної ділянки кола отримуємо:

$$R_0 - R_x + R_{\text{вит}} = \frac{\varepsilon}{I_1} \qquad (2)$$

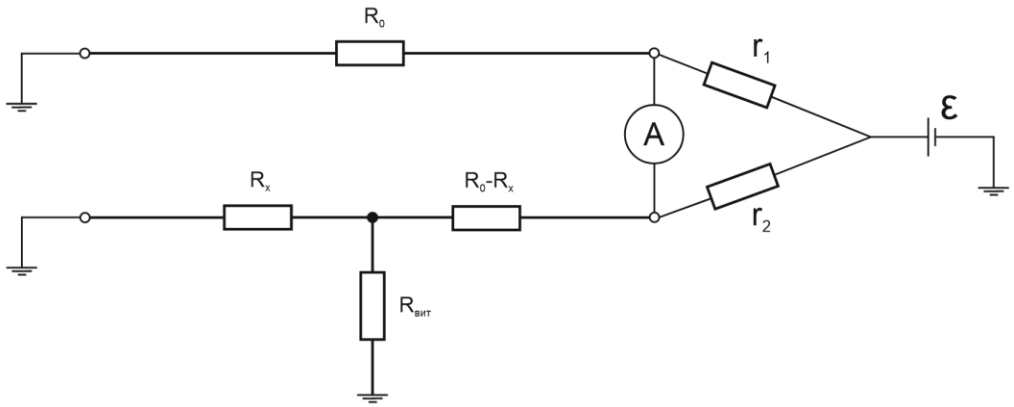
З рівнянь (1) та (2) отримуємо квадратне рівняння для пошуку R_x.

$$R_x{}^2 + 2R_x\left(\frac{\varepsilon}{I_1} - R_0\right) + \left(\frac{\varepsilon}{I_1} - R_0\right)\left(\frac{\varepsilon}{I_2} - R_0\right) = 0 \qquad (3)$$

Знайшовши звідси R_x отримуємо положення пошкодження.

Тепер будемо збирати мостові схеми використовуючи і нормальний і пошкоджений дроти.

А) Спочатку зберемо мостову схему, в якій ми заземлюємо лівий край пошкодженого дроту. Задача даної схеми – дуже точно вимірювати відношення опорів обох дротів при їх різних підключеннях.

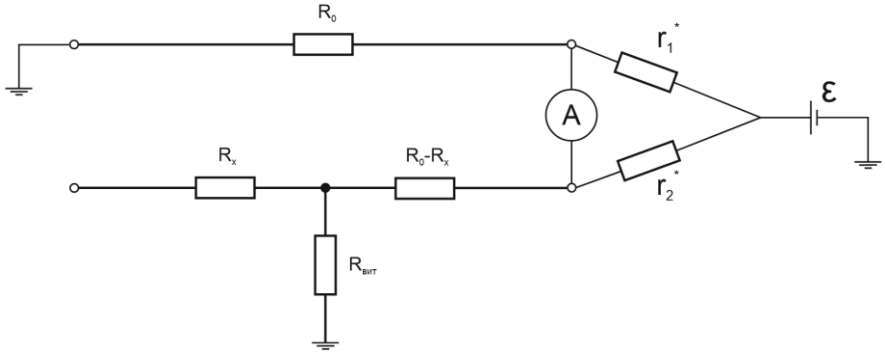


Підберемо такі опори r_1 та r_2 з арсеналу резисторів, щоб струм через амперметр не йшов. Ми отримаємо дуже велику точність, якщо підберемо такі r_1 та r_2, щоб при підключенні батарейки стрілка амперметру взагалі не рухалась (наскільки ми це можемо зафіксувати очима).

В такому випадку матимемо наступну умову нульового струму через амперметр:

$$R_0 - R_x + \frac{R_x R_{\text{вит}}}{R_x + R_{\text{вит}}} = R_0\frac{r_2}{r_1} \qquad (4)$$

Б) Тепер зберемо мостову схему, в якій ми нічого не робимо із лівим краєм пошкодженого дроту.



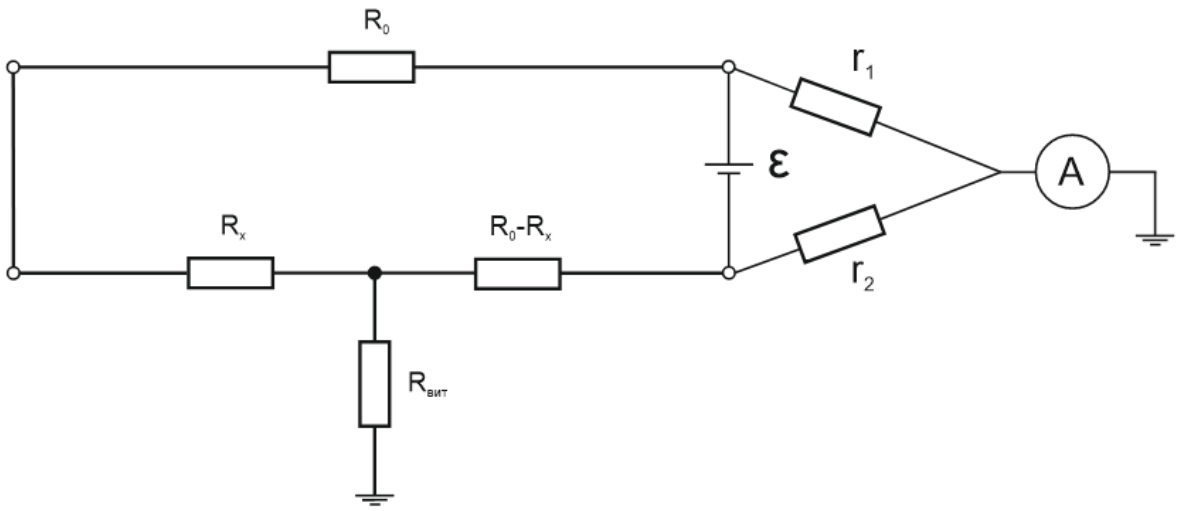
Аналогічно із попереднім мостовим підключенням отримуємо:

$$R_0 - R_x + R_{\text{вит}} = R_0 \frac{r_2^*}{r_1^*} \qquad (5)$$

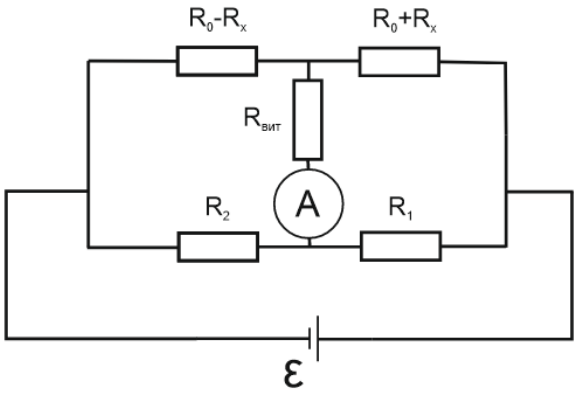
Далі робимо все те саме, що й у попередньому пункті: перетворюємо рівняння (4) та (5) на квадратне рівняння відносно R_x і розв'язуємо його.

Для відповіді на питання яка ж зі схем вимірювання відстані до пошкодження є точнішою порівняємо рівняння (1) та (4) й рівняння (2) та (5). Ліві частини рівнянь є однаковими. Праві частини рівнянь (1) та (2) визначаються з не дуже хорошою точністю, якщо ми знаємо ЕРС джерела з певною похибкою й амперметр також видає певну похибку при вимірюванні струму. Натомість в правих частинах рівнянь (4) та (5) ми знаємо значення опорів доволі точно внаслідок вищеописаної схеми вимірювання.

Відмітимо, що є ще більш простий спосіб це зробити не за два кроки, а за один. Зберемо наступну схему.



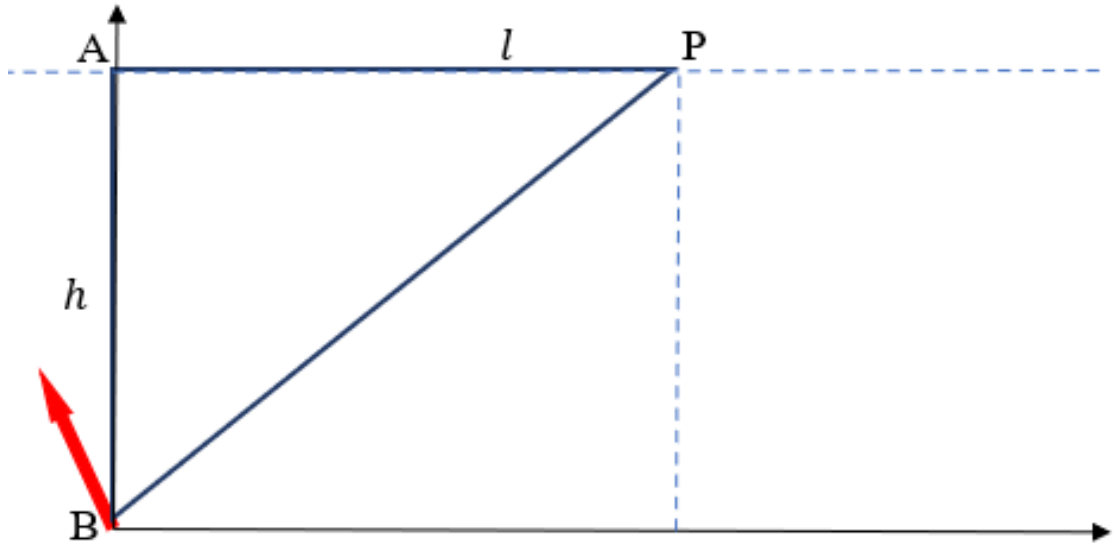
Її можна перерисувати як на рисунку.

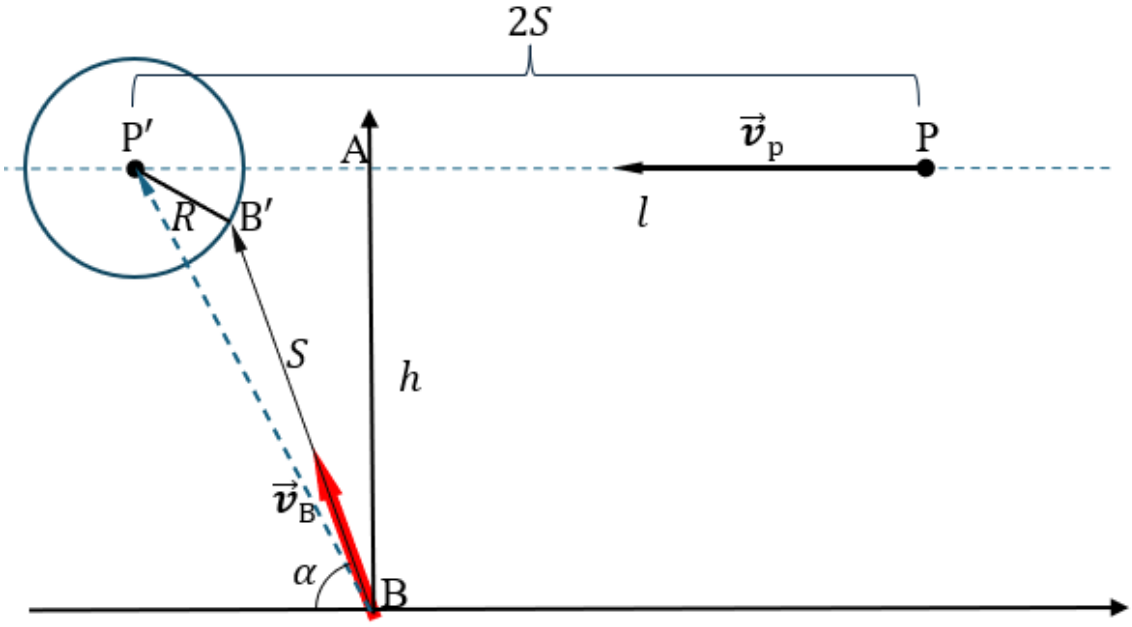


Тоді добиваючись нульового струму через амперметр легко визначити невідомий опір через співвідношення:

$$\frac{R_0 - R_x}{R_2} = \frac{R_0 + R_x}{R_1}.$$

(34) Відстань від початкового положення ракети до точки А (найкоротшої відстані від лінії руху ракети до аеродрому) $l_0 = \sqrt{510^2 - 240^2}$км $= 450$ км. За 2 хвилини ракета подолає 150 км і зменшить цю відстань до $l = l_0 - 150$ км $= 300$ км. Маємо прямокутний трикутник з катетами $h = 240$ км і $l = 300$ км (див. Рис., на якому винищувач позначений точкою В, а ракета – точкою Р). Якщо винищувач полетить в напрямку найближчої точки траєкторії ракети А, йому, навіть щоб наблизитись до неї на відстань $R = 60$ км, знадобиться $(h - R)/v_\text{В} = 4{,}8$ хв, а ракеті $l/v_\text{р} = 4$ хв. Отже, щоб мати шанс збити ракету, слід взяти курс лівіше (приблизний напрямок вказано на рисунку червоною стрілкою).





Відразу розглянемо більш загальний випадок, коли винищувач має наблизитись на відстань R до ракети. Тоді, спрямувавши R до нуля, отримаємо відповідь і на перше питання задачі. Щоб зрозуміти яким саме має бути цей напрямок, зображений на рисунках товстою червоною стрілкою, уявимо ракету у момент часу, коли літак досягає відстані R до неї у деякій точці В′. Винищувач на цей момент подолав відстань $\text{ВВ}' = S$, а ракета – удвічі більшу відстань відстань $\text{РР}' = 2S$ (швидкості відрізняються вдвічі). З рисунку видно, що якби винищувач взяв курс ВВ′ лівіше, прямо на точку Р′, він би у цей момент часу опинився максимально близько від ракети,

на меншій відстані ніж R, отже і збити її міг раніше. Висновок: Треба відразу так спрямувати швидкість винищувача, щоб у момент досягнення кола радіусом R, його швидкість $\vec{v}_{\text{В}}$ була спрямована на ракету. Тоді точки В, В′ і Р′ лежатимуть на одній прямій, а відрізок ВР′ буде гіпотенузою трикутника ВР′А, теорема Піфагора для якого має вигляд:

$$(S+R)^2 = (2S-l)^2 + h^2.$$

Розв'язками цього квадратного рівняння є два значення S: 200 км і 240 км. Це означає, що кут α між вектором швидкості винищувача $\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{В}}$ і ракети для успішності місії має лежати у відповідному цим відстаням інтервалі.

$$\cos\alpha = \frac{\text{Р′А}}{\text{Р′В}} = \frac{2S-l}{S+R} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13}, \\ \frac{3}{5}. \end{bmatrix}$$

Найменшому часу відповідає більший кут α = arccos 5/13≈ 67,4° і менша відстань $S =$ 200 км. Час знаходимо, поділивши 200 км на швидкість літака: $t_{min}=$ 5 хв 20 с.

Відповідь на перше питання отримаємо, поклавши у квадратному рівнянні R = 0: $S^2 = (2S-l)^2 + h^2$. Це рівняння не має дійсних коренів, оскільки його дискримінант від`ємний. Збити ракету, безпосередньо до неї наблизившись, за цих умов задачі не вдалося б.

Отже, наявність сучасних технологій і знання фізики забезпечують точність у виборі напрямку руху та зберігають життя і долі людей.

(35) Цю задачу можна розв'язувати як графічно, так і виключно аналітично. Ми свій розв'язок проілюструємо графічно. Так як всі елементи в колі з'єднані послідовно, то струм через них тече однаковий. При цьому загальна напруга на елементах D та B є сумою напруг на кожному елементі. Це означає, що ми можемо отримати загальну вольт-амперну характеристику елементів D та B разом додавши при однакових струмах значення напруг на цих елементах. Таким чином ми перебудовуємо графік по точках, отримавши вольт-амперну характеристику елементу D+B.

Бачимо, що у цієї вольт-амперної характеристики елементу D+B є горизонтальна ділянка, на якій при широкому діапазоні напруг струм тече однаковий. Із закону Ома для неоднорідної ділянки кола отримуємо значення струму в колі:

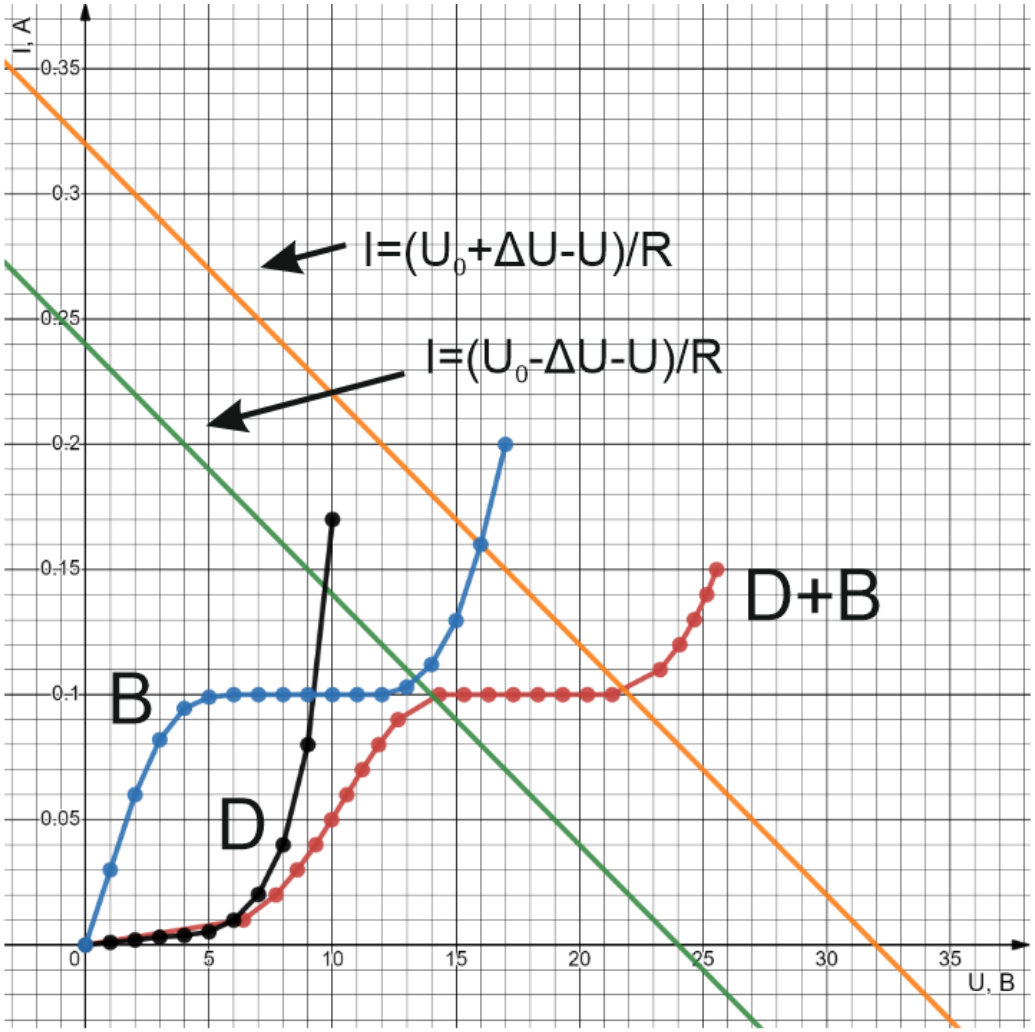
$$I = \frac{U_{\text{дж}} - U}{R},$$

де $U_{\text{дж}}$ – напруга, яку видає джерело, U – напруга на елементі D+B.

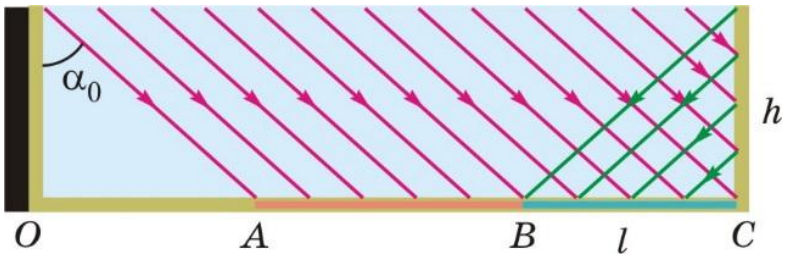
Перетин даної лінійної залежності із вольт-амперною характеристикою елементу D+B дасть нам струм у колі.

Якщо ми підберемо похибку напруги джерела ΔU такою, щоб ці перетини проходили по краях «полички» струму, то в усьому діапазоні можливих напруг джерела струм буде майже постійним і дорівнювати приблизно 0.1 А.

Даній умові задовольняє значення похибки $\Delta U \approx$ 4В.



(36) З умови випливає, що світло потрапляє у воду тільки через її горизонтальну поверхню. У похмуру погоду джерелом світла є практично «все небо». Отже, кут падіння різних сонячних променів на поверхню може змінюватися від нуля до майже 90°. А от кут заломлення променів не може перевищувати значення $\alpha_0 = \arcsin\frac{1}{n}$, де n — показник заломлення води. На рисунку наведено схематичне зображення (вигляд збоку) ходу променів у воді з урахуванням дзеркального відбивання від протилежної бокової стінки кювети (заломлені на поверхні промені зображено червоними, промені після відбивання від бокової поверхні — зеленими).

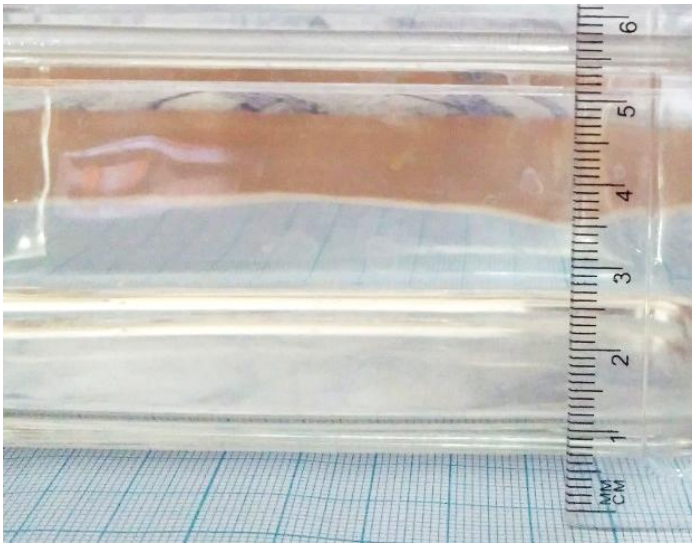


Можна було б очікувати, що буде видно три різні ділянки: темну OA, дещо світлішу AB та ще світлішу BC. На фотографії бачимо лише дві ділянки. Це можна пояснити тим, що за певних розмірів кювети точки A, B практично збігаються. (Якщо ж точка A виявиться справа від точки B, знову матимемо три ділянки, які на фото не спостерігаються. І тільки у випадку, коли точка A досягає точки C також маємо дві ділянки і випадок дуже глибокої кювети).

Залишаються досить нескладні розрахунки:

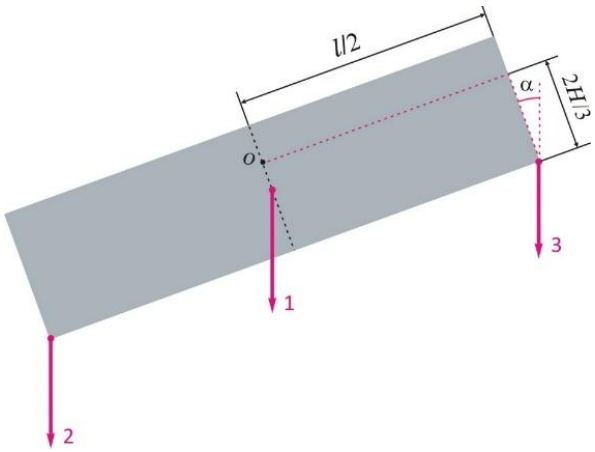
$$h = l\mathrm{ctg}\alpha_0 = l\frac{\sqrt{1-\sin^2\alpha_0}}{\sin\alpha_0} = l\sqrt{n^2-1}.$$

Якщо взяти за фотографією $l = 75$ мм, отримуємо $h = 66$ мм. Вважаючи $l = 75 \pm 5$ (мм), отримуємо $h = 66 \pm 5$ (мм). Цей результат досить близький до реального: див. фотографію, зроблену з іншого ракурсу — збоку (слід урахувати ще «неоцифровану» початкову ділянку лінійки завдовжки близько 2 мм).



(37) Позначимо α кут відхилення важеля від горизонтального положення. Якщо цей кут малий, то $s = 2\alpha L$ (кут відхилення відбитого пучка світла вдвічі більший за кут повороту дзеркала). Позначимо також $m_в$ масу важеля; $m_в = \rho LHb$ =40,5 г (тут $b = 2$ мм).

Кут α знайдемо з умови рівноваги важеля після випаровування частини рідини. На наведеному нижче рисунку для зручності сприйняття свідомо порушені пропорції, а кут нахилу перебільшений. Цифрою 1 позначено силу тяжіння важеля, 2 і 3 — вага відповідно тягарця (маса тягарця $m_т$) та посудини з рідиною.



Напишемо другу умову рівноваги (правило моментів) відносно осі O:

$$m_т g\left(\frac{l}{2}\cos\alpha - \frac{2H}{3}\sin\alpha\right) - (m_т - m)g\left(\frac{l}{2}\cos\alpha + \frac{2H}{3}\sin\alpha\right) - m_в g\frac{H}{6}\sin\alpha = 0.$$

Звідси $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3lm}{H(m_в+8m_т-4m)}$, тобто з урахуванням малості кута маємо $s = \frac{6lLm}{H(m_в+8m_т-4m)}$, а якщо врахувати ще й мале значення m порівняно з іншими масами, то $\frac{s}{m} = \frac{6lL}{H(m_в+8m_т)} = 2\cdot 10^4\ \frac{\text{м}}{\text{кг}} = 20\ \frac{\text{мм}}{\text{мг}}$.

Як бачимо, така система теоретично забезпечує чутливість, що дійсно дозволить вивчати швидкість процесу випаровування (та залежність цієї швидкості від різних чинників).

(38) Нехай U – напруга в мережі. Опір елемента всередині баку – R1, а опір нагрівального елементу для повітря в теплиці – R2. Тоді, враховуючи, що потужність теплообміну пропорційна різниці температур, для теплообміну теплиці та оточуючого середовища в першому випадку можна записати:

$$U^2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\alpha(t_2-t_0) \qquad (1)$$

А для теплообміну між водою та повітрям у теплиці:

$$\frac{U^2}{R_1}=\beta(t_1-t_2) \qquad (2)$$

У випадку послідовного з'єднання відповідні рівняння матимуть вигляд:

$$\frac{U^2}{R_1+R_2}=\alpha(t'_2-t_0) \qquad (3)$$

$$\frac{U^2R_1}{(R_1+R_2)^2}=\beta(t'_1-t'_2) \qquad (4)$$

Розділивши рівняння (1) на рівняння (3) отримаємо:

$$\frac{(R_1+R_2)^2}{R_1R_2}=\frac{t_2-t_0}{t\prime_2-t_0} \qquad (5)$$

Розділивши рівняння (2) на рівняння (4) отримаємо:

$$\frac{(R_1+R_2)^2}{R_1^2}=\frac{t_1-t_2}{t\prime_1-t\prime_2} \qquad (6)$$

З рівняння (6) отримуємо:

$$\frac{R_2}{R_1}=\sqrt{\frac{t_1-t_2}{t\prime_1-t\prime_2}}-1 \qquad (7)$$

З іншого боку, розділивши рівняння (6) на рівняння (5) отримуємо:

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{t_1-t_2}{t\prime_1-t\prime_2}\frac{t\prime_2-t_0}{t_2-t_0} \qquad (8)$$

Звідки:

$$\left(\sqrt{\frac{t_1-t_2}{t'_1-t'_2}}-1\right)\frac{t'_1-t'_2}{t_1-t_2}=\frac{t'_2-t_0}{t_2-t_0}$$

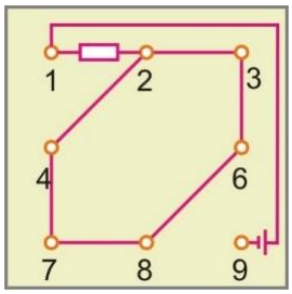
Якщо позначити через k вираз, значення якого нам відомо:

$$k=\left(\sqrt{\frac{t_1-t_2}{t'_1-t'_2}}-1\right)\frac{t'_1-t'_2}{t_1-t_2}$$

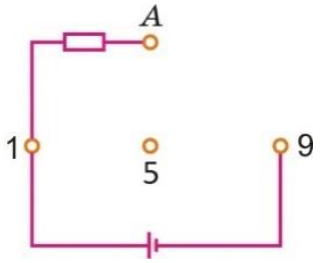
То відповідь буде виглядати таким чином:

$$t_0=\frac{kt_2-t'_2}{k-1}$$

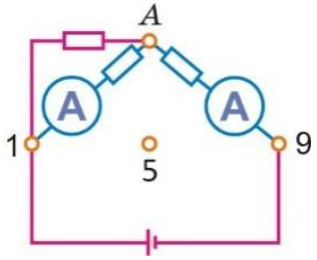
(39) Наводимо один із можливих варіантів, де застосовано тільки *один* резистор. Опір «потойбічного» резистора 200 Ом, напруга на полюсах джерела струму 6 В. У жодному разі не наполягаємо виключно на такому варіанті, журі розгляне всі правильні та оптимальні (за кількістю резисторів) версії.



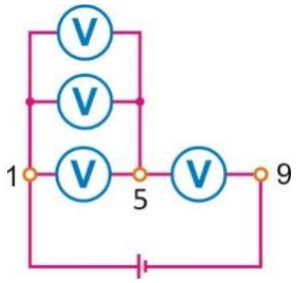
Наводимо еквівалентну схему кола до початку вимірювань (точка A — це «об'єднані» клеми 2, 3, 4, 6, 7, 8):



Колу на рис. 2 відповідає така еквівалентна схема:



Колу на рис. 3 відповідає така еквівалентна схема:



У цій схемі ми знехтували опором резистора порівняно з опорами вольтметрів, які за умовою можна вважати ідеальними.

(40) Для того, щоб за будь-яких 10 секунд руху квадрокоптер збільшував висоту рівно на 10 м, необхідно, щоб залежність швидкості квадрокоптера від часу була періодичною функцією з періодом у 10 с або у ціле число разів менше, ніж 10 с, або ж дорівнювала 1 м/с і взагалі не змінювалася. Останнє неможливе, оскільки квадрокоптер спочатку перебував на місці старту на поверхні землі і не рухався.

Якщо взяти період у 10 с, наприклад, як зображено на Рис. 1, де площа під однією дугою графіку дорівнює 10 м, то куди б ми не зсунули зелену смугу шириною у 10 с, площа під графіком, що попав у смугу, залишатиметься 10 м. Наскільки зменшиться площа зліва під графіком, настільки ж збільшиться справа. Отже квадрокоптер «за будь-яких 10 секунд руху збільшував висоту рівно на 10 м», але рухався при цьому не рівномірно. Те, що середня швидкість проходження всього шляху за умовою задачі виявилася максимально можливою, робить варіанти з періодом у 5 с або ще менше, малоймовірними, враховуючи обмеження набору швидкості у 10 м/с^2. За менший час квадрокоптер менше розжениться і пролетить меншу відстань, як можна побачити на схематичному Рис. 2, де площа під малими дугами (період 5 с) в межах зеленої смуги менша, ніж під великими (період 10 с). Отже, для максимальної середньої швидкості за 10 с залежність швидкості квадрокоптера від часу має бути періодичною функцією з періодом у 10 с, а квадрокоптер має рухатись з максимальним прискоренням $a = 10$ м/с^2. Перші $t = 5$ с прискорюватись, а ще 5 с гальмувати, щоб зупинитися згідно умови (Рис.3). Площа трикутника під графіком $2\frac{at^2}{2} = 250$ м, що набагато більше, ніж 10 м за умовою задачі. Або квадрокоптер має рухатись з меншим прискоренням, або з максимальним, але, досягнувши певної швидкості, далі підніматися рівномірно, щоб наприкінці 10 с знову гальмувати, як зображено на Рис.4. Але ж у будь-якому такому випадку між двома зупинками квадрокоптера середня швидкість виявиться теж 1 м/с, але, головне те, що не зрозуміло як скористатися умовою її максимальності, щоб знайти «**На яку висоту** піднявся квадрокоптер під час цього випробування».

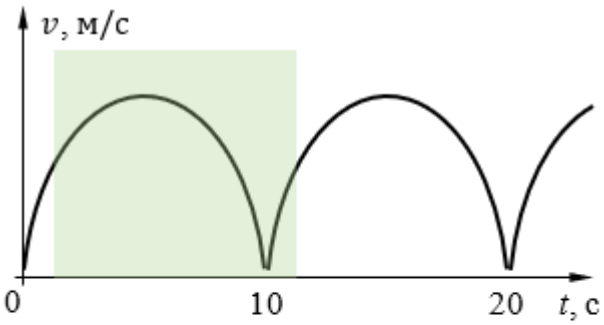


Рис.1

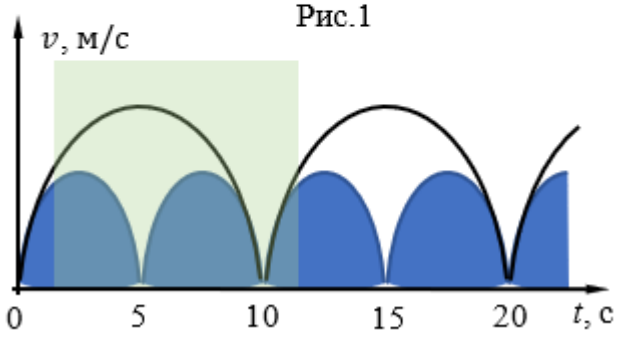


Рис.2

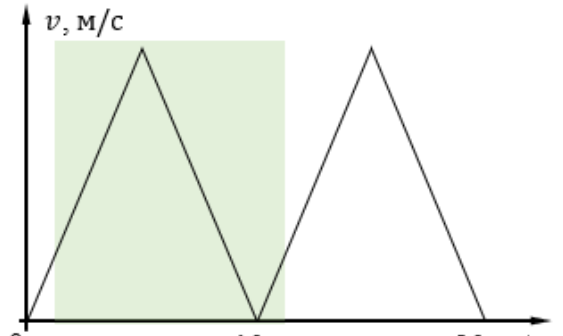


Рис.3

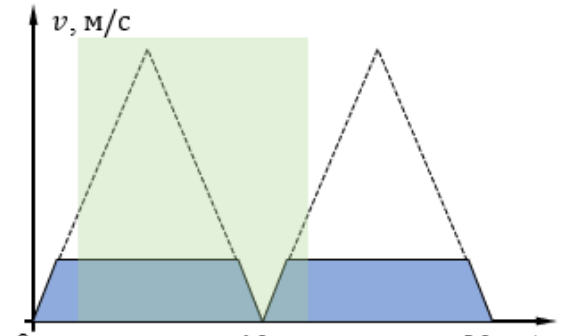


Рис.4

Можливо, слід спробувати взяти якусь несиметричну періодичну функцію, або з зупинкою десь посередині? Наприклад таку, як на Рис.5. Якщо позначити довжину першого відрізку (площу трапеції на Рис.5) через S_1, а довжину другого відрізку (площу трикутника на Рис.5) через S_2, то вийде, що

$$S_1 + S_2 = h = 10 \text{ м},$$

А вся висота підйому H може відображатися на графіку як площа між початковою точкою старту і будь-якою іншою точкою зупинки з 10 с і далі. Тобто, можливо

$H = S_1 + S_2 = h,$

$H = 2S_1 + S_2 = h + S_1,$

$H = 2S_1 + 2S_2 = 2h,$

$H = 3S_1 + 2S_2 = 2h + S_1, \ldots$

Відповідні середні швидкості дорівнюватимуть:

$v_1 = \frac{h}{T} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}},$

$v_2 = \frac{h + S_1}{T + t_1} = ?\frac{\text{м}}{\text{с}},$

$v_3 = \frac{2h}{2T} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}},$

$v_4 = \frac{2h+S_1}{2T+t_1} = ?\frac{\text{м}}{\text{с}}, \ldots$

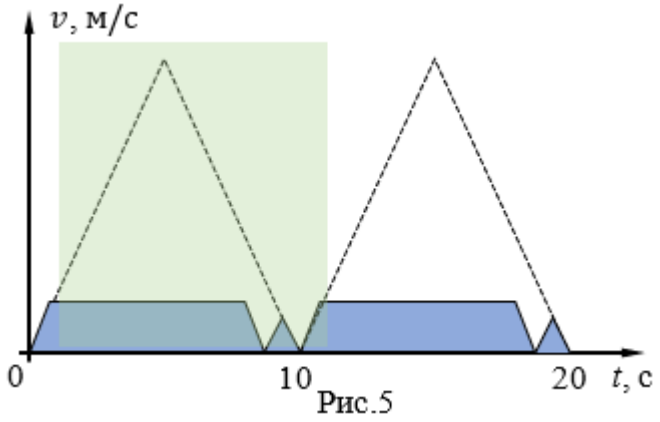


Рис.5

Умову, за якою швидкість v_2 виявиться більшою за $v_1 = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$ легко отримати, віднявши від виразу v_2 вираз v_1. Має виконуватись нерівність:

$$\frac{S_1}{t_1} > \frac{h}{T} = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

За цієї умови швидкість v_2 буде більшою і за v_3, і будь-яку іншу середню швидкість, отриману таким чином (це зрозуміло як із загальних міркувань, так і може бути легко доведено аналогічним відніманням $v_2 - v_{2n}$). Отже, середня швидкість на першій частині руху має бути більшою за середню швидкість 1 м/с на двох частинах разом за період. Це можливо, коли середня швидкість на другій частині руху менша на 1 м/с. Перепишемо v_2 в дещо іншому вигляді:

$$v_2 = \frac{h + S_1}{T + t_1} = \frac{2h - S_2}{2T - t_2}.$$

Для максимального значення v_2 необхідно, щоб чисельник останнього дробу був якомога більшим ($S_2 -$ мінімальне), а знаменник – якомога меншим ($t_2 -$ максимальне). Мінімальне шлях S_2 це нуль. Отже дрон після якомога скорішого підняття на 10 м має зависнути на місці, і тоді час зависання t_2 буде максимальним (Рис. 6). Знайдемо час t_1:

$$2\frac{a(t_1/2)^2}{2} = h.$$

Підставляючи числові значення, знаходимо, що $t_1 = 2$ с. Отже, максимальна середня швидкість дрону буде за час 12 с, коли дрон підніметься на висоту $H = 20$ м і зупиниться ($v_{\text{сер}} = 5/3$ м/с). При цьому через 1 с польоту і через 11 с після початку руху його швидкість набуватиме максимального значення $a\,t_1/2 = 10$ м/с.

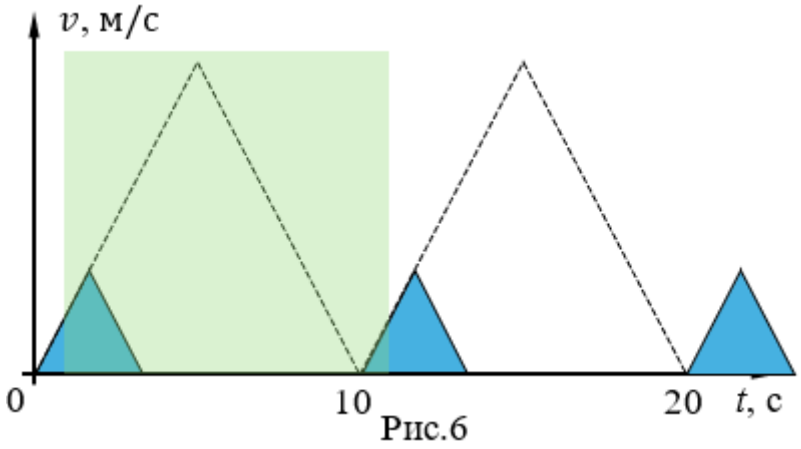


Рис.6

При розв'язуванні задач ми часто обмежуємо себе. Все, що було написано вище, є ілюстрацією можливого пошуку, і накладених на себе обмежень. Справа в тому, що отримана відповідь не відповідає максимальній середній швидкості, яка у рази більша за 5/3 м/с. Обмеження ми наклали на себе, коли думали про рух дрона виключно вгору. Але ж за умовою задачі він здійснює вертикальний рух, який можливий в обох напрямках. Ми могли б натрапити на правильну відповідь, коли аналізували

$$v_2 = \frac{2h - S_2}{2T - t_2}.$$

Максимальний чисельник тоді, коли S_2 мінімальне, але ж від'ємні числа менші за нуль. На Рис.7 синім зображена можлива залежність швидкості від часу.

Дрон піднімається, потім опускається на меншу висоту, так, що різниця цих висот дорівнює 10 м за 10 с:

$S_1 - S_2 = h = 10$ м.

Знову максимальна середня швидкість руху буде за час

$$T + t_1 = 2T - t_2.$$

Середня швидкість

$$v_{\text{сер}} = \frac{2h + S_2}{2T - t_2}.$$

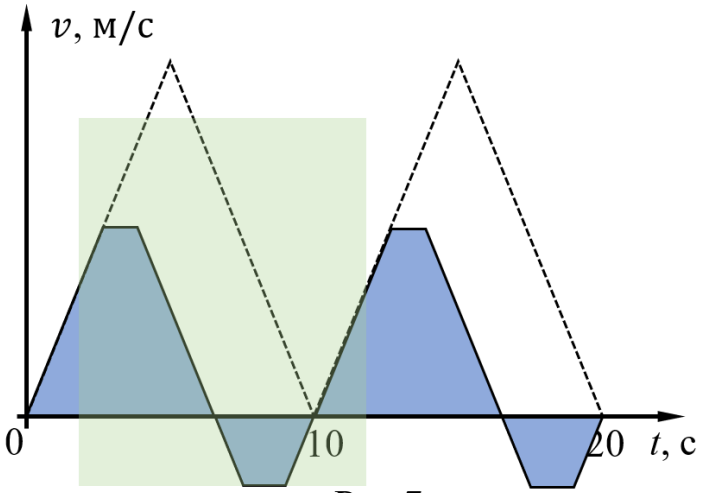


Рис.7

Не змінюючи час t_2, можна однаково (щоб зберігалося $S_1 - S_2 = h$) збільшувати площі обох обернених трапецій (Рис.7) за рахунок їхньої висоти, поки одна з них не перетвориться на трикутник. Якщо першою перетвориться на трикутник менша нижня перевернута трапеція, то, зміщуючи вліво спільну бічну лінію верхньої трапеції і нижнього трикутника, ми збільшуватимемо і площу S_2, і час t_2, а і те, й те сприяє тепер збільшенню середньої швидкості (див. формулу $v_{\text{сер}}$). При цьому висота верхньої трапеції має збільшуватись (щоб зберігалося $S_1 - S_2 = h$), доки вона також не перетвориться на трикутник (Рис.8).

Запишемо систему рівнянь

$$\begin{cases} S_1 - S_2 = h, \\ t_1 + t_2 = T, \\ H = h + S_1, \\ v_{\text{сер}} = \dfrac{2S_1 + S_2}{T + t_1}, \end{cases}$$

де $S_1 = 2\frac{a(t_1/2)^2}{2}, S_2 = 2\frac{a(t_2/2)^2}{2}$.

Маємо:

$t_1 = 5{,}2$ с,

$t_2 = 4{,}8$ с,

$\boldsymbol{H = 77{,}6}$ **м,**

$v_{\text{сер}} \approx 12{,}7$ м/с.

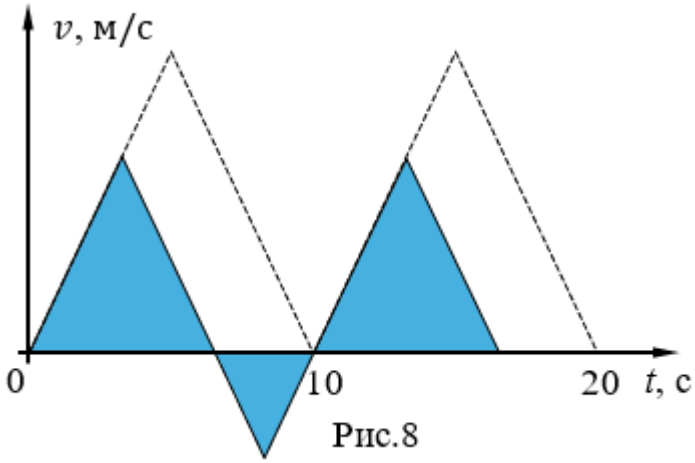


Рис.8

Максимальні швидкості підйому і спуску квадрокоптера відповідають вершинам на графіку і дорівнюють $a\,t_1/2 = 26$ м/с і $a\,t_2/2 = 24$ м/с, відповідно. Нам знадобляться ці швидкості для відповіді на питання Б).

Розглянемо послідовну реєстрацію двох сигналів, які виходять з квадрокоптера з інтервалом часу $\Delta t = 10$ мс. Припустимо, що дрон віддаляється зі швидкістю v, а швидкість звуку (вважаємо повітря нерухомим) $c = 330$ м/с. Тоді другому сигналу, який буде випущений з більш віддаленої на $v\Delta t$ точки простору, знадобиться на $\frac{v\Delta t}{c}$ більше часу на подолання відстані. Отже, реєструємий час між сигналами $\Delta\tau$ буде більший за Δt на $\frac{v\Delta t}{c}$:

$$\Delta\tau_{\uparrow} = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\Delta t = \left(1 + \frac{26}{330}\right)\Delta t = \frac{356}{330}\Delta t \approx 10{,}8 \text{ мс}.$$

Для випадку, коли квадрокоптер спускається, аналогічно маємо

$$\Delta\tau_{\downarrow} = \left(1 - \frac{v}{c}\right)\Delta t = \left(1 - \frac{24}{330}\right)\Delta t = \frac{51}{55}\Delta t \approx 9{,}27 \text{ мс}.$$

Явище зміни періоду коливань (частіше кажуть про частоту) внаслідок взаємного руху називається ефектом Допплера.

(41) Так як температура навколишнього середовища та посудини з льодом однакові та за умовою в початку процесу дорівнює нулю то швидкість зміни рівня води $\boldsymbol{V_1}$ визначається плавленням льоду та випаровуванням води з поверхні. Її легко визначити записавши двічі вираз для знаходження об'єму речовини у посудині за час $\boldsymbol{t_0}$ плавлення всього льоду об'єму $\boldsymbol{V_л}$:

$$Sv_1t_0 = V_{\text{л}}\left(1 - \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}}\right) + \frac{m_{\text{п}}}{\rho_{\text{в}}}, \qquad (1)$$

де $\boldsymbol{m}_{\text{п}}$ – маса води, що випаровалась за цей час з поверхні поіудини $\boldsymbol{S}$.

Об'єм льоду можна визначити з того, що 80 % енергії від нагрівача йде на плавлення льоду:

$$V_{\text{л}} = \frac{0{,}8Pt_0}{\lambda\rho_{\text{л}}} \qquad (2)$$

А масу утвореної пари знайдемо, виходячи з того, що інші 20 % енергії йдуть на підтримку процесу випаровування:

$$0{,}2Pt_0 = Lm_{\text{п}} \qquad (3)$$

Розв'язавши систему з цих трьох рівнянь, отримуємо вираз для швидкості ***V1*** зменшення рівня води на першому етапі:

$$\upsilon_1 = \frac{P}{\rho_{\text{в}} S}\left(\frac{0{,}8(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{л}})}{\lambda\rho_{\text{л}}} + \frac{0{,}2}{L}\right) \qquad (4)$$

Після того, як увесь лід розтанув, швидкість зміни рівня відразу після цього визначається тепловим розширенням (яким нехтуємо за умовою) та випаровуванням. Але як тільки температура води зросте, на значення цієї швидкості почне впливати теплообмін з навколишнім середовищем (різниця температур вже не нуль і постійно змінюється), зміною питомої теплоти пароутворення (вона залежить від температури рідини), та деякими іншими причинами. Саме тому в подальшому ця швидкість буде змінюватися нелінійно та перехід від ***V1*** до ***V2*** відбудеться стрибком, але на початку другого етапу її значення ***V2*** можна визначити з рівнянь:

$$0{,}2P\Delta\tau = L\Delta m_{\text{п}} \qquad (5)$$

$$S\upsilon_2\Delta\tau = \frac{\Delta m_{\text{п}}}{\rho_{\text{в}}}, \qquad (6)$$

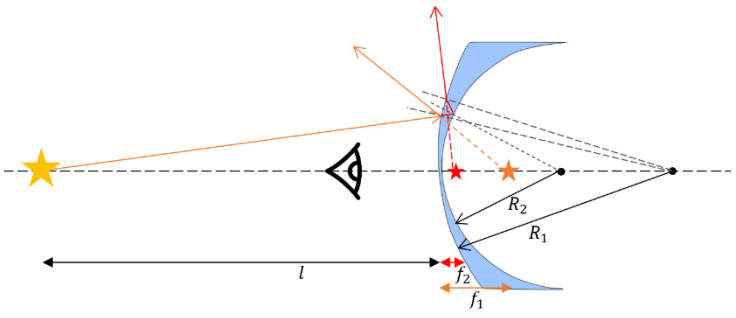
де ***Δmп*** – маса пари, що утворилася за нескінченно малий інтервал часу, такий, що температура рідини ще залишалася майже рівною 0 °C. Розв'язавши систему з останніх двох рівнянь отримуємо вираз для потужності нагрівача ***P:***

$$\boxed{\mathrm{P} = 5\mathrm{S}\rho_{\text{в}}\mathrm{L}\upsilon_2} \qquad (7)$$

Знаючи потужність легко з рівняння (4) отримуємо швидкість ***V1***:

$$\boxed{\upsilon_1 = \upsilon_2\left(4\frac{L}{\lambda}\frac{(\rho_{\text{в}}-\rho_{\text{л}})}{\rho_{\text{л}}} + 1\right)}$$

(42) А) Так як людина короткозора, то враховуємо той факт, що оптична сила лінз D її окулярів має бути від'ємною: $D < 0$.



Виходячи з формули для визначення оптичної сили лінзи:

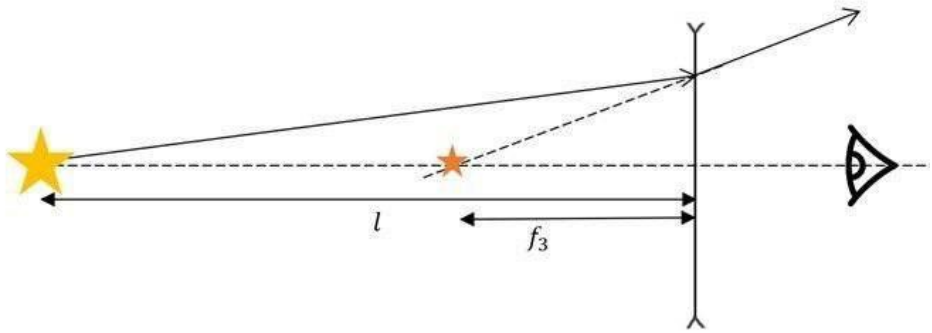
$D = (n-1)(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2})$. отримаємо, що для цього потрібно щоб $R_1 > R_2$ (дивись рисунок).

Зрозуміло, що у першому випадку, коли людина бачить два зображення лампи, це будуть два уявних зображення, що утворюються внаслідок відбивання від поверхні радіусом R1 та

поверхні радіусом R2. При чому потрібно врахувати, що друге з цих зображень утворюється променями, що пройшли крізь оптичну систему: лінза + сферична дзеркало + лінза, тому при записі рівнянь, потрібно додавати їх оптичні сили (1), (2).

$$\begin{cases} \frac{1}{l} - \frac{1}{f_1} = -\frac{2}{R_1} & (1) \\ \frac{1}{l} - \frac{1}{f_2} = -\frac{2}{R_2} + 2D & (2) \\ \frac{1}{l} - \frac{1}{f_3} = D & (3) \end{cases}$$

Після того, як людина повернулася обличчям до лампи, її зображення утворюється наступним чином:



Записавши рівняння для цього випадку та розв'язавши систему, отримаємо значення оптичної сили лінзи тп відстані до лампи.

$$D = \frac{n-1}{2n}\left(\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2}\right) = \frac{0{,}8}{3{,}6}\left(\frac{17}{6} - \frac{98}{6}\right) = -3 \text{ Дптр}$$

$$l = \frac{f_3}{Df_3 + 1} = \text{ 3м}$$

Б) Для того, щоб було легше знайти відповідь на друге питання, зручно перейти у системі відліку, яка прив’язана до лінзи. В ній лінза буде нерухома, а лампа зрушить з місця вниз зі швидкістю ***V***. Тоді з подібності трикутників легко отримати, що відносно лінзи зображення зрушить також вниз, зі швидкістю ***V*f₃/l***. Повертаючись до системи, що пов’язана з землею, та використав закон додавання швидкостей, отримуємо значення швидкості зображення відносно землі: ***V₁=V*(1- f₃/ l).***

(43) 1) Із закону збереження енергії слідує, що

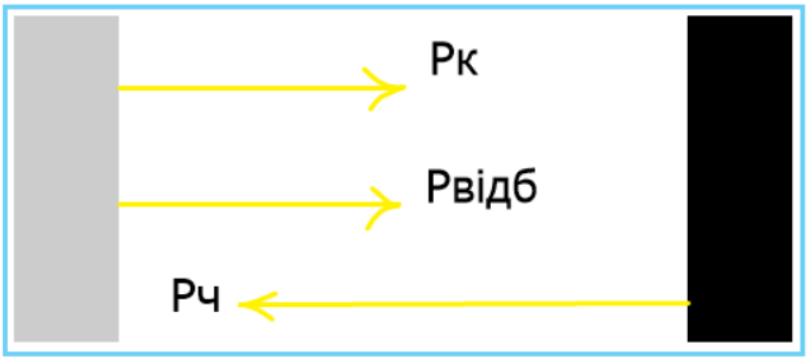
$$\text{aA} = \varepsilon\sigma T^4 + \alpha(T - T_\text{п})$$

Більш точним є також врахування зворотнього потоку випромінювання від атмосфери $\varepsilon\sigma T_\text{п}^4$, проте в 9му класі це не вимагаєтья. Якщо ми нехтуємо тепловим випромінення людини, то задача є дуже простою.

$$T = \frac{\text{aA}}{\alpha} + T_\text{п} \approx 332.1\ K\ (59.1\ ℃)$$

2) Врахуємо тепер теплове випромінення людини. Для цього спочатку треба визначити «коефіцієнт чорноти» ε. Це можна робити різними шляхами. Наприклад, Можна розглянути

два тіла з однаковою температурою – кольорове та абсолютно чорне - в повністю дзеркальній камері.



Енергія, що приходить на кольорове тіло, має його й покидати, інакше енергія від абсолютно чорного тіла

буде перекачуватись до кольорового, що неможливо через те, що у них рівні температури. Тому, $P_{\text{ч}} = P_{\text{відб}} + P_{\text{к}}$, де $P_{\text{ч}} = \sigma S T^4$ – випромінення від абсолютно чорного тіла, $P_{\text{відб}} = (1 - a)P_{\text{ч}}$ – частина енергії, що не поглинається кольоровим тілом, а відбивається, $P_{\text{к}} = \varepsilon\sigma S T^4$ – потужність випромінення кольорового тіла. Отже, $aP_{\text{ч}} = P_{\text{к}}$, звідки $\varepsilon = a$. Тобто, у скільки разів тіло менше поглинає, у стільки ж воно й менше випромінює.

Також можна довести це співвідношення без дзеркальної оболонки. Можна розглянути кольорову кулю, яка оточена абсолютно чорною сферою із майже таким самим радіусом що і куля. Температури кулі та сфери однакові. Потужність випромінення, яку поглинає куля від абсолютно чорного тіла, має дорівнювати потужності випромінення самої цієї кулі. Звідси також очевидно, що $\varepsilon = a$.

Отже, маємо загальне рівняння:

$$\text{aA} = \text{a}\sigma T^4 + \alpha(T - T_{\text{п}}).$$

Його можна розв’язати методом ітерацій, використовуючи як початкове значення температури відповідь на перший пункт. Виразимо

$$T = \frac{\text{aA}}{\alpha} + T_{\text{п}} - \frac{\text{a}\sigma T^4}{\alpha}$$

Підставляємо в праву частину рівняння значення 332 К і отримуємо ланцюжок ітерацій:

$$332\ \text{К} \to 305.17\ \text{К} \to 312.89\ \text{К} \to 310.87\ \text{К} \to 311.41\ \text{К} \to 311.26\ \text{К}$$

Останнє значення можна округлити до 311.3 К (38.3 ℃), це і буде відповіддю.

Примітка: якщо те саме зробити й для випадку a=0.2, то отримаємо температуру поверхні тіла 297.8 К (24.8 ℃). Різниця між темним одягом та світлим є значущою: 13.5 ℃.

(44) Позначимо сили реакцій опору на двох підпірках N_1 (зліва) та N_2 (справа). Нехай Вася залишив масу m зліва. Умови обертальної рівноваги відносно кожної підпірки:

$$1: \quad 0 = -mg + \frac{Mg}{3} - 2N_2 + 3Mg$$
$$2: \quad 0 = -3mg + 2N_1 - \frac{Mg}{3} + Mg$$

звідки

$$N_1 = \frac{3mg}{2} - \frac{Mg}{3}$$
$$N_2 = \frac{5Mg}{3} - \frac{mg}{2}$$

Якщо зняти забагато ваги, штанга перевернеться, або $N_1 = 0$. Це трапиться при

$$N_1 = 0 \to m = \frac{2}{9}M$$

в той час як на інший підпорці сила опору N_2 буде дорівнювати

$$N_2 = \left(\frac{5}{3} - \frac{1}{9}\right) Mg = \frac{14}{9}Mg$$

Але це **більше за запас міцності однієї підпорки** 1.25 Mg. Отже, максимально можлива маса m має визначатися з умови

$$N_2 = 1.25Mg \to \frac{5}{3}Mg - \frac{1}{2}mg = \frac{5}{4}Mg$$

$$mg = \frac{5}{6}Mg$$

Тобто, Вася має знімати всього лиш

$$\boxed{\Delta M = M - m = \frac{M}{6}}$$

ваги з одного боку за раз, щоб не зламати підпірки.

(45) З рисунку та умови плавання тіл легко отримати $\rho_{0к} = 950$ кг/м^3.

Під час збільшення тиску об'єми кубу та рідини 1 змінюються обернено пропорційно густині. Тому довжина ребра кубу

$$l = \frac{4a}{(1 - \beta_к + \beta_к p^2/p_0^2)^{1/3}}$$

Тепер з умови плавання отримуємо:

$$\rho_к l^3 = \rho_1 l^2 h + \rho_2 l^2 (l - h),$$

звідки $h = l\frac{\rho_к - \rho_2}{\rho_1 - \rho_2}$. Як і слід було очікувати, кубик повністю зануриться в рідину 1, коли виконуватиметься умова $\rho_к = \rho_1$, тобто

$$\frac{p}{p_0} = \sqrt{\frac{\rho_{01}(1-\beta_1) - \rho_{0к}(1-\beta_к)}{\rho_{0к}\beta_к - \rho_{01}\beta_1}} = 2{,}56.$$

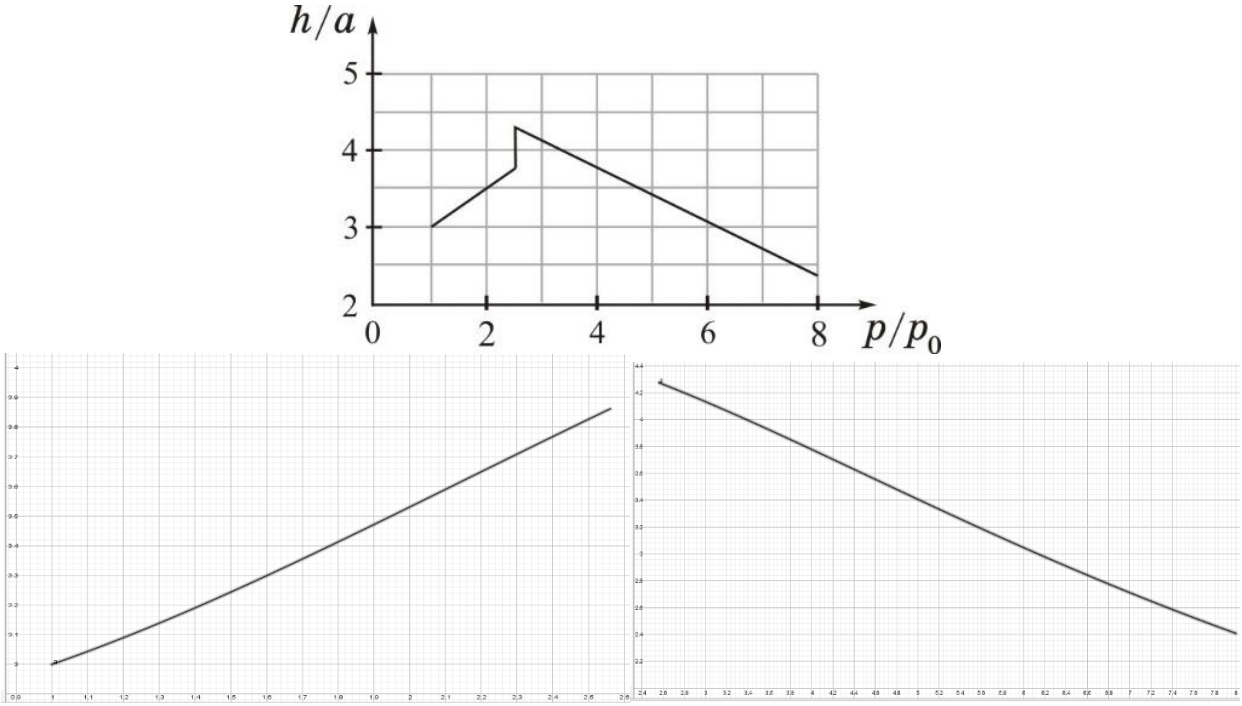
За відповідного значення тиску $h = l = 3{,}86$ см. Після подальшого збільшення тиску, навіть маленького, кубик потоне. Після цього верхня грань кубика стане нижчою від поверхні рідини 1, а значення h дорівнюватиме висоті шару рідини 1. Це значення зменшуватиметься внаслідок стискання кубика та рідини 1. Визначимо h за умови $p/p_0 > 2{,}56$.

$$52\rho_{01}a^3 = \rho_1(25a^2h - l^3).$$

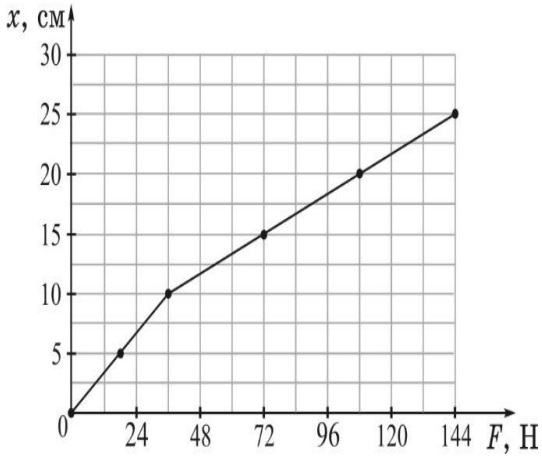
$$\text{Звідси } h = \frac{4a}{25}\left(\frac{13}{1-\beta_1+\beta_1 p^2/p_0^2} + \frac{16}{1-\beta_к+\beta_к p^2/p_0^2}\right).$$

Отже, відразу після опускання куба на дно буде $h = 4{,}27a$. Якщо ж відношення p/p_0 збільшиться до 5, отримаємо лише $h = 3{,}4a$; якщо ж $p/p_0 = 8$, то h зменшиться навіть до $2{,}4a$!

Вище наведений схематичний графік залежності h/a від p/p_0, а нижче дві його ділянки показані більш точно.



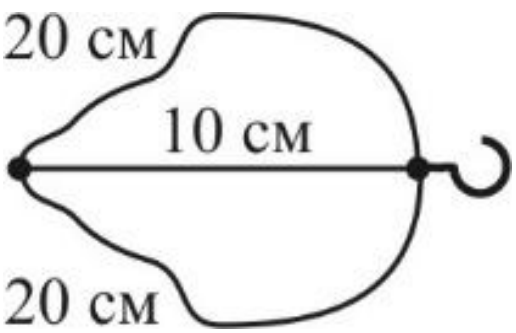
(46) Перш за все спробуємо для наочності побудувати графік $x(F)$ за наведеними даними (точками). Графік наведений на рисунку.



Як бачимо, перша ділянка графіка ($F < 36$ Н, $x < 10$ см) відповідає закону Гука, відповідна жорсткість системи $k_1 = \frac{36\text{ Н}}{0{,}1\text{ м}} = 360\ \frac{\text{Н}}{\text{м}}$. Інакше кажучи, $k_1 = 5k_0$. Оскільки жорсткість нитки обернено пропорційна її довжині, можна припустити, що тут «працює» 1/5 частина всієї нитки.

При переході через видовження 10 см відбувається якась якісна зміна, розтягувати систему далі стає вдвічі важче: тепер для додаткового видовження на 10 см треба збільшити прикладену силу не на 36, а на 72 Н. Логічно припустити, що тепер задіяна й решта нитки. Залежність $x(F)$ і тут лінійна.

Чому ж вона не «працювала» до того? Можемо запропонувати найпростішу можливість: паралельне з'єднання кількох відрізків нитки *різної* довжини. Тоді довші починають «працювати» тільки тоді, коли коротший зрівняється з ними за довжиною. Найпростішим із можливих варіантів є паралельне з'єднання відрізків нитки (див. рисунок) завдовжки 10, 20 і 20 см. Це як раз дозволяє використати відповідно до умови всю нитку.



Довші відрізки починають розтягуватися після того, як короткий видовжиться на 10 см, що цілком відповідає нашому графіку. Жорсткість кожного з них дорівнює половині k_1. Отже, тепер для видовження всієї системи на одиницю довжини потрібна сила $k_1 + \frac{1}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_1 = 2k_1$, що також відповідає нашому графіку.

Не виключено, що існують інші варіанти такої конструкції.

(47) А) $P_1\tau = cm(t_1 - t_2) = cgV(t_1 - t_2)$ (1)

$\nu_0 = V/\tau$ (2)

$P_1 = c\rho\nu_0(t_1 - t_2)$

Б) $\tau = V/\nu$ (3)

В) Уведемо для зручності циліндричну форму бойлера з площею перерізу S і висотою h:

$V = Sh$ (4)

Доведемо, що рівномірне зменшення об'ємної витрати води еквівалентно рівносповільненому її підйому ц циліндрі бойлера. Якщо $\nu = \Delta V/\Delta t$, то $\beta = \Delta\nu/\Delta t = const$

$\nu = \frac{S\Delta h}{\Delta t} = Sv$ (5)

$\beta = \frac{S\Delta v}{\Delta t} = Sa$ (6)

Де a – прискорення, v – швидкість підйому . Коли починаємо закручувати вода встигає сильніше прогрітися.

Нехай початкова швидкість підйому води v_0 , прискорення a. Тоді час за який вода зупиниться (кран перекриється)

$\tau_{stop} = \frac{v_0}{a} = \frac{v_0}{S}\frac{S}{\beta} = \frac{v_0}{\beta}$ (7)

Якщо за цей час вода пройде шлях менший ніж h, ми не відчуємо підняття температури. Тобто температура не підніметься, якщо

$\frac{a\tau_{stop}^2}{2} < h$; $\frac{\beta}{2S}\left(\frac{{v_0}^2}{\beta^2}\right) < \frac{V}{S}$; $\beta > \frac{{v_0}^2}{2V}$

1. Якщо швидко закриваємо і $\beta \geq \frac{{v_0}^2}{2V}$ зміни температури не буде (не відчуємо)
2. Якщо закриваємо повільно $\beta < \frac{{v_0}^2}{2V}$, тоді час буде $\tau = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2V}{S\beta}}S$

$$\tau = \sqrt{\frac{2V}{\beta}}$$

(48) А) З першого графіку отримаємо, що в лівому положенні повзунка реохорда I_1=3А, а I_2=2А.

$$I_1 = \frac{U}{R_2};\ I_2 = \frac{U}{R_1};\ \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{2}$$

Умова того, що через гальванометр не тече струм:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho\frac{x}{S}}{\rho\frac{L-\mathrm{x}}{S}} = \frac{x}{L-\mathrm{x}}$$

Звідки координата точки А буде (0,6; 0)

Б) В другому випадку сили струму в крайніх положеннях повзунка не зміняться, але положення повзунка в крайньому правому положенні дорівнюватиме 2L. Тому координати точок В та D будуть відповідно В(0;3) та D (2,2).

Найскладніше знайти координату точки С.

Об'єм дротини реохорду залишається сталим. Позначимо x_2 -відстань від точки контакту вальцювального пристрою до правого кінця дротини.

$$LS = x\frac{S}{2} + x_2 S$$

З іншого боку умова відсутності струму в гальванометрі матиме вигляд:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{\rho\frac{x}{S/2}}{\rho\frac{x_2}{S}}$$

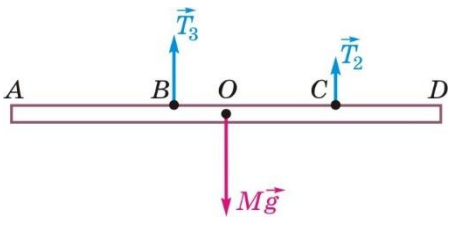
Звідки

$$x_2 = \frac{4}{3}x\ ;\ x = \frac{6}{11}L$$

Тоді координата точки С: С (6/11;0).

(49) А) За наведених умов сила натягу кожної нитки є однаковою в кожному її перерізі. Отже, сила натягу жовтої нитки $T_1 = F_1$. З умови рівноваги блока 2 знайдемо силу натягу зеленої нитки $T_2 = 2T_1 = 2F_1$. З умови ж рівноваги блока 3 знаходимо силу натягу синьої нитки: $T_3 = 2T_2 = 4F_1$. Залишається застосувати першу умову рівноваги стрижня: $T_3 + T_2 - Mg = 0$, звідки $F_1 = \frac{Mg}{6} = 5$ Н.

Б) Відповідно до умови $AB = BC = 3R = 15$ см. Очевидно, що центр тяжіння стрижня (розташований посередині стрижня) знаходиться між точками підвісу, тобто на відрізку BC. Позначимо центр стрижня O. На рисунку показані три сили, що діють на стрижень. Скористаємося другою умовою рівноваги, тобто правилом моментів.



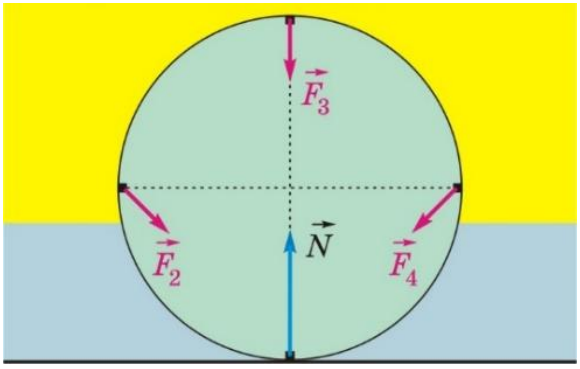
Вибравши уявну вісь обертання, що проходить через точку O, отримаємо рівняння $-T_3 \cdot BO + T_2 \cdot CO = 0$, звідки $CO = 2BO$. Отже, $BO = R, CO = 2R$. Половина довжини стрижня $AO = 4R$, повна ж його довжина $AD = 8R$. Таким чином, довжина відрізку CD становить $2R$ або 10 см.

В) Наявність маси у нерухомого блока 1 не впливає на сили натягу ниток у стані рівноваги. Отже, сила натягу жовтої нитки $T_1 = F_2$. З умови рівноваги блока 2 випливає, що сила натягу зеленої нитки становить $T_2 = 2T_1 - mg = 2F_2 - mg$. З умови ж рівноваги блока 3 знаходимо силу натягу синьої нитки: $T_3 = 2T_2 - mg = 4F_2 - 3mg$. Залишається застосувати першу умову рівноваги стрижня: $T_3 + T_2 - Mg = 0$, звідки $F_2 = \frac{(M+4m)g}{6} = 6$ Н.

Відповідно до рисунку в умові $BC = BO + CO = 3R$; тоді $CD = 1{,}5R$. Скористаємося знов правилом моментів і рисунком до пункту 2. Вибравши уявну вісь обертання, що проходить через центр O, отримаємо рівняння $-T_3 \cdot BO + T_2 \cdot CO = 0$, звідки $CO = 3R\frac{4F_2-3mg}{2(3F_2-2mg)}$. Довжина стрижня:

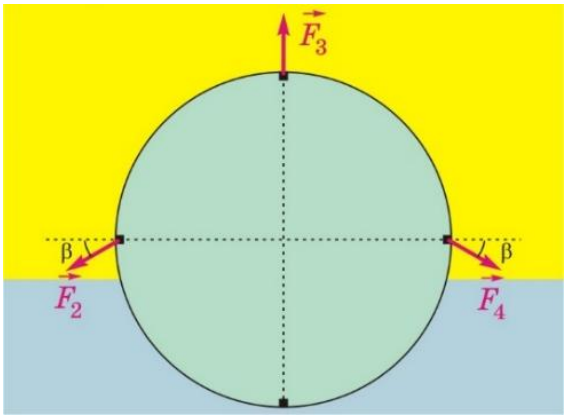
$$L = AD = 2(CO + CD) = 3R\frac{7F_2-5mg}{3F_2-2mg} = R\left(7 - 2\frac{m}{M}\right) = 6{,}9R = 34{,}5 \text{ см}.$$

(50) А) Під час нагрівання радіус диска збільшився на $\Delta R = \alpha R \Delta t$. Саме на стільки ніжки 2 і 4 віддалилися від стінки, ніжка 2 на стільки ж перемістилася ліворуч, а ніжка 4 — праворуч. Отже, ці ніжки переміщалися під час нагрівання під кутом 45°до стінки. Ніжка 3 переміщалася перпендикулярно до стінки. Сила тиску кожної ніжки на поверхню дорівнює $mg/4$. Отже, на кожну з ніжок 2, 3 і 4 під час нагрівання діє сила тертя ковзання, модуль якої $F_{\text{тер}} = \mu mg/4$. Напрямлені ці сили протилежно до переміщень відповідних ніжок. Силу $\vec{N}$ реакції стінки можна знайти з умови $\vec{N} + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$ (див. рисунок).



Звідси отримуємо $N = \frac{\mu mg}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right) = 1{,}8$ Н.

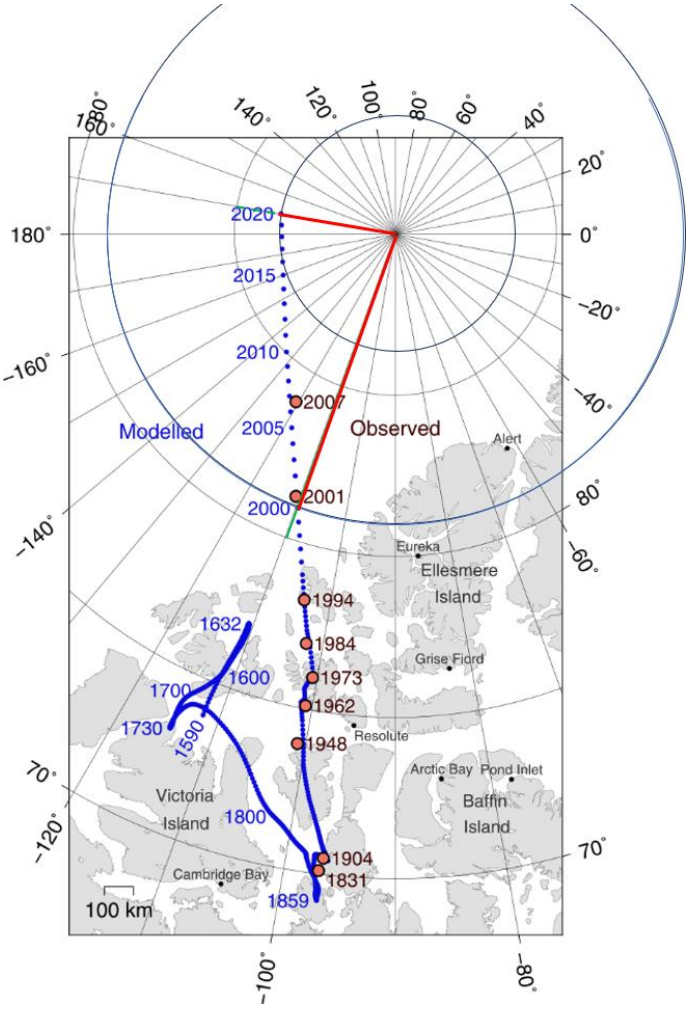
Б) Під час охолодження радіус диска зменшився на ΔR, від самого початку цього процесу диск «відірвався» від стінки, тому можна вважати, що $\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = 0$. Очевидно, що тепер сила $\vec{F}_3$ напрямлена від стінки, перпендикулярно до неї. Сили ж $\vec{F}_2$, $\vec{F}_4$ напрямлені симетрично, під кутом β до стінки (див. рисунок). З умови рівноваги випливає, що $\beta = 30°$.



Звідси випливає, що ніжки 2 і 4 віддаляються від стінки («підтягуються» ближче до ніжки 3), рухаючись під кутом 30° до стінки. Оскільки під час охолодження вони наближаються до центра диска на ΔR, їх відстань від стінки збільшується на $\frac{\Delta R}{\sqrt{3}}$. Отже, наприкінці циклу з нагрівання та охолодження відстань цих ніжок від стінки збільшилася на $\Delta R\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Саме таким і став зазор s між диском і стінкою: $s=\alpha R\Delta t\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0{,}63$ мм.

Зазначимо, що під час охолодження переміщення ніжки 3 не збігається за модулем з переміщеннями ніжок 2 і 4.

(51) А) Не складно переконатися, що на карті зображена така картографічна проекція, що відстань між паралелями однакова (від 70° північної широти до від 75°, від 75° до 80°, від 80° до 85° і від 85° до географічного полюсу). Попередньо слід привести карту до співвідношення 1:1, коли кола паралелей на ній виглядають як кола, а не еліпси. Зручно роздрукувати карту на А4 і зробити виміри лінійкою, або використати якусь програму, що визначає відстань між точками. Для зменшення похибки і точнішого визначення масштабу карти, краще відразу виміряти відстань вздовж якогось меридіану, що відповідає куту у 20° від 70°С географічного полюсу.



Визначимо координати точок, що відповідають положенню магнітного полюсу у 2000 р. (довгота по карті майже точно –110°) і у 2020 р. (довгота майже точно +170°). Отже, різниці за довготою між точками у 80°. На рис. зображені паралелі, що проходять крізь наші точки і червоною лінією відстань від них до географічного полюсу. Точка 2000 р. віддалена від полюса на 9°, а точка 2020 р. на 3,6°. Тоді можна виконати стереометричні розрахунки й отримати косинус кута між радіусами, проведеними з центру Землі до цих точок:

$$\cos\alpha=\cos 9^\circ\cos 3{,}6^\circ+\sin 9^\circ\sin 3{,}6^\circ\cos 80^\circ\approx 0{,}987445.$$

Звідки $\alpha\approx 9^\circ$.

Нехтуючи кривизною земної поверхні в масштабах руху магнітного полюсу, можна й безпосередньо провести виміри відстані між точками на карті й отримати приблизно таке ж значення $\alpha\approx 9^\circ$. Отже, шлях, який пройшов полюс поверхнею Землі з 2000 р. по 2020 р. дорівнює

$$l\approx\frac{9^\circ}{360^\circ}2\pi R\approx\frac{\pi}{20}6370\text{км}\approx 1000\text{ км},$$

а середня швидкість 50 км/рік.

Б) Зрозуміло, що оскільки поверхня Землі обмежена і магнітний полюс за умовою рухається рівномірно, зонд, не змінюючи напрямок вздовж поверхні Землі, і рухаючись, наприклад, стрічним курсом, має досягти магнітного полюса. Цікаво, що для умови задачі (старт зонда у момент мінімальної відстані з такою ж за величиною швидкістю v вздовж поверхні Землі) найменший час, який слід знайти, не залежить від початкової відстані між зондом і магнітним полюсом. Доведемо це. Для цього перетнемо Землю площиною, що проходить через її центр і точки магнітного полюса і зонда. На поверхні Землі з'явиться дуга кола, аналогічна до екваторіальної лінії, з однієї з точок якої у перпендикулярному до неї напрямку рухається магнітний полюс. Скористаємося й далі цією аналогією. Тоді цей магнітний полюс рухається вздовж «меридіану», який утворює кут 90° з «екватором». Де б на цьому «екваторі» не знаходився зараз зонд, якщо він рухатиметься з тією ж швидкістю вздовж свого «меридіану», то через чверть кола ці «меридіани» перетнуться. Такі меридіанні траєкторії еквіваленті прямим найкоротшим відрізкам на поверхні кола. Будь-яка інша траєкторія призведе до більшого часу руху. Отже зонду слід почати рухатись паралельним курсом до руху полюсу, тоді траєкторії внаслідок кривизни поверхні зближатимуться і перетнуться у точці, пройшовши кожен чверть дуги кола.

$L = \frac{\pi}{2}R \approx 10\,000$ км.

(52) Скористаємось порадою і розіб'ємо трубу довжиною l на n однакових частин, довжиною l/n кожна. Позначимо температури на краях цих частин: $t_1, t_2, t_3, \ldots t_{n+1}$.

Розглянемо першу частину, яка має середню температуру $\frac{t_1+t_2}{2}$. Маса води в ній $m = \rho V = \rho\pi R^2 \frac{l}{n}$. Вода, пройшовши довжину частини труби l/n, за час $\tau = \frac{l}{nv}$ зменшує температуру на $\Delta t_{12} = t_1 - t_2$.

Отже, вона втрачає кількість теплоти $cm(t_1 - t_2)$ за рахунок потужності теплопередачі $P = kS\left(\frac{t_1+t_2}{2} - t_0\right)$, де $S = 2\pi R\frac{l}{n}$ – площа бокової поверхні труби (товщиною стінок труби нехтуємо), k – деякий сталий коефіцієнт. Дорівнюючи енергії, знаходимо

$$cm(t_1 - t_2) = kS\left(\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0\right)\tau$$

або

$$c\rho\pi R^2 \frac{l}{n}(t_1 - t_2) = k2\pi R\frac{l}{n}\left(\frac{t_1 + t_2}{2} - t_0\right)\frac{l}{nv}.$$

Зручно переписати цей вираз через різниці температури води і зовнішнього середовища

$\Delta t_1 = t_1 - t_0,\ \Delta t_2 = t_2 - t_0$,..

$$c\rho R(\Delta t_1 - \Delta t_2) = (\Delta t_1 + \Delta t_2)\frac{kl}{nv},$$

звідки

$$\Delta t_2 = \Delta t_1 \frac{1-a}{1+a},$$

де $a = \frac{kl}{nvc\rho R}$.

Аналогічні вирази будуть й для інших дільниць

Другої

$$\Delta t_3 = \Delta t_2 \frac{1-a}{1+a} = \Delta t_1 \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^2,$$

третьої

$$\Delta t_4 = \Delta t_3 \frac{1-a}{1+a} = \Delta t_1 \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^3,$$

останньої

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_n \frac{1-a}{1+a} = \Delta t_1 \left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n.$$

Тоді температура на виході труби t_{n+1} може бути виражена через температуру t_1 на вході через

$$\Delta t_{n+1} = \Delta t_1 \left(\frac{1-\frac{kl}{vc\rho R}\frac{1}{n}}{1+\frac{kl}{vc\rho R}\frac{1}{n}}\right)^n. \qquad (1)$$

В умові сказано, що чим більше n, тим точніша відповідь, що й зрозуміло, оскільки наближення температури частини труби через середнє арифметичне стає більш точним. У граничному випадку $n \to \infty$, вираз у дужках прямує до одиниці, залишаючись меншим за неї, зате степінь прямує до нескінченності. З фізичних міркувань зрозуміло, що множник при Δt_1 в (1) має бути більшим за нуль і меншим за одиницю. Знаходимо пошуком в електронних або інших джерелах, що

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e \approx 2{,}71828\ldots$$

Тоді

$$e^x = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx},$$

або після заміни $mx = n$

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

Отже наш множник в (1) при нескінченно великому числі розбиттів на нескінченно маленькі частини має компактний запис:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{kl}{vc\rho R}\frac{1}{n}}{1+\frac{kl}{vc\rho R}\frac{1}{n}}\right)^n = \frac{e^{-\frac{kl}{vc\rho R}}}{e^{\frac{kl}{vc\rho R}}} = e^{-\frac{2kl}{vc\rho R}}$$

і з формули (1) отримуємо точний вираз для зв'язку температур на двох кінцях труби довжино l

$$t - t_0 = (t_1 - t_0)e^{-\frac{2kl}{vc\rho R}}. \qquad (2)$$

Дамо відповіді на питання задачі для розбиття труби на чотири частини ($n = 4$, формула (1)) і для нескінченного розбиття (формула (2)). Для $n = 4$ температура посередині (на третьому термометрі) і температура на виході визначаються з

$$\Delta t_3 = \Delta t_1 \left(\frac{1 - \frac{kl}{vc\rho R}\frac{1}{4}}{1 + \frac{kl}{vc\rho R}\frac{1}{4}}\right)^2 \text{ і } \Delta t_5 = \Delta t_1 \left(\frac{1 - \frac{kl}{vc\rho R}\frac{1}{4}}{1 + \frac{kl}{vc\rho R}\frac{1}{4}}\right)^4,$$

тобто Δt_3 є середнім геометричним між Δt_1 і Δt_5,звідки $\Delta t_5 = (\Delta t_3)^2/\Delta t_1$, або

$$t_5 - t_0 = \frac{(t_3 - t_0)^2}{t_1 - t_0} = \frac{(50 - 10)^2}{90 - 10}\text{℃} = 20\text{℃}.$$

Температура на виході з труби $t_5 = 30\text{℃}$.

Легко переконатися, що висновок про середнє геометричне не залежить від кількості частин n (парне число), на які ми подумки розбиваємо трубу. Тому і відповідь у точній формулі (2) буде такою ж (температура усередині труби довжиною l рахуємо як температуру на виході труби довжиною $l/2$).

Тепер відповімо на питання Б) як зміняться ці температури, якщо швидкість води а) зменшити удвічі; b) збільшити удвічі.

З формули для температури посередині труби і розбиття на чотири частини $\Delta t_3 = \Delta t_1 \left(\frac{1-\frac{kl}{vc\rho R}\frac{1}{4}}{1+\frac{kl}{vc\rho R}\frac{1}{4}}\right)^2$ виразимо коефіцієнт

$$a = \frac{kl}{4vc\rho R} = \frac{1 - \sqrt{\frac{\Delta t_3}{\Delta t_1}}}{1 + \sqrt{\frac{\Delta t_3}{\Delta t_1}}} = 3 - 2\sqrt{2} \cong 0{,}17.$$

За рахунок зміни швидкості v у випадку а) коефіцієнт a збільшиться удвічі, а у випадку b) удвічі зменшиться. Отже, температура посередині труби

а) $t_3 = t_0 + (t_1 - t_0)\left(\frac{1-2(3-2\sqrt{2})}{1+2(3-2\sqrt{2})}\right)^2 = 10\text{℃} + 80\text{℃} \cdot 0{,}239 \approx 29{,}1\text{℃}$

На виході температуру знаходимо, наприклад, через середнє геометричне

$t_5 = t_0 + \frac{(t_3-t_0)^2}{t_1-t_0} \approx 10\text{℃} + \frac{(29{,}1-10)^2}{90-10}\text{℃} \approx 14{,}6\text{℃}.$

b) $t_3 = t_0 + (t_1 - t_0)\left(\frac{1-(3-2\sqrt{2})/2}{1+(3-2\sqrt{2})/2}\right)^2 = 10\text{℃} + 80\text{℃} \cdot 0{,}70894 \approx 66{,}7\text{℃}$

$t_5 = t_0 + \frac{(t_3-t_0)^2}{t_1-t_0} \approx 10\text{℃} + \frac{(66{,}7-10)^2}{80}\text{℃} \approx 50{,}2\text{℃}.$

Як бачимо, збільшення швидкості руху води призводить до зменшення теплових втрат (вода не встигає сильно охолонути) і навпаки.

Аналогічні розрахунки для формули (2).

Позначимо температуру посередині труби через t_c, а на виході через t. Тоді

$$t_c = t_0 + (t_1 - t_0)e^{-\frac{kl}{vc\rho R}},$$
$$t = t_0 + (t_1 - t_0)e^{-\frac{2kl}{vc\rho R}},$$

звідки значення множника $e^{-\frac{kl}{vc\rho R}} = \frac{t_c - t_0}{t_1 - t_0} = \frac{1}{2}$. Якщо а) швидкість зменшити вдвічі, новий коефіцієнт $e^{-\frac{2kl}{vc\rho R}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Якщо b) швидкість вдвічі збільшити $e^{-\frac{kl}{2vc\rho R}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Маємо:

а) $t_c = t_0 + (t_1 - t_0)\frac{1}{4} = 30℃$.

b) $t_c = t_0 + (t_1 - t_0)\frac{1}{\sqrt{2}} = 10℃ + 40\sqrt{2}℃ = 66{,}6℃$.

Як бачимо, відмінності у температурах точної формули від формули з розбиттям труби всього на чотири частини не дуже великі.

Дамо відповідь на питання В) У скільки разів за тієї самої швидкості води слід **збільшити діаметр** труби, щоб відсоток загальних теплових втрат зменшився вдвічі.

Зауважимо, що з виразу безрозмірного коефіцієнту $\frac{kl}{vc\rho R}$ випливає, що збільшення радіусу труби з точки зору розподілу температури і теплових втрат еквівалентно збільшенню у таку ж кількість разів швидкості руху води.

Визначимо якими були теплові втрати.

Вода остигла при проходженні труби з 90℃ до 30℃, тобто на Δt=60℃. Щоб відсоток загальних теплових втрат зменшився вдвічі, виходячи з формули $Q = cm\Delta t$, треба, щоб температура води зменшилась на удвічі меншу величину, а саме на $\Delta t = 30℃$, тобто на виході стала 60℃. З формули (2) для цих умов знаходимо коефіцієнт

$$60℃ - 10℃ = (90℃ - 10℃)e^{-\frac{2kl}{vc\rho r}}$$
$$e^{-\frac{2kl}{vc\rho r}} = \frac{5}{8},$$

Враховуючи, що $e^{-\frac{2kl}{vc\rho R}} = \frac{1}{4}$, маємо

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{R}{r}} = \frac{5}{8},$$

або $2^{3-2\frac{R}{r}} = 5$. Дане рівняння можна розв'язати за допомогою різних математичних програм. Або, якщо знайомі з логарифмати, можна прологарифмувати і виразити відношення радіусів у загальному вигляді через натуральні або десятичні, які заведені в усі інженерні калькулятори:

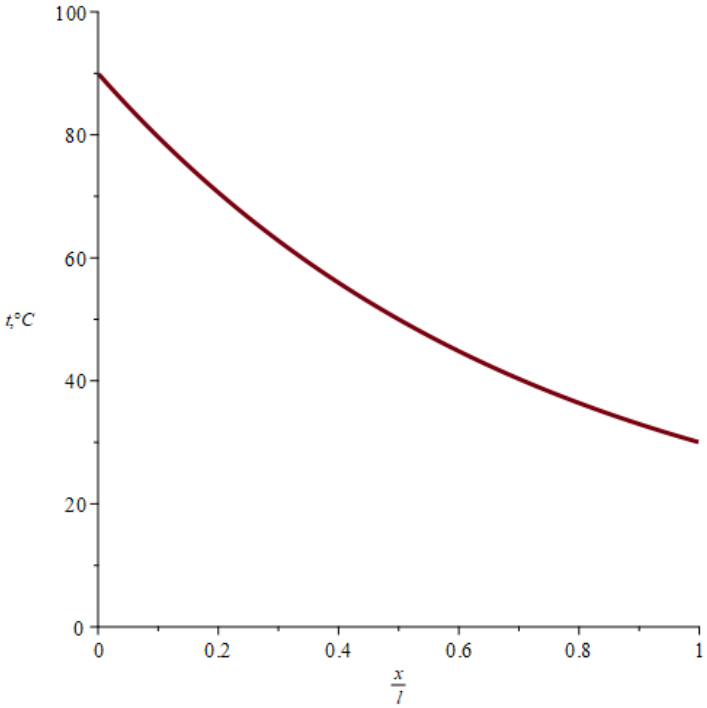
$$\frac{r}{R} = \frac{\ln 4}{\ln 1{,}6} = \frac{\lg 4}{\lg 1{,}6} \approx 2{,}9495 \approx 2{,}9.$$

Наближена модель з чотирьох частин не потребує використання логарифмів і дає наступну відповідь:

$$\frac{r}{R} = a\frac{\sqrt[4]{1{,}6}+1}{\sqrt[4]{1{,}6}-1} \approx 2{,}9237 \approx 2{,}9.$$

Як бачимо, відповіді відрізняються менше ніж на 1%.

Висновок: навіть якщо чогось не знаєш, це ще не означає, що ти не можеш доволі швидко отримати відповідь із задовільною точністю.



Г) Загальну **залежність температури від відстані** x уздовж труби задає формула (2):

$$t(x) = t_0 + (t_1 - t_0)e^{-\frac{2kx}{vc\rho R}} = 10℃ + 80℃ \cdot 4^{-\frac{x}{l}}$$

(53) А) Визначимо спочатку опір відрізку дроту між з'єднаннями (сторони маленького квадрату):

$$r = \rho\frac{l}{S} = 1\ \text{Ом}.$$

Всі точки сітки, які рівновіддалені від шин, посередині між «+» і «−», мають однаковий потенціал. Їх можна з'єднувати між собою або роз'єднувати. На рисунку пунктиром показана лінія однакового потенціалу і виділений фрагмент сітки, опір якого можна розрахувати окремо. Це наче опір послідовно з'єднаних одноомного резистора, квадрату з одноомних резисторів і ще одного одноомного резистора. Загальний опір 3 Ом. Тоді за законом Ома струм у ділянці буде $I = \frac{U}{R} = \frac{U}{3r} = 22$ А, а струм через кут квадрату удвічі меншим 11 А.

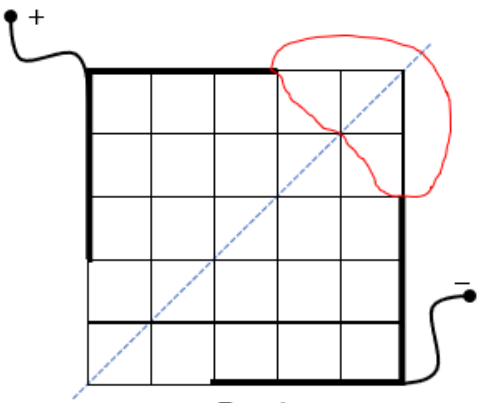


Рис.1

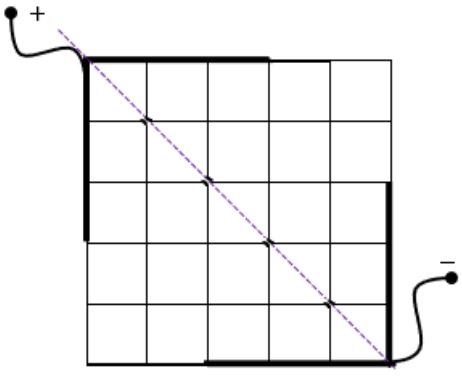


Рис.2

Б) Схема має ще одну лінію симетрію, що проходить через кутові точки шин (рис.2). Всі з'єднання нашої схеми, які перетинає ця лінія, можна роз'єднати вздовж неї. Напруга між роз'єднаними точками нульова, оскільки по обидві сторони від лінії частини схеми абсолютно однакові.

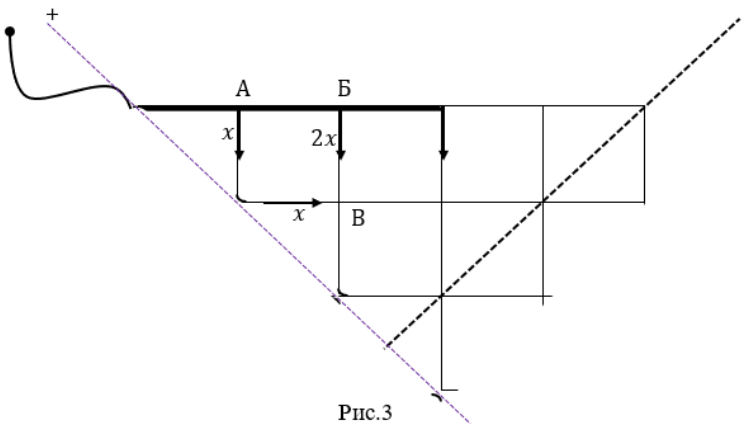


Рис.3

Розв'язуватимемо далі задачу в SI. Позначимо струм від точки А шини через x (рис.3). Тоді струм від точки Б буде $2x$, оскільки покази вольметра між шиною і точкою В можна розрахувати двома способами як від А до В ($xr + xr$), так і від Б до В ($2xr$). Струм від точки В вниз позначаємо через y (див. Рис. 4) . Тоді за законом збереження електричного заряду сума струмів, що входить у вузол має дорівнювати сумі струмів, що виходить. Отже, струм від точки В вправо буде $3x - y$. Робимо так далі і доходимо до точок Г і Д. Але ж ці точки мають однаковий потенціал, оскільки лежать на пунктирній лінії. Отже, якщо рухатись від шини до точки Д лінії однакового потенціалу, то напруга

$$\frac{U}{2} = (2x + 2y) \cdot 1,$$

а якщо до точки Г, то

$$\frac{U}{2} = (16x - 6y) \cdot 1.$$

Розв'язуємо систему і знаходимо: $x = \frac{U}{11}, y = \frac{7U}{44}$.

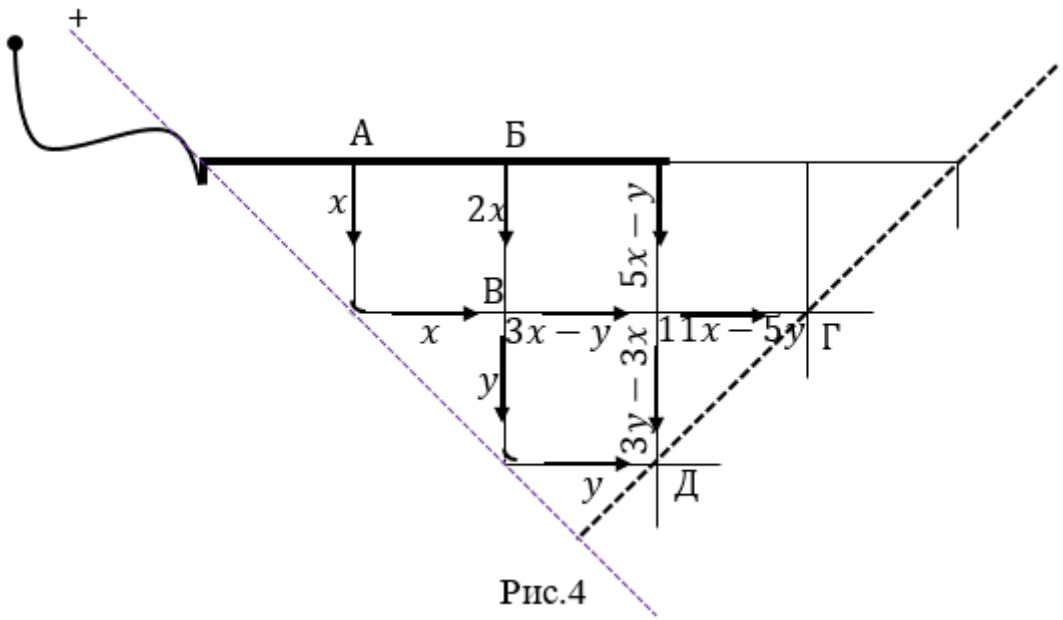


Рис.4

Загальний струм через зображене на Рис.4 з'єднання $I = x + 2x + 5x - y + \frac{1}{3}U = \frac{119}{132}U$. Загальний струм через усю сітку буде удвічі більшим $I_{tot} = \frac{119}{66}U$, отже загальний опір сітки 66/119 Ом.

В) Для значення напруги U=66 В з умови задачі $x = 6\text{A}, y = 10{,}5\text{A}$. Розставимо струми на сітці для наочності (Рис.5). Відємно заряджені електрони рухатимуться у зворотному напрямку. Чим більша сила струму, тим більша швидкість руху електронів. За визначенням сила струму $I = \frac{q}{t}$. Величина заряду q, що протікає за час t через поперечний переріз провідника, може бути збільшена тільки за рахунок швидкості електронів, оскільки провідник є електронейтральним, і тому кількість електронів в ньому залишається незмінною. Скільки входять, стільки ж виходять. Отже, швидкість електронів пропорційна силі струму, а час проходження ними однакової довжини l = 0,1 м обернено пропорційний швидкості і силі струму: $t = \frac{l}{v} = \frac{q}{I}$. Якщо взяти траєкторію електрону від шини до шини, вона складатиметься з прямолінійних відрізків, а загальний час її проходження дорівнюватиме

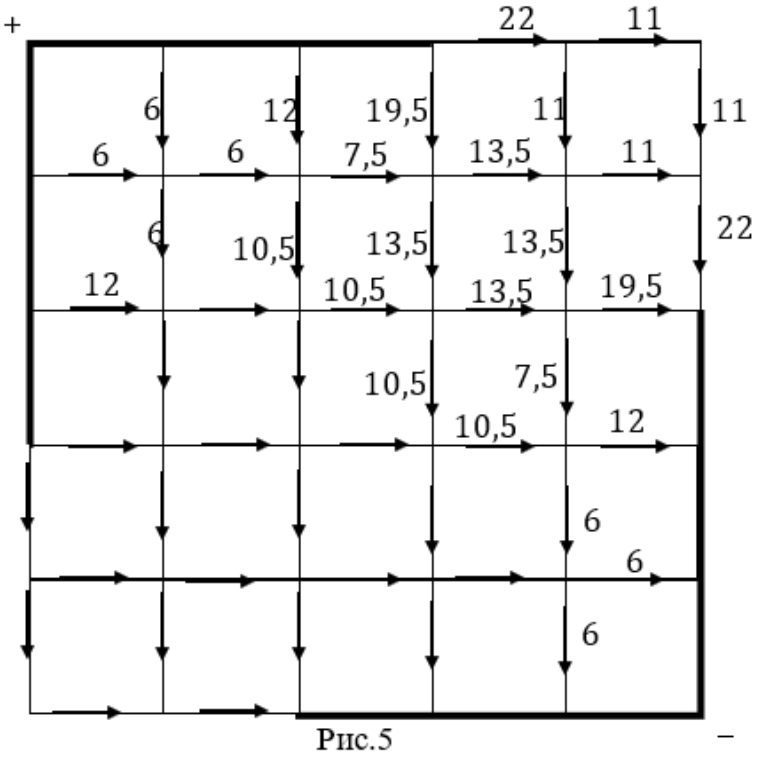
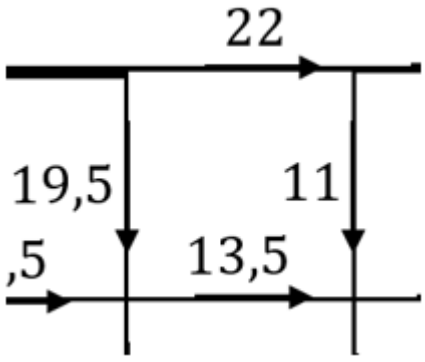


Рис.5

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + \cdots = q\left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} + \frac{1}{I_3} + \cdots\right).$$

Порівнюючи час, слід порівнювати суму обернених величин усіх струмів вздовж траєкторії. Здається, що найкоротші кутові траєкторії 22-11-11-22 будуть найшвидшими, а довгі діагональні 6-6-10,5-10,5-10,5-10,5-6-6 найдовшими у часі по проходженню (див. Рис.5). Але не все так очевидно. У траєкторії 22-11-11-22 є, наприклад, конкурент 19,5-13,5-13,5-19,5. Звісно, можна порівняти безпосереднім розрахунком. Але краще знайти правило, яке дозволить швидко орієнтуватися у таких ситуаціях. В усіх внутрішніх квадратних дільницях нашої задачі порівнюються два шляхи між діаметрально протилежними точками. Причому внаслідок однакової напруги між ними як її не рахуй, сума двох послідовних напруг вздовж сторін квадрату, а разом з нею (оскільки опори однакові) і сума струмів вздовж різних траєкторій буде однакова (див. збільшений скрин): $19{,}5 + 13{,}5 = 22 + 11$. Проаналізуємо за умови $a + b = k = Const$ суму обернених величин:



$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{k}{a(k-a)} = \frac{k}{ka - a^2} = \frac{k}{\frac{k^2}{4} - \left(a - \frac{k}{2}\right)^2}.$$

Сума обернених величин набуває мінімального значення, коли $a = \frac{k}{2}$. Інакше кажучи, коли $a = b = \frac{k}{2}$. В інших випадках вираз буде тим меншим, чим ближчі значенння струмів до середнього значення їхньої суми. Оскільки 19,5 і 13,5 ближче до середнього ніж 22 і 11, то

меншим буде час вздовж 19,5 і 13,5. На рис.6 показані найшвидші траєкторії. Міркуючи у тому ж руслі, знаходимо найповільніші траєкторії (Рис.7). Відношення проміжків часу руху електронів вздовж них:

$$\frac{t_{max}}{t_{min}} = \frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7{,}5}+\frac{1}{13{,}5}}{\frac{1}{19{,}5}+\frac{1}{13{,}5}} = \frac{949}{220} \approx 4{,}3.$$

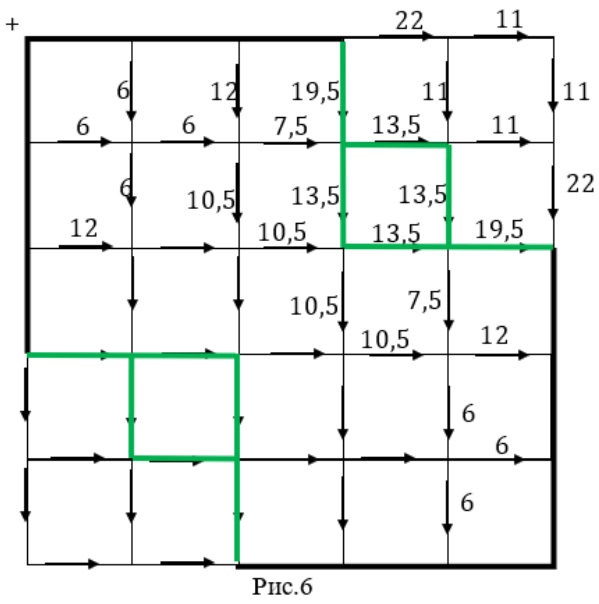


Рис.6

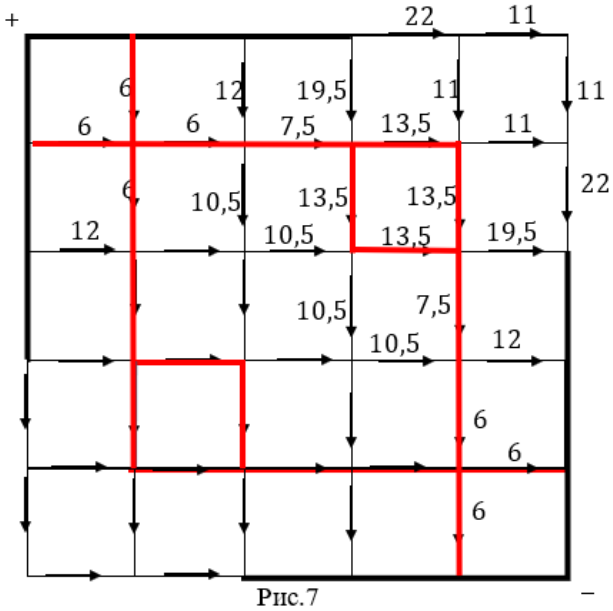


Рис.7

(54) Спочатку розглянемо рух однієї бульбашки. В момент відриву від дна її швидкість дорівнює нулю. На неї діє сила Архімеда, яка її розганяє. Поступово швидкість бульбашки зростає і на неї починає діяти сила опору. В якійсь момент встановиться рівновага – сила опору зрівняється з силою Архімеда і у кульки встановиться постійна швидкість – так звана гранична швидкість.

Знайдемо цю швидкість з умови рівності сили опору $F_{\text{оп}} = 6\pi R\eta v$ та сили Архімеда $F_{\text{А}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g$:

$$6\pi R\eta v = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho g,$$

де ρ – густина води. Насправді ситуація трохи складніша, бульбашки змінюють середню густину, крім того через рух бульбашок закон Архімеда не виконується абсолютно точно. Тим не менш, оскільки бульбашки дуже слабко змінюють середню густину (дивись кінцеву відповідь), то всі ці уточнення слабко впливають на кінцеву відповідь., g – прискорення вільного падіння, де ми також використали, що об'єм бульбашки $V_{\text{б}} = \frac{4}{3}\pi R^3$. Тоді для швидкості маємо

$$v = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho g}{6\pi R\eta} = \frac{2R^2\rho g}{9\eta} \approx 2.5\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Будемо вважати, що бульбашки одразу піднімаються рівномірно зі швидкістю v. Якщо води в посудині багато (по висоті), то це не вносить жодних проблем.

Тепер знаючи швидкість кожної бульбашки, знайдемо їх кількість в одиниці об'єму. За 1 секунду з $1\ мм^2$ виділяється 200 бульбашок. Вони встигають піднятись на висоту $h = vt = 2.5\ см$. Відповідно, вони займають об'єм $V = Sh = Svt = 1\ мм^2 \cdot 2.5\ см = 25\ мм^3$. Тобто в об'ємі $25\ мм^3$ знаходиться 200 бульбашок, або концентрація бульбашок

$$n = \frac{200}{25} = 8\frac{\text{бульбашок}}{мм^3}.$$

Піднімаючись, бульбашки по третьому закону Ньютона діють на воду і роблять її легшою, зменшуючи спадання тиску з глибиною, а значить і зменшуючи силу Архімеда. Щоб це врахувати достатньо розглянути умову плавання тіл, але тепер для середньої густини води з бульбашками.

Знайдемо середню густину води з бульбашками – для цього треба від об'єму води відняти об'єм бульбашок. В об'ємі $V_1 = 1\ мм^3$ знаходиться $nV_1 = 8$ бульбашок. Тоді вода займає лише $(V_1 - nV_1 \cdot V_б)$ об'єму, а її маса $m_1 = \rho(V_1 - nV_1 \cdot V_б)$ тоді середня густина виходить

$$\rho_{сер} = \frac{m_1}{V_1} = \frac{\rho(V_1 - nV_1 \cdot V_б)}{V_1} = \rho\left(1 - n \cdot \frac{4}{3}\pi R^3\right) \approx 966\frac{кг}{м^3}.$$

Тоді використовуючи умову плавання тіл: тіла з густиною $\rho_т > \rho_{сер} = 966\frac{кг}{м^3}$ потонуть.

<u>Відповідь:</u> тіла з густиною $\rho_т > \rho_{сер} = 966\frac{кг}{м^3}$ потонуть.

P.S. Якщо проробити всі викладки у загальному вигляді, то можна отримати наступну відповідь:

$$\rho_{сер} = \rho - \frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} \cdot \frac{6\pi R\eta}{g},$$

де $\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t}$ – кількість бульбашок які виділяються з одиниці площі за одиницю часу (в нашому випадку це 200 бульбашок щосекунди з $1\ мм^2$).

(55) Ключовий висновок, що горизонтальні складові швидкості звуку і датчика мають бути однакові:

$$c_x = v_x = vcos\alpha,$$

А траєкторія руху симетричною.

Вертикальна швидкість датчика за умовою лінійності зміни швидкості

$$v_y = vsin\alpha - gt.$$

Звідси час:

$$t = \frac{vsin\alpha - v_y}{g}$$

і висота (внаслідок лінійності швидкості)

$$h = \frac{vsin\alpha + v_y}{2}t.$$

Звідси час підйому на максимальну висоту ($v_y = 0$):

$$t_{\text{п}} = \frac{v sin\alpha}{g},$$

а максимальна висота підйому:

$$h_{max} = \frac{v^2 sin^2\alpha}{2g}. \qquad (1)$$

Геометрично доводимо, що мінімальний час буде на початку або наприкінці руху і формально прямує до нуля, а максимальний – у симетричному випадку, коли точки випромінювання й отримання сигналу знаходяться на однаковій висоті двох гілок траєкторії.

Нехай максимальному часу Δt відповідає сигнал, посланий у момент часу t з точки на висоті h. Оскільки горизонтальні швидкості однакові, цей сигнал відіб'ється через час $\Delta t/2$ під точкою максимального підйому, у момент, коли там опиниться датчик. Отже для датчика і для звуку:

$$h_{max} - h = \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2,$$

$$h = c_y\,\Delta t/2 = \sqrt{c^2 - c_x^2}\,\Delta t/2 = \sqrt{c^2 - v^2\cos^2\alpha}\,\Delta t/2.$$

Звідси, враховуючи (1), отримуємо квадратне рівняння:

$$\frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 + \sqrt{c^2 - v^2\cos^2\alpha}\left(\frac{\Delta t}{2}\right) - \frac{v^2 sin^2\alpha}{2g} = 0$$

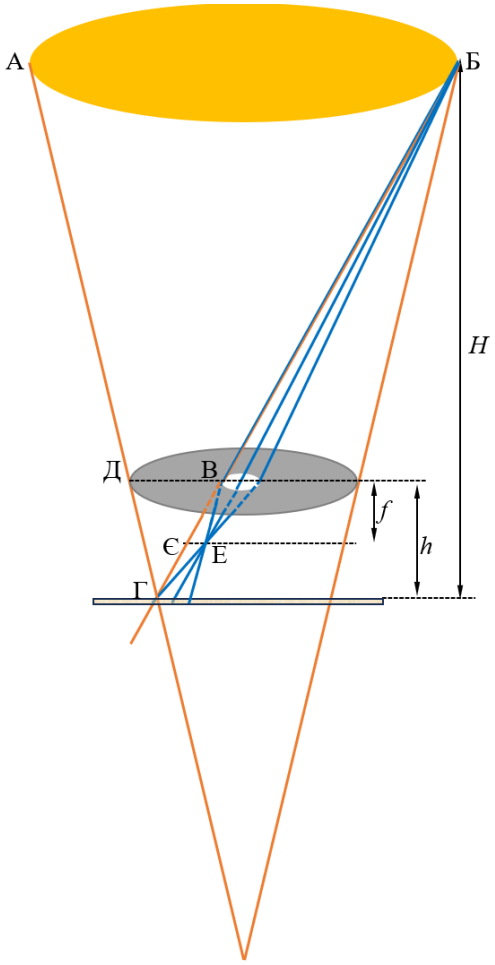
і відповідь:

$$\Delta t = 2\frac{\sqrt{c^2 - v^2\cos^2\alpha + v^2\sin^2\alpha} - \sqrt{c^2 - v^2\cos^2\alpha}}{g} = 2\frac{\sqrt{c^2 + v^2/2} - \sqrt{c^2 - v^2/4}}{g}$$

У випадку надзвукової швидкості виникає обмеження на кут α. Якщо горизонтальна складова швидкості датчика більша за швидкість звуку, сигнал так і не буде отриманий. Отже, має виконуватись $v\cos\alpha < c$. Мінімальний час тепер вже буде відмінним від нуля, оскільки вертикальна складова початкової швидкості датчика перевищуватиме аналогічну складову швидкості звуку (горизонтальні складові однакові), і звук, навіть відбившись на самому початку руху від поверхні, спочатку відставатиме від датчика у вертикальному напрямку.

Для наших умов $v * \cos\alpha = 1{,}25\ c > c$, отже відбитий звук ніколи не наздожене мишу і вона його не почує.

(56) А) Від того під плафоном чи ні знаходиться диск відповідь не залежить. Найменша відстань буде у випадку, зображеному на hис. подібності трикутників АБГ і ДВГ знаходимо $h = 50$ см.



Б) Випадок з лінзою (зрозуміло, що вона має бути збиральною) також не залежить ні від положення диску, ні від центрування лінзи. Саме при симетричному центруванні лінзи відстань без повної тіні буде найменшою.

З подібності двох пар трикутників (зі спільними вершинами у точці Б і у точці Г) двічі знаходимо ЄЕ:

$$ЄЕ = r\left(1 + \frac{f}{H-h}\right) = 2r\frac{h-f}{h}.$$

Звідси

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{H-h} + \frac{2}{h}$$

За формулою тонкої лінзи її оптична сила:

$$D = \frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{H-h} + \frac{2}{h} = \frac{2H}{(H-h)h} = 4{,}8 \text{ дптр.}$$

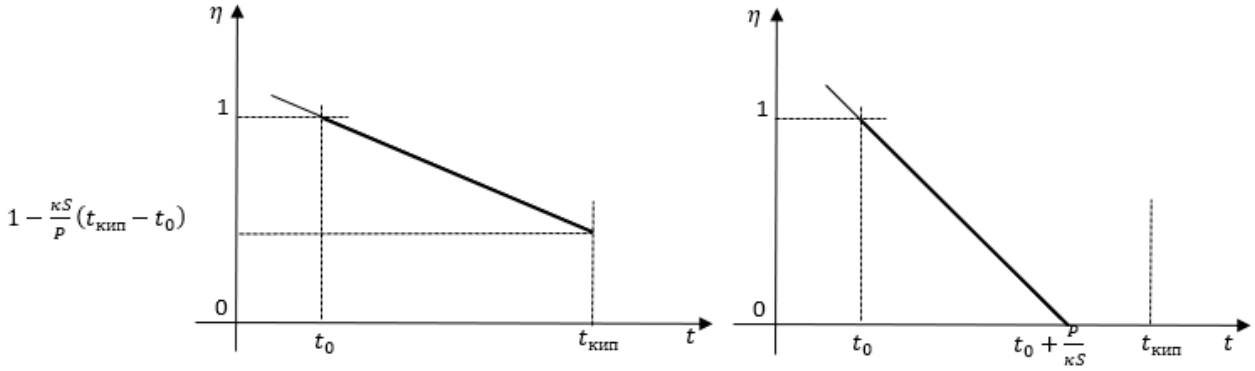
(57) Позначимо потужність електронагрівника через P і припустимо, що ми нагріваємо воду у рідкому стані. Тоді за невеликий час $\Delta\tau$ вода збільшить температуру на невелике значення Δt. Потужність теплових втрат за умовою можна записати у вигляді $P_{\text{втр}} = \kappa S(t - t_0)$, де κ деякий сталий коефіцієнт. Тоді із закону збереження енергії

$$P\Delta\tau = cm\Delta t + \kappa S(t - t_0)\Delta\tau,$$

виражаємо ККД

$$\eta = \frac{cm\Delta t}{P\Delta\tau} = \frac{P\Delta\tau - \kappa S(t - t_0)\Delta\tau}{P\Delta\tau} = 1 - \frac{\kappa S}{P}(t - t_0).$$

Якщо потужність нагрівача більша за потужність теплових втрат при температурі кипіння, маємо пряму, зображену на схематичному графіку (Рис.1). В іншому випадку (Рис.2) максимальну температуру, до якої нагріється вода, знаходимо, наприклад, прирівнявши ККД до нуля ($\eta = 0$). Зазначимо, по-перше, що в обох випадках далі температура не піднімається, і, по-друге, якщо початкова температура води була нижчою за температуру навколишнього середовища t_0, формально ККД за запропонованим в умові визначенням буде більшим за одиницю. Це, звісно, не порушує закон збереження енергії, просто вода додатково нагрівається за рахунок навколишнього середовища.



Б. За $\tau_1 = 20$ хв нагрівання розтануло $m_1 = 1$ кг льоду і залишилося ще $m_2 = m_1/2 = 0{,}5$ кг, які після вмикання нагрівача розтанули через $\tau_2 = 100$ с. Температура співіснування води у рідкому і твердому станах $t_л = 0$°C. Рівняння теплового балансу для першого і другого випадків

$$\kappa S(t_0 - t_л)\tau_1 = \lambda m_1,$$

$$P\tau_2 + \kappa S(t_0 - t_л)\tau_2 = \lambda m_2.$$

Звідси можна знайти і коефіцієнт $\kappa S = \frac{\lambda m_1}{(t_0 - t_л)\tau_1}$ і потужність нагрівача $P = \lambda\left(\frac{m_2}{\tau_2} - \frac{m_1}{\tau_1}\right) = 1375$ Вт.

Виразимо ККД через дані задачі

$$\eta = 1 - \frac{\kappa S}{P}(t - t_0) = 1 - \frac{t - t_0}{5(t_0 - t_л)}.$$

Якщо припустити, що вода закипить ($t = 100$°C), отримаємо додатне значення ККД: $\eta = 0{,}2 = 20\%$. Отже, наше припущення вірне.

В. З рівняння теплового балансу

$$P\Delta\tau = cm\Delta t + \kappa S(t - t_0)\Delta\tau,$$

виразимо швидкість нагріву

$$v = \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{P - \kappa S(t - t_0)}{cm},$$

і прискорення

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta\tau} = -\frac{\kappa S\Delta t}{cm\Delta\tau} = -\frac{\kappa S}{cm}v,$$

де $m = 2$кг – маса води в посудині.

$$v = \frac{P\left(1 - \frac{\kappa S}{P}(t - t_0)\right)}{cm} = \frac{P\eta}{cm},$$

Підставляємо і знаходимо, що на початку нагріву води при 0°C вода нагрівалася зі швидкістю $v_0 \approx 0{,}2°\text{C/c}$, а перед закипанням ушестеро повільніше $v_{100} \approx 0{,}033°\text{C/c}$. Як бачимо, ця швидкість сповільнювалася і також на початку з прискоренням ушестеро більшим ніж наприкінці.

(58) 1. Позначимо $r_\text{А}$ і $r_\text{Б}$ опори ***чверті*** відповідних обручів. Для першого підключення омметра точки обруча $BEDF$ мають однакові потенціали, струм у цьому обручі відсутній. Тому, як легко показати, $R_{AC} = \frac{r_\text{А} r_\text{Б}}{r_\text{А}+r_\text{Б}}$.

2. Для другого випадку коло є симетричним відносно площини $AECF$, потенціали точок B, D є однаковими, тому ці точки можна об'єднати в одну (B/D). На рис. 1 показана еквівалентна схема кола (зафарбовані сірим кольором резистори мають опори $r_\text{А}/2$, вони відповідають паралельному з'єднанню двох резисторів опором $r_\text{А}$; опір не зафарбованих резисторів дорівнює $r_\text{Б}$). Якщо змінити з'єднання в точці B/D, як показано на рис. 2, то отримані «окремі» точки M, N будуть, як і до того, мати однаковий потенціал. Тому їх можна остаточно роз'єднати без зміни опору кола. Отримуємо паралельне з'єднання трьох окремих ділянок.

Зі співвідношення $\frac{1}{R_{AE}} = \frac{1}{r_\text{Б}} + \frac{1}{r_\text{А}} + \frac{1}{2r_\text{Б} + r_\text{А} r_\text{Б}/(r_\text{А}+r_\text{Б})}$ маємо

$$R_{AE} = \frac{r_\text{А} r_\text{Б}(3r_\text{А} + 2r_\text{Б})}{2(r_\text{А} + r_\text{Б})(2r_\text{А} + r_\text{Б})}.$$

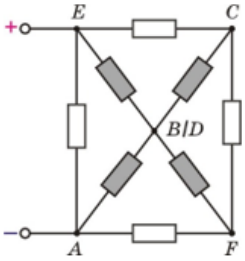


Рис. 1

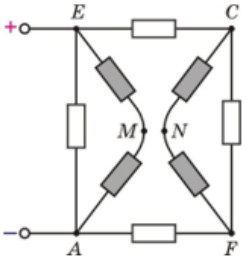


Рис. 2

3. Отже, $\frac{R_{AC}}{R_{AE}} = \frac{2(2r_\text{А}+r_\text{Б})}{3r_\text{А}+2r_\text{Б}}$. Звідси легко отримати, що відношення $\frac{r_\text{А}}{r_\text{Б}} = \frac{2(R_{AC}-R_{AE})}{4R_{AE}-3R_{AC}}$. Оскільки розміри обручів однакові, відношення питомих опорів є таким самим: $\frac{\rho_\text{А}}{\rho_\text{Б}} = \frac{2(R_{AC}-R_{AE})}{4R_{AE}-3R_{AC}} = 1{,}5$.

(59) А) Час доїзду до 50 м: $t_1 = \frac{50\text{ м}}{V_{\text{середня}}\,(50\text{ м})} = \frac{50\text{ м}}{75\frac{\text{км}}{\text{год}}} = 2.40\text{ с}.$

$V_{\text{середня}}\,(125\text{ м})$ легко визначити через середнє між значеннями 75 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$ та 100 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$ використовуючи лінійність функції на спадній ділянці.

Час доїзду до 125 м: $t_2 = \frac{125\text{ м}}{V_{\text{середня}}\,(125\text{ м})} = \frac{125\text{ м}}{87.5\frac{\text{км}}{\text{год}}} \approx 5.14\text{ с}.$

Тоді час руху в потрібному діапазоні $\Delta t = t_2 - t_1 \approx 2.74\,c$.

Середня швидкість в даному інтервалі за визначенням середньої швидкості: $V_{\text{середня}} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{125\text{ м}-50\text{ м}}{2.74\text{ с}} \approx 27.34\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 98.44\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Б) Очевидний зв'язок із визначення середньої швидкості: $L = V_{\text{середня}}\,(L) * t$

Для першої ділянки руху (до 100 м): $V_{\text{середня1}}\,(L) = a_1 + b_1 * L$, з графіку можна визначити, що $a_1 = 50\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$, $b_1 = 500\,\frac{1}{\text{год}}$.

Звідси,

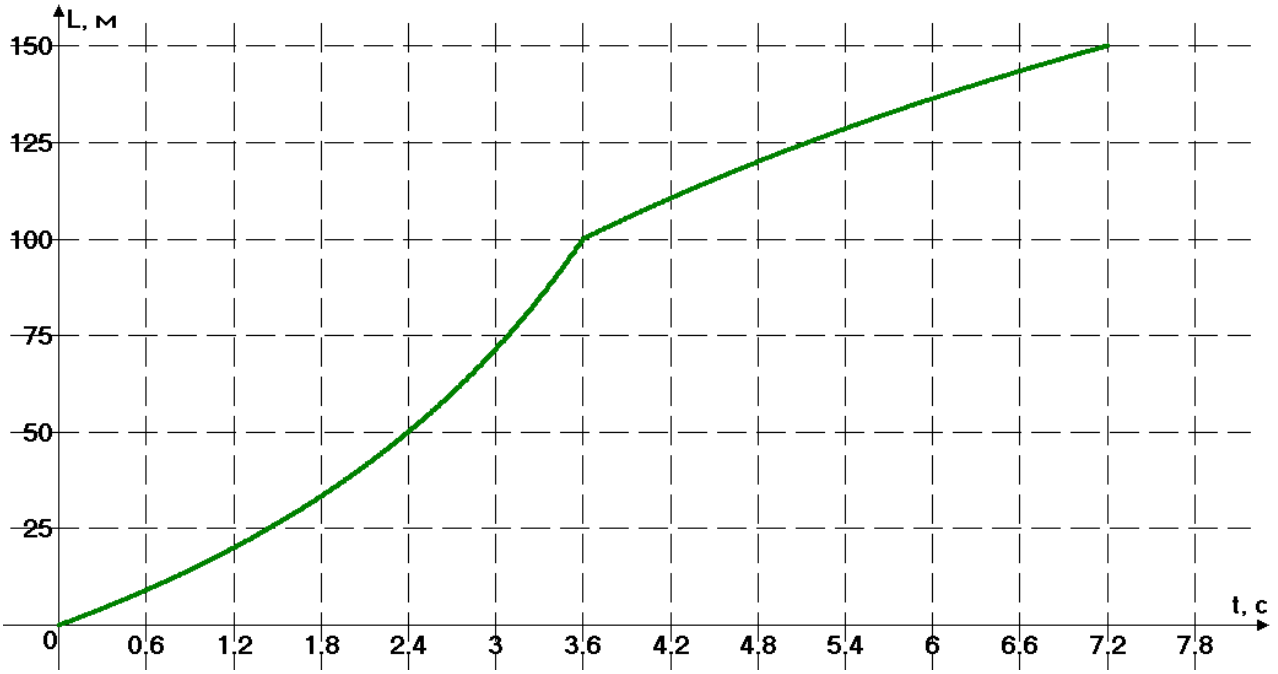
$$L(t) = \frac{a_1 t}{1 - b_1 t}.$$

Аналогічно для другої ділянки руху (після 100 м): $V_{\text{середня2}}\,(L) = a_2 + b_2 * L$, де $a_2 = 150\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$, $b_2 = -500\ \frac{1}{\text{год}}$.

Так само на другому етапі

$$L(t) = \frac{a_2 t}{1 - b_2 t}.$$

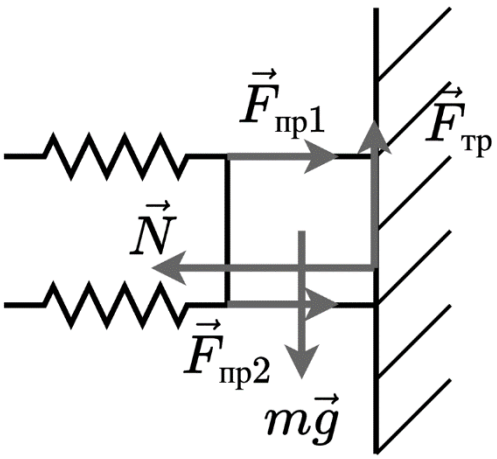
Побудуємо дані графіки



В) Одразу можна помітити як мінімум дві дивні ситуації. Зліва і справа від точки 3.6 с кут нахилу дотичних до графіку різний, а значить швидкість зазнає миттєвого ривку, що неможливо в реальності. Також, якщо уважно подивитись на порядки швидкостей, то зліва від 3.6 с по куту нахилу дотичної до графіка можна зрозуміти, що швидкість машини порядку 2000 км/год. Ну це вже точно штраф за перевищення швидкості!

За бажання, використовуючи аналіз похідними, можна перевірити й пікові прискорення. Але вони виходять відносно адекватні (принаймні, не такі, як при підготовці космонавтів) порядку 30 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ або 3g.

(60) Розглянемо сили, які діють на правий кубик: дві сили пружності від пружин $\vec{F}_{\text{пр1}}$, $\vec{F}_{\text{пр2}}$ штовхають вправо, сила реакції опори $\vec{N}$ протидіє вліво, сила тяжіння $\mathrm{m}\vec{g}$ тягне його вниз, а сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ діє вгору. Тоді умова рівноваги кубика буде:



$$\vec{F}_{\text{пр1}} + \vec{F}_{\text{пр2}} + \mathrm{m}\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = 0,$$

або якщо розглянути окремо вертикальні та горизонтальні сили, отримаємо такі два рівняння:

$$\begin{cases} F_{\text{пр1}} + F_{\text{пр2}} = N, \\ mg = F_{\text{тр}}. \end{cases}$$

Оскільки обидві пружини однакові та стиснулись однаково, вони будуть діяти з однаковою силою, за законом Гука $F_{\text{пр1}} = F_{\text{пр2}} = kx$, де x – це стиснення кожної пружини. Для сили тертя спокою, яка діє на кубик, виконується нерівність $F_{\text{тр}} \leq \mu N$. Підставляючи це в систему рівнянь вище, отримаємо:

$$\begin{cases} 2kx = N, \\ mg \leq \mu N. \end{cases}$$

Отже $mg \leq 2\mu kx$, або

$$x \geq \frac{mg}{2\mu k}.$$

Таким чином ми знайшли мінімальне стиснення пружин. Оскільки початкова довжина пружин була l_0, довжина стиснутих пружин буде $(l_0 - x)$. Тоді відстань між стінками буде $(l_0 - x + 2a)$. Тобто відстань між стінками має бути менша або рівна

$$l_0 + 2a - \frac{mg}{2\mu k}.$$

Але, вона не повинна бути меншою за $2a$. Саме тому є додаткова умова на параметри системи, при яких взагалі можлива така рівновага: $l_0 \geq \frac{mg}{2\mu k}$.

Відповідь: відстань між стінками має бути менша або рівна $l_0 + 2a - \frac{mg}{2\mu k}$ за умови, що $l_0 \geq \frac{mg}{2\mu k}$.

Примітка: Додатково можна розглянути умову рівноваги моментів сил які діють на кубики. Для цього за вісь найзручніше обрати центр мас кубика – відносно нього момент сили тяжіння дорівнює нулю, та моменти сил пружності компенсуються. Залишається рівність моментів сил від сили реакції опори та сили тертя: $F_{\text{тр}} \frac{a}{2} = Ny$, де y – плече сили реакції опори. З умови $\mu < 1$ випливає, що $F_{\text{тр}} < N$, а отже $y < \frac{a}{2}$, тобто сила реакції опори має діяти в межах кубика. Це не викликає жодних протиріч, тому ця умова не накладає додаткових обмежень. Зауважте, що при $\mu > 1$ можлива ситуація коли кубики не проковзують, але завалюються в середину.

(61) А) Спочатку дозаповнимо в таблиці те, що можна просто перерахувати. Теплотворна здатність на одиницю об'єму Q/V і теплотворна здатність на одиницю маси (питома теплота згоряння q) пов'язані співвідношенням:

$$q = Q/m = Q/(\rho V) = \frac{Q/V}{\rho}.$$

Отже, перерахунковий коефіцієнт:

$$q = \frac{Q/V}{\rho} = \left\{\frac{Q/V}{\rho}\right\} \frac{\text{кВт} \cdot \text{год}}{\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}} = \left\{\frac{Q/V}{\rho}\right\} \frac{1000\text{Вт} \cdot 3600\text{ с}}{\text{кг}} = \left\{\frac{Q/V}{\rho}\right\} \frac{3600\text{ ккал}}{4{,}18\text{ кг}}$$

$$\approx 861 \cdot \left\{\frac{Q/V}{\rho}\right\} \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}.$$

Так, для берези за вологості 12% маємо: $861 \cdot \frac{300}{630} \frac{\text{ккал}}{\text{кг}} = 4100 \frac{\text{ккал}}{\text{кг}}$. Також робимо для всіх можливих випадків і частково заповнюємо таблицю:

Бачимо схожість значень питомої теплоти згоряння різних порід деревини за однакової вологості.

	Вологість 0%	Вологість 12%			Вологість 25%		
	Теплотворна здатність, ккал/кг	Теплотворна здатність, кВт·год/м^3	Густина, кг/м^3	Теплотворна здатність, ккал/кг	Теплотворна здатність, кВт·год/м^3	Густина, кг/м^3	Теплотворна здатність, ккал/кг
Береза		3000	630	**4100**	2700	650	**3580**
Сосна		2400	500	**4130**	2200	530	**3570**
Ялина		2100	440	**4110**		470	

Це може свідчити про спільне значення теплотворної здатності абсолютно сухої деревини (вологість 0%). Знайдемо його з тих даних для 12% і 25%, які у нас зараз вже є. З енергетичних міркувань суха деревина, згоряючи, має нагрівати воду, потім випаровувати її та розігрівати водяну пару до 800℃ (за умовою задачі). Справді, коли ми підкидаємо у вогнище дрова, всі продукти згоряння разом з полум'ям піднімаються вгору. Отже, можна записати:

$$qm = q_0 m_c - c_\text{в} m_\text{в} \Delta t_{80} - r m_\text{в} - c_\text{п} m_\text{в} \Delta t_{700},$$

звідки

$$q_0 = q\frac{m}{m_c} + \frac{m_\text{в}}{m_c}(c_\text{в}\Delta t_{80} + r + c_\text{п}\Delta t_{700}) = q\frac{m}{m_c} + \frac{m_\text{в}}{m_c} \cdot 4{,}1\text{ МДж/кг},$$

де m – маса вологих дров, m_c – маса сухої речовини в них, $m_\text{в}$ – маса води в дровах.

За умовою задачі: «Вологість у таблиці – відношення маси води у деревині до маси цієї ж деревини в абсолютно сухому стані». Позначимо це відношення через $x = \frac{m_\text{в}}{m_c}$.

Тоді:

$$q_0 = q(1 + x) + x \cdot 4{,}1\text{ МДж/кг} = q(1 + x) + x \cdot 980\text{ ккал/кг}.$$

Підставляємо значення $x = 0{,}12$ і $x = 0{,}25$ та знаходимо

	Вологість 0%		Вологість 12%			Вологість 25%		
	Теплотворна здатність q_0, ккал/кг		Теп-лотвор-на здатність, кВт·год/м^3	Густина, кг/м^3	Теплотвор-на здатність, ккал/кг	Теплотвор-на здатність, кВт·год/м^3	Густина, кг/м^3	Теплотвор-на здатність, ккал/кг
Береза	**4710** 0,12	**4720** 0,25	3000	630	**4100**	2700	650	**3580**
Сосна	**4740** 0,12	**4710** 0,25	2400	500	**4130**	2200	530	**3570**
Ялина	**4720** 0,12		2100	440	**4110**		470	

Висунемо гіпотезу, що теплотворна здатність сухої речовини однакова, і візьмемо середнє арифметичне п'яти значень: 4720 ккал/кг. Для цього значення розрахуємо й заповнимо дві останні клітинки таблиці для ялини.

	Вологість 0%		Вологість 12%			Вологість 25%		
	Теплотворна здатність q_0, ккал/кг		Теплотворна здатність, кВт·год/м^3	Густина, кг/м^3	Тепло-творна здатність, ккал/кг	Тепло-творна здатність, кВт·год/м^3	Гу-стина, кг/м^3	Теплотвор-на здатність, ккал/кг
Береза	**4710** 0,12	**4720** 0,25	3000	630	**4100**	2700	650	**3580**
Сосна	**4740** 0,12	**4710** 0,25	2400	500	**4130**	2200	530	**3570**
Ялина	**4720** 0,12	**4720** 0,25	2100	440	**4110**	**1950**	470	**3580**

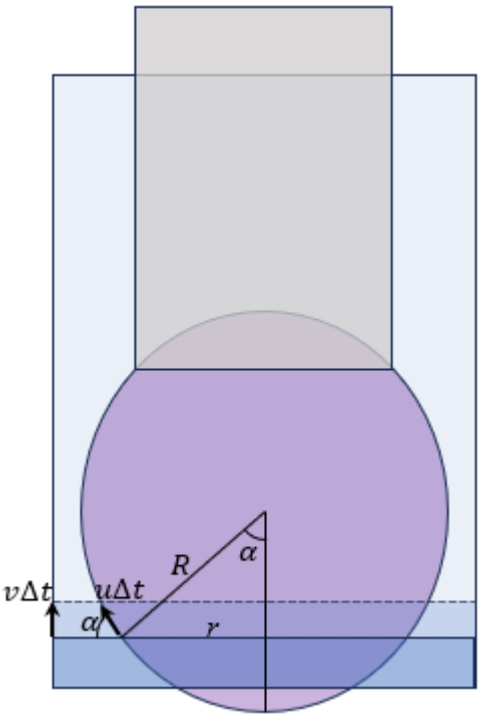
Б) «За **якої відносної вологості** деревини та взагалі не буде горіти?»

Відносна вологість – це відношення маси води до маси усієї речовини $\varphi = \frac{m_в}{m_c+m_в}$, що відрізняється від просто вологості $x = \frac{m_в}{m_c}$: $\varphi = \frac{x}{1+x}$. За нашою моделлю формула розрахунку зв'язку теплотворної здатності сухої і вологої деревини:

$q(1+x) + x \cdot 980\ \text{ккал/кг} = q_0 \approx 4720\ \text{ккал/кг}$.

Звідси, вважаючи, що деревина не буде горіти й підтримувати полум'я, якщо $q = 0\ \text{ккал/кг}$, маємо $x \cdot 980\ \text{ккал/кг} \approx 4720\ \text{ккал/кг}$ тобто $x \approx 4{,}82$, звідки максимальна відносна вологість, за якої дрова вже не горітимуть: 83%.

(62) Введемо позначення $q = 100$ мл/с, сторони дна акваріуму a=12 см, b=22 см, радіус циліндру R=5 см, його довжина, а також більші сторони отвору і основи коробу l=20 см. Менші сторони отвору і коробу, відповідно, c=6 см і d=8 см. Швидкості руху лінії розділу води і повітря вздовж вертикальної стінки акваріуму та вздовж бокової поверхні циліндру позначимо v і u, відповідно.



А,Б,В) Розглянемо невеликий проміжок часу Δt (Рис.1.). З подібності трикутників або з визначення синусу кута маємо

$$\frac{v}{u} = \frac{r}{R} = \sin\alpha,$$

тобто

$$u = \frac{v}{\sin\alpha} = v\frac{R}{r}.$$

За невеликий проміжок часу Δt об'єм води ΔV розходиться по площі $ab - 2rl$, отже

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = q = (ab - 2rl)v.$$

Звідси

$$v = \frac{q}{ab - 2rl} = \frac{q}{ab - 2Rl\sin\alpha}.$$

Максимальне значення швидкості буде за максимального r, мінімальне – за мінімального:

$$v_{\text{макс}} = \frac{q}{ab - 2Rl} = \frac{25}{16}\ \text{см/с} \approx 1{,}56\ \text{см/с}.$$

$$v_{\text{мін}} = \frac{q}{ab - cl} = \frac{25}{36}\ \text{см/с} \approx 0{,}69\ \text{см/с}.$$

Після занурення циліндру швидкість буде

$$v = \frac{q}{ab - dl} = \frac{25}{26}\ \text{см/с} \approx 0{,}96\ \text{см/с}.$$

Як бачимо з формули й рисунку, координата r є і зручною, і наочною.

Швидкість уздовж бокової (циліндричної) поверхні циліндру

$$u = v\frac{R}{r} = \frac{qR}{abr - 2lr^2}.$$

Для зручності аналізу виділяємо повний квадрат у знаменнику

$$u = \frac{qR}{2l\left(\left(\frac{ab}{4l}\right)^2 - \left(r - \frac{ab}{4l}\right)^2\right)}.$$

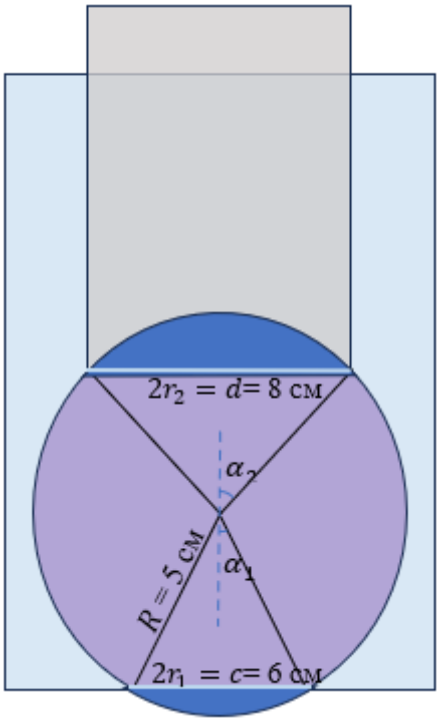
Найменшою швидкість u буде, коли повний квадрат у знаменнику дорівнюватиме своєму мінімальному значенню, тобто, коли $r = \frac{ab}{4l} = 3{,}3$ см. Це значення більше початкового значення $r = \frac{c}{2} = 3$ см. Отже, спочатку швидкість буде зменшуватись до

$$u_{\text{мін}} = \frac{8qRl}{a^2b^2} \approx 1{,}15\ \text{см/с},$$

потім збільшуватись до максимального значення коли $r = R$,

$$u_{\text{макс}} = \frac{qR}{2l\left(\left(\frac{ab}{4l}\right)^2 - \left(R - \frac{ab}{4l}\right)^2\right)} = \frac{q}{ab - 2lR} = \frac{25}{16}\ \text{см/с} \approx 1{,}56\ \text{см/с},$$

а далі знову зменшуватись до граничного значення $\frac{125}{104}$ см/с $\approx 1{,}2$ см/с, де циліндр дотикається коробу ($r = \frac{d}{2} = 4$ см).



Г) Оскільки циліндр не повністю охоплений водою, безпосередньо використати вираз сили Архімеда для нього не можна. Уявимо, що у циліндрі є два тоненькі горизонтальні розрізи: на рівні дна і на рівні нижньої основи короба, які заповнила вода і тисне водночас вгору і вниз (Рис.2). Тоді сили її тиску на циліндр зрівноважені, але середня частина циліндру вже охоплена водою і на неї діє сила Архімеда $\rho_в g V$, де V – об'єм циліндру без двох зрізаних частин, які знаходяться через добуток різниці площі частини кола і трикутника на довжину циліндру. Тоді проекція на вертикальну вісь OY рівнодійної сили, що діє на повністю занурений циліндр при заповненні акваріума водою до висоти h:

$$F_y = N + \rho_в g V - mg - \rho_в g h \cdot 2r_1 l + \rho_в g \left(h - \sqrt{R^2 - r_1^2} - \sqrt{R^2 - r_2^2}\right) \cdot 2r_2 l.$$

Оскільки вода підтікає знизу під циліндр на більш ефективній площі, ніж тисне згори, у деякий момент циліндр відірветься, завдяки збільшенню нескомпенсованого тиску. Вода почне витікати повз нього вниз поки зі зменшенням h його знову не притисне до отвору. Виникне явище, яке називають автоколиваннями.

У рівновазі $F_y = 0$. Циліндр починає відриватися, коли N=0. Отже,

$$h = \frac{m - \rho_в V + \rho_в \left(\sqrt{R^2 - r_1^2} + \sqrt{R^2 - r_2^2}\right) \cdot 2r_2 l}{2l(r_2 - r_1)\rho_в} =$$

$$= \frac{(\rho_{Fe} - \rho_в)\pi R^2 + \rho_в \left[\Delta S_1 + \Delta S_2 + \left(\sqrt{R^2 - r_1^2} + \sqrt{R^2 - r_2^2}\right) \cdot 2r_2\right]}{2(r_2 - r_1)\rho_в} \approx \mathbf{303}\ \text{см},$$

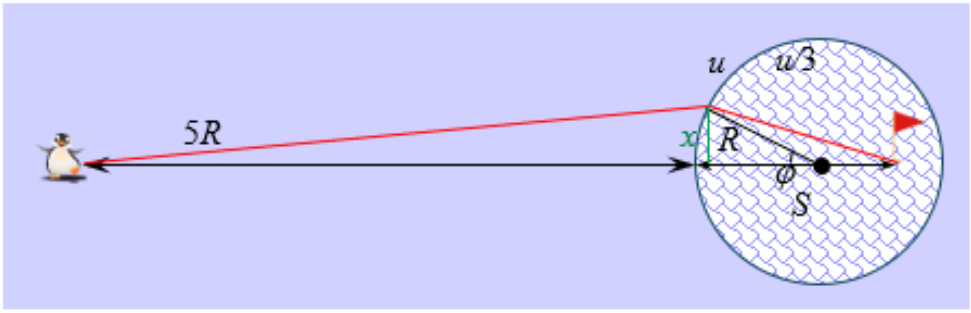
де було враховано, що об'єм обрізаного зверху й знизу циліндра $V = (\pi R^2 - [\Delta S_1 + \Delta S_2])l$, а $\Delta S_1 + \Delta S_2 = (\alpha_1 + \alpha_2)R^2 - r_1\sqrt{R^2 - r_1^2} - r_2\sqrt{R^2 - r_2^2} \approx 15{,}27$ см^2.

Знайдемо тепер час, за який акваріум з високими стінками і коробом наповниться водою до висоти 303 см. Загальний об'єм води дорівнюватиме $V_{\text{заг}} = abh - V - V_{\text{кор}} = abh - V - dl(h - 7\text{см}) = 31{,}367$ л. Поділимо цей об'єм на швидкість наповнення акваріуму водою $q =$ 100 мл/с і отримаємо час **5 хв 14 с**.

(63) а) Розглянемо траєкторії, що перетинають передню границю крижаної області на відстані x, малій порівняно з R. Очевидно, обидві ділянки траєкторії найвигідніше вибирати прямолінійними. Тоді, наближено розраховуючи довжини гіпотенуз, отримаємо

$$t = \frac{5R + \frac{x^2}{2\cdot 5R} + \frac{x^2}{2R}}{u} + \frac{S + \frac{x^2}{2\cdot S} - \frac{x^2}{2R}}{u/3} = \frac{5R+3S}{u} + \frac{x^2}{2u}\left(\frac{3}{S} - \frac{9}{5R}\right).$$

Отже, бачимо, що на відстані $S>5R/3$ (тобто на відстані менше $R/3$ від дальньої границі) час руху по такій траєкторії буде меншим, ніж по прямій. Ця відстань відповідає положенню «зображення» точкового джерела світла, що знаходиться у точці старту, у «лінзі»-крижаній області.



б) Для довільного L маємо аналогічно

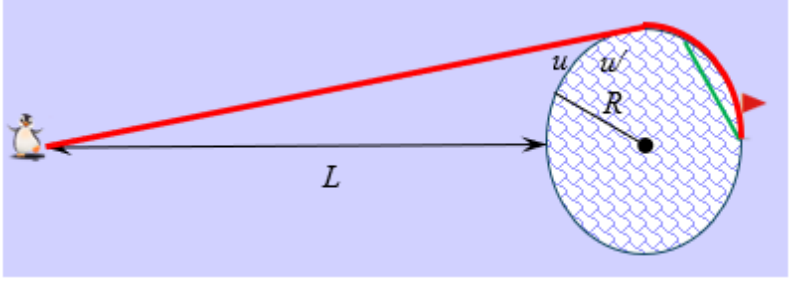
$$t = \frac{L + \frac{x^2}{2\cdot L} + \frac{x^2}{2R}}{u} + \frac{S + \frac{x^2}{2\cdot S} - \frac{x^2}{2R}}{u/3} = \frac{L+3S}{u} + \frac{x^2}{2u}\left(\frac{3}{S} - \frac{2}{R} + \frac{1}{L}\right).$$

Тоді, вимагаючи, щоб критична відстань S була більшою за $2R$, отримуємо, що $L<2R$.

в) Тепер легко здогадатися, що більш вигідним буде просто «обійти» крижану область стороною, тобто рухатися по відрізку прямої лінії до майже верхньої точки області, а потім рухатися по чверті дуги кола, поки не дістатися фінішу. Дійсно, прямолінійна ділянка шляху в цьому випадку близька до $L+R$, і тоді легко порівняти час руху по прямолінійній і по такій, «обхідній», траєкторії,

$$t_1 \approx \frac{L+R}{u} + \frac{\pi R/2}{u}, t_2 = \frac{L}{u} + \frac{2R}{u/3} > t_1.$$

(Більш точний розрахунок у квадратичному наближенні дає $t_1 \approx \frac{L+R-R^2/2L}{u} + \frac{(\pi/2 + R/L)R}{u}$, що, як бачите, відрізняється лише на квадратичні доданки!) Очевидно, що «скосити», тобто перейти на будь-яку хорду в середині крижаної області, показану на рисунку зеленим, не дасть виграшу (впевнитися в цьому можна прямим розрахунком). Цікаво подумати над оптичною аналогією і в цьому випадку: окрім прямолінійного променю, який виходить з місця старту і потрапляє у точку фінішу, можна також уявити собі і промінь, який зазнає повного внутрішнього відбиття на ділянці чверті кола, саме він і відповідає мінімуму часу розповсюдження!



(64) Струм, який показує амперметр A_2 дорівнює різниці струму через резистор 1, тобто I_0, і струму I_2 через резистор 2. Знайдемо I_2, знаючи потужність, що виділяється на резисторі 2, і напругу, яка дорівнює різниці напруги на колі і напруги на першому резисторі,

$$I_2 = \frac{2P}{U - U_1} = \frac{2P}{U - P/I_0}.$$

Тоді отримуємо шуканий струм через амперметр A_2:

$$I_{A2} = I_0 - I_2 = I_0 - \frac{2P}{U - P/I_0} = I_0 \frac{UI_0 - 3P}{UI_0 - P}.$$

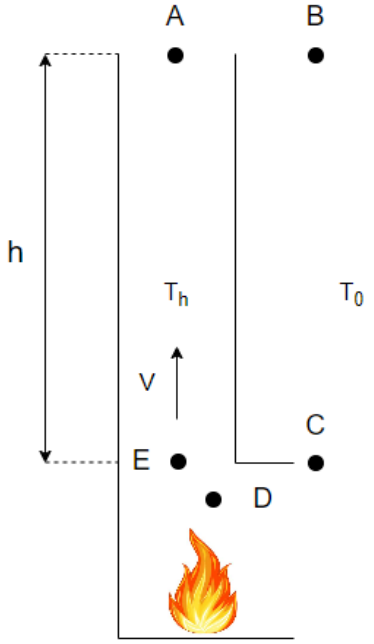
Зазначимо, що знаменник цього дробу обов'язково повинен бути додатним (оскільки напруга на другому резисторі менша за загальну напругу), а от чисельник може бути як додатним, так і від'ємним, що відповідає ситуації, коли струм тече через амперметр в одному або іншому напрямку.

(65) Модуль T сили натягу невагомої нитки за відсутності тертя однаковий у всіх перерізах цієї нитки. Отже, в точках A і B на важіль діють однакові за модулем сили, які утворюють різні кути з горизонтом (відповідно α і β). З рисунку бачимо: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$. Якщо сили натягу нитки в точках A і B розкласти на вертикальні та горизонтальні складові, то обертальний момент відносно осі обертання важеля дадуть тільки вертикальні складові, модулі яких $T\sin\alpha$ і $T\sin\beta$. Отже, умову рівноваги важеля можна записати у вигляді $T\sin\alpha \cdot l_A = T\sin\beta \cdot l_B$ (тут l_A, l_B — відстані відповідно точок A і B від точки опори важеля).

Таким чином, $4l_A = 3l_B$. Якщо позначити довжину важеля L, то $\boldsymbol{l_A = 3L/7}$, $\boldsymbol{l_B = 4L/7}$. Точка опори розташована в 6 клітинках від точки A і в 8 клітинках від точки B.

З умов рівноваги випливає, що праворуч і ліворуч від «намистинки» нитка має утворювати однакові кути з горизонтом. Наведений рисунок не дуже точно відповідає цій умові.

(66) Тиски в точках A та B однакові бо знаходяться на одному рівні. Тиск в точці C рівний $p_C = p_B + \rho_0 gh$, він же майже рівний тиску в точці D в каміні перед димарем. Тиск в точці E рівний $p_E = p_A + \rho_h gh$.



Тоді використовуючи формулу $\rho = \frac{\gamma}{T}$ різниця тисків на вході в димар та в середині димаря в його нижній частині: $\Delta p = (\rho_0 - \rho_h)gh = \gamma\left(\frac{T_h - T_0}{T_h T_0}\right)gh$.

Знайдемо також швидкість повітря в димарі: $V = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho_h}} = \sqrt{\frac{2(T_h - T_0)gh}{T_0}}$.

Запишемо закон енергії для нагрівання повітря в пічці димаря:

$$qm_{\text{вугілля}} = c_p m_{\text{повітря}}(T_h - T_0)$$

$$q\alpha = c_p(T_h - T_0)$$

Тут α це відношення маси вугілля, яке згорає, до маси повітря, яке за цей час прокачується через пічку.

Хімічна формула, що описує згоряння:

$$C + O_2 \to CO_2$$

Тоді, приблизно $\alpha = \frac{m_{\text{вугілля}}}{m_{\text{повітря}}} = \beta\delta\frac{\mu_C}{\mu_{O_2}}$, тобто пропорційна відношенню молярних мас.

Врешті решт, отримуємо:

$$\frac{\Delta m_{\text{вугілля}}}{\Delta t} = \alpha\rho_h VS = \left(\beta\delta\frac{\mu_C}{\mu_{O_2}}\right)^{3/2}\frac{\gamma}{\frac{q\beta\delta}{c_p}\frac{\mu_C}{\mu_{O_2}} + T_0}\sqrt{\frac{2qgh}{T_0 c_p}}S.$$

(67) А) Від зовнішнього радіусу платинового циліндру R_2 відповідь не залежить. Тому для спрощення запису позначатимемо внутрішній радіус R_1 як R. Необхідно, щоб за будь-якої температури точно виконувалось $R = r + d$, тобто

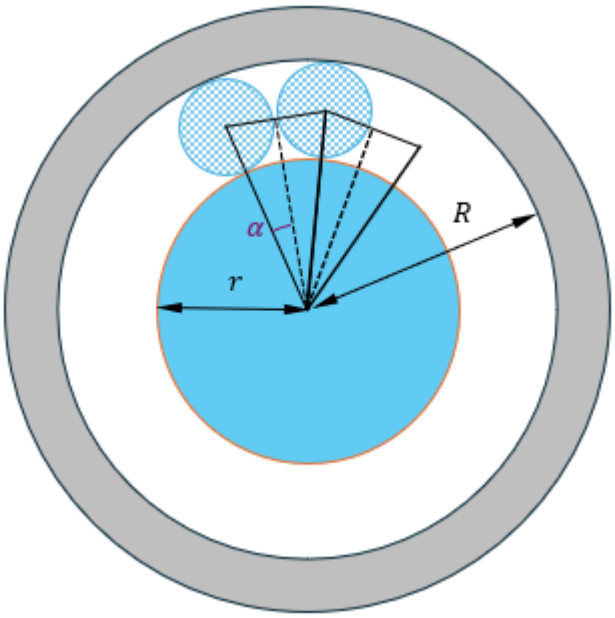
$$R_0(1 + \alpha_{\text{п}}\Delta t) = r_0(1 + \alpha_{\text{з}}\Delta t) + d_0(1 + \alpha\Delta t),$$

де $R_0 = r_0 + d_0$ – зв'язок між лінійними розмірами при «початковій» температурі $t_0 = 20°\text{C}$. Тоді після скорочення отримуємо

$$R_0\alpha_{\text{п}} = r_0\alpha_{\text{з}} + d_0\alpha$$

і разом з рівнянням $R_0 = r_0 + d_0$, де $d_0 = 1$ см, знайдемо $r_0 = 1{,}6$ см, $R_0 = 2{,}6$ см. Зрозуміло, що зовнішній радіус R_2 платинового циліндру має бути більшим за 2,6 см.

Б) За температури 20°C центри алмазних кульок віддалені від осі симметрії на відстань $(R_0 + r_0)/2 =$ 2,1 см. Приблизну кількість кульок можна оцінити, поділивши довжину кола радіусом 2,1 см на діаметр кульки з товщиною однієї прокладки 1,005 см: ≈13,13. Можна очікувати, що в один ряд між циліндрами вміститься 13 кульок. Зробивши таке припущення, слід все ж таки розрахувати сторону правильного 13-ти кутника, яка має бути не меншою, ніж 1,005 см – відстань між центрами сусідніх кульок у стані дотику. Справа в тому, що довжина кола більша за периметр вписаного в нього правильного багатокутника і тому таку перевірку слід зробити. На рисунку зображений прямокутний трикутник з гіпотенузою 2,1 см, кутом $\alpha = 180°/13$ і протилеглим від кута катетом, який дорівнює половині сторони багатокутника. Звідси за допомогою калькулятора знаходимо, що сторона такого тринадцятикутника a_0 =1,0051258 см, ледь-ледь більше $\bar{d}_0 = 1$ см + 50 мкм = 1,005 см, тобто кульки вмістяться, але відстані між ними будуть маленькими. Чи не призведе це при зміні температури до їх зіткнення й руйнації? Порахуємо. При зміні температури на Δt, діаметр кульки стане $\bar{d} = \bar{d}_0(1 + \alpha\Delta t)$, гіпотенуза ж трикутника $(R + r)/2 = \big(R_0(1 + \alpha_{\text{п}}\Delta t) + r_0(1 + \alpha_{\text{з}}\Delta t)\big)/2 = (2{,}1 + (1{,}3\alpha_{\text{п}} + 0{,}8\alpha_{\text{з}})\Delta t)$ см.



Кут α не зміниться, і сторона тринадцятикутника дорівнюватиме

$$a = a_0 + 0{,}47863 \cdot (1{,}3\alpha_{\text{п}} + 0{,}8\alpha_{\text{з}})\Delta t \text{ см} = a_0 + 10{,}961 \cdot 10^{-6}°\text{C}^{-1}\Delta t \text{ см}.$$

Руйнування не відбудеться, якщо $a \geq \bar{d}$. Отже за

$$\Delta t = t - 20℃ \geq -\frac{0{,}0001258}{9{,}956} \cdot 10^6℃ \approx -12{,}64℃,$$

Виходить користуватися цим приладом з тринадцятьма кулями можна буде тільки за температур вищих ніж

$$20℃ + \Delta t \approx +7{,}37℃.$$

У подібних випадках слід округлювати результат так, щоб не отримати менше значення ніж допустиме.

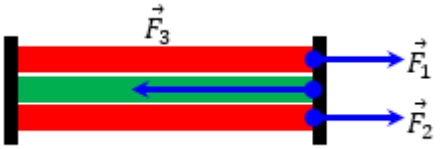
Якщо в радіальному напрямку відстань між циліндрами змінюватиметься узгоджено зі зміною діаметру кульки, то у дотичному окружному напрямку – ні.

(68) З умови про видовження отримаємо, що жорсткість першого стрижня вдвічі менша, ніж у другого, або в чотири рази менша, ніж у половинки другого. Позначимо їх відповідно k і 4k. З умови про теплове розширення кожного зі стрижнів отримаємо, що коефіцієнт теплового розширення другого стрижня у півтори рази більший, ніж у першого (його довжина вдвічі більша!). Нарешті, для з'єднаної системи умова рівноваги з'єднань на кінцях має вигляд $F_3 = F_1 + F_2 = 2F_1$. Враховуючи співвідношення жорсткостей і змін рівноважних довжин стрижнів, маємо

$$k \cdot (\Delta l - \Delta l_s) = 2 \cdot 4k \cdot (\Delta l_s - \frac{3\Delta l}{2}),$$

де Δl_s – видовження системи. Отримавши його з цього рівняння, отримуємо коефіцієнт теплового розширення,

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t}\frac{\Delta l_s}{l} = \frac{13\Delta l}{9l\Delta t}.$$



Зазначимо, що таким же чином розраховується і вигин біметалічної пластини, однак там вже прийдеться розраховувати деформації не поздовжні, а вигину.

(69) Запишемо умову теплової рівноваги після першого переливання,

$$c\rho \cdot \pi R^2 h_0 \cdot \Delta t_1 = c\rho \cdot \pi R^2 \Delta h \cdot (\Delta t_0 - \Delta t_1),$$

де c і ρ – питома теплоємність і густина води. З цього рівняння знайдемо зміну рівня води в посудині при доливанні однієї порції води,

$$\Delta h = h_0 \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0 - \Delta t_1}.$$

Це означає, що якщо після другого переливання вода починає переливатися через края, то повна висота посудини повинна дорівнювати

$$H = h_0 + 2\Delta h + d$$
$$= h_0 \frac{\Delta t_0 + \Delta t_1}{\Delta t_0 - \Delta t_1} + d. \qquad (1)$$

Однак це вірно лише якщо переливання відбувається у напрямку з середини посудини назовні, що не завжди так. Дійсно, якщо маса посудини буде достатньо великою, то рівень води у ємності буде вищим, і умову того, що вода почне переливатися через края, знайдемо в цьому випадку з балансу сил тяжіння і Архімеда, що діють на посудину з водою після другого переливання:

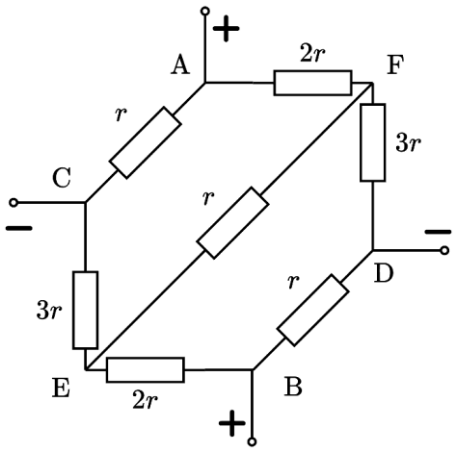
$$(m + \rho \cdot \pi R^2 (h_0 + 2\Delta h)) \cdot g = \rho g \cdot \pi (R + d)^2 H,$$

звідки для повної висоти посудини тепер маємо такий вираз,

$$H = \frac{m}{\pi(R+d)^2\rho} + h_0\frac{\Delta t_0 + \Delta t_1}{\Delta t_0 - \Delta t_1}\frac{R^2}{(R+d)^2}. \quad (2)$$

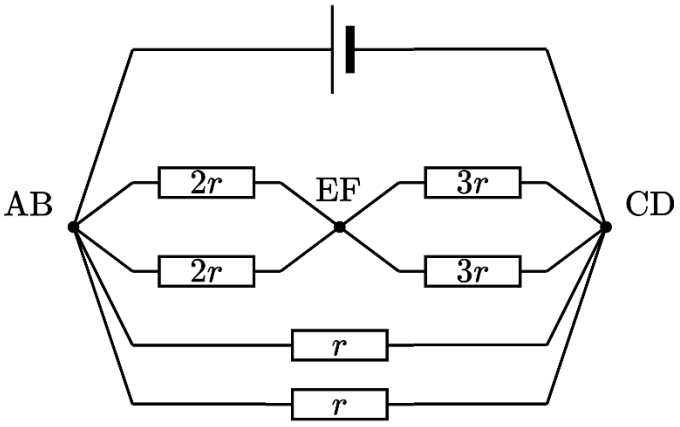
Отже, відповідь визначається меншим із двох значень (1) і (2), залежно від того, який механізм спрацьовує першим.

(70) За умовою, точки A та B з'єднують між собою, отже вони мають однаковий потенціал. Аналогічно точки C та D буду з'єднані та матимуть однаковий потенціал. Знаючи це, легко помітити, що схема зображена на рисунку має симетрію поворотку на 180°. Розташування резисторів буде виглядати так само; точка A перейде в точку B і навпаки, аналогічно точки C та D, оскільки ці точки попарно мають однакові потенціали – підключення джерела теж ефективно не зміниться.



З цього випливає, що і потенціали точок E, F однакові, оскільки вони переходять одна в одну при повороті. Отже резистор r між ними можна прибрати.

Щоб зрозуміти схему яка залишиться, перемалюємо її. Для цього об'єднаємо точки з однаковими потенціалами (A з B, C з D та E з F) та перемалюємо всі з'єднання між ними. Між об'єднаною точкою AB та CD буде стояти два резистори r, які відповідають резисторам між A і C та між B і D. Аналогічно, між об'єднаною точкою AB та EF буде два резистори $2r$, а між CD та EF – два резистори $3r$. Також домалюємо ідеальне джерело між AB та CD (див. Рис.).



Еквівалентна схема складається тільки з послідовних та паралельних з'єднань. Опір між AB та EF буде $\frac{2r}{2} = r$, між EF та CD – $\frac{3r}{2}$. А повний опір буде відповідати паралельному з'єднанню $r + \frac{3r}{2} = \frac{5r}{2}$ із $\frac{r}{2}$. Отже повний опір дорівнює $\frac{\frac{5r}{2}\cdot\frac{r}{2}}{\frac{5r}{2}+\frac{r}{2}} = \frac{5}{12}r$. Відповідно, струм через джерело буде $I = \frac{U_0}{\frac{5}{12}r} = \frac{12U_0}{5r}$.

Відповідь: $I = \frac{12U_0}{5r}$.

(71) Щоб тіло почало підніматись спочатку має достатньо розтягнутись пружина. Перше що нам треба визначити – в який момент пружина перестане розтягуватись і почне підніматись тіло.

В цей момент на лівий край важеля буде діяти сила $F_1 = mg$, на правий край – сила Петра F_2, а пружина буде діяти з силою $F_{\text{пруж}}$. Правило моментів відносно правого краю дає:

$$F_1 L = F_{\text{пруж}}(L - l).$$

Тоді сила з боку пружини має бути

$$F_{\text{пруж}} = F_1\frac{L}{L-l} = mg\frac{L}{L-l}.$$

Коли сила натягу пружини досягне цього значення, тіло почне підійматись. В той же час, із закону Гука можна знайти наскільки для цього пружина має розтягнутись: $F_{\text{пруж}} = kx$. Тоді

$$x = \frac{mg}{k}\frac{L}{L-l}.$$

Якщо $\Delta y < x$, то пружина не встигне достатньо розтягнутись перш ніж важіль стане горизонтальним. В такому випадку вантаж не підніметься зовсім, а вся робота Петра піде на розтягнення пружини:

$$A = \frac{k\Delta y^2}{2}.$$

Якщо $\Delta y > x$, то пружина встигне розтягнутись і вантаж підніметься на висоту $(\Delta y - x)$ коли важіль стане горизонтальним.

Щоб порахувати роботу яку треба виконати Петру ми використаємо закон збереження енергії. Робота Петра дорівнюватиме сумі роботи по розтягування пружини та підняття вантажа. Для того щоб розтягнути пружину йому треба виконати роботу $A_{\text{пруж}} = \frac{kx^2}{2}$, а щоб підняти тіло на висоту $(\Delta y - x)$ – $A_{\text{тіло}} = mg(\Delta y - x)$. Тоді повна робота Петра буде

$$\mathrm{A} = \mathrm{A_{пруж}} + \mathrm{A_{тіло}} = \frac{\mathrm{kx^2}}{2} + \mathrm{mg}(\Delta \mathrm{y} - \mathrm{x}),$$

Або підставляючи вираз для x:

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2\mathrm{k}}\left(\mathrm{mg}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}-\mathrm{l}}\right)^2 + \mathrm{mg}\left(\Delta \mathrm{y} - \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{k}}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}-\mathrm{l}}\right).$$

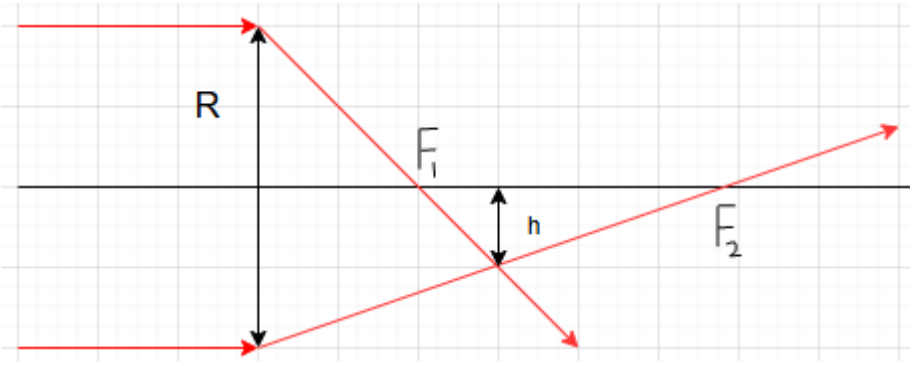
Як бачимо в жодному з випадків пружина Петру не допомогла. Скоріше навпаки – тепер йому треба виконувати додаткову роботу по розтягуванню пружини.

Відповідь:

Якщо $\Delta \mathrm{y} < \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{k}}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}-\mathrm{l}}$, то тіло не підніметься зовсім, Петру треба виконати роботу $\mathrm{A} = \frac{\mathrm{k}\Delta \mathrm{y}^2}{2}$.

Якщо $\Delta \mathrm{y} > \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{k}}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}-\mathrm{l}}$, то тіло підніметься на висоту $(\Delta \mathrm{y} - \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{k}}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}-\mathrm{l}})$, Петру треба виконати роботу $\mathrm{A} = \frac{1}{2\mathrm{k}}\left(\mathrm{mg}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}-\mathrm{l}}\right)^2 + \mathrm{mg}\left(\Delta \mathrm{y} - \frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{k}}\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L}-\mathrm{l}}\right)$.

(72) Світло, яке йде від половинок лінзи, виглядає як напівконуси з різною висотою - F_1 та F_2. Будемо вважати, що $F_2 > F_1$. R – радіус лінзи.



На рисунку показана область напівкола радіусом h, в якій площа освітлення детектора буде найменшою.

З геометрії легко знайти, що $h = R\frac{F_2 - F_1}{F_2 + F_1}$. Нехай повна потужність випромінення, що падає на лінзу – P.

Інтенсивність випромінення при падінні на лінзу $I_0 = \frac{P}{\pi R^2}$, а середня інтенсивність в області з найменшою площею освітленої плями $I = \frac{P}{\pi h^2/2}$.

$$\alpha = \frac{I}{I_0} = \frac{2R^2}{h^2} = \frac{2(F_2 + F_1)^2}{(F_2 - F_1)^2}$$

$$\frac{F_2 + F_1}{F_2 - F_1} = \pm\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

Візьмемо розв'язок з плюсом, адже від'ємний розв'язок працює для випадку, коли $F_2 < F_1$, і він не дає нічого нового.

Оптичні сили напівлінз: $D_1 = \frac{1}{F_1} = \frac{2(n_1-1)}{r}$, $D_2 = \frac{1}{F_2} = \frac{2(n_2-1)}{r}$. Тоді,

$$\frac{1+\frac{n_1-1}{n_2-1}}{\frac{n_1-1}{n_2-1}-1} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}}.$$

Звідси,

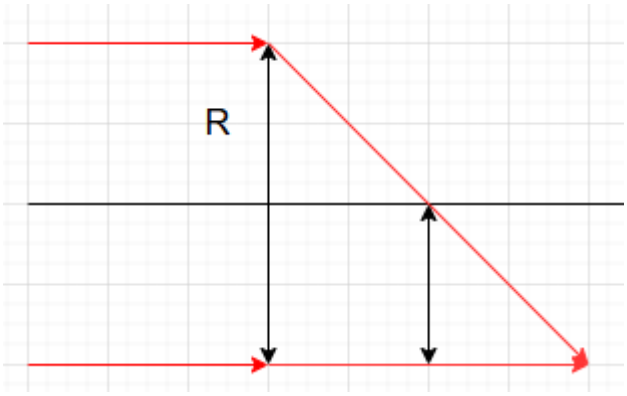
$$\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}+1}{\sqrt{\frac{\alpha}{2}}-1} = \frac{n_1-1}{n_2-1}.$$

а) Бачимо, що при $\alpha = 2$ єдина можливість задовільнити рівняння згори це випадок, коли $n_2 = 1$. Тобто друга половинка не викривлює світло. Але насправді це можна було отримати без жодних формул чисто з рисунку потоків світла від лінз.

б) При $\alpha = 8$, $\frac{n_1-1}{n_2-1} = 3$.

Тепер є два варіанти:

1) $n_2 = n = 1.5$
   Звідси $n_1 = 2.5$.
2) $n_1 = n = 1.5$
   Звідси $n_2 = 7/6$.

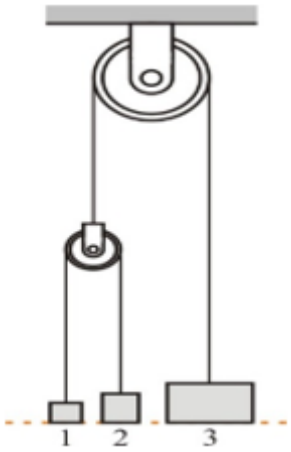


Якщо дві половинки лінз є випуклими, то розсіювальну лінзу отримати не вийде, а отже α не може бути менше 2. Якщо ж коефіцієнти заломлення половинок лінзи однакові, то α стає дуже великим, адже розмір плями в фокусі лінзи прямуватиме до дуже маленького значення.

Розв'язки теоретичних завдань

Інтернет-олімпіади 10 клас

(73) Позначимо T_1 силу натягу між тягарцями 1 і 2, а T_3 — силу натягу нитки між рухомим блоком і тягарцем 3. Оскільки рухомий блок невагомий, діючі на нього сили зрівноважені, тобто $T_3 = 2T_1$.



Щоб записати другий закон Ньютона в проєкції на вертикальну вісь, припустимо, що прискорення тягарця 1 ($\vec{a}_1$) і рухомого блоку напрямлені вгору, а прискорення $\vec{a}_2$ і $\vec{a}_3$ двох інших тягарців напрямлені вниз. Якщо ми навіть не вгадали, то це не спричинить проблем — просто отримаємо від'ємні значення відповідних величин.

Тепер можемо записати другий закон Ньютона в проєкції на вертикальну вісь (відразу підставляємо наведені в умові значення мас тягарців):

$$ma_1 = T_1 - mg, \qquad (1)$$

$$3ma_2 = -T_1 + 3mg, \qquad (2)$$

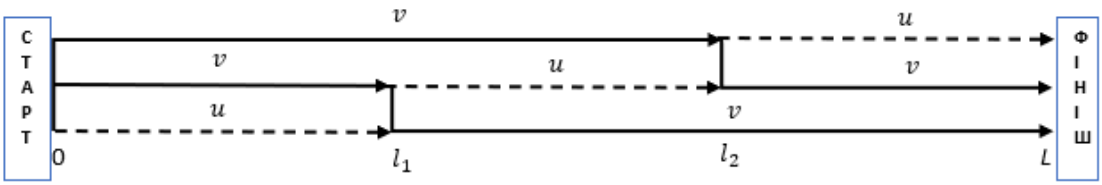
$$4ma_3 = -T_3 + 4mg = -2T_1 + 4mg. \qquad (3)$$

Ми отримали три рівняння з чотирма невідомими. Але ми ще не використали умови, що нитки нерозтяжні. З цієї умови випливає: рухомий блок піднімається з прискоренням a_3, а тягарці 1 і 2 рухаються *відносно цього блока* в протилежних напрямах з однаковими за модулем прискореннями. Це дає ще одне рівняння:

$$a_1 - a_3 = a_2 + a_3. \qquad (4)$$

Рівняння (1) — (3) дозволяють виразити всі прискорення через силу T_1. Підставивши ці вирази в рівняння (4), дістанемо $T_1 = \frac{12}{7}mg$. Тепер з рівнянь (1) — (3) отримаємо $a_1 = \frac{5}{7}g$, $a_2 = \frac{3}{7}g$, $a_3 = \frac{1}{7}g$. Як бачимо, всі отримані значення є додатними, тобто наші припущення щодо напрямів прискорень підтвердилися. Отже, першим торкнеться землі тягарець 2 (він опускається з найбільшим прискоренням). Час його руху $t = \sqrt{\frac{2H}{a_2}} = \sqrt{\frac{14H}{3g}}$.

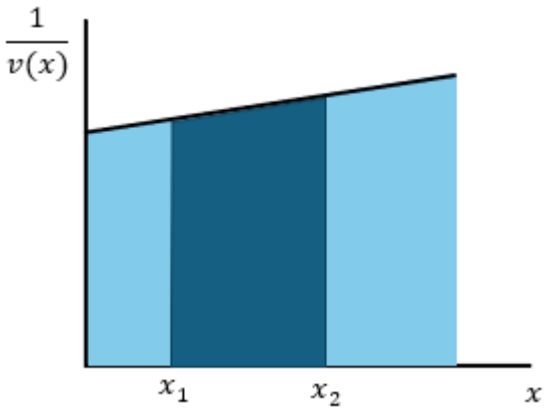
(74) Всі члени команди мають фінішувати одночасно, оскільки якщо хтось фінішує першим, то краще б він менше користувався скейтом на користь того, хто фінішував останнім. Отже, один з двох перших скейтбордистів має у якомусь місці залишити скейт тому, хто стартував без спортивного знаряддя. Потім має залишити свій скейт і другий, інакше всіх випередить. Схематично рух команди виглядає наступним чином:



Якби швидкості руху v і u були незмінними, кожен з учасників дві третини відстані долав на скейті, а третину без нього, і загальний час був би

$$t_0 = \frac{2L}{3v_0} + \frac{L}{3u_0}. \qquad (1)$$

У нашому випадку відповідь може залежати від того, спочатку чи наприкінці учасник користувався скейтом. У будь-якому разі слід насамперед знайти вираз для часу руху зі змінною швидкістю.



Відомо, що шлях чисельно дорівнює площі під графіком $v(t)$. Такі задачі є навіть у звичайних (не олімпіадних) збірниках задач, і це легко довести, якщо записати формулу для малої відстані Δl, яку долає тіло за маленький проміжку часу Δt: $\Delta l = v\Delta t$. На графіку $v(t)$ добуток $v\Delta t$ – це площа вузенького прямокутника під графіком. Сума площ всіх таких прямокутників все точніше дорівнюватиме площі під графіком, якщо подумки робити Δt все меншим, а кількість прямокутників все більшою. Фізично це означає брати проміжки часу Δt настільки малими, щоб протягом кожного з них швидкість не встигла змінитися, і ми б не гадали, яку середню швидкість підставити у формулу $\Delta l = v\Delta t$. Однак з цієї ж формули можна виразити й час через відстань: $\Delta t = \frac{1}{v}\Delta l$. Тоді аналогічно загальний час t має дорівнювати площі під графіком $\frac{1}{v(l)}$. У нашому випадку цей графік – пряма лінія.

$$\frac{1}{v(l)} = \frac{1 + \alpha l}{v_0}.$$

З графіку видно, що час проходження відстані від x_1 до x_2 дорівнює площі трапеції, або

$$t_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{v(x_1)} + \frac{1}{v(x_2)}\right)(x_2 - x_1) = \frac{x_2 - x_1}{v_0} + \alpha\frac{x_2^2 - x_1^2}{2v_0}. \qquad (2)$$

Тепер повернемося до рисунку зі схематичним рухом команди. Загальний час руху всіх трьох учасників змагань не залежить від тих місць l_1 і l_2, у яких вони залишали скейт один для одного, оскільки у формулу (2) входить різниця координат або їх квадратів. У місці передачі час одного учасника дасть доданок зі знаком «+», а час іншого – відповідний доданок зі знаком «–». Дійсно, загальний час (сума часу всіх трьох) завжди дорівнюватиме подвоєному часу подолання всієї дистанції на скейті, оскільки їх два, і часу подолання всієї дистанції без скейту. Просто в залежності від поведінки учасників цей загальний час по різному розподілятиметься між ними. Оскільки час команди встановлюється по останньому, всі троє мають фінішувати одночасно. Отже загальний час слід поділити на три.

$$t = \frac{2}{3}\left(\frac{L}{v_0} + \alpha\frac{L^2}{2v_0}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{L}{u_0} + \beta\frac{L^2}{2u_0}\right). \qquad (3)$$

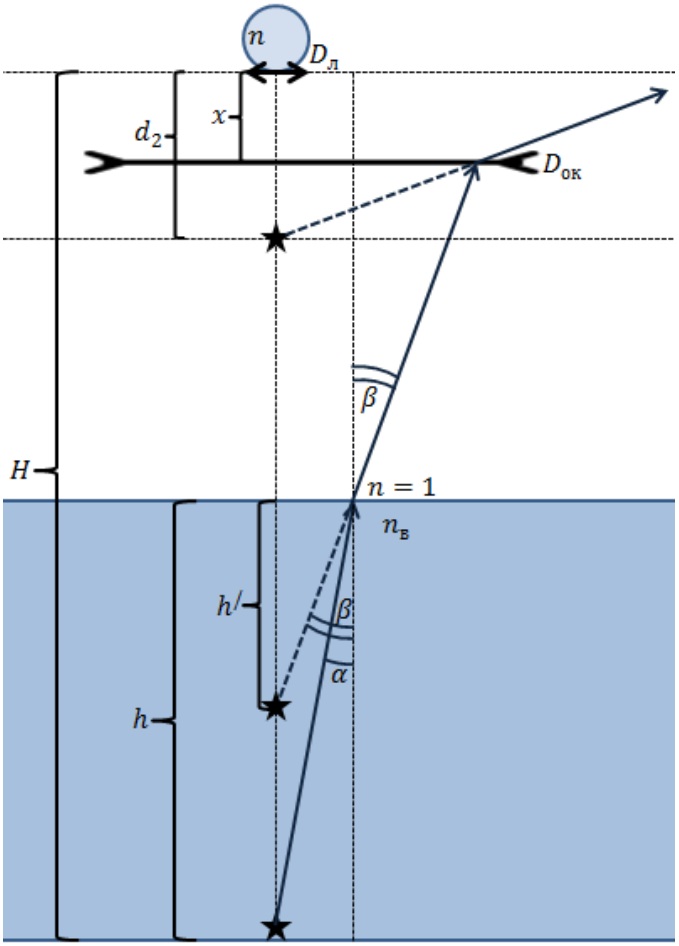
Для руху зі сталими швидкостями ($\alpha = \beta = 0$) формула (3) збігається з (1).

Дамо тепер відповідь на друге питання задачі. За умовою швидкості наприкінці траси зменшились на 20%. Отже $v(L) = 0{,}8v_0$, $u(L) = 0{,}8u_0$, звідки $\alpha L = \beta L = \frac{1}{4}$.

Тоді час руху збільшився за рахунок втоми на $t - t_0 = \frac{1}{8}\left(\frac{2L}{3v_0} + \frac{L}{3u_0}\right) = \frac{1}{8}t_0$, що складає **12,5 %** від часу подолання траси без фактора втоми.

Зазначимо, що тепер, знаючи формулу (3), легко знайти місця траси l_1 і l_2, у яких слід залишати скейти. Для цього слід прирівняти розрахований за формулою (2) час руху окремого учасника до часу (3).

(75) Ближня та дальня межі акомодації короткозорої людини складають 9 та 13 см відповідно, і вона носить окуляри, у яких, не напружуючи очі, бачить віддалені предмети. Окуляри при цьому вона розміщує безпосередньо перед очима. Як може скористатися цими окулярами людина, щоб так само не напружуючи зір роздивитись старовинну монету, яка лежить у неї під ногами на дні озера? Глибина озера 1 м, очі людини знаходяться на висоті 2 м над дном, коефіцієнт заломлення води 4/3, коефіцієнт заломлення матеріалу окулярів 1,25, вода повністю прозора, хвиль немає, людина не нахиляється і дивиться вертикально вниз.



У звичайній ситуації людина носить окуляри у безпосередній близькості до очей, тому для того, щоб побачити чітке зображення монети, так само не напружуючи око, людина повинна так змістити окуляри, щоб зображення монети, яке формує система вода+окуляри, повинно знаходитись на відстані $d_2 = 13$ см від ока.

Таким чином:

$$D_{ок} = -\frac{1}{d_2}.$$

Людина має два варіанти, як вона може використати при цьому окуляри:

1) окуляри у повітрі на певній відстані від очей.

(усі кути на рисунку є малими)

При переході з води у повітря за законом заломлення:

$$n_в sin\alpha = sin\beta.$$

$$htg\alpha = h/tg\beta.$$

Оскільки усі кути є малими,

$$h = n_{\text{в}} h^{/}.$$

За формулою тонкої лінзи для окулярів:

$$D_{\text{ок}} = \frac{1}{H - h - x + h^{/}} - \frac{1}{d_2 - x}.$$

Прирівнявши (1) і (5), з урахуванням (4), маємо

$$-\frac{1}{d_2} = \frac{1}{H - h - x + \frac{h}{n_{\text{в}}}} - \frac{1}{d_2 - x}.$$

Після математичних перетворень, отримаємо квадратне рівняння:

$$x^2 - x\left(H - h + \frac{h}{n_{\text{в}}} + d_2\right) + {d_2}^2 = 0.$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{H - h + \frac{h}{n_{\text{в}}} + d_2 \pm \sqrt{\left(H - h + \frac{h}{n_{\text{в}}} + d_2\right)^2 - 4{d_2}^2}}{2}}}.$$

Розрахунки:

$$\boldsymbol{x = \frac{2 - 1 + \frac{3}{4} + 0,13 \pm \sqrt{\left(2 - 1 + \frac{3}{4} + 0,13\right)^2 - 4 * 0,13^2}}{2} = \frac{1,88 \pm 1,862}{2}}$$

Корінь зі знаком + не має фізичного змісту у даному випадку.

$$\boldsymbol{x = \frac{1,88 - 1,862}{2} = \frac{0,018}{2} = 0,009}.$$

Тобто, людина може тримати окуляри на відстані 9 мм від очей.

2) окуляри у воді на певній глибині.

При поміщенні окулярів у воду, вони перетворюються з розсіювальної лінзи на збиральну, оскільки коефіцієнт заломлення окулярів менший, ніж коефіцієнт заломлення середовища, у якому вони знаходяться:

$$D_{\text{ок}} = -\frac{n_c - 1}{1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

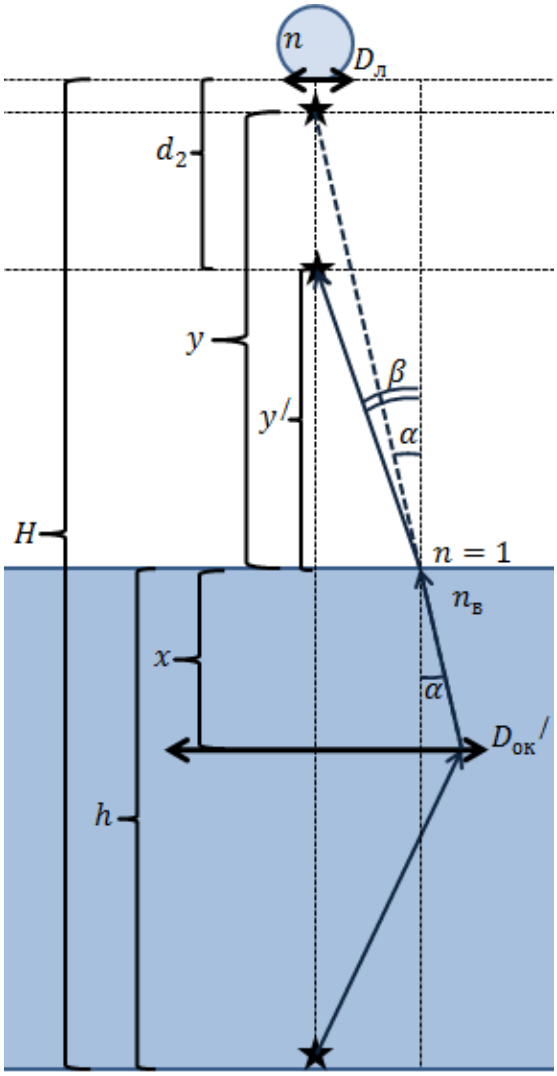
$$D_{\text{ок}}{}^{/} = -\frac{n_c - n_{\text{в}}}{n_{\text{в}}}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

де $D_{\text{ок}}{}^{/}$ – оптична сила окулярів у воді;

R_1, R_2 – радіуси кривизни лінзи окулярів.

Прирівнюючи (11) та (1), після математичних перетворень, маємо:

$$D_{\text{ок}}{}^{/} = \frac{n_{\text{в}} - n_c}{n_{\text{в}} d_2 (n_c - 1)}.$$



Оскільки зображення обов'язково повинно утворитись у повітрі, то промені при виході з води у повітря також будуть заломлюватись, отже, зображення, яке повинно утворитися після лінзи не буде остаточним.

За формулою тонкої лінзи для окулярів:

$$D_{ок}^{/} = \frac{1}{h-x} + \frac{1}{x+y}.$$

За законом заломлення при виході променя з води у повітря:

$$y = n_в y^{/}.$$

При цьому

$$y^{/} = H - h - d_2.$$

Прирівнюючи (13) та (14), з урахуванням (15) та (16), маємо:

$$\frac{n_в - n_c}{n_в d_2 (n_c - 1)} = \frac{1}{h-x} + \frac{1}{x+y},$$

Після математичних перетворень отримаємо квадратне рівняння:

$$\boldsymbol{x^2 + x n_в \left(H - h - \frac{h}{n_в} - d_2\right) + \frac{n_в d_2 (n_c - 1)\left(h + n_в (H - h - d_2)\right)}{n_в - n_c} - h n_в (H - h - d_2) = 0.}$$

Коефіцієнти даного квадратного рівняння можна розрахувати окремо:

$$a = 1;$$

$$b = 0{,}16;$$

$$c = -0{,}0368.$$

Розв'язки квадратного рівняння:

$$\boldsymbol{x = \frac{-0,16 \pm \sqrt{0,16^2 + 4 * 0,0368}}{2} = \frac{-0,16 \pm 0,416}{2}.}$$

Від'ємний корінь не має фізичного сенсу у даному випадку, отже

$$\boldsymbol{x = \frac{0,416 - 0,16}{2} = 0,128.}$$

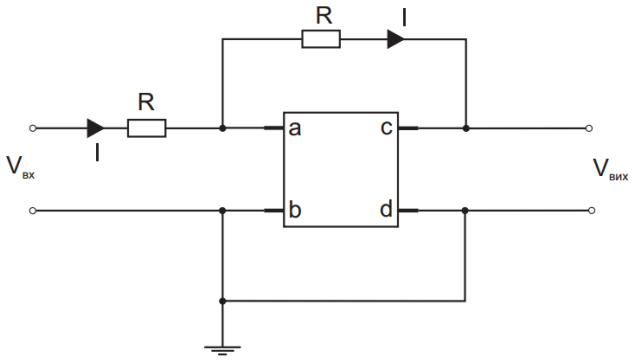
Тобто, людина може тримати окуляри на глибині 12,8 см під водою.

Варто зазначити, що дана задача може мати ще декілька варіантів розв'язку. Пропонуємо розглянути їх читачам самостійно.

Відповідь: або на відстані 9 мм від очей, або на глибині 12,8 см під водою.

(76) Так як опір інтегральної схеми між контактами a та b є безкінечним, то струм між ними не тече.

Легко отримати за допомогою закону Кірхгофа:



$$\begin{cases} V_{\text{вих}} = V_{cd} = KV_{ab}, \\ V_{\text{вх}} - V_{\text{вих}} = 2IR, \\ V_{\text{вх}} - V_{ab} = IR. \end{cases} \qquad (1)$$

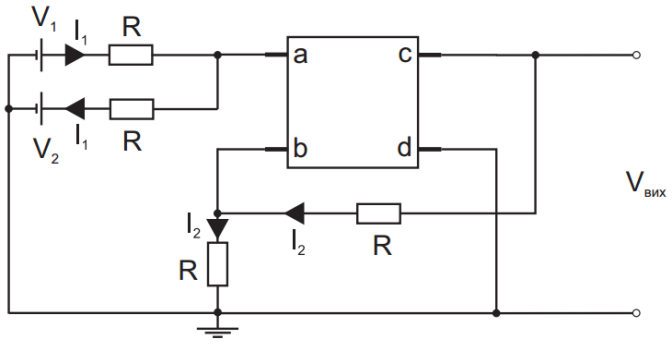
Звідси легко отримати, що

$$V_{\text{вих}} = -\frac{V_{\text{вх}}}{1 - 2/K} \qquad (2)$$

Так як K $\gg$ 1, то $V_{\text{вих}} \approx$ - $V_{\text{вх}}$.

б) З першого рівняння системи (1) можна побачити, що нехтування доданками 1/K зводиться до наступного ланцюга міркувань: нехтуючи доданком $V_{\text{вих}}$ /K в рівнянні $V_{\text{вих}}$ /K=V_{ab}, отримуємо, що потенціали точок a та b є рівними. Це наближення дозволяє швидко та просто розв'язувати всі подібні схеми.

в) Струм між a та b не тече, отже можна отримати



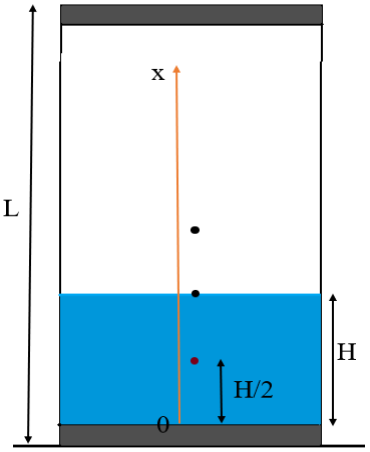
$$\begin{cases} V_1 - V_2 = 2I_1R, \\ V_1 - I_1R - I_2R = 0, \\ V_{\text{вих}} = 2I_2R. \end{cases} \qquad (3)$$

Розв'язуючи систему (3) отримуємо $V_{\text{вих}}$=V_1 + V_2.

(77) Знайдемо висоту рідини, що налили у циліндр. За умовою задачі циліндр разом з рідиною займає найбільш стійке положення, як не важко показати, таке положення буде у той момент,

коли рівень води досягне положення центру мас системи. Тоді центр маси рідини буде знаходитись на половині висоти від дна циліндра.

$$H = \frac{m(L-2h) + \rho\pi R^2 H\frac{H}{2}}{m + \rho\pi R^2 H}$$



Звідки, вирішуючи це рівняння, можемо отримати:

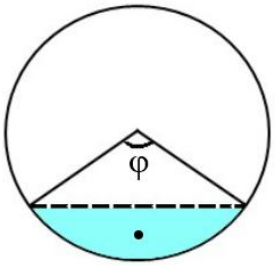
$$\frac{\rho\pi R^2}{2}H^2 + mH - m(\frac{L}{2} - h) = 0$$

тільки один корінь нам підходить

$$H = \frac{-m + \sqrt{m^2 + \rho\pi R^2 m(L-2h)}}{\rho\pi R^2} \approx 5.39\text{см}$$

$m_{\text{рідини}} = 152{,}4$ г

Після того як циліндр з рідиною поклали на бік, центр мас системи можна знайти, якщо знайти центр мас сегмента, який тепер займає рідина. Прирівняємо об'єм рідини у момент, коли циліндр був у вертикальному положенні і коли він лежить, враховуючи теплове розширення рідини і порожнини циліндра. Врахуємо, що початкова температура рідини 0 °C.



$$V_{\text{рідини на боку при температурі } t} = V_{\text{рідини у початковий момент часу}} \cdot (1 + \beta \cdot t)$$

t – кінцева температура циліндра і рідини

t_c – початкова температура циліндра

$t_0 = 0°C$ – початкова температура рідини

$$V_{\text{рідини на боку при температурі } t} = S_{\text{сегменту}} \cdot (L_1 - 2h_1)$$

$L_1 - 2h_1$ – довжина порожнини циліндра при температурі t.

Потрібно звернути увагу, на те що при чисельних розрахунках для реальних систем краще використовувати формулу для об'ємного розширення твердих тіл у вигляді:

$V = V_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)^3$, а не $V = V_0 \cdot (1 + 3\alpha \cdot \Delta t)$, тому що умова $\beta \approx 3\alpha$ є наближенням і у реальних умовах похибка, що виникає при такому наближенні, може суттєво вплинути на розрахунки.

Площу сегмента можна знайти як різницю площі сектора і трикутника:

$$S_{\text{сегменту}} = \frac{\varphi \cdot {R_1}^2}{2} - \frac{{R_1}^2 \cdot sin(\varphi)}{2}$$

де φ – кут у радіанах, R_1 – радіус циліндра після встановлення теплової рівноваги.

$$V_{\text{рідини у початковий момент часу}} = \pi R^2 \cdot H$$

Прирівнюючи об'єми маємо:

$$\frac{{R_1}^2}{2}(\varphi - sin(\varphi)) \cdot (L_1 - 2h_1) = \pi R^2 \cdot H \cdot (1 + \beta \cdot t)$$

$$R_1 = R_0(1 + \alpha \cdot t)$$

$$R = R_0(1 + \alpha \cdot t_c)$$

R_0- радіус при температурі 0°C. Так само можна виразити довжину циліндра і товщину дна і кришки.

$$(L_1 - 2h_1) = (L - 2h)\frac{(1 + \alpha \cdot t)^3}{(1 + \alpha \cdot t_c)^3}$$

Отже, рівняння матиме вигляд:

$$\frac{R^2}{2}(\varphi - sin(\varphi)) \cdot (L - 2h)\frac{(1 + \alpha \cdot t)^3}{(1 + \alpha \cdot t_c)^3} = \pi R^2 \cdot H \cdot (1 + \beta \cdot t)$$

Для знаходження виразу $\varphi - sin(\varphi)$ спочатку знайдемо кінцеву температуру t з рівняння теплового балансу для циліндра і рідини.

$$Q_{\text{рідини}} + Q_{\text{циліндр}} = 0$$

$$Q_{\text{рідини}} = \text{c}_{\text{рід}} \cdot \rho\pi R^2 H(t - 0)$$

$$Q_{\text{циліндр}} = \text{c}_{\text{цил}} \cdot m(t - t_c)$$

Отже, кінцева температура:

$$t = \frac{\text{c}_{\text{цил}} \cdot mt_c}{\text{c}_{\text{рід}} \cdot \rho\pi R^2 H + \text{c}_{\text{цил}} \cdot m} \approx 50°\text{C}$$

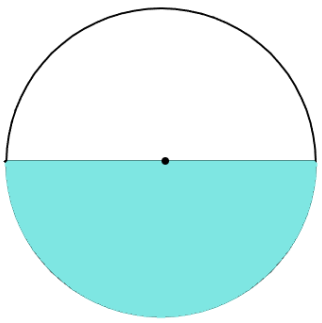
Знайдемо тепер чисельно вираз $\varphi - sin(\varphi)$:

$$\varphi - sin(\varphi) = \frac{2\pi H(1 + \beta \cdot t)}{L - 2h} \cdot \frac{(1 + \alpha \cdot t_c)^3}{(1 + \alpha \cdot t)^3} \approx \pi$$

Рівняння $\varphi - sin(\varphi) = \pi$ має рішення при $\varphi = \pi$ або $\varphi = 180°$, а отже вода займає рівно половину від перерізу циліндра. Так само можна було розрахувати об'єми рідини і циліндра після встановлення теплової рівноваги і порівняти їх.

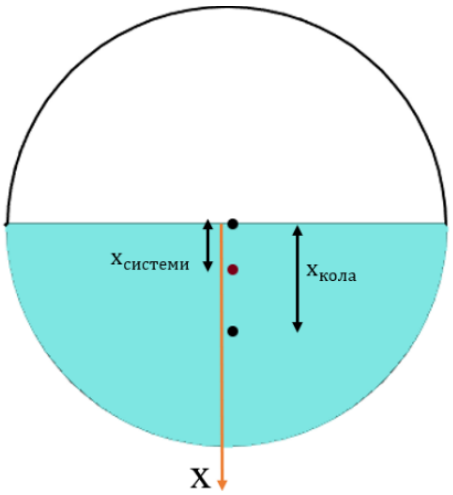
$$V_{\text{рідини при температурі } t} = \pi R^2 H \cdot (1 + \beta \cdot t) \approx 15{,}99 \cdot 10^{-5}\text{м}^3$$

$$V_{\text{порожнини циліндра при температурі } t} = \pi R^2 (L - 2h)\frac{(1 + \alpha \cdot t)^3}{(1 + \alpha \cdot t_c)^3} \approx 31{,}98 \cdot 10^{-5}\text{м}^3$$



Об'єми відносяться як $\frac{V_{\text{рідини при температурі } t}}{V_{\text{порожнини циліндра при температурі } t}} = \frac{1}{2}$, отже вода займає рівно половину від перерізу циліндра.

Розглянемо поперечний переріз циліндра. Центр мас рідини знаходиться на осі яка співпадає з центром мас півкола. Знайдемо центр мас півколо, наприклад за теоремою Паппа — Гульдіна. Відстань від центра кола до центра мас півкола складає $x_{\text{кола}} = \frac{4}{3\pi}R$.

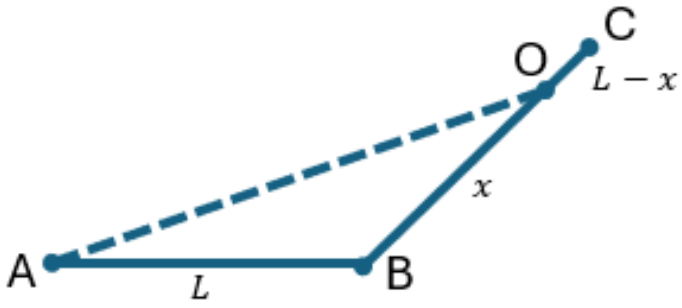


Відповідь задачі можна знайти за формулою для центра мас, для зручності нуль координат візьмемо в центрі кола.

$$x_{\text{системи}} = \frac{\rho\pi R^2 H x_{\text{кола}}}{m + \rho\pi R^2 H} = \frac{\frac{4}{3}\rho R^3 H}{m + \rho\pi R^2 H} \approx 7.69\text{мм}$$

(78) Позначимо відстань між точками O і B через x (див. Рис.), а момент вибуху через t. Тоді

$$\begin{cases} t_A - t = \text{AO}/c\,, \\ t_B - t = x/c\,, \\ t_C - t = (L-x)/c\,. \end{cases}$$

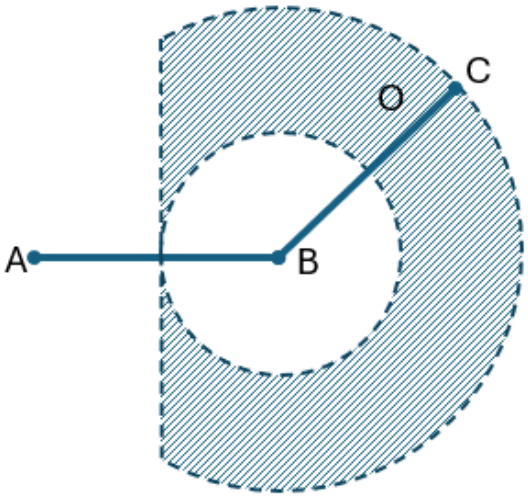


З другого і третього рівняння знаходимо час вибуху

$$t = \frac{t_B + t_C}{2} - \frac{L}{2c}.$$

Підставивши його у перше рівняння системи, відстань AO:

$$\text{AO} = c\left(t_A - \frac{t_B + t_C}{2}\right) + \frac{L}{2}.$$



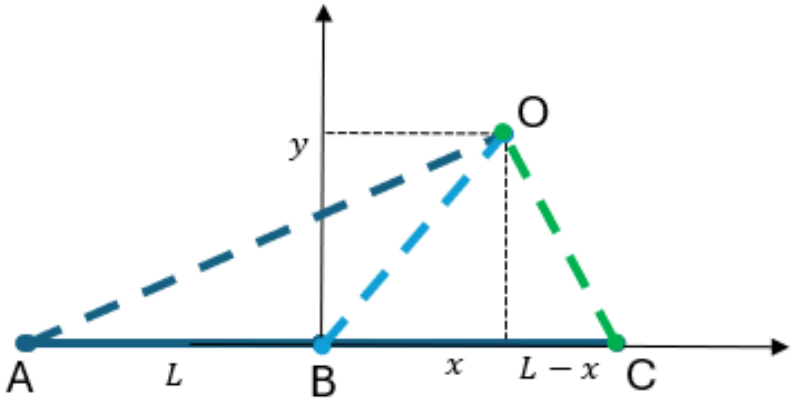
Ці відповіді будуть вірними і для випадку оригінальної умови, наведеної у задачнику, коли A, B, C лежать вздовж однієї прямої.

Знайдемо тепер положення точки O, які заборонені умовами $t_A > t_B > t_C$ і тим, що точка O належить відрізку BC. З останнього, а також з $t_B > t_C$ знаходимо, що можливі положення точки O на площині рисунку знаходяться між колами з центром у точці B і радіусами $L/2$ і L. З умови $t_A > t_B$ – що положення точки O можливо лише праворуч від серединного перпендикуляра до відрізку AB. На рисунку геометричне місце можливих положень точки O заштриховане, не можливих – ні.

Якщо не обмежувати джерело вибуху площиною нашого рисунку, зображене на ньому слід розуміти як частину простору, обмежену двома сферами радіусами $L/2$ і L і площиною, що проходить перпендикулярно до відрізку AB через його середину.

1. Позначимо координати точки O відносно системи координат з центром у точці B через x, y (див. Рис.), а момент вибуху через t. Тоді

$$\begin{cases} t_A - t = \sqrt{y^2 + (L+x)^2}/c\,, \\ t_B - t = \sqrt{y^2 + x^2}/c\,, \\ t_C - t = \sqrt{y^2 + (L-x)^2}/c\,. \end{cases}$$



Розв’язуючи систему, знаходимо час вибуху

$$t = \frac{(t_A^2 - 2t_B^2 + t_C^2)/2 - L^2/c^2}{t_A - 2t_B + t_C},$$

а через нього і відстань $\mathrm{AO} = c(t_A - t)$.

Якщо обмежити джерело вибуху площиною нашого рисунку, то кожному унікальному набору можливих L, c, t_A, t_B, t_C $(t_A - 2t_B + t_C \neq 0)$ відповідають дві точки, що зрозуміло хоча б із стартової системи рівнянь, куди ордината y входить виключно у квадраті (додатні і такі ж за модулем від’ємні значення - рівноправні). Ці положення точки О симетричні відносно осі абсцис.

Якщо ж не обмежуватись площиною, а розв’язувати задачу у загальному вигляді, кожному унікальному набору можливих L, c, t_A, t_B, t_C $(t_A - 2t_B + t_C \neq 0)$ відповідає нескінченна кількість точок у вигляді кільця, яке охоплює вісь абсцис і перпендикулярне до неї.

Нарешті окремий випадок $t_A - 2t_B + t_C = 0$, коли знаменник у виразі для часу t дорівнює нулю, відповідає простому співвідношенню $t_A - t_B = t_B - t_C$. Це можливо не тільки у межі, коли точка О віддаляється вправо у нескінченність за точку С або «притискається» до осі $(y/x \to 0)$, але й точно для всіх точок осі абсцис $(y = 0)$ вправо від С. При цьому має додатково виконуватись співвідношення $L = c(t_A - t_B)$, про яке згадано в умові задачі.

(79) З точок, які потрапляють у тінь від предмета, не видно джерела світла. У нашому випадку джерелом є Сонце. Отже, якщо з точки тіні, як з вершини, охопити Сонце конусом, щоб вони дотикалися один одного, предмет, що відкидає тінь, має повністю цей конус перекривати. Максимальна відстань до предмету, коли це ще можливо, обумовлена розміром, формою та орієнтацією останнього. Оскільки висота предмету визначається перпендикуляром до поверхні, при рівних умовах вона буде найбільшою і дорівнюватиме відстані між тінню і предметом, коли сонце у зеніті, а його промені падають прямовисно вниз.

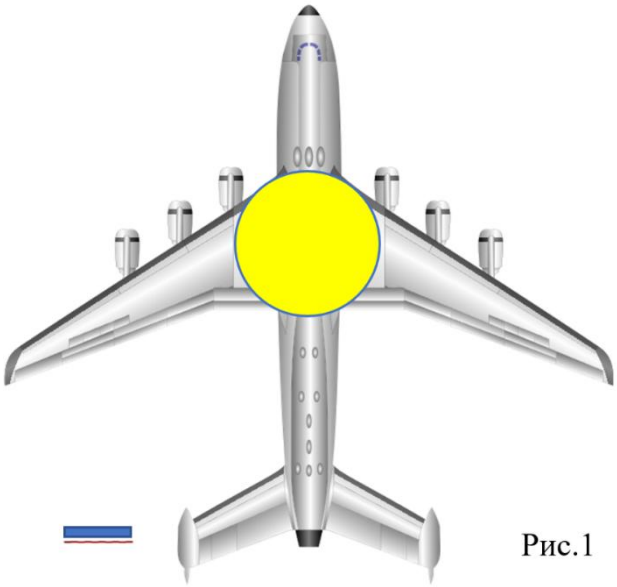


Рис.1

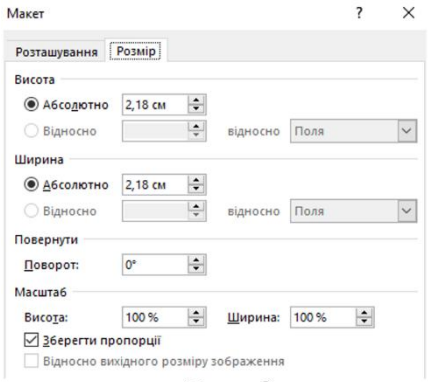


Рис.2



Рис.3

Це неможливо у наших широтах, але АН-225 Мрія літає по всьому світі. На Рис. 1 синій прямокутник, створений у MicrosoftWord, має довжину 1 см. Під нього масштабоване зображення літака так, щоб таку ж довжину мав масштабний відрізок у 10 м. Діаметр кола у найбільш широкій в усіх напрямах частині літака, як видно з Рис. 2, дорівнює 2,18 см. Отже діаметр перетину конусу літаком $d = 21{,}8$ м. З подібності трикутників (Рис. 3), знаходимо:

$$h = l\frac{d}{D} = 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot \frac{21{,}8}{2 \cdot 7 \cdot 10^{8}}\text{м} \approx 2\text{ км }336\text{ м}.$$

Звісно, всі ці розрахунки можна було отримати (хоча й трохи довше) без додатків, за допомогою вимірювальної лінійки.

На питання задачі «На якій найменшій висоті він може летіти, щоб тіні… не було?» легко відповісти. Рано вранці або увечері, коли диск сонця перетинає горизонт, повної тіні не буде взагалі, навіть якщо літак летітиме понад самою злітною смугою. Для відповіді на питання «Для яких висот тінь на землі нагадуватиме форму літака?» слід визначити, що під цим ми розуміємо. Щонайменше ми маємо бачити перехрестя тіней від корпусу (фюзеляжу) і крил. Якщо сонце у зеніті, висоту визначатиме коло перерізу конусу, який

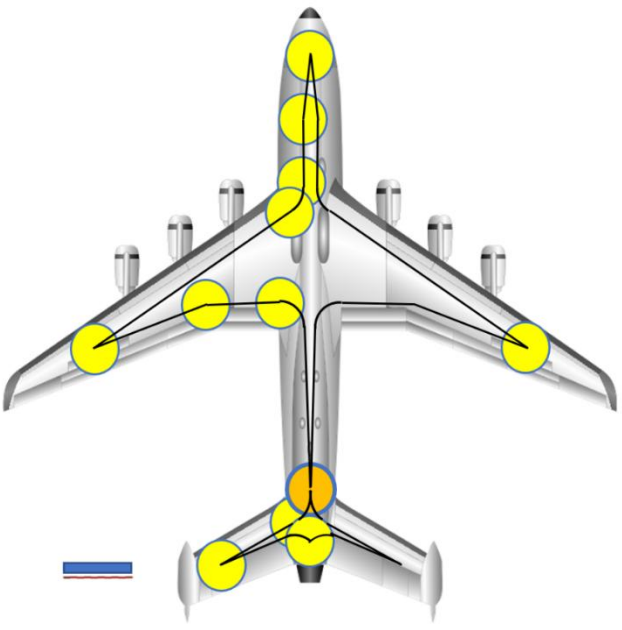


Рис.4

перетинатиме найменшу у всіх напрямках частину фюзеляжу ($\tilde{d} = 7{,}2$ м).

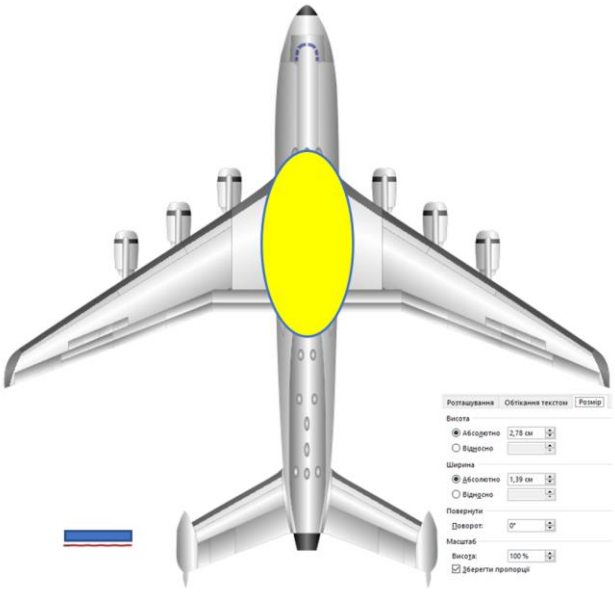


Рис.5

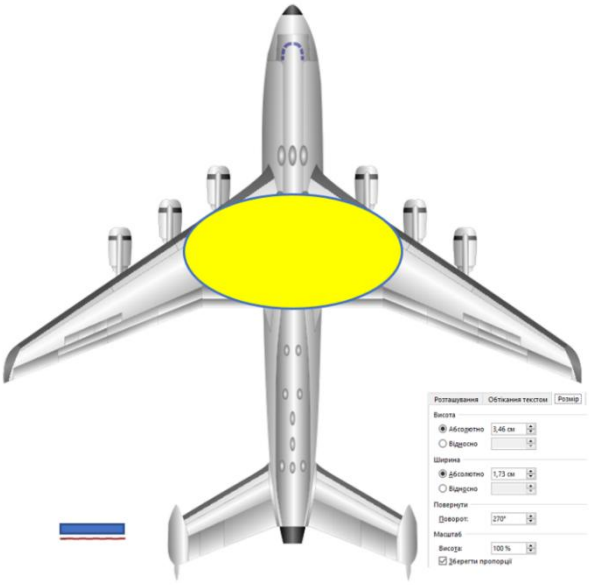


Рис.6

На Рис. 4 можна побачити побудований схематичний контур цієї тіні, якщо відступити на радіус кола $\tilde{r} = \frac{\tilde{d}}{2}$ =3,6 м від контуру літака. Висота, на якій спостерігатиметься така тінь на поверхні $\tilde{h} = l\frac{\tilde{d}}{D}$ ≈772 м.

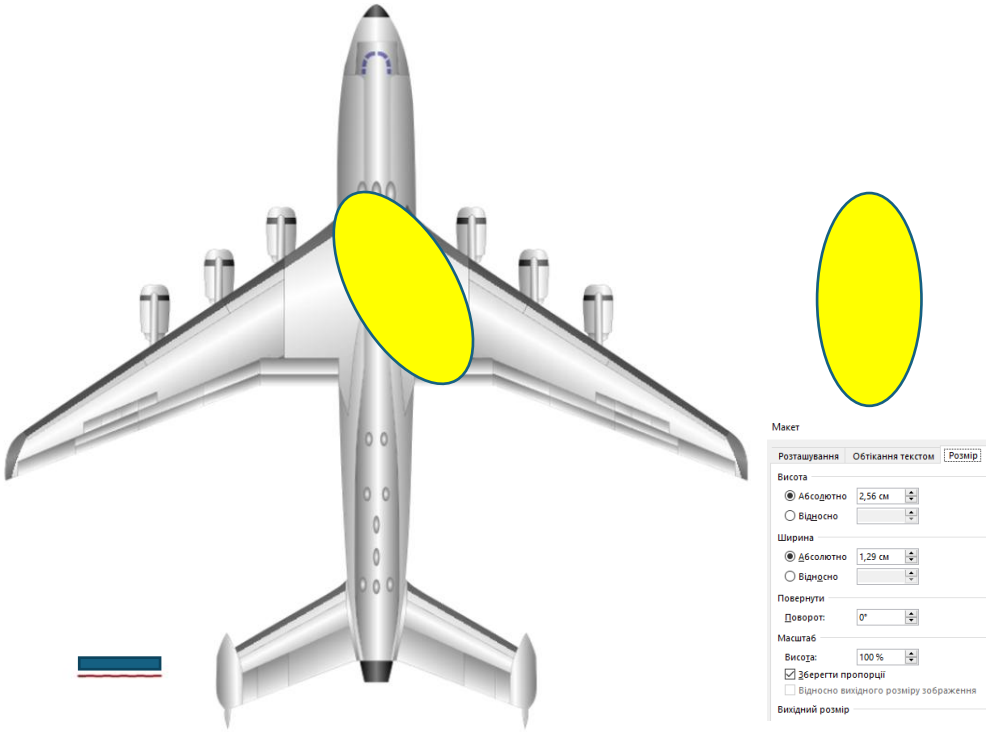


Рис.7

Якщо кут сонця над горизонтом 30°, переріз нахиленого конуса горизонтальною площиною буде еліпсом, тобто, розтягнутим в одному напрямку колом (для нашого випадку розтягнутим удвічі в напрямку сонця). Вписувати у профіль літака доведеться тепер не коло, а еліпс. Знайдемо найбільшу висоту, на якій тінь все ще спостерігається. Копіюємо Рис.1, розтягуємо коло у співвідношенні 2:1 і, змінюючи його масштаб, вписуємо у літак (Рис. 5,6).

Як бачимо, відповідь залежить від напрямку руху. Найбільшою буде висота, коли сонце освітлюватиме літак збоку (Рис.6). Оскільки, напрям на сонце утворюватиме кут 30° з горизонтом, висота буде удвічі меншою за відстань від точки тіні до літака, тобто:

$$h_\alpha = l\frac{d}{D}\sin\alpha = 1{,}5\cdot 10^{11}\cdot\frac{17{,}3}{2\cdot 7\cdot 10^{8}}\cdot\frac{1}{2}\text{м} \approx 927\text{ м}.$$

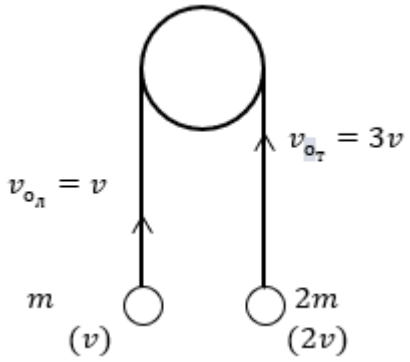
Насправді висота може буде й більшою за кілометр, оскільки у випадку похилих променів вже не можна нехтувати висотою корпусу літака.

Тепер, «щоб тіні від літака не було» оберемо найбільш несприятливу для утворення тіні орієнтацію променів відносно корпусу літака (Рис. 7). Меншу вісь еліпсу легко знайти, повернувши його (невеликою зміною пропорцій при повороті нехтуємо). Маємо 1,29 см або 12,9 м у реальному масштабі. Найменша висота, на якій може летіти АН-225, не відкидаючи тіні на горизонтальну поверхню, коли Сонце знаходиться під кутом 30° до горизонту, дорівнює

$$h_\alpha\frac{12{,}9}{17{,}3} \approx 691\text{ м}.$$

Тінь ще нагадуватиме формою літак буде, якщо спостерігатиметься тінь від фюзеляжу. Вважаючи його у перерізі округлим, маємо оціночно найбільшу висоту $\tilde{h}/2$ ≈386 м.

(80) Розглянемо рух мавп по етапам:



- Мавпи протягують ліану відносно себе, знаходячись у стані вільного польоту, доки ліана не стане натягнутою;
- Ліана розпрямляється і між мавпами трапляється «зіткнення»;
- Мавпи рухаються як зв'язані тіла, продовжуючи протягувати мотузку відносно себе.

Нехай

$v_{0_т}$ – початкова швидкість мавпи з масою $2m$

$v_{0_л}$ – початкова швидкість мавпи з масою m

$v_{витягн_т}$ – швидкість витягування мотузки мавпою, з масою $2m$

$v_{витягн_л}$ – швидкість витягування мотузки мавпою, з масою m

$v_{встанов_т}$ – швидкість, що встановлюється у мавпи, масою $2m$, внаслідок зіткнення.

$v_{встановл_л}$ – швидкість, що встановлюється у мавпи, масою m, внаслідок зіткнення.

А) Так як швидкість, з якою мавпи починають згинати ліану в момент дотику до неї (4V) більша за загальну швидкість протягування ($v_0 = 4V > v_{витягн} = 3V$,), мотузка з обох сторін прогинається та $F_{пруж} = 0$, поки вона знову не натягнеться.

Це відбудеться коли $\Delta l_{\text{прогину}} = \Delta l_{\text{протягнуте}}$.

$$\begin{cases} \Delta l_{\text{прогину}} = \left(vt_1 - \dfrac{gt_1^2}{2}\right) + \left(3vt_1 - \dfrac{gt_1^2}{2}\right) = \\ = 4vt_1 - gt_1^2 \\ \Delta l_{\text{протягнуте}} = vt_1 + 2vt_1 = 3vt_1 \end{cases} \Rightarrow \quad t_1 = t_{\text{удара}} = \frac{v}{g}$$

В цей момент мавпи набудуть швидкості:

$$v_{0_т} = 3v - gt_1 = 2v$$

$$v_{0_л} = v - gt_1 = 0$$

Та знаходяться на висоті:

$$y_{0_т} = \frac{3v^2}{g} - \frac{v^2}{2g} = \frac{5v^2}{2g}$$

$$y_{0_л} = \frac{v^2}{g} - \frac{v^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}$$

В наслідок зіткнення у момент натягу ліани мавпи набувають швидкостей, які можна знайти різними шляхами, наприклад законом збереження моменту імпульсу:

$$\begin{cases} 3v = v_{\text{встановл}_т} + v_{\text{встановл}_л} \\ 0 - 2m * 2v = mv_{\text{встановл}_л} - 2mv_{\text{встановл}_т} \end{cases}$$

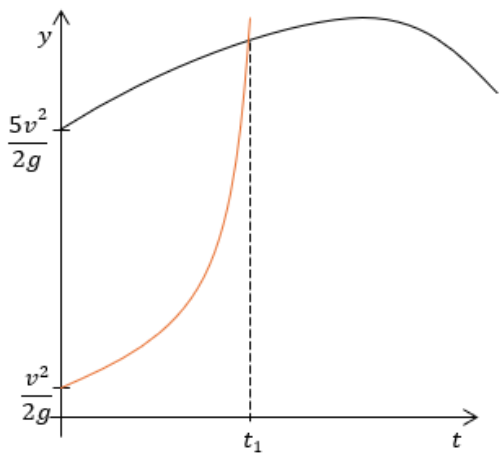
Вирішуючи систему рівнянь:

$$v_{\text{встановл}_т} = \frac{7}{3}v$$

$$v_{\text{встановл}_л} = \frac{2}{3}v$$

Після цього, застосуємо закон Ньютона та знайдемо, що прискорення мавп буду далі дорівнювати g/3, а закони руху будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} y_л = \dfrac{v^2}{2g} + \dfrac{2}{3}vt + \dfrac{gt^2}{6} \\ y_т = \dfrac{5v^2}{2g} + \dfrac{7}{3}vt - \dfrac{gt^2}{6} \end{cases}$$



Знайдемо, де і коли мавпи будуть знаходитися на одній висоті:

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{2}{3}vt_1 + \frac{gt_1{}^2}{6} = \frac{5v^2}{2g} + \frac{7}{3}vt_1 - \frac{gt_1{}^2}{6}$$

$$gt_1^2 - 5vt_1 - 6\frac{v^2}{g} = 0$$

$$t_1 = \frac{5v \pm \sqrt{25v^2 + 24v^2}}{2g} = 6\frac{v}{g}$$

$$y_1 = \frac{v^2}{2g} + \frac{2}{3}v * 6\frac{v}{g} + \frac{g\left(6\frac{v}{g}\right)^2}{6} = 10{,}5\frac{v^2}{g}$$

Якщо $\frac{L}{2} < y_1$, то мавпа масою $2m$ досягне колоди першою.

Якщо $\frac{L}{2} > y_1$, то першою досягне колоди мавпа масою m.

(81) Знайдемо мінімум потенційної енергії. Введемо параметр $r \equiv l_{OA'}$ і позначимо $l_{AA'} = l_1, l_{A'B'} = l_2$. Тоді, довжини пружин:

$$l_1 = l - r, \qquad l_2 = L_{AB}\frac{r}{l} = \sqrt{3}l\frac{r}{l}$$

і відповідно стиснення

$$\Delta l_1 = r, \qquad \Delta l_2 = \sqrt{3}(l - r)$$

тому енергія

$$E = 3\left(\frac{k_1\Delta l_1^2}{2} + \frac{k_2\Delta l_2^2}{2}\right) = \frac{3}{2}\left(kr^2 + \frac{k}{3}\cdot 3(l-r)^2\right) = \frac{3k}{2}(l^2 - 2lr + 2r^2)$$

Легко переконатися, що мінімум цієї функції $r = \frac{l}{2}$ (наприклад, через похідну, або за допомогою формули для знаходження мінімуму функції $ax^2 + bx + c$, чи шляхом виділення повного квадрату $l^2 - 2lr + 2r^2 = \frac{1}{2}(2r - l)^2 + \frac{l^2}{2}$.)

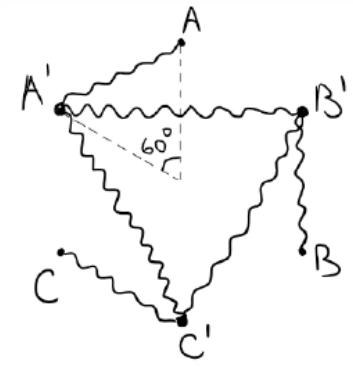
Остаточно:

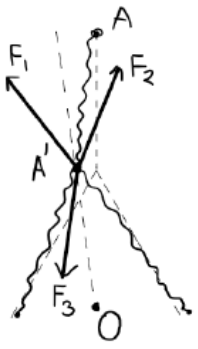
$$l_1 = \frac{l}{2}, \qquad l_2 = \frac{3l}{2}$$

При повороті трикутника $A'B'C'$ на малий кут, на A' діють сили, показання на малюнку. $F_1 + F_2$ направлено вздовж OA', F_3 - вздовж AA', тому обидва вектори мають компоненту вліво - в напрямку подальшого відхилення, тому рівновага нестійка.

Після втрати рівноваги пружини починають розтискатися. Три сили, які діють на A', не можуть компенсувати один одного, крім випадку, коли всі вони дорівнюють нулю. Дійшовши до положення рівноваги, пружини повністю розіжмуться. Трикутник OAA' утворює рівносторонній трикутник, тому $A'B'C'$ повернеться на $60°$:

$$\alpha = 60°$$





(82) Відстані між намистинками в стані рівноваги дорівнюють $R\sqrt{3}$. Якщо радіус, проведений у намистинку 3, відхиляється на кут φ проти ходу годинникової стрілки, то

$$r_{13} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi}{2}\right), r_{23} = 2R\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

Потенціальна енергія системи внаслідок відхилення збільшується на $\Delta W_p = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{13}} + \frac{1}{r_{23}} - \frac{2}{R\sqrt{3}}\right)$.

1) Після перетворень з урахуванням малості кута відхилення отримаємо $\Delta W_p = \frac{5q^2\varphi^2}{48\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R}$. Кінетичну ж енергію рухомої намистинки можна записати у вигляді $W_k = \frac{mR^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$. Отже, нехтуючи несуттєвим постійним доданком, можемо записати повну енергію системи у вигляді $W = \frac{5q^2}{48\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R}\varphi^2 + \frac{mR^2}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$. Коефіцієнти при φ^2, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$ є сталими. Отриманий вираз відповідає гармонічним коливанням системи. Далі можна отримати рівняння гармонічних коливань, диференціюючи останню формулу (з урахуванням закону збереження енергії) або просто скористатися аналогією, наприклад, з виразом для енергії пружинного маятника. Дістанемо циклічну частоту коливань: $\omega = \frac{|q|}{R}\sqrt{\frac{5}{24\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 mR}}$. Отже, період малих коливань $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{|q|}\sqrt{\frac{24\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 mR}{5}}$.

2) Коливання між точками A і B не є гармонічними. Максимальну швидкість $v_{\max}$ намистинка має в положенні рівноваги, енергія системи в цей момент $W = \frac{mv_{\max}^2}{2} + \frac{q^2}{2\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 R}$. У крайніх положеннях кінетична енергія відсутня, енергія системи $W = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}\right) = \frac{3q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$. Звідси

$$v_{\max}^2 = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 mR}\left(3 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right).$$

(83) Зрозуміло, що коефіцієнт тертя μ_2 між трикутником і другою, нижньою, поверхнею, на якій він зупиняється, більший за коефіцієнт тертя μ_1 між трикутником і першою поверхнею. Позначимо кут нахилу поверхні до горизонту через α і вважатимемо, що трикутник з лінолеуму тисне на поверхню столу рівномірно. Тоді під час проковзування на кожну невеличку масу Δm трикутника діятиме сила тертя $\Delta F_т = \mu\Delta mg\cos\alpha$. Якщо ця частинка тіла проїде відстань x, на роботу проти сил тертя буде витрачена енергія $\Delta A = \Delta F_т x = \mu\Delta mxg\cos\alpha$. Додаючи аналогічні вирази для всіх частинок тіла, отримаємо

$$A = \mu\Delta m_1 x_1 g\cos\alpha + \mu\Delta m_2 x_2 g\cos\alpha + \cdots = \mu g\cos\alpha\cdot(\Delta m_1 x_1 + \Delta m_2 x_2 + \Delta m_2 x_2 + \cdots).$$

Якщо тіло рухалось поступально, й усі x_i відраховувались у перпендикулярному до прямої лінії напрямку, як у нашому випадку, то в дужках виразу A маємо загальну масу m, помножену на координату центру мас x_c. Дійсно, за визначенням центру мас

$$x_c = \frac{\Delta m_1 x_1 + \Delta m_2 x_2 + \Delta m_2 x_2 + \cdots}{m},$$

отже

$$A = \mu mgx_c\cos\alpha.$$

Зазначимо, що ця формула є вірною для будь-якого плаского тіла, а не тільки трикутника. Центр мас трикутника знаходиться на перетині медіан і ділить висоту h на відстані: $\frac{1}{3}h$ до основи і $\frac{2}{3}h$ до протилежної вершини. Отже, враховуючи, що тіло рухалось по обом поверхням, у першому випадку робота проти сил тертя буде:

$$A_I = \frac{1}{3}\mu_1 mgh\cos\alpha + \frac{2}{3}\mu_2 mgh\cos\alpha.$$

А у другому випадку:

$$A_{II} = \frac{2}{3}\mu_1 mgh\cos\alpha + \mu_2 mg\left(l - \frac{2}{3}h\right)\cos\alpha,$$

де l – відстань, яку проїхав трикутник (див. Рис.). Оскільки на початку та в кінці руху кінетична енергія дорівнює нулю, прирівняємо A_I і A_{II} до відповідних змін потенціальної енергії трикутника:



$$\begin{cases} mgh\cos\alpha\left(\frac{1}{3}\mu_1 + \frac{2}{3}\mu_2\right) = mgh\sin\alpha, \\ mgh\cos\alpha\left(\frac{2}{3}\mu_1 + \left(\frac{l}{h} - \frac{2}{3}\right)\mu_2\right) = mgl\sin\alpha. \end{cases} \quad (1)$$

Поділимо рівняння, щоб позбутися невідомого кута α, і спробуємо виразити l:

$$(\mu_1 - \mu_2)l = 2(\mu_1 - \mu_2)h.$$

Оскільки $\mu_1 \neq \mu_2$, $l = 2h$.

Якщо основою вперед трикутник проїхав вздовж площини столу одну свою висоту, то вперед вершиною проїде рівно вдвічі більше: $\boldsymbol{2h}$.

Тепер з'ясуємо, у який момент швидкість трикутника максимальна. У першому і другому випадках проекція сили тяжіння $mg\sin\alpha$ на напрямок руху спочатку більша за силу тертя, і тіло прискорюється, а потім стає меншою, і тіло гальмує. Максимальна швидкість, коли проекція сили тяжіння $mg\sin\alpha$ дорівнює силі тертя $\mu_1 m_1 g\cos\alpha + \mu_2 m_2 g\cos\alpha$, де m_1 і m_2 – маси частин тіла на першій і другій поверхнях, відповідно. Отже

$mg\sin\alpha = \mu_1 m_1 g\cos\alpha + \mu_2 m_2 g\cos\alpha$, звідки умова досягнення максимальної швидкості може бути записана у вигляді:

$$\mathrm{tg}\alpha = \mu_1 \frac{m_1}{m} + \mu_2 \frac{m_2}{m}. \qquad (2)$$

З першого рівняння системи (1) маємо аналогічний вираз:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{3}\mu_1 + \frac{2}{3}\mu_2. \qquad (3)$$

Враховуючи $m_1 + m_2 = m$, з рівнянь (2) і (3) знаходимо, що

$$\frac{m_1}{m} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{m_2}{m} = \frac{2}{3}.$$

Виявляється, і у першому, і у другому випадках максимальної швидкості трикутник досягає, коли виїжджає на другу поверхню на 2/3 своєї маси (а, отже, й площі), але внаслідок різної орієнтації трикутника, це відповідатиме різному шляху l. У першому випадку на другу поверхню виїде частина трикутника у вигляді рівнобедреної трапеції, а у другому – рівнобедреного трикутника. Висота цього трикутника l знаходиться з співвідношення:

$$\frac{m_2}{m} = \frac{S_2}{S} = \left(\frac{l}{h}\right)^2 = \frac{2}{3}.$$

Отже, $l = \sqrt{2/3}\,h$. При цьому зменшення потенціальної $mgl\sin\alpha$ йде на кінетичну енергію руху і роботу проти сили тертя $A_{т2}$:

$$\frac{mv^2}{2} = mgl\sin\alpha - A_{т2},$$

де роботу проти сил тертя можна розрахувати окремо для двох частин: трикутника висотою l і масою m_2, що перейшов на другу поверхню, і частини m_1 (трапеція), як зсунулась на l вздовж першої поверхні:

$$A_{т2} = \frac{2}{3}\mu_1 m_2 gl\cos\alpha + \frac{1}{3}\mu_2 m_2 gl\cos\alpha + \mu_1 m_1 gl\cos\alpha.$$

Отже, враховуючи $m_2 = 2m/3,\ m_1 = m/3$, $l = \sqrt{2/3}\,h$ і (3), маємо

$$\frac{mv_2^2}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}(\mu_2 - \mu_1)mgh\cos\alpha. \qquad (4)$$

Максимальну кінетичну енергію для першого випадку отримуємо аналогічно:

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{2}{9\sqrt{3}}(\mu_2 - \mu_1)mgh\cos\alpha. \qquad (5)$$

Ділимо (4) на (5). Невідомі $\mu_2, \mu_1, m, h, \cos\alpha$ скорочуються.

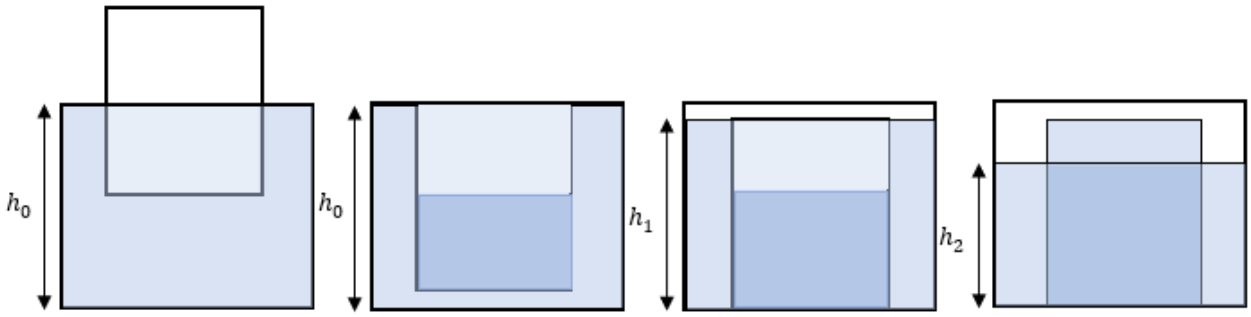
$$\frac{\boldsymbol{v_2}}{\boldsymbol{v_1}} = \sqrt[4]{\boldsymbol{8}}.$$

При знаходження (5), роботу проти сили тертя у першому випадку $A_{т1}$, можна було знайти як безпосередньо через положення центрів мас частин, так і, скориставшись, наприклад, вже отриманим виразом для $A_{т2}$, помінявши в ньому коефіцієнти тертя місцями і l.

Звісно, роботу можна знайти, проінтегрувавши проекції сил на напрям спуску.

Зазначимо також, що всю задачу можна розв'язати без похідних та інтегралів, не здогадуючись, як сила тертя розраховується через центр мас фігури, і навіть не знаючи, де знаходиться він у пласкому трикутнику. Для цього слід скористатися методами подібності та розмірності.

(84) При переливанні води з великої каструлі у малу рівень води у великій каструлі не змінюватиметься, доки мала каструля не доткнеться дна, оскільки не змінюється загальна маса всередині великої каструлі, а отже і гідростатичний тиск $\rho g h_0$ на її дно. Першу хвилину (60 с, див. графік) мала каструля плавала, «виглядаючи» над рівнем води у великій каструлі і поступово занурювалась. Таким чином у малу каструлю перелилося $m_1 = 1{,}2$ кг води. Наприкінці рівні верхніх країв каструль зрівнялися, мала зачерпнула воду і стрімко пішла на дно. Рівень води у великій каструлі майже миттєво опустився до висоти малої каструлі h_1=11 см, внаслідок переливання в останню води масою $m_2 = \rho S_{\text{в}}(h_0 - h_1)$ (див. Рис.). Воду продовжували переливати у малу каструлю ще 20 с ($m_3 = 400$ г води), після чого та заповнилась повністю, і вода стала у тому ж об'ємі переливатися назад, а рівень води у великій каструлі набув остаточного значення h_2=7 см. Всі ключові моменти зображені на схематичному рисунку.



Розглянемо рівновагу каструлі наприкінці 60 с. Вниз діють сили тяжіння, вгору – сила Архімеда:

$$m_k g + m_1 g = \rho g V,$$

де $V = S_{\text{м}} h_1$ – зовнішній об'єм малої каструлі. Підставляючи і скорочуючи g, знаходимо

$$m_k + m_1 = \rho S_{\text{м}} h_1. \qquad (1)$$

Внутрішній об'єм $V_{\text{м}}$ малої каструлі менший за зовнішній $V = S_{\text{м}} h_1$ на об'єм металу каструлі m_k/ρ_k. З іншої сторони, внутрішній об'єм малої каструлі заповнила вода масою $m_1 + m_2 + m_3$. Прирівняємо вирази для внутрішнього об'єму:

$$S_{\text{м}} h_1 - m_k/\rho_k = (m_1 + \rho S_{\text{в}}(h_0 - h_1) + m_3)/\rho. \qquad (2)$$

Ще слід врахувати те, що маса m_3, перелита з 60 с по 80 с, може бути записана через зміну рівня води у великій каструлі:

$$m_3 = \rho(S_{\text{в}} - S_{\text{м}})(h_1 - h_2). \qquad (3)$$

Три рівняння (1), (2), (3) містять три невідомі: $m_k, S_{\text{м}}, S_{\text{в}}$. Розв'язуючи систему, знаходимо:

$$S_{\text{м}} = \frac{1}{\rho}\frac{m_1(1 - \rho/\rho_k) + m_3(h_0 - h_2)/(h_1 - h_2)}{h_1(2 - \rho/\rho_k) - h_0},$$

$$S_{\text{в}} = S_{\text{м}} + \frac{m_3}{\rho(h_1 - h_2)},$$

$$m_k = \frac{m_1(h_0 - h_1) + m_3 h_1 (h_0 - h_2)/(h_1 - h_2)}{h_1(2 - \rho/\rho_k) - h_0} = 780 \text{ г.}$$

Для розрахунку було використано те, що за умовою каструля виготовлена з заліза, густина якого $\rho_k = 7{,}8$ г/см^3. Об'єми каструль дорівнюють 1,88 л і 3,36 л. Звісно, під об'ємом каструлі розуміють об'єм, який вона у себе може вмістити.

(85) При розв'язанні задачі будемо вважати, що бджоли всі однакові, що бджоли розвивають однакову теплову потужність. Шершнів при різній температурі ми теж вважаємо однаковими. Також врахуємо, що бджоли борються за виживання і постійно виділяють максимум своєї теплової енергії.

У випадку коли бджоли сформували кулю для боротьби з шершнем ми розуміємо, що температура кулі буде підвищуватись, доки все тепло, що виділяють бджоли і шершень не будуть повністю розсіюватись за рахунок теплових втрат у навколишнє середовище.

Запишемо закон збереження енергії для кулі з бджіл і шершнем у випадку коли температура навколишнього середовища 25°C.

$$N_1 P\tau + P_{\text{ш}}\tau = \alpha(t_{\text{заг}} - t_1)\tau \qquad (1)$$

P - теплова потужність яку розвивають бджоли, вважаємо її сталою величиною;
$P_{\text{ш}}$ - теплова потужність шершня, вважаємо її сталою величиною;
$t_{\text{заг}}$ - температура за якої гине шершень (48°C);
t_1 - температура навколишнього середовища у першому випадку (25°C);
N_1 - кількість бджіл, що формує ‘’кулю’’ у першому випадку;
коефіцієнт теплопровідності для кулі, що складається з бджіл та шершня.
τ – час.

За аналогією запишемо закон збереження енергії для кулі з бджіл і шершнем у випадку коли температура навколишнього середовища 30 та 35°C.

$$N_2 P\tau + P_{\text{ш}}\tau = \alpha(t_{\text{заг}} - t_2)\tau \qquad (2)$$

$$N_3 P\tau + P_{\text{ш}}\tau = \alpha(t_{\text{заг}} - t_3)\tau \qquad (3)$$

Знайдемо $\Delta N_{12} = N_1 - N_2 = 100$ – кількість на яку зменшиться кількість бджіл між 1 та 2 випадком розглянутим в задачі. Розділимо друге рівняння на перше.

$$\frac{N_2 P\tau + P_{\text{ш}}\tau}{N_1 P\tau + P_{\text{ш}}\tau} = \frac{\alpha(t_{\text{заг}} - t_2)\tau}{\alpha(t_{\text{заг}} - t_1)\tau}$$

Знайдемо ΔN_{13} – кількість на яку зменшиться кількість бджіл між 2 та 3 випадком розглянутим в задачі. Розділимо третє рівняння на перше.

$$\frac{N_3 P\tau + P_{\text{ш}}\tau}{N_1 P\tau + P_{\text{ш}}\tau} = \frac{\alpha(t_{\text{заг}} - t_3)\tau}{\alpha(t_{\text{заг}} - t_1)\tau}$$

Введемо заміни:

$$z_{12} = \frac{(t_{\text{заг}} - t_2)}{(t_{\text{заг}} - t_1)} = \frac{18}{23}$$

та

$$z_{13} = \frac{(t_{\text{заг}} - t_3)}{(t_{\text{заг}} - t_1)} = \frac{13}{23}$$

Враховуючи, що

$$N_2 = N_1 - \Delta N_{12}$$

а також

$$N_3 = N_1 - \Delta N_{13}$$

отримаємо наші співвідношення у вигляді

$$\frac{N_1 P + P_{\text{ш}} - \Delta N_{12} P}{N_1 P + P_{\text{ш}}} = z_{12}$$

$$\frac{N_1 P + P_{\text{ш}} - \Delta N_{13} P}{N_1 P + P_{\text{ш}}} = z_{13}$$

Розділімо почлено ліву частину кожного рівняння, перенесемо одиниці в праву частину та розділимо рівняння одне на одне.

$$\frac{P}{N_1 P + P_{\text{ш}}} = \frac{1 - z_{12}}{\Delta N_{12}} = \frac{1 - z_{13}}{\Delta N_{13}}$$

Отже

$$\Delta N_{13} = \Delta N_{12} \frac{1 - z_{13}}{1 - z_{12}} = \frac{{}^{10}/_{23}}{{}^{5}/_{23}} = 200$$

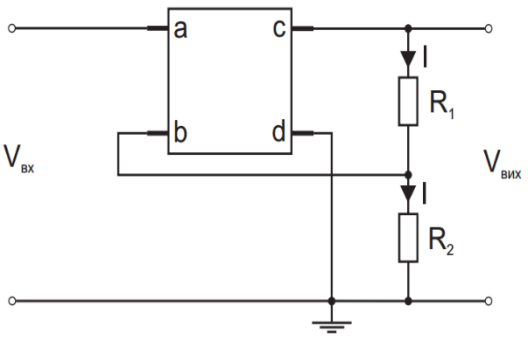
$$N_3 = N_1 - \Delta N_{13} = 300$$

Відповідь: для захисту вулика при температурі 35 °C потрібно лише 300 бджіл.

(86) а) Запишемо закони Кірхгофа.

Отримуємо:

$$\begin{cases} V_1 - I_1 R + I_2 R - V_2 = 0, \\ V_1 - 2I_1 R - V_{\text{вих}} = 0, \\ V_2 - 2I_2 R = 0, \end{cases}$$



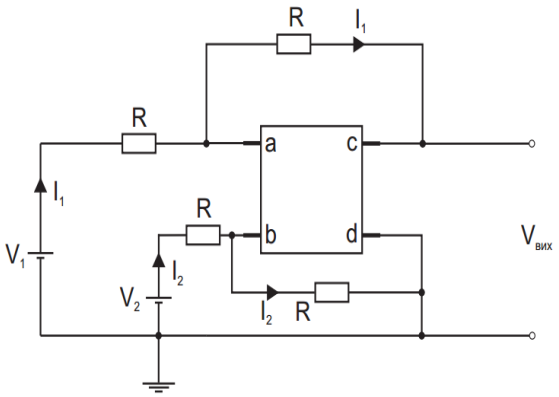
звідки легко отримати, що $V_{\text{вих}}=V_2-V_1$.

б) Запишемо закони Кірхгофа і отримаємо:

$$\begin{cases} V_{\text{вх}} = IR_2, \\ V_{\text{вих}} = IR_1 + IR_2, \end{cases}$$

звідки елементарно отримуємо відповідь:

$$V_{вих}/V_{вх}= R_1/R_2+1.$$



(87) Зрозуміло, що потрапляючи на межу розділення світловода та повітря, енергія променю ділиться на дві частини: одна частина енергії виходить, а інша відбивається всередину світловоду. Яка саме частка відбивається, а яка проходить у інше середовище залежить перш за все від кута падіння (на скільки він наближається до кута повного внутрішнього відбивання для цієї пари середовищ).

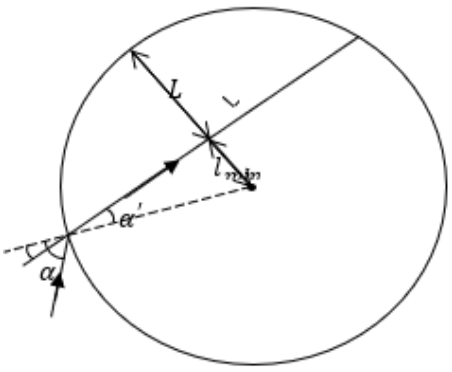
Розглянемо промінь у середині світловоду.

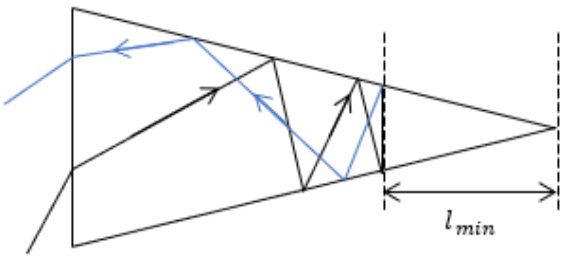
Постійне відбивання від бічних поверхонь можна представити за допомогою послідовного відображення дзеркал одне в одному та відображення траєкторії променю. Це значно спростить знаходження характеристик його розповсюдження. Зображуючи велику кількість таких «відображень», можна отримати коло.

Вочевидь, мінімальна відстань на яку проникає промінь к центру конуса буде дорівнювати l_{min}, що є перпендикуляром до променю у нашому випадку.

Тоді згідно з законом Снеліуса: $\sin\alpha' = \frac{\sin\alpha}{n}$, і вважаючи, що кут φ дуже малий, отримуємо:

$$\boxed{L = \frac{D}{\varphi} - l_{min} = \frac{D}{\varphi}(1 - \frac{\sin\alpha}{n})}$$

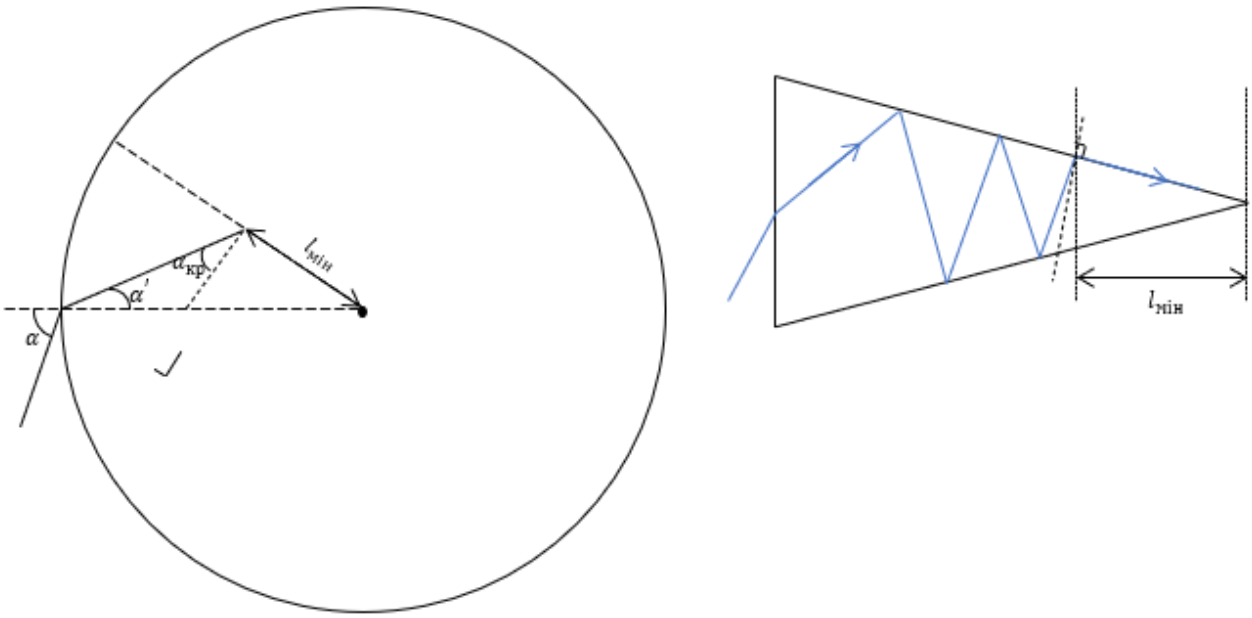




$$l_{min} = \frac{D}{\varphi}\sin\alpha'$$

Цікаво проаналізувати випадок, коли кут падіння променю стає меншим за критичний кут повного внутрішнього відбивання. Більша частина енергії при цьому буде виходити у повітря, але та частина, що залишається, хоча й може бути дуже невелика за величиною, проходить на відстань , значення якої було отримано раніше.

Але, все ж таки, якщо враховувати, що за умовою кут φ малий, то кількість відбиттів буде у загальному випадку дуже великою ($\varphi \ll 1$), енергія частини променю всередині світловоду зменшуватиметься навіть скоріше, ніж за геометричною прогресією внаслідок зменшення з кожним разом кута падіння. Зрозуміло, що енергія променю не може стати нескінченно малою, меншою за ту, що дає формула Планка. Та й що взагалі тоді вважати променем?
Отже, розрахунок початку швидкого згасання променю дає важливу межу повного проникнення, після якої промінь вже частково виходить за межі світловоду, не проникаючи далі.
Знайдемо, коли промінь досягне кута падіння, меншого за критичний кут, користуючись попереднім методом.



Схематичний рисунок відбиття променю у світловоді.

$$sin\,\alpha_{кр} * n = sin\,90° * n(\text{повітря}) = 1$$

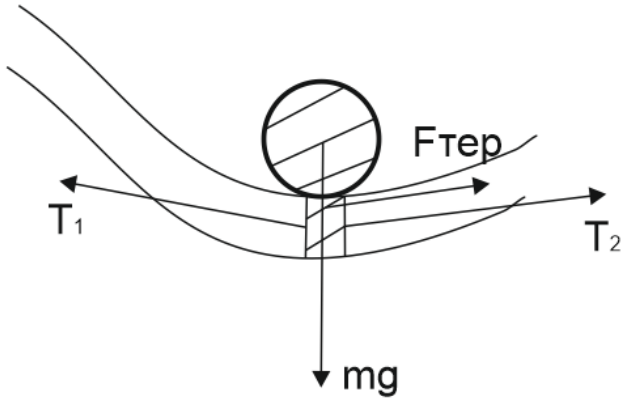
$$\begin{cases} L = \dfrac{D}{\varphi} - l_{min} \\ l_{min} = \dfrac{\sin\alpha' * D}{\varphi * \sin(\alpha_{кр} + \frac{\pi}{2})} \text{ (за теоремою сінусів)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{L = \frac{D}{\varphi}(1 - \frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-1}})}$$

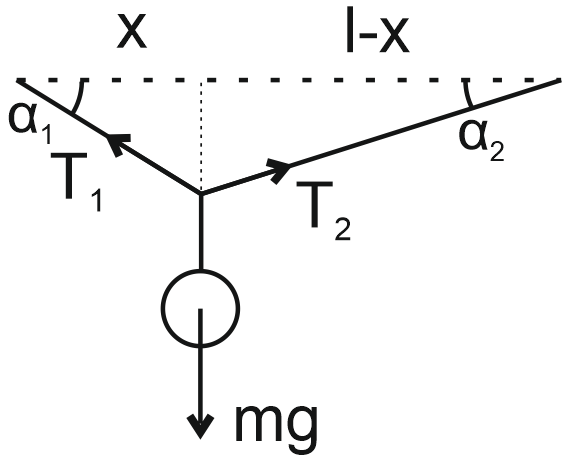
(88) 1) Очевидно, що на рух м'яча суттєво впливав опір повітря. За його відсутності м'яч проходив би кожну проміжну точку траєкторії вгору та вниз із однаковою швидкістю. Опір повітря спричиняє втрати енергії; отже, рух униз повільніший. Тому сила опору повітря при проходженні будь-якої ділянки траєкторії вниз менша (якою б не була формула залежності цієї сили від швидкості) та забирає менше механічної енергії, ніж під час руху вгору. Під час руху вгору втрачається механічна енергія $|\Delta W_1| = \frac{mv_0^2}{2} - mgh$, під час руху вниз $|\Delta W_2| = mgh - \frac{mv^2}{2}$. Відношення цих величин має бути більшим за одиницю, а за даними вимірювань це 31/34 ≈ 0,91. Отже, припущено помилку.

2) З наведених міркувань випливає: $\frac{mv_0^2}{2} - mgh > mgh - \frac{mv^2}{2} > 0$. Звідси отримуємо $\frac{v^2}{2g} < h < \frac{v_0^2+v^2}{4g}$, тобто 3,2 м $< h <$ 9,7 м. Щоб зробити більш точні висновки, треба знати характер залежності сили опору повітря від швидкості руху м'яча.

3) Скористаємося другим законом динаміки: $m\vec{a} = m\vec{g} - k\vec{v}$. Розгляньмо малий проміжок часу Δt, тоді $\vec{a}\Delta t = \Delta\vec{v}, \vec{v}\Delta t = \Delta\vec{s}$. Тут $\vec{s}$ — переміщення м'яча. Помноживши рівняння другого закону динаміки на Δt, отримаємо після перегрупування $\Delta(m\vec{v} - m\vec{g}t + k\vec{s}) = 0$. Це означає, що величина в дужках є сталою, тобто для даної ситуації існує особливий «закон збереження». Залишається прирівняти значення отриманої величини в початковий та кінцевий моменти (коли $s = 0$). Маємо співвідношення $\vec{g}t = \vec{v} - \vec{v}_0$. З урахуванням напрямів векторів $t = \frac{v_0+v}{g} =$ 2,6 с.

(89) Розглянемо вішалку, що зміщена від центру мотузки й утримується на ній силою тертя. Сила тертя не тільки не дає скотитись вішалці, а й, за Третім законом Ньютона, діє на шматок мотузки, що дотикається до вішалки. Це значить, що для перебування цього шматочку в рівновазі сили натягу нитки зліва і справа від шматочку будуть, очевидно, різні за модулем.





Значить, якщо ми розглянемо рівновагу системи вішалка+шматочок, то можемо вважати, що тіло висить на двох різних мотузках, з різними силами натягу, проте сума довжин цих мотузок завжди однакова.

Нехай довжина лівої частини мотузки x`. Запишемо теорему косинусів для трикутника, що утворює горизонталь, яка з'єднує точки підвісу, й мотузка:

$$(L - \text{x`})^2 = (\text{x`})^2 + l^2 - 2l\text{x`}\cos(\alpha_1)$$

Звідси,

$$cos(\alpha_1) = \frac{L}{l} - \frac{L^2 - l^2}{2l\text{x`}} \qquad (1)$$

Нехай $\text{x`} = \frac{L}{2} - \delta$. Тоді:

$$cos(\alpha_1) = \frac{L}{l} - \frac{L^2 - l^2}{2l(\frac{L}{2} - \delta)}$$

Якщо δ збільшується, то $cos(\alpha_1)$ монотонно зменшується, а значить α_1 монотонно росте.

Аналогічно легко побачити, що при такому зміщенні α_2 монотонно зменшується.

Запишемо закон Ньютона на горизонтальну та вертикальні вісі:

$$T_1 cos(\alpha_1) = T_2 cos(\alpha_2)$$

$$T_1 sin(\alpha_1) + T_2 sin(\alpha_2) = mg$$

З цих двох рівнянь виходить, що

$$T_1 = mg \frac{\cos(\alpha_2)}{sin(\alpha_1) * cos(\alpha_2) + sin(\alpha_2) * cos(\alpha_1)} \quad (2)$$

Знайдемо зв'язок між α_2 та α_1. З рівняння (1) та теореми синусів

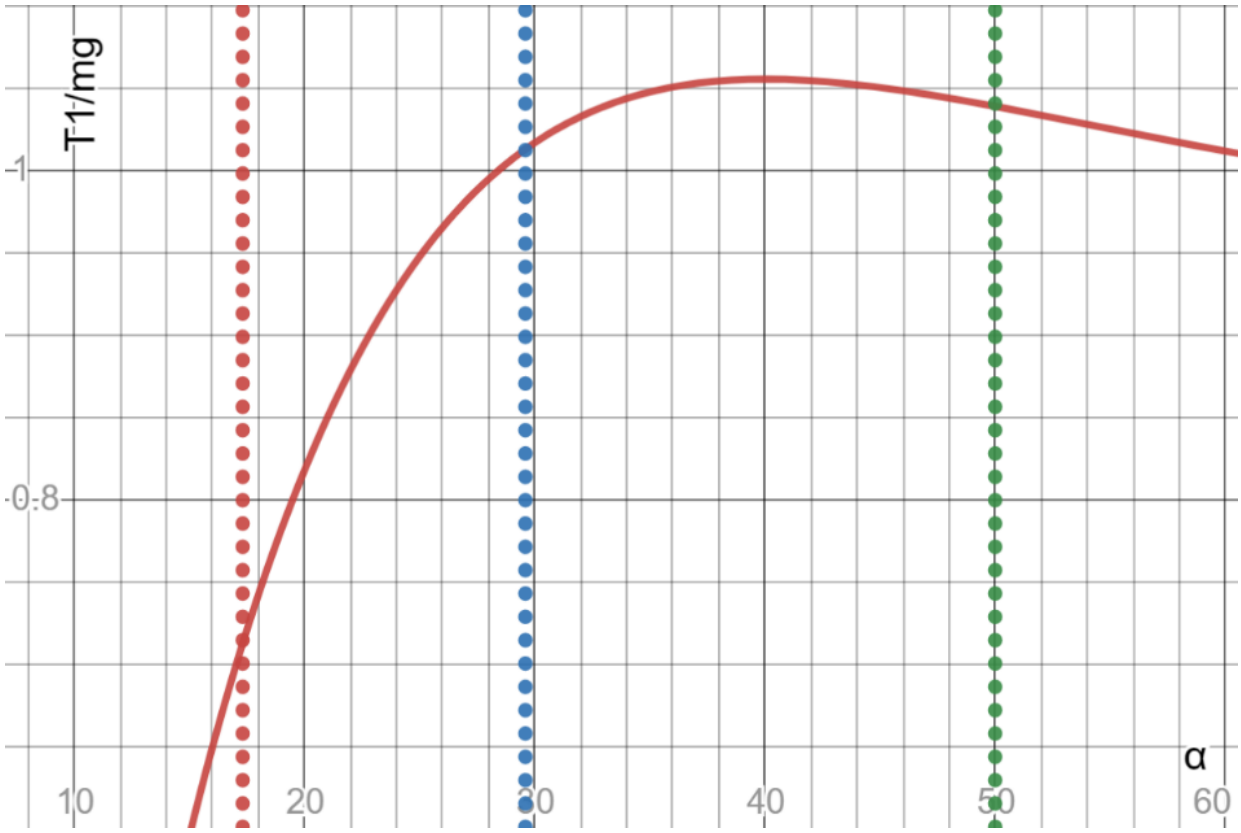
$$\frac{\sin(\alpha_1)}{L - x`} = \frac{\sin(\alpha_2)}{x`},$$

отримуємо:

$$\sin(\alpha_2) = \frac{C_2 \sin(\alpha_1)}{1 - C_1 cos(\alpha_1)}, \quad (3)$$

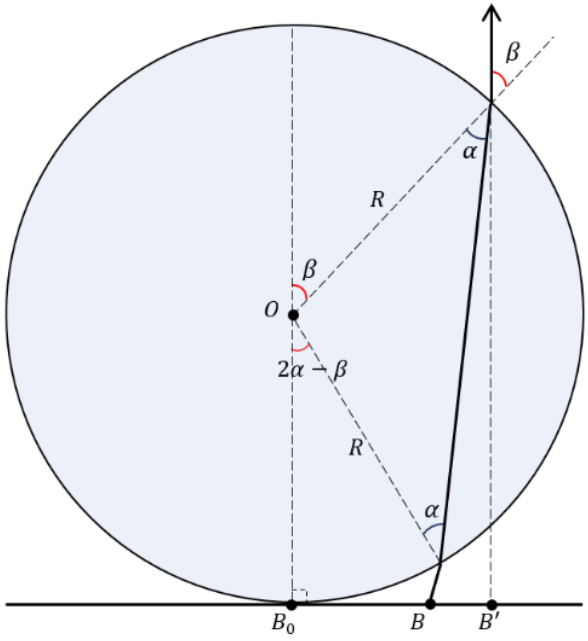
де $C_1 = \frac{2lL}{l^2+L^2}$, $C_2 = \frac{L^2-l^2}{l^2+L^2}$.

Якщо підставити вираз (3) в рівняння (2), то зможемо побудувати графік залежності T_1 від α_1.



Ліва пунктирна лінія показує кут α_1, коли максимальним є кут $\alpha_2 = 50^0$. Права пунктирна лінія показує граничний кут $\alpha_1 = 50^0$. Центральна – кут, при якому вішалка висить рівно по центру. Бачимо, що найменшою сила T_1 є тоді, коли $\alpha_2 = 50^0$ і приблизно дорівнює $T_1 \approx 0.70mg$. Найбільшою сила T_1 стає в точці перегину (максимуму) графіку справа від центральної пунктирної лінії при $\alpha \approx 40^0$ і приблизно дорівнює $T_1 \approx 1.06mg$.

(90) 1) Розглянемо точку В, що лежить на намальованій лінії поблизу точки B_0(точка дотику палички з поверхнею). Промінь світла потрапляє у паличку під малим кутом, заломлюється в ній та виходячи вертикально вверх приходить у око спостерігача, який продовжує цей промінь так, ніби він вийшов з точки B'. Таким чином, для спостерігача точка В «зміщується» вздовж прямої B_0B та стає на місце точки B'. Але, точки що лежать не поблизу точки B_0 заходять у паличку не під малими кутами, тому дану модель для них застосувати не можемо(спрощення $\sin(a) \approx a$ не буде виконуватися, тому зміщення для кожної точки буде залежати від кута)



2) Згідно з законом заломлення:

$$n * \sin\alpha = n_{\text{повітря}} * \sin\beta$$

Всі кути малі, тому $\sin a \approx a \approx tg\ a$. $n_{\text{повітря}} = 1$

$$n * \alpha = \beta \ (1)$$

Згідно з малюнком:

$$B_0B' = R * \beta$$

$$B_0B \approx R * (2\alpha - \beta)$$

Отримаємо

$$\boxed{\frac{B_0B}{B_0B'} = \frac{2-n}{n}}$$

Розглянемо зображення цієї лінії та зробимо відповідну побудову.

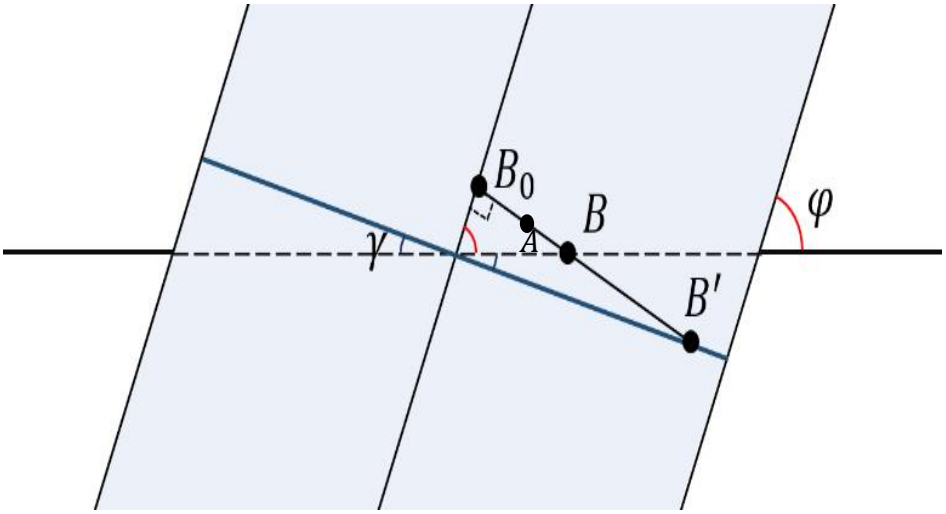
φ- кут нахилу палички (кут між віссю палички та намальованою лінією).

γ-кут між лінією та її зображенням.

Кути φ та γ беремо з наданої в умові задачі світлини.

$$AB_0 = \frac{B_0B}{tg\,(\varphi)}$$

$$AB_0 = \frac{B_0B'}{tg\,(\varphi+\gamma)}$$



Отримаємо:

$$\boxed{\frac{B_0B}{B_0B'} = \frac{tg\,(\varphi)}{tg\,(\varphi+\gamma)}}$$

$$\frac{tg\,(\varphi)}{tg\,(\varphi+\gamma)} = \frac{2-n}{n}$$

$$n = \frac{2 * tg\,(\varphi+\gamma)}{tg\,(\varphi) + tg\,(\varphi+\gamma)}$$

За малюнком $\varphi \approx 18{,}4°$ $\gamma \approx 60°$

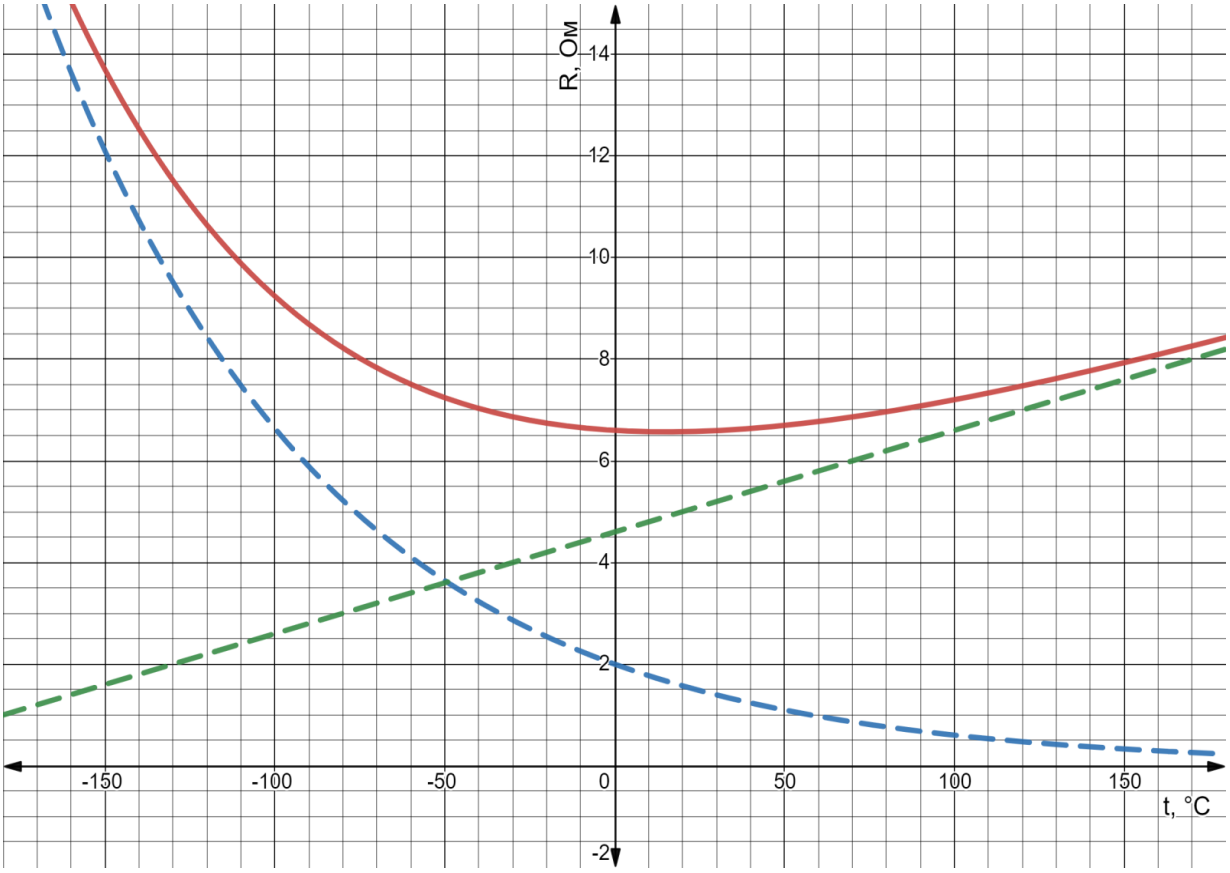
$$n = \frac{2 * tg\,(78{,}4°)}{tg\,(60°) + tg\,(78{,}4°)} \approx 1.48 \approx 1.5$$

(91) З вольт-амперної характеристики амперметра доволі просто отримати теплову залежність опору амперметра від температури. Для цього достатньо знайти значення опору амперметра для різних значень температури і переконатись, що вони доволі добре задовольняють стандартному лінійному рівнянню виду

$$R = R_0(1 + \alpha(t - t_0)).$$

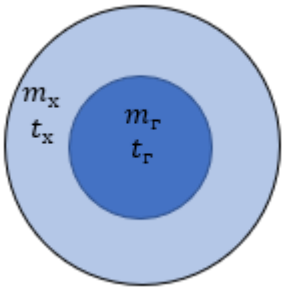
Знаходимо невідомі коефіцієнти і отримуємо

$$R_A = 5(1 + 4 * 10^{-3}(t - 20)).$$



Зобразимо цю залежність опору амперметру на графіку для опору напівпровідникового приладу. Загальний опір системи є сумою опорів напівпровідника та амперметра. Отже, ми можемо графічно додати значення опорів обох елементів при однакових температурах і отримати температурну залежність системи напівпровідник + амперметр. Даний прилад буде добре працювати в області, де опір системи майже не залежить від температури. З графіку видно, що ця область лежить приблизно в діапазоні від 0 до 40 °C.

(92) Розглянемо процесс теплообміну води всередині та ззовні труби. Так як за умовою задачі посудина теплоізольована, то обміну енергією з навколишнім середовищем немає.



Запишемо рівняння теплового балансу: $Q_x + Q_г = 0$

$Q_x = cm_x(t_{x_2} - t_{x_1})$

$Q_г = cm_г(t_{г_2} - t_{г_1})$

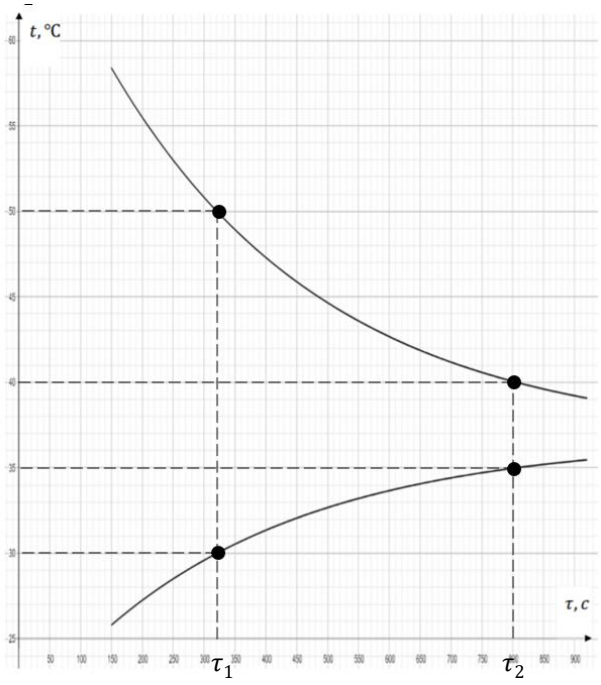
Де $t_{x_1}, t_{г_1}$- температура холодної та гарячої води в деякий момент часу τ_1

$t_{x_2}, t_{г_2}$- температура холодної та гарячої води в деякий момент часу $\tau_2 (\tau_2 > \tau_1)$.

Отримаємо:

$$\boxed{m_x(t_{x_2} - t_{x_1}) = m_г(t_{г_1} - t_{г_2})} \quad (1)$$

Слід зауважити, що дана рівність працює для будь якого інтервалу часу. Тому, оберемо на графіку t(τ) 2 пари точок за найбільш точними значеннями температур.



t_{x_1}, °C	$t_{г_1}$, °C
30	50
t_{x_2}, °C	$t_{г_2}$, °C
35	40

$$m_x * 5 = m_x * 10$$
$$m_x = 2 * m_г$$

Запишемо загальну масу води: $m = m_x + m_г$

$$m_x = \frac{2m}{3} = 0.2 \text{ кг}$$
$$\boxed{m_г = \frac{m}{3}} = 0.1 \text{ кг}$$

1) Розглянемо інтервал часу з τ_1 до моменту встановлення сталої температури $t_к$. За рівнянням (1), маємо:

$$m_x(t_к - t_{x_1}) = m_г(t_{г_1} - t_к)$$
$$\boxed{t_к = \frac{m_x t_{x_1} + m_г t_{г_1}}{m_x + m_г}} \approx 36.7 \text{ °C}$$

2) Розглянемо процес теплопередачі холодної води за деякий інтервал часу $d\tau$, за якого температура води змінилася на величину dt_x.
За Законом Збереження Енергії: $Q_x = Q_{втрат}$

$$Q_x = cm_x dt_x$$

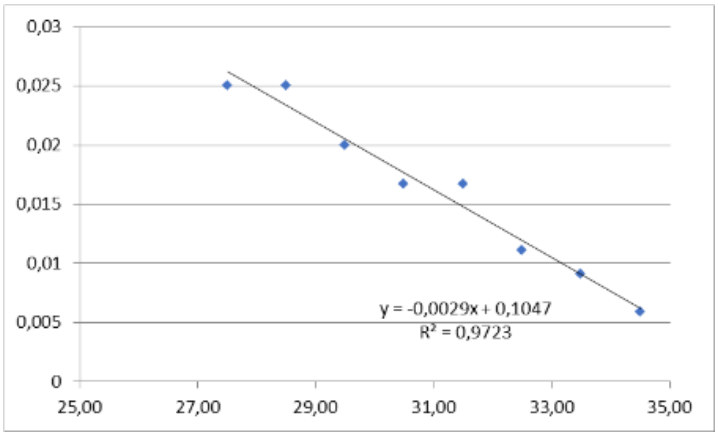
$$Q_{втрат} = k(t_г - t_x)d\tau$$

Отримаємо: $\frac{dt_x}{d\tau} = \frac{k}{cm_x}(t_г - t_x)$

Підставляючи з рівняння (1) $t_г$ та зробивши деякі спрощення, отримаємо:

$$\boxed{\frac{dt_x}{d\tau} = \frac{km}{cm_x m_г}(t_к - t_x)} \quad (2)$$

Бачимо, що $\frac{dt_x}{d\tau}(t_x)$ має лінійну залежність. Тому, побудуємо таку таблицю, взявши точки з графіку, причому t_x замінимо на середню температуру в інтервалі dt_x.
Як бачимо, отримали пряму, тому за методом найменших квадратів визначимо коефіцієнти a та b (y=ax+b).



$$\begin{cases} a = \dfrac{n\sum_{i=1}^{n} t_{\text{x}\text{сер}_i}\dfrac{dt_\text{x}}{d\tau}_i - \sum_{i=1}^{n} t_{\text{x}\text{сер}_i}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{dt_\text{x}}{d\tau}_i}{n\sum_{i=1}^{n} t_{\text{x}\text{сер}_i}{}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} t_{\text{x}\text{сер}_i}{}^2\right)} = -0.00286\ c^{-1} \\ b = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{dt_\text{x}}{d\tau}_i - a\sum_{i=1}^{n} t_{\text{x}\text{сер}_i}}{n} = 0.1047\ \dfrac{^\circ\text{C}}{\text{c}} \end{cases}$$

t_x, °C	τ, c	$\frac{dt_\text{x}}{d\tau}, \frac{^\circ\text{C}}{\text{c}}$	$t_{\text{x}\text{сер}}$, °C
27	190	0.0250	27.5
28	230	0.0250	28.5
29	270	0.0200	29.5
30	320	0.0167	30.5
31	380	0.0167	31.5
32	440	0.0111	32.5
33	530	0.0091	33.5
34	640	0.0059	34.5
35	810		

За коефіцієнтом a знайдемо k:

$$\boxed{k = \frac{-acm_\text{x}m_\text{г}}{m} = 0.8008 \approx 0.8\ \frac{\text{Вт}}{^\circ\text{C}}}$$

3) Спробуємо екстраполювати отриману в попередньому пункті залежність

$$\frac{dt_\text{x}}{d\tau} = -0.00286t_{\text{x}\text{сер}} + 0.1047$$

запишемо дану рівність саме для інтервалу часу з 0 до 190с та інтервалу температур з t_{x_0} до 27°C.

$$\frac{27^\circ\text{C} - t_{\text{x}_0}}{190} = -0.00286\frac{27^\circ\text{C} + t_{\text{x}_0}}{2} + 0.1047$$

$$t_\text{x} = 19{,}83\ ^\circ\text{C} \approx 20\ ^\circ\text{C}$$

t_x, °C	τ, c	t_{x_0}, °C
27	190	20.02
28	230	19.94
29	270	20.07
30	320	20.02
31	380	19.86
32	440	20.24
33	530	19.97
34	640	20.04
35	810	19.78

Для того щоб більш точно знайти початкову температуру, знайдемо функції залежності температури холодної води від часу - $t(\tau)$. Для цього, використовуючи рівняння (2), запишемо:

$$\frac{dt_\text{x}}{(t_\text{к} - t_\text{x})} = \frac{km}{cm_\text{x}m_\text{г}}d\tau$$

$$\int_{t_{\text{x}_0}}^{t_\text{x}} \frac{dt_\text{x}}{(t_\text{x} - t_\text{к})} = \int_0^\tau -\frac{km}{cm_\text{x}m_\text{г}}d\tau$$

$$\ln(t_\text{x} - t_\text{к})\Big|_{t_{\text{x}_0}}^{t_\text{x}} = -\frac{km}{cm_\text{x}m_\text{г}}\tau\Big|_0^\tau$$

$$\boxed{t_\text{x} = t_\text{к} + (t_{\text{x}_0} - t_\text{к})e^{-\frac{km}{cm_\text{x}m_\text{г}}\tau}},$$

виразимо $t_{\text{х}_0}$:

$$\boxed{t_{\text{х}_0} = t_{\text{к}} + (t_{\text{х}} - t_{\text{к}})e^{\frac{km}{cm_{\text{х}}m_{\text{г}}}\tau}}$$

Для найбільш точного визначення $t_{\text{х}_0}$ зробимо таблицю з дев'яти точок, для яких порахуємо $t_{\text{х}_0}$ та візьмемо середнє значення.

Отримаємо теж саме значення, $t_{\text{х}_0} \approx 20$ °C.

4) Тоді, користуючись рівнянням (1) знайдемо $t_{\text{г}_0}$.

$$\boxed{t_{\text{г}_0} = \frac{mt_{\text{к}} - m_{\text{х}}t_{\text{х}_1}}{m_{\text{г}}}} \approx 70\ ^\circ\text{C}$$

(93) На прискорення вільного падіння на льодовій поверхні біля IceCube Lab впливає більша відстань до центру планети й додаткове гравітаційне притяжіння крижаного шару. На прискорення вільного падіння під обсерваторією біля скельних порід впливає менша відстань до центру планети, і спрямоване вгору тяжіння крижаного шару.

Вплив крижаного шару товщиною $h = 2820$ м, який тим не менше дуже тонкий у порівнянні з радіусом Землі, можна врахувати наступним чином. Відомо, що сферично-симетрична оболонка не створює гравітаційного поля всередині, точніше, там воно компенсується. Зате ззовні дає звичайний внесок у прискорення вільного падіння

$$\Delta g_0 = G\frac{\Delta m}{r^2} = G\frac{4\pi r^2 h\rho}{r^2} = 4\pi G\rho h.$$

Якщо розглянути невелику, майже плоску частину поверхні тонкої оболонки, то поряд з собою вона дає внесок у прискорення удвічі менший $\Delta g = \Delta g_0/2 = 2\pi G\rho h$. Логіка така: якщо ця частина настільки невелика за площею, що може вважатися майже пласкою, то вона притягує до себе близькі тіла з обох сторін однаково. Крім неї на тіла всередині і ззовні впливає вся інша сферична оболонки без цієї частини. Всередині повної сфери сили компенсуються, отже ззовні подвоюються. Поблизу невеликої майже пласкої частини внески від неї і від всієї іншої сфери (без неї) будуть однакові і дорівнюватимуть $\Delta g_0/2$. Антарктичний крижаний щит навколо IceCube може вважатися такою пласкою частиною. Густина льоду $\rho = 917$ кг/м^3.

Прискорення вільного падіння під льодом біля скельних порід

$$g_1 = G\frac{M}{R^2} - \Delta g = g - \Delta g,$$

де M – маса Землі, R – полярний радіус Землі, $g = 9{,}832$ м/с^2 – стандартне значення прискорення вільного падіння на полюсах.

Прискорення вільного падіння на поверхні льоду

$$g_2 = G\frac{M}{(R+h)^2} + \Delta g = \frac{g}{(1+h/R)^2} + \Delta g.$$

Різниця

$$g_1 - g_2 = g\left(1 - \frac{1}{(1+h/R)^2}\right) - 2\Delta g = 0{,}00655 \text{ м/с}^2$$

складає 0,067%.

Щоб відповісти на друге питання розглянемо точку на висоті y від скальних порід. Льодовий шар ділиться на дві частини: нижню, що створює спрямоване вниз додаткове прискорення $\Delta g_1 = 2\pi G\rho y$, і верхню, додаткове прискорення від якої $\Delta g_2 = 2\pi G\rho(h-y)$ спрямоване вгору. Отже:

$$g_y = \frac{g}{(1+y/R)^2} + \Delta g_1 - \Delta g_2 = \frac{g}{(1+y/R)^2} + 2\pi G\rho(2y-h).$$

Скористаємось малістю y/R у порівнянні з одиницею:

$$\frac{1}{(1+y/R)^2} = \frac{(1-y/R)^2}{(1-y^2/R^2)^2} \approx (1-y/R)^2 \approx 1 - 2\,y/R.$$

Тоді

$$g_y \approx g - 2\pi G\rho h + 2\left(2\pi G\rho - \frac{g}{R}\right)y$$

і, враховуючи, що

$$g = G\frac{M}{R^2}, \qquad M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0,$$

знаходимо вираз для прискорення в залежності від висоти y над скальною породою:

$$g_y \approx g - 2\pi G\rho h + 4\pi G\left(\rho - \frac{2}{3}\rho_0\right)y.$$

Якщо середня густина планети ρ_0 у півтора рази перевищує густину льоду, то вираз у дужках дорівнює нулю, і з високою точністю прискорення вільного падіння всередині шару льоду буде однаковим вздовж всієї його товщини.

(94) Перш за все зазначимо, що кутове відхилення ствола спричиняє зміну горизонтального напряму пострілу на малий кут β і зміну кута нахилу ствола на малий кут $\Delta\alpha$. Легко показати, що ці кути пов'язані співвідношенням $\Delta\alpha^2 + \beta^2 \le \varphi^2$; $\varphi = \frac{\pi}{360} \approx 8{,}73 \cdot 10^{-3}$ рад.

Горизонтальна дальність пострілу $L = \frac{(v_0+u)^2 \sin 2(\alpha+\Delta\alpha)}{g}$.

Тут $-\Delta v_0 \le u \le \Delta v_0$ — мале відхилення модуля початкової швидкості від заданого значення. Якщо позначити відстань до мішені L_0, то можна записати відхилення по дальності:

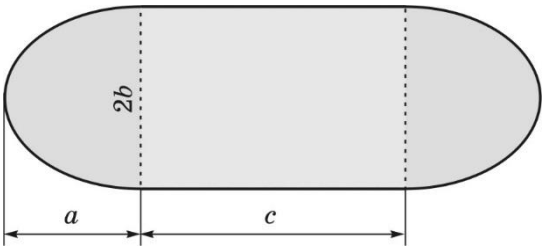
$$\Delta L = L - L_0 = L_0\left(\frac{2u}{v_0} + 2\operatorname{ctg}2\alpha\,\Delta\alpha\right).$$

Бокове відхилення $s_{\text{бок}} = L\beta \approx L_0\beta$.

Подивимося, як пов'язані ці два відхилення. Для цього виокремимо доданок, що містить u: $\Delta L - L_0\frac{2u}{v_0} = 2L_0\operatorname{ctg}2\alpha\,\Delta\alpha$.

Уважатимемо спочатку, що $u = 0$ (є тільки кутові відхилення ствола, а не відхилення початкової швидкості). Тоді маємо співвідношення $\left(\frac{\Delta L}{2L_0 \mathrm{ctg}2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{s_{\text{бок}}}{L_0}\right)^2 \le \varphi^2$. З нього видно: можлива ділянка падіння снаряду — еліпс, півосі якого $a = 2L_0\varphi|\mathrm{ctg}2\alpha|$ (вздовж лінії гармата — мішень) і $b = L_0\varphi$ (у боковому напрямі).

Якщо тепер врахувати, що $u \neq 0$, то шукана ділянка збільшується: уявімо, що наш еліпс можна «протягнути» на відстань $c = \frac{4\Delta v_0}{v_0} L_0$ вздовж лінії гармата — мішень. Це еквівалентно розрізанню еліпса навпіл і вставленню всередину прямокутника (див. рисунок)



Шукана площа є сумою площ еліпса та прямокутника:

$$S = \pi ab + 2bc = b(\pi a + 2c) = \varphi L_0^2 \left(2\pi\varphi|\mathrm{ctg}2\alpha| + \frac{8\Delta v_0}{v_0}\right).$$

Цю формулу можна записати у вигляді

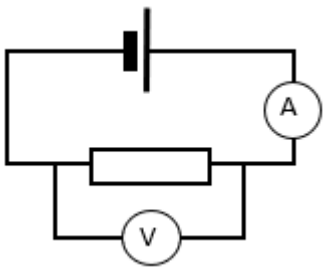
$$S = \frac{\varphi v_0^4}{g^2}\left(\frac{4\Delta v_0}{v_0} + \pi\varphi|\sin 4\alpha| - \frac{4\Delta v_0}{v_0}\cos 4\alpha\right)$$

У випадку $\alpha_1 = 60°$ маємо $L_0 = 21{,}65$ км, $S = 0{,}293$ км^2.

У випадку $\alpha_2 = 45°$ ситуація дещо особлива, адже $\sin 4\alpha_2 = 0$. За такого кута дальність пострілу максимальна, тому в першому порядку (за величиною u) зміна дальності дорівнює нулю. Можна було б визначити відхилення по довжині в другому порядку малості, проте воно дуже мале. Тому наша ділянка майже точно матиме форму прямокутника. У цьому випадку отримуємо $L_0 = 25$ км, $S = 0{,}218$ км^2.

Як бачимо, навіть за невеликих відхилень параметрів від розрахункових під загрозою виявляється чимала територія.

(95) Насамперед зазначимо, що учень не тільки був неуважним під час вимірювань, але й при діленні отриманих чисел, оскільки незрозуміло, як поряд зі значенням 3 Ом (30/10) у нього виникло 2,8 Ом. Точніше було б за нижню межу вказати значення 29/11 Ом ≈ 2,64 Ом.



Реальні прилади мають опір. Учень це ймовірно не враховував. Закон Ома для першого випадку має вигляд

$$\mathcal{E} = I_1\left(r + R_A + \frac{RR_V}{R+R_V}\right).$$

Показники вольтметра

$$U_1 = I_1\frac{RR_V}{R+R_V}.$$

Тому наївно розрахований опір

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{RR_V}{R+R_V} = \frac{R}{1+R/R_V} \tag{1}$$

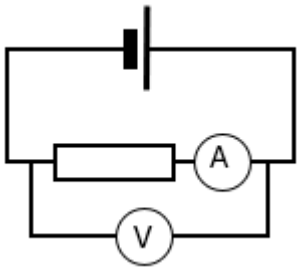
буде меншим за справжній опір R.

Перепишемо закон Ома для цього випадку у вигляді

$$\mathcal{E} - U_1 = I_1(r + R_A). \tag{2}$$

У другому випадку закон Ома

$$\mathcal{E} = I\left(r + \frac{(R+R_A)R_V}{R+R_A+R_V}\right).$$



Показники вольтметра і амперметра

$$U_2 = I\frac{(R+R_A)R_V}{R+R_A+R_V},$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R+R_A}.$$

Тому наївно розрахований опір у цьому випадку

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = R + R_A \tag{3}$$

буде більшим за справжній опір R. Отже формально учень виявися правий, коли вирішив, що справжній опір лежить між R_1 та R_2. Але не слід в таких випадках просто вгадувати, може й не поталанити. Також слід записувати які виміри до якої схеми відносяться. Оскільки другий випадок дає завищений наївний опір, а перший – занижений, то $U_1 = 29$ В, $I_1 = 11$ А, $U_2 = 30$ В і $I_2 = 10$ А.

Перепишемо закон Ома для другого випадку у вигляді

$$\mathcal{E} - U_2 = Ir = U_2\frac{R+R_A+R_V}{(R+R_A)R_V}r. \tag{4}$$

Розглянемо тепер **випадок а)**, коли є джерело сталої напруги, значення якої нам невідомо. Тоді $r = 0$, і в рівняннях (2), (4) слід позбутися $\mathcal{E}$:

$$U_2 - U_1 = I_1R_A.$$

Опір амперметра підставляємо з (3) і маємо:

$$R = \frac{U_2}{I_2} - \frac{U_2 - U_1}{I_1}.$$

Підставляючи числа з умови задачі, знаходимо опір резистора $R \approx 2{,}909$ Ом $\approx 2{,}9$ Ом.

Розглянемо **випадок б)**, коли є батарея з відомою ЕРС. Тепер в рівняннях (2), (4) слід позбутися невідомого внутрішнього опору батареї:

$$\mathcal{E} - U_2 = U_2\frac{R+R_A+R_V}{(R+R_A)R_V}\left(\frac{\mathcal{E}-U_1}{I_1} - R_A\right). \tag{5}$$

Опори вольтметра і амперметра виражаємо з рівнянь (1) і (3)

$$\frac{1}{R_V} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R}, \qquad R_A = R_2 - R$$

і підставляємо у (5):

$$\frac{\mathcal{E}-U_2}{U_2} = \left(\frac{I_1}{U_1} + \frac{I_2}{U_2} - \frac{1}{R}\right)\left(\frac{\mathcal{E}-U_1}{I_1} - \frac{U_2}{I_2} + R\right).$$

Останнє рівняння у загальному вигляді є доволі громіздким квадратним рівнянням відносно R. Підставляємо числові значення нашої задачі і отримуємо:
1,316 Ом і 2,908 Ом. Якщо друге значення дуже близьке до отриманого раніше, то перше визиває подив. У будь-якому разі задача містить проміжні числа, що відповідають внутрішньому опору батареї, опорам амперметру і вольтметру, які при розв'язанні були вилучені з системи рівнянь, але це не означає, що вони можуть бути будь-якими. Завжди при можливості, не кажучи вже про підозру як у нашому випадку, їх слід перевіряти. Відразу й знаходимо фізично неприйнятне значення для опору вольтметру у випадку R = 1,316 Ом:

$$\frac{1}{R_V} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R} < 0.$$

Від'ємне значення має і внутрішній опір батареї. Якщо ж R = 2,908 Ом, від'ємних чисел не виникає, наприклад, внутрішній опір батареї 0,181 Ом. І хоча невелике значення опору вольтметра (28 Ом) дещо напружує, віднесемо це до специфіки підбору умов у задачі або до саморобних приладів, якими користувався учень.
Отже, в обох випадках і **а)**, і **б)** опір резистора приблизно дорівнює 2,91 Ом. Звісно, така точність нічим не обгрунтована, не враховані похибки при вимірюванні. Ідея задачі в іншому – використовуючи різні способи вимірювання, обійти неідеальність самих вимірювальних приладів.

(96) 1) Перший випадок.

Вся потужність двигуна йде на кінетичну енергію повітря, що відкидається вниз:

$$P = \frac{\mu u^2}{2},$$

де μ – маса повітря, що відкидається лопатями за одиницю часу.

З Другого закону Ньютона зміна імпульсу повітря дорівнює силі тяжіння гвинтокрила:

$$\mu u = mg.$$

Остаточно отримуємо класичний результат:

$$P = \frac{mgu}{2}. \qquad (1)$$

2) Другий випадок.

Вся потужність двигуна тепер йде на роботу проти сили тяжіння, сили опору та для надання кінетичної енергії повітрю.

$$2P = mgV_1 + kV_1{}^3 + \frac{\mu'(u')^2}{2}. \qquad (2)$$

З Другого закону Ньютона зміна імпульсу повітря дорівнює силі тяжіння гвинтокрила та силі опору його руху:

$$\mu' u' = mg + kV_1{}^2. \qquad (3)$$

Швидкість повітря відносно Землі:

$$u' = u - V_1. \qquad (4)$$

3) Третій випадок.

Для даного випадку все аналогічно другому випадку.

$$4P = mgV_2 + k{V_2}^3 + \frac{\mu''(u'')^2}{2}. \quad (5)$$

$$\mu''u'' = mg + k{V_2}^2. \quad (6)$$

$$u'' = u - V_2. \quad (7)$$

Об'єднуємо рівняння (1-7) і отримуємо кубічне рівняння:

$${V_2}^3 + {V_2}^2 u + V_2\left({V_1}^2\frac{V_1+u}{u-V_1}\right) - 3u{V_1}^2\frac{V_1+u}{u-V_1} = 0$$

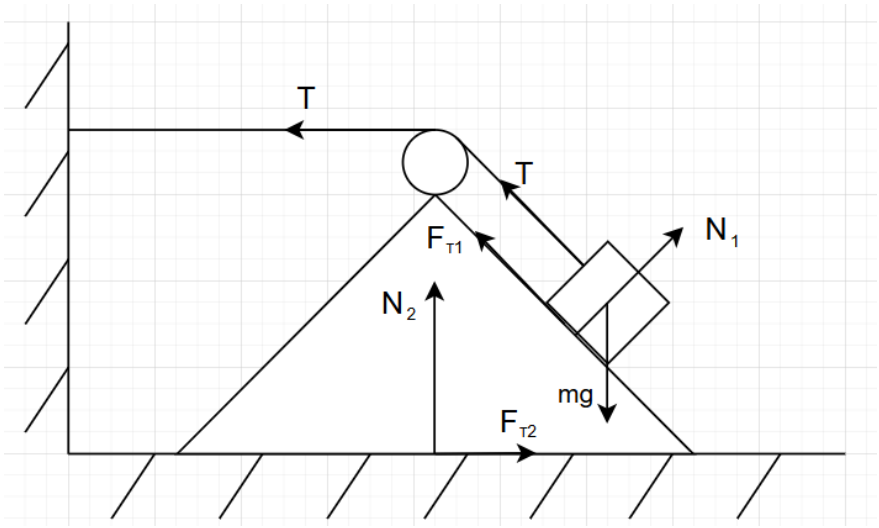
Розв'язки знайдемо чисельно. У даного кубічного рівняння за даних в умові параметрів є лише один фізично адекватний розв'язок: $V_2 \approx 3.4$ м/с.

P.S. Цю задачу можна розв'язати й у системі відліку із гелікоптером. Формули (2) та (5) в такому разі отрумуються з тих міркувань, що у системі відліку із гелікоптером потужність двигуна йде на зміну швидкості повітря. В цій системі відліку на гелікоптер зверху налітає повітря із швидкістю гелікоптера в лабораторній системі, а відлітає вниз із швидкістю u. Наприклад, для формули (2):

$$2P = \frac{\mu'(u)^2}{2} - \frac{\mu'(V_1)^2}{2}. \quad (2')$$

Формули (3) та (4) не втрачають актуальності. Якщо підставити μ' з (3) в $(2')$, то після перетворення отримаємо формулу (2).

(97) Нарисуємо деякі сили, що діють на складові системи.



З умови нерозтяжності нитки очевидно, що якщо призма знаходиться на грані проковзування, то й тіло теж на грані проковзування, адже в цей момент починається рівномірний рух, а він можливий лише за умови проковзування й тіла, й призми.

Дві єдині сили, що діють по горизонталі на систему призма+тіло+блок+«нитка від блоку до тіла», це сила тертя між призмою та підлогою та горизонтальна сила натягу T, тому $T = F_{т2}$.

Тоді запишемо систему рівнянь для рівноваги системи на межі проковзування:

$$T + F_{т1} = mg * \cos(45°) = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$
$$T = F_{т2}$$
$$F_{т1} = \mu_1 \frac{mg}{\sqrt{2}}$$
$$F_{т2} = \mu_2 N_2$$

При цьому $N_2 = (m + M)g$, адже ніяких вертикальних зовнішніх сил на систему призма+тіло+блок+«нитка від блоку до тіла» окрім сил тяжіння та сили нормальної реакції опори N_2 не діє. З вищенаведеного легко отримати

$$\mu_1 \frac{mg}{\sqrt{2}} = \frac{mg}{\sqrt{2}} - \mu_2(m + M)g.$$

Якщо проковзування немає, то сума обох максимальних значень сил тертя на двох поверхнях більша за $\frac{mg}{\sqrt{2}}$, адже $T + F_{т1} = F_{т2} + F_{т1}$ має бути рівним $\frac{mg}{\sqrt{2}}$ (вистачає менших сил тертя щоб втримати тіло від ковзання). Тому,

$$\mu_1 \frac{mg}{\sqrt{2}} + \mu_2(m + M)g \geq \frac{mg}{\sqrt{2}},$$

або, переписуючи отримуємо відповідь на питання задачі

$$\mu_2(m + M) \geq \frac{m}{\sqrt{2}}(1 - \mu_1).$$

Цікаво, що при $\mu_1 \geq 1$, μ_2 може бути будь-яка (від 0 до ∞). Так відбувається через те, що похилі поверхні призми нахилені на 45°, і за умови відсутності сили натягу Т тіло завжди буде утримано від падіння його силою тертя: $mg * \cos(45°) \leq \mu_1 N_1 = \mu_1 mg * \cos(45°)$. В цьому випадку сила тертя між підлогою та призмою взагалі відсутня, адже $T = F_{т2}$. Це значить, що μ_2 може бути будь-яка, бо сила натягу нульова, а значить $F_{т2} = 0$.

Остаточно, відповідь задається нерівністю: $\mu_2(m + M) \geq \frac{m}{\sqrt{2}}(1 - \mu_1)$.

Примітка. Математично можливим є й інший варіант рівноваги, коли сила тертя $F_{т1}$ спрямована вниз по бічній поверхні призми. Трошки перепишемо рівняння, які вже отримували вище

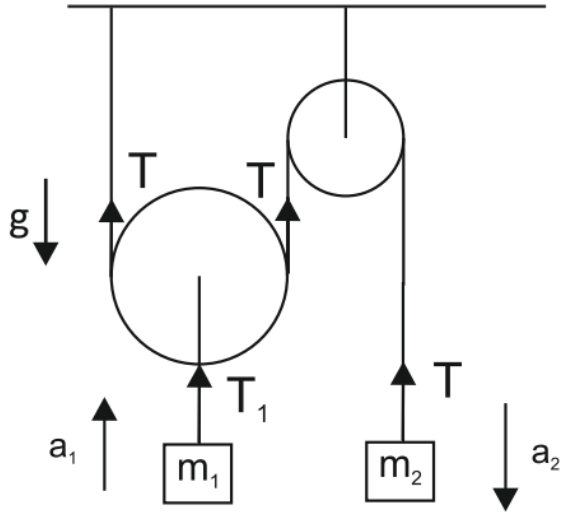
$$T - F_{т1} = mg * \cos(45°) = \frac{mg}{\sqrt{2}}$$
$$T = F_{т2}$$
$$F_{т1} \leq \mu_1 \frac{mg}{\sqrt{2}}$$
$$F_{т2} \leq \mu_2 N_2 = \mu_2(m + M)g.$$

Легко бачити, що тоді $F_{т2} = T$ може існувати лише в діапазоні від $\frac{mg}{\sqrt{2}}$ до $\frac{mg}{\sqrt{2}} + \mu_1 \frac{mg}{\sqrt{2}}$. При цьому $F_{т2} \leq \mu_2(m + M)g$. Тут нам вигідніше за все, щоб сили тертя $F_{т1}$ взагалі не було, тоді ми зможемо отримати найбільш «лояльну» нерівність $\mu_2(m + M)g \geq \frac{mg}{\sqrt{2}}$. Але ця нерівність сильніша за ту, яку ми отримали вище і співпадає з нею лише якщо $\mu_1 = 0$. Такий варіант рівноваги є цікавим, але потребує відходу від ідеалізованої моделі нерозтяжної нитки і абсолютно твердих

поверхонь призми й тіла. Такий варіант можна було б тоді реалізувати попереднім сильним натягуванням нитки, після якого можна покласти тіло на призму, тоді відбудуться невеликі додаткові деформації нитки і твердих поверхонь і, в теорії, можна отримати силу тертя $F_{т1}$, що спрямована вниз. Практична реалізація цієї ідеї із збереженням працездатності закону сухого тертя викликає певні питання. Такий підхід притаманний системам, що часто називаються статично невизначеним. Це значить, що в нашому випадку (в теорії!) одному набору параметрів (маси та коефіцієнти тертя) може відповідати нескінченна кількість положень рівноваги, які будуть суттєво відрізнятись силою натягу нитки та значеннями сил тертя. Тобто, початкові умови того, як ця система була встановлена (як натягувалась нитка, які були деформації на контактах тіл) будуть сильно впливати на значення сил. Проте навіть такий підхід, як ми переконались, не змінює відповіді на дану задачу.

(98) а) Запишемо другий закон Ньютона для обох мас.

$$\begin{cases} -m_1 g + 2T = m_1 a_1 \\ -T + m_2 g = m_2 a_2 \end{cases}$$



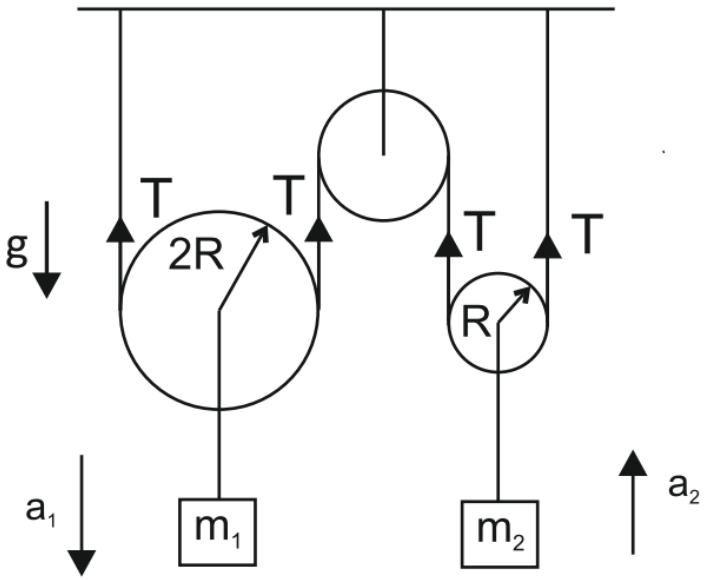
Якщо правий вантаж переміщується вниз на x, то лівий рухомий блок (а отже і лівий вантаж) підіймаються вверх на x/2, щоб загальна довжина мотузки лишалась сталою. Отже, $a_2 = 2a_1$.

Тоді з рівнянь Ньютона отримуємо:

$$a_1 = \frac{2m_2 - m_1}{m_1 + 4m_2} g$$

б) Запишемо Другий закон Ньютона для обох мас.

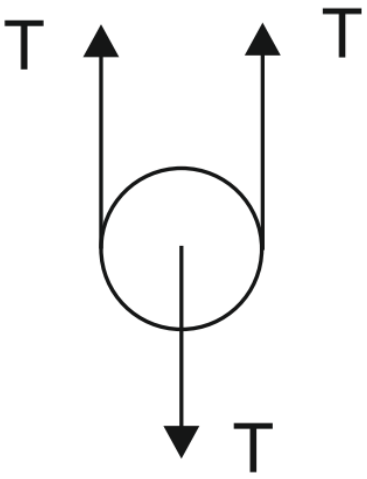
$$\begin{cases} m_1 g - 2T = m_1 a_1 \\ 2T - m_2 g = m_2 a_2 \end{cases}$$



Відстань, на яку вниз зміститься лівий рухомий блок, дорівнює відстані, на яку зміститься правий, адже довжина нитки, яку витягне лівий блок вниз це 2x, де x – зміщення лівого блока, а зменшення довжини нитки справа від центрального нерухомого блоку це 2y, де y – зміщення правого блоку. Ці довжини мають бути однакові, а значить x=y й $a_1 = a_2$, і цей результат не залежить від радіусів блоків.

В результаті з законів Ньютона отримуємо: $a_1 = a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$.

в) Цю блокову систему можна розв’язати дуже швидко, якщо помітити, що елементом даної систем є блок, що зображений справа.



Нитка нічого не важить, тертя нема, а значить сила натягу нитки всюди однакова. Це значить, що на блок діє рівнодійна T вверх. Але блок безмасовий (або має дуже малу масу), отже його прискорення (й переміщення за кінцеві проміжки часу) буде прямувати до нескінченності, якщо сила натягу T не дорівнює строго нуль. Але «природа не любить нескінченностей» і єдиний варіант отримати розумні значення прискорень блоків це покласти силу натягу T=0. В такому випадку прискорення всім мас у системі буде дорівнювати g, адже на них діятимуть лише сили тяжіння.

(99) Пункт а.

Для того, щоб пробірка залишалась в рівновазі в вертикальному положенні, необхідно і достатньо, щоб:

- сила Архімеда повинна врівноважувати повну масу пробірки і рідини всередині
- при горизонтальному відхиленні виникав момент сил, що повертає пробірку в вертикальне положення (див. рис.1)

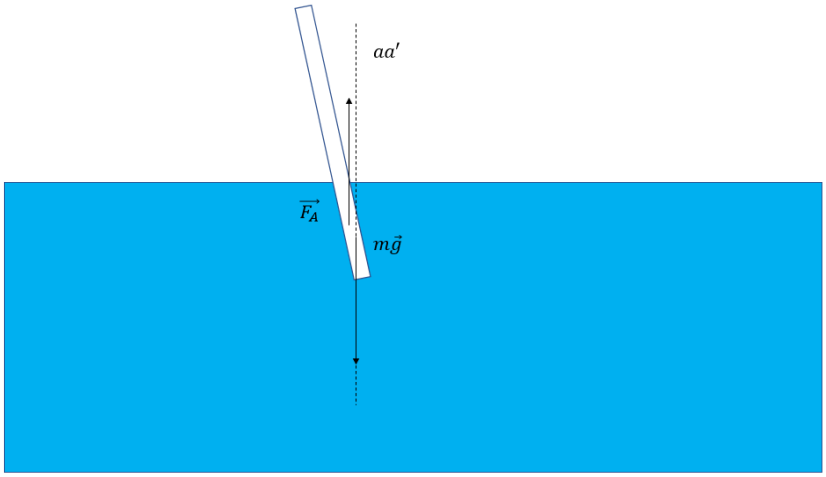


Рис.1. Повертаючий момент сил

Умова рівноваги в проекції на вертикальну вісь:

$$F_A - m_\Sigma g = 0$$

$$m_\Sigma g = mg + \rho_\text{р} g S_0 h_\text{р}$$

$$F_A = \rho_\text{в} g S_0 h_\text{занурення}$$

Зрозуміло, що максимально можливо висота рідини в пробірці буде досягатися при повному її зануренні в воду(див. рис.2) ($h_\text{занурення} = L$).

Тоді матимемо верхню граничну точку $mg + \rho_{\text{р}} g S_0 h_{max} = \rho_{\text{в}} g S_0 L$

Звідки $h_{max} = \frac{\rho_{\text{в}} S_0 L - m}{\rho_{\text{р}} S_0} = 18$ см

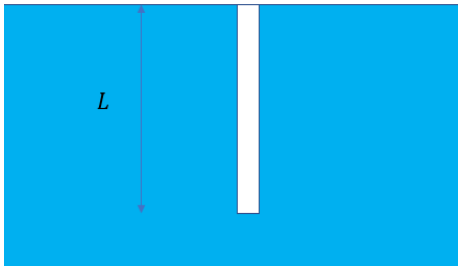


Рис.2 Повне занурення в воду

Для стійкої вертикальної рівноваги, необхідно, щоб точка прикладення сили Архімеда (геометричний центр зануреної частини) була вище, ніж точка прикладення сумарної сили тяжіння (центр мас). Тоді при малому горизонтальному відхиленні буде з'являтися повертаючий момент сил.(рис.1)

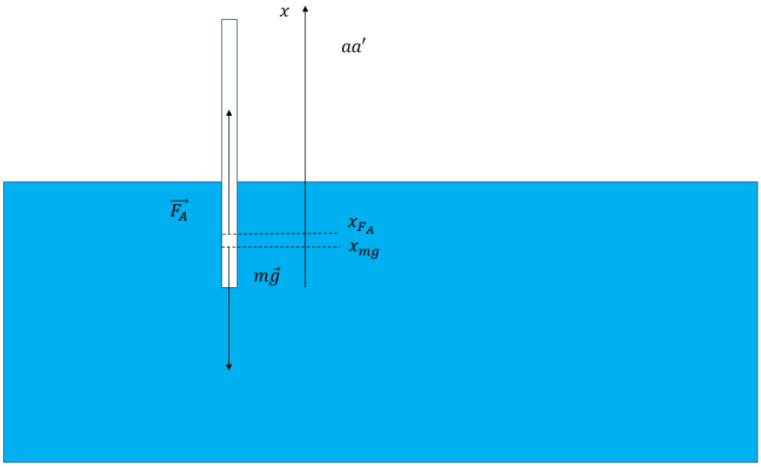


Рис.3. Точки прикладення сил

З рис.3 видно, що стійка вертикальна рівновага буде при $x_{F_A} > x_{mg}$

$$x_{F_A} = \frac{h_{\text{занурене}}}{2}$$

Точку прикладення сили тяжіння знайдемо за формулою для центра мас:

$$x_{mg} = \frac{\frac{mL}{2} + \frac{\rho_{\text{р}} h_{\text{р}}^2 S_0}{2}}{m + \rho_{\text{р}} h_{\text{р}} S_0}$$

Глибину занурення знайдемо з умови рівноваги:

$$h_{\text{занурене}} = \frac{mg + \rho_{\text{р}} g S_0 h_{\text{р}}}{\rho_{\text{в}} g S_0}$$

Звідси маємо нерівність $\frac{mg+\rho_{\text{р}}gS_0h_{\text{р}}}{2\rho_{\text{в}}gS_0} > \frac{\frac{mL}{2}+\frac{\rho_{\text{р}}h_{\text{р}}^2S_0}{2}}{m+\rho_{\text{р}}h_{\text{р}}S_0}$, розв'язавши яку отримаємо нижню границю для $h_{\text{р}}$: $h_{\text{р}} > 5.7$ см

Отже можливий діапазон для висоти рідини в пробірці: $h \in (5.7,18]$ см.

Пункт б.

При вертикальному відхиленні від положення рівноваги з'являється нескомпенсована повертаюча сила Архимеда.

$$F_{\text{пов}} = \Delta F_A = -\rho_{\text{в}}gS_0\Delta x = -kx$$

Звідки легко знайти період за формулою $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_\Sigma}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m+\rho_{\text{р}}hS_0}{\rho_{\text{в}}gS_0}}$ звідки

$$h = \frac{\frac{T^2}{4\pi^2}\rho_{\text{в}}gS_0 - m}{\rho_{\text{р}}S_0} = 15{,}5 \text{ см}$$

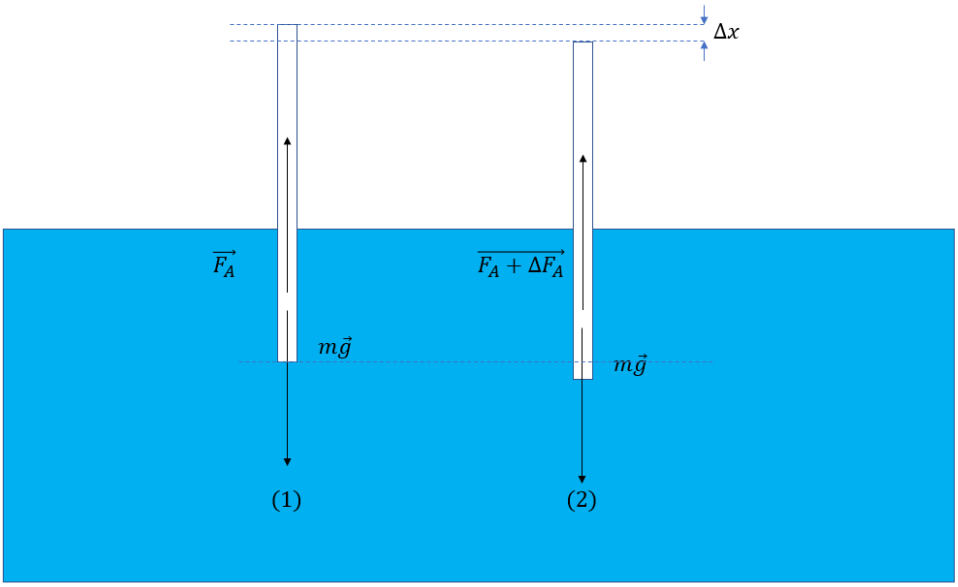


Рис.4 Відхилення від положення рівноваги

Пункт в.

Внаслідок додаткового занурення пробірки на величину x, рівень води у посудині підіймається на y. Так як густина води постійна, то

$S_0x = y(S - S_0)$,

$$v_{\text{тіла}}S_0 = v_{\text{води}}(S - S_0)$$

При зміщенні пробірки (тіла) вниз, порція води з її низу збільшує свою потенційну енергію, розподіляючись по поверхні води площею $(S - S_0)$.

Знайдемо зміну потенційної енергії води відносно положення рівноваги та загальну потенціальну енергію системи:

$$\Delta W_{\text{пот.води}} = (\rho S_0 x)g\left(L + \frac{x+y}{2}\right)$$

$$\Delta W_{\text{тіла}} = -Mgx = -\rho_{\text{в}} g S_0 L x$$

$$\Delta W_{\text{потенц.загальне}} = \rho g S_0 x \left(L + \frac{x+y}{2} - L\right) = \frac{\rho g S_0 x}{2}\left(x + \frac{S_0 x}{S - S_0}\right) = \frac{\rho_{\text{в}} g S_0 S x^2}{2(S - S_0)}$$

Та кінетичну енергію тіла та води навколо неї:

$$W_{\text{кін.води}} = \frac{\rho(S - S_0) L {\upsilon_{\text{води}}}^2}{2} = \frac{\rho(S - S_0) L}{2} \frac{S_0^2 {\upsilon_{\text{тіла}}}^2}{(S - S_0)^2} = \frac{\rho h S_0^2}{2(S - S_0)} {\upsilon_{\text{тіла}}}^2$$

$$W_{\text{кін.загальн}} = \frac{\rho S_0 {\upsilon_{\text{тіла}}}^2 L}{2}\left(1 + \frac{S_0}{S - S_0}\right) = \frac{\rho S S_0 {\upsilon_{\text{тіла}}}^2 L}{2(S - S_0)}$$

З виразу для повної енергії системи :

$$W = \Delta W_{\text{пот}} + \Delta W_{\text{кін}} = \frac{\left(\frac{\rho_{\text{в}} g S_0 S}{S - S_0}\right)}{2} x^2 + \frac{\left(\frac{\rho S S_0 L}{S - S_0}\right)}{2} {\upsilon_{\text{тіла}}}^2$$

Легко отримуємо :

$$\frac{\rho_{\text{в}} g S_0 S}{S - S_0} = k;\ \frac{\rho S S_0 L}{S - S_0} = m$$

Тоді період коливань системи:

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{\rho S S_0 L}{S - S_0}}{\frac{\rho_{\text{в}} g S_0 S}{S - S_0}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$=1,2 с.

Як бачимо, період малих вертикальних коливань не зміниться.

Пункт г.

Розглянемо пробірку у стані рівноваги в посудині, що рухається з прискоренням. Зрозуміло, що значення самої сили Архімеда зміниться внаслідок перерозподілу тиску всередині води при прискореному русі.

За другим законом Ньютона: $\rho(g + a) V\text{занур} - m_{\Sigma} g = m_{\Sigma} a$

Звідси бачимо, що об'єм та глибина зануреної частини не зміниться. Надав пробірці невелике зміщення у вертикальному напрямку і записав другий закон Ньютона, легко довести, що коливання будуть еквівалентні тим, що були у попередньому пункти, але зі збільшеним у 1,5 рази прискоренням вільного падіння. Тобто: $T_1 = T/\sqrt{1{,}5} \approx 0{,}98$ с.

(100) Будемо вважати, що опір, значення якого приховане плямою, приєднаний до крайніх клем амперметру.
Тоді при вимірі до 3 А, маємо еквіваленту схему 1, а при вимірі до 0,6 А – еквіваленту схему 2 (відомі опори на схемах вказані в омах). Оскільки стрілка обидва рази відхиляється на однаковий кут, струм i через вимірювальну частину амперметра в обох випадках однаковий. Маємо систему рівнянь (в SI):

$$\begin{cases} i \cdot 75{,}44 = (3 - i) r, \\ i \cdot 75 = (0{,}6 - i)(r + 0{,}44), \end{cases}$$

розв'язуючи яку знаходимо $r = 0{,}11$ Ом, $i \approx 4{,}368$ мА.

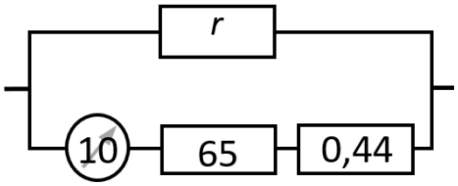


Рис.1 Схема 1

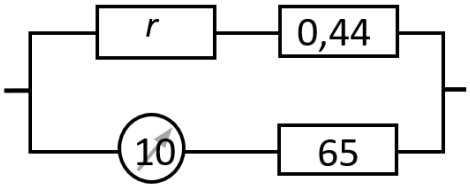


Рис.2. Схема 2

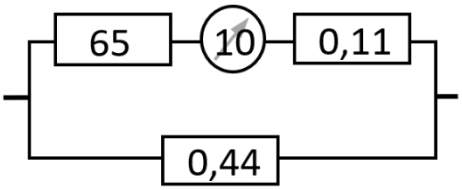


Рис.3. Схема 3



Рис.4. Фрагменти фото амперметра

Як бачимо на фрагментах фото, опір знайдено вірно.

Якщо амперметр увімкнути у коло червоними клемами, матимемо третю зверху схему. Загальний струм I_3 за максимального відхилення стрілки буде при правильній полярності («–» на клему 3А) і дорівнюватиме

$$I_3 = i + \frac{75{,}11}{0{,}44} i = 0{,}75 \text{ А}.$$

Взагалі неважко показати, що три струми 3А, 0,6А і 0,75 А відносяться один до одного як обернені додаткові опори 1/0,11 до 1/(0,11+0,44) і до 1/0,44, або 1:1/5:1/4. Отже, якщо очікується струм до 0,75 А доцільно для більшої точності використовувати нестандартне підключення амперметру до червоних клем, а покази за шкалою 3 А ділити на 4.

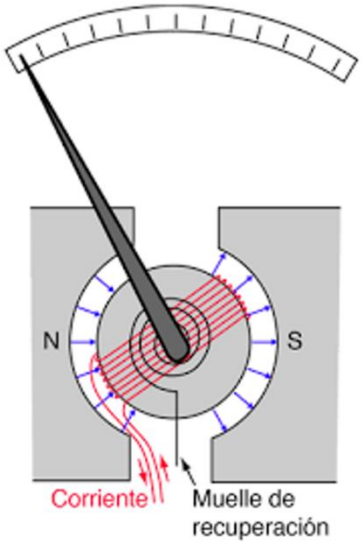


Рис.5. Магнітне поле в амперметрі

Дамо відповідь на питання 3. Якби рамка з витками оберталася в однорідному магнітному полі, утвореному між полюсами магніту, шкала приладу не була б однорідною, оскільки момент сили, що діє на рамку у такому полі, змінювався б не тільки за рахунок зміни сили струму, але й за рахунок зміни кута, що утворює рамка з лініями магнітної індукції. Щоб обертальний момент залежав тільки від сили струму, магнітам надають спеціальної округлої форми поблизу рамки, а всередину неї вставляють циліндр зі спеціальної сталі (феромагнетик). Тоді у невеликому зазорі між магнітом і осердям, яке також набуває магнітних властивостей, встановлюється однорідне у радіальному напрямку магнітне поле (див. Рис. 5), і момент сил на рамку у певних межах не залежить вже від її геометричної орієнтації, поки вона знаходиться у цьому полі. Тому поворот стрілки зазвичай не перевищує 90°. Саме цієї помилки припустився художник на Рис.7.6 умови задачі. При повороті стрілки від 0 до 5 рамка вийде з безпосередньої зони магнітів і ніякої однорідності шкали не буде.

Зовсім інша ситуація на останньому рисунку з зображенням радіально розташованих ліній магнітного поля.

Відповідь на останнє питання знайдемо, дорівнявши моменти сил зі сторони магнітного поля і пружин при крайньому відхиленні стрілки китайського амперметру:

$$NiBa^2 = k\varphi,$$

де сторона квадрату a виражається через довжину дроту l: $a = l/(4N)$, N – кількість витків. Довжину дроту, у свою чергу, виражаємо через опір вимірювальної частини амперметра $l = RS/\rho$. Нарешті, кут φ дорівнює ¾ від трохи меншого за 90° ($\pi/2$ у радіанах) кута, як можна побачити з рисунку з нахиленою від нас шкалою на Рис. 6 (нахил підтверджує нахил шурупів кріплення). Тобто, $\varphi < \frac{3}{8}\pi$. Для оцінки будемо вважати, що $\varphi \approx \frac{3}{9}\pi = \frac{\pi}{3}$. Перевіримо спочатку на реалістичність розміри квадратної рамки

$$a = RS/(4N\rho) = 25/17 \text{ см} \approx 1{,}5 \text{ см}.$$

Знайдемо коефіцієнт пружності пружин:

$k \approx 9$ мкН · м/рад. Пружин дві, отже у кожної пружини коефіцієнт пружності вдвічі менший.



Рис.6. Кут повороту стрілки

(101) а) В умові сказано, що зображення точок чітко розглядається оком людини для випромінення 100 нм. Це значить, що зображення цих точок з'являється чітко на сітківці (див. фіолетові проміні на рисунку; чорні проміні є спільними для всіх променів спектру, в якому бачить наша людина).

Отже, з формули тонкої лінзи маємо:

$$D_{100} = \frac{1}{F_{100}} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f_{\text{ока}}}, \qquad (1)$$

де для двоопуклої симетричної тонкої лінзи:

$$D_{100} = \frac{1}{F_{100}} = \frac{2(n_{100} - 1)}{R}, \qquad (2)$$

n_{100} – коефіцієнт заломлення матеріалу кришталика для хвиль довжиною 100 нм, R – радіус кривини обох поверхонь кришталика.

Тепер розглянемо хвилі з іншого краю спектру, в якому бачить наша людина, - 750 нм. Для того, щоб зображення двох точок почали зливатись фокус для 750 нм має знаходитись прямо на сітківці. В такому випадку зображення кожної точки будуть розмитими на сітківці та зіллються в точці перетину сітківки і головної оптичної вісі кришталика. Це стає очевидним з рисунку (важливо розуміти, що проміні від нижньої точки будуть йти абсолютно аналогічно у верхній напівплощині).

Отже,

$$F_{750} = f_{\text{ока}}, \qquad (3)$$

а

$$D_{750} = \frac{1}{F_{750}} = \frac{2(n_{750} - 1)}{R}. \quad (4)$$

З рівнянь (1-4) отримуємо, що відстань, на якій дві точки починають зливатись, дорівнює:

$$d = \frac{f_{\text{ока}}}{\frac{n_{100} - 1}{n_{750} - 1} - 1}. \quad (5)$$

Тепер залишається лише отримати значення коефіцієнтів заломлення n_{100} та n_{750}. Для цього спочатку знаходимо коефіцієнти a та b з формули в примітці, розв'язуючи систему рівнянь відносно a та b:

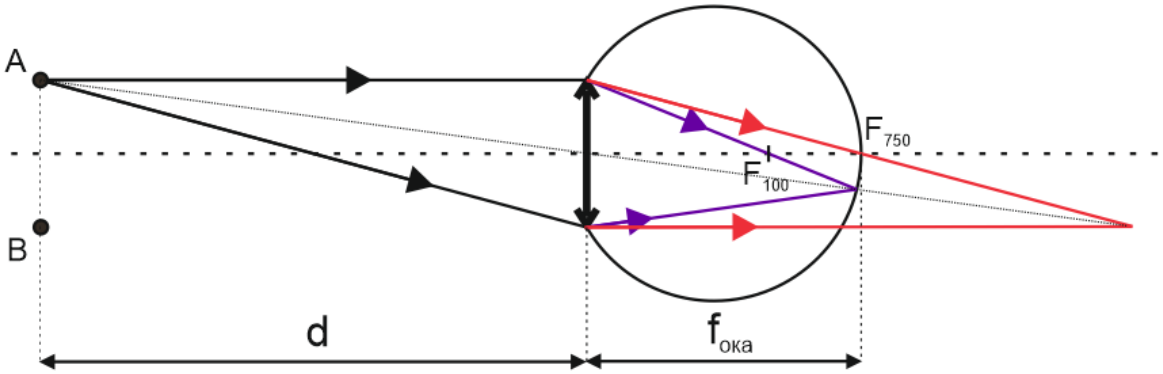
$$\begin{cases} n_1^2 = a + \frac{b}{\lambda_1^2}, \\ n_2^2 = a + \frac{b}{\lambda_2^2}. \end{cases}$$

Тепер знаючи коефіцієнти a та b отримуємо значення показників заломлення в числах:

$$n_{100} = 1.23004, n_{750} = 1.21990.$$

Підставляємо ці показники заломлення в рівняння (5) та отримуємо відповідь на перше завдання в задачі:

$$d = 52.0 \text{ см}.$$



б) Тепер давайте поміркуємо добрим чи поганим є результат, який ми отримали.

У відсутності дисперсії максимальна відстань, з якої людина буде розрізняти дві точки, що віддалені одна від одної на відстань 4 мм (діаметр зіниці), дорівнює

$$d_{\text{розд}} = \frac{h}{\varphi} \approx 9.2 \text{ м},$$

де h = 4 мм – відстань між точками, $\varphi = 1.5\frac{\pi}{60\times180}$ – кутова роздільна здатність в радіанах.

Але дисперсія у випадку діапазону хвиль від 100 нм до 750 нм, як ми з'ясували вище, обмежує максимальну дальність розрізнення цих точок до d ≈ 0.5 м.

В той же час дисперсія у випадку діапазону хвиль від 400 нм до 750 нм, що легко отримати з формули (5) замінюючи n_{100} на n_{400} (в умові це n_1), обмежує дальність розрізнення цих точок до d ≈ 11.5 м.

Тобто, у випадку нашого звичного діапазону, дисперсія впливає на наш зір не дуже сильно, адже його більше обмежують інші фактори (напр. роздільна здатність сітківки). Проте, з додаванням ультрафіолетового діапазону дисперсія починає грати значно більшу роль і дуже сильно обмежує дальність зору для розглядання малих предметів.

Великі предмети для людини з таким «суперзором», звісно ж, не будуть зливатись, проте сильно втратять у чіткості, адже кожна точка тіла буде відображатись на сітківці великою плямою, не залежно від того, на чітке сприйняття якої довжини хвилі з усього діапазону буде налаштоване око.

P.S. Звісно ж, такий зір на Землі здебільшого не має користі й через інші причини, які ми в нашій моделі не враховували:

- інтенсивність випромінення ультрафіолетового діапазону більшістю оточуючих предметів є дуже невеликою, а у сітківки є енергетичний поріг спрацьовування;

- людське око зі зрозумілих причин налаштоване щоб найкраще бачити хвилі біля 555 нм, а «крайові» довжини хвиль, за тих самих інтенсивностей, сприймаються значно слабше, отже, за логікою, навіть якщо б ми і могли в теорії бачити ультрафіолетовий діапазон, то око б його майже не сприймало порівняно із видимим спектром.

(102) Зрозуміло, що для обробки експериментальних даних можна використовувати різні методи. Та всі вони дають відповіді з деякою похибкою.
Розглянемо спочатку процес охолодження рідини. Для зручності проведення аналізу наведених в умові графіків спочатку отримаємо теоретичну залежність, яку зручно буде аналізувати.
Прирівняємо модуль зменшення внутрішньої енергії води ($\Delta Q_{\text{ох}} = cm\Delta t$, де Δt – зміна температури води, c – питома теплоємність води, m – маса води) з кількістю теплоти, втраченої внаслідок теплопередачі ($\Delta Q_{\text{втрат}} = -\alpha S \Delta T \Delta\tau = -\alpha S(T - T_0)\Delta\tau$, де α – коефіцієнт пропорційності теплових втрат, S – площа бокової поверхні води, T – поточна температура води, T_0 - температура навколишнього середовища, $\Delta\tau$ – проміжок часу.).

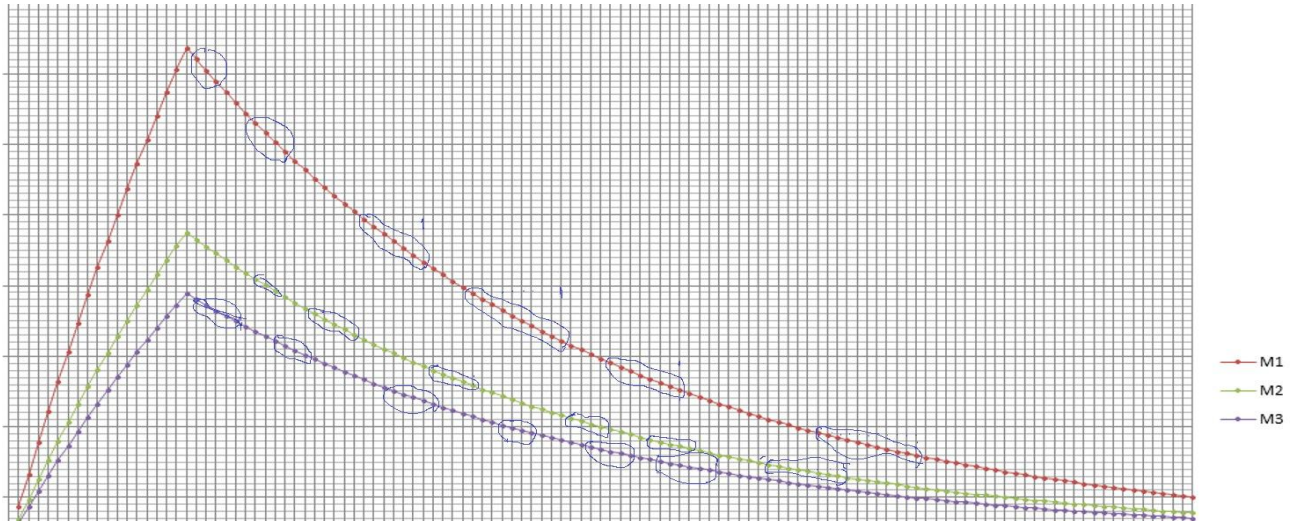
Знайдемо S через масу води. $m = \rho\pi R^2 h,\ S = 2\pi Rh, => S = \frac{2m}{\rho R}$

$\Delta Q_{\text{ох}} = \Delta Q_{\text{втрат}} => cm\Delta t = -\alpha\frac{2m}{\rho R}(T - T_0)\Delta\tau$

Як результат маємо:

$$\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = -\alpha\frac{2}{\rho Rc}T + \alpha\frac{2}{\rho Rc}T_0$$

Використовуючи графік, ми можемо перебудувати залежність в вище показаному вигляді, знаходячи значення $\frac{\Delta t}{\Delta\tau}$ на невеликих проміжках і ставити у відповідність середнє значення температури води на цьому невеликому проміжку.



На рисунку олівцем виділили проміжки, на яких точки чітко лягали на сітку, відповідно ці дані(з вказаними в умові допущеннями і критеріями відбору) можна використовувати для побудови вказаної нами залежності.
Маємо наступні результати:

Для маси m_1:

$\frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{°C}{c}$	-0.12	-0.1	-0.08	-0.06	-0.04	-0.03
$T, °C$	72	66	57	51	43	39

Для маси m_2:

$\frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{°C}{c}$	-0.1	-0.08	-0.05	-0.03	-0.025	-0.025
$T, °C$	60	55	46	41	38	34

Для маси m_3:

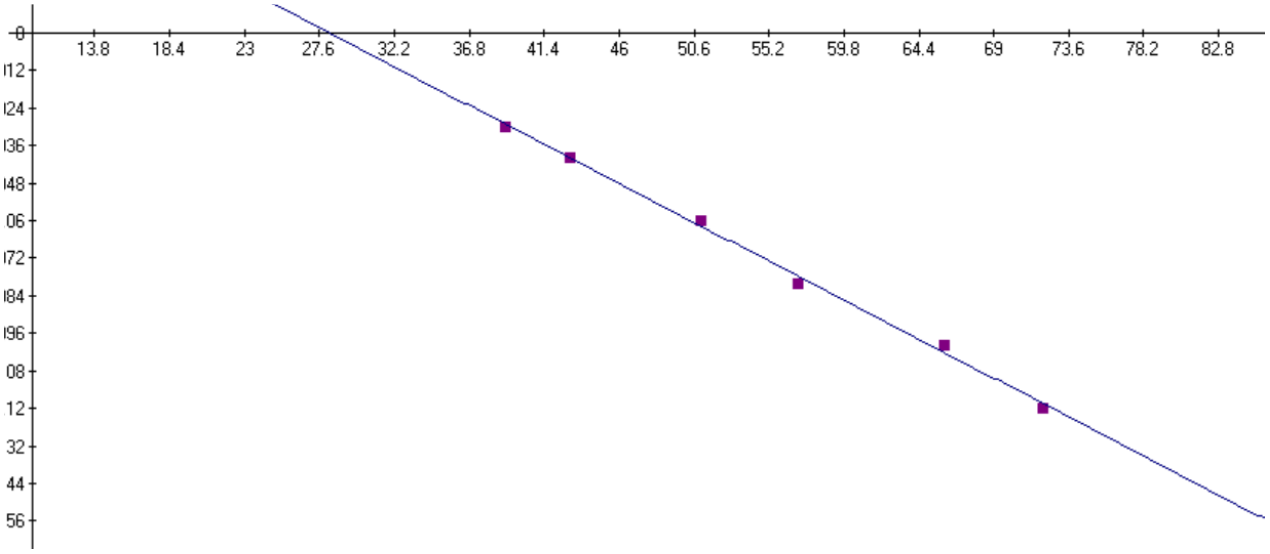
$\frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{°C}{c}$	-0.08	-0.07	-0.05	-0.03	-0.025	-0.02
$T, °C$	57	51	44	40	37	35

Використавши метод найменших квадратів, або побудувавши графік ми можемо апроксимувати точки до прямої.
Для першої маси:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = -\alpha \frac{2}{\rho R c} T + \alpha \frac{2}{\rho R c} T_0$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = -0.0027T + 0.076$$

Звідси: $a = \alpha \frac{2}{\rho R c} = 0.0027, b = \alpha \frac{2}{\rho R c} T_0 = 0.076$ і ми отримуємо: $T_{01} = 28.1\ °C, \alpha_1 = 570 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\ °C}$.



Аналогічно можна порахувати і для другої, третьої маси. Отримуємо для другої маси:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = -0.0031T + 0.089$$

Звідки: $T_{02} = 28.7\,°C, \alpha_2 = 650\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\,°C}$

Для третьої маси:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = -0.0029T + 0.082$$

Звідки: $T_{03} = 28.3\,°C, \alpha_3 = 610\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\,°C}$

Таким чином, ми можемо усереднити результат між 3 залежностями і отримати, що $\boldsymbol{T_0 = 28.4\,°C \approx 28\,°C, \alpha \approx 600}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\,°C}$.

Розглянемо тепер випадок з працюючим нагрівачем. З закону збереження енергії отримаємо наступне співвідношення:

$$cm\Delta t = P\Delta\tau - \alpha\frac{2m}{\rho R}(T - T_0)\Delta\tau$$

Перепишемо його в вигляді, зручному для дослідження:

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{P}{cm} - \alpha\frac{2}{\rho Rc}(T - T_0) = -\alpha\frac{2}{\rho Rc}T + \frac{P}{cm} + \alpha\frac{2}{\rho Rc}T_0$$

Аналогічно обрахуємо точки й для гілок, в яких відбувалося нагрівання:

Для маси m_1:

$\frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{°C}{c}$	0.3	0.35	0.4	0.45
$T, °C$	89	81	72	38

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = -\alpha\frac{2}{\rho Rc}T + \frac{P}{cm_1} + \alpha\frac{2}{\rho Rc}T_0 = -0.0027T + 0.56$$

Вважаючи, $T_0 = 28\ °C$, отримаємо значення $P \approx 1020$ Вт

Для маси m_2:

$\frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{°C}{c}$	0.2	0.25	0.25	0.3
$T, °C$	63	42	46	30

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = -\alpha \frac{2}{\rho R c} T + \frac{P}{c m_2} + \alpha \frac{2}{\rho R c} T_0 = -0.0028T + 0.38$$

Вважаючи, $T_0 = 28\ °C$, отримаємо значення $P \approx 1010$ Вт

Підсумовуючи, як результат маємо: $\boldsymbol{P \approx 1000}$ Вт.

Для маси m_3:

$\frac{\Delta t}{\Delta \tau}, \frac{°C}{c}$	0.15	0.2	0.2	0.25
$T, °C$	57	44	41	27

$$\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = -\alpha \frac{2}{\rho R c} T + \frac{P}{c m_3} + \alpha \frac{2}{\rho R c} T_0 = -0.0033T + 0.34$$

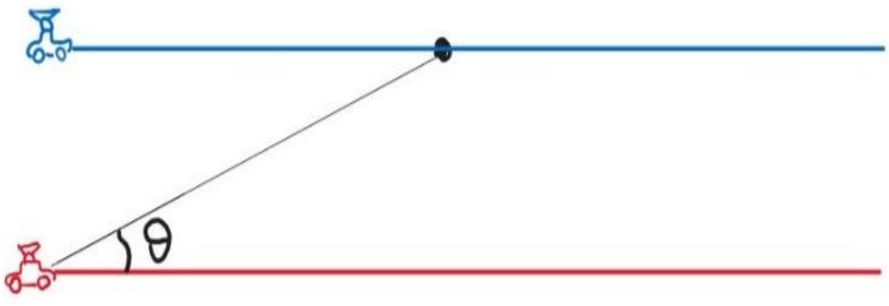
З цього виразу, враховуючи $P = 1000$ Вт і $T_0 = 28\ °C$, маємо $\boldsymbol{m_3 \cong 0.96}$кг $\approx \boldsymbol{1}$ кг.

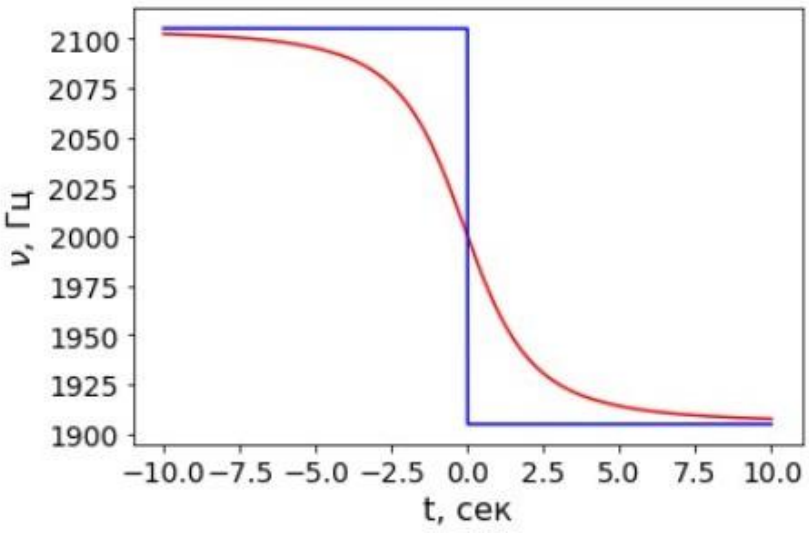
(103) А-Б) На спектрограмах зображений ефект Доплера для частоти, на якій звучить динамік. Зареєстрована мікрофоном частота ν дорівнює:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta}$$

Кут θ – показаний на рисунку нижче.

Проаналізуємо цю формулу для двох машин, зображених на малюнку.





На графіку зображена залежність частоти від часу для двох машин, які рухаються з однаковою швидкістю - синя, що їде на мікрофон, та червона, що проїжає повз мікрофон на деякій відстані. Звідси видно, що 1) асимптоти визначаються швидкістю та основною частотою, 2) нахил лінії визначається відстанню між мікрофоном та прямою, по якій їде машина.

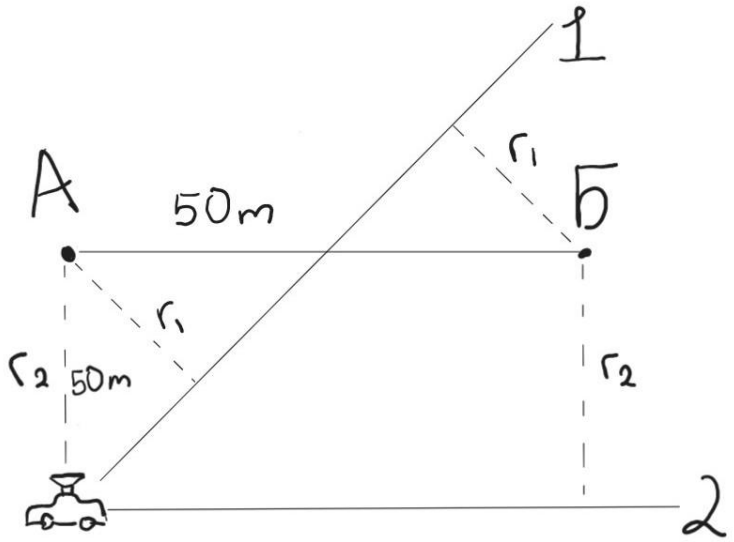
З малюнків ми бачимо, що асимптоти дорівнюють приблизно $\nu_1 = 2100$ Гц та $\nu_2 = 1900$ Гц, отже

$$\begin{cases} \nu_1 = \frac{\nu_0}{1-v/c} \\ \nu_2 = \frac{\nu_0}{1+v/c} \end{cases}$$

$$\frac{1-v/c}{1+v/c} = \frac{\nu_2}{\nu_1} \longrightarrow \boxed{v = c \times \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_2 + \nu_1} \approx 15 \text{ м/с}}$$

$$\boxed{\nu_0 = \nu_1 \left(1 - \frac{\nu_2 - \nu_1}{\nu_2 + \nu_1}\right) = \frac{2\nu_1\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} \approx 2000 \text{ Гц}}$$

В) Зі спектрограм видно, що лінії мають однакову форму (нахил), вони лише зсунуті в часі одна від одної. Отже, взаємне розташування мікрофона та шляху машини однакове для обох мікрофонів: $r_A = r_Б$. Існує дві прямі 1 та 2, зображені на малюнку, що задовольняють цій умові

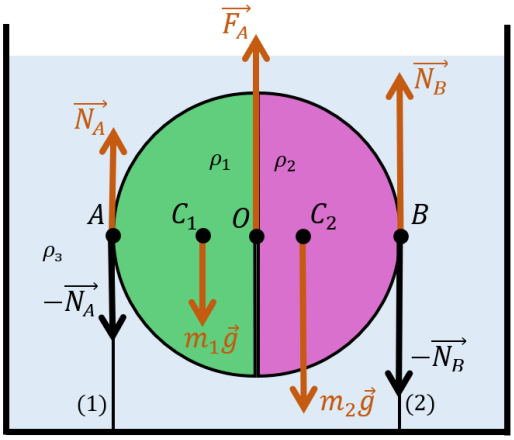


У випадку 2 машина знаходиться в найближчій точці траєкторії в момент часу t = 0 сек. Отже, мікрофон в час t = 0 сек має чути звук частоти $\nu = \nu_0/(1-0) = \nu_0$. Оскільки це суперечить спектрограмі А, правильний варіант траєкторії - траєкторія 1, що перетинає відрізок між мікрофонами посередині.

Відстані r_A, $r_Б$ є висотами прямокутних рівнобедрених трикутників з катетами 50 м. Звідси

$$\boxed{r_A = r_Б = r_1 = 25\sqrt{2} \text{ м}}$$

(104) Знайдемо тиск, який чинить куля на опори (1) та (2) в точках A і B (див. мал.). На куля діють наступні сили:



1)сила тяжіння $m_к\vec{g}$, яку ми для зручності позначаємо як силу, що дорівнює $m_1\vec{g}, m_2\vec{g}$. Де m_1, m_2 – маси півкуль, а $m_к$ – маса кулі.

2) Сила Архімеда $\overrightarrow{F_A}$.

3) Сила реакції опор $\overrightarrow{N_A}$ та $\overrightarrow{N_B}$ від опор (1) та (2) відповідно.

Точка прикладання сили $m_1\vec{g}$ – центр мас лівої півкулі, $m_2\vec{g}$ – центр мас правої півкулі. Якщо речовина в півкулях розподілена рівномірно (а про інше в умові не сказано), то точки прикладання сил $m_1\vec{g}$ та $m_2\vec{g}$ – лежать на горизонталі AB на відстанях $\frac{3}{8}R$ від геометричного центра кулі праворуч і ліворуч вд центра. Точка прикладання $\overrightarrow{F_A}$ – геометричний центр кулі, і може бути представлена початков двох векторів $\overrightarrow{F_{A_1}}$ та $\overrightarrow{F_{A_2}}$ – сил Архімеда, що діють на півкулі (1) та (2) відповідно.

Запишемо умову рівноваги кулі, припускаючи, що віртуальна вісь віртуального обертання кулі проходить через т.A, маємо:

$$\begin{cases} M_A(m_1\vec{g}) = -m_1 g * |AC_1| = -m_1 g * \left|R - \frac{3}{8}R\right| = -m_1 g \frac{5}{8}R \\ M_A(m_2\vec{g}) = -m_2 g * |AC_2| = -m_2 g * \left|R + \frac{3}{8}R\right| = -m_2 g \frac{11}{8}R \\ M_A\left(\overrightarrow{F_A}\right) = F_A|AC| = F_A R \\ M_A\left(\overrightarrow{N_A}\right) = 0 \\ M_A\left(\overrightarrow{N_B}\right) = N_B|AB| = 2RN_B \end{cases} \quad (1)$$

В (1) $M_A(\ldots)$ – момент сили $(\ldots)$ відносно осі, що є вертикальною і проходить через т.A.

Для рівноважного положення кулі:

$$-m_1 g \frac{5}{8}R - m_2 g \frac{11}{8}R + F_A R + 2RN_B = 0 \quad (2)$$

Підставимо з (2) до (1). Тоді, врахуємо, що

$$\begin{cases} m_1 g = \rho_1 V_1 g = \rho_1 \frac{1}{2} V_к g = \rho_1 \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 g = \rho_1 \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 g = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_1 g \\ m_2 g = \rho_2 V_2 g = \rho_2 \frac{1}{2} V_к g = \rho_2 \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 g = \rho_2 \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi R^3 g = \frac{2}{3}\pi R^3 \rho_2 g \\ F_A = \rho_3 V_к g = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_3 g \end{cases} \quad (3)$$

З (1)/(3), маємо після, елементарних перетворень

$$N_B = \frac{\pi g R^3}{24}(5\rho_1 + 11\rho_2 - 16\rho_3) \quad (4)$$

Нехай тепер вісь віртуаль. Нехай тепер вісь віртуального обертання кулі є вертикальною і проходить через т.B. Тоді для моментів сил:

$$\begin{cases} M_B(m_1\vec{g}) = m_1 g * |BC_1| = m_1 g * \left|R + \frac{3}{8}R\right| = m_1 g \frac{11}{8}R \\ M_B(m_2\vec{g}) = m_2 g * |BC_2| = m_2 g * \left|R - \frac{3}{8}R\right| = m_2 g \frac{5}{8}R \\ M_B(\overrightarrow{F_A}) = -F_A|BO| = -F_A R \\ M_B(\overrightarrow{N_B}) = 0 \\ M_B(\overrightarrow{N_A}) = N_A|BA| = -2RN_A \end{cases} \quad (5)$$

З (1), (3) та (5):

$$m_1 g \frac{11}{8}R + m_2 g \frac{5}{8}R - F_A R - 2RN_A = 0$$

$$N_A = \frac{\pi g R^3}{24}(11\rho_1 + 5\rho_2 - 16\rho_3) \quad (6)$$

За 3-ім Законом Ньютона, сили які діють на кулю як реакції опор рівні за модулем силам, з якими куля тисне на опори, тому сили стиснення опор є

$$\begin{cases} F_{\text{ст}_A} = N_A = \frac{\pi g R^3}{24}(11\rho_1 + 5\rho_2 - 16\rho_3) \\ F_{\text{ст}_B} = N_B = \frac{\pi g R^3}{24}(5\rho_1 + 11\rho_2 - 16\rho_3) \end{cases} \quad (7)$$

Для того, щоб стиснення опор змінилось їх розтягом необхідно, щоб густина ρ_3^* була б такою, для якої максимальна з сил, що фігурують у (7) перетворилася б у нуль.

Нехай $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$, тоді $\max\{F_{\text{ст}_A}, F_{\text{ст}_B}\} = F_{\text{ст}_A}$ (*)

Отже, для $\rho_3^* = \rho_3$ з (7) та (*), маємо:

$$\frac{\pi g R^3}{24}(11\rho_1 + 5\rho_2 - 16\rho_3^*) = 0 \Rightarrow \boxed{\rho_3^* = \frac{1}{16}(11\rho_1 + 5\rho_2)} \quad (8)$$

Нехай, ми додали у воду $m_{\text{с}}$ – кухонної солі ($m_{\text{с}}$ – маса солі).

Тоді,

$$\rho^* = \frac{m_{\text{в}} + m_{\text{с}}}{V_{\text{в}} + V_{\text{с}}} \quad (9)$$

Де $V_{\text{в}}, V_{\text{с}}$ – об'єми, які займають вода та сіль відповідно.

$$V_{\text{в}} = \frac{m_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}}; \quad V_{\text{с}} = \frac{m_{\text{с}}}{\rho_{\text{с}}}; \quad (10)$$

де $\rho_{\text{в}}, \rho_{\text{с}}$ – густини води та солі відповідно.

З (9) та (10):

$$\rho_3^* = \frac{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{с}}(1 + \frac{m_{\text{с}}}{m_{\text{в}}})}{\rho_{\text{с}} + \rho_{\text{в}}\frac{m_{\text{с}}}{m_{\text{в}}}} = \frac{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{с}}(1+\varphi)}{\rho_{\text{с}} + \rho_{\text{в}}\varphi} \quad (11)$$

Де $\varphi = \frac{m_{\text{с}}}{m_{\text{в}}}$ – доля солі (за масою) та масою та води.

З (8) та (11)

$$\frac{\rho_{\text{в}}\rho_{\text{с}}(1+\varphi)}{\rho_{\text{с}} + \rho_{\text{в}}\varphi} = \frac{1}{16}(11\rho_1 + 5\rho_2)$$

Звідси,

$$\varphi = \frac{\rho_{\text{с}}}{\rho_{\text{в}}} * \frac{11\rho_1 + 5\rho_2 - 16\rho_{\text{в}}}{16\rho_{\text{с}} - 11\rho_1 - 5\rho_2} \quad (12)$$

Підставимо у (12) параметри задані в умові, а також відоме значення $\rho_в = 1000 \frac{кг}{м^3}$. Після обчислень виходить:

$$\varphi = 0.1686 = 168.6\ ‰$$

Відповідь: 168.6 ‰

(105) А) Відносно інерціальної системи відліку доцентрове прискорення викликає реакція опори, яка і дорівнює вазі тіла: $mg = N = m\omega^2 R$. Звідси період

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Б) За рахунок «м'якого швартування» втрат енергії, як буває при непружному зіткненні, не буде.

Відносно інерціальної системи відліку початково нерухомого центру кільця станції швидкість корабля перед стиковкою дорівнювала швидкості ободу ωR. За законом збереження імпульсу після стиковки центр мас станції почне рухатись зі швидкістю

$$V = \frac{M_2 \omega R}{M_1 + M_2}, \qquad (1)$$

відносно якого та обертатиметься з деякою, взагалі кажучи, новою кутовою швидкістю ω'. Можна зрозуміти, що кутова швидкість не зміниться ($\omega' = \omega$) з загальних міркувань. Можна довести це розрахунком, наприклад, записавши енергію системи до і після та прирівнявши, або, скориставшись за законом збереження моменту імпульсу. Та найпростіше розглянути рух у системі відліку центру мас «корабель-станція», який в момент швартування знаходиться на відстані

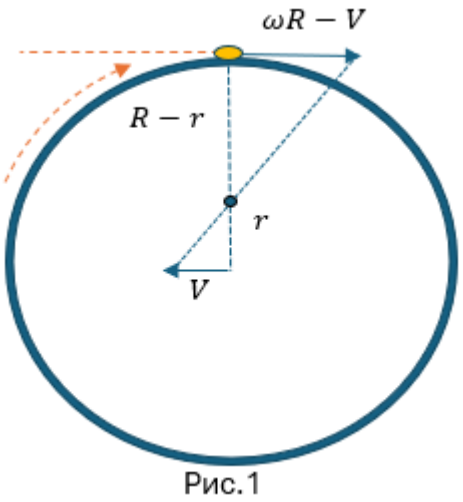


Рис.1

$$r = \frac{M_2 R}{M_1 + M_2} \qquad (2)$$

від центру кільця і рухається зі швидкістю V (1). Отже, відносно нього центр кільця має зворотно спрямовану швидкість V, а корабель й частина ободу під ним (див. Рис.1) $\omega R - V$.

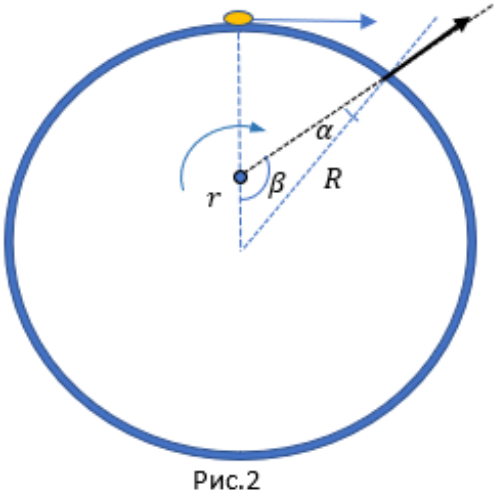


Рис.2

Тоді кутова швидкість ω' хоч з розгляду руху центру кільця, хоч з руху корабля й пришвартованої частини ободу кільця має одне й те ж значення:

$$\omega' = \frac{V}{r} = \left\{V = \frac{M_2 \omega R}{M_1 + M_2}, r = \frac{M_2 R}{M_1 + M_2}\right\} = \omega,$$

$$\omega' = \frac{\omega R - V}{R - r} = \left\{V = \frac{\mathrm{M}_2 \omega R}{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2}, r = \frac{\mathrm{M}_2 R}{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2}\right\} = \omega.$$

Висновок: кутова швидкість, а отже й період обертання довантаженої кораблем станції не зміняться.

В) Найбільша вага буде у найвіддаленішій точці станції на відстані $R + r$ від нової осі обертання:

$$m\omega'^2(R + r) = m\omega^2\left(R + \frac{\mathrm{M}_2 R}{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2}\right) = m\omega^2 R\frac{\mathrm{M}_1 + 2\mathrm{M}_2}{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2}.$$

Враховуючи попереднє значення $mg = m\omega^2 R$, маємо найбільшу вагу

$$mg\frac{\mathrm{M}_1 + 2\mathrm{M}_2}{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2}$$

у діаметрально протилежній до місця швартування корабля точці станції. Це можна зрозуміти й на якісному рівні, якщо, наприклад, розглянути швартування не дуже досвідченого пілота, який, щоб наблизитись до шлюзу, використовував двигуни, щоб забезпечити рух корабля вздовж дуги кола, утримуючись поряд з місцем швартування. Відносно неінерціальної системи відліку, що оберталася разом зі станцією, корабель, який утримувався поряд зі шлюзом станції за рахунок роботи двигунів і компенсуючи відцентрову силу інерції, вимкнувши їх, потягне станцію у свій бік, вдовж радіусу, не створюючи додаткового моменту сил відносно центру мас, але прискорюючи кільце, що й викликає у протилежній точці на внутрішній стороні кільця максимальне перевантаження. *Якщо пілот досвідчений, у неінерціальній системі відліку швартування виглядає як підліт до станції по дотичній до радіусу (перпендикулярно до поверхні) з гальмуванням цього руху відцентровою силою інерції до миттєвої зупинки у місці швартування. Траєкторія корабля виглядатиме вигнутою за рахунок сили Коріоліса.*

Г) Відхилення важку на нитці від перпендикуляра до поверхні станції буде нульовим у двох точках: у місці швартування, і протилежній до неї точці, де вага найбільша (обидві лежать на діаметрі, що проходить через центр мас і центр кільця). Розглянемо довільну точку на кільці. На Рис.2 через цю точку проходить перпендикуляр до поверхні (блакитний пунктир через центр кільця) і чорний пунктир вздовж напрямку відцентрової сили інерції. Треба знайти максимальний кут α між цими лініями. З теореми синусів для трикутника $\sin\alpha = \frac{r}{R}\sin\beta$ буде максимальним за максимального $\sin\beta$, що відповідає куту $\beta = 90°$. Отже, на станції є два місця з максимальним відхиленням кута α (Рис.3), який дорівнюватиме

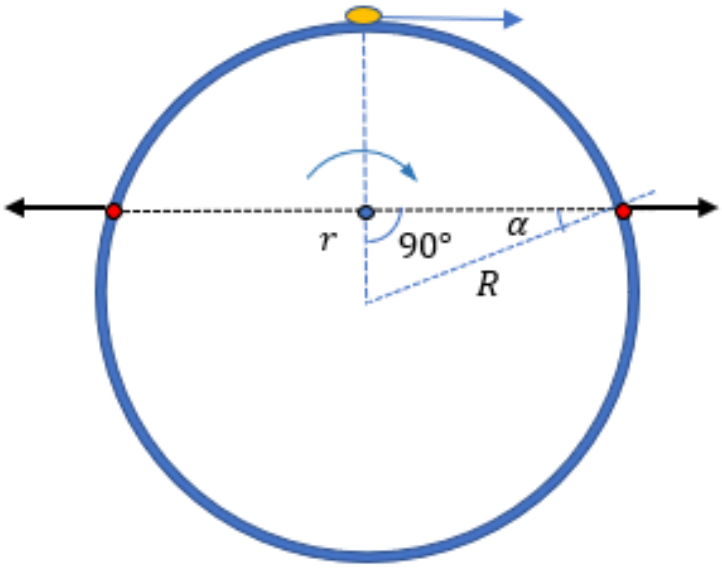


Рис.3

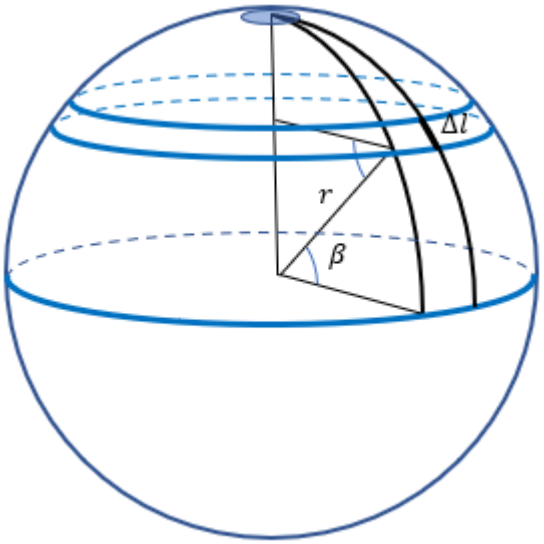
$$\alpha = arcsin\frac{r}{R} = arcsin\frac{\mathrm{M}_2}{\mathrm{M}_1 + \mathrm{M}_2}.$$

(106) На деякій північній широті β виріжемо подумки вздовж паралелей вузьку полосу шириною Δl і площею поверхні $\Delta S = 2\pi r\cos\beta\Delta l$. Вздовж меридіанів через полоску йтимуть струми. Для кожного дроту зі струмом при розрахунку опору Δl буде довжиною. Загальний опір полоски можна розрахувати, взявши загальну площу перерізу всіх дротів (позначимо Δs): $\Delta R_0 = \rho_0 \frac{\Delta l}{\Delta s}$. Зі збільшенням температури від t_0 до t опір також збільшуватиметься:

$$\Delta R = \Delta R_0\big(1 + \alpha(t - t_0)\big) = \rho_0 \frac{\Delta l}{\Delta s}(1 + \alpha\Delta t).$$

За законом Джоуля-Ленца виділятиметься теплова потужність $I^2\Delta R$, яка внаслідок відсутності теплопровідності вглибину глобусу і вздовж меридіанів, повністю (в установленому режимі) втрачатиметься через площу ΔS у навколишнє середовище. Отже, з умову теплового балансу маємо: $I^2\Delta R = k\Delta S\Delta t$ або

$$I^2\rho_0 \frac{\cancel{\Delta l}}{\Delta s}(1 + \alpha\Delta t) = k2\pi r\cos\beta\cancel{\Delta l}\Delta t.$$



Перепишемо останнє рівняння, ввівши сталу $A = 2\pi kr\Delta s/\rho_0$:

$$I^2(1 + \alpha\Delta t) = \mathrm{A}\cos\beta\Delta t. \qquad (1)$$

А) Поділимо два рівняння для екватору і для широти Херсону одне на одне (струм однаковий при послідовному з'єднанні 8 А):

$$\frac{1 + \alpha\Delta t_{\mathrm{x}}}{1 + \alpha\Delta t_{\mathrm{e}}} = \frac{\cos\beta\Delta t_{\mathrm{x}}}{\cos 0\Delta t_{\mathrm{e}}}. \qquad (2)$$

Розв'язуючи рівняння відносно α, знаходимо $\alpha \approx 0{,}00125\mathrm{K}^{-1}$.

Б) На широті Херсону температура вище, оскільки менша площа теплових втрат (глобус до полюсів звужується).

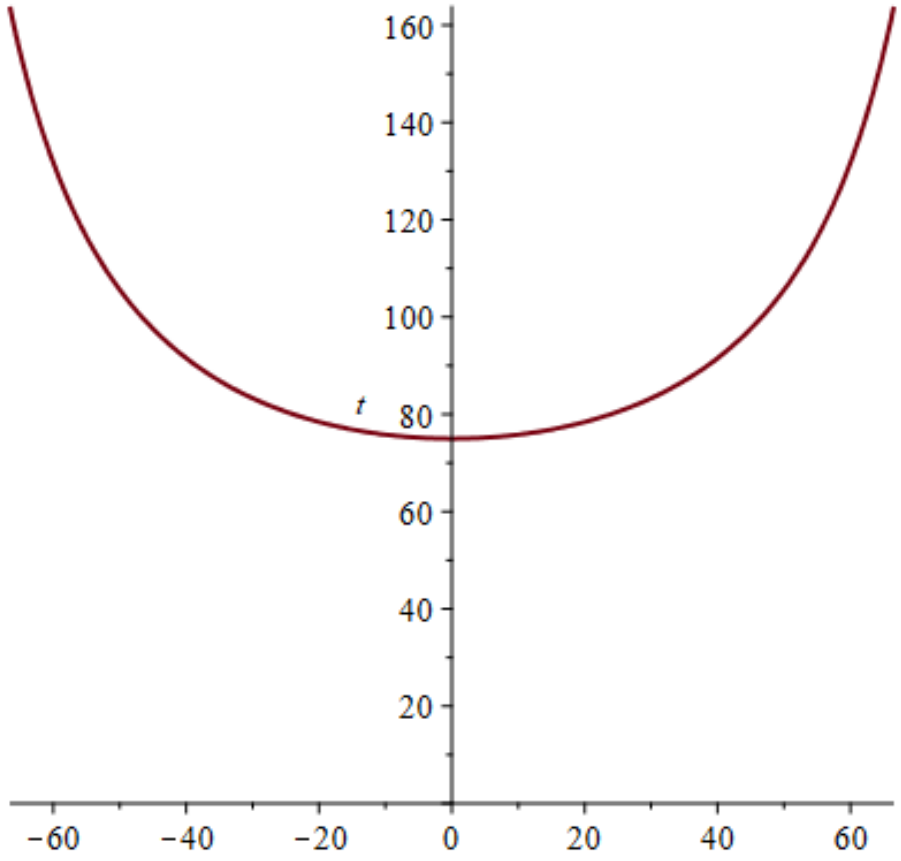
В-Г) Виразимо з рівняння (1) Δt або з рівняння (2) Δt_{x}, розуміючи під ним перевищення температури над зовнішньою для будь-якій широти і замінимо кут β на довільний кут γ:

$$\Delta t = \frac{1}{\frac{\mathrm{A}}{I^2}\cos\gamma - \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\Delta t_{\mathrm{e}}} + \alpha\right)\cos\gamma - \alpha}. \qquad (3)$$

Бачимо дивну поведінку при збільшенні кута γ від 0º до 90º. Існує критичний кут γ за якого знаменник дробу обертається у 0, а Δt у нескінченність. Виникає питання відносно причини такої поведінки і обмеження моделі явища, якою ми користуємося. Для кращого розуміння спочатку розглянемо випадок, коли зміною опору з температурою можна знехтувати, тобто $\alpha = 0$. Тоді $\Delta t = \frac{\Delta t_{\mathrm{e}}}{\cos\gamma}$ обертається у нескінченність тільки на полюсах $\gamma = \pm 90°$. Причина цього полягає в тому, що при наближенні до полюсів наша уявна смужка стягується, її площа, через яку втрачається джоулеве тело, прямує до 0, що може компенсуватися лише нескінченною температурою у точках полюсів. Насправді, не слід забувати про дроти, що мають фізичні

розміри і не можуть стати нескінченно тонкими, щоб математично зійтися у точках на полюсах. Отже, ця модель перестає працювати при наближенні до полюсів, коли температура значно зростає і дріт вже починає плавитись. Якщо ж $\alpha > 0$, додається ще один фактор: при наближенні до полюсів дроти стають гарячішими, їхній опір збільшується, падіння напруги на них також збільшується за рахунок зменшення падіння напруги на екваторіальних ділянках (загальна напруга – стала). Отже, при підключенні на дуже високих широтах слід очікувати великий загальний опір і малі струми, які відповідатимуть малому енерговиділенні на екваторі. Якщо $\Delta t_e \to 0$, то формула (2) знову даватиме критичний кут $\gamma \to 90°$. У нашому випадку за умовою напруга подана «до місць з'єднання між собою меридіанних дротів» без деталізації. Вважаємо, що вони з'єднані на достатній віддалі від полюсів, що дозволяє забезпечити надані в умові температури на екваторі та на широті Херсону і коректність використання формули лінійної залежності від температури опору $\Delta R = \Delta R_0(1 + \alpha \Delta t)$.

Схематичний графік залежності температури від широти (формула (3)) між двома полярними кругами (± 66°33′) може бути побудований по декільком точкам і має наведений вигляд.



(107) На рис.1-2 показано хід променів та положення екранів (3-7) на різних відстанях *x* від непрозорого диска BB_1. Для зручності нумерація положення екрана починається з цифри 3. AA_1 діаметр ліхтарика. Розміри екрана по вертикальній осі 0y обмежені координатами 50 та -50 см. В початковий момент координата екрана 3 відповідає точці *x*=0. На рис.3-7 схематично зображені фігури, що виникають на екрані за різних значень координати *x*.

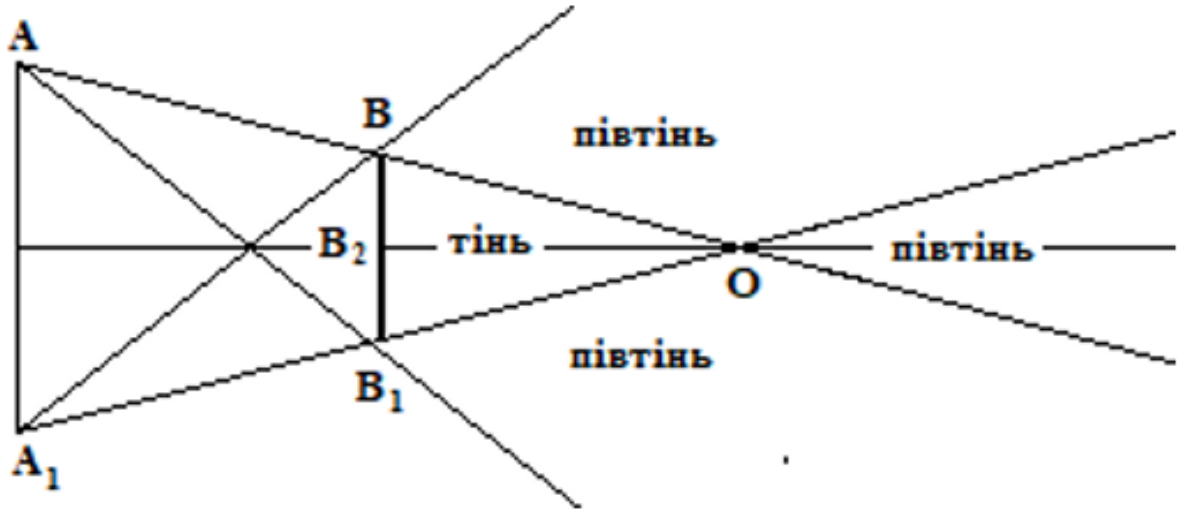


Рис.1

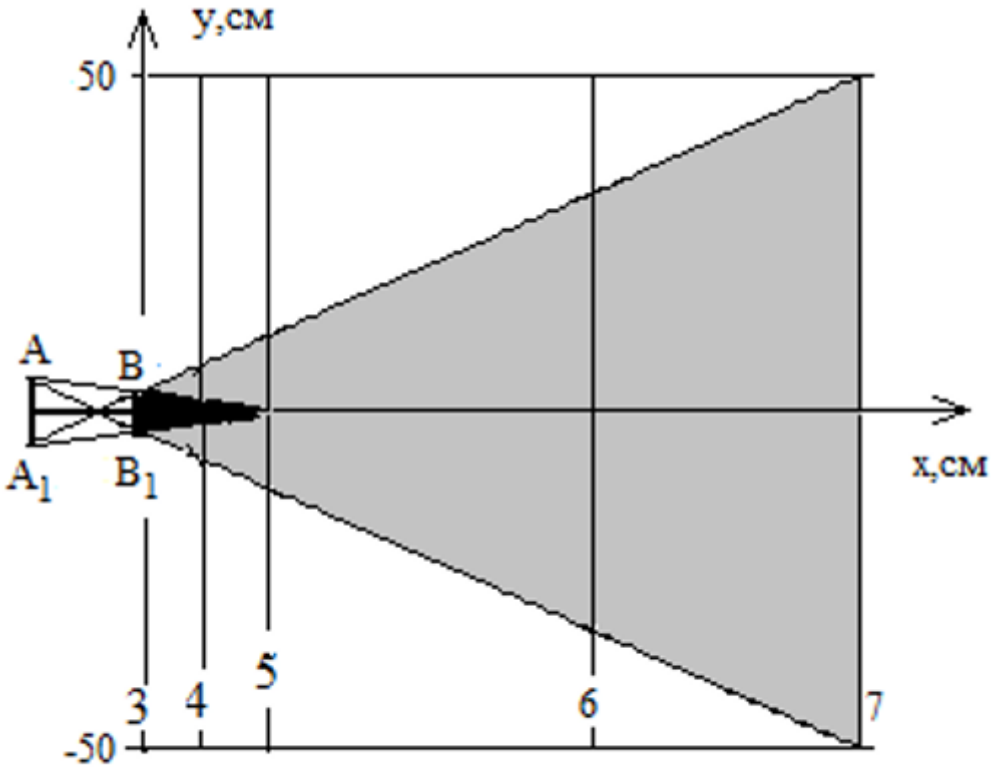


Рис.2

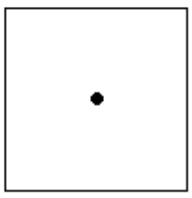


Рис.3

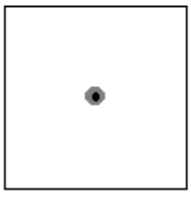


Рис.4

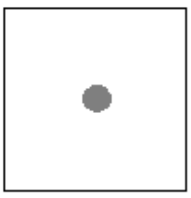


Рис.5

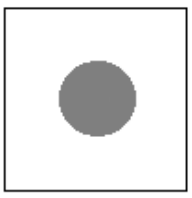


Рис.6

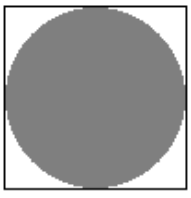
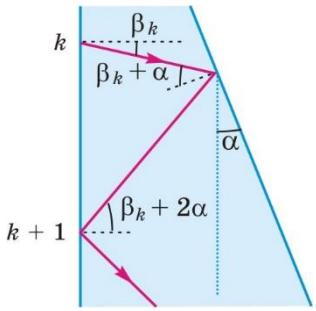


Рис.7

На рис.1-2 показано хід променів та положення екранів (3-7) на різних відстанях x від непрозорого диска BB_1. Для зручності нумерація положення екрана починається з цифри 3. AA_1 діаметр ліхтарика. Розміри екрана по вертикальній осі 0y обмежені координатами 50 та -50 см. В початковий момент координата екрана 3 відповідає точці x=0. На рис.3-7 схематично зображені фігури, що виникають на екрані за різних значень координати x.

(108) Чим обмежена кількість відбитих пучків світла? Пучок почергово відбивається від обох поверхонь клину, при цьому через ліву поверхню світло частково виходить. З кожним проходом світла через клин кут падіння на ліву поверхню збільшується. Якщо після k-го «контакту» з лівою поверхнею кут відбивання β_k, то наступний кут падіння (і, відповідно, кут відбивання) $\beta_{k+1} = \beta_k + 2\alpha$ (див. рисунок, чорними штриховими лініями на ньому показані перпендикуляри до поверхонь клину).



Оскільки можемо взяти $\beta_0 = 0$, отримаємо $\beta_k = 2k\alpha$.

Частковий вихід світла через ліву поверхню відбувається доти, доки кут падіння менший від граничного кута повного відбивання, тобто доки $\sin\beta_k = \sin 2k\alpha < \frac{1}{n_{\text{відн}}}$, де $n_{\text{відн}}$ — показник заломлення матеріалу клину *відносно навколишнього середовища*.

1. Позначимо n абсолютний показник заломлення матеріалу клину. Коли клин перебуває в повітрі, $n_{\text{відн}} = n$, тоді з умови випливає: $\sin 10\alpha < \frac{1}{n} < \sin 12\alpha$, тобто $0{,}5 < \frac{1}{n} < 0{,}588$. Коли клин перебуває у воді, $n_{\text{відн}} = \frac{n}{1{,}33}$. Для цього випадку отримуємо нерівність $\sin 16\alpha < \frac{1{,}33}{n} < \sin 18\alpha$, яку можна записати у вигляді $0{,}559 < \frac{1}{n} < 0{,}608$. Отримана нами система нерівностей еквівалентна одній подвійній нерівності: $0{,}559 < \frac{1}{n} < 0{,}588$, або $1{,}70 < n < 1{,}79$.Цей результат можна записати у вигляді:

$$n = 1{,}75 \pm 0{,}05.$$

2. Очевидно, точність вимірювання має знизитися. Можна скористатися отриманими вище співвідношеннями для показника заломлення:

$$\begin{cases} \sin 10\alpha < \dfrac{1}{n} < \sin 12\,\alpha, \\ \dfrac{\sin 16\alpha}{1{,}33} < \dfrac{1}{n} < \dfrac{\sin 18\alpha}{1{,}33}. \end{cases}$$

Проте тепер логічніше вважати, що ці співвідношення мають виконуватися *хоч для якогось* значення кута в інтервалі від $\alpha_1 = 2{,}8°$ до $\alpha_2 = 3{,}2°$. Повторивши всі описані вище дії для нижнього кінця інтервалу, отримуємо $1{,}81 < n < 1{,}89$, а для верхнього кінця інтервалу $1{,}61 < n < 1{,}71$. У зазначеному діапазоні усі застосовані тригонометричні функції кута є монотонно зростаючими, остаточна відповідь є результатом «накладання» всіх отриманих інтервалів: $1{,}61 < n < 1{,}89$, тобто:

$$n = 1{,}75 \pm 0{,}14.$$

3. Метод вимірювань здається на перший погляд дуже простим, потрібно «просто»

підрахувати кількість відбитих пучків. Проте не все так просто… Не будемо вже згадувати про досить великі значення отриманих нами похибок. Поставимо інше запитання: чи дійсно легко здійснити такий підрахунок? Адже кожний наступний відбитий пучок має меншу інтенсивність порівняно з попереднім. Якщо навіть не враховувати поглинання в матеріалі та послаблення внаслідок відбивання від шару срібла, то залишається послаблення внаслідок відбивання від лівої поверхні клину. За малих кутів падіння (а такими можна вважати принаймні перші 3–4 кута падіння) коефіцієнт відбивання дорівнює $R = \left(\frac{n_{\text{відн}}-1}{n_{\text{відн}}+1}\right)^2$. Для межі між клином і повітрям (за умови $n = 1{,}75$) маємо $R = 0{,}074$, а для межі між клином і водою $R = 0{,}019$. Уже після трьох (!!!) «кроків» маємо такі значення послаблення: відповідно $R^3 = 4 \cdot 10^{-4}$ і $R^3 = 7 \cdot 10^{-6}$. Отже, потрібні дуже чутливі (і, відповідно, недешеві) прилади для реєстрації відбитого світла. Варто пошукати кращі способи (а для цього досить хоча б відкрити підручник з фізики).

(109) 1) Розглянемо ситуацію, коли заряд q знаходиться у проміжку між хмарами. Положення рівноваги тоді визначається рівністю сил Кулона від хмар:

$$k\frac{qq_1}{x^2} = k\frac{qq_2}{(l-x)^2}$$

Тут x – відстань від центру хмари з радіусом R_1 до заряду q. Заряди хмар:

$$q_1 = \frac{4}{3}\pi {R_1}^3 \rho$$
$$q_2 = \frac{4}{3}\pi {R_2}^3 \rho$$

Звідси отримуємо квадратне рівняння для визначення положення заряду q:

$$x^2 + 2xl\frac{{R_1}^3}{{R_2}^3 - {R_1}^3} - l^2\frac{{R_1}^3}{{R_2}^3 - {R_1}^3} = 0$$

Корені цього рівняння $x_1 \approx -5.47R$, $x_2 \approx 2.61R$. Перший корінь нефізичний, а другий підходить, адже це точка у проміжку між двома сферами.

Проте, цей корінь відповідає нестійкій рівновазі при чому для будь-якого знаку заряду q.

А) Якщо $q > 0$, то нестійкість очевидна, адже при малому флуктуаційному зміщенні заряду q від осі, що з'єднує центри хмар, сили кулона будуть виводити цей заряд з його положення.

Б) Доведемо тепер теж саме для $q < 0$. Нехай відстань від заряду до центру хмари R_1 флуктуаційно збільшилась на δx. Тоді сила, що буде діяти на цей заряд вздовж вісі x (вісь спрямована від центра R_1 до центра R_2):

$$F_x = -k\frac{qq_1}{(x+\delta x)^2} + k\frac{qq_2}{(l-x-\delta x)^2}.$$

Звідси видно, що перший доданок – сила, що повертає заряд в положення рівноваги, - зменшується за модулем, а другий доданок - сила, що виводить заряд з положення рівноваги, - збільшується. Це означає, що заряд покине положення рівноваги. Рівновага нестійка.

Взагалі, є теорема Ірншоу, яка говорить, що положення рівноваги заряду в зовнішньому електростатичному полі (без участі інших сил) не може бути стійким.

Тож, стійка рівновага у проміжку між хмарами не реалізується, а значить і коливання відносно цього положення неможливі.

2) Отже, якщо стійка рівновага і можлива, то вона буде в області всередині хмар. Пошукаємо її там.

Нехай заряд q знаходиться всередині хмари R_1. Поле, яке створює хмара R_1 на відстані x (x< R_1) від центру, напрямлене від центру та легко знаходиться з теореми Гауса:

$$E4\pi x^2 = \frac{\frac{4}{3}\pi {R_1}^3 \rho}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{x\rho}{3\varepsilon_0}$$

Очевидно, що заряд з q>0 не буде у стійкому положенні і в даному випадку, адже як і в попередньому випадку, при малому флуктуаційному зміщенні заряду q від осі, що з'єднує центри хмар, сили кулона будуть виводити цей заряд з його положення.

Отже, розглянемо лише заряд з q<0. Знайдемо силе, що буде діяти на цей заряд вздовж вісі x (вісь спрямована від центра R_1 до центра R_2):

$$F_x = |q|(-\frac{x\rho}{3\varepsilon_0} + k\frac{q_2}{(l-x)^2})$$

Знайдемо положення рівноваги: $F_x = 0 = -\frac{x\rho}{3\varepsilon_0} + k\frac{q_2}{(l-x)^2}$

Звідси отримуємо кубічне рівняння: $x(l-x)^2 - {R_2}^3 = 0$.

Корені цього рівняння можна отримати за допомогою побудови графіку, матпакетів чи методу ітерацій.

Корені: $x_1 \approx 0.75R$, $x_2 \approx 6.97R$, $x_3 \approx 12.28R$.

Фізичним є лише перший корінь $x \approx 0.75R$.

Перевіримо цей корінь на стійкість. Змістимо заряд на дуже мале δx від знайденого положення та застосуємо наближення $(1+\text{y})^\alpha \approx 1 + \alpha\text{y}$

$$F_x = |q|\left(-\frac{(x+\delta x)\rho}{3\varepsilon_0} + k\frac{q_2}{(l-x-\delta x)^2}\right) = |q|(-\frac{(x+\delta x)\rho}{3\varepsilon_0} + k\frac{q_2}{(l-x)^2\left(1-\frac{\delta x}{l-x}\right)^2}$$

$$\approx |q|\left(-\frac{(x+\delta x)\rho}{3\varepsilon_0} + k\frac{q_2}{(l-x)^2}\left(1+2\frac{\delta x}{l-x}\right)\right)$$

$$= |q|\left(-\frac{x\rho}{3\varepsilon_0} + k\frac{q_2}{(l-x)^2} - \frac{\delta x\rho}{3\varepsilon_0} + k\frac{q_2}{(l-x)^2}2\frac{\delta x}{l-x}\right)$$

$$= |q|\delta x\left(-\frac{\rho}{3\varepsilon_0} + k\frac{q_2}{(l-x)^2}\frac{2}{l-x}\right) = |q|\delta x\left(-\frac{\rho}{3\varepsilon_0} + k\frac{2q_2}{(l-x)^3}\right)$$

$$= -\frac{|q|\rho}{3\varepsilon_0}(1 - \frac{2{R_2}^3}{(l-x)^3})\delta x$$

Ця сила завжди спрямована проти малого зміщення δx, значить дане положення рівноваги буде стійке, а період коливань $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, де k – «коефіцієнт пружності» квазіпружної сили $\mathrm{k} = \frac{|q|\rho}{3\varepsilon_0}(1 - \frac{2{R_2}^3}{(l-x)^3})$, тобто

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{|q|\rho}{3\varepsilon_0}(1 - \frac{2{R_2}^3}{(l-x)^3})}}$$

Тепер ту саму операцію проведемо для випадку, коли заряд знаходиться всередині сфери R_2.

Положення рівноваги заряду буде на відстані $x \approx 0.08R$. Повертаюча сила при виведенні (тут вісь x спрямована від центра R_2 до центра R_1):

$$F_x = -\frac{|q|\rho}{3\varepsilon_0}(1 - \frac{2{R_1}^3}{(l-x)^3})\delta x$$

Ця проекція теж є від'ємною, а значить положення рівноваги стійке.

Період коливань:

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{|q|\rho}{3\varepsilon_0}(1 - \frac{2{R_1}^3}{(l-x)^3})}}$$

(110) При падінні краплини зі швидкістю V за малий проміжок часу маса краплини збільшується через зіткнення із краплинками туману на

$$dm = Vdt\pi r^2\rho_{\text{т}}\,. \qquad (1)$$

Залежність маси краплі від радіуса:

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho, \qquad (2)$$

де ρ – густина води.

Тоді, з (2) зміна маси пов'язана із зміною радіуса наступним чином:

$$dm = 4\pi r^2\rho dr. \qquad (3)$$

Зміщення краплини за невеликий проміжок часу (вісь x спрямована до Землі):

$$dx = Vdt = \dot{x}dt. \qquad (4)$$

Об'єднуючи (1), (3) та (4) отримуємо:

$$dx = \frac{4\rho}{\rho_{\text{т}}}dr. \qquad (5)$$

Інтегруючи (5) отримуємо:

$$x = \frac{4\rho}{\rho_{\text{т}}}r,$$

звідки

$$r = x\frac{\rho_т}{4\rho}. \tag{6}$$

Запишемо основне рівняння динаміки для цього випадку:

$$m\vec{g} - k\pi r^2 V\vec{V} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \vec{V}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{V}}{dt}, \tag{7}$$

або проектуючи на вісь x, що спрямована до Землі:

$$mg - k\pi r^2\dot{x}^2 = \dot{x}\frac{dm}{dt} + m\ddot{x}. \tag{8}$$

Підставляючи в (8) рівняння (2), (3) та (6), отримуємо:

$$\frac{4}{3}\pi(x\frac{\rho_т}{4\rho})^3\rho g - k\pi\left(x\frac{\rho_т}{4\rho}\right)^2\dot{x}^2 = \rho_т\pi\left(x\frac{\rho_т}{4\rho}\right)^2\dot{x}^2 + \frac{4}{3}\pi\left(x\frac{\rho_т}{4\rho}\right)^3\rho\ddot{x}.$$

Після скорочення:

$$\frac{4}{3}\left(x\frac{\rho_т}{4\rho}\right)\rho g - k\dot{x}^2 = \rho_т\dot{x}^2 + \frac{4}{3}\left(x\frac{\rho_т}{4\rho}\right)\rho\ddot{x} \tag{9}$$

Підставимо в (9) вираз $x = Ct^n$ з умови задачі:

$$\frac{4}{3}\left(Ct^n\frac{\rho_т}{4\rho}\right)\rho g - kC^2n^2t^{2(n-1)} = \rho_т C^2n^2t^{2(n-1)} + \frac{4}{3}\left(Ct^n\frac{\rho_т}{4\rho}\right)\rho Cn(n-1)t^{n-2}.$$

Звідси очевидно, що дана формула буде вірною для будь-яких моментів часу лише якщо

$$n = 2.$$

Тоді, в результаті, отримуємо рівняння

$$\frac{\rho_т}{3}g - 4kC = 4\rho_т C + \frac{2}{3}\rho_т C,$$

звідки

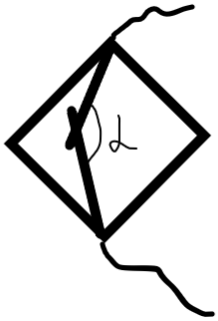
$$C = g\frac{\rho_т}{12k + 14\rho_т}.$$

Для випадку відсутності сили опору (k=0) отримуємо закон руху краплини:

$$x = \frac{g}{14}t^2,$$

що відповідає рівноприскореному руху з прискоренням $\frac{g}{7}$, що є добре відомим результатом для подібних задач.

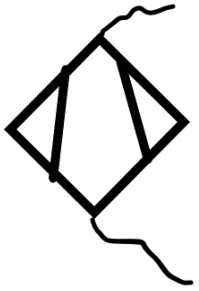
(111) Спочатку розглянемо можливі варіанти підключення з точки зору найменшого опору. Найвигідніша схема підключення буде такою :



Де кут α прямує до 0.

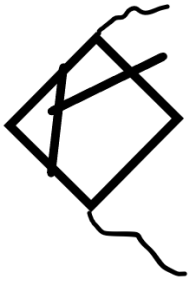
При цьому треба розглянути наступні типи підключення:

1.



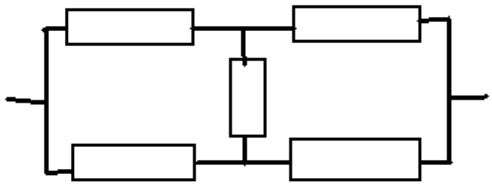
з довільними точками зварювання.

2.



з довільними точками зварювання.

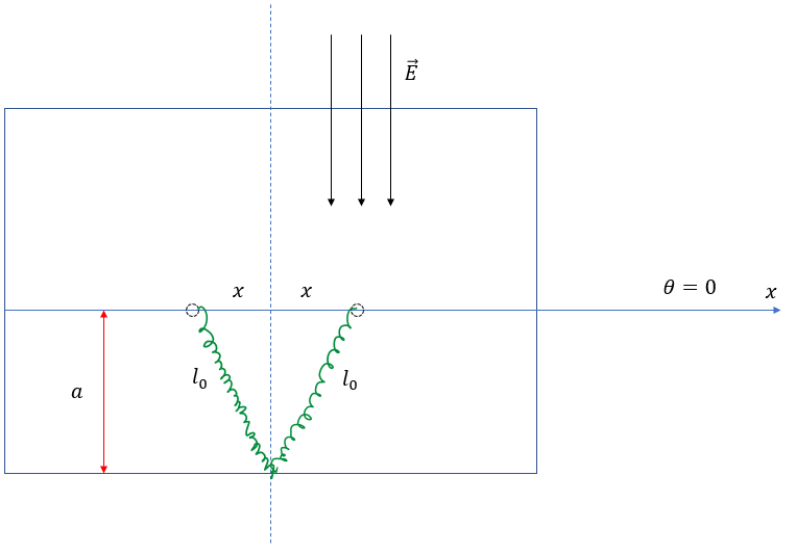
При доведенні для 2-го випадку скористатися тим, що в мостовій схемі найменший опір досягається за умови, що опір перетинки прямує до нескінченності. Тобто подібні схеми з перетинкою тільки збільшують загальний опір такої ділянки.



У випадку α=0 треба перевірити умову по струму. Якщо $I_0 \geq \frac{U}{\sqrt{2}\lambda a}$, то зварювання відбувається з найменшим можливим кутом α. Врахуйте, що арматура має скінчений переріз, тому така

точка перетину може бути тільки одна. Якщо ж $\frac{U}{2\lambda a} \le I_0 \le \frac{U}{\sqrt{2}\lambda a}$, то зварювання відбувається таким чином, щоб загальна довжина «діагоналі» дорівнювала U/I₀.

(112) Для зручності розв'язку зафіксуємо $q > 0$. Розглянем спочатку випадок $\theta = 0$.



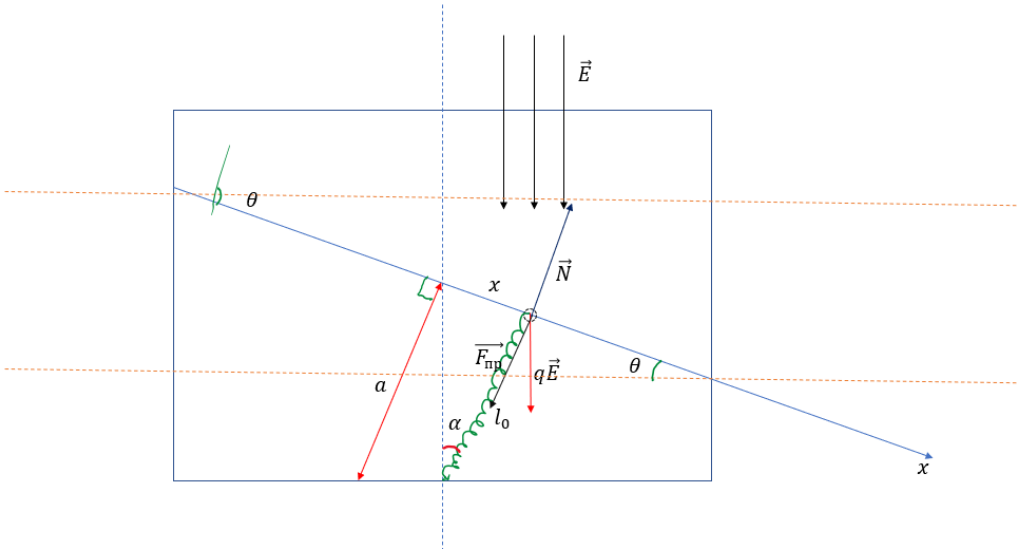
Якщо $a < l_0$.

Рівновага можлива, якщо пружина не натягнута, в інакшому випадку обов'язково буде нескомпенсована горизонтальна сила $\Delta\vec{F}$. Таких положень рівноваги два і вони симетричні ($x = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$).

Якщо $a > l_0$, то в будь-якій точці на спиці буде сила пружності від розтягнутої пружини. Положенням рівноваги буде точка $x = 0$, тому що тільки в ній не буде нескомпенсованої горизонтальної сили.

Якщо спицю почати опускати з $a > l_0$ до рівня $a < l_0$, то в критичній точці $a = l_0$ виникне стрибкоподібна зміна положення рівноваги з $x = 0$ на $x = \pm\sqrt{l_0^2 - a^2}$ (положення «+» чи «-» залежить від флуктуації в критичній точці).

Додамо в цю систему ще один змінний параметр – кут θ.



Зрозуміло, що при малому куту θ картина залишиться майже незмінною (при $a < l_0$ – два положення рівноваги, при $a > l_0$ – одне положення рівноваги)

Розглянемо, що буде при більш значному куті θ.

Запишемо умову рівноваги на вісь x:

$$qEsin\theta = F_{\text{пр}}sin\alpha = k\Delta l\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \left|\Delta l = \sqrt{x^2+a^2} - l_0\right| =$$
$$= kx\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

Для зручності аналіза введемо параметр $\beta = \frac{x}{a}$

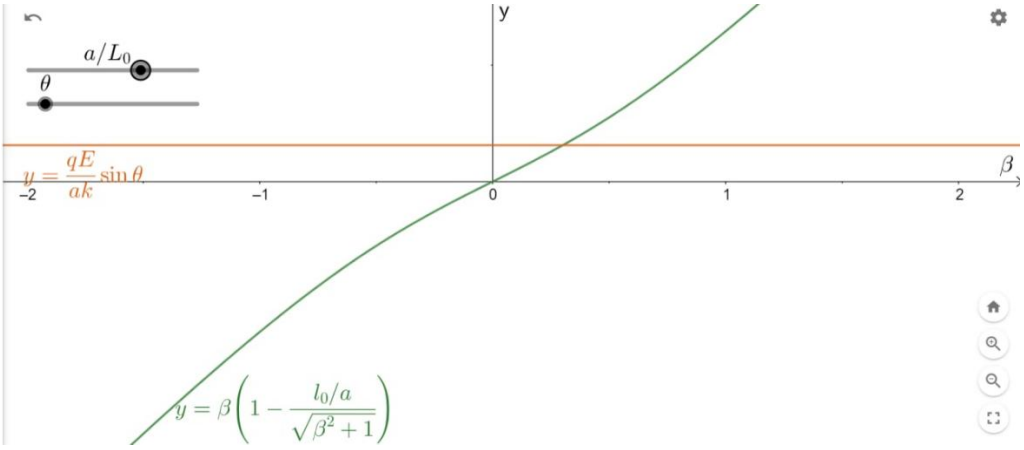
Відповідно отримаємо рівняння:

$$\beta\left(1 - \frac{l_0/a}{\sqrt{1+\beta^2}}\right) = \frac{qEsin\theta}{ka}.$$

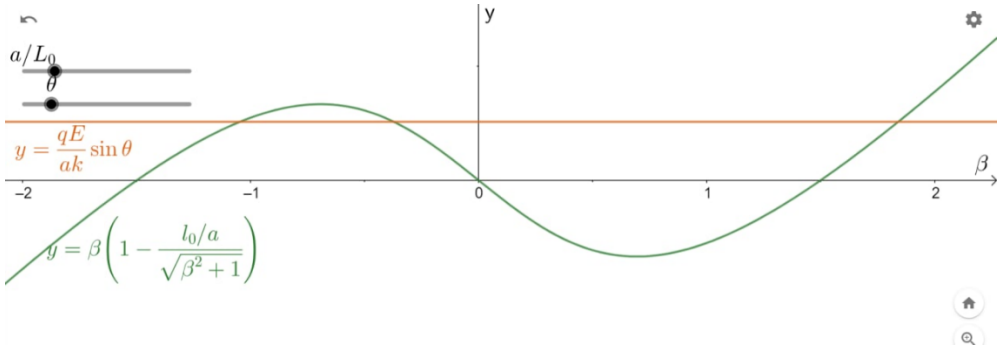
Розв'яжемо його графічно.

Якщо a/l_o – дуже велике, то $\beta\left(1 - \frac{l_0/a}{\sqrt{1+\beta^2}}\right)$ вироджується в залежність близьку до лінійної – маємо один перетин (дивись графік 1).

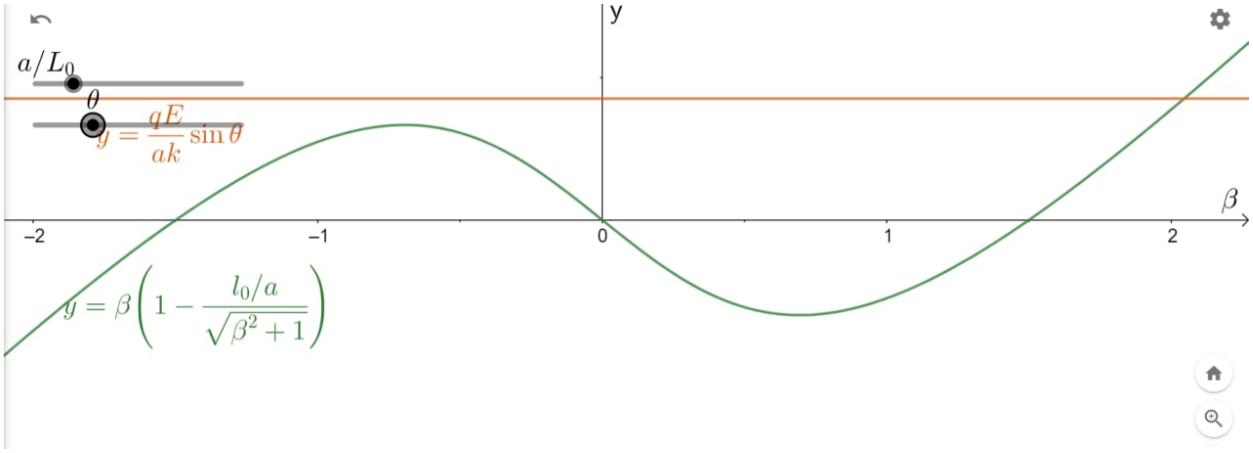
Якщо $a/l_o < 1$, то при малих θ маємо три перетина (дивись графік 2), а при збільшенні θ ліва точка рівноваги «падає» в праву точку (дивись графік 3).



Графік 1. Велике a/l_0



Графік 2. При $a/l_0 < 1$.



Графік 3. При $a/l_0 < 1$ та збільшенні кута θ.

Більш детально проаналізуємо стійкість розв'язків:

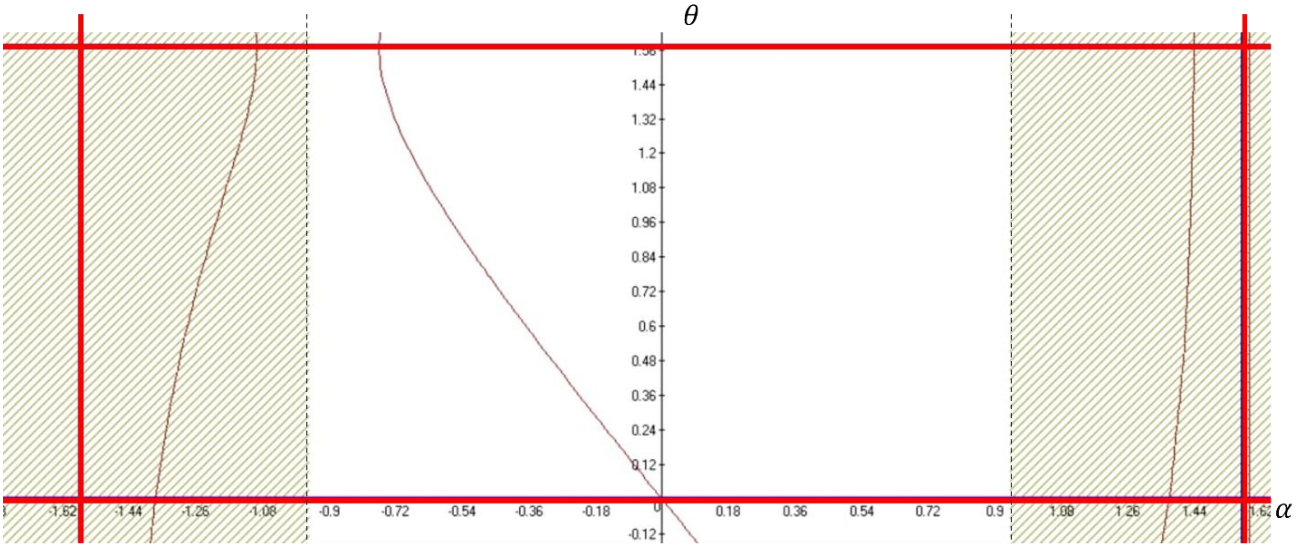
$$qEsin\theta - k\left(\frac{a}{cos\varphi} - l_0\right)sin\varphi = f(\varphi)$$

Для аналізу на стійкість, візьмемо похідну. Якщо похідна менше нуля – положення рівноваги стійке.

$$-\frac{a}{\cos^2\varphi} + l_0 cos\varphi = f'(\varphi) < 0$$

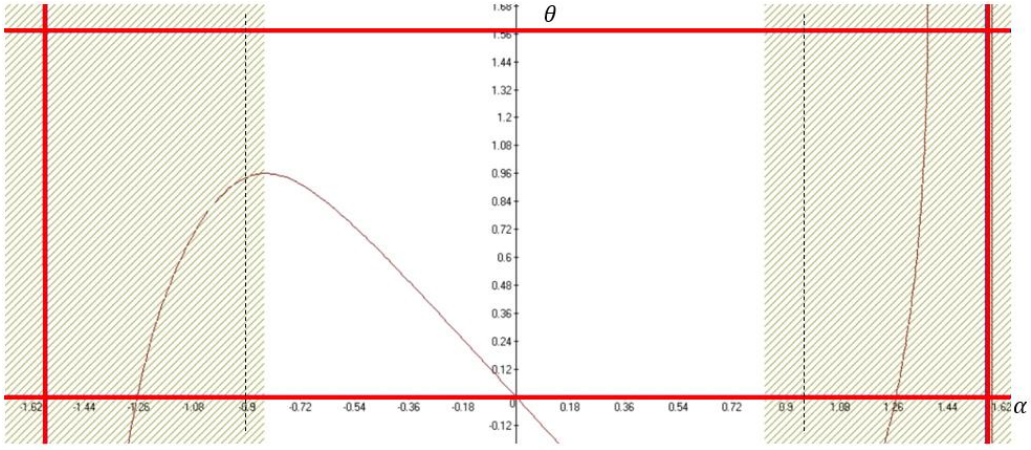
$$-\beta + \cos^3\varphi < 0$$

Якісний аналіз. Якщо β менше ніж граничне значення, та менше ніж 1, то маємо 2 стійких розв'язки.



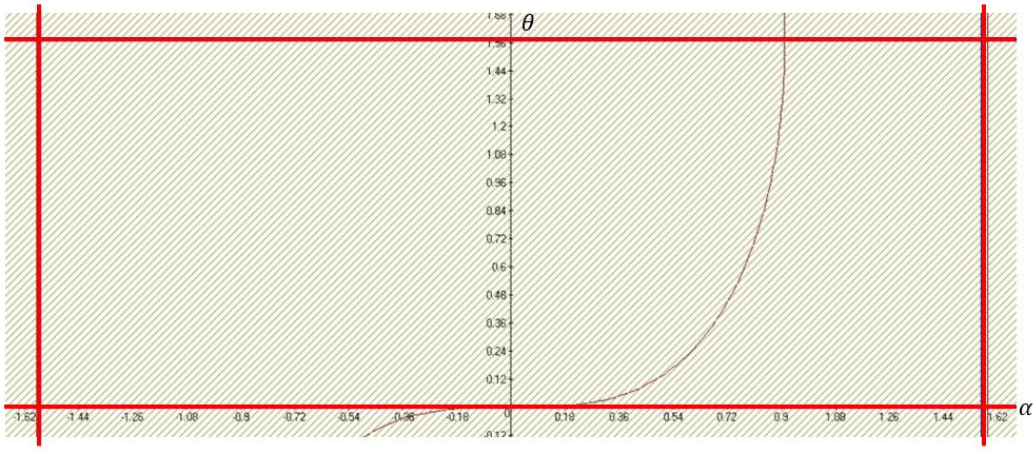
Графік 1. Коса штриховка – зони, в яких можливий стійкий розв'язок. В середині червоної «коробки» лінії – зона в якій взагалі можливий розв'язок згідно до вхідних параметрів задачі.

Якщо β більше граничного і менше 1.



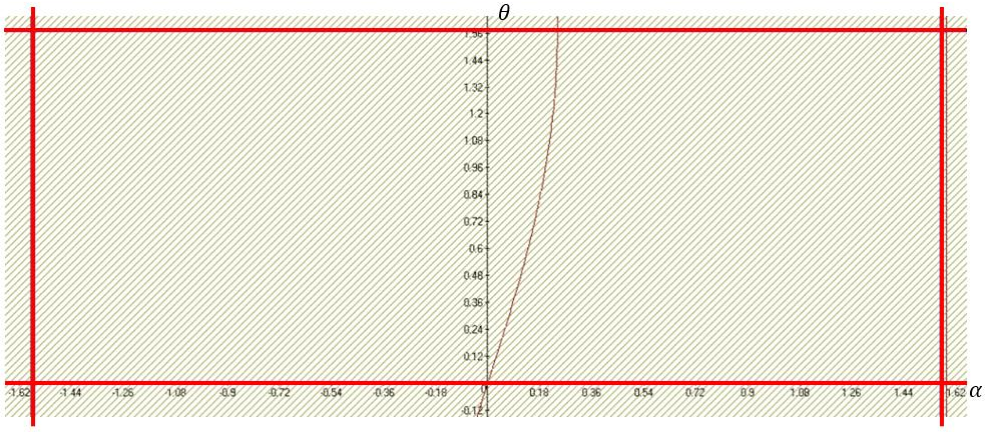
Графік 2. Коса штриховка – зони, в яких можливий стійкий розв'язок. В середині червоної «коробки» лінії – зона в якій взагалі можливий розв'язок згідно до вхідних параметрів задачі.

$\beta = 1$. Єдиний стійкий розв’язок при $\theta = 0, \alpha = 0$.



Графік 3. Коса штриховка – зони, в яких можливий стійкий розв'язок. В середині червоної «коробки» лінії – зона в якій взагалі можливий розв'язок згідно до вхідних параметрів задачі.

При $\beta > 1$ залишається єдиний стійкий розв’язок при $\alpha = 0, \theta = 0$.



Графік 4. Коса штриховка – зони, в яких можливий стійкий розв'язок. В середині червоної «коробки» лінії – зона в якій взагалі можливий розв'язок згідно до вхідних параметрів задачі.

(113) З умови випливає, що механічна енергія кульки зберігається. Зазначимо, що за відсутності тертя кулька рухатиметься поступально. На рівні точки A (на вході до трубки та на виході

з неї) швидкість кульки $v_A = \sqrt{2gh}$. Для повторного проходження трубки кулька після вильоту має знов влучити в точку A, тобто пролетіти по горизонталі відстань $R(1 + \sin\alpha)$. Це можливо, якщо $R(1 + \sin\alpha) = \frac{v_A^2 \sin 2\alpha}{g}$, тобто $\boldsymbol{h = \frac{R(1+\sin\alpha)}{2\sin 2\alpha}}$.

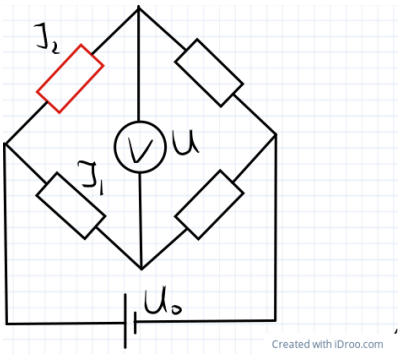
Влучивши знов у точку A, кулька має змінити напрям руху на вертикальний, а для цього — зазнати зіткнення зі стінками трубки. Навіть якщо це зіткнення пружне, після нього вертикальна складова швидкості стане меншою від v_A. Отже, механічної енергії кульки тепер не вистачить, щоб пройти тією самою траєкторією після вильоту; **третє проходження трубки неможливе**.

Тепер можна перейти до визначення часу руху. Перший (прямолінійний) відрізок трубки кулька долає за час $t_1 = \sqrt{\frac{2(h+R\cos\alpha)}{g}} - \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Далі кулька рухається дугою кола. Коли її кутове переміщення від точки B дорівнює φ, швидкість кульки $v(\varphi) = \sqrt{2g(h + R\cos\alpha + R\sin\varphi)}$. Значення φ може змінюва-тися від нуля до $\varphi_{\max} = \frac{3\pi}{2} - \alpha$. Час руху дугою кола $t_2 = \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{Rd\varphi}{v(\varphi)}$. І, нарешті, час польоту кульки до точки A становить $t_3 = \frac{R(1+\sin\alpha)}{v_A\cos\alpha}$. Залишається нібито «тільки» знайти суму всіх трьох доданків: $t = t_1 + t_2 + t_3$. Проте якщо перший та третій ви можете підрахувати точно, то інтеграл у виразі для t_2 — навряд чи. Саме тому в запитанні йдеться про наближене значення часу. Існує безліч способів оцінити цей інтеграл, проте скористаємося найпростішим (який, звісно, можна ще значно уточнити за бажання). На коловому відрізку траєкторії швидкість кульки змінюється від мінімальної $v_A = \sqrt{2gh} = \sqrt{\frac{gR(1+\sin\alpha)}{\sin 2\alpha}}$ до максимальної $v_{\max} = \sqrt{2g(h + R\cos\alpha + R)}$.

Таким чином, $\frac{R\varphi_{\max}}{v_{\max}} \le t_2 \le \frac{R\varphi_{\max}}{v_A}$.

Якщо $\alpha = \frac{5\pi}{12}$, то $h = 1{,}966R$; $t_1 = 0{,}127\sqrt{\frac{R}{g}}$; $v_A = 1{,}98\sqrt{gR}$; $v_{\max} = 2{,}54\sqrt{gR}$; $1{,}34\sqrt{\frac{R}{g}} \le t_2 \le 1{,}72\sqrt{\frac{R}{g}}$; $t_3 = 3{,}84\sqrt{\frac{R}{g}}$. Отже: $\boldsymbol{5{,}31\sqrt{\frac{R}{g}} \le t \le 5{,}69\sqrt{\frac{R}{g}}}$ **або** $\boldsymbol{t = (5{,}5 \pm 0{,}2)\sqrt{\frac{R}{g}}}$**.** Як бачимо, навіть за всіх спрощень відносна похибка виявилася меншою ніж 4 %. Правда, за менших значень кута α відносна похибка була б більшою.

(114) Ідея. Збираємо міст. При $t = 0°C$ всі плечі рівні → показ вольтметра нуль. Далі виводимо залежність показів вольтметра від температури.



Міст із двох гілок послідовних резисторів:

- Нижня гілка: R та R.
- Верхня гілка: R та $R(1 + \alpha t)$ (терморезистор у верхньому плечі).

Вольтметр під'єднаний поперек середніх точок. При $t = 0$ міст зрівноважений → $U_в = 0$.

Позначимо струми в гілках I_1(нижня), I_2(верхня). Тоді:

$$I_1 = \frac{U_0}{R\ +\ R} = \frac{U_0}{2R}$$
$$I_2 = \frac{U_0}{R\ +\ R(1+\alpha t)} = \frac{U_0}{R(2+\alpha t)}$$

Потенціали у середніх точках (рахуємо від «низу»):

$$U_{\text{н}} = \ I_1 \cdot \ R\ = \frac{U_0}{2}$$

$$U_{\text{в}} = \ I_2 \cdot \ R(1+\alpha t) = \ U_0 \cdot \frac{1+\alpha t}{2+\alpha t}$$

Показ вольтметра:

$$U\ = \ U_{\text{в}} - \ U_{\text{н}} = \ U_0 \cdot \left(\frac{1+\alpha t}{2+\alpha t} - \frac{1}{2}\right)$$
$$U\ = \ U_0 \cdot \frac{\alpha t}{4\ +\ 2\alpha t}$$

На жаль, зв'язок показів вольтметра з температурою не є лінійним, тому підбираючи масштабний множник U_0 ми не можемо забезпечити повного співпадіння показів вольтметра в мілівольтах з температурою. Але можемо наближено досягти цього поблизу 0^0C, як це сказано в умові.

Лінеаризація поблизу $t = 0$:

$$U\ \approx \frac{U_0 \alpha\ t}{4}$$

Підбираємо U_0, щоб «мВ ≈ °C» біля нуля (як це сказано в умові). Хочемо $1000U \approx t$(мВ відповідають °C):

$$\frac{U_0 \alpha}{4} = \ 10^{\{-3\}} \Rightarrow \ \ U_0 = \frac{4 \cdot 10^{\{-3\}}}{\alpha} = \ 0.8\ \text{В}$$

Діапазон, де похибка ≤ 10%

Покази отриманого таким способом термометра будуть відхилятися від істинного значення температури тим більше, чим далі від 0^0C ми будемо вимірювати. Знайдемо умову, за якої відхилення показів нашого термометра будуть відхилятися від температури в межах 10%:

Беремо «оцінку температури» за приладом: $t_{\text{оцін}} = 1000U$.
Підставляємо **точну** формулу для U ($U_0 = 0.8$ В, $U_0\alpha = 0.004$):

$$1000U\ = \ 1000\ \cdot \frac{U_0 \alpha\ t}{4\ +\ 2\alpha t} = \frac{4\ t}{4\ +\ 2\alpha t}$$

Відносна похибка:

$$\varepsilon(t) = \frac{t_{\text{оцін}} - \ t}{t} = \ \left(\frac{4}{4\ +\ 2\alpha t}\right) - \ 1\ = \ -\frac{2\alpha t}{4\ +\ 2\alpha t}$$

Вимагаємо $|\ \varepsilon\ | \leq 0.1$.

— Для $t > 0$:

$$\frac{2\alpha t}{4\ +\ 2\alpha t} \leq\ 0.1\ \ \Rightarrow\ \ t\ \leq \frac{0.4}{1.8\ \alpha} \approx\ 44.4\ ^\circ C$$

— Для $t < 0$:

$$\frac{2\alpha |t|}{4\ -\ 2\alpha |t|} \leq\ 0.1\ \ \Rightarrow\ \ |t| \leq \frac{0.4}{2.2\ \alpha} \approx\ 36.4\ ^\circ C$$

Підсумок по задачі.

- Схема: міст, терморезистор у одному плечі; при $t = 0$— нуль на вольтметрі.
- Живлення для масштабу «мВ ≈ °С» біля нуля:

$$U_0 =\ 0.8\ \text{В}$$

- Робочий діапазон з похибкою не більш як 10%:

$$-36\ ^\circ C\ \ \ldots\ \ +44\ ^\circ C$$

(115) Позначимо R радіус планети (на рівні верхньої межі атмосфери), M — масу планети. Надалі вважаємо $R = 6400$ км. Другу космічну швидкість v_{II} можна визначити з умови рівності нулю повної механічної енергії:

$$\frac{mv_{\text{II}}^2}{2} - G\frac{Mm}{R} = 0. \qquad (1)$$

Для даної планети, як і для Землі, $v_{\text{II}} = 11{,}2$ км/с.

1. З урахуванням зменшення початкової швидкості на $\Delta v = 10$ м/с механічна енергія ракети стає від'ємною: $W = \frac{m(v_{\text{II}}-\Delta v)^2}{2} - G\frac{Mm}{R} < 0$. Оскільки $\Delta v \ll v_{\text{II}}$, можна записати $W = -mv_{\text{II}}\Delta v$. Ракета піднімається до найвищої точки, а потім падає. Траєкторію її руху (відрізок прямої) можна розглядати як вироджений випадок еліпсу з великою піввіссю a. Механічна енергія пов'язана з великою піввіссю*: $W = -G\frac{Mm}{2a}$. З двох останніх формул для енергії маємо $a = \frac{GM}{2v_{\text{II}}\Delta v} = R\frac{v_{\text{II}}}{4\Delta v}$ (це значення перевищує радіус планети в 280 разів). Щоб знайти період T руху такою «еліптичною» траєкторією, порівняємо його з періодом T_0 руху коловою орбітою на малій висоті над планетою (легко довести, що $T_0 = 2\pi\sqrt{R/g}$). Відповідно до третього закону Кеплера $T = T_0\left(\frac{a}{R}\right)^{3/2} = T_0\left(\frac{v_{\text{II}}}{4\Delta v}\right)^{3/2}$. Підстановка числових даних дає $T = 275$ діб. Легко показати, що врахування крихітної ділянки траєкторії, якої «не вистачає» до повного «еліпсу», спричинить поправку меншу від 20 хв.

2. Якщо початкова швидкість дійсно дорівнює другій космічній, то в будь-якій точці траєкторії сума потенціальної та кінетичної енергій ракети дорівнює нулю. Звідси визначаємо швидкість руху на відстані r від центра планети: $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$. Оскільки $v = \frac{\Delta r}{\Delta t}$, маємо $\sqrt{r}\Delta r = \sqrt{2GM}\Delta t$. Це співвідношення виконується для кожного *малого* проміжку часу Δt.

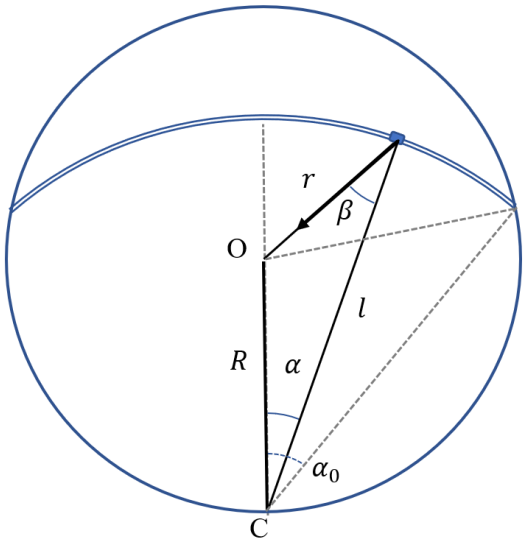
Звернімо увагу: сума таких рівнянь для всіх малих проміжків часу, на які можна розбити час руху t, дає співвідношення $S = \sqrt{2GM}t$. Тут S — та сама площа під графіком, про яку йшлося

в підказці до умови задачі. У даному випадку $a = 0{,}5$, тому $S = \frac{2}{3}\left(r^{3/2} - R^{3/2}\right)$. Звідси $r = R\left(1 + \frac{3v_{II}t}{2R}\right)^{2/3} \approx R\left(\frac{3v_{II}t}{2R}\right)^{2/3}$.

Зрозуміло, що наведена підказка зайва для тих, хто вміє інтегрувати.

Підставивши числові дані, знаходимо $r = 1570R = 10^{10}$ м. На цій великій відстані швидкість зменшується в 40 разів порівняно з початковою.

(116) А) На рисунку зображене довільне положення вагончика масою m_0 і сила тяжіння F, що діє на нього на відстані r від центра. Оскільки гравітаційний вплив зовнішніх сферичних шарів компенсується, рахуємо силу взаємодії вагончика з кулею радіуса r і масою m_r:



$$F = \frac{Gm_0m_r}{r^2} = \frac{4}{3}\pi G m_0 \rho r.$$

Сила F спрямована до центру і пропорційна відстані r, як і сила Гука $F = -kx$ з коефіцієнтом пропорційності $k = \frac{4}{3}\pi G m_0 \rho$. Отже, потенціальна енергія гравітаційної взаємодії вагончика з астероїдом $U = \frac{kx^2}{2}$ набуває мінімального значення на мінімальній відстані від $l - R$ від центру астероїда, а кінетична енергія, навпаки, максимального. Скористуємося законом збереження енергії

$$\frac{m_0v_0^2}{2} + \frac{kR^2}{2} = \frac{m_0v_{max}^2}{2} + \frac{k(l-R)^2}{2},$$

з якого, враховуючи, що $v_0 = 0$ і $k = \frac{4}{3}\pi G m_0 \rho = \frac{Gm_0m}{R^3} = \frac{m_0 g}{R}$, знаходимо

$$v_{max} = \sqrt{2lg\left(1 - \frac{l}{2R}\right)}.$$

Очікувано, що максимальна швидкість залежить від радіусу тунелю. З енергетичних міркувань зрозуміло, що з усіх тунелей найбільшою швидкості вагончик досягне у тунелі, який проходитиме через центр астероїда. Це випливає й з отриманої формули, навіть без використання похідної:

$$v_{max} = \sqrt{2lg\left(1 - \frac{l}{2R}\right)} = \sqrt{\frac{g}{R}(2Rl - l^2)} = \sqrt{\frac{g}{R}(R^2 - (R-l)^2)}.$$

За $l = R$ підкореневий вираз набуває максимального значення, а швидкість при проходженні центру досягає значення першої космічної.

Б) Спроектуємо другий закон Ньютона на напрям з вагончика на точку С, центр дуги тунелю: $m_0\frac{v^2}{l} = Fcos\beta + N$, звідки

$$N = \frac{m_0 v^2}{l} - krcos\beta.$$

Невагомість наступе, коли $N = 0$. Позбудемось від $m_0 v^2$ з закону збереження енергії $\frac{m_0 v^2}{2} + \frac{kr^2}{2} = \frac{kR^2}{2}$, куди з теореми косинусів підставимо $r^2 = R^2 + l^2 - 2Rlcos\alpha$, а $rcos\beta$ замінемо $l - Rcos\alpha$ (див. Рис.). Після скорочення маємо

$$cos\alpha = \frac{2}{3}\frac{l}{R}.$$

Значення $cos\alpha$ з однієї сторони не перевищує одиниці, а з іншої обмежено геометрією тунелю: $cos\alpha > cos\alpha_0 = \frac{l}{2R}$. Отже

$$\frac{l}{2R} < \frac{2}{3}\frac{l}{R} < 1.$$

Ліва нерівність виконується завжди, а з правої маємо, що невагомість спостерігатиметься тільки в тунелях з радіусом у 1,5 рази меншими за радіус астероїда під кутом $\alpha = \pm\arccos\left(\frac{2}{3}\frac{l}{R}\right)$ до лінії СО. Тобто, під час руху з однієї точки на поверхні до іншої у вагончику двічі спостерігатиметься невагомість, і він має перевертатися для зручності пасажирів. Виключення – тонель радіусом $l = 1{,}5R$, де невагомість наступатиме на мить посередині.

В) Спроектуємо силу на напрям вздовж тунелю і згідно другого закону Ньютона

$$m_0 l^2 \alpha'' = -Fsin\beta \cdot l = -krsin\beta \cdot l = -kRsin\alpha \cdot l.$$

Маємо рівняння коливань математичного маятника $\alpha'' + \frac{g}{l}sin\alpha = 0$, яке для малих кутів α стає рівнянням гармонічних коливань $\alpha'' + \frac{g}{l}\alpha = 0$ з незалежним від амплітуди періодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

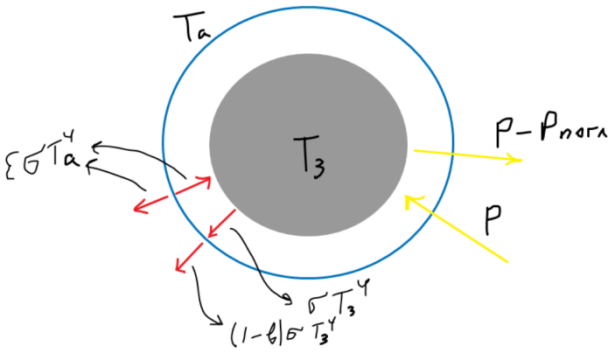
Рівняння гармонічних коливань можна було отримати інакше, продиференціювавши закон збереження енергії за часом:

$$\frac{m_0(l\alpha')^2}{2} + \frac{kr^2}{2} = E = Const,$$

куди попередньо доцільно підставити $r^2 = R^2 + l^2 - 2Rlcos\alpha$ з теореми косинусів.

(117) А) Потужність сонячного випромінення, яке досягає Землі: $P = P_c \frac{\pi {R_з}^2}{4\pi {R_0}^2}$. Поглинається випромінення $P_{\text{погл}} = aP_c \frac{{R_з}^2}{4{R_0}^2}$, а інше відбивається. Для теплового балансу необхідно, щоб така сама потужність $P_{\text{погл}}$ випромінювалась за рахунок теплового випромінення поверхні Землі, отже: $aP_c \frac{{R_з}^2}{4{R_0}^2} = \sigma 4\pi {R_з}^2 T^4$. Звідки $T = \sqrt[4]{\frac{aP_c}{16\pi\sigma {R_0}^2}} \approx 254\ \text{К} = -19°\text{С}$. Це явно мало для середньої температури нашої Землі.

Б) Розглянемо дві концентричні сфери. Внутрішня – абсолютно чорне тіло. Зовнішнє – частково прозоре тіло. На рисунку справа показані потоки випромінення в даній системі. Не повинно бути теплового потоку від одного тіла до іншого, адже температури у тіл однакові. Від атмосфери до Землі йде потужність на квадратний метр $\varepsilon\sigma T^4$, а Земля повертає атмосфері частину свого випромінення, яка дорівнює $b\sigma T^4$. Ці енергії мають бути рівні, отже $\varepsilon = b$.В) На рисунку справа показані потоки випромінення у системі Земля та атмосфера, які опромінюються Сонцем.



Температура Землі не змінюється, тож енергія, що приходить від Сонця та від атмосфери має випромінюватись:

$$P_{\text{погл}} + b\sigma 4\pi {R_з}^2 {T_a}^4 = \sigma 4\pi {R_з}^2 {T_з}^4$$

Середня температура атмосфери теж не змінюється, тож енергія поглинута атмосферою від Землі має випромінюватитись назад на Землю і в космос:

$$b\sigma 4\pi {R_з}^2 {T_з}^4 = 2b\sigma 4\pi {R_з}^2 {T_a}^4$$

Об`єднуючи два останніх рівняння отримуємо середню температуру Землі:

$$T_з = \sqrt[4]{\frac{aP_c}{8\pi\sigma {R_0}^2 (2-b)}} \approx 273\ \text{К} = 0℃$$

Це значення є вже значно ближчим до реальності.

Г) Для обрахування температури Землі з «абсолютно чорною» для інфрачервоного випромінення атмосферою можна слідувати міркуванням, які були застосовані для розв'язку попередніх пунктів, а можна скористатись отриманою в 3 пункті формулою підставивши b=1 (атмосфера все поглинає, а значить і максимально випромінює).

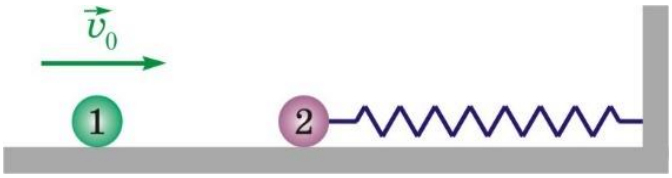
Тоді матимемо:

$$T_з = \sqrt[4]{\frac{aP_c}{8\pi\sigma {R_0}^2}} \approx 302\ \text{К} = 29℃$$

Неприємне, м'яко кажучи, потеплення.

(118) Виберемо вісь Ox у напрямі $\vec{v}_0$ (див. рисунок). Із законів збереження енергії та імпульсу легко знайти проекції швидкостей куль відразу після пружного лобового зіткнення:

$$u_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0, u_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0.$$



Після зіткнення куля 2 здійснює на пружині гармонічні коливання з амплітудою $A = u_{2x}\sqrt{\frac{m_2}{k}}$ та періодом $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_2}{k}}$, її координата змінюється за законом $x_2 = A\sin\sqrt{\frac{k}{m_2}}t$.

А) Очевидно, що друге зіткнення кулі 1 з нерухомою кулею 2 може відбутися тільки в момент *першої* миттєвої зупинки кулі 2, тобто через чверть періоду її коливань на пружині. Умова такої зустрічі: $u_{1x}\frac{T}{4} = A$, звідки $\pi m_2 = (\pi - 4)m_1 < 0$. Як бачимо, ця умова не виконується *ніколи*.

Легко показати, що насправді $u_{1x}\frac{T}{4} < A$, тобто через чверть періоду кулька 1 ще не наздожене кульку 2. Отже, друге зіткнення обов'язково відбудеться на «зустрічних курсах».

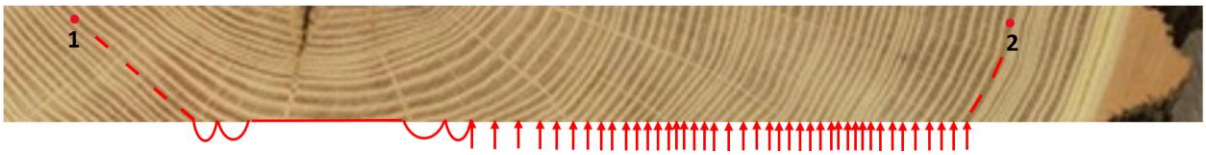
Б) Умова другого зіткнення має вигляд $x_1(\tau) = x_2(\tau)$, тобто $u_{1x}\tau = A\sin\sqrt{\frac{k}{m_2}}\tau$, звідки $m_1 = \frac{m_2}{1-2\sin\alpha/\alpha}$, де $\alpha = \tau\sqrt{\frac{k}{m_2}}$. Підстановка числових значень дає $\alpha = 2{,}9$ і m_1 =2,3 кг.

Проекція швидкості кулі 2 у момент перед зіткненням від'ємна:

$$u_{2x}(\tau) = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_0\cos\alpha.$$

Відносна швидкість куль: $v_{\text{rel}} = u_{1x} - u_{2x}(\tau) = 1{,}15v_0$.

(119) Підрахуємо кількість років $t_{1-2} = t_1 - t_2$ між віком деревини, що утворилась t_1 років тому у точці 1, і віком деревини, що утворилась пізніше, t_2 років тому, у точці 2.



Згідно фото маємо 41 проміжок між відповідними річними кільцями. Вважаючи відсоток Карбону14 в атмосфері однаковим, запишемо закон радіоактивного розпаду для однакової початкової кількості N_0 атомів С14 в однакових масах утвореної в різні роки сухої деревини. У момент взяття проб ці кількості зменшились до:

$$N_1 = N_0 2^{-\frac{t_1}{T}},$$

$$N_2 = N_0 2^{-\frac{t_2}{T}}.$$

Поділимо ці два рівняння

$$\frac{N_1}{N_2} = 2^{-\frac{t_1-t_2}{T}} = 2^{-\frac{t_{1-2}}{T}} = 2^{-\frac{41}{5730}} \approx 0{,}99505,$$

або $N_1 \approx 0{,}995N_2$, звідси знаходимо, що кількість Карбону14 у пробі деревини у точці 1 менша за його кількість у точці 2 на 0,5%.

Тепер знайдемо відповідь на друге питання. За рахунок щорічному приросту деревини кількість радіоактивних атомів збільшується. Водночас кількість радіоактивних атомів, що встигли накопичитись (і ще не розпалися) за весь час існування дерева щорічно зменшується внаслідок радіоактивного розпаду. Чим більше атомів у дереві, тим більша активність розпадів. Що переважить, збільшення за рахунок приросту чи розпад за рахунок великої кількості? Підрахуємо загальну кількість радіоактивних атомів на даний момент часу, вважаючи, що дереву k років. Позначимо проміжок часу в 1 рік через Δt і рахуватимемо кількість атомів С14 взимку, коли ріст деревини або повністю припиняється, або сповільнюється (в більш теплих географічних широтах). Тоді взимку останньому літньому приросту деревини у середньому приблизно пів року або $\Delta t/2$. Позначимо через n_0 – концентрацію С14 в момент утворення деревини. Концентрації С14 зменшуються згідно закону радіоактивного розпаду. Тоді загальна кількість атомів С14

$$N = n_1\Delta V_1 + n_2\Delta V_2 + \cdots + n_k\Delta V_k$$
$$= n_0 2^{-\frac{\Delta t/2}{T}}\Delta V_1 + n_0 2^{-\frac{\Delta t(1/2+1)}{T}}\Delta V_2 + \cdots + n_0 2^{-\frac{\Delta t(1/2+k-1)}{T}}\Delta V_k.$$

Річний приріст деревини можна оцінити як різницю об'ємів двох вкладених «зимових» конусів, радіусами $r - \Delta r/2$ і $r + \Delta r/2$ (радіус кільця визначатимемо його серединою). Об'єм конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^3 \mathrm{ctg}\alpha,$$

де α кут між висотою і твірною конуса. Тоді

$$\Delta V = \frac{1}{3}\pi\mathrm{ctg}\alpha((r + \Delta r/2)^3 - (r - \Delta r/2)^3) = \frac{1}{3}\pi\mathrm{ctg}\alpha\left(3r^2\Delta r - \frac{\Delta r^3}{4}\right)$$
$$= \pi r^2\mathrm{ctg}\alpha\Delta r\left(1 - \frac{1}{12}\frac{\Delta r^2}{r^2}\right).$$

Згідно умови ширина кільця на зрізі Δr мала у порівнянні з радіусом кільця r, а тим більше величина $\frac{1}{12}\frac{\Delta r^2}{r^2}$ у порівнянні з одиницею в дужках останнього виразу. Отже, приріст об'єму конусу, а з ним і стовбура дерева за рік:

$$\Delta V = \pi r^2\mathrm{ctg}\alpha\Delta r.$$

За умовою ширина кільця обернено пропорційна до квадрату його радіусу, тобто $\Delta r = \frac{C}{r^2}$, де C – деяка невідома константа. За цієї умови приріст об'єму виявляється сталою величиною і не залежить від радіусу кільця:

$$\Delta V = \pi r^2\mathrm{ctg}\alpha\frac{C}{r^2} = \pi C\mathrm{ctg}\alpha.$$

Тоді загальна кількість радіоактивних атомів взимку *k*-го року існування дерева може бути розрахована як сума геометричної прогресії:

$$N(k) = n_0\Delta V 2^{-\frac{\Delta t/2}{T}}\left(1 + 2^{-\frac{\Delta t}{T}} + 2^{-\frac{2\Delta t}{T}} + \cdots + 2^{-\frac{(k-1)\Delta t}{T}}\right) = n_0\Delta V 2^{-\frac{\Delta t/2}{T}}\frac{1 - 2^{-\frac{k\Delta t}{T}}}{1 - 2^{-\frac{\Delta t}{T}}}.$$

У цій формулі врахований і останній літній приріст і навіть зменшення радіоактивних атомів цього приросту за півроку внаслідок розпаду. Як бачимо, зі збільшенням кількості років *k* існування дерева кількість $N(k)$ атомів C14 монотонно збільшується (оскільки зменшується $2^{-\frac{k\Delta t}{T}}$) і для всіх дуже старих дерев однакового виду досягає приблизно однакового значення

$$\frac{n_0\pi C\mathrm{ctg}\alpha}{2^{\frac{\Delta t/2}{T}} - 2^{-\frac{\Delta t/2}{T}}}.$$

Звісно, все сказане справедливо для припущень нашої моделі.

(120) Спочатку розглянемо такий рух катера в системі відліку із берегом, як на рисунку.

Припустимо, що у такому випадку катеру вигідно дістатись деякої точки на межі ріки та заплави на відстані x від центру заплави і після цього рухатись уздовж цієї межі до краю заплави (див. рисунок). Діставатись інших точок заплави немає сенсу, тому що доведеться

проходити відстань більшу, ніж $R - x$ (виділену на рисунку дугою) з меншою швидкістю, що явно збільшить час руху до протилежного берега.

При цьому на першому етапі власна швидкість катера відносно води має бути спрямована під деяким кутом α до берега, як показано на рисунку.

Загальний час руху катера у такому випадку:

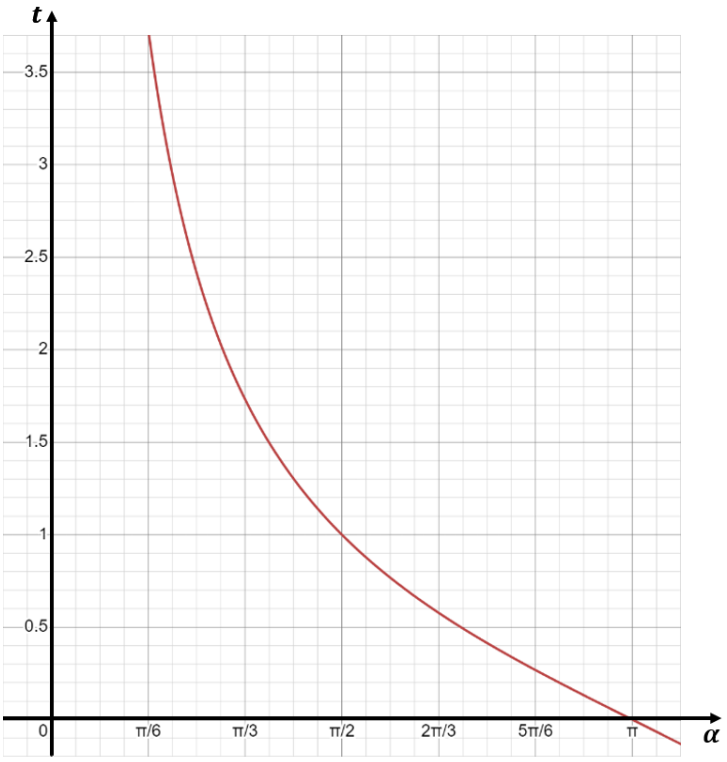
$$t = \frac{L}{v \sin \alpha} + \frac{R - x}{v + u}$$

З іншого боку:

$$\frac{L}{v \sin \alpha} = \frac{x}{u - v \cos \alpha}$$

$$x = \frac{L(u - v \cos \alpha)}{v \sin \alpha}$$

$$t = \frac{L + R \sin \alpha + L \cos \alpha}{(v + u) \sin \alpha} = \frac{R}{v + u} + \frac{L}{v + u} \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$$



Очевидно, що дана формула має фізичний сенс тільки якщо катер не знесе правіше за правий нижній край півкола, а значить у α є певна максимальна межа.

Подивимось на графік другого доданку в формулі для часу перепливання.

Бачимо, що чим більший α, тим менший повний час перепливання. Значить нам треба плисти прямо на правий нижній кут заплави.

Отже

$$x = R.$$

Тоді

$$\frac{L}{v \sin \alpha} = \frac{R}{u - v \cos \alpha}$$

$$\frac{L^2}{v^2(1 - \cos^2 \alpha)} = \frac{R^2}{(u - v \cos \alpha)^2}$$

Після математичних перетворень, отримаємо квадратне рівняння:

$$v^2(L^2 + R^2) \cos^2 \alpha - 2L^2 uv \cos \alpha + L^2 u^2 - R^2 v^2 = 0$$

Звідки

$$\cos\alpha = \frac{L^2u \pm R\sqrt{R^2v^2 + L^2(v^2 - u^2)}}{v(L^2 + R^2)}$$

Оскільки $\cos\alpha$ має бути якомога меншим (і водночас, $\sin\alpha$ якомога більшим), нас цікавить корінь зі знаком мінус.

$$\cos\alpha = \frac{L^2u - R\sqrt{R^2v^2 + L^2(v^2 - u^2)}}{v(L^2 + R^2)}$$

Тоді

$$\boldsymbol{t = \frac{R}{u - v\cos\alpha} = \frac{L^2 + R^2}{Ru + \sqrt{R^2v^2 + L^2(v^2 - u^2)}}}$$

Але за яких умов працює ця відповідь? Розглянемо допоміжний випадок. Якщо ми спрямуємо швидкість катера відносно води перпендикулярно до берега ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) і опинимось правіше крайньої правої точки затоки, то нам буде вигідно плисти саме так, адже в такому випадку ми наближались до берега із максимальною швикістю v і досягаємо його за час

$$t = \frac{L}{v}.$$

Умовою вигідності такого плавання є

$$v \le \frac{Lu}{R}.$$

Особливо очевидними ці міркування є в системі відліку із річкою, спробуйте проробити їх. Значить, якшо $v > \frac{Lu}{R}$, то вигіднішим буде саме наш початковий варіант плавання до найправішого краю затоки.

Отже,

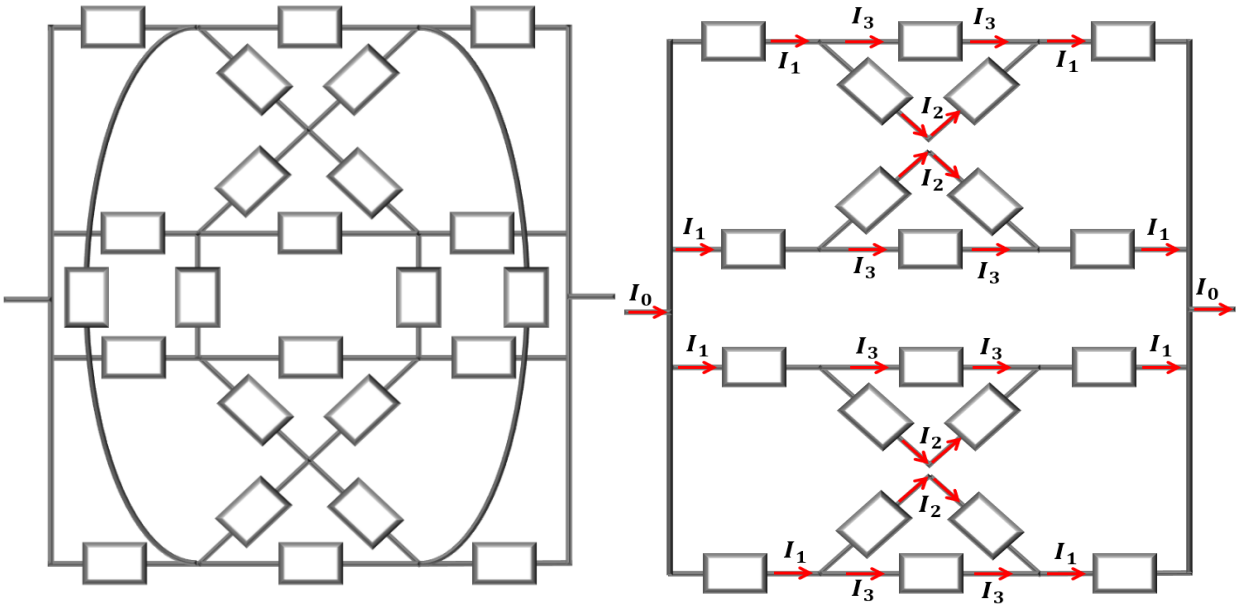
1) Якщо швидкості в умові задачі співвідносяться як
$$v \le \frac{Lu}{R},$$
то у такому випадку достатньо зорієнтувати катер перпендикулярно течії і катер пристане до іншого берега ріки за межами заплави. Шуканий час буде визначатись як
$$t = \frac{L}{v}.$$

2) Якщо швидкості в умові задачі співвідносяться як
$$v > \frac{Lu}{R},$$
то для того, щоб час переправи був мінімальним, нам необхідно спрямувати катер точно у найправішу точку кінця заплави. Час переправи в такому випадку буде
$$\mathrm{t} = \frac{\mathrm{L}^2 + \mathrm{R}^2}{\mathrm{Ru} + \sqrt{\mathrm{R}^2\mathrm{v}^2 + \mathrm{L}^2(\mathrm{v}^2 - \mathrm{u}^2)}}.$$

(121) Еквівалентна електрична схема має вигляд:

У даному випадку кожен резистор є еквівалентом чверті дуги кола

З урахуванням того, що схема є симетричною, можна видалити усі вертикальні резистори (струм у них не протікає) і роз'єднати дві точки:



Тоді еквівалентний опір кола:

$$R_{\text{заг}} = \frac{2R + \frac{2R}{3}}{4} = \frac{2R}{3},$$

де

$$R = \frac{\rho\pi r}{2}$$

Тоді

$$R_{\text{заг}} = \frac{\rho\pi r}{3}$$

Загальна сила струму

$$I_0 = \frac{U_0}{R_{\text{заг}}} = \frac{\boldsymbol{3U_0}}{\boldsymbol{\rho\pi r}} = \mathbf{2,00}\ \text{мА}$$

Тоді у кожному із чотирьох елементів, приєднаних безпосередньо до джерела напруги

$$I_1 = \frac{I_0}{4} = \mathbf{0,50}\ \text{мА}$$

У кожному з «трикутників» всередині струм ділиться у співвідношенні 1:2. Тому

$$I_2 = \frac{I_1}{3} = \mathbf{0,17}\ \text{мА}$$

$$I_3 = \frac{2I_1}{3} = \mathbf{0,33}\ \text{мА}$$

Оскільки схема симетрична, кожен елемент, який є чвертю кола, створює у центрі кола деяку індукцію магнітного поля, але можна знайти симетричний до нього елемент, який створює таке саме за величиною магнітне поле у протилежному напрямі. У результаті усі ці магнітні поля у центрі куба компенсуються.

Відповідь: 0,5 мА, 0,17 мА, 0,33 мА, 0 Тл

(122) Розглянемо пучок циліндричних світлових променів шириною h, паралельних до головної оптичної осі сферичного дзеркала (рис. 1, рис. 2. Зображення подані в проекції на фронтальну площину). За умовою вісь пучка та головна оптична вісь сферичного дзеркала співпадають, тому картина симетрична відносно осі ОС.

Розглянемо нижній промінь пучка. Нехай L – точка падіння променів на поверхню дзеркала. Проведемо з центра дзеркала радіус OL. Радіус перпендикулярний до дотичної до сфери площини, проведеної в точці падіння – точці L. Тому всі вказані на рис. 1 кути дорівнюють α. Таким чином, маємо рівнобедрений трикутник OAL (OA = AL). Кут FAP є зовнішнім кутом трикутника OAL, а тому його величина дорівнює 2α. З трикутника OAL легко отримуємо

$$2\times OA\times\cos\alpha = OL. \qquad (1)$$

Але OF = R/2, OC = R. Тому, використавши (1), маємо

$$FA = \Delta x = OA - OF = \frac{R}{2}(\sec\alpha - 1). \qquad (2)$$

Вираз (2) визначає величину повздовжньої сферичної аберації, адже розглянутий промінь після віддзеркалення не пройшов через головний фокус дзеркала – точку F, а змістився в напрямку до вершини дзеркала вздовж головної оптичної осі на величину Δx. Зрозуміло, що всі інші промені пучка, які лежать між крайнім нижнім променем і головною оптичною віссю дзеркала перетнуть після віддзеркалення головну оптичну вісь десь на відрізку FA (рис. 2).

З прямокутного трикутника PAF

$PF = FA\times tg2\alpha = \Delta x\times tg2\alpha.$

Використовуючи (2) з останнього виразу

$$\Delta y = \frac{R}{2}(\sec\alpha - 1)tg2\alpha. \qquad (3)$$

Вираз $2\times\Delta y$ визначає величину поперечної сферичної аберації, адже «наш» промінь після віддзеркалення не пройшов через головний фокус дзеркала – точку F, а змістився в напрямку перпендикулярному до головної оптичної осі на величину Δy. Зрозуміло, що всі інші промені пучка, які лежать між крайнім нижнім променем і головною оптичною віссю дзеркала перетнуть після віддзеркалення вказаний напрямок десь на відрізку NP (рис. 1).

Подамо вирази (2) та (3) через фактор ξ – ступінь екранування пучка діафрагмою ($\xi = h/R$).

З рис 1 та рис. 2 бачимо, що $R\times\sin\alpha = h/2$. Звідси $\sin\alpha = h/(2R) = \xi/2$. За відомими формулами тригонометрії звідси знаходимо значення тригонометричних функцій, що входять до виразів (2) та (3) через ξ. В результаті, маємо:

$$2 \times \Delta y = R \times \frac{\xi(2-\sqrt{4-\xi^2})}{2-\xi^2} \quad (4)$$

$$\Delta x = \frac{R}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{4-\xi^2}} - 1\right) \quad (5)$$

Зрозуміло, що $\xi < \sqrt{2}$, інакше при $\lim\xi = \sqrt{2}$, $2 \times \Delta y = \infty$.

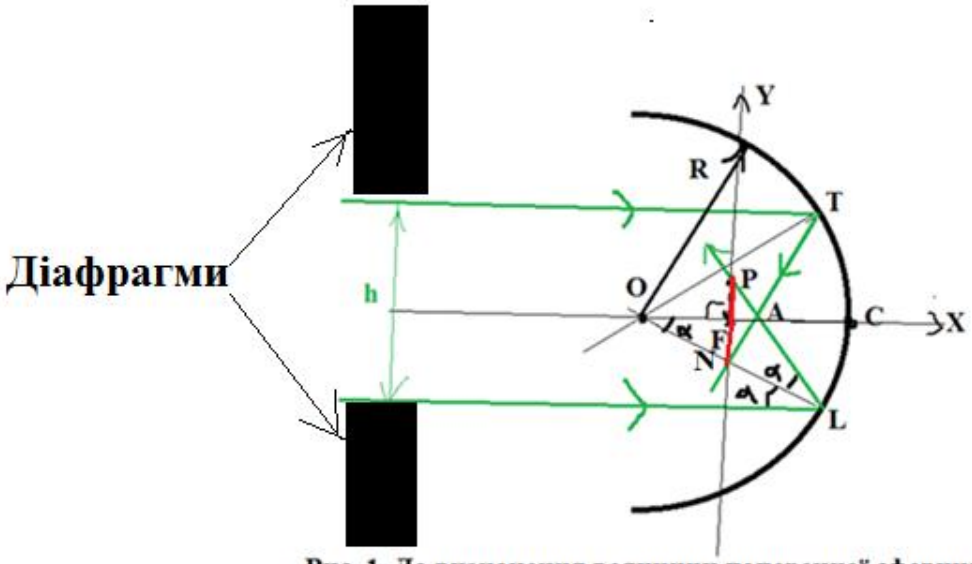


Рис. 1. До визначення величини поперечної сферичної аберації

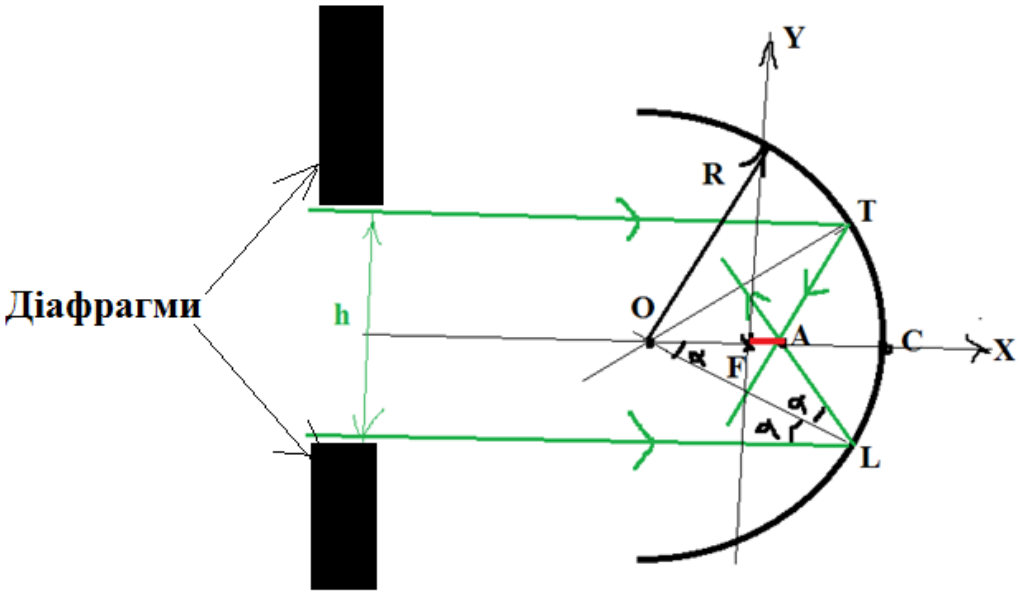
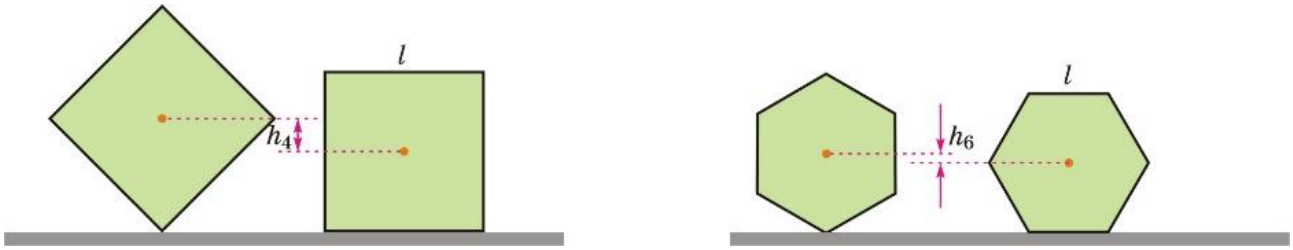


Рис. 2. До визначення величини повздовжньої сферичної аберації

(123) А) З умови випливає, що корпуси платформ рухаються поступально, повторюючи переміщення осей «коліс». Можна вважати, що витрати енергії зумовлені тільки періодичним підніманням платформ (потім після опускання ця енергія перетворюється на внутрішню під час непружних зіткнень «коліс» з ґрунтом). Цикл «піднімання + опускання» супроводжується

переміщенням платформи вперед на l. Максимальна висота h підйому платформ: як можна отримати з рисунку, для КБ-4 $h_4 = \frac{l}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$, для КБ-6 $h_6 = \frac{l}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$.



Таким чином, витрата енергії w під час переміщення на одиницю довжини:

$w_4 = \frac{mgh_4}{l} = \frac{mg}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$, $w_6 = \frac{mgh_6}{l} = \frac{mg}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)$. Отже, $\frac{w_4}{w_6} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}} = 1{,}55$. Платформа КБ-4 витрачатиме в півтора раза більше енергії.

Б) Під час чергового «кроку» вісь O здійснює рівномірний рух по колу радіусом $l/\sqrt{2}$, центр якого розташований у нижній точці A «колеса». Нормальне прискорення $\vec{a}$ осі напрямлене вздовж $\overrightarrow{OA}$, модуль цього прискорення $\omega^2\, l/\sqrt{2}$. Коли вектор $\overrightarrow{OA}$ утворює гострий кут α з вертикальною віссю Oy, проєкції $a_x = \pm\frac{\omega^2 l \sin\alpha}{\sqrt{2}}$, $a_y = \frac{\omega^2 l\cos\alpha}{\sqrt{2}}$. Щоб не було проковзування, вантаж має рухатися з таким самим прискоренням. Горизонтальне прискорення надає вантажу сила тертя, яка не перевищує μN, тобто $\mu m(g-a_y)$. Отже, для всіх кутів від нуля до 45° має виконуватися умова $|a_x| \le \mu(g-a_y)$, тобто:

$$\mu \ge \frac{\sin\alpha}{A-\cos\alpha} = f(\alpha).$$

Тут $A = \frac{g\sqrt{2}}{\omega^2 l}$ (з умови випливає, що $A > 1$).

Проаналізуємо залежність $f(\alpha)$. Похідна цієї функції: $\frac{df}{d\alpha} = \frac{A\cos\alpha - 1}{(A-\cos\alpha)^2}$.

Якщо $A > \sqrt{2}$, то функція $f(\alpha)$ в розглянутому інтервалі монотонно зростає. Умова відсутності проковзування тоді має вигляд:

$$\mu \ge f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2A-\sqrt{2}}$$

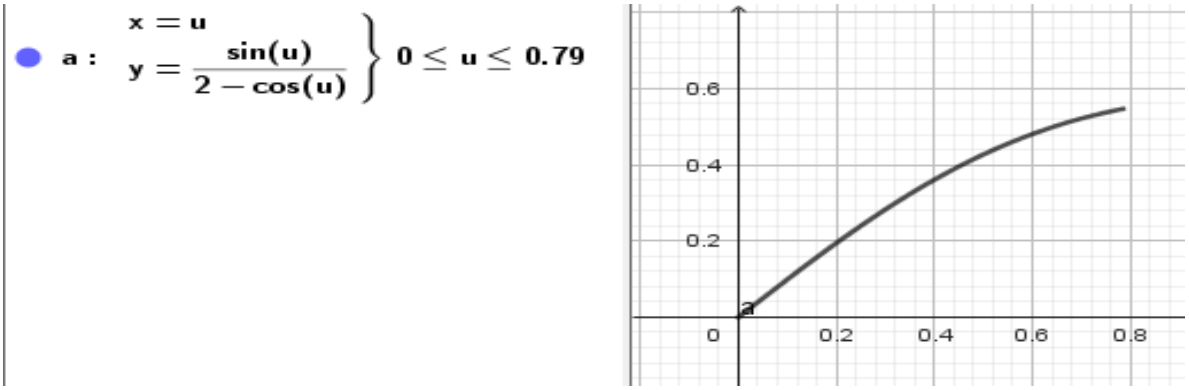
Якщо ж $1 < A < \sqrt{2}$, то функція $f(\alpha)$ в розглянутому інтервалі має максимальне значення, коли $\cos\alpha = 1/A$. Умова відсутності проковзування тоді має вигляд:

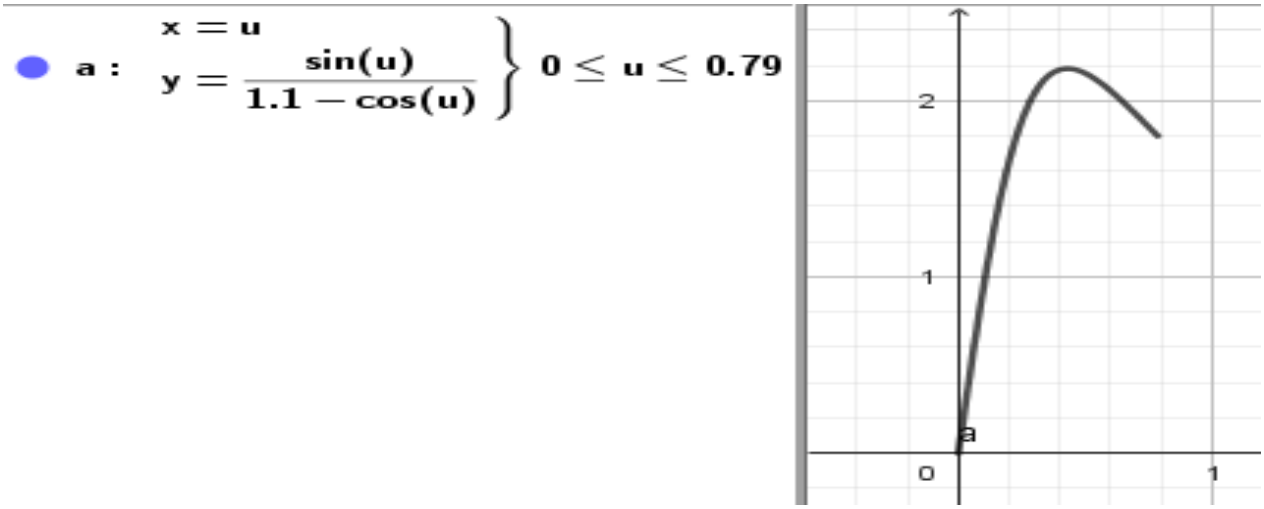
$$\mu \ge \frac{1}{\sqrt{A^2-1}}.$$

У першому з випадків маємо $A_1 = 2$, у другому — $A_2 = 1{,}1$.

Відповідні вимоги до коефіцієнта тертя: $\mu_1 \ge 0{,}55$ і $\mu_2 \ge 2{,}2$.

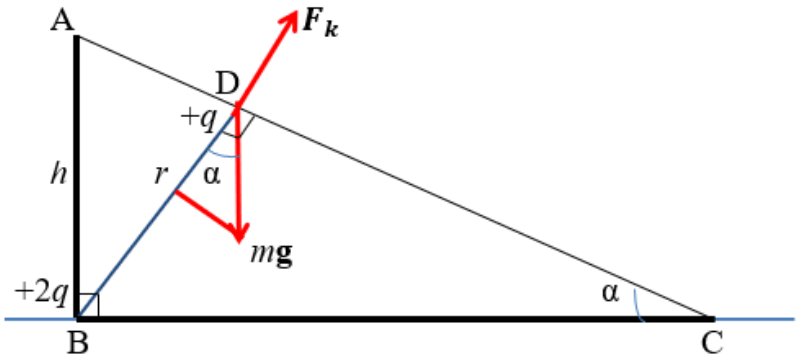
На рисунку нижче наведений графік залежності функції $f(\alpha)$ від кута α (в радіанах) для двох значень параметра A (2 і 1,1).





(124) Зрозуміло, що якщо навіть в найближчій до нерухомого заряду +2q точці похилої площини сила Кулона не зможе протидіяти проекції сили тяжіння на радіус-вектор рухомого заряду +q, то кулька зможе досягнути нижньої точки своєї траєкторії – точки C.

Найближча до нерухомого заряду +2q точка на похилій площині розташована в основі перпендикуляра, опущеного на похилу площину з місця «дислокації» нерухомого заряду +2q (див. рис.). Відстань BD якраз і є саме такою.



Трикутники BDC та ABC є подібними (за трьома кутами), що дає нам змогу записати відношення

$$BC/AC = BD/AB$$

Звідси

$$BD = r = BC \times AB/\mathrm{AC} = h\cos\alpha,$$

$$r = h\cos\alpha \quad (1)$$

Запишемо проекцію сили Кулона на напрямок **BD** враховуючи (1)

$$F_{k\,max} = k\times\frac{2q^2}{r^2} = 2k\times\left(\frac{q}{h\cos\alpha}\right)^2,$$

$$F_{k\,max} = 2k\times\left(\frac{q}{h\cos\alpha}\right)^2. \quad (2)$$

В останніх двох виразах k – стала Кулона.

Вектор $\mathbf{F_{k\,max}}$ – перпендикулярний до похилої площини. Проекція сили тяжіння на напрямок BD

$$F_{T,BD} = (-mg\cos\alpha). \quad (3)$$

Умовою відриву кульки в точці D траєкторії, очевидно, є наступна умова:

$$F_{k\,max} - F_{T,BD} = 0. \quad (4)$$

Виходячи з (2-4), маємо

$$2k\times\left(\frac{q}{h\cos\alpha}\right)^2 = mg\cos\alpha,$$

Тому для забезпечення відриву кульки необхідно вимагати виконання умови:

$$m < \frac{2k}{g\cos\alpha}\left(\frac{q}{h\cos\alpha}\right)^2 = \frac{2k}{g\cos^3\alpha}\times\left(\frac{q}{h}\right)^2,$$

$$m < \frac{2k}{g\cos^3\alpha}\times\left(\frac{q}{h}\right)^2. \quad (5)$$

Водночас, якщо кулька відірветься від похилої площини в точці А, це буде суперечити умові, адже сказано, що кулька ***зісковзує*** по похилій площині. Тому необхідно, щоб виконувалась умова

$$mg > 2k\times\left(\frac{q}{h}\right)^2,$$

$$m > 2k\times\left(\frac{q}{h}\right)^2/g.$$

Таким чином

$$2k\times\left(\frac{q}{h}\right)^2/g < m < \frac{2k}{g\cos^3\alpha}\times\left(\frac{q}{h}\right)^2 \quad (*)$$

Знайдемо швидкість кульки в деякій точці Р, що розташована між точками А та D, припускаючи, що в цій точці починається відрив кульки від поверхні похилої площини.

Для цього можна скористатись законом збереження механічної енергії (ЗЗМЕ). Цей закон справджується в нашому випадку, так як наша система – замкнена і в ній діють лише потенціальні поля.

Візьмемо за нульове значення рівня потенціальної енергії гравітаційного поля рівень, що співпадає з горизонталлю. Запишемо ЗЗМЕ для точок А і Р. Маємо:

для точки А: $$E_{кін,A} = 0,\ E_{пот,A} = mgh + \frac{2k}{h}q^2 \quad (6)$$

для точки Р: $$E_{кін,P} = mv^2{}_P/2;\ E_{пот,P} = mgl\cos\beta + \frac{2k}{l}q^2, \quad (7)$$

де l – відстань від точки B до точки P; β – кут між вертикаллю в точці B та прямою BP.

З (6, 7)

$$mgh + \frac{2k}{h}q^2 = mv^2_P/2 + mgl\cos\beta + \frac{2k}{l}q^2 . \qquad (8)$$

З (8) знаходимо

$$v_P = (2g(h - l\cos\beta) + \frac{4k}{m}q^2(\frac{1}{h} - \frac{1}{l}))^{1/2}. \qquad (9)$$

Так як в точці P спостерігаємо відрив кульки, то можно записати, що в цей момент виконується рівність

$$mg\cos\beta = \frac{2k}{l^2}q^2,$$

$$m = \frac{2k}{l^2 g\cos\beta}q^2.$$

Підставимо це значення в (9)

$$v_P = (2g(h + 2\,l\,(\frac{l}{h} - 1)\cos\beta)^{1/2}. \qquad (10)$$

З (10) бачимо, що швидкість монотонно зростає при зростанні кута (цей висновок легко отримати, якщо взяти похідну в (10) по куту β).

Водночас, необхідно, щоб відбувся відрив кульки, адже цього вимагає умова задачі. Якщо відрив не відбудеться навіть у точці D – точці найменшої відстані між зарядами – то, відриву не буде ні в якій точці похилої площини. Для точки D досягається максимальне значення кута β при якому ще можливий відрив, а, отже, і максимально можливе значення швидкості кульки в момент відриву. Але для точки D

$$\beta = \alpha, \text{а } l = h\cos\alpha. \qquad (**)$$

Записавши ЗЗМЕ для точок A та D з урахуванням (**) та (5), після нескладних перетворень, отримуємо

$$v_{max} = (2gh(\cos^3\alpha - \cos 2\alpha))^{1/2}. \qquad (11)$$

Підкореневий вираз в (11) є монотонно зростаючою функцією в I чверті, так як похідна від $\cos^3\alpha - \cos 2\alpha = 1 - 2\cos^2\alpha + \cos^3\alpha$ за кутом α дорівнює $4\cos\alpha \times \sin\alpha - 3\cos^2\alpha \times \sin\alpha = \cos\alpha \times \sin\alpha \times(4 - 3\cos\alpha) = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \times(4 - 3\cos\alpha) > 0$. Тому мінімум функції досягається для кута $\alpha = 0$. Для цього кута підкореневий вираз в (11) є мінімальним і дорівнює нулю. Таким чином, при всіх допустимих значеннях кута α (11) визначає супремум можливого значення швидкості відриву.

(125) А) Нехай тепер ми розглядаємо через центрований окуляр зображення пучка отримане нашим дзеркалом. Внаслідок відмінної від нуля поперечної сферичної аберації зображення пучка не буде точковим (стигматичним), а розтягнеться на відрізок довжиною $2 \times \Delta y$.
Для того, щоб ми не побачили впливу сферичної поперечної аберації необхідно, щоб відрізок NP довжиною $2 \times \Delta y$ мав кутові розміри, що не перевищують роздільну здатність ока людини – кут $\Delta\beta$. З рис. 1 легко встановити аналітичну залежність, яка забезпечує вказану вище вимогу.

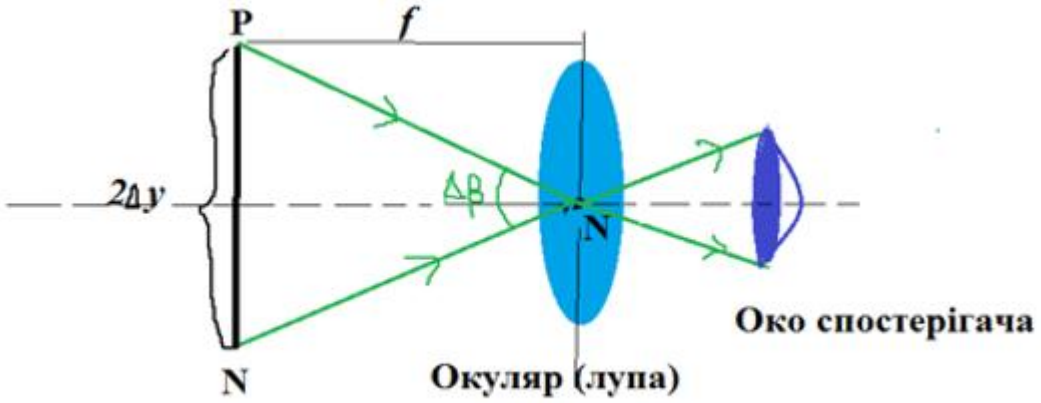


Рис. 1

Маємо:

$$2 \times \Delta y \geq 2 \times f \times tg\,(\Delta\beta/2) \approx f \times \Delta\beta = \frac{k}{\gamma} \times \Delta\beta, \qquad (1)$$

де f – фокусна відстань окуляра; k – відстань найкращого бачення. Ми врахували, що кут $\Delta\beta$ – малий ($\Delta\beta \sim 0{,}0003$ рад), тому $tg\,(\Delta\beta/2) \approx \Delta\beta/2$.

З (1):

$$\gamma \leq k \times \Delta\beta \frac{2-\xi^2}{R\xi(2-\sqrt{4-\xi^2})}. \qquad (2)$$

Б) Знаємо, що фокусна відстань ідеального сферичного дзеркала дорівнює $\frac{R}{2}$. Водночас, фокусна відстань лупи (окуляра): $f = \frac{k}{\gamma}$. Враховуючи ці факти, поданий в умові задачі вираз для оптичного збільшення системи «дзеркало + окуляр», та формулу (2) неважко відповісти на питання про максимально можливе збільшення нашої оптичної системи для того, щоб при візуальних спостереженнях не було б помітно дії сферичної поперечної аберації. Маємо

$$\Gamma_{max1} = \frac{\Delta\beta(2-\xi^2)}{2\xi(2-\sqrt{4-\xi^2})}.$$

(126) Розглянемо послідовно всі три випадки. Для розв'язку задачі треба розуміти, що ЕРС індукції, яка виникає при обертанні катушки електродвигуна, пропорційна до частоти обертання шківа ($\varepsilon_i = k\nu$), а сила струму через двигун пропорційна до навантаження ($I = \alpha$M, де M –маса навантаження) за умови рівномірного підйому вантажа (частота обертання шківа не змінна), адже обертається катушка двигуна за допомогою сили Ампера, що пропорційна до струму.

1) Перший двигун навантажений одним мішком, а другий не навантажений. Тоді струм через другий двигун (а значить і перший) йти не повинен і вся напруга джерела струму U буде спадати на другому двигуні. Тобто, ЕРС індукції двигуна буде дорівнювати U і, в результаті.

$$U = k\nu_1 \qquad (1)$$

2) Перший двигун навантажений одним мішком, а другий перевантажений та не може обертатись. В цьому випадку напруга джерела струму розподілиться наступним чином:

$$U = \varepsilon_{i1} + 2I_1R, \qquad (2)$$

де ε_{i1} – ЕРС індукції в першому двигуні, I_1 – струм через двигуни, R – опір обмоток кожного двигуна.

Врахуємо також, що

$$\varepsilon_{i1} = k\nu_2 \qquad (3)$$

$$I_1 = \alpha m \qquad (4)$$

Тут m - маса одного мішка з картоплею.

3) Перший та другий двигуни навантажені двома мішками кожен. Двигуни абсолютно однакові, тому:

$$U = 2\varepsilon_{i2} + 2I_2R \quad (5)$$

$$\varepsilon_{i2} = k\nu_3 \quad (6)$$

$$I_2 = 2\alpha m \quad (7)$$

Розв'язавши систему рівнянь (1-7) відносно ν_3 можна отримати одну з меж для ν_2/ν_1:

$$\nu_3 = \nu_1\left(\frac{\nu_2}{\nu_1} - \frac{1}{2}\right)$$

Двигуни в третьому випадку зможуть підняти вантажі тільки якщо $\frac{\nu_2}{\nu_1} > \frac{1}{2}$. Але є ще й верхня межа. З рівнянь (1-3) очевидно, що $\nu_1 > \nu_2$.

Отже, $1 > \frac{\nu_2}{\nu_1} > \frac{1}{2}$.

(127) А) Центр мас рухомої частини терезів знаходиться в її геометричному центрі, тобто на відстані $d = \frac{b-a}{2} = 10$ см від вертикальної лінії двох центральних шарнірів. Це і буде плече сили mg, яка намагається обертати конструкцію за годинниковою стрілкою (рис.1). Сила m_0g протидіє, намагаючись обертати проти годинникової стрілки. Але не можна брати як плече цієї сили очевидне $d_0 = \frac{l}{2} + a = 40$ см, щоб підставити в умову рівноваги $m_0gd_0 = mgd$, оскільки треба врахувати ще й момент сили, що діє на рухому конструкцію з боку одного з центральних шарнірів, якщо вісь обертання взяти у другому. Ми маємо модифіковану конструкцію терезів Робервaля, головною перевагою яких є те, що результат не залежить від положенні тягарців на поличках. Тобто, зсув вправо-вліво тягарця m_0 у нашому випадку не призведе до порушення рівноваги. Можна скористатися і спрощеною формулою $m_0gd_0 = mgd$, якщо подумки змістити тягарець m_0 на лінію двох лівих шарнірів і підставити $d_0 = a = 20$ см. Саме у цьому випадку зі сторони m_0g не виникає обертального моменту на ліву вертикальну дощечку, який компенсуються горизонтальними протилежно спрямованими силами зі сторони центральних шарнірів.

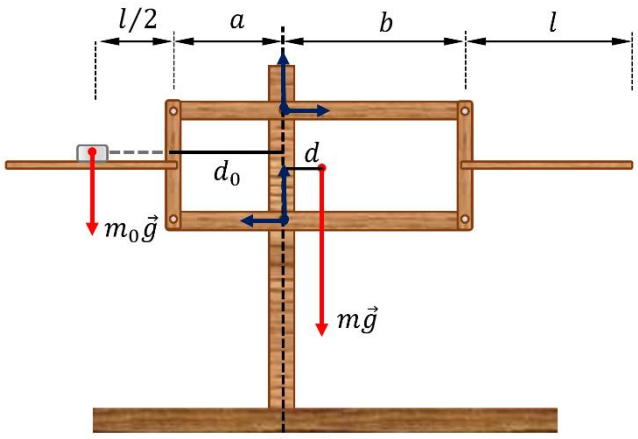


Рис.1

Доведемо це. Для рівноваги усієї конструкції (див. рис.1) відносно верхнього центрального шарніру має виконуватись:

$$m_0g\left(\frac{l}{2} + a\right) = mgd + Fh,$$

де горизонтальні сили F з боку шарнірів змінюються при зміщенні тягарця вздовж полички, компенсуючи зміну моменту сили m_0g. Відносно верхнього лівого шарніру для рівноваги тягарця на лівій поличці з вертикальною дощечкою: $m_0g\frac{l}{2} = Fh$. Підставляємо у попереднє рівняння й отримуємо:

$$m_0 ga = mgd,$$

звідки $m = 2m_0 = 200$ г. Те, що маса рухомої конструкції виявилася удвічі більшою за масу тягарця легко було збагнути й з енергетичних міркувань. Якщо нахилити конструкцію терезів за годинниковою стрілкою, то центр мас терезів опуститься на висоту удвічі меншу, ніж підніметься тягарець. Загальна зміна потенціальної енергії буде нульовою, якщо маса тягарця удвічі менша за масу рухомих терезів. Те ж саме отримаємо, якщо нахилити конструкцію проти годинникової стрілки. Маємо байдужу рівновагу за будь-якого зміщення тягарця у горизонтальному напрямку вздовж полиці.

Б) Ця ідея дозволяє легко вивести теоретичну формулу умови рівноваги для наших терезів. Нехай зліва тягар масою m_1, а справа – масою m_2 (див. рис.2). Нахилимо горизонтальні важелі терезів на кут α і прирівняємо зміну потенціальної енергії до нуля:

$$m_1 gatg\alpha - mg\frac{b-a}{2}tg\alpha - m_2 gbtg\alpha = 0,$$

звідки маємо

$$m_1 a = m_2 b + m\frac{b-a}{2}.$$

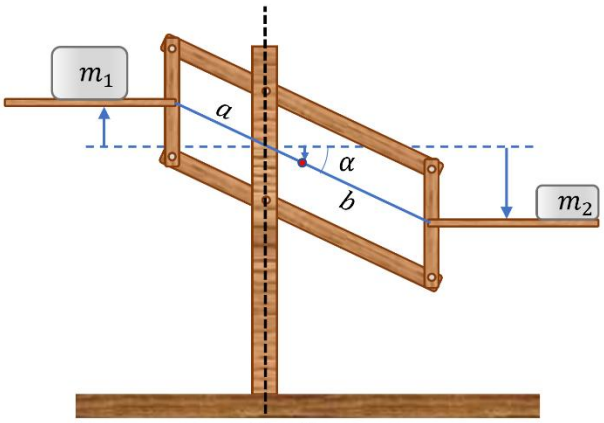


Рис.2

Якщо тягарець m_2 відсутній, отримуємо попередній результат. Якщо ж нехтуємо масою терезів, маємо для рівноваги просте співвідношення $m_1 a = m_2 b$, за якого рівновага спостерігатиметься для будь-яких кутів α і будь-яких положень тягарців на горизонтальних дощечках.

Для $m_1 = 1$ кг маємо

$$m_2 = m_1\frac{a}{b} - m\frac{b-a}{2b} = 450 \text{ г}$$

незалежно від положення на правій поличці.

В) Оскільки тертям нехтуємо, за законом збереження енергії знаходимо, що зменшення потенціальної енергії системи дорівнюватиме збільшенню кінетичної енергії тягарців. Тягарці рухаються поступально і піднімуться на такі ж висоти, як і відповідні їм полички.

$$m_3 ga\sin\alpha - m_1 gb\sin\alpha = \frac{m_3\omega^2 a^2}{2} + \frac{m_1\omega^2 b^2}{2}.$$

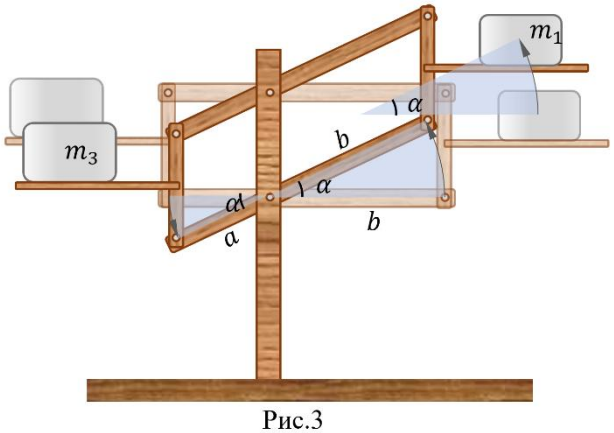


Рис.3

Знаходимо кутову швидкість

$$\omega = \sqrt{2\frac{(m_3 a - m_1 b)g\sin\alpha}{m_3 a^2 + m_1 b^2}} = \sqrt{7}\text{с}^{-1},$$

а через неї швидкості тіл:

$v_3 \approx 0{,}53$ м/с і $v_1 \approx 1{,}06$ м/с.

Г) Крайні ліві шарніри рухаються вниз вздовж дуг радіусами $a = 20$ см, а крайні праві – вгору вздовж дуг радіусами $b = 40$ см. Внаслідок поступального руху вертикальних дощечок з поличками і тягарцями, будь-яка точка тягарця, включно з його центром мас рухатиметься вздовж дуги кола того ж радіусу (Рис.3). При цьому на кожний тягарець крім вертикально спрямованих сил тяжіння mg і нормальної реакції опори N діятиме спрямована горизонтально в бік центру терезів сила тертя спокою $F \leq \mu N$.

Запишемо для меншого тіла проекції другого закону Ньютона на напрям до центру кола і на дотичний напрям:

$$\begin{cases} m_1\omega^2 b = F\cos\alpha + (mg - N)\sin\alpha, \\ m_1\varepsilon b = F\sin\alpha - (mg - N)\cos\alpha. \end{cases}$$

Кутове прискорення ε знайдемо або з динаміки обертального руху, або взявши похідну за часом з отриманого раніше закону збереження енергії чи виразу кутової швидкості:

$$\varepsilon = \frac{(m_3 a - m_1 b)g\cos\alpha}{m_3 a^2 + m_1 b^2}.$$

Підставивши ε і ω^2 з закону збереження енергії у систему рівнянь Ньютона, знаходимо вирази для сили тертя і реакції опори в залежності від кута α

$$F = 3Am_1 g\sin\alpha\cos\alpha, N = m_1 g\left(1 + A(1 - 3sin^2\alpha)\right),$$

де $A = \frac{(m_3 a - m_1 b)b}{m_3 a^2 + m_1 b^2} = \frac{2}{7}$.

Підставляємо F і N в умову відсутності проковзування $F \leq \mu N$ і для числових значень задачі отримуємо нерівність $\mathrm{tg}^2\alpha - 4\mathrm{tg}\alpha + 3 \geq 0$, яка виконується для малих кутів. В граничному випадку рівності (початок ковзання) маємо $\mathrm{tg}\alpha = 1$ і $\alpha = 45°$.

(128) Внаслідок того, що швидкість дотична до траєкторії, напрямки швидкостей тіла у тунелі $\vec{v}$ і точки обіду колеса $\vec{v}_k$, що котиться, супроводжуючи лінію тунелю, співпадатимуть в усіх точках. Нехай після того, як колесо повернулося на деякий кут α, швидкість його центру дорівнювала u. Тоді за законом додавання швидкостей, швидкість точки обіду відносно нерухомої системи

$$v_k = 2u\cos\left(\frac{\pi - \alpha}{2}\right) = 2u\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Для $\alpha > \pi$ (другої половини руху), $\sin\frac{\alpha}{2} < 0$, тому у загальному випадку слід брати модуль:

$$v_k = 2u\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|.$$

Із закону збереження енергії знайдемо тепер швидкість тіла у цій точці тунелю:

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gR(1 - \cos\alpha)} = 2\sqrt{gR}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|.$$

Порівнюючи, знаходимо, що колесо має рухатись зі сталою швидкістю

$$u = \sqrt{gR},$$

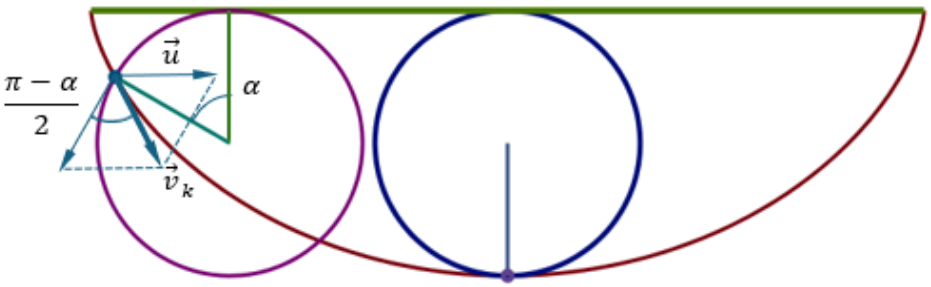
і саме тоді точка обіду весь час співпадатиме з рухомим тілом у тунелі.

Тоді час руху тіла дорівнюватиме часу, за який колесо робить повний оберт і проходить відстань $l = 2\pi R$:

$$t = \frac{l}{u} = \frac{l}{\sqrt{gR}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \sqrt{\frac{2\pi l}{g}}.$$

Між Дніпром і Херсоном $l = 270$ км, отже час руху $t \approx 416$ с , що трохи менше, ніж 7 хв. Вражаюче!

Система відліку «Колесо» рухається зі сталою швидкістю, і є такою ж інерціальною системою, як і система відліку «Тунель». Повне прискорення буде однаковим у цих системах. У системі відліку «Колесо» тіло рухається вздовж кола зі сталою швидкістю $\sqrt{gR}$. Тому повне і доцентрове прискорення у цій системі відліку співпадають. Отже



$$a = \frac{u^2}{R} = g.$$

Це прискорення, залишаючись незмінним за величиною, рівномірно змінює напрям, «дивлячись» на центр колеса. У системі відліку «Тунель» прискорення $\vec{a}$ викликають разом дві сили: спрямована вниз сила тяжіння і спрямована перпендикулярно швидкості $\vec{v}$ сила реакції опори *N*. Звідси і знаходимо *N*, записавши проекцію другого закону Ньютона на напрям прискорення:

$$ma = mg\cos\alpha + N\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|.$$

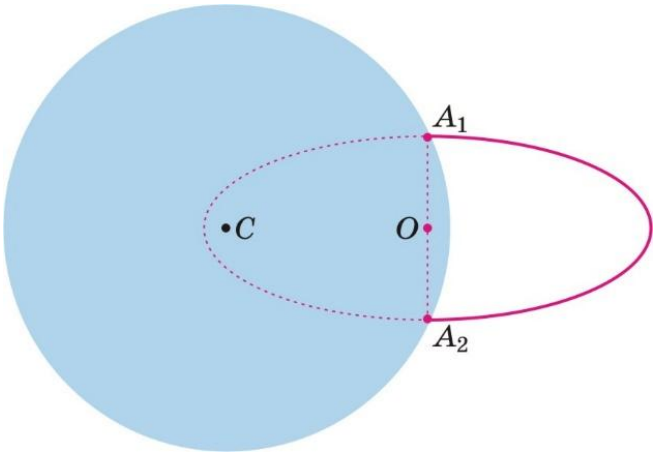
З урахуванням $a = g$ знаходимо $N = 2mg\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$, що будь-де не більше $2mg$ – типового навантаження на екстремальних атракціонах у парках, і у півтора-два рази меншого, ніж під час запуску пілотованих космічних кораблів.

Оскільки $v = 2\sqrt{gR}\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|$, сила реакція опори $N = m\sqrt{\frac{g}{R}}v$ виявляється пропорційною швидкості руху $\vec{v}$ і спрямованою весь час перпендикулярно до неї. Таку властивість має сила Лоренца. Якби частинка мала додатний заряд *q*, а магнітне поле індукцією *B* було спрямовано від нас перпендикулярно до площини рисунку, траєкторія руху зліва направо виявилася б розглянутою брахістохроною за умови:

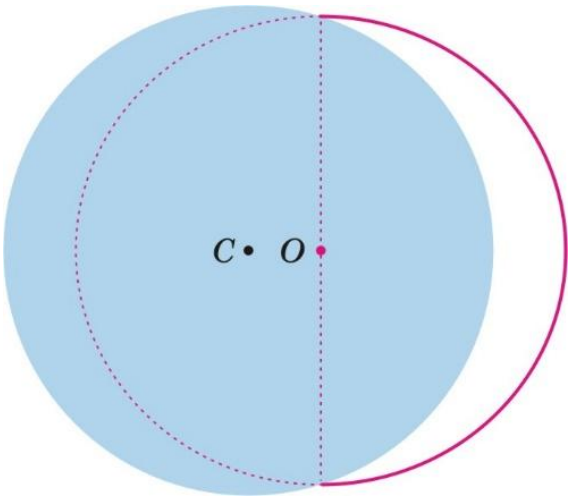
$$F_л = qBv = N = m\sqrt{\frac{g}{R}}v, \quad \text{або} \quad qB = m\sqrt{\frac{g}{R}}.$$

Отже, якщо у перпендикулярних однорідних магнітному і гравітаційному полі (або електричному замість гравітаційного) відпустити заряджену частинку, вона рухатиметься вздовж брахістохрони (циклоїди). Зазначимо також, що крім сили Лоренца такі ж властивості притаманні силі Коріоліса.

(129) Перш за все зазначимо, що відповідь не може залежати від прискорення вільного падіння — це видно хоча б із міркувань розмірності.



Очевидно, траєкторія снаряда має форму дуги еліпса. Велика піввісь a цього еліпса залежить *тільки* від механічної енергії W снаряда (ці величини пов'язані співвідношенням $W = -G\frac{Mm}{2a}$) та не залежить від кута α. Отже, за будь-якого значення кута α велика піввісь еліпса дорівнює радіусу R планети, як і у випадку горизонтального пострілу з першою космічною швидкістю v_I. Скористаємося тим, що точки еліпса A_1, A_2, які лежать на малій осі, перебувають на відстані a від фокусів. У даному випадку один із фокусів еліпса є центром C планети. Це означає, що $CA_1 = CA_2 = R$, тобто точки A_1, A_2 є як раз точками пострілу та падіння снаряда. Центр O еліпса є серединою відрізку A_1A_2 (див. рисунок). Шукана відстань A_1A_2 дорівнює $2b$, де b — довжина малої півосі еліпса.



Довжину малої півосі еліпса b можна знайти з геометричних міркувань, а можна просто записати момент імпульсу (відносно осі, що проходить через центр планети) відразу після пострілу двома різними способами:

$L = mv_\text{I}R\cos\alpha = mbv_\text{I}$.

Звідси $b = R\cos\alpha$, тоді $\boldsymbol{A_1A_2 = 2R\cos\alpha}$.

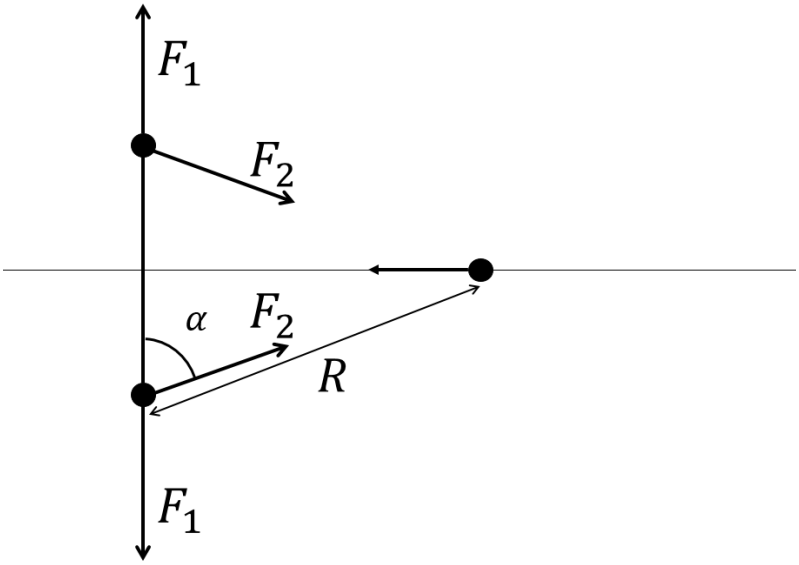
Кут між радіусами планети CA_1, CA_2 дорівнює $\beta = \pi - 2\alpha$, відстань між точками A_1 і A_2 вздовж поверхні планети $l = \beta R = (\pi - 2\alpha)R$.

Перевіримо правдоподібність отриманого результату. Якщо $\alpha = \frac{\pi}{2}$, маємо $A_1A_2 = 0$, як і слід було очікувати. А от наближення до максимально можливої (по прямій) відстані $2R$ відбувається за умови $\alpha \to 0$, що на перший погляд не є очевидним. Але це теж правильно: саме за малого кута α снаряд може майже досягти протилежної точки поверхні планети. Наприклад, наведений нижче рисунок ілюструє рух у випадку $\alpha = 0{,}1$ рад.

Остаточні відповіді:

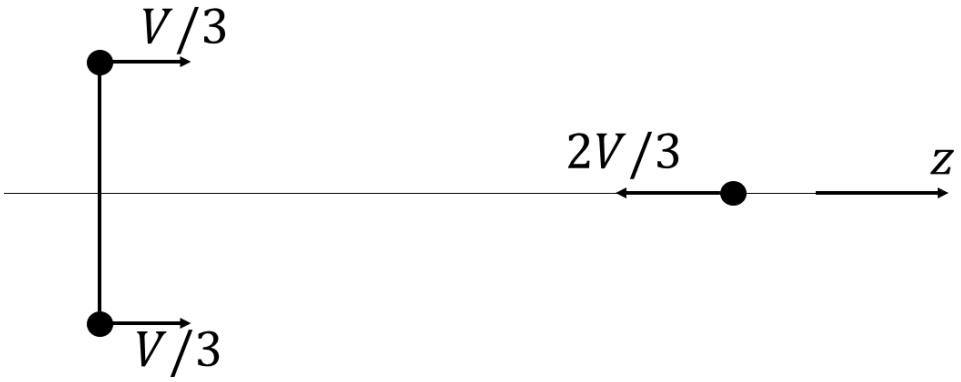
- **якщо $\boldsymbol{\alpha_1 = 0{,}1}$ рад, то $\boldsymbol{A_1A_2 = 11940}$ км, $\boldsymbol{l_1 = 17650}$ км;**
- **якщо $\boldsymbol{\alpha_2 = \left(\frac{\pi}{2} - 0{,}1\right)}$ рад, то $\boldsymbol{A_1A_2 \approx l_2 \approx 1200}$ км.**

(130) А) Намалюємо сили до зіткнення

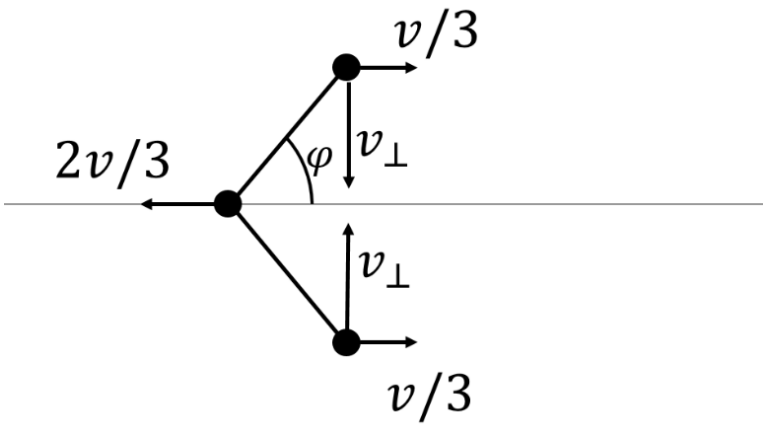


Оскільки циліндр дуже легкий, обидва заряди q та циліндр будуть знаходитись на одній лінії. Стрічка провисне, якщо $F_2*\cos(\alpha) = F1$. Проекція $F_2*\cos(\alpha)$ максимальна безпосередньо перед зіткненням. Звідси стрічка не провисне, якщо $kQq/(L/2)^2 < kq^2/L^2$. Максимально можливий Q дорівнює $q/4$.

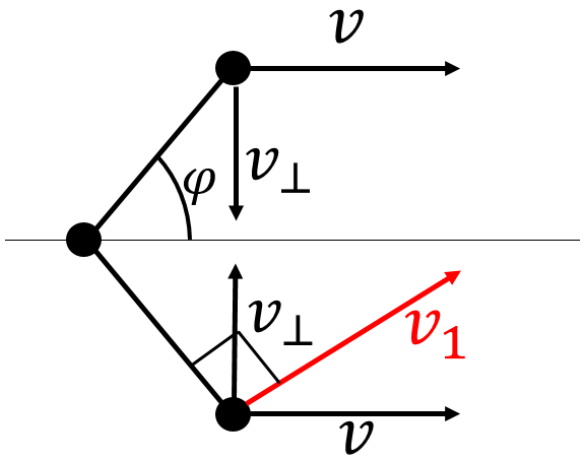
Б) Перейдемо в систему центра мас. На початку, швидкості рівні V /3 для зарядів q та 2V /3 для Q.



Після зіткнення, заряди q почнуть завертатися навколо третьої кульки.



Відстань між кульками Q та q постійна і рівна $L/2$. Використаємо цей факт: в будь-який момент часу, перейдемо в систему кульки Q. Оскільки стрічка не розтягується, відносна швидкість v_1 має бути спрямована перпендикулярно до стрічки. Звідси:



$$v_1 = \frac{v}{\sin\phi}, \qquad v_\perp = v\frac{\cos\phi}{\sin\phi}$$

Тепер ми можемо записати рівняння збереження енергії в системі центра мас:

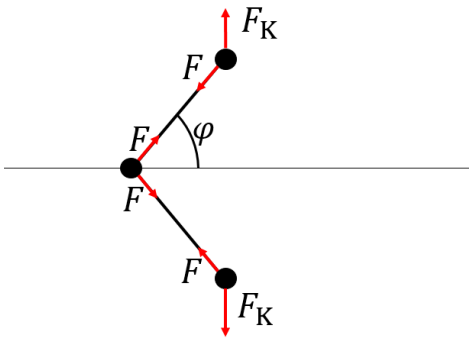
$$\frac{m}{2}\left(\frac{2V}{3}\right)^2 + 2\frac{m}{2}\left(\frac{V}{3}\right)^2 + \frac{kq^2}{L} = \frac{m}{2}\left(\frac{2v}{3}\right)^2 + 2\frac{m}{2}\left[\left(\frac{v}{3}\right)^2 + v_\perp^2\right] + \frac{kq^2}{L\sin\phi} - 2\frac{kqQ}{L/2}$$

Мінімальною відстань d між кульками q буде тоді, коли всі кульки зупиняться, адже тоді швидкість їх зближення $v_\perp$ стає рівною нулю. Закон збреження енергії для цього випадку:

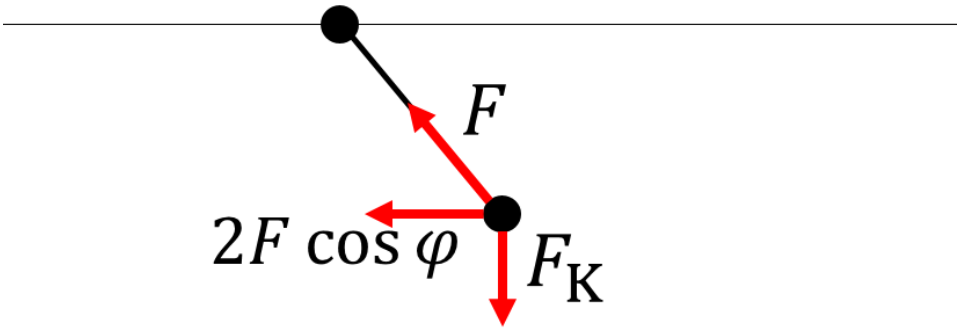
$$\frac{m}{2}\left(\frac{2V}{3}\right)^2 + 2\frac{m}{2}\left(\frac{V}{3}\right)^2 + \frac{kq^2}{L} = \frac{kq^2}{d} - 2\frac{kqQ}{L/2}$$

$$d = \frac{L}{1 + \frac{4Q}{q} + \frac{mV^2}{3kq^2}} = \frac{L}{1 + 5Q/q}$$

B) Тепер роздивимось умову того, що стрічка натягнута. Намалюємо сили, що діють на кульки, де сила кулоновського відштовхування зарядів q одне від одного $F_K = kq^2/L^2\sin^2\varphi$, а сила F - сума пружньої сили та притягання між q та Q.



Прискорення кульки Q спрямовано праворуч вздовж вісі z та дорівнює $a_Q = 2F\cos\varphi/m$. Перейдемо в систему, пов'язану з Q, враховуючи, що вона неінерційна.



Обертання кульок q призводить до доцентрового прискорення, яке дорівнює нулю, коли кульки зупиняться

$$0 = F - F_K \sin\phi + (2F\cos\phi)\cos\phi$$

де ми спроектували сили на вісь стрічки. Звідси

$$F(3 - 2\sin^2\phi) = \frac{kq^2}{L^2 \sin\phi}$$

Сила пружності дорівнює $F_п = F - kq/(L/2)^2$

$$F_п = \frac{kq^2}{L^2}\left[\frac{1}{(3 - 2\sin^2\phi)\sin\phi} - 4\frac{Q}{q}\right]$$

Враховуючи що $\sin\varphi = d/L$ та використовуючи відповідь для d:

$$F_п = \frac{kq^2}{L^2}\,\frac{1 + 11(Q/q) - 45(Q/q)^2 - 175(Q/q)^3}{1 + 30(Q/q) + 75(Q/q)^2}$$

Г) Стрічка натягнута, якщо сила пружності $F_п$ не набуває від'ємних значень. Розв'язуючи рівняння для критичного випадку $F_п=0$, можна вгадати розв'язок або отримати його ітераціями

$$\boxed{\frac{Q}{q} = \frac{1}{5}, \qquad Q = \frac{q}{5}}$$

(131) Один оберт навколо своєї осі відносно зір Земля робить за 23 години 56 хвилин (приблизно за 24 години). Відносно Земного спостерігача за цей час зоряне небо робить повний оберт. Фото зроблене з витримкою. З південної півкулі, де знаходиться обсерваторія, не можна побачити Полярну зорю, отже на фото у центрі дуг кіл знаходиться нескінченно віддалена точка напрямку, що проходить через географічні полюси Землі з півночі на південь. З'єднавши центр з кінцями дуг можна побудувати рівнобедрені трикутники, а можна прямокутні, наприклад такі, як на Рис.1, і, усереднивши, зі сторін трикутників знайти кут з вершиною у центрі. Приблизно виходить 29°. Кут 29° від 360° складає таку ж частину як час експозиції від 23 години 56 хвилин. Що стосується кута до горизонту α, під яким проводилась зйомка, то він дорівнює куту, що визначає широту місцевості, а саме з умови задачі 29,26°. У цьому легко переконатися, зробивши рисунок Землі і провівши промінь з точки обсерваторії в напрямку «північ-південь».

Збіг двох кутів викликає припущення, що можливо саме така тривалість експозиції була вибрана фотографом не випадково.



Рис.1

Для відповіді на останнє найскладніше питання звернемо увагу на деякі особливості фото, а саме на сходження вертикальних ліній реального світу на його проекції на матрицю фотоапарату (а з нею і на фото). Це пов'язано з більшою віддаленістю від площини повернутого вгору об'єктиву фотоапарату верхніх частин вертикальних будівель, високих дерев, стовпів, тощо у порівнянні з нижніми. Лінія, проведена на фото через безумовно вертикальну у реальному світі башту телескопу ESO, утворює кут з вертикаллю, проведеною через центр фото (Рис. 2). Також для встановлення масштабу нам знадобиться виміряти діаметр купола обсерваторії на фото, який за умовою дорівнює 31 м.

Оскільки всі об'єкти зйомки віддалені від фотоапарату на відстані набагато більші його фокусною відстані, можна вважати, що вони всі фокусуватимуться на матриці у фокальній площині.



Рис.2

Розглянемо загальний випадок утворення зображення довільної точки А на матриці фотоапарату. Введемо систему координат з центром в центрі лінзи фотоапарата, площиною XOY, перпендикулярною до головної оптичної осі (OX – горизонтальна) і віссю OZ, спрямованою вздовж головної оптичної осі в напрямку «північ-південь». Тоді зображення центру дуг буде знаходитись на матриці фотоапарату у фокусі лінзи. Точка А з координатами $(x_A; y_A; z_A)$ матиме зображення A', яке внаслідок великою (у порівнянні з фокусом F лінзи) відстанню, лежатиме практично у її фокальній площині і легко знаходиться з подібності трикутників з вершинами у центрі лінзи: $A'(x'_A; y'_A; z'_A) = \left(-x_A\frac{F}{z_A}; -y_A\frac{F}{z_A}; -F\right)$.

Точне значення (для перевірки) $A' = \left(-x_A\frac{F\left(1+\frac{F}{z_A}\right)}{z_A}; -y_A\frac{F\left(1+\frac{F}{z_A}\right)}{z_A}; -F\left(1+\frac{F}{z_A}\right)\right) \approx \left(-x_A\frac{F}{z_A}; -y_A\frac{F}{z_A}; -F\right)$

Аналогічний вигляд матимуть координати зображення точки В $B'(x'_B; y'_B; z'_B) = \left(-x_B\frac{F}{z_B}; -y_B\frac{F}{z_B}; -F\right)$. Вектор $\overrightarrow{AB}$ (нехай це вісь башти телескопа)

$$\overrightarrow{AB} = -F\left(\frac{x_B}{z_B} - \frac{x_A}{z_A}; \frac{y_B}{z_B} - \frac{y_A}{z_A}; 0\right)$$

Кут β нахилу цього вектора до вертикалі $tg\beta = \left(\frac{x_B}{z_B} - \frac{x_A}{z_A}\right)/\left(\frac{y_B}{z_B} - \frac{y_A}{z_A}\right)$ був би на фото таким самим як і в реальному світі (враховуючи обмеження тонкої лінзи), якби відстань від площини об'єктиву XOY до точок А і В була однаковою ($z_A = z_B$). Насправді внаслідок повороту фотоапарату вгору на кут α, на такий сами кут відносно нього нахиляться предмети зверху вниз, у тому числі вертикальний відрізок AB. Вважаючи, що точка В знаходиться безпосередньо над А ($x_A = x_B$), отримуємо зв'язок між відстанями: $z_B - z_A = l\sin\alpha$, $y_B - y_A = l\cos\alpha$.



Рис.3

Тоді

$$ctg\beta = \frac{y_A}{x_A} - \frac{z_A}{x_A} ctg\alpha, \qquad (1)$$

де відношення координат $\frac{y_A}{x_A} = \frac{y'_A}{x'_A} \approx -0{,}267$ знаходимо з фото (Рис.3) для точки центру купола. З трапеції на фото, утвореної горизонтальними границями фото і суцільними червоними лініями (5,85 см і 3,65 см основи і 11,5 см висота), знаходимо $ctg\beta \approx -5{,}23$. Тепер з (1) знаходимо відношення координат $\frac{z_A}{x_A} \approx 0{,}76$. Тобто, $x_A \approx 1{,}32 z_A$, $y_A \approx -0{,}267 x_A \approx -0{,}35 z_A$.

Сума квадратів цих координат дає квадрат відстані до центру купола.

$$l = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2} \approx 1{,}7 z_A.$$

Залишилося скористатися розміром купола, діаметр якого за умовою d =31 м. Діаметр куполу (2 см) за Рис.3 менший за відстань від центру купола до осі OZ $\sqrt{x_A^2 + y_A^2} \approx 1{,}37 z_A$ (5,4 см) у 2,7 рази. Отже $z_A = \frac{2{,}7d}{1{,}37} = 61$ м, і

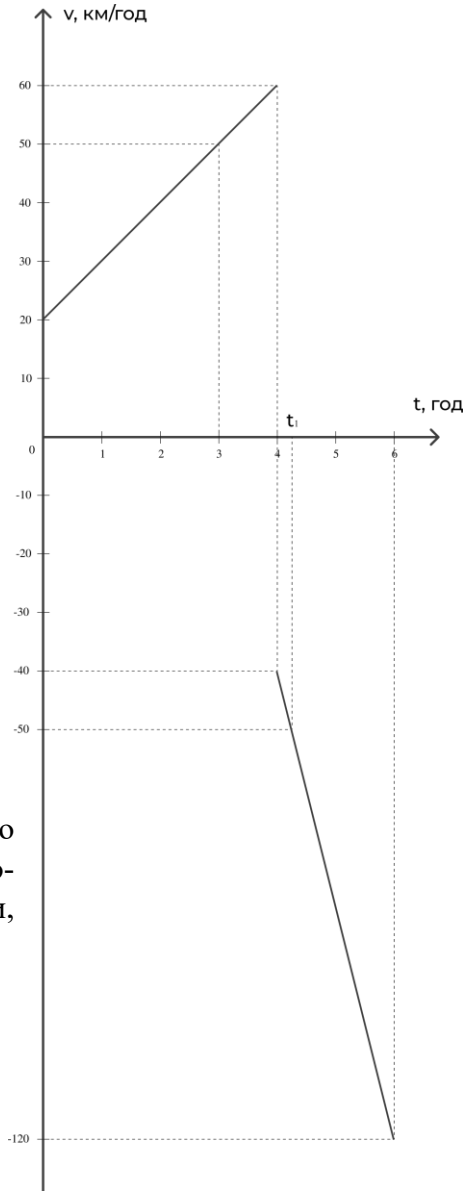
$$l \approx 1{,}7 z_A \approx 104 \text{ м} \approx 100 \text{ м}.$$

Якщо брати найближчу точку купола, то відповідь на 15,5 м менша.

Якщо в (1) $x_A \to 0$, $ctg\beta \to \infty$, $\beta \to 0$, нахилу не буде. Зазначимо, що на матриці фотоапарату, координати x'_A, y'_A мають протилежний знак до x_A, y_A. Після зворотного перетворення у фотокартинку з масштабуванням з деяким коефіцієнтом k, якого ми не знаємо, маємо для координат на фото точки A(x''_A, y''_A):

$$y''_A = -|ctg\beta| x''_A + kFctg\alpha$$

Для заданого кута β це рівняння прямої. З трапеції на фото (5,85 см і 3,65 см основи і 11,5 см висота), утвореної горизонтальними границями фото і суцільними червоними лініями, знаходимо $|ctg\beta| \approx 5{,}23$ і $kFctg\alpha \approx 26$см.



(132) Частина I. Для першої ділянки графіка,

$t \in [0; 4)$ год:

$$v_{\text{сер}} = 20 + 5t = \frac{x}{t}$$

$$x = 20t + 5t^2$$

$x -$ координата вздовж автотраси (яка не обов'язково являє собою пряму).

Звідси

$v_{0x} = 20 \frac{\text{км}}{\text{год}}$, $a_x = 10 \frac{\text{км}}{\text{год}^2}$

$$v_1 = 20 + 10t$$

Для другої ділянки графіка,

$t \in (4; 6]$ год:

$$v_{\text{сер}} = 120 - 20t = \frac{x}{t}$$

$$x = 120t - 20t^2$$

Звідси

$v_{0x} = 120\,\frac{\text{км}}{\text{год}}$, $\text{a}_x = -40\,\frac{\text{км}}{\text{год}^2}$

$$v_2 = 120 - 40t$$

Знайдемо момент, починаючи з якого швидкість автомобіля почала перевищувати 50 км/год:

$$-50 = 120 - 40t_1$$

$$t_1 = \frac{17}{4} = 4.25 \text{ год}$$

З графіка видно що $v > 50$ м/с коли $t \in (3; 4] \cup (4.25; 6]$ год

Частина ІІ.

А) Час доїзду до 50 м: $t_1 = \frac{50 \text{ м}}{V_{\text{середня}}\,(50 \text{ м})} = \frac{50 \text{ м}}{75\frac{\text{км}}{\text{год}}} = 2.40$ с.

$V_{\text{середня}}\,(125 \text{ м})$ легко визначити через середнє між значеннями 75 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$ та 100 $\frac{\text{км}}{\text{год}}$ використовуючи лінійність функції на спадній ділянці.

Час доїзду до 125 м: $t_2 = \frac{125 \text{ м}}{V_{\text{середня}}\,(125 \text{ м})} = \frac{125 \text{ м}}{87.5\,\frac{\text{км}}{\text{год}}} \approx 5.14$ с.

Тоді час руху в потрібному діапазоні $\Delta t = t_2 - t_1 \approx 2.74\ c$.

Середня швидкість в даному інтервалі за визначенням середньої швидкості:

$V_{\text{середня}} = \frac{l}{\Delta t} = \frac{125 \text{ м} - 50 \text{ м}}{2.74 \text{ с}} \approx 27.34\ \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 98.44\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Б) Очевидний зв’язок із визначення середньої швидкості:

$$L = V_{\text{середня}}\,(L) * t$$

Для першої ділянки руху (до 100 м): $V_{\text{середня1}}\,(L) = a_1 + b_1 * L$, з графіку можна визначити, що $a_1 = 50\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$, $b_1 = 500\ \frac{1}{\text{год}}$.

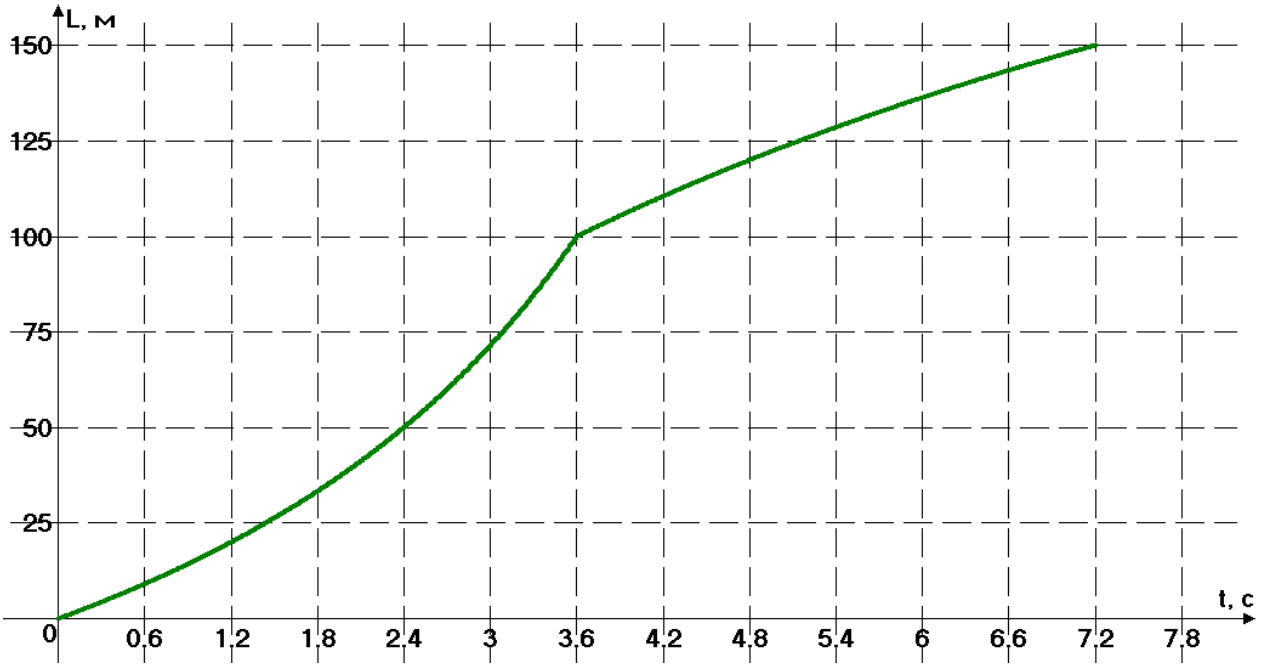
Звідси, $L(t) = \frac{a_1 t}{1 - b_1 t}$.

Аналогічно для другої ділянки руху (після 100 м): $V_{\text{середня1}}\,(L) = a_2 + b_2 * L$, де $a_2 = 150\ \frac{\text{км}}{\text{год}}$,

$b_2 = -500\ \frac{1}{\text{год}}$.

Так само на другому етапі $L(t) = \frac{a_2 t}{1 - b_2 t}$.

Побудуємо дані графіки.



В) Одразу можна помітити як мінімум дві дивні ситуації. Зліва і справа від точки 3.6 с кут нахилу дотичних до графіку різний, а значить швидкість зазнає миттєвого ривку, що неможливо в реальності. Також, якщо уважно подивитись на порядки швидкостей, то зліва від 3.6 с по куту нахилу дотичної до графіка можна зрозуміти, що швидкість машини порядку 200 км/год. Ну це вже точно штраф за перевищення швидкості!
За бажанням, використовуючи аналіз похідними, можна перевірити й пікові прискорення. Але вони виходять відносно адекватні (принаймні, не такі, як при підготовці космонавтів) порядку 30 $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ або 3g.

(133) А) Першим кроком знаходимо заряд, який повинен отримати прилад для розрядки:

$$q = \frac{220\ \text{В}}{156{,}25 \cdot 10^9 \text{В/Кл}} = 1.408 \cdot 10^{-9}\text{Кл}\ .$$

Оскільки в задачі сказано, що процес відбувається через β −розпад знаходимо кількість β −розпадів за час циклу (85 секунду):

$$\Delta N_{85} = \frac{q}{e} = \frac{1.408 \cdot 10^{-9}\text{Кл}}{1.6 \cdot 10^{-19}\text{Кл}} = 8.8 \cdot 10^9.$$

(Примітка: радіоактивний препарат радію розпадається α −розпадом, але для спрощення розрахунків задачі нами обрано β −розпад)

Активність препарату визначається, як кількість розпадів за одиницю часу, тому:

$$A_0 = \frac{\Delta N_{85}}{85\ \text{с}} = 1.3 \cdot 10^8 \text{Бк}.$$

Б) Для знаходження періоду піврозпаду знайдемо кількість молекул броміду радію:

$$N_0 = \frac{3.62 \cdot 10^{-3}}{(226 + 80)} \cdot 6.02 \cdot 10^{23}.$$

Згадаємо, що $A = \Delta N/\Delta t = \lambda N$, де N −кількість атомів радіонукліду в заданий момент часу, а λ − стала радіоактивного розпаду, яка пов'язана з періодом піврозпаду: $\lambda = 0.693/T$, ($0.693 = \ln 2$). Знаючи активність та початкову кількість молекул препарату, знаходимо період піврозпаду:

$$T = \frac{0.693}{\lambda} = \frac{0.693 \cdot N}{A} \approx 1511.6 \text{ років}.$$

В) Використання радіоактивного розпаду для вимірювання базується на переведенні кількості розпадів у час. Оскільки з часом активність препарату зменшується, то такий годинник сповільнюватиметься. Зрозуміло, що цей годинник калібрували у початковий момент часу, тоді позначмо кількість розпадів, що відбудуться за реальних 24 години у початковий момент часу − $\Delta N_{24\text{г}}$.

Сповільнений годинник показуватиме 23 години замість реальних 24 (кількість розпадів менша через зменшення активності препарату), а для того, для того, щоб кількість розпадів співпадала з кількістю $\Delta N_{24\text{г}}$ йому знадобиться 25 годин. Тоді складемо рівняння:

$$A_0 \cdot 24 = A_\text{x} \cdot 25 \to A_\text{x} = \frac{24}{25} A_0.$$

Залежність активності від часу має такий вигляд:

$$A_\text{x}(t) = A_0 2^{-t/T}.$$

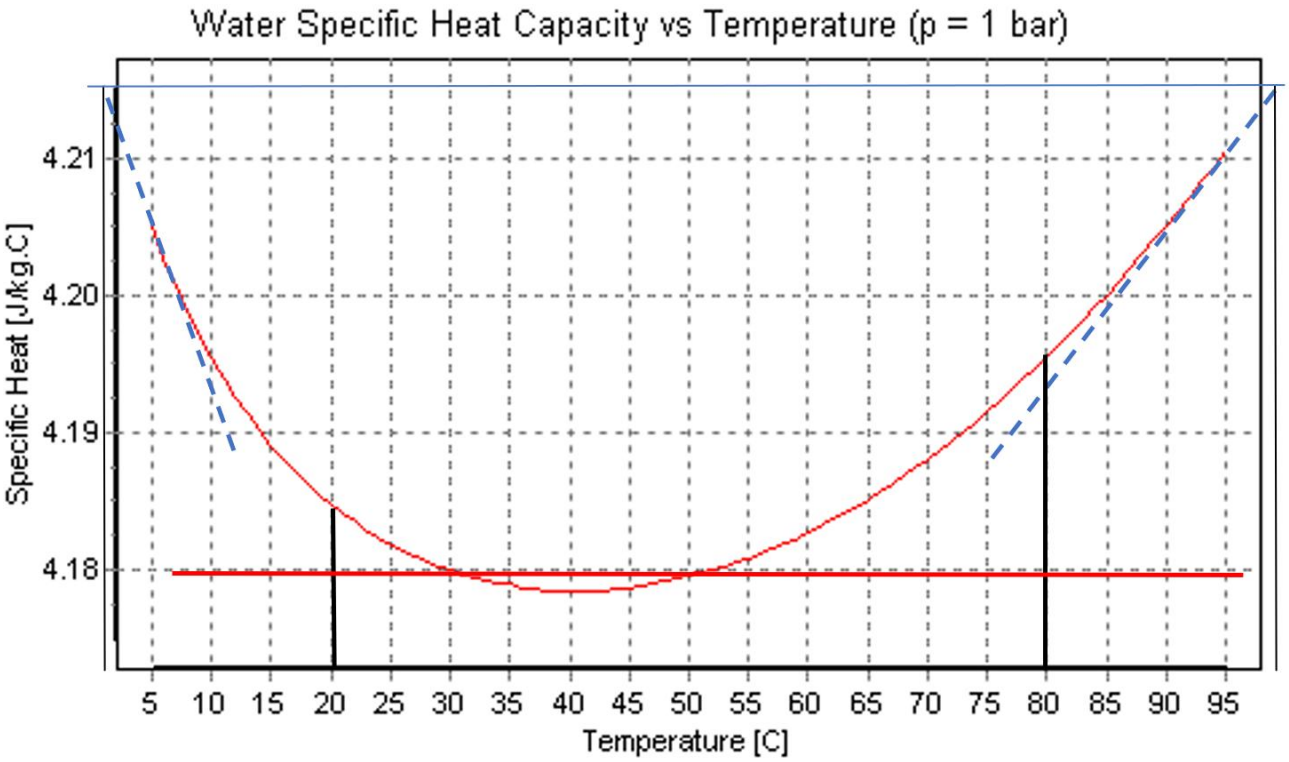
Порівнюючи з попереднім та знаючи період піврозпаду знаходимо час:

$$\frac{24}{25} = 2^{-t/T} \to t = -T \log_2 \frac{24}{25} \approx 89 \text{ років}.$$

(134) *Неточність пов'язана з відсутністю приставки кіло- в одиницях питомої теплоємності на графіку.*

А) Найменша теплоємність буде в околі мінімуму. Якщо рухати вздовж графіка паралельну осі температур лінію, то, коли вона поблизу мінімуму перетне дві точки графіка, віддалені на 20℃, це і дасть приблизний інтервал мінімальної теплоємності при нагрівання води на 20℃. Приблизно з 31℃ до 51℃, або з 30℃ до 50℃. Щоб знайти середню теплоємність, слід площу під цією ділянкою графіку поділити на 20℃. Трохи менше, ніж 4,179 Дж/(кг∗ ℃). Для знаходження найбільшої середньої теплоємності слід продовжити по краям графік на 5℃. Як бачимо, найбільша площа під графіком відповідає інтервалу від 80℃ до 100℃ і дорівнює 4,205 Дж/(кг∗ ℃).

Б) Описати **залежність питомої теплоємності c від температури t** дугою кубічної параболи $c = \alpha t^3 + \beta t^2 + \gamma t + \delta$ можна, наприклад, взявши чотири презентативних точки графіку, щоб з системи рівнянь знайти чотири коефіцієнти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Хоча це й ненайточніший, зате найпростіший шлях.



Наприклад, навіть по нерівномірно розташованим точкам 5°C, 40°C, 60°C, 95°C отримуємо наближену залежність

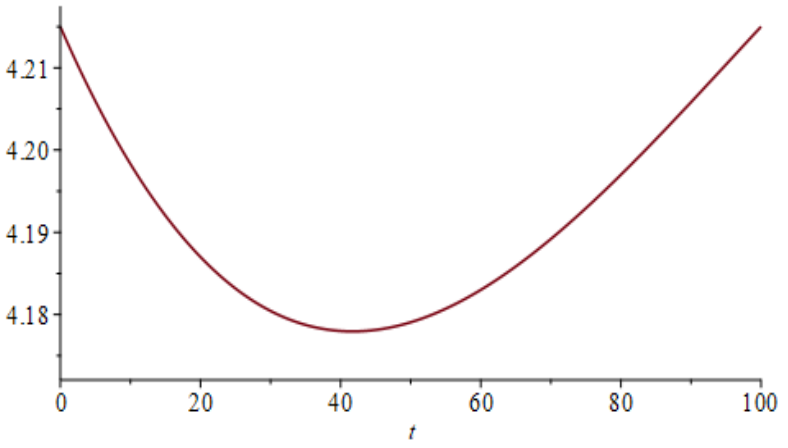
$$c(t) = -1{,}042 \cdot 10^{-7} t^3 + 3 \cdot 10^{-5} t^2 - 1{,}958 \cdot 10^{-3} t + 4{,}215,$$

де коефіцієнти мають різні розмірності. Наведено вираз, у який температура підставляється у °C, а відповідь отримуємо у кДж/(кг°C).

В) Графік залежності швидкості зміни температури 100 г води (одиниця виміру °C/с) від температури можна побудувати, виходячи з наданого в умові графіку, але значно простіше це зробити за допомогою отриманої у попередньому пункті формули.

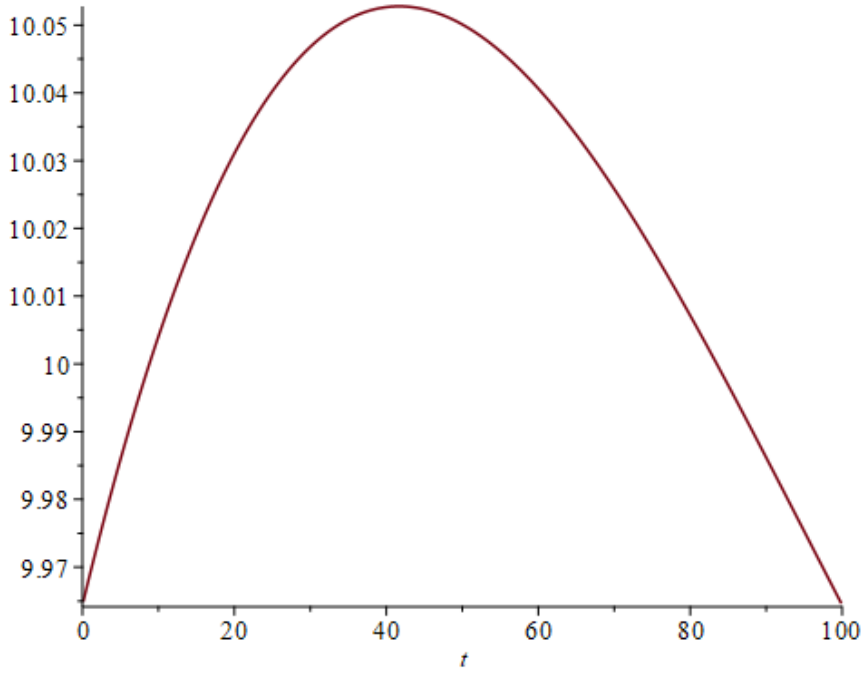
За умовою, потужність передачі теплоти $P = 4{,}2$ Вт. За рахунок цієї потужності вода за час Δt збільшує температуру на ΔT: $P\Delta t = cm\Delta T$, звідки

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{P}{cm} = \frac{P}{mc(t)}$$



Максимально швидко температура змінюється, а отже і регулюється, приблизно при температурі теплокровних істот (див. графік). Може це просто збіг (значення не сильно відрізняються), а може й ні. Остаточна відповідь чекає на свого дослідника.

На графіку по осі ординат відкадено швидкість зміни температури міліградусах Цельсія за секунду.



(135) Частина 1. А) Форма тіні від пам’ятника Кобзарю (Рис. А) має такий вигляд, оскільки супутник знімає під деяким кутом до горизонту, і ми бачимо не тільки тінь на горизонтальній поверхні, але й затінену частину вертикальної постаті й п’єдесталу. Саме цим і обумовлений злам тіні відносно центру основи п’єдесталу. Саме це пояснює зсув тіней та їх нерівності за рахунок підйому монументу над поверхнею і рельєфу зображення, коли сонце освітлює частини об’єму під різними кутами до поверхонь.



Рис. А

Це ж саме ми бачимо на Рис. 3 умови – насправді арки мосту не мають посередині звуження як може здатися. Це просто дві тіні: одна на поверхні землі, інша – тіньова сторона вертикальної частини конструкцій моста, яку супутник фотографує під деяким кутом. Помилуватися формою арок самого Мерефо-Херсонського моста ви можете на фото (Рис. Б), де міст підходить до Монастирського острова. Як бачите, арки біля основи не розширюються. Враження, що арки розширюються могло скластися також з їхнього вигляду на задньому плані фото пам'ятника Кобзарю, на Рис.1 умов завдання. Там можна побачити відбиття арок у поверхні Дніпра.

До речі, тільки під час заочного етапу, і якщо не забороняється в умові, ви можете подивитися в інтернеті на фото моста, пам'ятника, навіть зайти у GoogleEarth і знайти те фото, з якого взяті фрагменти. Недарма дата фото була вказана на рис.2,3 умови. Проте і без цього задачу можна розв'язати.



Рис. Б

У загальному випадку на Рис.В. зображено сонячний промінь, що падає під кутом α до горизонту, тінь довжиною l від тіла висотою h.

Якщо б супутник перебував у площині відрізків l і h і напрямок на нього утворював кут β з горизонтом, на матриці його камери горизонтальна й вертикальна тіні спроектувалися б у відношенні x: y, а одна тінь була б продовженням іншої. Відхиляючись перпендикулярно до площини від цього напрямку, ми побачимо злам тіні. Але у будь-якому випадку така ситуація буде подібною і для пам'ятника, і для вертикального фрагменту моста, оскільки відстань між ними набагато менша за відстань до супутника. Тому із співвідношення відповідних тіней двох об'єктів з урахуванням масштабу, вказаного на рисунках в умові, і з метою мінімізувати похибки, знаходимо максимально можливі відстані, тобто між верхньою частиною предмету та її тінню. На рис. Г, Д ці відстані позначені червоними відрізками.

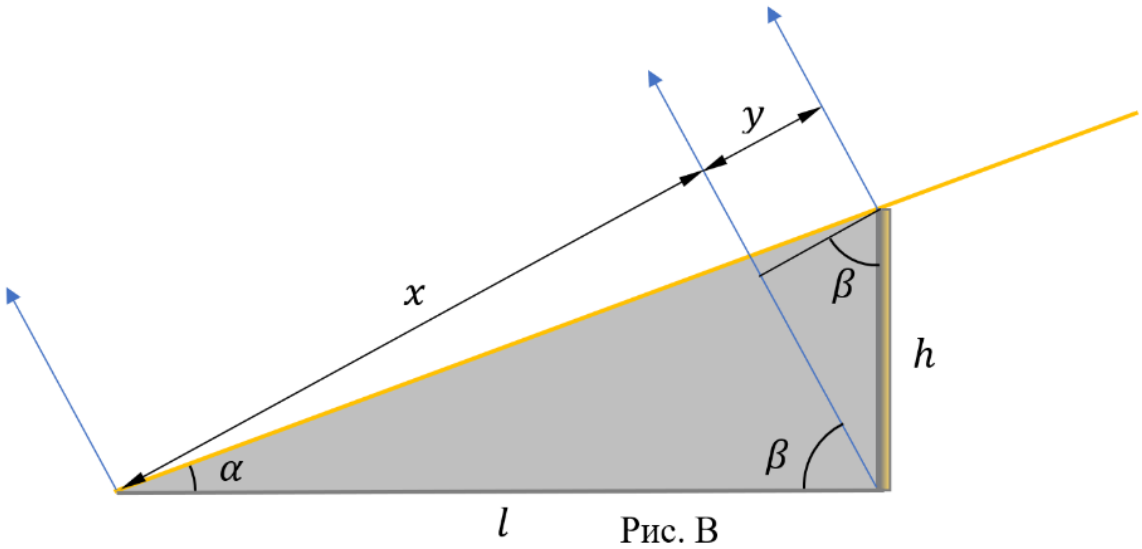


Рис. В

На Рис. Г червоний відрізок виявився в 1,32 рази коротшим за жовтий, масштабний, у 29,94 м. Отже його реальна довжина 29,94 м/1,32 ≈22,7 м. На Рис. Д з зображенням тіні моста на пішохідній доріжці, червоний відрізок виявився в 1,04 рази довшим за жовтий, масштабний, довжиною 20,01 м. Отже його реальна довжина 20,01 м*1,04 ≈20,8 м.

Відношення реальних довжин в силу подібності явищ дорівнюватиме відношенню відповідних висот. Отже висота Мерефо-Херсонського моста над пішохідною доріжкою Монастирського острова буде в 22,7/20,8≈1,09 рази меншою за висоту пам'ятника Тарасу Шевченко (9,5 м фігура і 10,5 м п'єдестал), тобто 20/1,09≈18,3 м.

Слід сказати, що наші дані не зовсім точні, щонайменше, в силу складності ідентифікації відповідних точок предмету і його тіні на супутниковому фото.

Частина 1. Б) Кут α падіння сонячних променів до горизонту знайдемо з відношення висоти пам`ятника до довжини горизонтальної тіні він нього (відмасштабована довжина блакитного відрізку на Рис. А.) Аналогічно знаходимо, що реальна довжина блакитного відрізку (умовної горизонтальної тіні) приблизно 13,3 м. Відношення вертикального відрізку до горизонтального дорівнює тангенсу кута, звідки знаходимо $\alpha \approx 56°$. Якщо перевірити в інтернеті кут, під яким сонце піднімалося наприкінці квітня 2017 р. над горизонтом у м. Дніпро, отримаємо максимальну висоту сонця у цей день, десь о пів на першу, 56,3°. Або фото робилося приблизно у цей час наприкінці місяця, або, що вірогідніше, на результат могла вплинути неточна оцінка висоти ефективної частини п'єдесталу разом з його квадратним оформленням навколо пам'ятника, за яке тінь, як видно на фото, так і не вийшла. Це оформлення вище за оточуюче покриття. Ймовірно, що його висота враховувалась у висоту п'єдесталу. Тоді зменшення розрахункової висоти з 20 м призведе і до зменшення кута. Також згадаємо програмні засоби GoogleEarth, які для зручності сприйняття можуть змінювати масштабування фото, що ускладнює експертизу.



Рис. Г

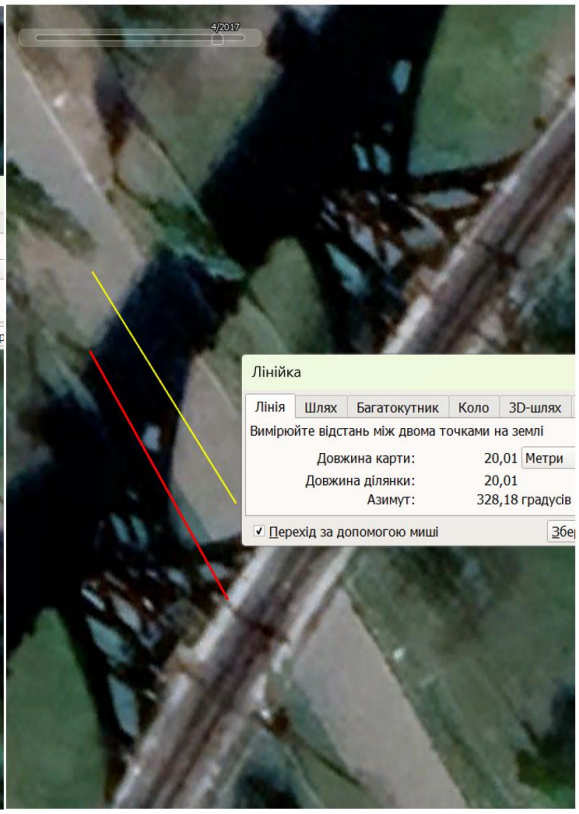


Рис. Д

Завжди перевіряйте й верифікуйте свої результати!

Частина 2. А) Визначимо висоту баржи h, яка пройде під дугою арки (див. Рис.Е) радіусом $R = 25$ м і кутом $\alpha = 30°$. За теоремою Піфагора

$$R^2 = \left(\frac{R}{2} + h\right)^2 + 49 \text{ м}^2.$$

Звідси знаходимо, що

$$h = 11{,}5 \text{ м},$$

що менше 12 м, отже баржа не пройде.

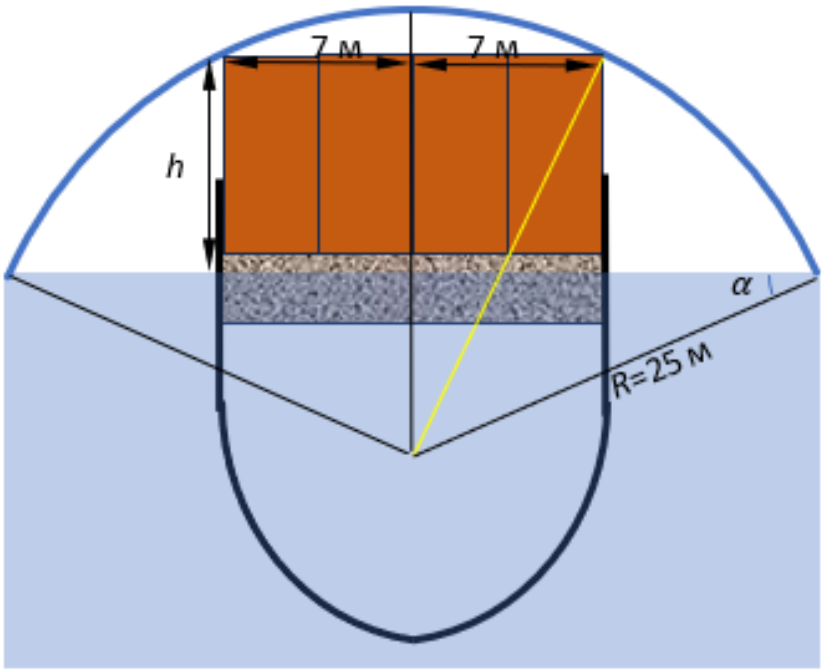


Рис.Е

Частина 2. Б) Невідома ширина контейнера, тому покласти по одному контейнеру якось боком на інші, все симетрично зсунути, може й не вийти. Тому ми не будемо перегрупувати контейнери.

Наша мета – занурити верхню площину контейнерів як мінімум на 0,5 м. Для цього слід не розвантажувати пісок під контейнерами, як зробив капітан, а навпаки.

Додатковий шар піску висотою H по всій площині баржі підніме контейнери на рівнем палуби на H, але опустить саму баржу разом з палубою на $\frac{\rho_п}{\rho_в} H = 1{,}5H$, що легко знайти, прирівнявши додаткове mg додатковій силі Архімеда. Отже верхній рівень контейнерів має опуститися на $1{,}5H - H = 0{,}5H$.

Перед встановленням контейнерів додатково насипаємо шар піску висотою не менше 1 м. Підняття рівня всередині на 1 м компенсується опусканням усієї баржі у воду на 1,5 м.

Так ми виграємо і в транспортуванні якомога більшої маси піску, і в транспортуванні усіх контейнерів.

Ідея налити у пісок на баржі воду може буде використана, якщо з технічних причин насипати шар піску висотою більше метра не вийде. У цьому випадку можуть виникнути проблеми з розвантаженням баржі.

(136) А) Знайдемо теплову потужність, яка виділяється на реостаті, застосовуючи закон Джоуля-Ленца, Ома та формули паралельного та послідовного з'єднань.

$$Io = \frac{Uo}{r + \frac{rR}{r+R}}$$

$$Up = \frac{Uo}{r + \frac{rR}{r+R}} * \frac{rR}{r+R}$$

$$Pp = \frac{Up^2}{R} = \frac{Uo^2 R}{(r+2R)^2} = \frac{Uo^2}{\frac{r^2}{R} + 4r + 4R}.$$

Зрозуміло, що ця потужність буде максимальною, коли знаменник цього дробу буде мінімальним (легко побачити, що знаменник має мінімальне значення).

Проаналізуємо вираз у знаменнику, виділивши у ньому повний квадрат:

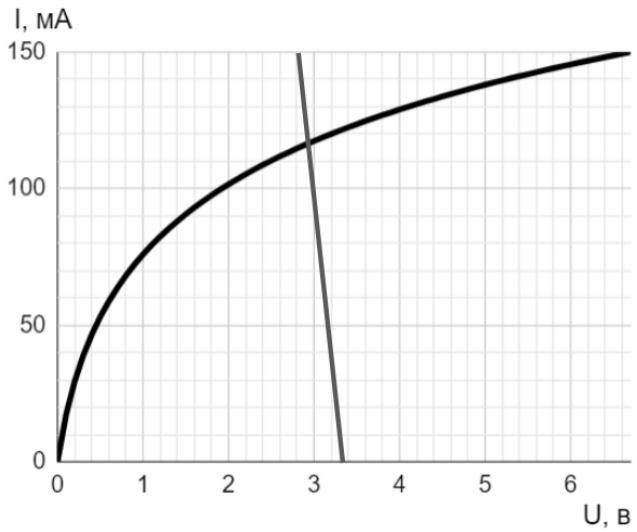
$$Y = \frac{r^2}{R} + 4r + 4R = (\frac{r}{\sqrt{R}} - 2\sqrt{R})^2 + 4R + 4R.$$

Мінімальне значення цієї функції досягається коли дужка дорівнює нулю, тобто при **R= r/2 = 5Ом**. Теплова потужність на реостаті при цьому буде дорівнювати: $\boldsymbol{P}\text{о} = \frac{\boldsymbol{Uo^2}}{\boldsymbol{8r}}$ = **1,25 Вт**.

Б) Позначимо напругу і силу струму на лампочці як $U_Л$ і $I_Л$. З минулого питання знаємо що R = r/2. Застосовуючи закон Ома та формули паралельного та послідовного з'єднань маємо:

$U_0 = U_Л + I_Лr + U_Лr/R$. Або: $I_Л = (U_0 - 3\ U_Л)/r$.

Побудуємо цю пряму на графіку вольт-амперної характеристики лампи. На перетині знайдемо значення за допомогою лінійки як $U_Л$ = 2,95в і $I_Л$ = 115мА. При цьому сумарна потужність дорівнює:



$P_1 = U_Л * I_Л + U_Л^2 / R$ = 2.1Вт.

В) Знайдемо значення опору для реостата R_1 щоб отримати сумарну потужність Po = 1,25Вт. Для цього можемо використовувати загальні рівняння з минулого питання.

$Po = U_Л * I_Л + U_Л^2 / R_1$.

Звідки $U_Л / R_1 = Po/U_Л - I_Л$

$U_0 = U_Л + I_Лr + rU_Л/R_1 = U_Л + I_Лr + r\ (Po/U_Л - I_Л) = U_Л + r\ Po/U_Л$

Запишемо це у вигляді квадратного рівняння для $U_Л$: $U_Л^2 - U_0\ U_Л + r\ Po$. Що дає два рішення для $U_Л$: 1,46в і 8,5в. Останнє неможливо, бо лампочка перегорить. Знайдемо $I_Л$ на графіку для лампочки як 90мА. Звідки можемо знайти R_1 як

$R_1 = U_Л^2 / (Po - U_Л * I_Л)$ = 1,9 Ом

Г) Щоб знайти нове можливе максимальне значення P_2 використаємо загальні формули з рішення питання Б:

$P_2 = U_Л * I_Л + U_Л^2 / R_2$

$U_0 = U_Л + I_Лr + U_Лr/R_2$

$U_0U_Л = U_Л^2 + P_2r$

Знову виділимо цілий квадрат з $U_Л$ щоб знайти точку максимума для P_2:

$P_2r = U_0^2 /4 - (U_0/2 - U_Л)^2$. Що є максимальним коли квадрат дорівнює нулю. Тобто

$P_2 = U_0^2 /4r$ = 2,5Вт.

$U_Л = U_0/2 = 5$ В. За графіком знайдемо, що $I_Л$ =140 мА.

$R_2 = U_Л^2 / (P_2 - U_Л * I_Л) = 13{,}9$ Ом.

(137) А) З прямокутного трикутника $v_k = v_a \mathrm{ctg}\alpha$.
Б) Припустимо, що дорога опукається під кутом β до горизонту. Тоді слід на склі, спрямований вздовж відносної швидкості краплі $\vec{v}_{k/a}$, має утворювати з вертикаллю кут $\alpha + \beta$. За законом додавання швидкостей (див. Рис.) і з теореми синусів маємо

$$\frac{v_a}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{v_k}{\sin(90°-\alpha)} = \frac{v_{k/a}}{\sin(90°-\beta)},$$

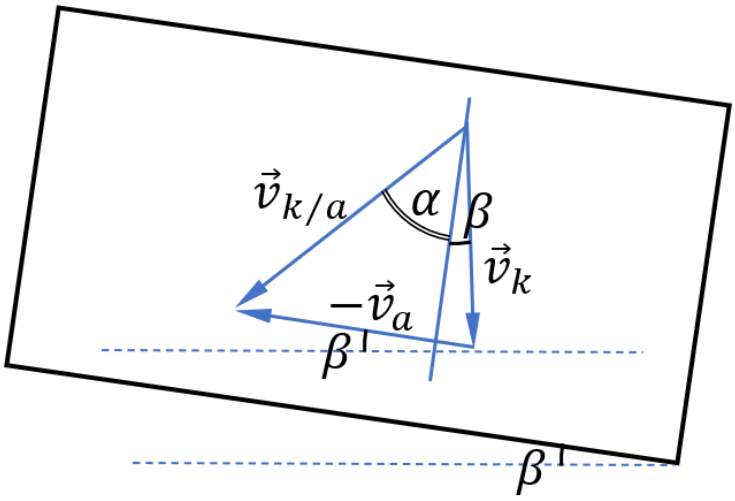
звідки

$$v_a = v_k \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}.$$

Коли автомобіль піднімається вгору від кутом β, в останньому виразі робимо заміну $\beta \to -\beta$:

$$v_a = v_k \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha}.$$

Звісно при цьому виникає обмеження $\beta < \alpha$.



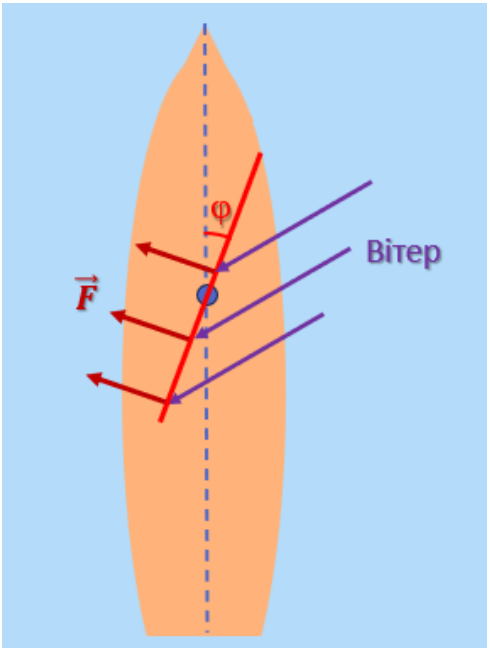
Якщо схил утворюватиме кут α з горизонтом ($\beta = \alpha$), тоді $v_a = 0$, автомобіль не рухатиметься, а краплі й так падатимуть на скло під потрібним кутом. На ще більшому схилі ($\beta > \alpha$) швидкість автомобіля $v_a < 0$, тобто для забезпечення потрібного кута він має спускатися задом. *Якби не розворот та проблема миттєвої зміни швидкості, це можна було б вважати додатковою відповіддю на питання* Б).

В) У системі відліку «автомобіль» краплі дощу весь час падають на нього під однаковим кутом, що той їде горизонтально, що під кутом β до горизонту. Отже, геометрія перехоплення корпусом автомобіля дощових крапель однакова, концентрація крапель за умовою задачі також однакова, тому відношення частот дорівнюватиме відношенню відносних швидкостей. З Рис. і з теореми синусів маємо:

$$v_{k/a} = v_k \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

Горизонтальному руху відповідає $\beta = 0$. Тому найчастіше краплі стучатимуть по автомобілю під час горизонтальної їзди. Якщо позначити середню частоту ударів під час руху під кутом β через ν_β, то $\nu_\beta = \nu_0 \cos\beta$. Оскільки косинус парна функція, частота ударів під час такого руху (зі збереженням кута α) вгору і вниз тією ж дорогою буде однаковою і не залежить від форми автомобіля. Це пояснюється тим, що рух вгору повільніший, ніж вниз, а лінії дощу весь час нахилені до корпусу автомобіля однаково.

(138) Позначимо швидкість вітру v, швидкість руху судна u, площу вітрила S, густину повітря ρ. Оскільки за умовою $u \ll v$, повітря рухається відносно вітрила теж зі швидкістю v.



Коли вітер попутній, найвигідніше повернути площину вітрила перпендикулярно до напряму вітру. Тоді вітрило за час t «перехоплюватиме» об'єм повітря Svt та отримуватиме від цього повітря імпульс $\rho Svt \cdot v$. Інакше кажучи, за одиницю часу вітрильник отримує імпульс ρSv^2, тобто вітер створює «силу тяги» $F_{\text{тяг}} = \rho Sv^2$. Під час рівномірного руху судна цю силу зрівноважує сила опору води $F_{\text{оп}} = ku^2$, де k — сталий коефіцієнт.

Отже, за попутного вітру $u_{\max} = v\sqrt{\frac{\rho S}{k}}$.

Коли напрям вітру майже точно зустрічний, вітрило все ж таки може забезпечити певну «силу тяги», як показано на рисунку. Адже повітря діятиме на вітрило з силою F, що залежить від складової швидкості вітру $v\sin(\alpha - \varphi)$, нормальної до площини вітрила: $F = \rho Sv^2 \sin^3(\alpha - \varphi)$. Ми врахували, що в даному випадку вітрило «перекриває» повітряний потік з поперечним перерізом $S\sin(\alpha - \varphi)$.

Силу $\vec{F}$ можна розкласти на дві складові. Одна з них — сила тяги, напрямлена на північ: $F_{\text{тяг}} = F\sin\varphi = \rho Sv^2 \sin^3(\alpha - \varphi)\sin\varphi$. Інша ж — бокова сила, яка практично не впливає на рух судна.

Прирівнявши модулі сил тяги та опору, отримуємо:

$$u^2 = \frac{\rho Sv^2}{k}\sin^3(\alpha - \varphi)\sin\varphi = u_{\max}^2 \sin^3(\alpha - \varphi)\sin\varphi.$$

Залишається дослідити залежність $u^2(\varphi)$. Прирівнявши нулю відповідну похідну, маємо

$$\cos\varphi \sin(\alpha - \varphi) - 3\sin\varphi\cos(\alpha - \varphi) = 0,$$

або $3\,\text{tg}\alpha\,\text{tg}^2\varphi + 4\,\text{tg}\varphi - \text{tg}\alpha = 0$.

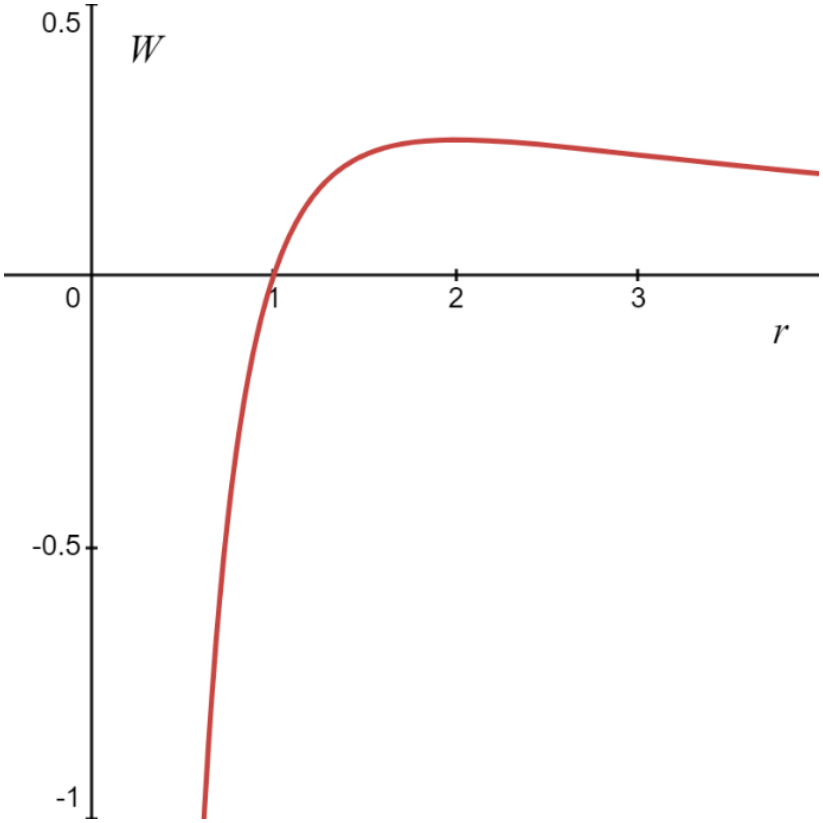
Звідси $\text{tg}\varphi = 0{,}31$ і $\varphi = 17°$.

Таким чином, $u = 0{,}3u_{\max} = 0{,}1$ км/год.

(139) Знайдемо повну енергію взаємодії двох ядер додавши до енергії ядерної взаємодії електростатичну взаємодію між ядрами:

$$W(r) = -\frac{b}{r^2} + k\frac{(2q_e)(Zq_e)}{r} = -\frac{b}{r^2} + k\frac{2Zq_e^2}{r}$$

Нарисуємо вигляд функції цієї енергії взаємодії в залежності від відстані між ядрами (для прикладу будуємо графік рівняння $W(r) = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r}$).



Бачимо наявність максимуму енергії. Якщо ядра опиняться на відстані меншій ніж відповідає цьому максимуму енергії, то далі вони вже притягнуться і відбудеться ядерна реакція.

Отже, знайдемо відстань на якій енергія досягає максимуму взявши похідну та прирівнявши її до нуля.

З умови $W'(r) = 0$ отримуємо, що максимум досягається при $r_m = \frac{b}{kZq_e^2}$.

Запишемо закони збереження імпульсу та енергії для випадку зіткнення ядер (після зіткнення вони стають одним цілим в момент наближення на відстань r_m після чого починають зближуватись і відбувається остаточне захоплення) в нерелятивістському випадку:

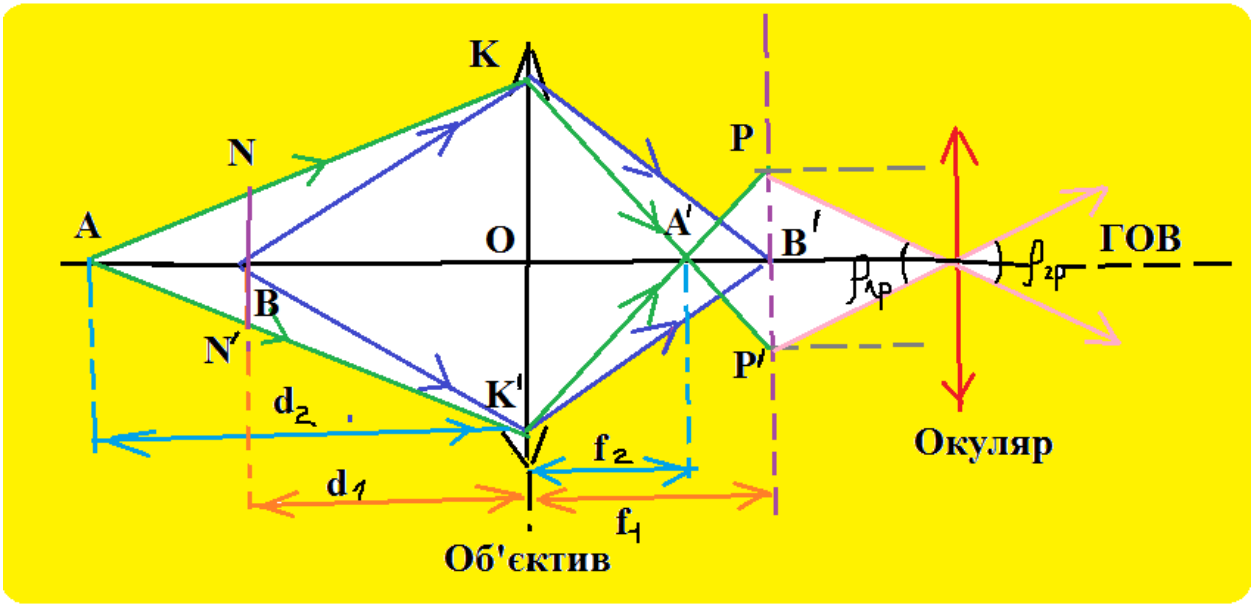
$$m_\alpha V_0 = (m_\alpha + m_Z)V$$

$$\frac{m_\alpha V_0^2}{2} = \frac{(m_\alpha + m_Z)V^2}{2} + W(r_m) = \frac{(m_\alpha + m_Z)V^2}{2} + \frac{(kZq_e^2)^2}{b}$$

Розв'язуючи дану систему отримуємо, що початкова енергія α-частинки має бути

$$\frac{(kZq_e^2)^2}{b}\frac{m_Z+m_\alpha}{m_Z}.$$

(140) Розглянемо рис. На ньому: ГОВ – головна оптична вісь системи зорової труби; КК′ – апертура (діаметр) об'єктиву; В – точка простору (об'єкт) на який сфокусована зорова труба; В′ – стигматичне (точкове) зображення В в трубі; d_1 – відстань від В до об'єктива; В′ – стигматичне (точкове) зображення В створене оптичною системою труби; А – точка простору (об'єкт) який ми бажаємо бачити чітким (не розмитим) в зорові трубі; d_2 – відстань від об'єктиву до А; f_2 – відстань від стигматичного (сфокусованого) зображення В в оптичній системі зорової труби до об'єктиву; f_1 – відстань від стигматичного (сфокусованого) зображення А в оптичній системі зорової труби (точки А′) до об'єктиву; NN′ – ширина пучка променів, які виходять з А в перерізі на перпендикулярну до ГОВ площину, що проходить через В; РР′ – так званий кружечок розмиття – переріз пучка променів, що виходять з точки А′ площиною, яка проходить через точку В′ перпендикулярно до ГОВ; $\rho_{гр}$ – кут бачення кружечку розмиття РР′ через оптичну систему окуляра.



Для знаходження діаметру PP′ кружечка розмиття спочатку розглянемо допоміжний відрізок NN′ – ширина пучка променів, які виходять з A в перерізі на перпендикулярну до ГОВ площину, що проходить через B. Трикутники ANN′ та AKK′ подібні (за трьома кутами), тому можемо записати

$$AB/NN' = KK'/AO,$$

або ж

$$(d_2 - d_1)/NN' = d_2/KK'.$$

Звідси

$$NN' = (d_2 - d_1) \times KK'/d_2.$$

Позначимо $NN' = d_o$, $KK' = D^*_{об}$. Тоді можемо записати

$$d_o = (d_2 - d_1) \times D^*_{об}/d_2. \quad (1)$$

Лінійне кутове збільшення оптичної системи зорової труби

$$\Gamma = f_1/d_1, \quad (2)$$

де враховано, що f_1 та d_1 – додатні величини.

Зрозуміло, що діаметр PP′ кружечка розмиття можна отримати зауваживши, що

$$PP' = d_o \times \Gamma \quad (3)$$

Позначивши $PP' = d_p$ та виходячи з (1)-(3) отримуємо

$$d_p = (d_2 - d_1) \times D^*_{об}/d_2 \times (f_1/d_1) \quad (4)$$

З формули тонкої лінзи

$$\frac{1}{F_{об}} = D_{об} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{d_1},$$

звідси

$$f_1 = \frac{d_1}{D_{об} d_1 - 1} \quad (5)$$

з (4) та (5)

$$d_p = (d_2 - d_1) \times D^*_{об}/d_2 \times \frac{1}{D_{об} d_1 - 1} \quad (6)$$

За умовою мешканці острова хотіли б мати можливість чітко бачити в трубу об'єкти на великій від берега. Тому візьмемо в останньому виразі границю при $d_2 \to \infty$. Маємо

$$d_{p\infty} = \lim_{d_2 \to \infty} dp = \lim_{d_2 \to \infty} ((d_2 - d_1) \times D^*_{об}/d_2 \times \frac{1}{D_{об} d_1 - 1}) = D^*_{об} \times \frac{1}{D_{об} d_1 - 1}.$$

Отже

$$d_{p\infty} = D^*_{об} \times \frac{1}{D_{об} d_1 - 1}. \quad (7)$$

Так як через окуляр зорової труби ми розглядаємо предмети, що знаходяться на доволі великій відстані, то можна вважати, що маємо фактично телескопічну системи в якій фокуси окуляра та об'єктива співпадають між собою. Тому (див. рис.) можемо записати

$$f_{ок} \times \operatorname{tg} \rho_{гр} = d_{p\infty}.$$

Враховуючи малість кута $\rho_{гр}$ в останній рівності можемо замінити тангенс значенням $\rho_{гр}$, вираженим у радіанній мірі

$$f_{ок} \times \rho_{гр} = d_{p\infty},$$

або

$$\rho_{гр}/D_{ок} = d_{p\infty}, \quad (8)$$

де $D_{ок}$ – оптична сила окуляра.

З виразів (7) та (8) виходить

$$\rho_{гр}/D_{ок} = = D^*_{об} \times \frac{1}{D_{об} d_1 - 1},$$

звідси

$$D^*_{об} = (D_{об} d_1 - 1)\ \rho_{гр}/D_{ок} \quad (9)$$

Підставимо в робочий вираз (9) задані та обчислені параметри. Виходить

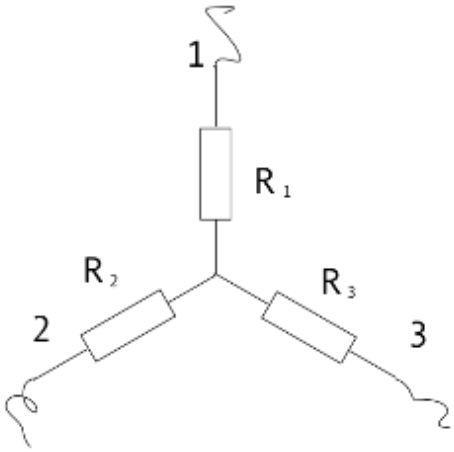
$$D^*_{об} = 0{,}02 \text{ м} = 2 \text{ см}.$$

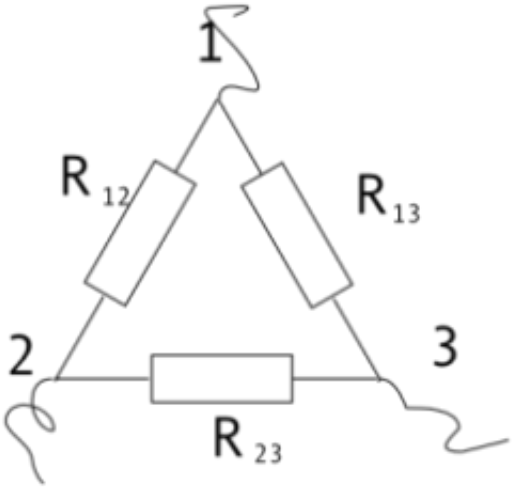
/Врахували, що $\rho_{гр} = 2' \approx 5{,}82 \times 10^{-4}$ рад/.

Приходимо до висновку про те, що для виконання бажання робінзонів про можливість чітко бачити в трубу *об'єктив зорової труби необхідно діафрагмувати, зменшивши його діаметр з наявних 5 см до 2 см.*

Відповідь: об'єктив зорової труби необхідно діафрагмувати до 2 см.

(141) Розглянемо відоме перетворення «зірки» в «трикутник» для резисторів:





Розглянемо наведені вище схеми відносно виводів 1 та 2.

У схемі «трикутник» резистор R_{12} з'єднаний паралельно з послідовно з'єднаними резисторами R_{13} і R_{23} відповідає послідовно з'єднаним опорам R_1 і R_2 в схемі «зірка». Повторюючи аналогічні дії для інших виводіів маємо :

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12} \cdot (R_{23} + R_{13})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_1 + R_3 = \frac{R_{13} \cdot (R_{23} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

$$R_2 + R_3 = \frac{R_{23} \cdot (R_{13} + R_{12})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно опорів R_{12}, R_{13} і R_{23} отримаємо формули для перетворення із «зірки» в «трикутник»:

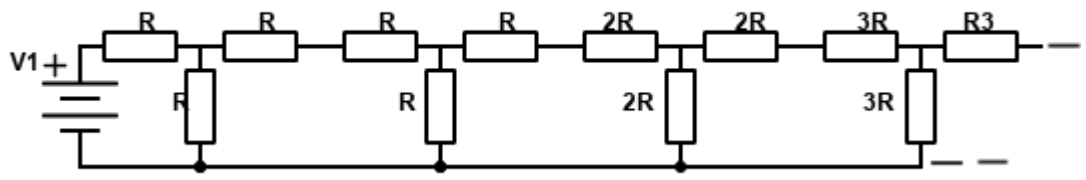
$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_3}$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2}$$

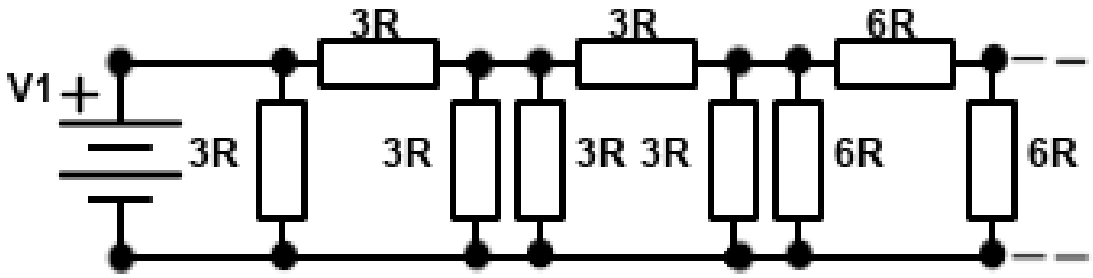
$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1}$$

Тепер перейдемо до вирішення задачі.

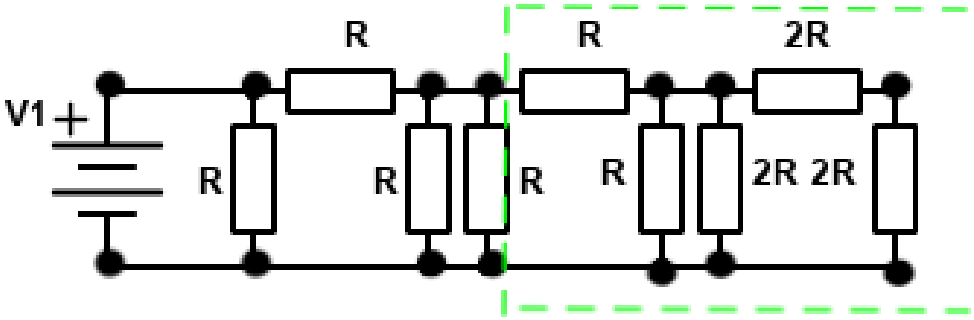
Розіб’ємо кожен резистор окрім нульового між точками A_iA_{i+1} на два послідовно з’єднаних попередні два за значенням в ряду Фібоначчі та об’єднаємо усі резистори у зірки як показано на рисунку:



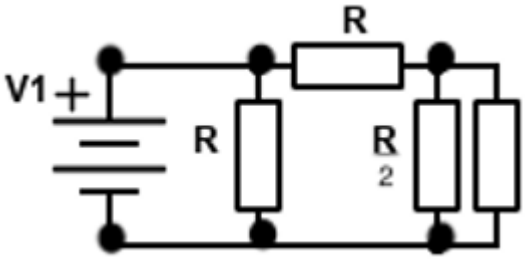
Після цього застосуємо перетворення «зірки» в «трикутник» для кожної зірки.



Тепер можна побачити що усі елементи ланцюга кратні 3, а отже можна привести ланцюг до наступного вигляду з загальним опором $\frac{\alpha R}{3}$:



Тепер можна легко помітити що усе що знаходиться правіше зеленої лінії і є шукане значення $f(\alpha)R$. Тепер замінимо усе що знаходиться в зеленому квадраті на резистор з опором $f(\alpha)R$. Таким чином отримуємо наступне коло:



Не забуваючи врахувати що загальний опір кола рівний $\frac{\alpha R}{3}$ отримуємо наступне співвідношеня:

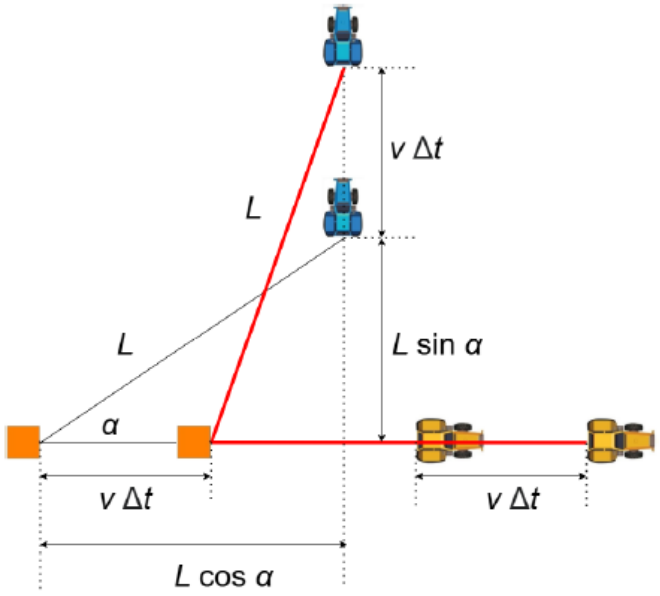
$$\frac{\alpha}{3}R = \frac{R\left(R + \frac{f(\alpha)R \cdot \frac{R}{2}}{f(\alpha)R + \frac{R}{2}}\right)}{2R + \frac{f(\alpha)R \cdot \frac{R}{2}}{f(\alpha)R + \frac{R}{2}}}$$

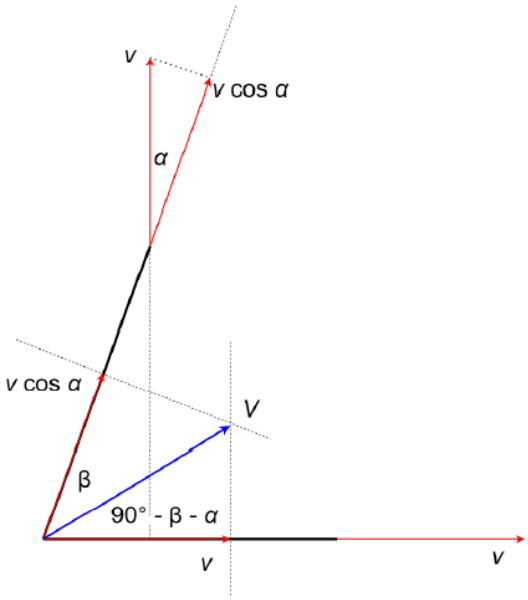
Нарешті, після нескладних підрахунків отримуємо точне значення для $f(\alpha)$:

$f(\alpha) = \frac{2\alpha-3}{9-5\alpha}$.

Невеличкий додаток для допитливих: $\alpha \approx 1.7382$.

(142) Мотузка *Синього (С)* втратить натяг одразу після початку руху, оскільки відстань між вантажом та *С* буде менша за *L*. Тому вантаж буде рухатись по прямій за трактором *Жовтим (Ж)*, поки мотузка *С* не натягнеться знову. Побудувавши малюнок, можна отримати, що це відбудеться після часу $\Delta t = L(\cos\alpha - \sin\alpha)/v$.





Знайдемо швидкість вантажа *V* з геометрії.

$$V\cos(90^\circ - \alpha - \beta) = v$$
$$V\cos\beta = v\cos\alpha$$

$$V(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) = v$$
$$V\sin\beta = \sqrt{V^2 - V^2\cos^2\beta} = \sqrt{V^2 - v^2\cos^2\alpha}$$
$$\sin\alpha \cdot v\cos\alpha + \cos\alpha\sqrt{V^2 - v^2\cos^2\alpha} = v$$

$$\cos\alpha\sqrt{V^2 - v^2\cos^2\alpha} = v(1 - \sin\alpha\cos\alpha)$$
$$V^2\cos^2\alpha - v^2\cos^4\alpha = v^2 - 2v^2\sin\alpha\cos\alpha + v^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$$
$$V^2\cos^2\alpha = v^2 + v^2\cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2v^2\sin\alpha\cos\alpha$$

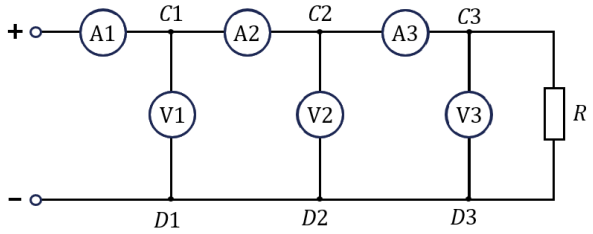
$$V = v\cdot\frac{\sqrt{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha}}{\cos\alpha} = \boxed{v\frac{\sqrt{193}}{12} = 1.16v = V}$$

(143) Очевидно, що амперметри та вольтметри не можна вважати ідеальними: їх опори необхідно враховувати під час аналізу кола. Звернімо також увагу, що наведені значення напруги та сили струму можна розглядати як елементи двох геометричних прогресій з *однаковими* знаменниками $q = 0{,}25$. Це нагадує про безкінечні кола з однакових комірок (саме в таких колах напруга та сила струму від комірки до комірки зменшуються саме за таким законом). Така

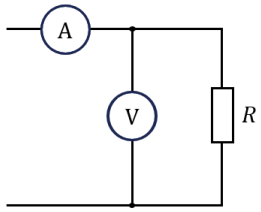
закономірність зберігається і в «обірваному» колі, де замість безкінечної решти кола стоїть резистор з відповідним опором.

Отже, логічною буде спроба пронумерувати прилади так, щоб отримати зліва три однакові комірки, що складаються з амперметра та вольтметра. Це можна зробити лише двома способами.

1) Уважатимемо прилади 1, 2, 3 амперметрами, а 4, 5, 6 — вольтметрами. Отримуємо наведену нижче схему.



Очевидно, покази приладів *зменшуються* зі збільшенням їх номерів. Геометрична прогресія реалізується за умови, що опір показаної нижче ділянки кола дорівнює R. Тоді загальний опір кола теж дорівнюватиме R.



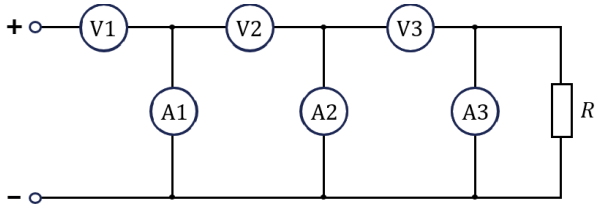
Маємо рівняння $\frac{RR_\text{V}}{R+R_\text{V}} + R_\text{A} = R$.

Урахуємо також, що сила струму через кожний наступний амперметр у 4 рази менша, ніж через попередній. Тобто, наприклад, у точці $C2$ струм ділиться так: ¼ протікає через ділянку кола опором R, а ¾ — через вольтметр V2, приєднаний до цієї ділянки паралельно. Це означає, що $R_\text{V} = \frac{R}{3}$. Тоді $R_\text{A} = \frac{3R}{4}$.

Оскільки повний опір кола дорівнює R, сила струму в колі (отже, в амперметрі $A2$) дорівнює $\frac{U_0}{R}$, напруга на цьому амперметрі $\frac{U_0}{R} \cdot \frac{3R}{4} = \frac{3U_0}{4}$, а напруга на вольтметрі V1 (за умовою це 24 В) становить $\frac{U_0}{4}$. Тут через U_0 позначено вхідну напругу. Ми бачимо, що $U_0 = 96$ В. Оскільки $\frac{U_0}{R} = 0{,}8$ мА, знаходимо:

$\boldsymbol{R = 120}$ **кОм,** $\boldsymbol{R_\text{A} = \frac{3R}{4} = 90}$ **кОм,** $\boldsymbol{R_\text{V} = \frac{R}{3} = 40}$ **кОм**.

2) Уважатимемо тепер прилади 1, 2, 3 вольтметрами, а 4, 5, 6 — амперметрами (див. схему нижче).



Ми можемо розглядати цей випадок аналогічно попередньому. У формулах для опору доведеться тільки поміняти місцями R_V і R_A. Тоді $\frac{RR_A}{R+R_\text{A}} + R_\text{V} = R$, $R_\text{A} = \frac{R}{3}$, $R_\text{V} = \frac{3R}{4}$.

З умови випливає, що струм, пройшовши через вольтметр V1, розгалужується: ¾ тече через амперметр $A1$, а ¼ — через вольтметр V2. Отже, струм через V1 дорівнює $\frac{4}{3} \cdot 0{,}8$ мА, звідки знаходимо опір вольтметра: $\boldsymbol{R_\text{V} = 22{,}5}$ **кОм**. Тоді $\boldsymbol{R = 30}$ **кОм**, $\boldsymbol{R_\text{A} = 10}$ **кОм**.

За бажання можна пошукати й інші варіанти розв’язків, але успіх такого пошуку здається дуже сумнівним.

(144) А) Перш за все з’ясуємо чи був збитий дрон при підльоті до пункту ППО, чи вже після прольоту. Для цього знайдемо відстань від «піддронових» точок К та М до пункту ППО вздовж горизонталі для висот 20° та 65° (див. рис. 1.).

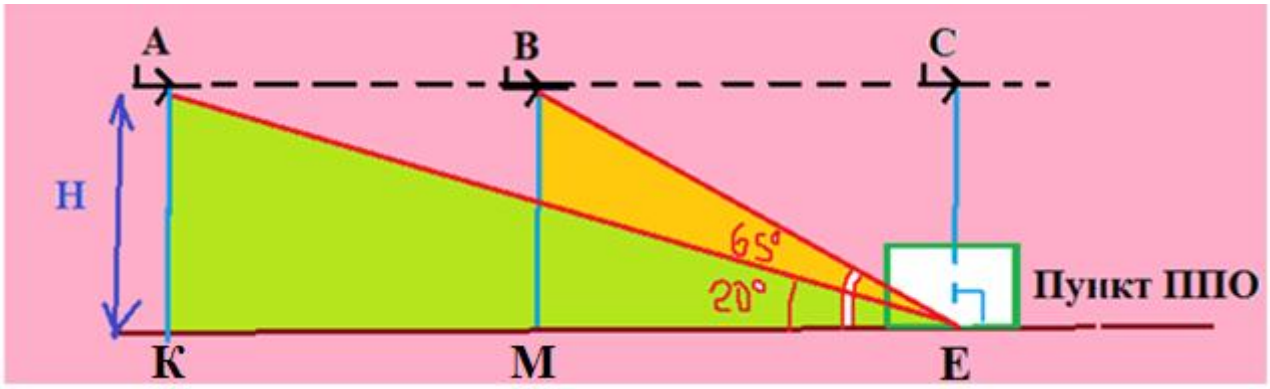


Рис. 1.

Маємо

$$KE = Htg70^o \approx 274{,}4 \text{ м}; \quad ME = Htg25^o \approx 46{,}6 \text{ м}. \qquad (*)$$

В положенні В відстань ВЕ від дрона до пункту ППО $BE = H/\sin 65^o \approx \approx 110{,}3$ м. Цю дистанцію снаряд здолає за час $110{,}3/800 \approx 0{,}14$ с, що разом з часом приведення системи ППО в бойову готовність складе $0{,}14 + 1{,}92 = 2{,}06$ с (при обчисленнях ми врахували, що рух снаряду на вказаній дистанції можна вважати рівномірним, так як за час 0,14 с сила тяжіння змістить його вздовж вертикалі на величину не більшу за 10 см, що нехтовно мало при типових розмірах БПЛА).

За цей час дрон здолає відстань $111{,}1 \times 2{,}06 \approx 228{,}7$ м, а «піддронова» точка траєкторії буде перебувати на відстані $274{,}4 - 228{,}7 = 45{,}7$ від пункту ППО, що менше за відстань МЕ. Це означає, що дрон *не був уражений* при його підльоті, а вже після проходження зеніту. Тобто, дрон був збитий тоді, коли «піддронова» точка його траєкторії пройшла праворуч від точки Е дистанцію рівну $ME \approx 46{,}6$ м. Отже, БПЛА пролетить дистанцію $45{,}7 + 46{,}6 = 92{,}3$ м перш ніж буде збитий ППО після приведення останнього в бойову готовність. На це безпілотнику знадобиться час $92{,}3/111{,}1 \approx 0{,}83$ с.

З огляду на нормативний час між пострілами (0,35 с) можна стверджувати, що бійці пункту ППО зроблять *не більш як 2 постріли* до знешкодження дрону.

Б) Найменша робоча відстань між лінзами досягається тоді, коли оптична
система знаходиться в телескопічному стані, тобто коли система налаштована на спостереження нескінченно далеких (насправді, дуже далеких) об’єктів. Дійсно, в цьому випадку зображення об’єктів отримуються в фокальній площині, тобто на найменшій відстані від об’єктива, а фокусна відстань окуляра є фіксованою, що забезпечує найменшу загальну відстань від об’єктива до окуляра, якщо сумістити фокуси об’єктива та окуляра. Зрозуміло, що суміщати потрібно задні (по ходу променів) фокуси (окуляр – розсіювальна лінза). Система при цьому буде працювати як перетворювач паралельного пучка променів у вужчий – теж паралельний – пучок променів (див. рис. 2).

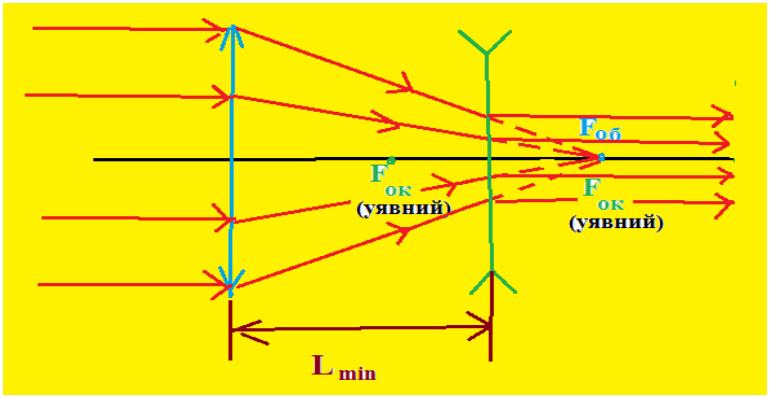


Рис. 2.

Маємо

$$\frac{F_{об}}{|F_{ок}|} = Г, \qquad (1)$$

$$F_{об} - |F_{ок}| = L_{min}. \qquad (2)$$

З умови, (1) та (2) знаходимо $F_{об}$ = 100 см = 1,0 м; $F_{ок}$ = (–5) см = (–0,05) м. Звідси знаходимо оптичні сили лінз: +1 дптр (об'єктив) та (–20) дптр (окуляр).

Знайдемо відстані від дрону до зорової труби пункту ППО для висот 20°, 65° та 90° (зеніт) – див. рис. 1.

$$AE = H/\sin 20^\circ \approx 292{,}4 \text{ м}; \; BE = H/\sin 65^\circ \approx 110{,}3 \text{ м}; \; CE = 100 \text{ м}. \qquad (*)$$

Знаючі оптичну силу об'єктива та (*), неважко знайти відстані від об'єктива до зображень дрону, які створив об'єктив, використовуючи формулу тонкої лінзи. Відповідно до положень дрона в A, B та C, маємо:

$f_1 \approx 1003$ мм; $f_2 \approx 1009$ мм $f_3 \approx 1010$ мм. Тому відстані від об'єктива до окуляра для вказаних положень дрона будуть рівними^

$l_1 = f_1 + F_{ок} \approx 1003 - 50 = 953$ мм; $l_2 = f_2 + F_{ок} \approx 1009 - 50 = 959$ мм;

$l_3 = f_3 + F_{ок} \approx 1010 - 50 = 960$ мм.

Разом з висновком, який ми отримали в п. 1) можна стверджувати, що відстань між об'єктивом та окуляром буде змінюватись в межах від 953 до 960 мм до того, як дрон пролетить зеніт пункту ППО, а потім від 960 до 959 мм до його знешкодження.

Віпповідь: а) не більше двох пострілів; **Б**) буде спочатку зростати від 953 до 960 мм, а потім зменшуватись від 960 до 959 мм.

(145) В оптимальному режимі набір швидкості відбувається наступним чином: с початку болід, рухаючись на межі проковзування, набирає потужність від нуля до максимального значення. На цьому етапі, сила тертя, яка штовхає болід уперед, максимальна і постійна. В наслідок цього рух боліда на першому етапі є рівноприскореним. Після моменту набуття максимальної потужності болід продовжує набір швидкості, але режим руху принципово змінюється: потужність підтримується постійною, але рух вже не буде на межі проковзування і перестає бути рівноприскореним.

В залежності від того, яка максимальна потужність боліду і швидкість, яку за правилами змагань має він досягнути, болід може вийти на задану швидкість або виключно рухаючись в першому режимі, або рухаючись з виходом і на другий режим руху.

Тому зрозуміло, що при заданій фіксованій контрольній швидкості V_{max} якщо потужність P буде вище деякого критичного її значення $Pкр$, автомобіль поза залежності від значення цієї потужності буде досягати цієї швидкості V_{max} за однаковий час, бо прискорення обумовлено однаковою для усіх болідів силою тертя ковзання:

$$\tau_0 = \frac{\vartheta_{max}}{\text{а}} = \frac{\vartheta_{max}}{\mu g}, \text{якщо P} > \text{Ркр} = F\text{терт} * \vartheta_{max} = \mu m g \vartheta_{max}$$

Але якщо максимальна потужність вже набрана, а досягнута швидкість V_1 ще менша за V_{max} тоді загальний час руху до «мети» буде:

$$\tau_0 = \tau_1 + \tau_2 = \frac{\vartheta_1}{\mu g} + \frac{m(\vartheta_m^2 - \vartheta_1^2)}{2\text{P}} = \frac{m\vartheta_m^2}{2P}\left(1 + \left(\frac{\text{P}}{\mu m g \vartheta_m}\right)^2\right), \text{якщо P} < \mu m g \vartheta_{max},$$

де

$$\vartheta_1^2 = \frac{\text{Ркр}}{\mu m g}$$

Якщо позначити кінцеву (максимальну) кінетичну енергію боліда за W, час руху на першій ділянці за $\tau_{\text{кр}} = \frac{\vartheta_{max}}{\mu g}$,то цю формулу можна записати як:

$$\tau_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{W}\frac{\tau_{\text{кр}}^2}{2} + 2\frac{W}{p}\right) = \frac{p}{W}\frac{\tau_{cr}^2}{4} + \frac{W}{p}.$$

Застосуємо цей зв'язок для перших двох двигунів з наведеної таблиці:

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{p_1}{W}\frac{\tau_{cr}^2}{4} + \frac{W}{p_1} \\ \tau_2 = \frac{p_2}{W}\frac{\tau_{cr}^2}{4} + \frac{W}{p_2} \end{cases} | => W = \frac{\tau_1 p_2 - \tau_2 p_1}{\frac{p_1}{p_2} + \frac{p_2}{p_1}} = 540\text{кДж}$$, звідки V_{max}=30 м/с, $\tau_{кр}$=6 с, μ=0,5.

Якщо змагання відбуваються на похилій поверхні, то потужність двигуна, необхідна для досягнення V_{max}=30 м/с при розгоні у режимі 1 (рівноприскорений рух), дорівнює:

$p_{\text{кр}} = \mu m g \cos\alpha \, \vartheta_{max} = 176{,}7$ кДж і вона є меншою за максимальну потужність двигуна 180 кДж, про який йдеться у задачі. Тому болід буде розганятися тільки в режимі 1 з прискоренням $a = g(\mu \cos\alpha - \sin\alpha)$.

$$\tau_1 = \frac{\vartheta_m}{a} = \frac{\vartheta_m}{g(\mu \cos\alpha - \sin\alpha)} = 10 \text{ с}$$

(146) Запишемо рівняння теплового балансу. За невеликий проміжок час $\Delta\tau$ температура знижується на невелику величину $\Delta T = T_0 - T_1$.

$$cm(T_0 - T_1) = kS(T_0 - T_{\text{н}})\Delta\tau,$$

де $T_{\text{н}}$ – температура навколишнього середовища. Звідси виразимо нову температуру T_1:

$$T_1 = T_0 - (T_0 - T_{\text{н}})\alpha\Delta\tau = T_0\beta + T_{\text{н}}\alpha\Delta\tau, \qquad (1)$$

де введено позначення $\alpha = \frac{kS}{cm}$, $\beta = 1 - \alpha\Delta\tau$. Через наступний такий самий проміжок часу $\Delta\tau$

$$T_2 = T_1\beta + T_н\alpha\Delta\tau. \quad (2)$$

Далі

$$T_3 = T_2\beta + T_н\alpha\Delta\tau, \quad (3)$$

Підставимо (1) в (2) щоб спробувати знайти закономірність і виразити кінцеву температуру через початкову:

$$T_2 = T_0\beta^2 + T_н\alpha\Delta\tau(1+\beta).$$

Підставимо отриманий вираз в (3):

$$T_3 = T_0\beta^3 + T_н\alpha\Delta\tau(1+\beta+\beta^2),$$

$$T_4 = T_0\beta^4 + T_н\alpha\Delta\tau(1+\beta+\beta^2+\beta^3)\ ...$$

І так далі. У дужках при $T_н\alpha\Delta\tau$ виникає геометрична прогресія. Тоді, скориставшись формулою суми геометричної прогресії, для T_n маємо

$$\boldsymbol{T_n} = T_0\beta^n + T_н\alpha\Delta\tau\frac{1-\beta^n}{1-\beta} = \boldsymbol{T}_н + (\boldsymbol{T_0} - \boldsymbol{T}_н)\boldsymbol{\beta^n}.$$

Ціле число n – це кількість малих проміжків часу, на який ми поділили довільний час τ остигання речовини: $n = \frac{\tau}{\Delta\tau}$, де β знайдемо з умови зниження температури кави на 15℃ за першу хвилину $\tau_I = 1$хв з $T_0 = 95$℃ до $T_I = 80$℃:

$$T_I = T_н + (T_0 - T_н)\boldsymbol{\beta}^{\frac{\tau_I}{\Delta\tau}},$$

звідки

$$\beta^{\frac{\tau_I}{\Delta\tau}} = \frac{T_I - T_н}{T_0 - T_н} = \frac{4}{5}.$$

Отже, температура кави у будь-який момент часу визначається формулою

$$T = T_н + (T_0 - T_н)\beta^{\frac{\tau}{\Delta\tau}} = T_н + (T_0 - T_н)\left(\frac{T_I - T_н}{T_0 - T_н}\right)^{\frac{\tau}{\tau_I}} \quad (4)$$

$$T = \left(20 + 75\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{\tau}{\text{хв}}}\right)℃.$$

Формула (4) в загальному вигляді описує остигання будь-якої речовини. Але й нагрівання також, зокрема, холодного молока у нашому випадку (тоді множники $T_0 - T_н$ і $T_I - T_н$ в (4) просто матимуть від'ємні значення. Якщо мензурки з кавою і молоком мають однакові радіуси, то коефіцієнти $\alpha = \frac{kS}{cm} = \frac{k2\pi rh}{c\rho\pi r^2 h} = \frac{2k}{c\rho r}$, а отже й $\beta = 1 - \alpha\Delta\tau$ для них також будуть однаковими. Тоді температура молока згідно (4) у будь-який момент часу описуватиметься формулою

$$T_{\text{м}} = \left(20 - 15\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{\tau}{\text{хв}}}\right)\text{℃}. \qquad (5)$$

Відлік часу τ у (5) починається з моменту, коли молоко дістали з холодильнику, тобто за 3 хвилини до повної готовності «кави з молоком». У момент, коли молоко дістали з холодильнику, температура кави була 80℃. Приймемо її за початкову температуру в (4) й отримуємо

$$T_{\text{к}} = \left(20 + 60\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{\tau}{\text{хв}}}\right)\text{℃}. \qquad (6)$$

Згідно (6) у момент $\tau = 0$ с, температура кави 80℃, а за хвилину до цього ($\tau = -1$ с) температура кави 95℃. Через 3 хвилини після $\tau = 0$ с, якщо каву з молоком не змішуватимуть до самого кінця, їхні температури будуть 50,72℃ і 12,32℃ відповідно.

Припустимо, що ми їх змішали у деякий довільний момент часу $\tau \leq 3\text{хв}$. Температура T, яка встановиться, визначається з рівняння теплового балансу:

$$T = \frac{m_{\text{к}}T_{\text{к}} + m_{\text{м}}T_{\text{м}}}{m_{\text{к}} + m_{\text{м}}} = T_{\text{н}} + \frac{60m_{\text{к}} - 15m_{\text{м}}}{m_{\text{к}} + m_{\text{м}}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{\tau}{\text{хв}}}\text{℃}.$$

Оскільки утворена кава з молоком остигатиме ще час $(3\text{хв} - \tau)$, а коефіцієнт $\alpha = \frac{kS}{cm}$ суміші за рахунок однакового збільшення і маси, і площі тепловіддачі залишається незмінним, маємо згідно формули (4) остаточну температуру T_{fin} суміші

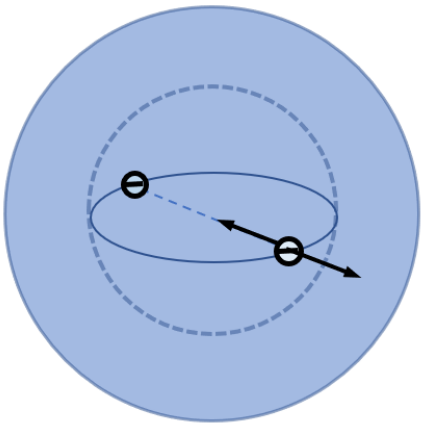
$$T_{\text{fin}} = T_{\text{н}} + (T - T_{\text{н}})\left(\frac{4}{5}\right)^{3-\frac{\tau}{\text{хв}}} = T_{\text{н}} + \frac{60m_{\text{к}} - 15m_{\text{м}}}{m_{\text{к}} + m_{\text{м}}}\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{\tau}{\text{хв}}}\left(\frac{4}{5}\right)^{3-\frac{\tau}{\text{хв}}}\text{℃} = \left(20 + 35\left(\frac{4}{5}\right)^{3}\right)\text{℃}$$
$$= 37{,}92\text{℃} \approx 38\text{℃}.$$

Як бачимо, відповідь не залежить від моменту часу, коли змішують каву з молоком, якщо ті були налиті в однакові мензурки і між ними та навколишнім середовищем весь час відбувався теплообмін. Ця відповідь зберігається й для інших початкових температур кави й молока. Виходячи з умов і простоти відповіді, ймовірно, до неї можна прийти з більш простих і наочних міркувань.

Якщо діаметр мензурки з молоком буде вдвічі більшим, ніж з кавою, молоко менше нагріватиметься поки стоятиме у своїй мензурці, й тому для меншої кінцевої температури суміші, треба додати його до кави в останню мить. Якщо ж діаметр мензурки з молоком буде вдвічі меншим вигідніше долити його відразу.

Розв’язки теоретичних завдань Інтернет-олімпіади 11 клас

(147) Як відомо, електричне поле всередині сферичної однорідно зарядженої оболонки компенсується, що легко доводиться з оберненої пропорційності до відстані сили у законі Кулона та подібності. Тоді на електрон, який рухається вздовж орбіти радіусом a, діє сила притягання до додатно зарядженої кулі радіусом a і сила відштовхування від іншого електрона, який знаходиться на відстані $2a$ (див. Рис). Другий закон Ньютона для електрона:



$$m\omega^2 a = \frac{ke}{a^2}\cdot\frac{4}{3}\pi a^3\rho - \frac{ke^2}{(2a)^2} = \frac{ke^2}{(2a)^2}\left(\left(2\frac{a}{b}\right)^3 - 1\right). \qquad (1)$$

Оскільки доцентрове прискорення має додатне значення, з (1) знаходимо обмеження на радіус орбіти $a \geq b/2 = 2{,}5\cdot 10^{-11}$м. За моделлю орбіта знаходиться всередині позитивно зарядженої кулі. Отже $a \in [b/2\,;\,b] = [25;\,50]$пм. Відповідні частоти обертання:

$$\nu \in \left[0;\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{7ke^2}{mb^3}}\right] = [0;\,9{,}5\cdot 10^{15}]\ \text{Гц}.$$

Частота $5{,}1\cdot 10^{14}$ Гц, що відповідає довжині хвилі 587,5 нм, входить у цей інтервал.

Знайдемо тепер енергію іонізації. Для цього спочатку визначимо потенціальну енергію взаємодії електрона з однорідно запрядженою кулею, коли той знаходиться всередині неї на відстані a від центру. Оскільки сила $F = 2\frac{ke^2}{b^3}a$ (див. (1)) пропорційна відстані і спрямована до центру наче сила Гука, потенціальна енергія також матиме вигляд аналогічний до енергії пружної деформації:

$$W_1 = \frac{ke^2}{b^3}a^2.$$

Звісно, останній вираз можна було отримати й інакше, але тільки не вважаючи, що потенціальною енергією взаємодії електрона з зовнішніми шарами кулі можна знехтувати по аналогії з силами електростатичної взаємодії.

У стані з мінімальною енергією, коли загальна електростатична сила на електрон дорівнює нулю, радіус орбіти $a = b/2$, і електрони практично нерухомі, загальна енергія дорівнюватиме потенціальній:

$$W_{min} = W_1 + W_2 = 2\frac{ke^2}{b^3}a^2 + \frac{ke^2}{2a} = \frac{3}{2}\frac{ke^2}{b}.$$

У стані з максимальною енергією, коли радіус орбіти $a = b$, потенціальна енергія

$$W_{max} = 2\frac{ke^2}{b} + \frac{ke^2}{2b} = \frac{5}{2}\frac{ke^2}{b}.$$

Отже, для того, щоб підняти електрони атома Гелію у моделі Томсона з мінімального енергетичного стану до поверхні, не надаючи їм кінетичної енергії, слід виконати роботу

$$A_1 = W_{max} - W_{min} = \frac{ke^2}{b}.$$

Далі можна користуватися стандартними формулами для потенціальної енергії взаємодії точкових зарядів у пустоті. Робота по віддаленню електронів з поверхні на нескінченність

$$A_2 = W_\infty - W_b = 0 - \left(\frac{ke^2}{2b} + 2\left(-\frac{2ke^2}{b}\right)\right) = \frac{7}{2}\frac{ke^2}{b}.$$

Примітка. Все це можна отримати прямим інтегруванням наступним чином: Визначимо енергію цієї взаємодії.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}W = -\frac{\partial W}{\partial r}\overrightarrow{e_r},$$

де $\overrightarrow{e_r}$ – одиничний вектор, що спрямований в радіальному напрямку від центру.

$\vec{F} = -2\frac{ke^2}{b^3}r\overrightarrow{e_r} = -\frac{\partial W}{\partial r}\overrightarrow{e_r}$, звідки

$$W_a - W_b = 2\frac{ke^2}{b^3}\int_b^a r dr = \frac{ke^2}{b^3}a^2 - \frac{ke^2}{b},$$

де $W_b = -2\frac{ke^2}{b}$ – кулонівська енергія на поверхні кулі.

Остаточно для енергії одного електрона всередині кулі маємо:

$$W_a = \frac{ke^2}{b^3}a^2 - 3\frac{ke^2}{b}.$$

Повна енергія двох електронів в кулі, враховуючи взаємодію між ними:

$$W_{2e}(a) = 2 * \left(\frac{ke^2}{b^3}a^2 - 3\frac{ke^2}{b}\right) + \frac{ke^2}{2a}$$

У стані з мінімальною енергією, коли загальна електростатична сила на електрон дорівнює нулю, радіус орбіти $a = b/2$, і електрони практично нерухомі, загальна енергія дорівнюватиме потенціальній:

$$W_{PotMin} = -\frac{9}{2}\frac{ke^2}{b}.$$

У стані з максимальною енергією, коли радіус орбіти $a = b$, потенціальна енергія:

$$W_{PotMax} = -\frac{7}{2}\frac{ke^2}{b}.$$

Отже, для того, щоб підняти електрони атома Гелію у моделі Томсона з мінімального енергетичного стану до поверхні, не надаючи їм кінетичної енергії, слід виконати роботу

$$A_1 = W_{PotMax} - W_{PotMin} = \frac{ke^2}{b}.$$

Робота по віддаленню електронів з поверхні на нескінченність

$$A_2 = W_\infty - W_{2e}(b) = \frac{7}{2}\frac{ke^2}{b}.$$

Повна робота $A_1 + A_2 = \frac{9}{2}\frac{ke^2}{b} = 130\ eV$ дорівнює енергії повної іонізації атома з основного стану до окремих двох електронів та альфа-частинки. Розглянемо тепер інший граничний випадок, коли атом спочатку знаходиться у максимально збуреному стані, а орбіта електронів проходить по поверхні. Повна енергія у цьому випадку включатиме не тільки потенціальну $-\frac{7}{2}\frac{ke^2}{b}$, але й кінетичну обох електронів $2\frac{mv^2}{2}$.

З другого закону Ньютона

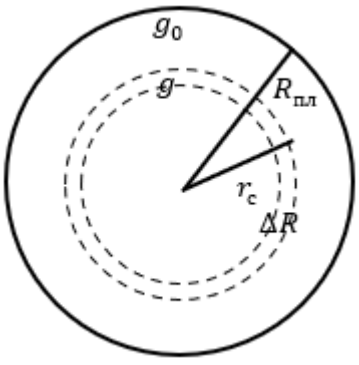
$$m\frac{v^2}{b} = 2\frac{ke^2}{b^2} - \frac{ke^2}{(2b)^2} = \frac{7}{4}\frac{ke^2}{b^2}$$

знаходимо, що кінетична енергія $2\frac{mv^2}{2} = \frac{7}{4}\frac{ke^2}{b}$. Отже, повна енергія $-\frac{7}{4}\frac{ke^2}{b}$, а енергія повної іонізації

$$\frac{7}{4}\frac{ke^2}{b} = 50\ eV.$$

Як бачимо, справжнє значення 79 eV попадає в отриманий інтервал $[50; 130]eV$. Отже, початковому стану Гелію за даною моделлю відповідає деяка проміжна орбіта електронів радіусом з інтервалу $[25; 50]$ пм. Як бачимо, модель атома Томсона не протирічить розглянутим експериментальним даним по Гелію. Але вона і не дозволяє без додаткових штучних припущень робити розрахунки з будь-якою наперед заданою точністю, відповідаючи на будь-які питання, як це можливо завдяки рівнянням квантової механіки.

(148) Так як, густина планети лінійно спадає зі збільшенням радіусу. Можемо записати, що $\rho = \rho_0 - br$ (1),
де ρ_0 −густина планети в її центрі.



Для зручності знайдемо вирази для декількох величин, що допоможуть при подальшому розв'язанні задачі.
$g_0 = \frac{\gamma M_{пл}}{R_{пл}^2}$ (2) -прискорення вільного падіння на поверхні планети.
$g_c = \frac{\gamma M_c}{r_c^2}$ (3) – прискорення вільного падіння в середині планети на відстані r_c від центру, що обумовлене дією сили тяжіння збоку «внутрішньої» планети радіуса r_c.
$g_{зовні} = \frac{\gamma M_{пл}}{r_{зовн}^2}$ (4), прискорення вільного падіння за межами планети на відстані $r_{зовн}$ від центру.
У зв'язку з тим, що густина планети не є постійною, знайдемо її масу, як $M = \int dM = \int \rho(r)dV$. Маса тонкого сферичного шару:
$dM = \int_0^{R_{пл}}(4\rho_0\pi R^2 dR - 4\pi b R^3 dR)$.
Тоді маса частини планети радіусу $r_c < R_{пл}$,
$M_c = 4\pi r_c^3\left(\frac{\rho_0}{3} - \frac{br_c}{4}\right)$, де $0 < r_c < R_{пл}$ (5)

Маса всієї планети: $M_{\text{пл}} = 4\pi {R_{\text{пл}}}^3 \left(\frac{\rho_0}{3} - \frac{bR_{\text{пл}}}{4}\right)$ (6)

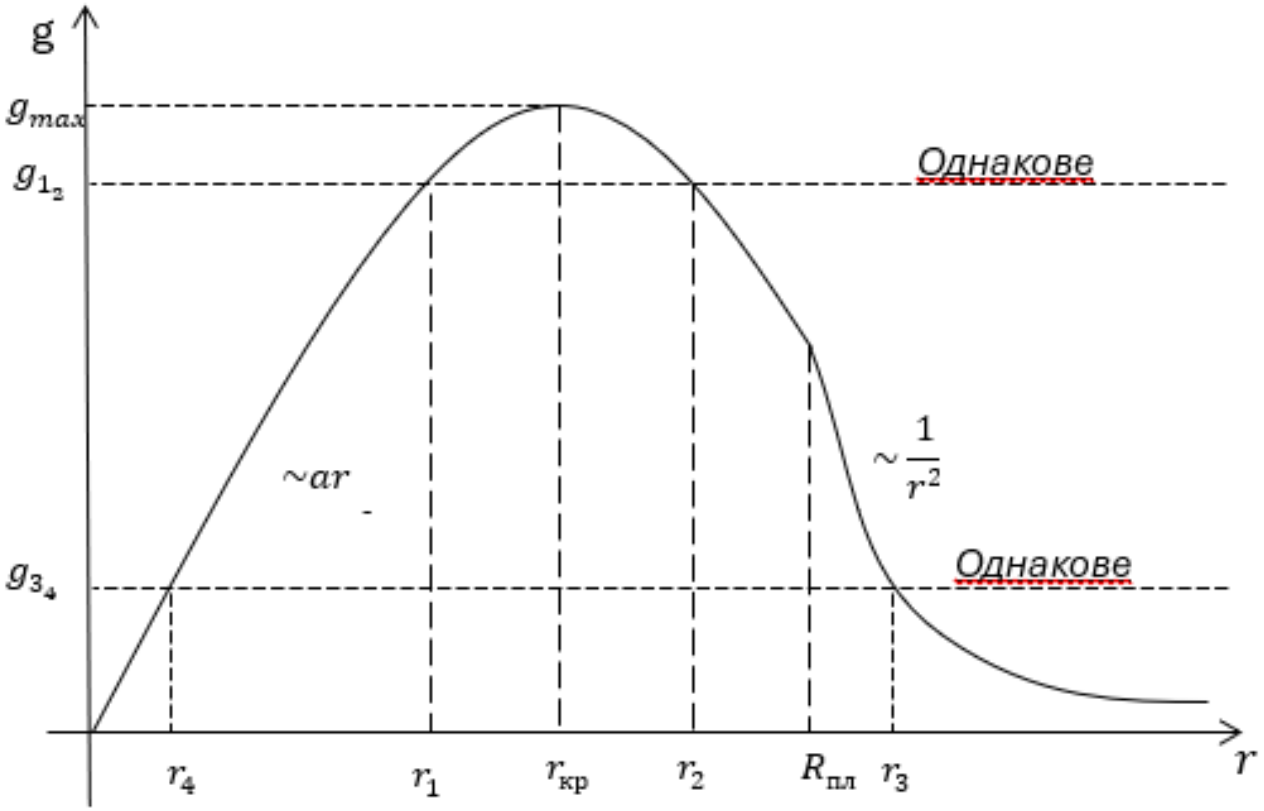
Підставимо (5), (6) в (2), (3), (4) та отримаємо вирази для прискорення вільного радіння на поверхні планети g_0, в середині планети $g_{\text{с}}$ та зовні планети $g_{\text{ззовні}}$:

$$g_0 = \gamma 4\pi R_{\text{пл}} \left(\frac{\rho_0}{3} - \frac{bR_{\text{пл}}}{4}\right) \quad (7)$$

$$g_{\text{с}} = \gamma 4\pi r_{\text{с}} \left(\frac{\rho_0}{3} - \frac{br_{\text{с}}}{4}\right) \quad (8)$$

$$g_{\text{ззовні}} = \gamma 4\pi \frac{{R_{\text{пл}}}^3}{r^2} \left(\frac{\rho_0}{3} - \frac{bR_{\text{пл}}}{4}\right) \quad (9)$$

Накреслимо графік залежності g(r) за функціями (8), (9).



Зрозуміло, що маятниковий годинник показує величину, що напряму залежить від кількості його коливань та ціни поділки, яка прив'язана до періоду правильного годинника (для зручності будемо вважати їх однаковими).

$$\text{П}_{\text{годинника}} = \text{N} * \text{ЦП}, \text{де } \text{П}_{\text{годинника}} - \text{покази годинника}$$

$$\text{N} = \frac{\Delta\text{t}}{\text{T}}, \text{де } \Delta\text{t} - \text{реальний час; } \text{T} - \text{період реальних коливань годинника.}$$

$$\text{ЦП} = \text{T}_0, \text{де ЦП} - \text{ціна поділки; } \text{T}_0 - \text{період коливань на поверхні планети.}$$

Тоді різниця між показами годинника та його показами на поверхні:

$$\Delta\text{П} = \text{П}_{\text{годинника}} - \Delta\text{t} = \frac{\Delta\text{t} * \text{T}_0}{\text{T}} - \Delta\text{t} = \Delta\text{t}\left(\frac{\text{T}_0}{\text{T}} - 1\right)$$

Так як, коливання є малими можемо вважати що $\text{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{l}}{\text{g}}}, \text{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\text{l}}{\text{g}_0}}$.

Тоді отримаємо:

$$\Delta\text{П} = \Delta\text{t}\left(\frac{\sqrt{\text{g}}}{\sqrt{\text{g}_0}} - 1\right)$$

$$\boxed{\frac{g}{g_0} = (\frac{\Delta П}{\Delta t} + 1)^2} \qquad (10)$$

Оскільки покази годинника на відстані r_1та r_2 однакові (за умовою), запишемо:

$$\begin{cases} g_1 = g_2 \\ g_1 = \gamma 4\pi r_1 \left(\frac{\rho_0}{3} - \frac{br_1}{4}\right) \\ g_2 = \gamma 4\pi r_2 \left(\frac{\rho_0}{3} - \frac{br_2}{4}\right) \end{cases} \longrightarrow \boxed{\frac{\rho_0}{b} = \frac{3(r_1 + r_2)}{4}} \qquad (11)$$

Підставивши, рівняння (8) у (10), маємо:

$$(\frac{\Delta П}{\Delta t} + 1)^2 * R_{пл} \left(\frac{\rho_0}{3} - \frac{bR_{пл}}{4}\right) = r_1 \left(\frac{\rho_0}{3} - \frac{br_1}{4}\right)$$

З цього отримуємо квадратне рівняння:

$$(\frac{\Delta П}{\Delta t} + 1)^2 \frac{R_{пл}^2}{4} - \left(\frac{\Delta П}{\Delta t} + 1\right)^2 \left(\frac{a}{3}\right) R_{пл} + r_1 \left(\frac{a}{3} - \frac{r_1}{4}\right) = 0$$

Коренями цього рівняння є $R_{пл_1} \approx 50км, R_{пл_2} \approx 100км$.

З графіка бачимо, що годинник випереджає дійсний час за умови що $r_1 < R_{пл}$, та $r_2 < R_{пл}$, тому перший корінь не відповідає умові задачі.

1) Аналогічно, покази годинника на відстані r_3та r_4 однакові за умовою, тому запишемо:

$$\Delta П_3 = \Delta П_4$$

$$g_4 = g_3 \quad (12)$$

Підставимо у рівняння (8), (9) і (11) у рівняння (12).

$$r_4 \left(\frac{a}{3} - \frac{r_4}{4}\right) = \frac{{R_{пл}}^3}{{r_3}^2} \left(\frac{a}{3} - \frac{R_{пл}}{4}\right)$$

Отримаємо квадратне рівняння:

$$\frac{r_4^2}{4} - \frac{ar_4}{3} + \frac{{R_{пл}}^3}{{r_3}^2} \left(\frac{a}{3} - \frac{R_{пл}}{4}\right) = 0$$

Корені даного рівняння, $r_{4_1} \approx 42$ км, $r_{4_2} \approx 108$ км.

З графіка бачимо, що для виконання умов задачі (відставання обох показів годинника) необхідно, щоб $r_4 < R_{пл}$.

Тому, $r_4 = r_{4_1} \approx 42$ км.

2) Запишемо вираз для густини на поверхні планети: $\rho_п = \rho_0 - bR_{пл.}$.

Тоді, користуючись (11) рівнянням маємо: $b = \frac{\rho_п}{(a-R_{пл})}$ (13)

Так як, планета має форму кулі: $\rho_{сер} = \frac{M_{пл}}{V_{пл}}$, де $V_{пл} = \frac{4}{3}\pi R_{пл}^3$, $M_{пл}$ підставимо з рівняння (6), а для коефіцієнтів ρ_0 та b використаємо вирази (11),(13) .

Отримаємо: $$\rho_{сер} = \frac{\rho_п}{(a-R_{пл})}\left(\frac{4a-3R_{пл}}{4}\right) = 3000\,\frac{кг}{м^3}.$$

3) Розглянувши графік g(r), бачимо, що на проміжку від 0 до $R_{пл}$ маємо максимум функції. Знайдемо його за допомогою похідною від рівняння (8)

$$\left(\gamma 4\pi r_4\left(\frac{\rho_0}{3}-\frac{br_4}{4}\right)\right)' = 0$$

Скориставшись рівнянням (11), отримаємо:

$$r_4 = \frac{2}{3}a = 75км.$$

Для знаходження різниці показів годинника, підставимо рівняння (7),(8) у (10) та використаємо r_4 з попереднього пункту. Тоді:

$$\Delta П_{кр} = \left(\sqrt{\frac{4a^2}{3R_{пл}(4a-3R_{пл})}} - 1\right)\Delta t \approx 91с.$$

(149) ККД прямого циклічного процесу можна розрахувати як відношення виконаної газом за цикл роботи до підведеної до нього теплоти. Зрозуміло, що тепло буде підводитися на ділянці 1-2, та на частинах процесів 2-3 та 4-1, де існують точки дотику з адіабатою яка відділяє процеси з поглинанням тепла від процесів з виділенням його.

Знайдемо з графіку приблизні значення тиску та об'єму у точках 1-2-3-4, та точках дотику відрізків 2-3 й 4-1 з адіабатами (точки $A_{(23)}$ та $B_{(41)}$).

	p/p_o	V/V_0
1	23	3
2	23	6
3	2	13
4	2	10
$A_{(23)}$	16	8.7
$B_{(41)}$	13	6.6

Запишемо рівняння Пуассона для адіабатного процесу з метою визначення приблизного значення показника адіабати **γ** та кількості ступенів свободи молекули ***i***.

$$p_c V_c^{\gamma} = p_D V_D^{\gamma}$$

$$\left(\frac{V_c}{V_D}\right)^{\gamma} = \frac{p_D}{p_c}$$

$$\gamma = \frac{\ln\frac{p_D}{p_c}}{\ln\frac{V_c}{V_D}} \approx 1.5$$

$$i \approx 4$$

Як бачимо за значенням координат, кути нахилу відрізків 4-1 та 2-3 однакові. Тому, цикл має форму паралелограму.

Робота газу в ньому чисельно дорівнює площі цього паралелограму.

$$\mathrm{A_{газу}} = (V_2 - V_1)(p_1 - p_4) = 63p_0V_0$$

Розглянемо ділянку 2-3. Як бачимо, до т.А, де 2-3 дотикається до відповідної адіабати $\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dV}} > 0$ і тепло $\mathrm{Q_{2A}}$ буде підводитися до газу, після т.А

$\frac{\mathrm{dQ}}{\mathrm{dV}} < 0$ і тепло $\mathrm{Q_{A3}}$ відводиться від газу.

Так саме розглянемо ділянку 4-1. Як бачимо т.В є аналогом т.А на ділянці 2-3. Тобто, тепло буде підводитися до газу на ділянці 4-В.

Користуючись першим законом термодинаміки знайдемо $\mathrm{Q_{4B}}$ та $\mathrm{Q_{2A}}$.

Таким чином,

$$\eta = \frac{\mathrm{A_{цикла}}}{Q_{\text{підв.}}} = \frac{A}{Q_2 + Q_{2A} + Q_{4B}}$$

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + \Delta A_{12} = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) + p_1(V_2 - V_1)$$
$$= 2(23 * 6 - 23 * 3)p_0V_0 + 23(6 - 3)p_0V_0 \approx 207p_0V_0$$

$$Q_{2A} = \Delta U_{2A} + \Delta A_{2A} = \frac{i}{2}(p_AV_A - p_2V_2) + \frac{p_A + p_2}{2}(V_A - V_2)$$
$$= 2(16 * 8{,}7 - 23 * 6)p_0V_0 + \frac{16 + 23}{2}(8.7 - 6)p_0V_0 \approx 55.05p_0V_0$$

$$Q_{4B} = \Delta U_{4B} + \Delta A_{4B} = \frac{i}{2}(p_BV_B - p_4V_4) + \frac{p_B + p_4}{2}(V_B - V_4)$$
$$= 2(13 * 6{,}6 - 10)p_0V_0 + \frac{2 + 13}{2}(6{,}6 - 10)p_0V_0 \approx 106.1p_0V_0$$

$$\eta = \frac{63p_0V_0}{207p_0V_0 + 106.1p_0V_0 + 55.05p_0V_0} \approx 17.1\%$$

Зрозуміло, що можна було б знайти точки А та В розв’язавши систему з

а) рівняння прямої

б) рівняння адіабати

Таким самим, збільшивши точність розрахунків, але ж, як Ви догадалися, накресленні адіабати були наведені, щоб позбавитися до цих достатньо громіздких розрахунків.

(150) Якщо певні точки пластини за температури 0 °C лежать на відрізку прямої в площині рисунку, то після нагрівання ці точки лежать на дузі кола (див. рисунок). Оскільки прогин пластинки набагато менший від її довжини, центральний кут φ цієї дуги є малим, а радіус r набагато більший за l_0. З рис. 1 отримуємо $h = r(1-\cos\varphi) = r\varphi^2/2$.

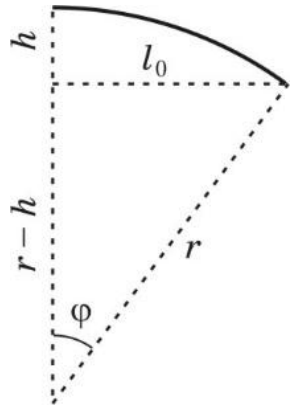


Рис. 1

Розіб'ємо подумки вигнуту пластинку на багато вигнутих тонких шарів (див. рис. 2). Якби такий шар не взаємодіяв з сусідніми, то внаслідок нагрівання до температури t він би не вигинався, а тільки видовжився на $\Delta l_0 = \alpha t l_0$. При цьому в речовині не виникала б механічна напруга, тобто такий стан можна вважати «недеформованим». У реальній біметалевій пластині таки напруги виникають.



Рис. 2

Надалі позначимо r радіус кривизни межі між двома частинами пластинки; виберемо початок координат на цій межі та напрям осі z вертикально вгору. Тоді для частини 1 маємо $0 \le z \le s$, для частини 2 $-s \le z \le 0$. Радіус кривизни кожного тонкого шару $r(z) = r + z$, довжина цього шару $l(z) = \varphi(r+z)$, а його видовження відносно «недеформованого» стану $\Delta l(z) = \varphi(r+z) - l_0(1+\alpha t)$. Отже, механічна напруга всередині цього шару $\sigma(z) = E\dfrac{\varphi(r+z) - l_0(1+\alpha t)}{l_0}$, де E— модуль пружності (строго кажучи, у знаменнику має бути $l_0(1+\alpha t)$, але різниця є несуттєвою). Уважатимемо механічну напругу в різних шарах пластинки додатною або від'ємною залежно від того, розтягнений шар або стиснений; обов'язково існує нейтральний шар, у якому $\sigma(z) = 0$.

Зовнішні сили діють на біметалеву пластинку тільки на лівому кінці (з боку стінки). Скористаємося двома умовами рівноваги.

1. З умови рівності нулю суми зовнішніх сил: $\int_{-s}^{s} \sigma(z)dz = 0$, звідки $2\varphi r = l_0(2 + \alpha_1 t + \alpha_2 t)$.

2. З умови рівності нулю суми моментів зовнішніх сил (відносно осі, що проходить через межу двох частин пластинки перпендикулярно площині рисунку): $\int_{-s}^{s} z\sigma(z)dz = 0$, звідки $4\varphi s = 3tl_0(\alpha_1 - \alpha_2)$.

З отриманих співвідношень знаходимо $r = \dfrac{4s}{3t(\alpha_1 - \alpha_2)}$ і $h = \dfrac{3tl_0^2(\alpha_1 - \alpha_2)}{8s}$. Ми врахували, що добутки αt малі. Отже, знеструмлення відбудеться за температури $t = \dfrac{8sh}{3l_0^2(\alpha_1 - \alpha_2)} \approx 170\ ^\circ\text{C}$.

Цікаво проаналізувати отриману залежність $\sigma(z)$: підставивши отримані значення φ, r, маємо:

для верхньої частини пластинки $\sigma(z) = \dfrac{3Et(\alpha_1 - \alpha_2)}{4}\left(\dfrac{z}{s} - \dfrac{2}{3}\right)$,

для нижньої частини пластинки $\sigma(z) = \dfrac{3Et(\alpha_1 - \alpha_2)}{4}\left(\dfrac{z}{s} + \dfrac{2}{3}\right)$.

На рис. 3 наведено графік залежності $\sigma(z)$ та ескіз розподілу сил, що діють на пластинку з боку стіни.

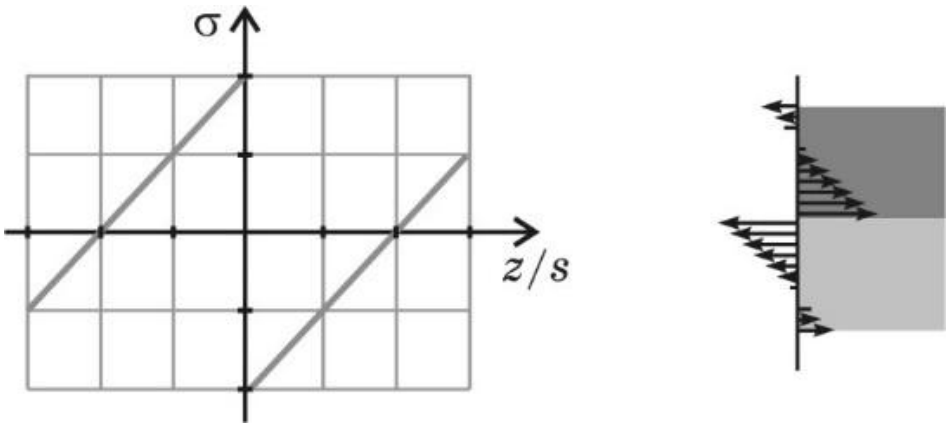
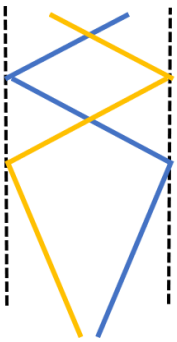


Рис. 3

Як бачимо, система має два нейтральні шари, по одному в кожному матеріалі. На межі двох матеріалів напруги рівні за модулем та протилежні за знаками.

(151) А) За один період кожен патрубок зробить повний оберт, отже кожна лінія струменю доткнеться по одному разу до двох огинаючих фонтану (пунктирні лінії на схематичному малюнку). У кожна пари струменів візуальних перетинів буде два. Якщо струменів n, кількість пар (геометричний аналог – кількість відрізків, якими можна з'єднати n точок) дорівнює $n(n-1)/2$. Отже, за один період кількість перетинів $n(n-1)$, а за m повних періодів $mn(n-1)$.



Можливо, ця лаконічна аргументація для когось не виглядає достатньо переконливою. Мов, чому у двох струменів за період саме два перетину, адже лінії струменів на схематичному малюнку можна намалювати і по іншому? Де гарантія, що якісь дві точки перетину не накладуться одна на одну, і тоді замість двох точок перетину маємо рахувати одну, у якій перетнулися три або чотири струменя?

Що ж, тоді звернемося до іншої аргументації.

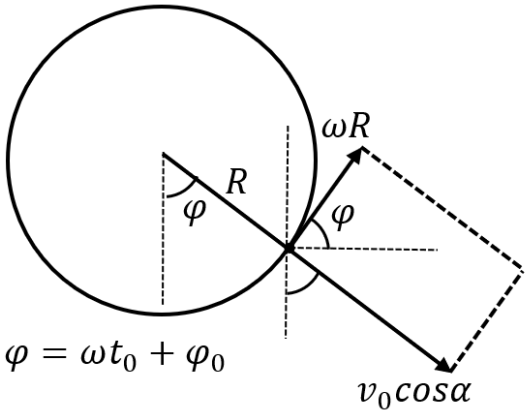
У точках візуального перетину двох струменів знаходиться вода, яка була випущена з відповідних патрубків в один момент часу, оскільки вони піднялися на однакову висоту. Тоді всі такі частинки води віддалилися від осі фонтану у горизонтальному напрямку на однакову відстань, отже у горизонтальному перерізі частинки води від n струменів утворюватимуть

правильний n-кутник. Якщо подумки переміщати такий переріз від нижньої точки фонтану до висоти, на яку піднялася вода за один період, цей n-кутник розширятиметься і зробить повний оберт. Те, що n-кутник розширятиметься на кількість перетинів не впливає, оскільки це питання масштабу, а не взаємного розташування. Отже, за один оберт кожна точка одного струменю перетнеться з кожною точкою іншого рівно 2 рази, й усього матиме $2(n-1)$ перетинів. Оскільки у n-кутнику таких точок n, а кожний перетин одночасно належить двом точкам, загальна кількість перетинів буде $n(n-1)$. За m повних періодів:

$$N = mn(n-1).$$

Зазначимо, одночасно ми довели, що точки перетину трьох або більше струменів не можливі, оскільки будь-яка пряма, що перетинає опуклий багатокутник, не може проходити більш ніж через дві його вершини.

Б) Кутова швидкість обертання не вплине на висоту фонтану $h = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$, але вплине на його горизонтальні розміри. Припустимо, що у деякий момент часу t_0 патрубок повернувся на кут $\varphi = \omega t_0 + \varphi_0$ до напряму на спостерігача і випустив деяку порцію води зі швидкістю v_0 під кутом α до горизонту у власній системі відліку (на рис. зображений вигляд згори). Тоді у момент часу t для віддаленого спостерігача ця порція води перебуватиме на висоті



$$y = v_0 \sin\alpha \cdot (t - t_0) - \frac{g(t-t_0)^2}{2}, \qquad (1)$$

а у горизонтальному напрямку матиме відносно центру фонтану координату (див. рис.):

$$x = (R + v_0 \cos\alpha (t - t_0))\sin\varphi + \omega R(t - t_0)\cos\varphi. \qquad (2)$$

Для знаходження найменшого та найбільшого діаметрів, рівняння (2) зручніше записати, ввівши допоміжний кут:

$$x = \sqrt{(R + v_0 \cos\alpha (t - t_0))^2 + (\omega R(t - t_0))^2}\sin(\varphi + \beta). \qquad (3)$$

Рівняння (3) можна було отримати відразу, використавши закон додавання швидкостей. Оскільки струменів багато, радіус фонтану r визначатиметься максимальним значенням координати x з (3), коли $\sin(\varphi + \beta) = 1$.

$$r = \sqrt{(R + v_0 \cos\alpha (t - t_0))^2 + (\omega R(t - t_0))^2}. \qquad (4)$$

За умовою задачі розглядається та частина фонтану, у якій вода рухається вгору. У найвищій точці вона опиниться у момент часу $t - t_0 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$. Підставимо у (4) і отримаємо діаметр верхнього кола фонтану:

$$D = 2\sqrt{(gR + v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha)^2 + (\omega R v_0 \cos\alpha)^2}/g. \qquad (5)$$

Здається, що найбільш вузькою буде найнижча частина фонтану, її діаметр $2R$. Однак на третьому фото умови добре видно, що фонтан спочатку звужується, тому вочевидь слід проаналізувати (4) на екстремум. Зробимо це без використання похідної, розкривши у (4) дужки і виділивши повний квадрат:

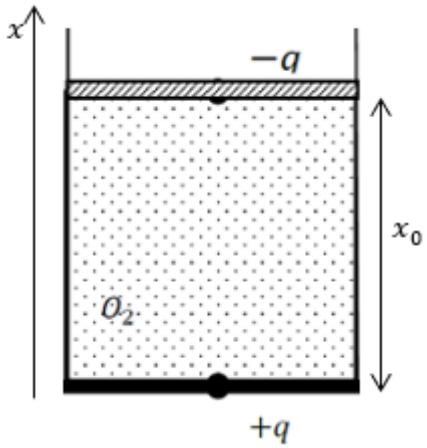
$$r = \sqrt{\frac{\omega^2 R^4}{v^2} + \left(v(t - t_0) + \frac{R v_0 \cos\alpha}{v}\right)^2}, \qquad (6)$$

де $v = \sqrt{(\omega R)^2 + (v_0 \cos\alpha)^2}$ – горизонтальна складова швидкості струменя. Оскільки $t - t_0 > 0$ звуження фонтану можливо тільки у випадку, коли $\cos\alpha < 0$, тобто, якщо струмені спрямовані до центру фонтану. Тоді мінімальне значення радіусу буде за мінімального значення 0 повного квадрату у (6) і дорівнюватиме $\omega R^2/v$, звідки мінімальний діаметр:

$$d = \frac{2\omega R^2}{\sqrt{(\omega R)^2 + (v_0 \cos\alpha)^2}}.$$

Що стосується максимального діаметру D, то для не видовищних фонтанів, які майже не обертаються, спрямовуючи струмені води вертикально вгору з невеликим відхиленням усередину, діаметр верхнього кола (5) може виявитись навіть меншим за 2R, і тоді саме він може стати мінімальним, а 2R – максимальним.

(152) А) Розглянемо стан рівноваги системи з невагомим поршнем. Запишемо другий закон Ньютона і рівняння Менделєєва-Клапейрона і знайдемо відстань від дна до поршня в цьому положенні.



$$\frac{kq^2}{x_0^2} = pS = \frac{\nu RT}{x_0}$$

$$(kq^2 - \nu RT x_0) = 0$$

$$x_0 = \frac{kq^2}{\nu RT}$$

Далі є спокуса написати енергію цієї системи: $W = CT + \frac{i}{2}\nu RT - k\frac{q^2}{x}$

Де $k\frac{q^2}{x} = \nu RT$. І, застосувавши визначення теплоємкості, вийти на її значення:

$$W = CT + \frac{5}{2}\nu RT - \nu RT = T(C + \frac{3}{2}\nu R)$$

$$C_0 = \frac{dW}{dT} = C + \frac{3}{2}\nu R$$

Теж саме можна отримати через перший закон термодинаміки:

$$dQ = \frac{i}{2}\nu R dT + pdV + CdT$$

$pdV = pSdx = \frac{\nu RT}{x}dx = -\nu R dT$, так як

$$dx = -\frac{kq^2 dT}{\nu RT^2}$$

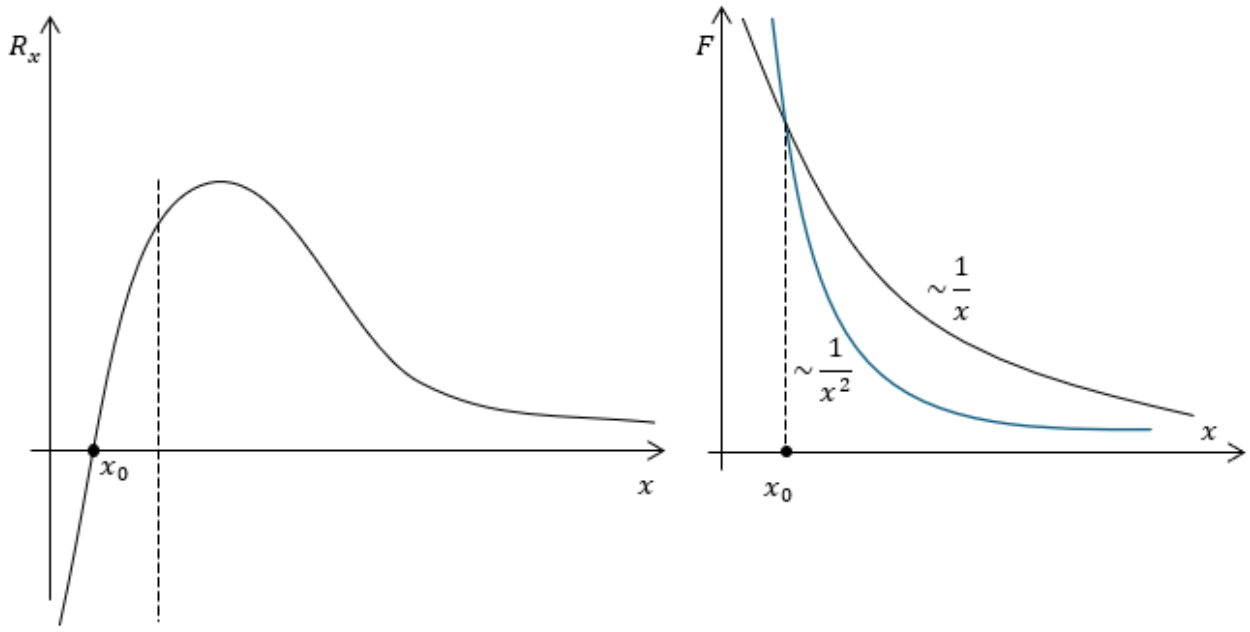
$$dQ = CdT + \frac{i}{2}\nu RdT - \nu RdT = CdT + \frac{3}{2}\nu RdT$$

$$C_0 = C + \frac{3}{2}\nu R$$

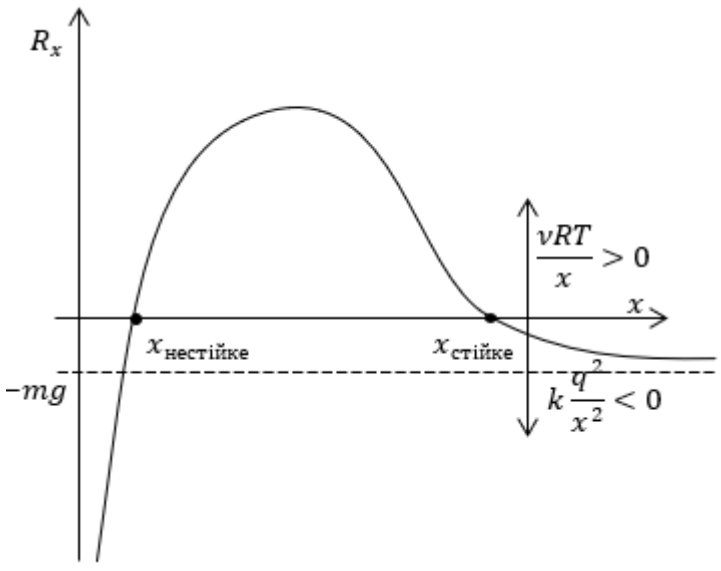
Але, якщо графічно проаналізувати це рівняння або через рівнодійну сил тиску газу и Кулона, або через порівняння графіків кожної функції окремо, то легко побачити (дивись графіки), що знайдене значення Хо є єдиним коренем цього рівняння. При чому, це положення рівноваги є нестійким, так як при будь-якому мінімальному випадковому зсуві поршня, рівнодійна одразу потягне його ще далі. Тому підведення навіть мізерної кількості теплоти одразу виведе систему з рівноваги (температура зміниться стрибком) і це означає, що теплоємність системи дорівнює:

$C_0 = C + \left(\frac{dQ}{dT}\right) = C_{\text{посудини}}$, так як для самого газу: $\left(\frac{dQ}{dT}\right) = 0$

Це і буде правильною відповіддю на цей пункт задачі.



Б) Ситуація докорінно зміниться, якщо поршень буде мати масу. Запишемо рівнодійну сил, що діють на поршень і розв'яжемо рівняння:



$$R_x = \frac{\nu RT}{x} - mg - k\frac{q^2}{x^2}$$

$$k\frac{q^2}{x^2} + mg = \frac{\nu RT}{x}$$

$$mgx^2 - \nu RTx + kq^2 = 0$$

Розв’язок рівняння другого закону Ньютона дає нам два кореня –за яких система буде в рівновазі.

$$x = \frac{\nu RT \pm \sqrt{\nu^2 R^2 T^2 - 4mgkq^2}}{2mg}$$

Аналіз цих положень на стійкість приводить до висновку, що тільки більший з них є стійким. Дійсно, невеликий зсув поршня у бік збільшення X викликає виникнення рівнодійної сили в протилежний бік, і навпаки. У випадку меншого кореня будь-який зсув буде посилюватися, під дією тих самих сил. Таким чином, розглядати систему в подальшому будемо по відношенню саме до стійкого положення:

$$x = \frac{\nu RT + \sqrt{\nu^2 R^2 T^2 - 4mgkq^2}}{2mg}$$

Для якого:

$$dx = \frac{\nu R + \frac{\nu^2 R^2 T}{\sqrt{\nu^2 R^2 T^2 - 4mgkq^2}}}{2mg} dT = \frac{\nu R dT}{2mg} \left(\frac{\sqrt{\nu^2 R^2 T^2 - 4mgkq^2} + \nu RT}{\sqrt{\nu^2 R^2 T^2 - 4mgkq^2}}\right)$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{\nu R dT}{\sqrt{\nu^2 R^2 T^2 - 4mgkq^2}}$$

Запишемо перший закон термодинаміки для цієї системи:

$$dQ = CdT + \frac{5}{2}\nu R dT + p * dV$$

$$p * dV = \frac{\nu RT}{S * x} * S * dx = \frac{\nu^2 R^2 T dT}{\sqrt{\nu^2 R^2 T^2 - 4mgkq^2}}$$

$$dQ = CdT + \frac{5}{2}\nu R dT + \frac{\nu^2 R^2 T dT}{\sqrt{\nu^2 R^2 T^2 - 4mgkq^2}}$$

$$C_0 = \left(\frac{5}{2}\nu R + C\right) + \frac{\nu R}{\sqrt{1 - \frac{4mgkq^2}{\nu^2 R^2 T^2}}}$$

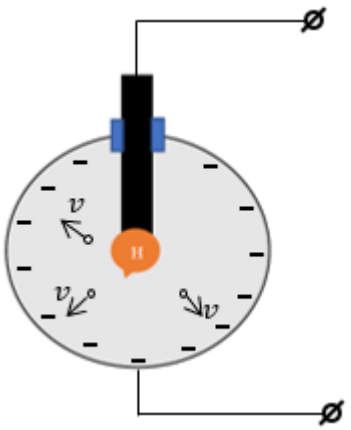
Або те ж саме через енергію системи:

$$W = mgx + CT + \frac{5}{2}\nu RT - k\frac{q^2}{x} = 2mgx + CT + \frac{3}{2}\nu RT$$

$$dW = 2mg * dx + C * dT + \frac{3}{2}\nu RdT = \nu RdT + \frac{\nu^2 R^2 T}{\sqrt{\nu^2 R^2 T^2 - 4mgkq^2}} + +C * dT + \frac{3}{2}\nu Rd$$

$$\frac{dW}{dt} = C_0 = \left(\frac{5}{2}\nu R + C\right) + \frac{\nu R}{\sqrt{1 - \frac{4mgkq^2}{\nu^2 R^2 T^2}}}$$

(153) Нехай батарейка розімкнута. У сталому режимі, сфера заряджується і «блокує» наступні надходження електронів($\Delta\varphi = \mathcal{E} = const$). Якщо сфера заряджена максимально, то навіть найшвидші електрони не можуть долетіти до її поверхні.



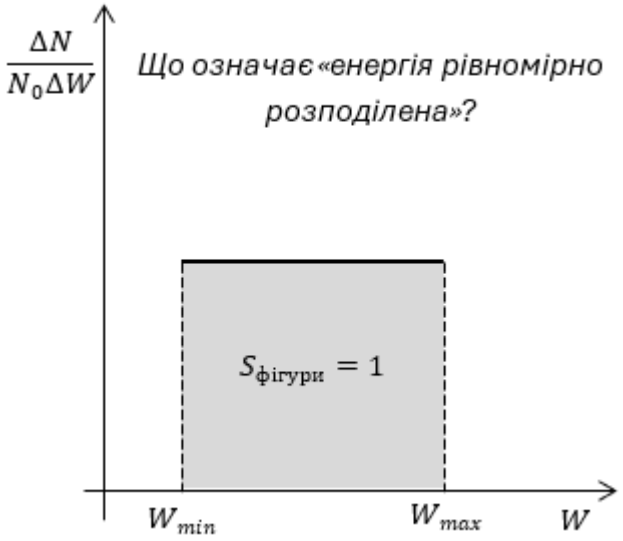
$$A_{\text{ел. поля}} = -e\Delta\varphi = -e\mathcal{E}$$

За Законом Зміни Енергії: $\Delta W_{\text{кін}} = A_{\text{ел. поля}}$

$$-e\mathcal{E} = 0 - W_{max}$$

$$\mathcal{E} = \frac{W_{max}}{e} = 16\text{кВ}$$

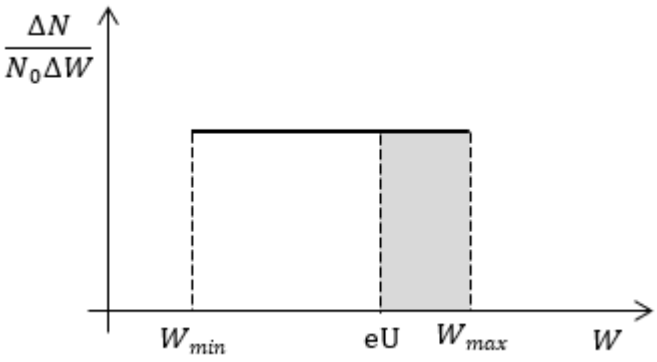
Розглянемо графік залежності частки електронів, що вилетіли в даному енергетичному діапазоні від енергії. Знайдемо площу деякої малої ділянки графіка:



$dS = \frac{\Delta N}{\Delta W N_0} * \Delta W = \frac{\Delta N}{N}$. Знайдемо загальну площу: $S = \sum dS = 1$.

Під'єднаємо до батарейки активне навантаження, це призведе до зменшення напруги на батарейці, так як заряди будуть з неї збігати.

Якщо напруга на батарейці U знаходиться в діапазоні від $0 \le U \le \frac{W_{\text{кін}}}{e}$, всі електрони, що вилетіли з ядра долітають до сфери та приймають участь у протіканні струму. Тобто струм є <u>постійним</u> на всій ділянці: $I = \frac{dq}{dt} = \frac{dN*e}{\frac{dN}{\nu}} = \nu e$.



Нехай в деякий момент напруга на батарейці U, $\frac{W_{min}}{e} < U < \frac{W_{max}}{e}$, тоді долітати буде тільки частина електронів, яка пропорційна заштрихованій площі (тільки с енергією$> eU$).

При $U \geq \frac{W_{max}}{e}$ електрони не будуть долітати до сфери(так як мають меншу енергію), через що струму у колі не буде.

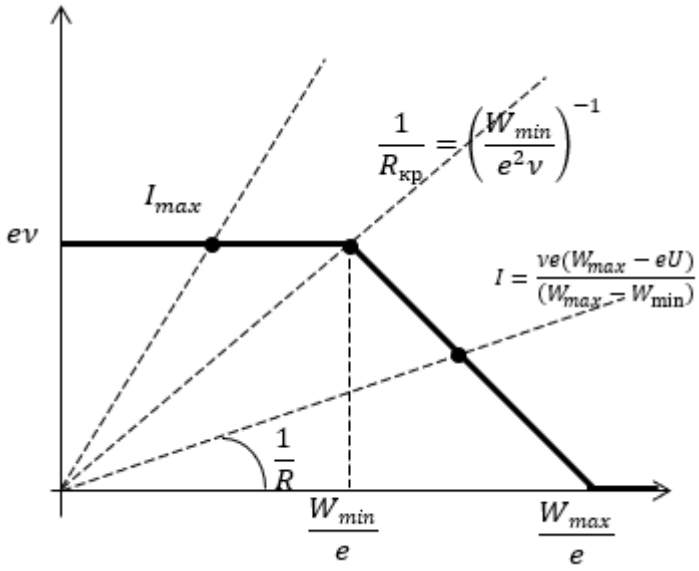
При зниженні напруги U до $\frac{W_{min}}{e}$ струм стає максимальним, бо всі електрони долітають до сфери.

Знаючи, що площа під графіком пропорційна частці електронів, що долетіли до сфери, введемо коефіцієнт пропорційності z. Тоді, $\frac{\Delta N}{N} = z(W_{max} - eU)$.

Так як площа під усім графіком =1, знайдемо z. $1 = z(W_{max} - W_{\min}) \Rightarrow z = \frac{1}{(W_{max} - W_{\min})}$

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dN * e}{dt} = \frac{z * N * (W_{max} - eU) * e}{dt} =$$

$$= \frac{\nu e(W_{max} - eU)}{(W_{max} - W_{\min})}$$



Отримаємо функцію залежності I(U) на ділянці графіку $\frac{W_{min}}{e} < U < \frac{W_{max}}{e}$.

Тоді, побудуємо ВАХ за трьома ділянками.

Зі збільшенням R, збільшується U. При $R = 0$ маємо максимально можливий струм $I_0 = e\nu = 16 * 10^{-20} * 5 * 10^{18} = 0.8\,A$, а при $R \to \infty$, $I = 0$. Тож, існує деяке $R_{кр}$ при збільшенні якого I зменшується. Знайдемо його. Фізичний сенс кутового коефіцієнта = $\frac{1}{R}$. Проведемо пряму до перехідної точки.

$$R_{кр} = \frac{U_{min}}{I_0} = \frac{\frac{W_{min}}{e}}{I_0} = \frac{W_{min}}{e^2\nu} = \frac{12 * 10^3\ B}{0.8\ A} = 15\ кОм$$

2.Знайдемо $Q = Q_1 + Q_2$

$Q_1(R_1 \leq R < R_{кр})$

$Q_2(R_{кр} \leq R \leq R_2)$

$$Q_1 = \int_0^{\tau_1} dQ_1 = \int_0^{\tau_1} I_{min}^2 R dt$$

$R = R_1 + \alpha t$ (з умови що опір рівномірно збільшується з часом)

$$a = \frac{R_2 - R_1}{\tau_0} = \frac{10^3}{6}\ (\frac{Ом}{с})$$

При значенні $R = R_{\text{кр}}$, $\tau_1 = \frac{R_{\text{кр}} - R_1}{\alpha}$

$$dQ_1 = I_{min}^2 R_1 dt + I_{min}^2 \alpha t dt$$

$$Q_1 = \int_0^{\tau_1} I_{min}^2 R_1 dt + I_{min}^2 \alpha t dt = I_{min}^2 R_1(\tau_1 - 0) + I_{min}^2 a \frac{(\tau_1 - 0)^2}{2} = I_{min}^2 \tau_1 \left(R_1 + \frac{a\tau_1}{2}\right)$$

$$= 0.64 * 30 * 12.5 * 10^3 = 240\text{кДж}.$$

$$\left\{ Q_1 = I_{min}^2 \frac{R_{\text{кр}} - R_1}{R_2 - R_1} \tau_0 (R_1 + \frac{R_{\text{кр}} - R_1}{2})) = I_{min}^2 \frac{R_{\text{кр}}^2 - R_1^2}{2(R_2 - R_1)} \tau_0 \right\}$$

$Q_2 - ?$

$$dQ_2 = i^2 R dt$$

$$R = R_1 + \alpha t$$

$$dR = a * dt \Rightarrow dt = \frac{dR}{a}$$

$$\left\{ \begin{matrix} i = I_{max} \frac{W_{max} - eU}{W_{max} - W_{min}} \\ U = iR \end{matrix} \right| \Longrightarrow i = \frac{I_{max} U_{max}}{W_{max} - W_{min} + e I_{max} R} = \frac{16}{5 + 10^{-3} R}$$

$$dQ_2 = \frac{256 * 6 R dR}{10^3 (5 + 10^{-3} R)^2} = \frac{1.536 R dR}{(5 + 10^{-3} R)^2}$$

$$z = 5 + 10^{-3} R \qquad R = (z - 5) 10^3 \qquad z_0 = 20 \ (R = 15 \text{ кОм})$$

$$dz = 10^{-3} dR \qquad dR = dz * 10^3 \qquad z_{\text{к}} = 25 \ (R = 20 \text{ кОм})$$

$$dQ_2 = \frac{1.536(z - 5) 10^6 dz}{z^2} = 1.536 * 10^6 (\frac{dz}{z} - \frac{5dz}{z^2})$$

$$Q_2 = (\ln|z| + 5\frac{1}{z})|_{20}^{25} * 1.536 * 10^6 = 1.536 * 10^6 \left(\ln\frac{25}{20} + 5\left(\frac{1}{25} - \frac{1}{20}\right)\right) = 266\text{кДж}$$

$$Q = 506 \text{ кДж}$$

(154) Перш за все встановимо закономірності описаного процесу (його називають ефузією). Очевидно, молекули проходять перегородку «поодинці», не впливаючи одна на одну. Тому процеси проникнення кисню та гелію є незалежними. Кількість частинок, що проходять перегородку зліва направо протягом малого часу dt, пропорційна кількості $N_{\text{лів}}$ відповідних молекул у лівій половині. Згодом, коли кількість молекул у правій половині стає помітною, треба врахувати й зворотні переходи. Отже, $\frac{dN_{\text{пр}}}{dt} = -\frac{dN_{\text{лів}}}{dt} = k\left(N_{\text{лів}} - N_{\text{пр}}\right)$.

Звідси отримуємо $\frac{d(N_{\text{лів}} - N_{\text{пр}})}{dt} = -2k\left(N_{\text{лів}} - N_{\text{пр}}\right)$ або

$$\frac{dz}{dt} = -2kz.$$

Тут k — сталий (для даного типу молекул) коефіцієнт, $z = N_{\text{лів}} - N_{\text{пр}}$ — різниця між кількостями молекул даного типу по різні боки від перегородки. Це, мабуть, найпростіше з

диференціальних рівнянь. Воно приводить до експоненціальної залежності функції від часу: $z(t) = z(0)\exp(-2kt)$.

Початкове значення $z(0)$ — це повна кількість N молекул даного типу.

На початковому етапі ($kt \ll 1$), дістанемо $N_{\text{лів}} = N(1 - kt), N_{\text{пр}} = Nkt$. У загальному випадку

$$N_{\text{лів}} = \frac{N}{2}(1 + \exp(-2kt)), N_{\text{пр}} = \frac{N}{2}(1 - \exp(-2kt)).$$

Процес можна вважати ізотермічним. Отже, тиск суміші пропорційний концентрації молекул, отже — й загальній кількості молекул у кожній частині циліндра.

1) Позначимо коефіцієнти для кисню та гелію $k_{\text{ксн}}, k_{\text{гел}}$. Тоді з умови випливає: $0{,}081 \cdot 0{,}005 = k_{\text{ксн}}\tau \cdot 0{,}2$ і $0{,}919 \cdot 0{,}005 = k_{\text{гел}}\tau \cdot 0{,}8$. Звідси $\frac{k_{\text{гел}}}{k_{\text{ксн}}} = 2{,}84$, $k_{\text{ксн}}\tau = 0{,}002$. Час t знайдемо з рівняння ($x = k_{\text{ксн}}t$):

$$0{,}5 \cdot 0{,}2(1 - \exp(-2x)) + 0{,}5 \cdot 0{,}8(1 - \exp(-2 \cdot 2{,}84x)) = 0{,}25.$$

Після спрощення: $\exp(-2x) + 4\exp(-5{,}68x) = 2{,}5$. Це рівняння має єдине розв'язання, яке легко приблизно визначити хоча б за допомогою калькулятора: $x = 0{,}145$. Звідси $t \approx 72\tau$.

2) Шукане відношення дорівнює $\frac{0{,}5 \cdot 0{,}2(1-\exp(-2x))}{0{,}25} = 0{,}1$, тобто 10 %.

3) Якщо ймовірність відбивання молекул від перегородки R, то введений вище коефіцієнт k пропорційний добутку $(1 - R)\bar{v}$, де $\bar{v}$ — середня швидкість хаотичного руху молекул. Оскільки середня кінетична енергія поступального руху за однакової температури є однаковою для всіх молекул, $\bar{v} \sim \frac{1}{\sqrt{M}}$, де M — молярна маса газу. Молярна маса кисню перевищує молярну масу гелію в 8 разів, тому $\bar{v}$ для гелію більша в $\sqrt{8}$ разів, тобто в 2,83 разу. Ми вже переконалися, що коефіцієнт k для гелію більший практично в стільки ж разів. Отже, ймовірності відбивання для частинок обох газів практично однакові.

(155) Пункт А. Так як система трьох тіл є замкненою, то її центр мас не змінює свого положення:

$$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3} = \overrightarrow{r_{CM}}$$

Якщо помістити систему координат в центр траєкторії (точку С) і врахувати симетрію системи, то очевидно, що центр мас системи також лежить в точці С:

$$(1) \qquad \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3} = 0$$

Диференціюємо цей вираз та отримуємо:

$$(2) \qquad \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} = 0$$

Знайдемо конфігурації, при яких найкоротші відстані між двома з частинок є рівними.
Запишемо цю умову у векторному вигляді:

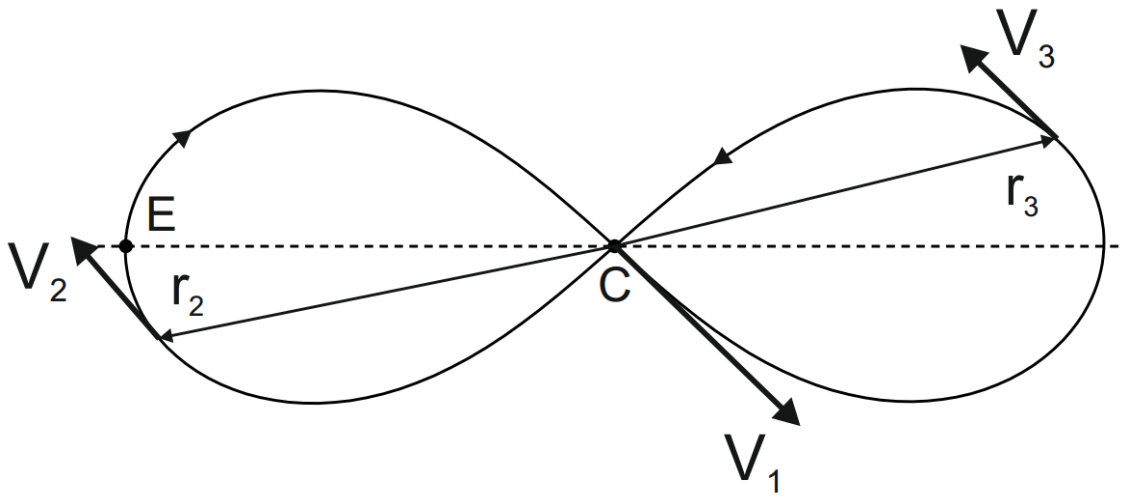
$$(3) \qquad |\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2}| = |\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_3}|$$

Перша конфігурація. Підставимо у вираз (3) вектор $\overrightarrow{r_2}$ з рівняння (1):

$$|2\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_3}| = |\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_3}|$$

Одним з очевидних розв'язків даного векторного рівняння є $\overrightarrow{r_1} = 0, \overrightarrow{r_2} = -\overrightarrow{r_3}$

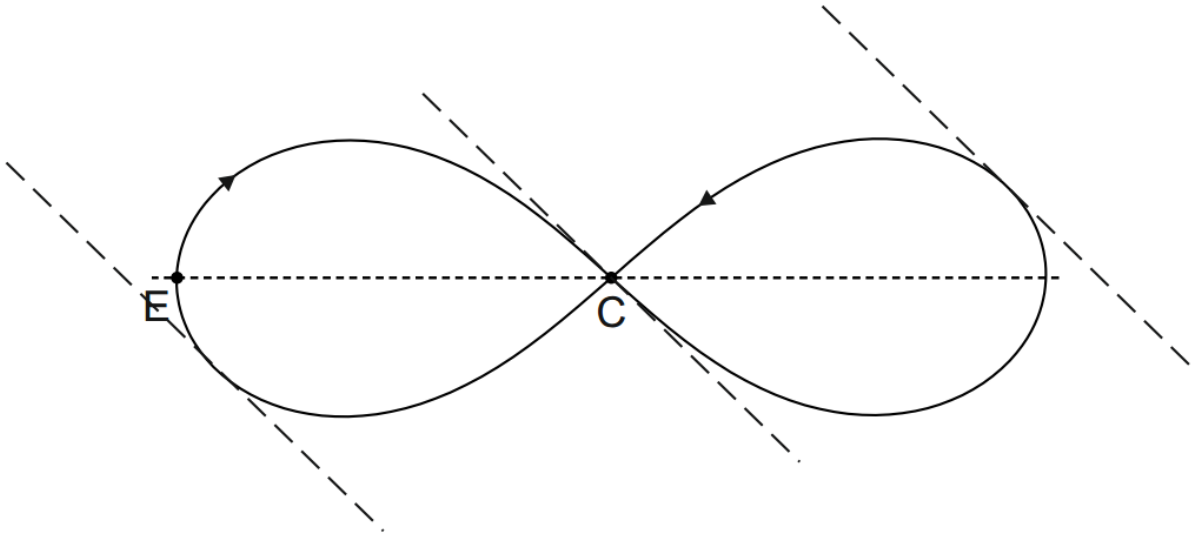
Це значить, що одне з тіл знаходиться у точці С, а два інших – в діаметрально протилежних точках.



Якщо ми напрями усіх швидкостей для такої конфігурації поміняємо на протилежні, то отримаємо ту саму систему, але повернуту на 180º. Внаслідок симетрії системи це можливо лише в тому випадку, якщо

(4) $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_3}$

З рівнянь (2) та (4) очевидно, що всі три вектори $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ та $\overrightarrow{V_3}$ є паралельними. Отже, якщо ми проведемо дві дотичні, що паралельні дотичній в точці С, то отримаємо положення всіх трьох тіл.



До речі, розглядаючи таку конфігурацію мас можна прийти до висновку, що повний момент імпульсу системи не змінюється і дорівнює 0. Дійсно, зовнішні сили на систему не діють, а отже і момент імпульсу лишатиметься сталим.

$L = m([\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{V_1}] + [\overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{V_2}] + [\overrightarrow{r_3} \times \overrightarrow{V_3}])$

Так як $\overrightarrow{r_1} = 0$, а $\overrightarrow{r_2} = -\overrightarrow{r_3}$ то

$L = m([\overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{V_2}] - [\overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{V_3}])$

Враховуючи, що $\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_3}$, остаточно отримуємо

(5) $$L = m\left([\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{V_1}] + [\overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{V_2}] + [\overrightarrow{r_3} \times \overrightarrow{V_3}]\right) = const = 0$$

Друга конфігурація. Траєкторія має дві вісі симетрії: вертикальну та горизонтальну (пунктирна лінія на рисунку до задачі).

Спробуємо знайти конфігурацію тіл, що була б інваріантна відносно одного з двох таких віддзеркалень.

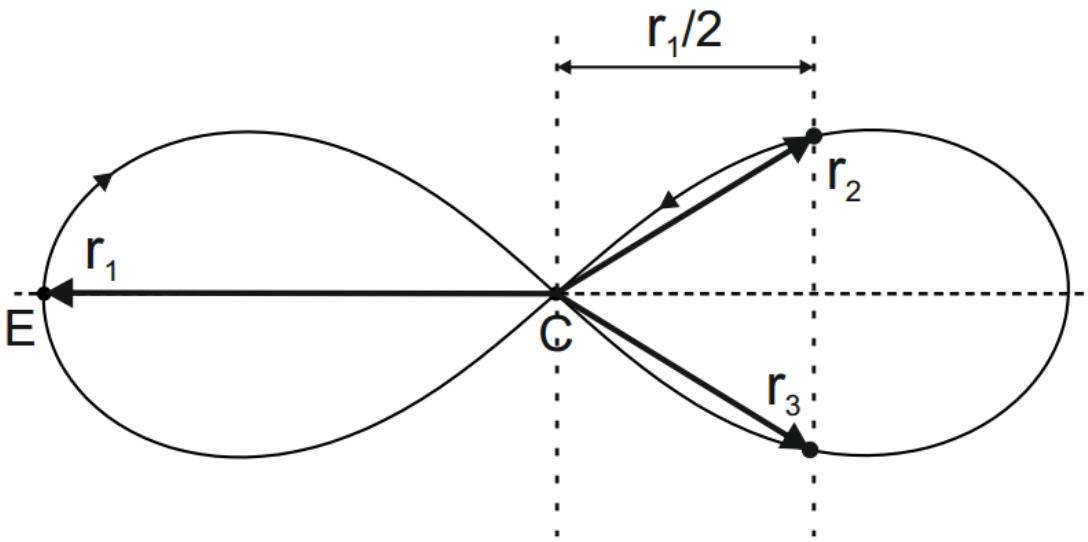
Якщо ми віддзеркалюємо відносно вертикальної вісі симетрії, то єдиним положенням тіл могли б бути точки E, O, та точка діаметрально протилежна до E. Але така конфігурація, очевидно, не задовольняє рівнянню (2).

Якщо ми віддзеркалюємо відносно горизонтальної вісі симетрії, то з симетрії траєкторії очевидно, що вектор $\overrightarrow{r_1}$ має лежати на горизонтальній пунктирній лінії (див. рис. до задачі), а значить тіло 1 знаходиться або в точці E, або в точці, що діаметрально протилежна до неї. Тіла 2 та 3 лежать на іншій половині вісімки (для дотримання рівняння (1)) симетрично відносно горизонтальної вісі.

Є два способи отримати положення тіл 2 та 3.

Спосіб перший.

Якщо тіла 2 та 3 симетричні відносно горизонтальної осі, то тоді з (1) отримуємо: $r_{1x} = -(r_{2x} + r_{3x}) = -2r_{2x} = -2r_{3x}$, де вісь x – горизонтальна вісь, що має початок відліку в точці C.



Якщо поміряти відстань r_1 (позначена на рисунку) і поділити її на 2, та відкласти цю величину вправо від точки C, то піднявши перпендикуляри на траєкторію отримуємо положення тіл 2 та 3.

Спосіб другий.

Повний момент імпульсу системи відносно точки С дорівнює нуль. Розглянемо момент імпульсу системи відносно точки Е. Для замкненої системи, центр мас якої є нерухомим, він має бути теж 0. Перевіримо це.

Для цього в рівнянні (5) зробимо заміну $\vec{r_i} = \overrightarrow{r_i'} + \overrightarrow{r_{CE}}$, де $\vec{r_i}$ - положення тіл відносно точки С, $\overrightarrow{r_i'}$ - положення тіл відносно точки Е, $\overrightarrow{r_{CE}}$ – вектор, що напрямлений від точки С до точки Е.

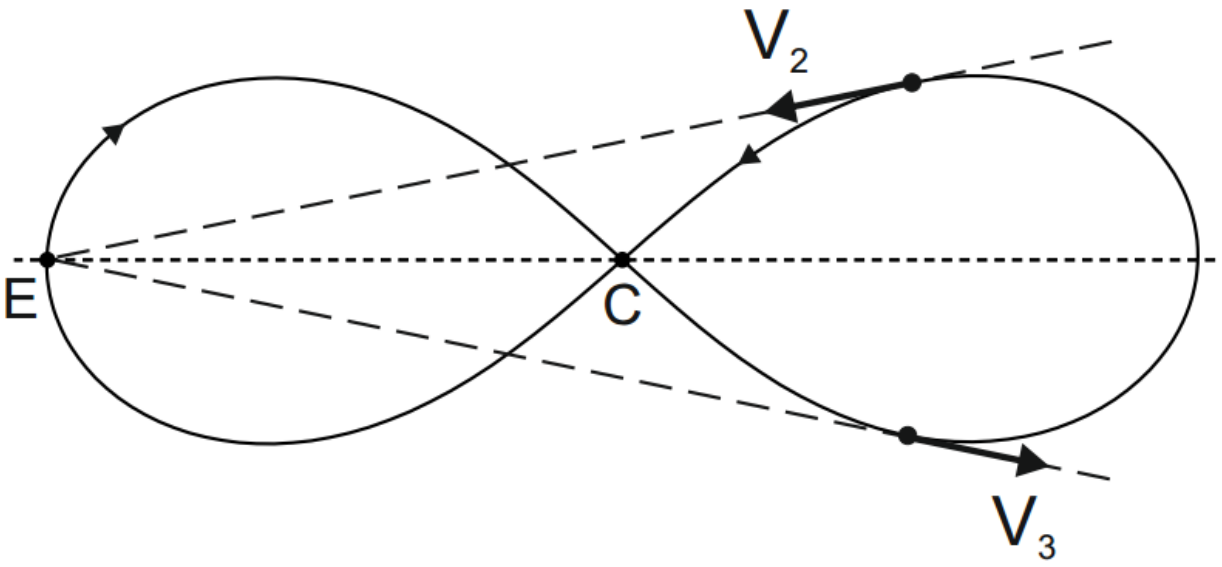
Отримуємо:

$$L = m\left([\overrightarrow{r_1} \times \overrightarrow{V_1}] + [\overrightarrow{r_2} \times \overrightarrow{V_2}] + [\overrightarrow{r_3} \times \overrightarrow{V_3}]\right) = 0 =$$
$$= m\left([\overrightarrow{r_1'} \times \overrightarrow{V_1}] + [\overrightarrow{r_2'} \times \overrightarrow{V_2}] + [\overrightarrow{r_3'} \times \overrightarrow{V_3}] + [\overrightarrow{r_{CE}} \times \overrightarrow{V_1}] + [\overrightarrow{r_{CE}} \times \overrightarrow{V_2}] + [\overrightarrow{r_{CE}} \times \overrightarrow{V_3}]\right)$$
$$== m\left([\overrightarrow{r_1'} \times \overrightarrow{V_1}] + [\overrightarrow{r_2'} \times \overrightarrow{V_2}] + [\overrightarrow{r_3'} \times \overrightarrow{V_3}] + [\overrightarrow{r_{CE}} \times (\overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3})]\right)$$

Враховуючи рівняння (2), отримуємо:

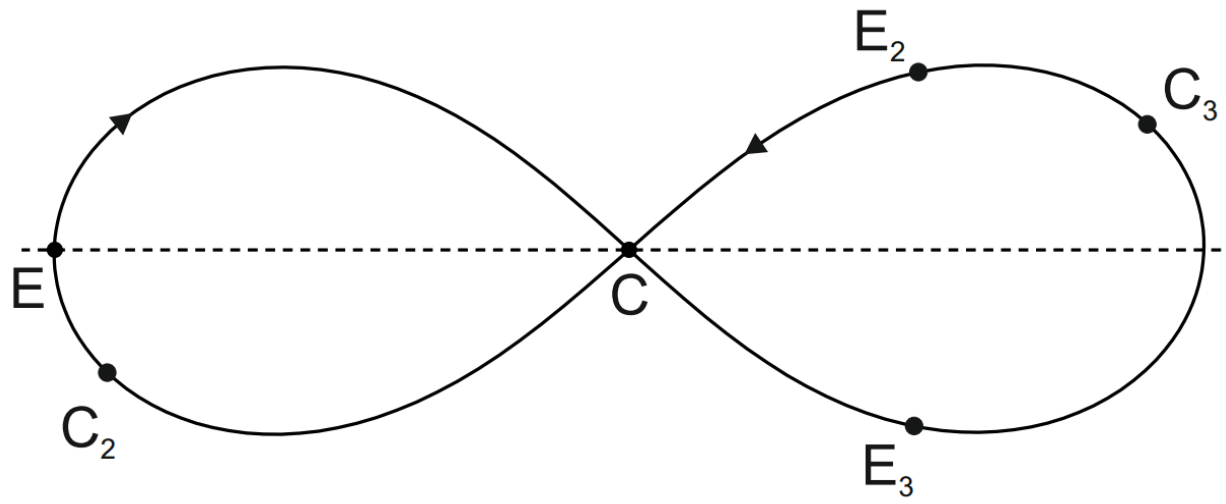
$$L = m\left([\overrightarrow{r_1'} \times \overrightarrow{V_1}] + [\overrightarrow{r_2'} \times \overrightarrow{V_2}] + [\overrightarrow{r_3'} \times \overrightarrow{V_3}]\right) = L' = 0$$

Що і треба було довести.



Момент імпульсу тіла один відносно точки Е, очевидно, рівний нулю. Виходячи із симетрії системи (якщо ми змінимо напрямки швидкостей тіл, то має отримати ту саму систему, але повернену на 180º), лінії, на яких лежать швидкості тіл 2 та 3, мають перетинатись в одній точці на горизонтальній вісі. Тоді, для того щоб момент імпульсу всієї системи був рівним нулю, ця точка перетину має бути точкою Е. Тоді, знайти положення тіл ми можемо, якщо проведемо з точки Е дві дотичні як показано на рисунку вище.

Пункт Б. Виходячи з результатів пункту А, нанесемо на траєкторію точки C_2, C_3 та E_2, E_3.



а) Коли тіло в точці C_2 встане в точку С, тіло в точці С переміститься на позицію C_3, а тіло з C_3, відповідно, перейде в точку C_2. Конфігурація тіл не зміниться. Конфігурація не зміниться й при наступному зсуві тіла 2 з точки С в точки C_3. Тобто, очевидно, що повний оберт тіло 2 (як і будь-яке інше) робить за три рівних у часі кроки. Відповідно, шлях з точки C_2 в точку С у будь-якого тіла займає час $T_{C_2 \to C}$=T/3.

б) Повний оберт будь-якого тіла можна розділити на 4 однакових етапи часи проходження яких є рівними. Один з таких етапів це шлях з точки С в Е. Отже, $T_{C \to E}$=T/4.

в) $C_3 \to E = C \to E + C_3 \to C$

З симетрії $C_3 \to C$ по часу це половина від $C_3 \to C_2$, а $C_3 \to C_2 = C_2 \to C$. Тоді $T_{C_3 \to E} = \frac{T}{4} + \frac{1}{2}\frac{T}{3} = \frac{5}{12}T$

г) $E_2 \to C_2 = E_2 \to E - C_2 \to E$

$C_2 \to E = C_3 \to E - C_3 \to C_2$

По аналогії з пунктом (а): $T_{E_2 \to E} = T/3$

Отже, маємо: $T_{E_2 \to C_2} = \frac{T}{3} + \frac{T}{3} - \frac{5}{12}T = \frac{T}{4}$

(156) На частинку діють сила Лоренца у площині перпендикулярній лініям магнітної індукції і сила опору $\vec{F} = -k\vec{v}$. Спрямуємо вздовж ліній магнітної індукції вісь OZ, а перпендикулярно їй у площині вектора початкової швидкості частинки вісь OX. Тоді проекція початкової швидкості частинки на вісь OY дорівнюватиме нулю. Проекції другого закону Ньютона на координатні осі набувають вигляду

$$\begin{cases} ma_x = -qBv_y - kv_x, \\ ma_y = qBv_x - kv_y, \\ ma_z = -kv_z. \end{cases}$$

Оскільки $a_x = \Delta v_x/\Delta t$, $a_y = \Delta v_y/\Delta t$, $a_z = \Delta v_z/\Delta t$, $v_x = \Delta x/\Delta t$, $v_y = \Delta y/\Delta t$, $v_z = \Delta z/\Delta t$ скоротивши у системі рівнянь Ньютона Δt, отримаємо зв'язок малих прирощень швидкостей і координат, з яких внаслідок лінійності маємо:

$$\begin{cases} m(v_x - v_{0x}) = -qBy - kx, \\ mv_y = qBx - ky, \\ m(v_z - v_{0z}) = -kz. \end{cases}$$

Початок координат ми вибрали у точці початкового положення частинки (0;0;0), $v_{0x} = v_0 \sin\alpha$, $v_{0z} = v_0 \cos\alpha$.

Враховуючи нульову кінцеву швидкість, отримуємо координати фінішної точки

$$x_f = \frac{kmv_0 sin\alpha}{k^2 + q^2B^2}, \qquad y_f = \frac{qBmv_0 sin\alpha}{k^2 + q^2B^2}, \quad z_f = \frac{mv_0 cos\alpha}{k}.$$

Модуль загального переміщення частинки дорівнює кореню з суми квадратів координат:

$$r_f = \frac{mv_0}{k}\sqrt{\frac{k^2 + q^2B^2 cos^2\alpha}{k^2 + q^2B^2}}.$$

Довжину траєкторії l знаходимо з проекції другого закону Ньютона на напрям руху частинки, на який проекція сили Лоренца дорівнює нулю

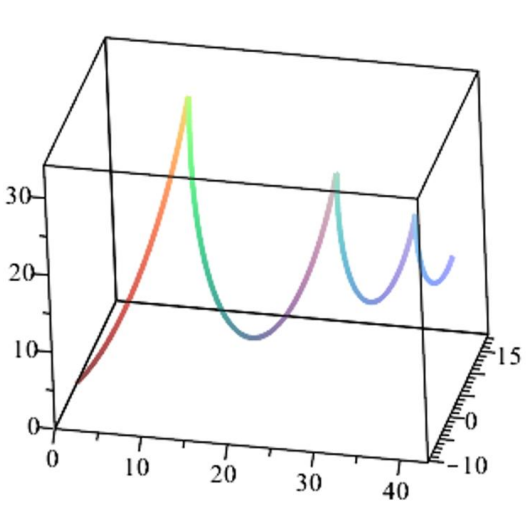
$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -k\frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

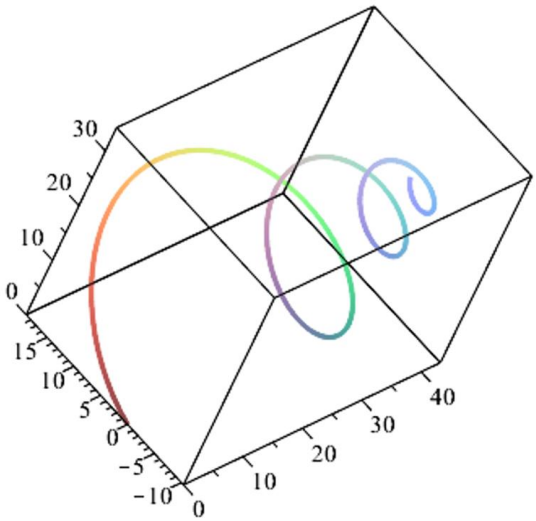
Оскільки кінцева швидкість частинки дорівнює нулю, знаходимо:

$$l = \frac{mv_0}{k}.$$

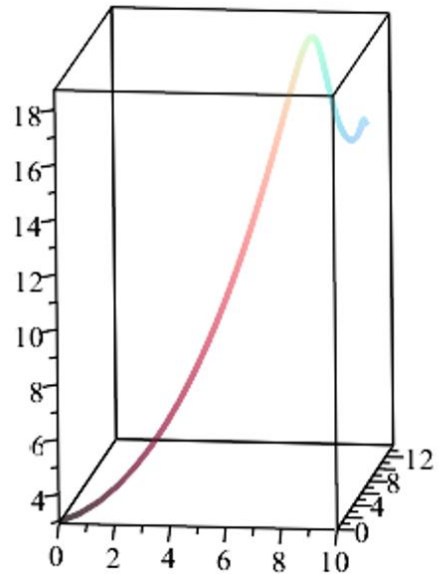
Як і має бути, $l > r_f$.

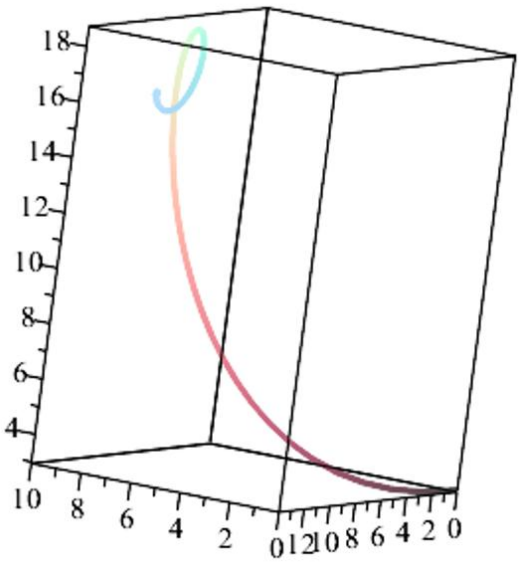
Нижче наведені два скрини траєкторій для коефіцієнту опору $k/m = 0.01$



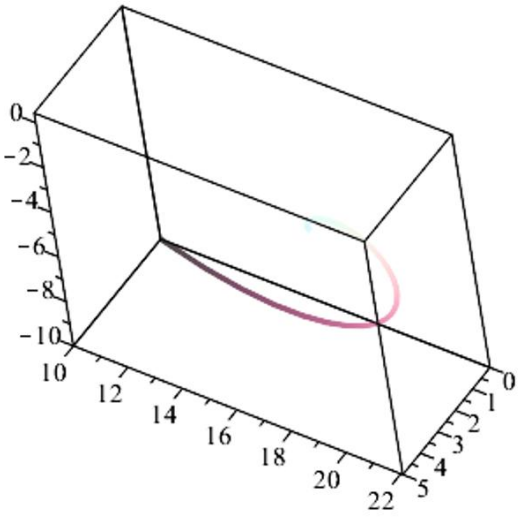


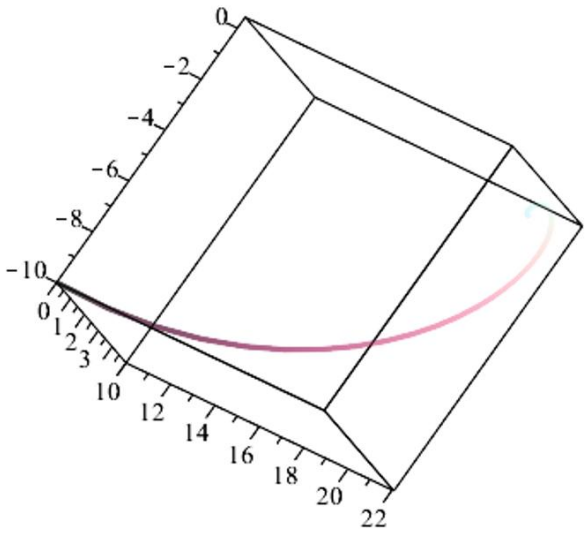
для $k/m = 0.05$





і для $k/m = 0.1$.

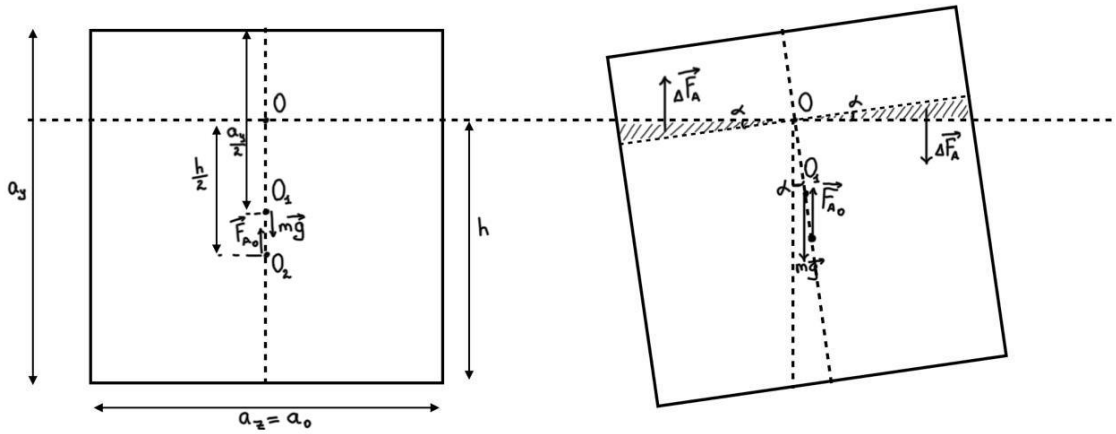




(157) Під час плавлення кубу, можливо, досягнення такого стану, за якого куб буде знаходитися у положенні нестійкої рівноваги та внаслідок будь-яких випадкових втручань, перевернеться, повернувшись до джерела випромінення іншою гранню.

Спробуємо визначити умову такого перевороту. Розглянемо куб з ребрами a_x a_y a_z, що плаває у положенні рівноваги в воді та здійснив навколо осі О оберт на дуже малий кут α. До оберту система знаходилася у рівновазі під дією mg (точка прикладання O_1) та сили Архімеда F_{AO} (точка прикладання O_2). І занурена на глибину $h = \rho_л * \frac{a_y}{\rho_в}$.

Після повороту лінія $0\text{-}O_1\text{-}O_2$ відхиляється від початкового напрямку на кут α, но сили mg та F_{AO} залишилися такими ж (об'єми льоду, що занурився з одного боку та припіднявся з іншого – рівні). Але, обертальна дія тільки цих сил вже не описує поведінку куба, так як необхідно врахувати моменти двух додаткових сил Архімеда ΔF_A, що діють на об'єми ΔV ліворуч (необхідно додати) та праворуч (необхідно відняти).



Таким чином, куб буде знаходитися у стані стійної рівноваги, якщо момент сили F_{A0} буде менше або дорівнювати сумі обертальних моментів ΔF_A та mg. Очевидно, що

$\Delta V = \frac{1}{2}\frac{a_x}{2}a_z\frac{a_x}{2}\alpha = \frac{a_x^2 a_z}{8}\alpha$, а точка прикладання ΔF_A знаходиться на відстані а/3 от оси О.

$$M_{F_{A0}} \le M_{mg} + 2M_{\Delta F_A}, \text{де}$$

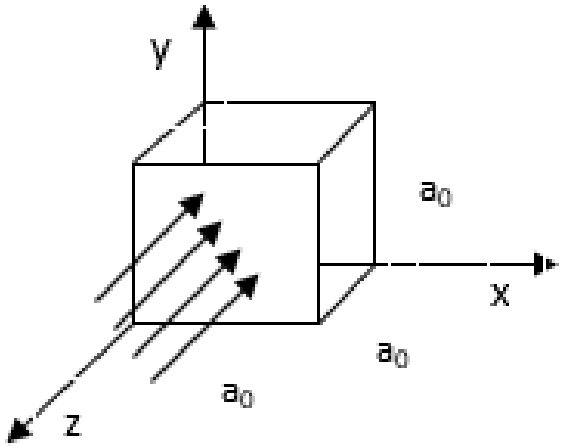
$$M_{F_{A0}} = \rho_в g a_z a_x h\frac{h}{2} = \frac{\rho_л^{\,2} g a_z a_x a_y^{\,2}}{2\rho_в}\alpha,$$

Тоді,

$$M_{mg} = \rho_л g a_z a_x a_y\left(h - \frac{a_y}{2}\right)\alpha = \frac{\rho_л g a_z a_x a_y^{\,2}}{2\rho_в}(2\rho_л - \rho_в)\alpha,$$

$$M_{2\Delta F_A} = 2\rho_в g\frac{a_x^2 a_z}{8}\alpha\frac{a_x}{3} = \frac{\rho_в g a_z a_x^{\,3}}{12}\alpha$$

Після розв'язання цієї нерівності, отримаємо співвідношення $k = \frac{a_x}{a_y}$, при якому вертикальне положення перестає бути стійким і за умовою задачі відбувається миттєвий переворот (в реальності це не так, адже він просто трохи нахилиться і нове положення буде стійким, тобто поворот на 90^0 не відбудеться одразу як тільки досягнеться співвідношення $k = \frac{a_x}{a_y}$, читайте про це докладніше в кінці розв'язку):



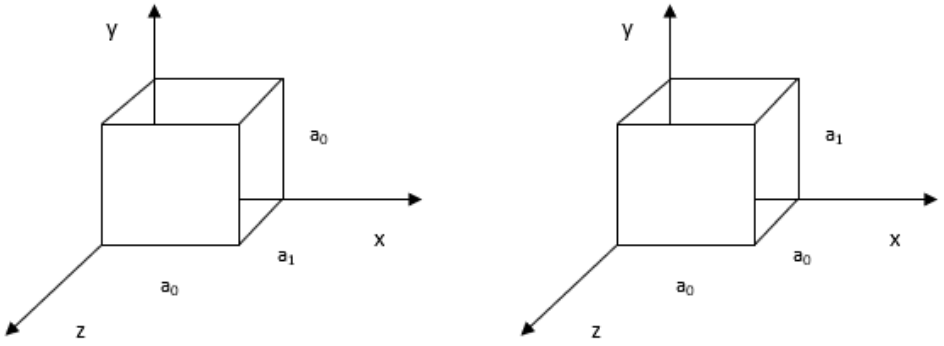
$$k = \frac{a_x}{a_y} = \sqrt{6\frac{\rho_л}{\rho_в}\left(1 - \frac{\rho_л}{\rho_в}\right)} \approx \frac{3}{4}$$

Таким чином, як тільки співвідношення ребер при плавленні досягає цього відношення, куб швидко перевертається.

Розглянемо процес плавлення кубу.

Початок.

Перший оберт.

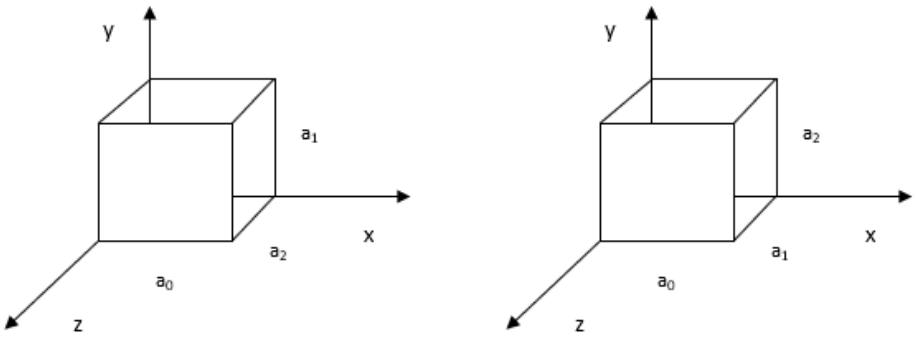


При цьому: $a_1 = k \cdot a_0$.

Час плавлення: $\Delta t_1 = \frac{1-k}{\upsilon} a_0$

Маса, що залишилась: $m_1 = k a_0^3$

Другий оберт.

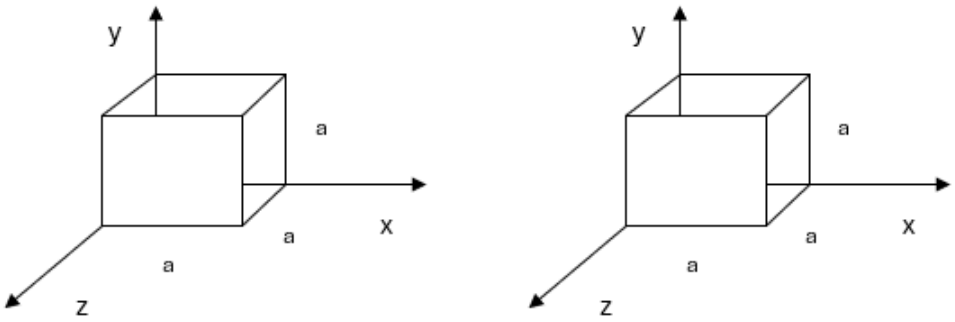


При цьому: $a_2 = k^2 \cdot a_0$.

Час плавлення: $\Delta t_2 = \frac{1-k^2}{v} a_0$

Маса, що залишилась: $m_2 = k^3 a_0^3$

Третій оберт.



При цьому: $a_3 = k^3 \cdot a_0$.

Час плавлення: $\Delta t_3 = \frac{k(1-k^2)}{v} a_0$

Маса, що залишилась: $m_3 = k^5 a_0^3$

Подальші залежності виходять також легко і дають: $\Delta t_N = \frac{k^{n-2}(1-k^2)}{\upsilon} a_0$.

Половина кубика розплавиться в проміжку між першим і другим переворотами (після першого залишиться три чверті). Це станеться в той момент, коли $a_z = \frac{a_0^3/2}{a_0 k a_0} = \frac{a_0}{2k}$, тобто від початку процесу плавлення: $\Delta t_{1/2} = \Delta t_1 + \frac{a_0 - a_z}{\upsilon} = \frac{a_0}{\upsilon}\left(1 - k + 1 - \frac{1}{2k}\right) = \frac{7a_0}{12\upsilon}$.

Таким чином: $\boxed{\Delta t_{1/2} = \frac{7a_0}{12\upsilon}}$

P.S. В реальності такі паралелепіпеди можуть бути в рівновазі не лише коли дві грані є паралельними до води, а й при будь-яких кутах повороту, це залежить від відношення довжин ребер. Докладніше на цю тему для схожої системи можете почитати статтю та подивитись симуляції на цьому сайті: http://datagenetics.com/blog/june22016/index.html.

(158) Позначимо частку частинок, що не встигли розпатися, за *X*. Енергія, що виділяється при зміні частки

на $dX<0$ дорівнює $dQ = -\nu N_A q dX$, де ν - початкова кількість частинок у молях.

Повна кількість частинок у молях дорівнює $X\nu + 2(1-\nu)X = (2-\nu)X$, тому другий закон термодинаміки набуває вигляду:

$$dQ = dU + PdV$$

$$-\nu N_A q dX = c_V \nu d[(2-X)T] + PdV$$

де c_V - молярна теплоємність при сталому об'ємі.

Тиск гумової кульки можна отримати за допомогою закону поверхневого натягу:

$$P \sim \frac{1}{R} \sim \frac{1}{V^{1/3}}$$

де *R* – радіус кулі. З врахуванням рівняння Менделєєва-Клапейрона отримуємо:

$$PV = \nu(2-X)RT \to P_0 V_0^{1/3} V^{2/3} = \nu(2-X)RT$$

$$\frac{2}{3} P_0 \frac{V_0^{1/3}}{V^{1/3}}\, dV = \frac{2}{3} P\, dV = \nu R\, d[(2-X)T]$$

де P_0,V_0 початкові тиск та об'єм.

$$-\nu N_A q dX = \nu(c_V + 3R/2) d[(2-X)T]$$

Інтегруючи від $X=1$, T_0 до $X=0$, T, отримуємо кінцеву відповідь:

$$T = \frac{T_0}{2} + \frac{kq}{6}$$

Тут враховано, що c_V для одноатомного газу дорівнює 3/2, k – стала Больцмана.

Інший варіант розв'язку (без інтегрування).

Запишемо закон збереження енергії для початкового моменту та моменту через дуже великий проміжок часу.

$$\Delta W_{\text{пр}} + \Delta U_{\text{внутр}} = 0$$

Тиск всередині кулі обернено пропорційний радіусу кулі:

$$P = \frac{\alpha}{R_{\text{кулі}}}$$

Це легко отримати, якщо розглянути, наприклад, рівновагу для еластичної півкулі. Тоді маємо аналогію із поверхневим натягом, а значить енергія пружних сил є пропорційною до площі кулі:

$$W = \frac{\alpha}{4} S$$

Тоді:

$$\Delta W_{\text{пр}} = \alpha\pi\left({R_f}^2 - {R_0}^2\right)$$

$$\Delta U_{\text{внутр}} = \frac{3}{2} 2\nu RT - \frac{3}{2}\nu RT_0 - \nu N_A q$$

Запишемо рівняння стану для газу для обох моментів часу:

$$P_f V_f = 2\nu RT$$

$$P_0 V_0 = \nu RT_0$$

Підставимо в них вирази для тиску всередині кулі:

$$P_f = \frac{\alpha}{R_f}$$

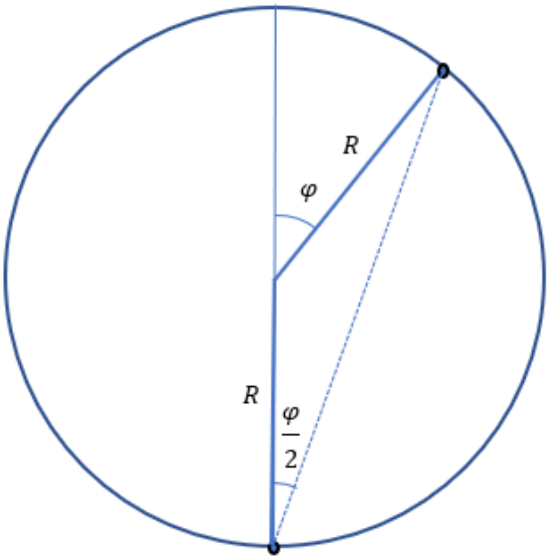
$$P_0 = \frac{\alpha}{R_0}$$

Остаточно із закону збереження енергії отримуємо:

$$T = \frac{T_0}{2} + \frac{kq}{6},$$

Де k – стала Больцмана.

(159) Задачу можна розв'язати різними способами, наприклад, скориставшись законом збереження енергії. Повна механічна енергія (див. Рис)



$$\frac{mR^2\dot{\varphi}^2}{2}+\frac{kq_1q_2}{2R\cos\frac{\varphi}{2}}+mgR(1+\cos\varphi)=E.$$

Продиференціюємо за часом

$$mR^2\dot{\varphi}\left(\ddot{\varphi}+\frac{kq_1q_2\sin\frac{\varphi}{2}}{4mR^3\cos^2\frac{\varphi}{2}}-\frac{g}{R}\sin\varphi\right)=0. \qquad (1)$$

Якщо тіло рухається, у загальному випадку $\dot{\varphi}\neq 0$, і вираз в дужках має дорівнювати нулю. Під час проходження тілом положення рівноваги прискорення $\ddot{\varphi}=0$, отже можливі кути рівноваги визначаються з рівняння

$\frac{kq_1q_2\sin\frac{\varphi}{2}}{4mR^3\cos^2\frac{\varphi}{2}}-\frac{g}{R}\sin\varphi=0$. Це $\varphi_0=0$ і $\cos^3\frac{\varphi_0}{2}=\frac{kq_1q_2}{8mgR^2}$.

Розглянемо коливання навколо найвищої точки ($\varphi_0=0$) всередині сфери. Оскільки коливання малі, кут у радіанах $\varphi\ll 1$, $\sin\varphi\approx\varphi$, $\cos\varphi\approx 1$. Тоді з (1) маємо рівняння гармонічних коливань

$$\ddot{\varphi}+\left(\frac{kq_1q_2}{8mR^3}-\frac{g}{R}\right)\varphi=0,$$

якщо $\frac{kq_1q_2}{8R^2}>mg$. Період

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g\left(\frac{kq_1q_2}{8mgR^2}-1\right)}}. \qquad (2)$$

Якщо $\frac{kq_1q_2}{8R^2}<mg$, стійка рівновага спостерігатиметься під кутом $\varphi_0\neq 0$, який знаходиться з рівняння:

$$\cos^3\frac{\varphi_0}{2}=\frac{kq_1q_2}{8mgR^2}.$$

Період для цього випадку

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{3g}}\frac{1}{\sin\frac{\varphi_0}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{R}{3g\left(1-\left(\frac{kq_1q_2}{8mgR^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right)}}. \qquad (3)$$

Найменшим цей період буде, коли $\varphi_0\to\pi$, тобто поблизу нижньої точки. Отже, якщо один із зарядів чи обидва заряди малі (сила електростатичної взаємодії для характерної відстані R набагато менша за силу тяжіння, $\frac{kq_1q_2}{8R^2}\ll mg$), період не залежить від конкретних значень зарядів і маси та дорівнює

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{3g}}. \qquad (4)$$

Додатково можна проаналізувати випадок $\frac{kq_1q_2}{8R^2} = mg$. Формально при наближенні до нього обидва вирази для періодів (2) і (3) дають нескінченне значення.

Взагалі ж коливання при цьому не будуть гармонічними, їхній період залежатиме від амплітудного кута φ_{max}, при чому обернено пропорційно, як можна показати із закону збереження енергії.

Для довідки наведемо результат:

$$T = \frac{8I}{\varphi_{max}}\sqrt{\frac{3R}{g\left(1+\frac{5kq_1q_2}{32mgR^2}\right)}} = \frac{16I}{\varphi_{max}}\sqrt{\frac{R}{3g}},$$

де $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \approx 1{,}311$.

(160) Зрозуміло, що в залежності від співвідношення параметрів, початковий стан діоду може бути різним. Тому:

А) $\boldsymbol{\mathcal{E} > U_0 + I_0 R}$

1 етап: Закон Збереження Енергії:

$Q_1 = A_{\text{джерела}} - Q_{\text{діода}} - W_{\text{конд}}$.

До моменту $t = t_1$, $I = I_0$ та $U_c = \mathcal{E} - U_0 - I_0 R$.

Заряд, пройшов до цього моменту через коло:

$$q_1 = CU_c = C(\mathcal{E} - U_0 - I_0 R)$$

$$A_{\text{джерела}} = q_1\mathcal{E} = C\mathcal{E}(\mathcal{E} - U_0 - I_0 R)$$

$$W_{\text{конд}} = \frac{CU_c^2}{2} = \frac{C(\mathcal{E} - U_0 - I_0 R)^2}{2}$$

$$Q_{\text{діода}} = q_1 U_0 = CU_0(\mathcal{E} - U_0 - I_0 R)$$

Тоді, після підстановки $\boxed{Q_1 = \frac{C}{2}((\mathcal{E} - U_0)^2 - (I_0 R)^2)}$

2 етап*: Струм спадає (ділянка АО)*

$$Q_2 = A_{\text{джерела 2}} - Q_{\text{діода 2}} - \Delta W_{\text{конд}}$$

Коли $I = 0$, $U_{\text{діода}} = 0$, $q_c = C\mathcal{E}, U_c = \mathcal{E}$.

За час $t_2 - t_1$ *по колу пройшов заряд* $q_2 = q - q_1$.

Тоді, $q_2 = \mathrm{C}\mathcal{E} - \mathrm{C}(\mathcal{E} - U_0 - I_0 R) = \mathrm{C}(U_0 + I_0 R)$

$$A_{\text{джерела 2}} = q_2\mathcal{E} = C\mathcal{E}(U_0 + I_0R)$$

$$\Delta W_c = \frac{q^2 - q_1^2}{2C} = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} - \frac{C}{2}(\mathcal{E} - U_0 - I_0R)^2 = C\mathcal{E}(U_0 + I_0R) - \frac{C}{2}(U_0 + I_0R)^2$$

Тоді,

$$Q_2 + Q_{\text{діода 2}} = A_2 - \Delta W_{\text{конд}} = \frac{C}{2}(U_0 + I_0R)^2$$

Так як резистор і діод з'єднані послідовно, то $\frac{Q_2}{Q_{\text{діода 2}}} = \frac{R}{r} = \frac{RI_0}{U_0}$. $(r = \frac{U_0}{I_0})$

$$Q_2 + Q_2\frac{r}{R} = \frac{C}{2}(U_0 + I_0R)^2$$

$$\boxed{Q_2 = \frac{CR}{2(R+r)}(U_0 + I_0R)^2}$$

Загальна кількість теплоти:

$$\boxed{Q = Q_1 + Q_2 = \frac{C}{2}(U_0I_0R + (\mathcal{E} - U_0)^2)}$$

Якщо $\boldsymbol{\varepsilon \leq\ U_0 + I_0R}$, закон збереження енергії запишеться наступним чином:

$$A_{\text{EPC}} = Q_R + Q_D + \Delta W_C.$$

$$A_{\text{EPC}} = \ \varepsilon q = C\varepsilon^2$$

$$\Delta W_C = \frac{C\varepsilon^2}{2}$$

Опір діода $R_0 = \frac{U_0}{I_0}$, а отже $Q_D = Q_R\frac{U_0}{I_0R}$.

В результаті:

$$Q_R = \frac{C\varepsilon^2}{2(1 + \frac{U_0}{I_0R})}$$

(161) Розглянемо висоту на якій буде літати жук в сферичному та конічному резервуарах. Згідно з умовою, жук обирає висоту на якій найбільша кількість комах, тому знайдемо функцію залежності кількості комах на певній висоті($f(h)$) від висоти h.

$N = f(h) * dh$, де $N -$ кількість комах в шарі висотою dh

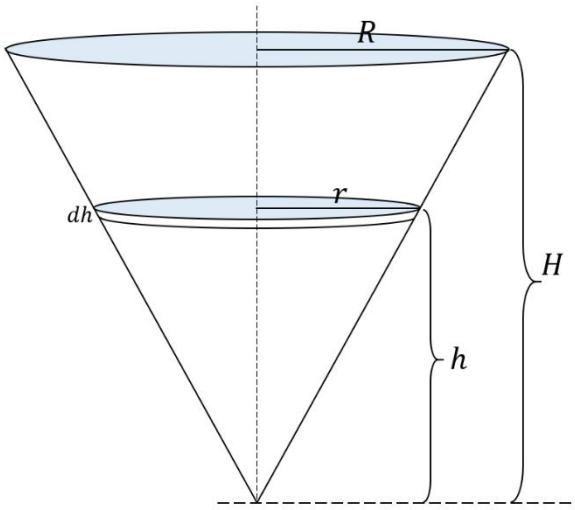
$N = n(h) * dV$, dV – об'єм слою висотою dh , що знаходиться на висоті h.

З умови зрозуміло, що поведінка комах схожа на поведінку молекул ідеального газу, що рухаються хаотично у полі тяжіння землі. Для визначення $n(h)$ застосуємо функцією Больцмана для розподілення молекул по швидкостям, маємо: $n(h) = n_0 * e^{-\frac{m_0gh}{kT}}$

Отримаємо, $f(h) = n_0 * e^{-\frac{m_0gh}{kT}} * \frac{dV}{dh}$

Також введемо поняття температури, як характеристику швидкості руху комах. Так як середньоквадратична швидкість молекул прямо пропорційна кореню квадратному з температури, маємо $\frac{T_{\text{сф}}}{T_{\text{к}}} = 3$.

1. Для конічного резервуару:



$$dV = dh * \pi r^2 = \frac{\pi R^2 h^2}{H^2}\, dh$$

$$f(h) = n_0 * e^{-\frac{m_0 g h}{k T_{\text{к}}}} * \frac{\pi R^2 h^2}{H^2}$$

Щоб знайти максимум цієї функції, візьмемо похідну від функції $f(h)$:

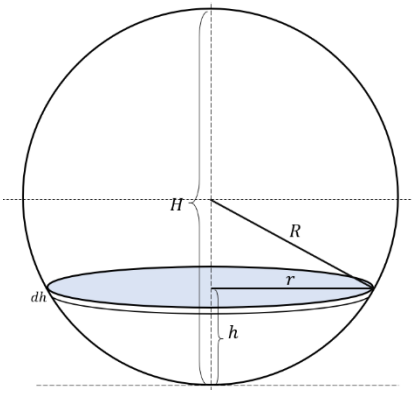
$$f(h)' = 0 = \frac{n_0 * \pi * R^2}{H^2} * e^{-\frac{m_0 g h}{k T_{\text{к}}}} * h * \left(2 - \frac{m_0 g}{k T_{\text{к}}} * h\right)$$

Отримаємо: $\boxed{h = \frac{k T_{\text{к}}}{m_0 g} * 2}$

2. Для сферичного резервуару:

$$dV = dh * \pi r^2 = R^2 - (R - h)^2 = \pi(2Rh - h^2)\, dh$$

$$f(h) = n_0 * e^{-\frac{m_0 g h}{3 k T_{\text{к}}}} * \pi(2Rh - h^2)$$



Щоб знайти максимум цієї функції, візьмемо похідну від функції $f(h)$:

$$f(h)' = 0 = n_0 * \pi * e^{-\frac{m_0 g h}{3 k T_{\text{к}}}} * (2(R - \text{h}) - \frac{m_0 g}{3 k T_{\text{к}}} h(2R - \text{h}))$$

Використовуючи попередній пункт, отримаємо:

$$(R - \text{h}) = \frac{1}{3}(2R - \text{h})$$

$$\text{h} = \frac{R}{2}$$

Так як, $H = 2R$

$$\boxed{H = 4h} = 10\text{м}$$

(162) Виходитимемо з того, що в положенні стійкої рівноваги загальна потенціальна енергія системи має бути мінімальною. Ця енергія W_p складається з енергій трьох деформованих пружин і потенціальної енергії вантажу в полі земного тяжіння. Виберемо нульовий рівень в точці підвісу системи (це верхній шарнір), виразимо енергію через кут α між стрижнями та вертикаллю. Центр тяжіння вантажу знаходиться нижче нульового рівня на $6b\cos\alpha + L$, де L — незмінна відстань між цим центром і нижчим шарніром. Довжина горизонтальної пружини $2b\sin\alpha$, довжина двох інших пружин становить $l = b\sqrt{\sin^2\alpha + 9\cos^2\alpha}$. Отже, енергія системи

$$W_p = -mg(6b\cos\alpha + L) + \frac{k(2b\sin\alpha - l_0)^2}{2} + 2\cdot\frac{k(l-l_0)^2}{2}.$$

Ця функція кута α має мінімум, коли $\alpha = 45°$ (тобто коли утворені стрижнями ромби перетворюються на квадрати). Прирівнявши нулю похідну $dW_p/d\alpha$ у цій точці, отримуємо результат

$$l_0 = 3b\,\frac{\sqrt{2}-\gamma}{0{,}8\sqrt{10}-1}.$$

Тут $\gamma = \frac{mg}{kb}$. Якщо можна знехтувати масою вантажу ($\gamma \ll 1$), дістанемо $l_0 = 2{,}77b$. Зі збільшенням γ значення l_0 зменшується. За малих значень γ усі пружини в стані рівноваги стиснені. Горизонтальна пружина стиснена в стані рівноваги, якщо $\gamma < 0{,}69$. За умови ж $0{,}69 < \gamma < \sqrt{2}$ горизонтальна пружина в стані рівноваги розтягнена. Очевидно, описана в умові задачі ситуація неможлива, якщо $\gamma > \sqrt{2}$.

(163) 1. Механічна енергія астероїда в системі відліку «Сонце» $W = -G\frac{M_S M_a}{r_0}$. Тут $M_S,\ M_a$ — маси відповідно Сонця та астероїда, $r_0 = 200$ а. о. Астероїд рухатиметься прямолінійно до Сонця, проте його траєкторію можна вважати виродженим еліпсом з великою піввіссю a_0. Відомо, що $W = -G\frac{M_S M_a}{2a_0}$. Отже, $2a_0 = r_0$. Враховуючи, що розмір еліпса набагато більший за радіус a_E орбіти Землі, можна вважати: шуканий час t дорівнює половині періоду руху еліпсом з великою піввіссю $r_0/2$. Тоді з третього закону Кеплера маємо $\frac{(2t)^2}{T_E^2} = \left(\frac{r_0}{2a_E}\right)^3$, де $T_E = 1$ рік. Звідси $t = 500$ років. Отже, небезпека не дуже близька…

2. Визначимо спочатку швидкість v_E астероїда відносно Сонця поблизу орбіти Землі (до того, як відчуватиметься притягання до самої Землі). Відповідно до закону збереження енергії $W = -G\frac{M_S M_a}{r_0} = -G\frac{M_S M_a}{a_E} + \frac{M_a v_E^2}{2}$. Враховуючи велике значення r_0, можна вважати повну механічну енергію нульовою. Тоді $v_E = \sqrt{2G\frac{M_S}{a_E}} = \sqrt{2}v_{\text{orb}}$, де $v_{\text{orb}} = \sqrt{G\frac{M_S}{a_E}} = 30$ км/с — швидкість орбітального руху Землі. У системі відліку «Сонце» швидкості $\vec{v}_E$ і $\vec{v}_{\text{orb}}$ перед «вмиканням» тяжіння між Землею та астероїдом перпендикулярні одна до одної. Отже, швидкість v_0 астероїда відносно Землі знаходимо з теореми Піфагора: $v_0 = \sqrt{3}v_{\text{orb}}$. Подальші події слід розглядати в системі відліку «Земля». Застосуємо знов закон збереження енергії: $\frac{M_a v_0^2}{2} = -G\frac{M_E M_a}{R_E} + \frac{M_a v^2}{2}$. Тут M_E, R_E — маса та радіус Землі. Звідси швидкість астероїда перед ударом об Землю $v = \sqrt{v_0^2 + 2G\frac{M_E}{R_E}} = \sqrt{3v_{\text{orb}}^2 + 2v_{\text{I}}^2} = 53$ км/с. Такий удар дійсно буде страшним.

3. Виходитимемо з того, що маса викинутого каміння за будь-яких умов набагато менша від маси астероїда, тому не враховуватимемо зміни M_a. Щоб каміння покинуло астероїд, йому слід надати початкової швидкості u_0, більшої за другу космічну швидкість $v_{a-\text{II}} = \sqrt{2G\frac{M_a}{R_a}}$ для астероїда ($R_a = 1$ км). Тоді швидкість u каміння на великій відстані знайдемо зі співвідношення $\frac{u^2}{2} = \frac{u_0^2}{2} - G\frac{M_a}{R_a}$. Модуль імпульсу, набутого камінням масою m (і, відповідно, астероїдом), $P = mu =$

$= m\sqrt{u_0^2 - 2G\frac{M_a}{R_a}}$. Оскільки $W = \frac{mu_0^2}{2}$, маємо $P = v_{a-\text{II}}\sqrt{m\left(\frac{2W}{v_{a-\text{II}}^2} - m\right)}$. Максимальне значення

імпульсу легко знайти, скориставшись нерівністю Коші: $P_{\max} = \frac{W}{v_{a-\text{II}}}$. Це значення досягається за маси каміння $\frac{W}{v_{a-\text{II}}^2}$ та його початковій швидкості $\sqrt{2}v_{a-\text{II}}$.

У даному випадку маса астероїда $M_a = M_E\left(\frac{R_a}{R_E}\right)^3 = 2{,}3 \cdot 10^{13}$ кг, $v_{a-\text{II}} = 1{,}75$ м/с. Отже, потрібно викинути каміння масою $2{,}3 \cdot 10^8$ кг (ця маса дійсно набагато менша від маси астероїда) з початковою швидкістю лише 2,5 м/с. Дістаємо $P_{\max} = 4 \cdot 10^8$ $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$. Унаслідок віддачі астероїд набуде швидкості лише $v_{\max} = 1{,}74 \cdot 10^{-5}$ м/с.

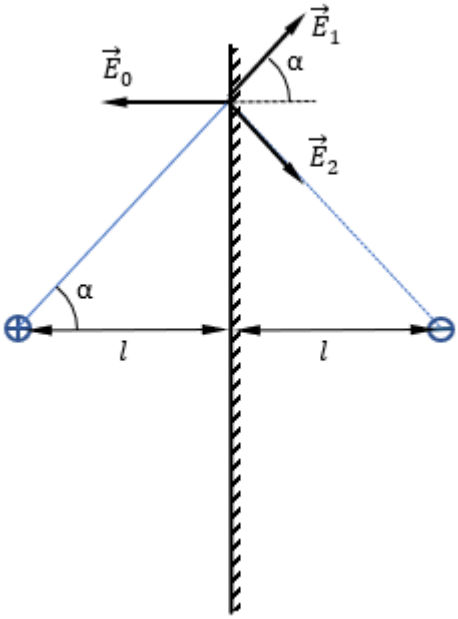
4. За якої умови такого ефекту вистачить, щоб убезпечити Землю? Уважатимемо, що астероїд отримує імпульс P перпендикулярно до напряму на Сонце на відстані $r_1 = 50$ а.о. від нього, тоді момент імпульсу астероїда $L = Pr_1$. Нехтуватимемо наданою астероїду енергією, тоді велика піввісь орбіти астероїда практично дорівнює a_0, але тепер мала піввісь b відрізнятиметься від нуля ($b \ll a_0$). Центральний кут між напрямами на Землю та астероїд, коли він перетинає орбіту Землі, $\varphi = \frac{s}{a_E} = 2 \cdot 10^{-4}$ рад.

Тоді $1 - \cos\varphi = \frac{\varphi^2}{2} = 2 \cdot 10^{-8}$, і з наведеного в умові задачі рівняння (ми нехтуємо короткочасною взаємодією астероїд—Земля) випливає, що $p = a_E(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon\varphi^2}{2})$. З іншого боку, легко показати, що $a_0 = \frac{p}{1-\varepsilon^2}$ і $b = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. Звідси $p = \frac{b^2}{a_0}$, $\varepsilon = 1 - \frac{b^2}{2a_0^2}$, $\frac{b^2}{2a_0^2} + \frac{\varphi^2}{2} = \frac{b^2}{a_0 a_E}$. Оскільки $a_0 \gg a_E$, отримуємо $b = \varphi\sqrt{\frac{a_0 a_E}{2}} = 2{,}1 \cdot 10^8$ м. Тепер залишається встановити зв'язок цієї величини з отриманим астероїдом імпульсом.

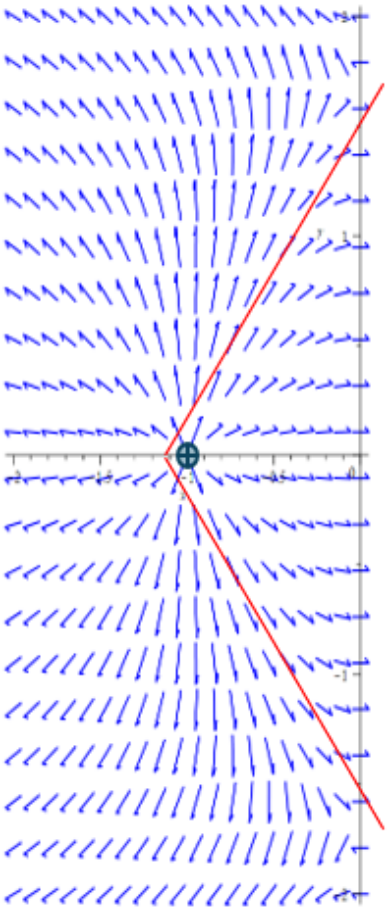
Розглянемо параметри руху астероїда в точці на малій осі еліпсу. Із закону збереження енергії отримуємо швидкість астероїда і момент імпульсу $L = bM_a\sqrt{G\frac{M_S}{a_0}}$. Звідси $P = \frac{bM_a}{r_1}\sqrt{G\frac{M_S}{a_0}} \approx 2 \cdot 10^{12}$ $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$. Це у 5000 разів перевищує отримане вище значення $P_{\max}$, тобто для реалізації проекту знадобилося б набагато більше енергії. Проте навіть за такого значення імпульсу треба викинути з астероїда невелику частку його маси (близько 5 %).

Цікаво, як зміниться відповідь на запитання 4, якщо НЕ враховувати викривлення траєкторії руху астероїда після поштовху під дією тяжіння Сонця. Імпульс астероїда перед поштовхом $P_1 = M_a\sqrt{2G\frac{M_S}{r_1}}$, тому кут відхилення від напряму на Сонце $\beta = \frac{P}{P_1}$, а найменша відстань від Землі приблизно $s = \beta r_1$. Звідси $P = \frac{M_a s}{r_1}\sqrt{2G\frac{M_S}{r_1}} = 5{,}5 \cdot 10^{11}$ $\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}$. Це майже в 4 рази менше від правильного значення.

(164) В електростатиці лінії напруженості електричного поля входять у провідник перпендикулярно до його поверхні. Якщо розглянути незаряджену нескінченну металеву площину, точковий заряд притягне до себе заряди протилежного знаку $-q$, які розподіляться вздовж поверхні так, щоб лінії напруженості були їй перпендикулярними. Залишковий заряд $+q$ рівномірно розподілиться вздовж нескінченно великої поверхні, тому його поверхнева густина прямуватиме до нуля і її впливом можна знехтувати.



Таку ж пласку еквіпотенціальну поверхню посередині між собою утворюють два однакові за величиною, але різні за знаком заряди. Для розрахунку напруженості електричного поля заряду і провідної площини, скористаємося полем двох зарядів, однакових за модулем, але протилежних за знаком. Такий підхід називають методом електростатичних зображень (на Рис. точковий заряд зображений додатним). Крім цього врахуємо, що заряджена площина створює однорідне поле напруженістю $E_0 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.



За умовою поле під кутом $\alpha = 60°$ відсутнє (див. Рис.). Отже $E_0 = 2E_1\cos\alpha = E_1$, або

$$\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0(l/\cos\alpha)^2},$$

звідки знаходимо співвідношення між величиною точкового заряду q і початковою поверхневою густиною заряду пластини: $\sigma = \frac{q}{8\pi l^2}$. Зрозуміло, що для забезпечення нульової напруженості σ і q одного знаку. Силу, що діє на точковий заряд, знайдемо як рівнодійну сил зі сторони однорідно зарядженої площини і заряду протилежного знаку на відстані $2l$.

$$F = \frac{q\sigma}{2\varepsilon_0} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2l)^2} = \frac{q}{2\varepsilon_0}\left(\sigma - \frac{q^2}{8\pi l^2}\right) = 0.$$

Заряд перебуватиме у положенні нестійкої рівноваги. Якщо його наблизити до площини, він буде до неї притягатися, а, якщо віддалити, відштовхуватися.

Оскільки під кутом $\alpha = 60°$ напруженість дорівнює нулю, всередині цього кола лінії напруженості будуть входити у площину, а зовні – виходити. Отже повний заряд всередині цього кола від'ємний і менший за модулем за заряд q, оскільки складається із наведеного від'ємного заряду (вже меншого за модулем ніж q) і додатного заряду площини. Це означає, що тільки частина силових ліній від заряду q протягнеться до площини. Інша разом з лініями, що виходять з площини поза колом, піде на нескінченність (вліво на Рис.).

Знайдемо заряд, що наводиться на поверхні металевої незарядженої площини зі сторони точкового заряду. Абсолютна величина напруженості поблизу такої поверхні під довільним кутом спостереження α (див. Рис.):

$$2E_1\cos\alpha = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(l/\cos\alpha)^2}\cos\alpha = \frac{q\cos^3\alpha}{2\pi\varepsilon_0 l^2}.$$

Оскільки всередині металу поле відсутнє, ця напруженість дорівнює відношенню поверхневої густини заряду $\tilde{\sigma}$ до електричної сталої ε_0. Отже, з урахуванням знаків:

$$\tilde{\sigma} = -\frac{q\cos^3\alpha}{2\pi l^2} = -4\sigma\cos^3\alpha.$$

Те, що при $\alpha = 60°$ отримаємо $\tilde{\sigma} = -\sigma/2$, зрозуміло, оскільки початкова поверхнева густина металевої пластини σ була порівну розподілена між двома поверхнями.

Наведений заряд знайдемо, проінтегрувавши:

$$\tilde{q} = \int \tilde{\sigma}dS = 2\pi\int_0^{l\sqrt{3}} \tilde{\sigma}xdx = -8\pi\sigma\int_0^{l\sqrt{3}} \left(\frac{l}{\sqrt{x^2+l^2}}\right)^3 xdx = 8\pi\sigma l^3\frac{1}{\sqrt{x^2+l^2}}\Big|_0^{l\sqrt{3}} = -4\pi\sigma l^2 = -q/2.$$

Якщо у питанні задачі «Знайдіть відношення точкового заряду до заряду на площині всередині окресленого кутом 60° кола» заряд всередині кола інтерпретувати як заряд на одній поверхні пластини зі сторони q, тоді загальний заряд:

$q_1 = \tilde{q} + \frac{1}{2}\sigma\cdot\pi\left(l\sqrt{3}\right)^2 = -\frac{5}{2}\sigma\cdot\pi l^2 = -5q/16$, а відношення зарядів $-3{,}2$.

Якщо ж інтерпретувати, як заряд на всій пластині всередині кола (на обох її поверхнях), тоді

$q_2 = \tilde{q} + \sigma\cdot\pi\left(l\sqrt{3}\right)^2 = -\sigma\cdot\pi l^2 = -q/8$, а відношення зарядів -8.

(165) а) Розглянемо спочатку планету «М'яч». На рис. 1 зображений полярний поперечний переріз планети. О – центр планети; РР′ – вісь добового обертання; ОА – радіус, що належить екватору; $\angle AOM = \varphi$ – планетографічна широта пункту М на поверхні планети.

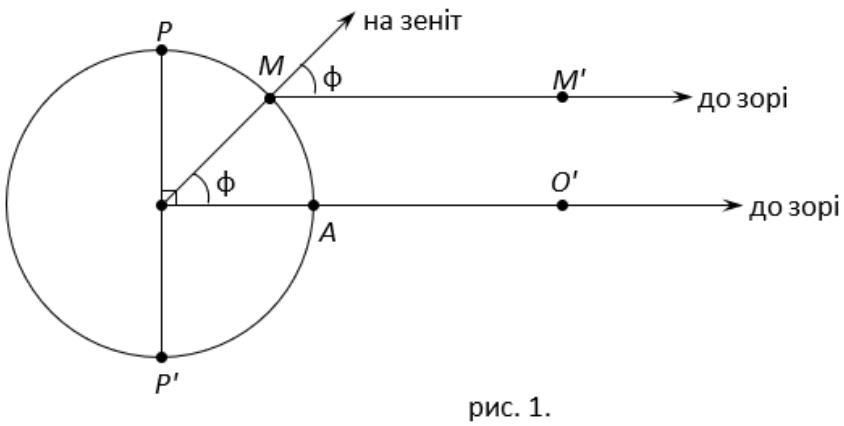


рис. 1.

За умовою задачі $PP' \perp OO'$, де OO′ – напрямок на зорю. MM ′ || OO′, так як в умові сказано, що зоря далека від планети, а розмірами зорі можна знехтувати. Нехай відстань до зорі – L, а сила її світлового випромінювання – I. Тоді освітленість, яку створює зоря в т. M на поверхні планети «М'яч» буде

$$E_M = \frac{I}{L^2}\cos\varphi \quad . \tag{1}$$

За умовою відстань L до зорі можна вважати сталою для всіх точок поверхні планети.

б) Розглянемо тепер планету «Диня» (рис. 2).

На рис. 2: O –центр планети «Диня»; OP – мала піввісь полярного перерізу планети; OA – велика піввісь цього перерізу; OO′ – напрямок на зорю; M – точка на поверхні планети з планетографічною широтою φ; OM – радіус-вектор точки M; KL – дотична до поверхні планети в точці M; φ* – кут між напрямком на зорю та в місцевий зеніт.

З умови задачі слідує, що OO ′ || MM ′, тому $\angle VMM' = \angle MKO' = \varphi^*$.

Враховуючи, що між точками планети «Диня» та центром зорі відстань незмінні і дорівнює L (за умовою), то освітленість, створена зорею в т. M планети буде

$$E_Д = \frac{I}{L^2}\cos\varphi^* \quad , \tag{2}$$

де I – сила світла зорі.

З (1) та (2)

$$\frac{E_M(\varphi)}{E_Д(\varphi^*)} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi^*} \quad . \tag{3}$$

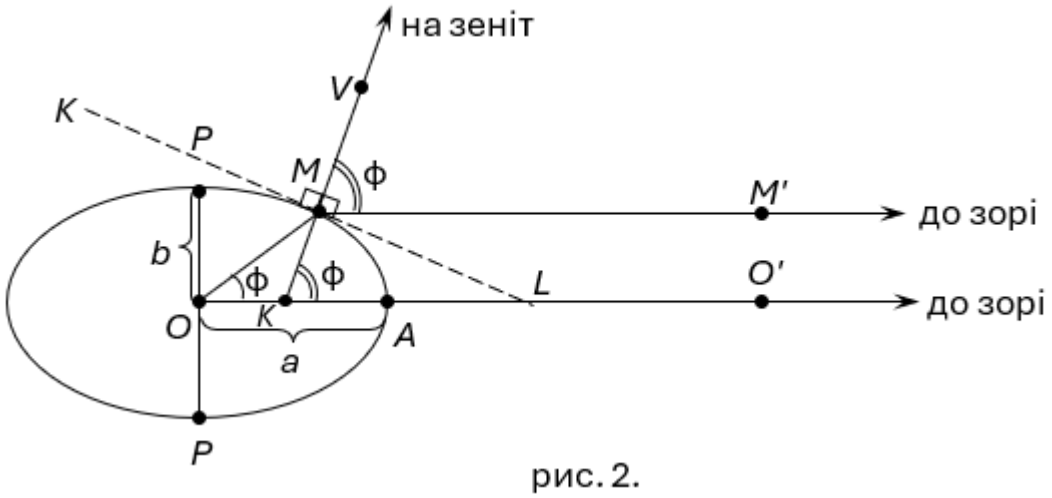


рис. 2.

Отже, для відповіді на перше запитання задачі нам необхідно виразити φ* через φ. Для цього запишемо рівняння дотичної до поверхні еліпса в точці з координатами (x0; y0) (рис. 3). Еліпс при цьому розташований «канонічно»: осі еліпса співпадають з осями системи координат, центр еліпса розташований в початку системи координат.

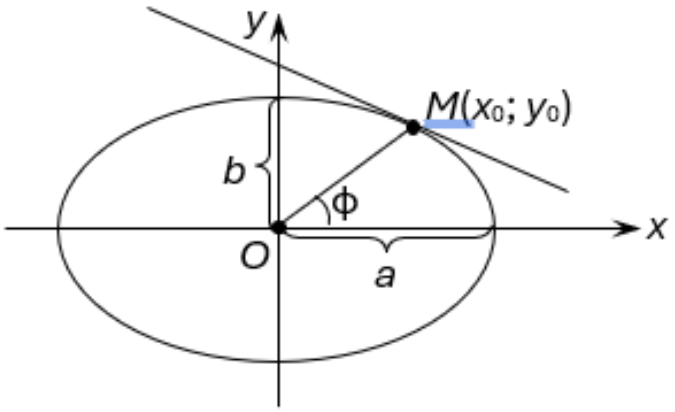


рис. 3.

З курсу геометрії знаємо, що рівнянням дотичної в цьому разі є рівняння виду:

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1 \quad . \tag{4}$$

З (4): $xx_0b^2+yy_0a^2=a^2b^2 \Rightarrow yy_0a^2=a^2b^2-x_0b^2x \Rightarrow \quad y=\frac{a^2b^2}{a^2y_0}-\frac{x_0b^2}{y_0a^2}x \Rightarrow$

$$\Rightarrow y=-\frac{x_0}{y_0}\left(\frac{b}{a}\right)^2 x+\frac{b^2}{y_0} \quad . \tag{5}$$

З (5) видно, що кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює

$$\left(-\frac{x_0}{y_0}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right).$$

Очевидно, що кутовий коефіцієнт прямої, яка перпендикулярна до дотичної в точці М буде

$$k^* = \frac{y_o}{x_o}(\frac{a}{b})2$$

На рис. 2 – це кутовий коефіцієнт прямої KV – напрямку на зеніт в точці М.

Отже

$$tg\varphi^* = k^* = \frac{y_o}{x_o}(\frac{a}{b})2 \tag{6}$$

Рівняння еліпса в полярній системі координат

$$\rho(\varphi)=\frac{P}{1-e\cos\varphi}, \tag{7}$$

де $P=\frac{b^2}{a}$ – полярний параметр; $e=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}$ – ексцентриситет еліпса. (8, 9)

Виконуючи підстановку (8, 9) → (7), маємо:

$$\rho(\varphi)=\frac{b^2}{a(1-e\cos\varphi)}, \qquad (7')$$

де $\rho(\varphi)=OM$ (рис. 3).

З рис.3:

$$\begin{cases} x_0 = OM\cos\varphi = \rho(\varphi)\cos\varphi \overset{(7')}{=} \dfrac{b^2\cos\varphi}{a(1-e\cos\varphi)}; \\ y_0 = OM\sin\varphi = \rho(\varphi)\sin\varphi \overset{(7')}{=} \dfrac{b^2\sin\varphi}{a(1-e\cos\varphi)}. \end{cases} \qquad (10)$$

(10) → (6):

$$\mathrm{tg}\varphi^* = (\tfrac{a}{b})2\mathrm{tg}\varphi \qquad (11)$$

З (11):

$$\cos\varphi^* = \pm(1 + (\tfrac{a}{b})4\mathrm{tg}2\varphi)\text{-}1|2 \qquad (12)$$

Вибираємо для прикладу північні (додатні) широти, тоді з (12)

$$\cos\varphi^* = (1 + (\tfrac{a}{b})4\mathrm{tg}2\varphi)\text{-}1|2 \ = \frac{b^2}{\sqrt{(b^4+a^4tg^2\varphi}} \qquad (12')$$

(12′) → (3):

$$\frac{E_M}{E_D}(\varphi) = cos\varphi(\frac{b^2}{\sqrt{(b^4+a^4tg^2\varphi}})\text{-}1 \qquad (13)$$

На полюсах ($\varphi=\pm90^\circ$) $\frac{E_M(\varphi)}{E_Д(\varphi)}=1$, т. я. полюси не освітлюється зорею на обох планетах.

1.2. Так як $\varphi^* \geq \varphi$ для всіх $|\varphi| \leq 90^\circ$, то $E_Д(\varphi) \leq E_M(\varphi)$ / $|\varphi| \leq 90^\circ$ /.

Відповідь: 1.1. $\frac{E_M}{E_D}(\varphi) = cos\varphi(\frac{b^2}{\sqrt{(b^4+a^4tg^2\varphi}})^{-1}$.

1.2. $E_Д(\varphi) \leq E_M(\varphi)$ / $|\varphi| \leq 90^\circ$ /.

(166) «Шкільний» метод доведення того, що прискорення вільного падіння всередині сферично-симетричної оболонки дорівнює нулю заснований на подібності. Беремо довільну точку А всередині сфери, проводимо через неї пряму (темно-синя на рис. 1), обертанням якої утворюємо вузькі конічні поверхні, які вирізають на поверхні сферичної оболонки дві невеликі площі масами Δm_1 і Δm_2 (позначені жовтим кольором). Сила притяжіння частинки масою m_0, розміщеної у точці А, до Δm_1

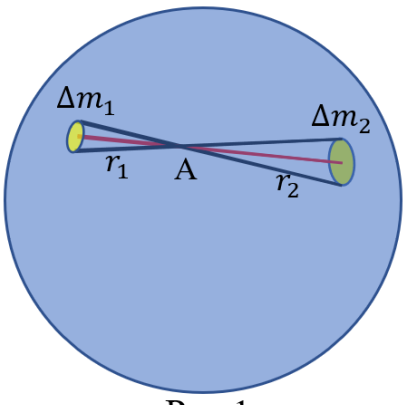


Рис.1

$$F_1 = G\frac{\Delta m_1 m_0}{r_1^2},$$

а до Δm_2

$$F_2 = G\frac{\Delta m_2 m_0}{r_2^2}.$$

Тут ми вважаємо Δm_1 і Δm_2 точковими масами, оскільки конічні поверхні можна зробити наскільки завгодно вузькими. Знайдені сили діють на m_0 у протилежних напрямках, а їх відношення дорівнює одиниці

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\Delta m_1}{\Delta m_2}\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\Delta S_1}{\Delta S_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 1.$$

Ми скористалися тим, що відношення мас Δm_1 до Δm_2 пропорційне до відношенню відповідних площ ΔS_1 і ΔS_2. Звісно, вважаємо, що наша оболонка має однакову поверхневу густину (інакше з фізичної точку зору вона не буде сферично симетричною). Далі з подібності конусів записуємо, що відношення відповідних площ дорівнює відношенню відповідних лінійних розмірів у квадраті. Отже сили на m_0 компенсуються. Скануючи такими конусами всю поверхню сфери, доводимо, що й загальна сила на частинку у точці А дорівнюватиме нулю. Оскільки положення точки А всередині сфери довільне, то у будь-якій точці всередині сфери гравітаційний вплив сфери буде нульовим. Набираючи з таких сфер товсту оболонку, приходимо до аналогічного висновку, навіть якщо поверхнева густина таких оболонок змінюється.

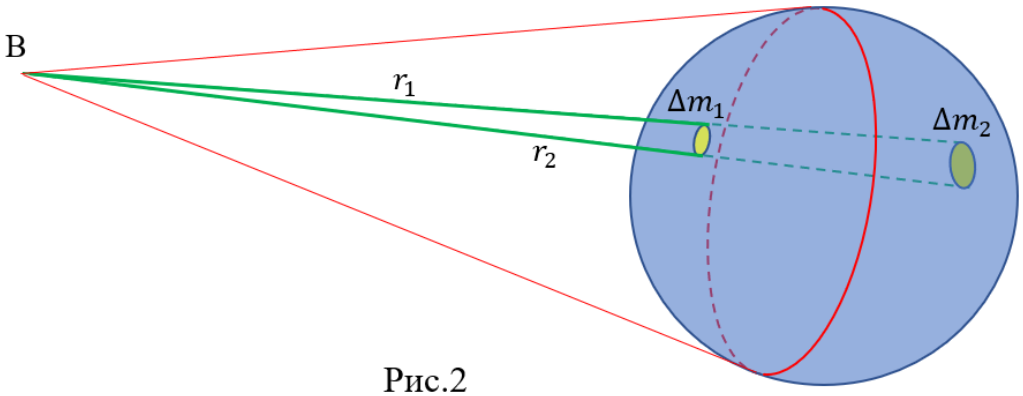


Рис.2

Розглянемо тепер точку В, яка на відміну від точки А знаходиться поза тонкостінною однорідною сферичною оболонкою (рис.2). Так само проведемо крізь В пряму (зелений колір), обертанням якої утворюємо вузьку конічну поверхню, що «вирізає» на сферичній оболонці дві невеликі площі масами Δm_1 і Δm_2 (виділені жовтим кольором). Відстань від точки В до першої з них позначимо як r_1, а до другої r_2. Відношення сил, що діють зі сторони цих мас на розміщену у точці В частинку m_0, знову дорівнює одиниці

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\Delta m_1}{\Delta m_2}\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\Delta S_1}{\Delta S_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = 1,$$

але тепер ці сили вже не компенсуються, а додаються (спрямовані в один бік). Скануючи такими конусами всю поверхню сферичної оболонки, ми ділимо її на дві частини, ближню й дальню, з однаковим внеском від кожної у загальну гравітаційну силу, що діє на частинку m_0 поза сферою. Граничні конуси дотикаються до поверхні сфери (червоні лінії на рис.2).

Зазначимо, що дотичні утворюють прямий кут з проведеними у точки дотику радіусами сфери (рис.3).

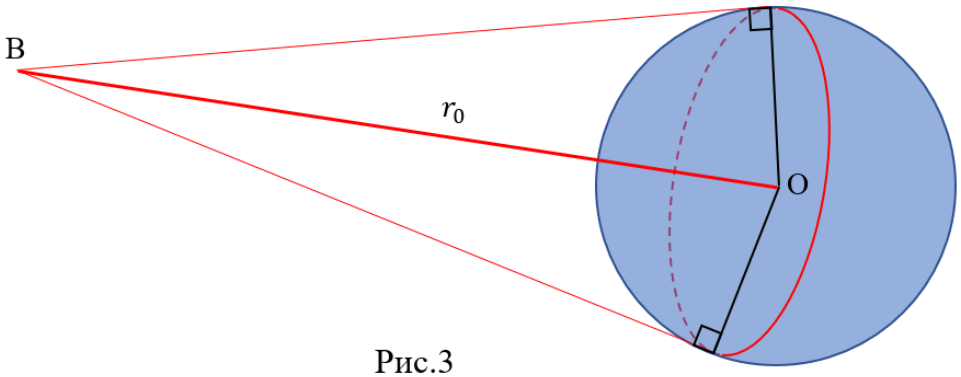
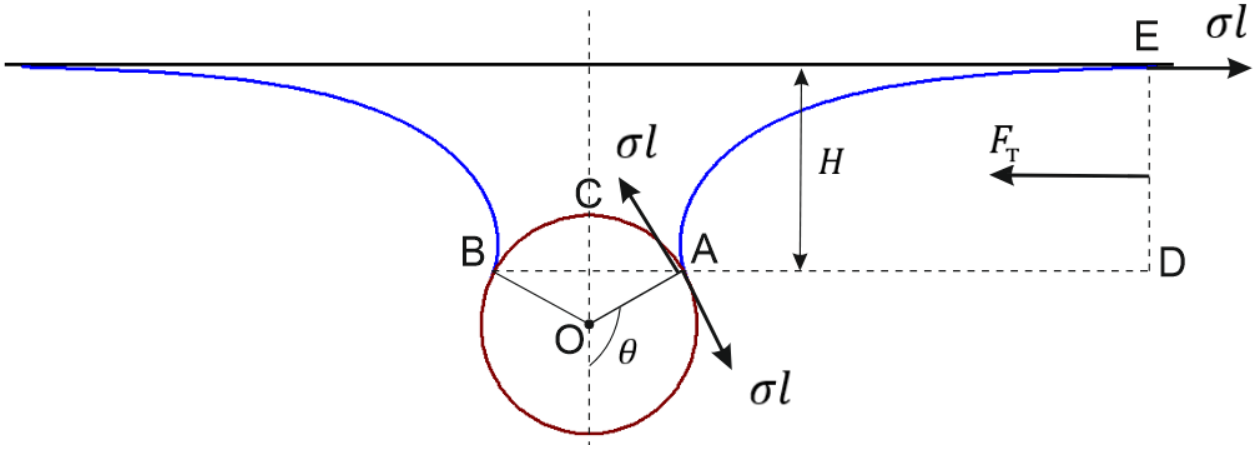


Рис.3

Це справедливо для будь-яких сферичних оболонок з радіусами меншими за r_0. Ці оболонки можуть мати різну поверхневу густину, і тому з них можна набрати кулю з довільною залежністю $\rho(r)$. Поверхня, яка ділитиме цю кулю на дві частини, проходитиме через точки дотику дотичних з В до будь-яких розглянутих сфер з центром в О – центрі кулі. У перерізі вздовж ВО маємо прямокутні трикутники. Їхні вершини лежать на колі з діаметром r_0. Отже, поверхня, яка ділить планету на дві частини, внесок від кожної з яких у прискорення вільного падіння дорівнює $\vec{g}/2$, є сферою з центом посередині відрізку ВО і радіусом $r_0/2$. Що цікаво, точка В може бути і ззовні, і всередині планети, відповідь залишається тією ж, оскільки зовні сферичні оболонки не дають внеска у прискорення вільного падіння.

(167) Спиця буде знаходитись в рівновазі під дією сили тяжіння, сили тиску з боку води та сил натягу.



Умова рівноваги на вертикальну вісь y (на рисунку не позначена):

$$F_{\text{нат}-y} + F_{\text{тиску}} = mg.$$

$F_{\text{нат}-y} = F_{\text{вздовж}} + F_{\text{торці}} = 2\sigma l * \sin(\theta) + 4R * \sin(\theta)$. При чому сила на торці спрямована вертикально вгору, адже там поверхня спиці вертикальна. Маса спиці $m = \pi R^2 l \rho_a$.

Силу тиску з боку води можна записати за допомогою наступного трюку – через силу Архімеда. Нехай сила тиску з боку води на нашу спицю це сила Архімеда на всю занурену частину спиці, але в цьому випадку ми не враховуємо, що верхня частина спиці ВСА все-таки не занурена і над нею нема стовпа води. Якби стовп води був, то він би тиснув на ВС із

силою $\rho_{\text{в}} g H S_{\text{ВС}}$, а знизу був би тиск води вгору на занурену частину спиці і різниця цих сил була б силою Архімеда на занурену частину. Але стовба води зверху немає, тож повна сила тиску з боку води на спицю це $F_{\text{тиску}} = \rho_{\text{в}} g V_{\text{занур}} + \rho_{\text{в}} g H S_{\text{ВС}}$.

Об'єм зануреної частини легко знайти геометрично:

$$V_{\text{занур}} = V\frac{\theta}{\pi} + R^2\cos(\pi-\theta)\sin(\pi-\theta) = R^2 l\theta - lR^2\cos(\theta)\sin(\theta)$$

Отже, умова рівноваги:

$$2\sigma l * \sin(\theta) + 4\sigma R * \sin(\theta) + \rho_{\text{в}} g R^2 l\left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + 2\rho_{\text{в}} g H R l \sin(\theta) = \pi R^2 l \rho_a g.$$

Знайдемо тепер висоту прогину води H. Запишемо умову рівноваги на фрагмент води AED на горизонтальну вісь за допомогою врівноваження сил натягу та сили тиску з боку води:

$$\sigma l + \sigma l * \cos(\pi-\theta) = \sigma l(1-\cos(\theta)) = F_{\text{т}} = \frac{1}{2}\rho_{\text{в}} g H * H l$$

Звідси: $H = 2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_{\text{в}} g}}\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

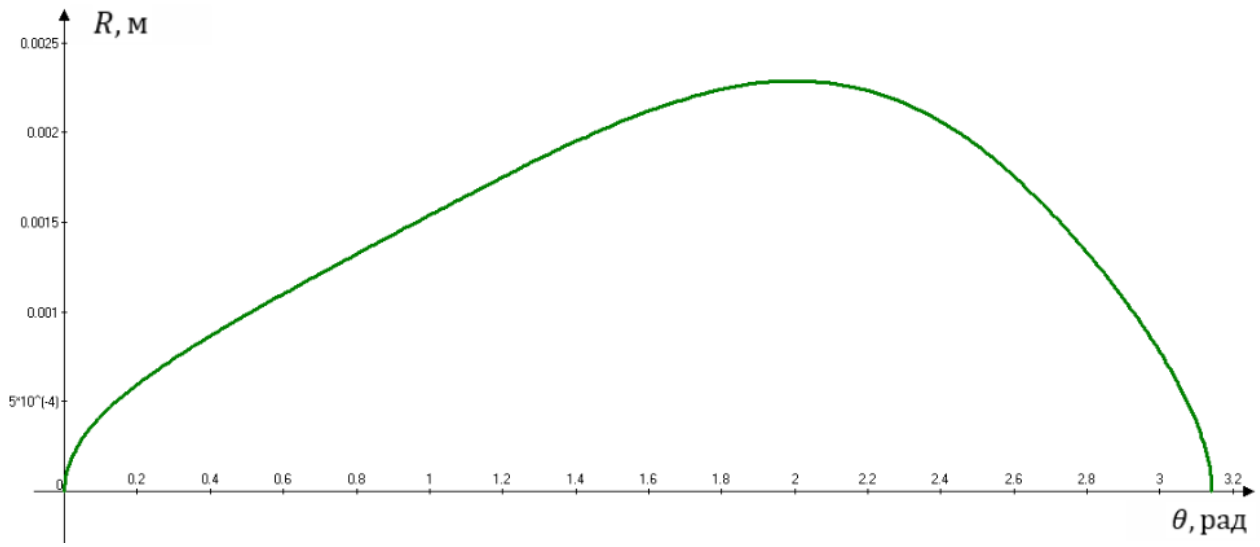
Остаточно, потрібна нам формула зв’язку радіуса спиці від кута θ отримується у вигляді:

$$2\sigma l * \sin(\theta) + 4\sigma R * \sin(\theta) + \rho_{\text{в}} g R^2 l\left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right)$$
$$+ 4\sqrt{\sigma\rho_{\text{в}} g} R l \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) - \pi R^2 l\rho_a g = 0.$$

Підставимо числа:

$$\sin(\theta)\,(1+10*R) + 70071.4R^2\left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right) + 748.7R\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin(\theta) - 594366.9R^2 = 0$$

Побудуємо графік залежності R від θ.



Бачимо, що дана залежність має максимум при значенні $\theta \approx 2$ ($\approx 114.6°$) та $R \approx 2.3$ мм. Інакше ці дані можна було отримати, якщо дане рівняння розв'язати як квадратне відносно R та підставляти значення θ з певним інтервалом виписуючи відповідні значення R. Тоді теж

можна отримати вірну відповідь, хоч і довше. Проте тоді не буде потрібна побудова графіка, а впоратись можна буде лише калькулятором.

Варто окремо зазначити, що не всім кутам θ на графіку вище можуть відповідати реально фізичні ситуації. Як це можна перевірити? Один із варіантів ми запропонуємо далі.

Отже, маса рівна $m = \pi R^2 l \rho_a \approx 9$ г.

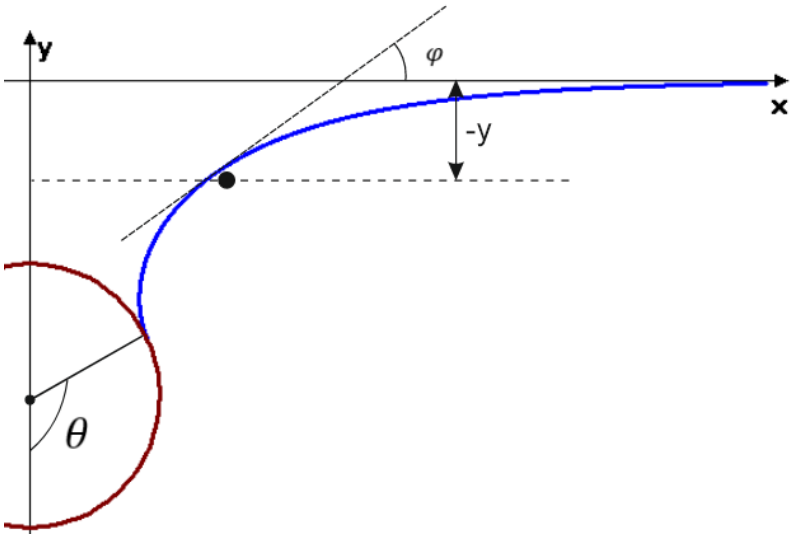
P.S. Корисною навичкою є також вміння виводити формулу кривої, що описує поверхню води.

Введемо вісі координат в нашій системі. Вісь x нехай іде вздовж горизонтальної лінії, що на відстанях далеких від спиці переходить у горизонтальну поверхню води. Вісь y спрямована вертикально. Нуль по обох осях знаходиться в точці перетину осей, таким чином нульовий рівень по y співпадає з далеким незбудженим рівнем води, і система симетрична по відношенню до інверсії осі x.

Розглянемо довільну точку одразу під викривленою поверхнею води. З одного боку тиск в цій точці це гідростатичний тиск $\rho_в g(-y)$, а з іншого боку це тиск Лапласа $\frac{\sigma}{r}$, де r – радіус кривизни поповерхні рідини в даній точці.

Радіус кривизни можна обраховувати мінімум двома способами:

1. $r = \frac{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}{y''}$. Тут y' та y'' - похідні від y по x. Цю формулу нескладно вивести, спробуйте!
2. $r = -\frac{ds}{d\varphi}$. Тут s – довжина лінії вздовж кривої, φ – кут нахилу дотичної до кривої. Легко зрозуміти звідки дана формула береться, адже довжина дуги рівна радіусу кривини даної дуги помножити на кут, що є градусною мірою дуги.



Скористаємось другим способом обрахунку радіуса кривизни.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{dy}{\sin(\varphi)} = \frac{dx}{cos(\varphi)}.$$

Рівність тисків: $\rho_в g y = \sigma \frac{d\varphi}{ds}$.

1) Знайдемо вираз для координати y.

$$d\varphi * \sin(\varphi) = \frac{\rho_в g}{\sigma} y dy.$$

Інтегруємо: $\int_0^{\varphi} d\varphi * \sin(\varphi) = \frac{\rho_в g}{\sigma} \int_0^{y} y dy.$

Звідси легко отримується, що

$$y = -2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_в g}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

Знак мінус необхідний, адже при зростанні y кут φ падає, як легко побачити з рисунку вище.

2) Знайдемо вираз для координати x.

$$d\varphi * \cos(\varphi) = \frac{\rho_в g}{\sigma} y dx = -2\frac{\rho_в g}{\sigma}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_в g}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) dx = -2\sqrt{\frac{\rho_в g}{\sigma}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) dx.$$

Інтегруємо від точки прикріплення води й спиці і до довільного кута φ:

$$\int_{\theta}^{\varphi} d\varphi \frac{\cos(\varphi)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = -2\sqrt{\frac{\rho_в g}{\sigma}} \int_{\mathrm{Rsin(\theta)}}^{\mathrm{x}} \mathrm{dx}.$$

$$\frac{\cos(\varphi)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} - 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

Результат інтегрування:

$$x = \mathrm{R} * \sin(\theta) - \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_в g}}\left(ln\left|\frac{tg\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| + 2\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right).$$

Отже, форма кривої поверхні води задається параметрично за допомогою системи рівнянь:

$$\begin{cases} x = \mathrm{R} * \sin(\theta) - \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_в g}}\left(ln\left|\frac{tg\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{tg\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| + 2\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right) \\ y = -2\sqrt{\frac{\sigma}{\rho_в g}} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{cases}$$

Всі вищенаведені на рисунках криві поверхні води побудовані саме за допомогою даної системи рівнянь.

(168) Скористаємося логістичною залежністю, поданою в умові задачі:

$$l(t) = \frac{l_{max}}{ae^{-\mu t}+1} \quad (1.1)$$

Для зручності подальшої обробки перетворимо рівняння 1.1 до лінійного виду. Почнемо з відношення $\frac{l(t)}{l_{max}}$ та виконаємо послідовні перетворення:

$$\frac{l(t)}{l_{max}} = \frac{1}{ae^{-\mu t}+1} \quad (1.2)$$

$$\ln\left(\frac{l_{max}}{l(t)} - 1\right) = ln(ae^{-\mu t}) \quad (1.3)$$

$$\ln\left(\frac{l_{max}}{l(t)} - 1\right) = -\mu t + \ln(a) \quad (1.4)$$

Приймаючи $l_{max} = 100$ см , обчислимо значення виразу з формули 1.4 для кожної експериментальної точки та запишемо таблицю у вигляді:

$\ln\left(\frac{l_{max}}{l(t)} - 1\right)$	4.6	2.75	1.66	0	-0.58	-1.27	-2.20	-2.94
День після посадки	5	13	22	31	35	38	44	64

Таблиця 1. Оброблені експериментальні дані.

Лінійно аппроксимуючи отримані дані методом найменших квадратів, приходимо до рівняння(див. 1.4):

$$\ln\left(\frac{l_{max}}{l(t)} - 1\right) = -0.13t + 4.47, \quad (1.5)$$

звідки μ = 0.13, ln(a) = 4.47. (1.6)

За умовою задачі коефіцієнт μ пов'язаний із середньою температурою сезону співвідношенням:

$$\mu \sim \frac{(T_{\text{сер}} - 10)(30 - T_{\text{сер}})}{100} \quad (1.7)$$

Уведемо коефіцієнт пропорційності α:

$$\mu = \alpha \cdot \frac{(T_{\text{сер}} - 10)(30 - T_{\text{сер}})}{100} \quad (1.8)$$

Для першого року підставляючи в 1.8 $T_0 = 20\,°C$ і відповідні значення з 1.6 отримуємо α = 0.13.

Переходимо до наступного року. За умовою задачі протягом 50 днів рослина досягла висоти 80 см. Підставивши ці дані у лінійне рівняння 1.4, одержуємо:

$$ln\left(\frac{l_{max}}{l} - 1\right) = -\mu' \cdot t + ln(a), \quad (1.9)$$

звідки μ' = 0.12.

Підставляючи μ' в температурну залежність 1.8, дістаємо квадратне рівняння:

$$T^2 - 40T + 392 = 0 \quad (1.10)$$

Його розв'язки:

$T_{\text{сер1}} \approx 17.2\,°C$ та $T_{\text{сер2}} \approx 22.8\,°C$.

Розглянемо обидва випадки.

1) $T_{\text{сер1}} = 17.2\,°C$.

Для кожного періоду визначимо максимальну температуру доби (за графіком із умови задачі),

а потім обчислимо максимальну температуру точки роси за формулою:

$$T_p = T_{max} - \frac{1 - RH}{0.05} \text{ (1.11)}$$

12-16	17-21	22-26	27-31	32-36	37-40	День
15.9	16.8	18.5	15.3	15.3	14.1	Максимальна $T_p, °C$

Таблиця 2. Максимальна $\boldsymbol{T_p}$ в різні дні.

Отримані значення T_p (див. Таблиця 2) залишаються значно нижчими за критичні 26 °C. Агроном може працювати весь період.

У випадку зливи у дні 12–16 відносна вологість наближається до 100 %, тому $T_p \approx T_{max}$, і хоча значення стають близькими до межових, умови все ще не перевищують критичні.

2) $T_{\text{сер2}} = 22.8\,°C$

Аналогічні обчислення (див. 1.11) показують, що при такій середній температурі весь період буде спекотнішим, а критичне значення точки роси 26 °C перевищується в інтервалі 22–26 день (див. Таблиця 3).

12-16	17-21	22-26	27-31	32-36	37-40	День
23.7	25.5	27.5	24.2	23.6	20.9	Максимальна $T_p, °C$

Таблиця 3. Максимальна $\boldsymbol{T_p}$ в різні дні.

Отже, агроном втрачає 5 робочих днів.

Якщо ж у дні 12–16 сталася злива (RH ≈ 100 %), то $T_p = T_{max}$ для цих днів, а всі значення перевищують 26 °C (див. Таблицю 4).

12	13	14	15	16	День
26.5	27.9	29.3	30.6	31.7	Максимальна $T_p, °C$

Таблиця 4. Максимальна $\boldsymbol{T_p}$ на 12-16 день.

Таким чином додається ще 5 днів простою, усього 10 днів.

(169) 1) Цей метод збагачення базується на процесі, що має назву ефузія, за якого окремі молекули проходять крізь маленькі отвори, розмір яких набагато менший за довжину вільного пробігу молекули. Завдяки тому, що гази з більш легкими молекулами мають більшу швидкість, вони за один той самий час у більший кількості проходять крізь пористу перешкоду.

Знайдемо яка кількість молекул проходить крізь мембрану за одне просіювання. Через мембрану проходять молекули, що встигають долетіти до мембрани, тому:

Так як гексофториди – гази, застосуємо міркування що приводять при отриманні Основного рівняння МКТ:

$$N = \frac{1}{2}N_{об} = \frac{1}{2}n * dS * v_x * dt$$

Так як рух хаотичний(рівномірний в усіх напрямках) $v = \sqrt{3}v_x$*, застосуємо за визначенням середню квадратичну швидкість руху молекули* $v = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$

Отримаємо, $\frac{N}{dS*dt} = \frac{const*N_0}{\sqrt{m}}$

2) Запишемо визначення для долі концентрації:

$$z = \frac{n_{235}}{n_{235} + n_{238}} = \frac{N_{235}}{N_{235} + N_{238}}$$

$$z_0 = \frac{N_{235_0}}{N_{235_0} + N_{238_0}}$$

За попереднім пунктом:

$N_{235} = \frac{const * N_{0_{235}}}{\sqrt{m_{235}}}$

$N_{238} = \frac{const * N_{0_{238}}}{\sqrt{m_{238}}}$

Підставивши у визначення долі концентрацій, знайдемо:

$$z = \frac{z_0}{z_0 + \sqrt{\frac{m_{235}}{m_{238}}}(1 - z_0)}$$

Так як $z_0 \ll 1$, можемо спростити дану формулу до наступного вигляду:

$$z = \sqrt{\frac{m_{238}}{m_{235}}}z_0$$

Тоді, бачимо геометричну прогрессію:

$$z_n = \left(\sqrt{\frac{m_{238}}{m_{235}}}\right)^n * z_0$$

Так як $\frac{z_n}{z_0} = 2$

$$2 = \left(\sqrt{\frac{m_{238}}{m_{235}}}\right)^n$$

$$n = \frac{\ln 2}{\ln\sqrt{\frac{m_{238}}{m_{235}}}} \approx 162$$

(170) Основна ідея розв'язку полягає в тому, що з рисунку ми можем взяти радіуси кривизни траєкторій частинок та кути розсіяння дочірніх частинок при розпадах.

Радіуси кривизни можна отримати як на рисунку внизу на прикладі побудови для протона за допомогою лінійки або графічних програм. Маючи радіус кривизни у відносних одиницях можна отримати його у метрах порівнявши із довжиною еталону на рисунку. Радіус кривизни дає нам імпульс частинки. Доведемо це.

За умовою швидкості частинок дуже великі, а отже ми не можемо ігнорувати релятивістські ефекти.

Другий закон Ньютона в імпульсній формі $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$.

При русі по колу значення імпульсу частинки не змінюється, а змінюється лише орієнтація: $|d\vec{p}|=p \times d\alpha$, де α - кут повороту.

Сила, що спрямована в центр кола – сила Лоренца.

Отже,

$F_{\text{л}} = qBV = p \times \frac{d\alpha}{dt} = p\omega$,

де $\omega = \frac{V}{R}$ – кутова швидкість обертання частинки.

Остаточно отримуємо:

$$R = \frac{p}{qB}.$$

З рисунку можна визначити, що радіуси приблизно дорівнюють:

1) Радіус першого пі-мезон π^-, що утворюється одразу після розпаду ксі-гіперону Ξ^-, і відповідний імпульс:

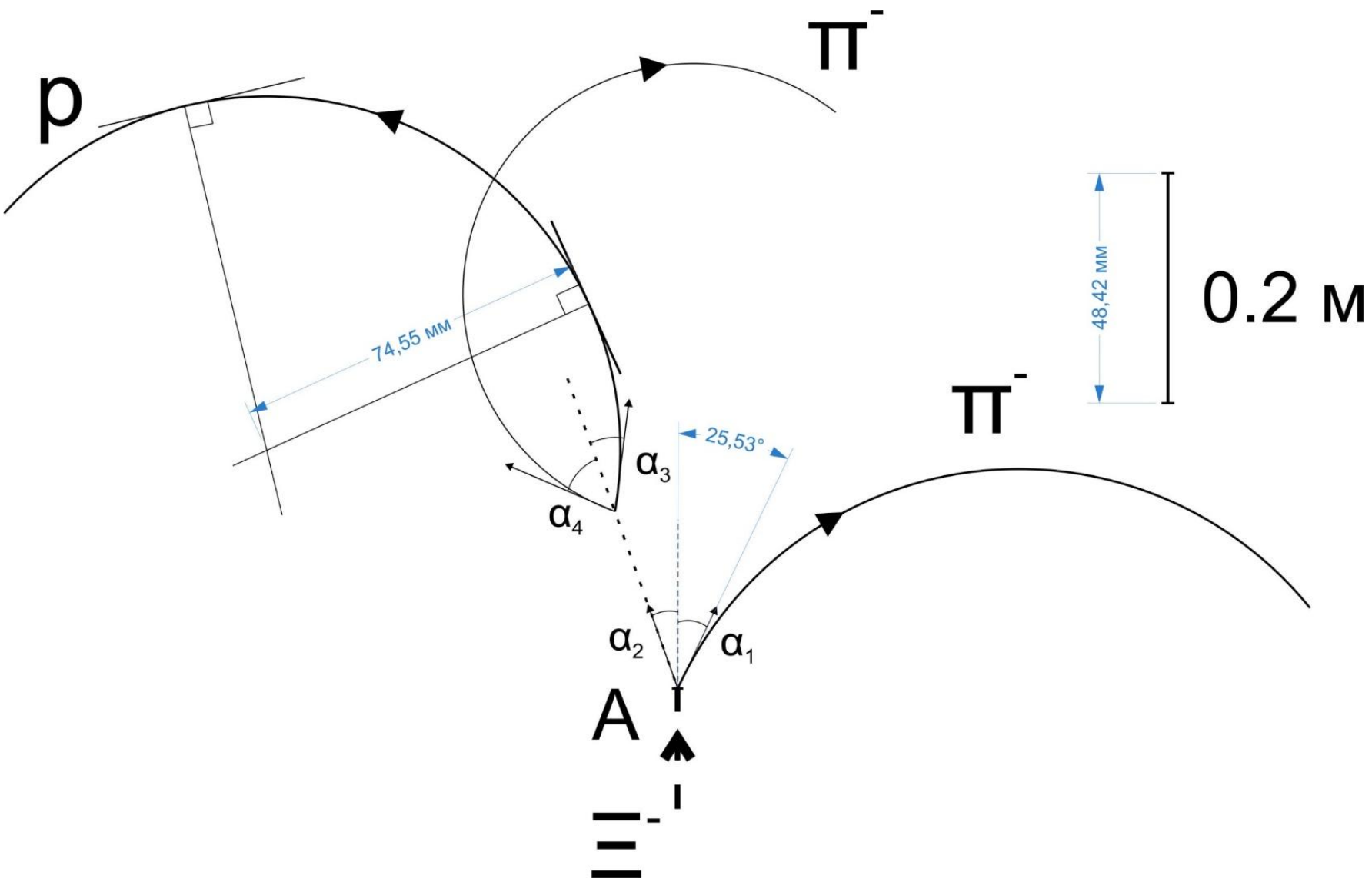
$$R_{1\pi^-} \approx 0.325 \text{ м}, \quad p_{1\pi^-} = 0.195 \text{ ГеВ}/c;$$

2) Радіус другого пі-мезону π^- й імпульс:

$$R_{2\pi^-} \approx 0.2 \text{ м}, \quad p_{2\pi^-} = 0.12 \text{ ГеВ}/c;$$

3) Радіус протона p й імпульс:

$$R_p \approx 0.31 \text{ м}, \quad p_p = 0.186 \text{ ГеВ}/c.$$


p
π-
74,55 мм
48,42 мм
0.2 м
π-
25,53°
α3
α4
α2
α1
A
Ξ-

Кути розльоту, які відмічені на рисунку, можна визначити, якщо провести дотичні в точках розпаду та виміряти кути транспортиром чи за допомогою графічних програм. Для знаходження кутів розльоту після розпаду лямбда-гіперону Λ^0 траєкторію лямбда-гіперону рисуємо поєднуючи точку розпаду ксі-гіперону Ξ^- та лямбда-гіперону Λ^0. Кути розльоти приблизно дорівнюють:

$$\alpha_1 \approx 25.5^0,\ \alpha_2 \approx 20^0,\ \alpha_3 \approx 30^0,\ \alpha_4 \approx 50^0.$$

Отже, знаходимо імпульс лямбда-гіперону Λ^0:

$$p_{\Lambda^0} = p_{2\pi^-}\cos(\alpha_4) + p_p\cos(\alpha_3) \approx 0.238\,\frac{\text{ГеВ}}{c}.$$

Тоді ксі-гіперону Ξ^-:

$$p_{\Xi^-} = p_{\Lambda^0}\cos(\alpha_2) + p_{1\pi^-}\cos(\alpha_1) \approx 0.4\ \frac{\text{ГеВ}}{c}.$$

Звідси, енергія ксі-гіперону Ξ^-:

$$E_{\Xi^-} = \sqrt{(p_{\Xi^-}c)^2 + (m_{\Xi^-}c^2)^2} \approx 1.38\ \text{ГеВ}.$$

(171) Рівняння синусоїди має вигляд $y = A\sin(kx)$. Якщо синусоїду зсунути вздовж осі абсцис на відстань vt, отримаємо рівняння хвилі, що рухається вправо зі швидкістю v:

$$y = A\sin(k(x - vt)) = A\sin(kx - \omega t),$$

де хвильове число $k = 2\pi/\lambda$, а циклічна частота $\omega = 2\pi/T$.

У деякий момент часу t тангенс кута нахилу поверхні води у точці з координатою x визначається похідною

$$\text{tg}\alpha = y'(x) = Ak\cos(kx - \omega t),$$

яка у точці падіння променя з води на поверхню повітря ($x = 0$) періодично змінюється

$$\text{tg}\alpha = Ak\cos(\omega t).$$

Кут α – це не тільки кут між горизонтом і поверхнею води, але й між вертикальним променем і перпендикуляром до поверхні, тобто, α і є кут падіння. З закону заломлення знаходимо кут заломлення γ:

$$\sin\gamma = n\sin\alpha.$$

Координата плями на стелі (висотою хвилі нехтуємо):

$$X = h\text{tg}(\gamma - \alpha).$$

Враховуючи малість кутів ($\sin\alpha \approx \alpha \approx \text{tg}\alpha$), отримуємо просту систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha = Ak\cos(\omega t), \\ \gamma = n\alpha, \\ X = h(\gamma - \alpha). \end{cases}$$

Звідки

$$X = h(n-1)Ak\cos(\omega t).$$

Для знаходження чисельних значень, скористаємося методом розмірності. За малих амплітуд і великої глибини швидкість поверхневої хвилі не залежить від них, а визначається довжиною хвилі, на що натякає й умова задачі. На неї впливають також фактори, що відповідають за існування самої поверхні та динаміці руху: прискорення вільного падіння і густина води. Єдина розмірна комбінація не залежить від густини і має вигляд:

$$v = C\sqrt{g\lambda}.$$

Безрозміну сталу легко визначити з додаткових умов задачі ($\lambda = 16$ м, $v = 5$ м/с). Якщо взяти $g = 9{,}81$ м/с^2, $C = 0{,}3991 \approx 0{,}4$. Справжнє значення цієї сталої $C = 1/\sqrt{2\pi} \approx 0{,}3989 \approx 0{,}4$. Значення сталої можна було і не визначати. Оскільки швидкість хвилі у басейні у 5 разів менша за 5 м/с, то довжина менша за 16 м у 25 разів, тобто дорівнює 64 см. І справді, амплітуда 2 см набагато менша за довжину хвилі. Тому наше наближення синусу і тангенсу кутами у радіанах досить точне. Період $T = \lambda/v = 0{,}64$ с, $\omega = 2\pi/T = 25\pi/8$ с$^{-1}$. У SI маємо гармонічні коливання лазерної плями по стелі з амплітудою приблизно 39 см і періодом 0,64 с:

$$X = h(n-1)Ak\cos(\omega t) = \frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{25\pi}{8}t\right).$$

(172) а) Позначимо $\vec{r}$ радіус-вектор, проведений від «зорі» до «планети». Виберемо початок координат O у місці розташування зорі, вісь Ox — вздовж початкового напряму нитки, вісь Oy проведемо горизонтально паралельно $\vec{v}_0$. З умови випливає, що рух «планети» відбувається під дією сили $\vec{F} = -k\vec{r}$. Отже, другий закон Ньютона набуває вигляду $m\vec{a} = -k\vec{r}$ або в проєкціях на осі координат $\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$, $\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$ (тут $\omega^2 = \frac{k}{m}$). Як бачимо, вздовж обох осей відбуваються гармонічні коливання. З урахуванням початкових умов можна записати:

$$x = r_0\cos\omega t, y = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t.$$

Отже, виконується рівняння $\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{v_0^2/\omega^2} = 1$, тобто рівняння еліпсу з півосями $r_0, \frac{v_0}{\omega}$. Можна сказати, що **перший закон Кеплера** «виконується», от тільки «зоря» розташована не в фокусі еліпсу, а в його центрі. **Другий закон Кеплера** (наслідок закону збереження моменту імпульсу) виконується безумовно (якщо радіус-вектор проведено від «зорі» до «планети»). А от **третій закон Кеплера** зазнає зміни: адже період обертання планети тепер збігається з періодом коливань відповідного пружинного маятника та не залежить від r_0, v_0. Цей період $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Легко записати, чому дорівнює відношення квадратів періодів для різних «планет».

б) Тепер траєкторія та закони руху складніші. Проте ми безумовно можемо скористатися законами збереження енергії та моменту імпульсу (адже сили пружності та Кулона напрямлені вздовж нитки та не змінюють моменту імпульсу «планети»). Для запису законів збереження доцільно розкласти швидкість на дві складові: $\vec{v} = \vec{v}_\varphi + \vec{v}_r$. Тут складова $\vec{v}_\varphi$ напрямлена в будь-який момент перпендикулярно до нитки та спричиняє її поворот, а $\vec{v}_r$ — напрямлена вздовж нитки на спричиняє зміну довжини нитки. Очевидно, що момент імпульсу $L = mrv_\varphi$, а екстремуми довжини нитки відповідають моментам, коли $v_r = 0, v_\varphi = v$. Для цих моментів

$$rv = r_0 v_0, -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{kr^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} + \frac{kr_0^2}{2} + \frac{mv_0^2}{2}.$$

Виключивши з цих рівнянь швидкість, отримаємо рівняння відносно довжини нитки:

$$(r - r_0)\left[r^3 + r^2 r_0 + \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 k r_0}r - \frac{mv_0^2}{k}r - \frac{mv_0^2}{k}r_0\right] = 0.$$

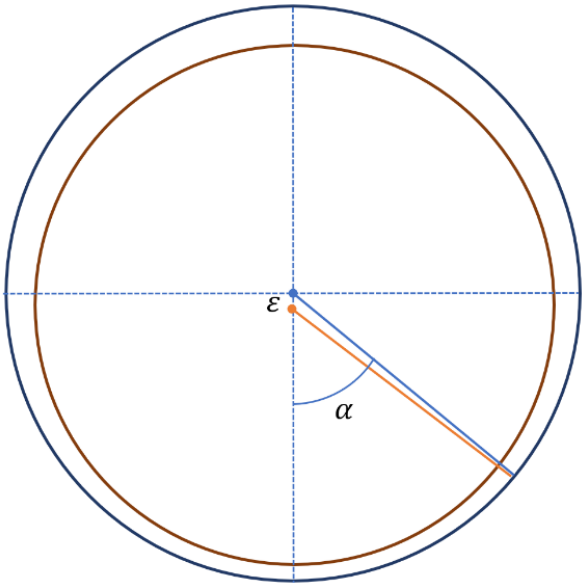
Очевидно, що значення $r = r_0$ є одним із екстремальних. За малих значень v_0 це максимальне значення, за великих — мінімальне. За умови

$$\frac{mv_0^2}{r_0} = kr_0 + \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} \qquad (*)$$

рух відбуватиметься по колу, значення r не змінюватиметься. Прирівнявши нулю вираз у квадратних дужках, отримаємо кубічне рівняння. Воно завжди має розв'язок. Аналізувати це рівняння не обов'язково (хоч можна досить легко отримати результати для дуже великих і дуже малих значень v_0).

в) Ця частина задачі не потребує розрахунків. Треба лише згадати, що сила Лоренца завжди перпендикулярна до швидкості руху зарядженої частинки. Кулонівська ж сила є центральною, вона напрямлена вздовж нитки. Тому в загальному випадку компенсація цих двох сил неможлива. Винятком є випадок, коли еліпс «вироджується» в коло. Розрахунки для цього випадку дуже прості: треба лише додати силу Лоренца з відповідним знаком до правої частини рівняння (*). Потрібне значення магнітної індукції в цьому випадку не залежатиме від часу.

(173) Розглянемо деформації пружин при навантаженні, коли коло внутрішнього обводу колеса зміщено вниз відносно кола зовнішнього обводу на деяку невелику величину ε. Відповідні радіуси обводів позначимо як r і R.



У напрямку під кутом α до вертикалі відносно центру великого обводу визначимо довжину пружини x як різницю довжин відстаней від точки її кріплення на великому обводі до центрів кіл (зміщення ε мале за умовою). Це можна зробити за допомогою теореми косинусів, але найпростіше з точністю до першого порядку малості з малого трикутника з вершинами у центрах кіл та гіпотенузою ε: $\varepsilon \cdot \cos\alpha = R - (r + x)$, або

$$x = R - r - \varepsilon \cdot \cos\alpha.$$

Формула працює для будь-яких α. У порівнянні з ненавантаженим випадком, коли довжини всіх пружин вважаємо, що були однакові $R - r$, тепер нижні ($\cos\alpha > 0$) мають меншу довжину, а верхні ($\cos\alpha < 0$) – більшу. Оскільки сила Гука лінійна за видовженням, можна рахувати, незважаючи на початковий стан пружин (недеформовані або розтягнуті), додаткову силу Гука як $k\varepsilon \cdot \cos\alpha$, а її вертикальну проекцію як

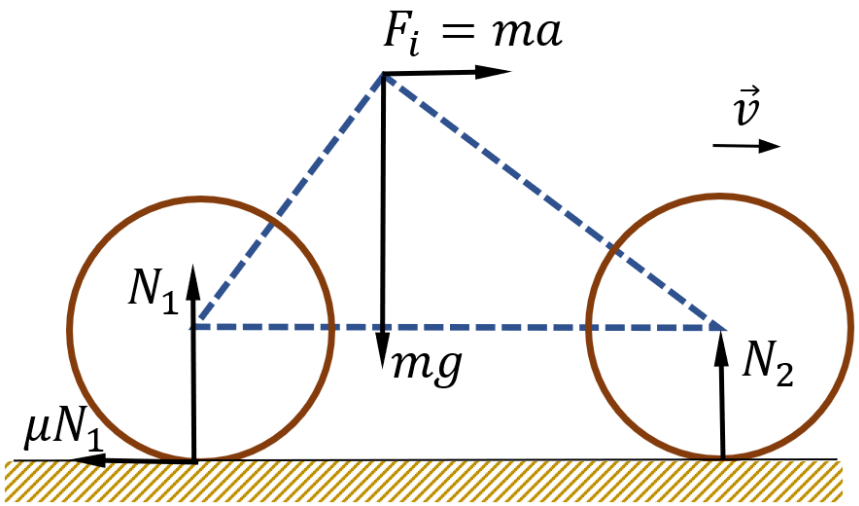
$$\Delta F_y = k\varepsilon \cdot \cos^2\alpha = \frac{1}{2}k\varepsilon(1 - \cos 2\alpha).$$

Кількість пружин N достатньо велика ($N = 50$ для колес з фото), і вони рівномірно розподілені вздовж колеса. Середнє значення $\cos 2\alpha$ за період дорівнює нулю. Тому загальна вертикальна сила

$$F_y = \frac{1}{2}Nk\varepsilon.$$

Отже, жорсткість колеса $\frac{1}{2}Nk = 25k$.

Якщо колеса велосипеду вважати однаковими, то вони просідатимуть по різному після того як на нього сяде людина, внаслідок того, що сидіння зсунуте вбік заднього колеса. Оскільки центр мас людини не може бути безпосередньо над одним з колес, вважаємо, що гіпотенуза трикутника 3:4:5 є відрізком довжиною $4R$.



Відносно неінерціальної системи відліку, що гальмує разом з велосипедом з прискоренням a, розглянемо умови статичної рівноваги (див. рис.).

$$\begin{cases} ma = \mu N_1, \\ mg = N_1 + N_2, \\ N_1 \cdot 4R + ma \cdot \frac{73}{25}R = mg \cdot \frac{64}{25}R. \end{cases}$$

Моменти сил в останньому рівнянні записані відносно точки дотику переднього колеса до дороги (точки прикладення сили N_2).

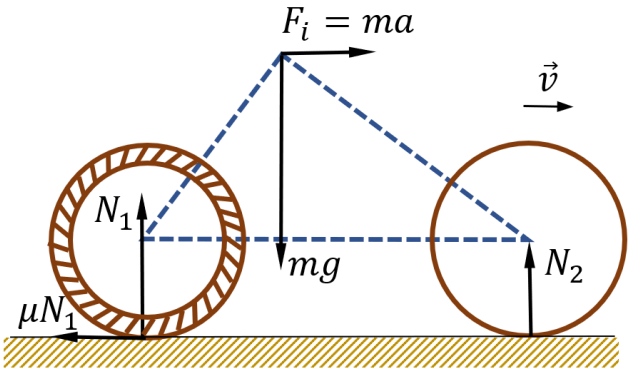
$$N_2 = mg \cdot \frac{36 + 73\mu}{100 + 73\mu}.$$

Висоту $\varepsilon_2 = N_2/(25k)$, на яку просіло колесо

1) для рівномірної їзди, можна отримати, підставивши $\mu = 0$ (гальмування відсутнє) в N_2: $\varepsilon_2 = \frac{9}{625}\frac{mg}{k}$.

2) коли людина екстремально гальмувала, зупинивши обертання заднього колеса, $\varepsilon_2 = \frac{36+73\mu}{100+73\mu}\frac{mg}{25k}$, що більше, ніж за рівномірної їзди.

Під час екстремального гальмування пружини на задньому колесі стануть нахиленими в один бік по відношенню до радіального напрямку, щоб компенсувати момент сил тертя на зовнішній обвід. Зовнішній обвід виявиться повернутим відносно внутрішнього (за годинниковою стрілкою на схематичному рис.).



(174) З умови плавання робимо висновок, що максимальна маса вантажу $m = m_{\text{пов}} - m_{\text{г}} - m_{\text{об}}$. Тут $m_{\text{пов}}, m_{\text{г}}, m_{\text{об}}$ — маси відповідно витісненого повітря на висоті $H = 1$ км, гелію всередині та оболонки.

Тиск повітря на висоті H:

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{M_{\text{пов}} g H}{RT}\right) \approx p_0\left(1 - \frac{M_{\text{пов}} g H}{RT}\right).$$

Ми скористалися тим, що $\gamma = \frac{M_{\text{пов}} g H}{RT} \ll 1$ за реальних температур.

Маси гелію та витісненого повітря $m_{\text{г}} = \frac{M_{\text{г}} p_{\text{г}} V}{RT}$, $m_{\text{пов}} = \frac{M_{\text{пов}} p V}{RT}$.

Максимальне значення m відповідає мінімальному значенню $m_{\text{г}} + m_{\text{об}}$. Мінімальна прийнятна товщина оболонки визначається максимальною *за модулем* різницею тисків всередині та ззовні (за умовою припустима механічна напруга однакова у випадках розтягу та стискання оболонки, хоч для реальних матеріалів це не так). Під час піднімання в ізотермічній атмосфері тиск гелію всередині не змінюється, а ззовні — зменшується від p_0 до p, тому різниця тисків Δp змінюється за модулем і може змінювати знак. Найбільший модуль Δp може відповідати нульовій або максимальній висоті.

Щоб визначити мінімально можливу товщину h металевої оболонки, подумки розріжемо її навпіл. Тоді половинки торкаються по площині кільця $2\pi r h$ (тут $r = 10$ м). Уявімо, наприклад, що тиск всередині перевищує зовнішній. Тоді на кожну половинку діє сила $\Delta p \cdot \pi r^2$, що намагається відірвати її від іншої. У оболонці виникає деформація розтягу, половинки утримує сила пружності, що дорівнює $\sigma \cdot 2\pi r h$. Прирівнявши дві останні сили, отримуємо $h = r\frac{\Delta p}{2\sigma}$. Відповідна маса оболонки $m_{\text{об}} = 2\pi\rho_{\text{об}} \cdot r^3 \frac{\Delta p}{\sigma}$.

Отже, (тут $V = 4\pi r^3/3$):

$$m = \frac{M_{\text{пов}} p V}{RT} - \frac{M_{\text{г}} p_{\text{г}} V}{RT} - \frac{3\rho_{\text{об}} V}{2\sigma} \max(p_0 - p_{\text{г}}, p_{\text{г}} - p).$$

Оскільки значення коефіцієнта $\frac{3\rho_{\text{об}}}{2\sigma}$ на два порядки більше за правдоподібні значення $\frac{M_{\text{г}}}{RT}$, достатньо забезпечити* мінімальне значення $\max(p_0 - p_{\text{г}}, p_{\text{г}} - p)$. Очевидно, верхню межу модуля різниці тисків не можна зробити меншою за

$$\Delta p = \frac{p_0 - p}{2} = p_0 \frac{M_{\text{пов}} g H}{2RT} = \frac{\gamma p_0}{2}.$$

Таке значення Δp досягається, коли тиск гелію

$$p_{\text{г}} = \frac{p_0 + p}{2} = p_0\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right).$$

До висоти 500 м оболонка зазнає деформації стискання, а далі — розтягу.

Підйом на потрібну висоту можливий за умови $m \geq 0$, звідки

$$T \geq T_{\min} = \frac{M_{\text{пов}} g H}{R} \cdot \frac{M_{\text{пов}} - \frac{M_{\text{г}}}{2}}{M_{\text{пов}}\left(1 - \frac{3\rho_{\text{об}} g H}{4\sigma}\right) - M_{\text{г}}} = 290 \text{ К}.$$

Може здатися дивним, що температура має бути достатньо *високою*: адже збільшення температури спричиняє зменшення густини повітря та архімедової сили. Проте в даному випадку важливо, щоб тиск повільніше *змінювався* з висотою, це дозволяє робити оболонку тоншою.

Тепер можемо написати рівняння для маси вантажу у вигляді:

$$\gamma^2\left(1 - \frac{M_{\text{г}}}{2M_{\text{пов}}}\right) - \gamma\left(1 - \frac{M_{\text{г}}}{M_{\text{пов}}} - \frac{3\rho_{\text{об}} g H}{4\sigma}\right) + \frac{mgH}{p_0 V} = 0.$$

Розв’язавши це квадратне рівняння, визначимо γ та відповідні температури: $\gamma_1 = 0{,}106, T_1 =$ 330 К, що відповідає 57 °С. Це вже не дуже реальне значення температури. Другий корінь квадратного рівняння ($\gamma_2 = 0{,}01455$), як легко переконатися, відповідає фантастично високій температурі (2400 К). На щастя, попри глобальне потепління, на Землі до такого ще дуже далеко.

Цей пункт можна пояснити докладніше. Припустимо, що винахідники спробували ще трохи «зекономити» на масі гелію, для чого зменшили тиск гелію на δp. Маса гелію відповідно **зменшиться на $\delta m_1 = \frac{M_г V}{RT}\delta p$. Але різниця тисків всередині та ззовні на початку піднімання **збільшиться** саме на δp, через це доведеться **збільшити** масу оболонки на $\delta m_2 = \frac{3\rho_{об} V}{2\sigma}\delta p$ (перевірте це самостійно). Отже, $\frac{\delta m_2}{\delta m_1} = \frac{3\rho_{об} RT}{2\sigma M_г}$. Легко переконатися, що коли температура перевищує хоча б кілька кельвінів (!), це відношення перевищує одиницю. Отже, «зекономити» не вийде — програш у масі перевищить виграш.*

(175) Пункт а.

Розглянемо векторну діаграму опорів. Ми гарантовано маємо два елементи – активний опір R і реактивний опір котушки X_L. Для того, щоб на резисторі - навантаженні виділялась максимальна потужність, необхідно, щоб через нього йшов максимально можливий струм, струм через резистор залежить від загального струму, що входить в чорну скриньку, тому необхідно мінімізувати загальний опір кола. Для цього необхідно, щоб реактивний опір скриньки компенсував реактивний опір відомого нам кола. Це можливо досягти, коли опір X_{R_0LC} буде антипаралельним до опору X_L і рівним за модулем. Отже $X_L = X_{R_0LC}$, $X_{R`L`C`} = X_{C`} - X_L$, найпростішим вибором буде звичайний конденсатор, для якого $X_{C`} = X_L$, отже $\frac{1}{\omega C`} = \omega L => C` = \frac{1}{\omega^2 L}$

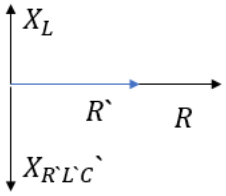
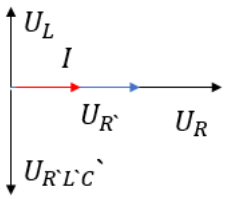


Рис.1. Векторна діаграма опорів. $R`$ – активний опір чорной скриньки, $X_{R`L`C`}$ – реактивний опір чорної скриньки.

Залишилося визначити напрям активного опору $R`$. Зрозуміло, що для того, щоб максимізувати силу струму через резистор – з’єднання RC повинно бути послідовним. Помножимо діаграму опорів на спільну силу струму I



На діаграмі видно, що така конфігурація для напряму активного опору єдина, бо тільки при ній струм в колі коректно випереджає напругу на конденсаторі.

Як результат маємо найпростішу схему в чорній скринці: послідовний RC ланцюг з

$$C` = \frac{1}{\omega^2 L}$$

Знайдемо тепер яким має буде опір резистора.

Потужність, що виділяється на резисторі $R`$ при $C` = \frac{1}{\omega^2 L}$ (явище резонансу):

$$P = \frac{I^2}{2} R` = \frac{U_0^2 R`}{2(R + R`)^2}$$

Дослідимо цей вираз на максимум за допомогою похідної.

$$P'_{R`} = \frac{U_0^2}{2} \frac{(R + R`)^2 - 2(R + R`)R`}{(R + R`)^4} = 0$$

Маємо:

$$R + R` - 2R` = 0$$

Звідси маємо екстремум $R`$

Візьмемо другу похідну $P''_{R`} = \frac{U_0^2}{2} \frac{-(R+R`)^3 - 3(R+R`)^2(R-R`)}{(R+R`)^6} = \frac{U_0^2}{2} \frac{-R-R`-3R+3R`}{(R+R`)^4} = \frac{U_0^2}{2} \frac{2R`-4R}{(R+R`)^4}$

$$P''_{R`}(R) = -\frac{U_0^2}{16R^3} < 0$$

Отже ми маємо справу з максимумом нашої функції.

Звідси $R` = R = 20\text{м}$

Тоді максимальна потужність $P = \frac{U_0^2 R}{2(R+R)^2} = \frac{U_0^2}{8R} = 25$ Вт

Пункт б.

Для початку розрахуємо опір реактивної ділянки.

Скористаємося методом векторних діаграм (дивись рисунок 1)

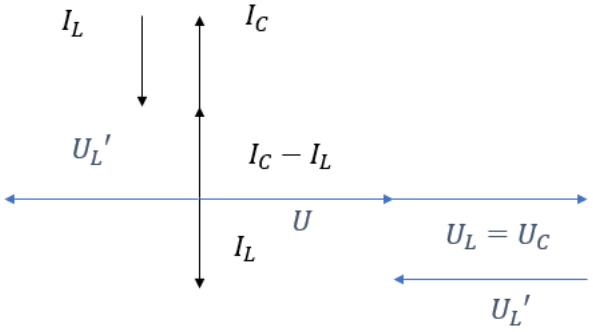


Рис.1 Векторна діаграма реактивного елементу

$U_L = U_c -$ амплітуди напруг на паралельно з′єднаних елементах. Сила струму на

котушці відстає від напруги на $\frac{\pi}{2}$, на конденсаторі випереджає на $\frac{\pi}{2}$. Результуюча сила струму є силою струму на окремій котушці – її випереджає напруга на котушці на $\frac{\pi}{2}$. U'_L – амплітуда напруга на окремій котушці, U – амплітуда сумарної напруги на окремій реактивній ділянці, I_c, I_L, I – амплітуди сили струму на на відповідних ділянках.

Як результат маємо систему рівнянь:

1) $U_L = U_c = I_L \omega L = \frac{I_c}{\omega C}$
2) $I_c - I_L = I$
3) $U_L - U'_L = U$
4) $U'_L = I\omega L$

з якої нескладно отримати реактивний опір $Z = \frac{U}{I} = \frac{(2-\omega^2 LC)\omega L}{\omega^2 LC - 1}$, який прямує до нескінченності при $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$. З цього робимо висновок, що через реактивну ділянку струм йти не буде і її можна просто відкинути з загального ланцюга. Аналогічно можна було скористатися методом комплексних амплітуд, розрахувати імпеданс кола (відношення амплітуди напруги до амплітуди струму, яке враховує за рахунок комплексного представлення і амплітудні, і фазові характеристики гармонійного сигналу).

$z_L = i\omega L,\ z_C = \frac{1}{i\omega C},\ i^2 = -1$

Тоді користуючись формулами послідовного і паралельного з'єднання легко отримати, що:

$$z_{\text{заг}} = \frac{i\omega L \frac{1}{i\omega C}}{i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} + i\omega L = \frac{i(2 - \omega^2 LC)}{\omega^2 LC - 1} -$$

модуль цього числа є реактивним опором, ідентичним до вже отриманого за допомогою метода векторних діаграм.

Отримаємо еквівалентну схему (див. рисунок 2)

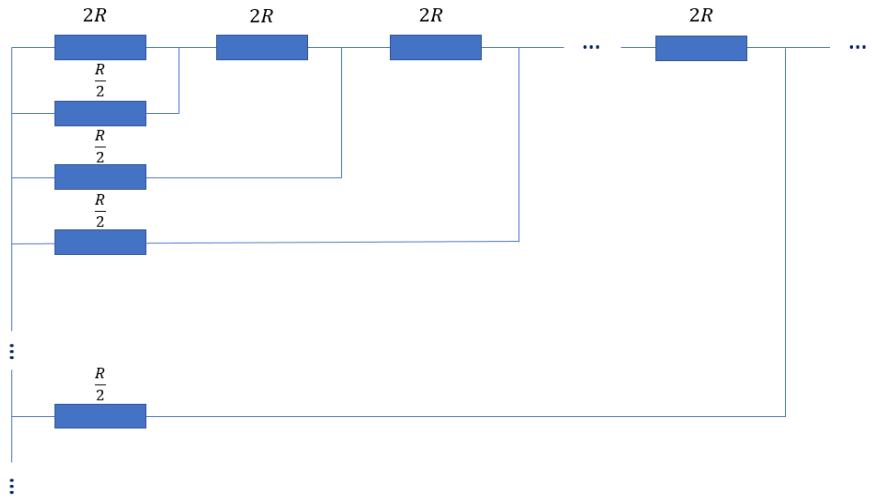


Рис.2 Еквівалентна схема

Нехай n-й елемент має опір $R_{\text{кола}}$, тоді від додавання $n+1$ елементу він майже не зміниться, якщо n – велике.

Маємо опір $\frac{1}{R_{\text{кола}}} = \frac{1}{R_{\text{кола}}+2R} + \frac{1}{\frac{R}{2}}$ з формул послідовного і паралельного з'єднань.

Після перетворень отримуємо наступне рівняння:

$$R_{\text{кола}}^2 + 2RR_{\text{кола}} - R^2 = 0$$

$$R_{\text{кола}} = -R \pm \sqrt{2}R, -\text{корінь фізичного змісту не має, тому } R_{\text{кола}} = R(\sqrt{2}-1)$$

$$\text{Звідси } P = \frac{U_{\text{діюче}}^2}{R_{\text{кола}}} = \frac{U_0^2}{2R_{\text{кола}}} = \frac{U_0^2}{2R\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

Пункт в.

Скористаємося методом векторних діаграм.

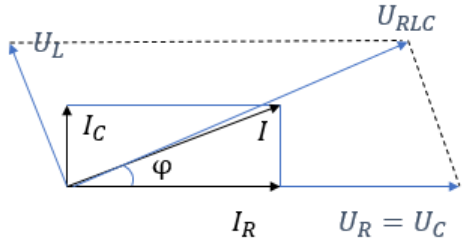


Рис.1 Векторна діаграма

$$I_R = \frac{U_R}{R}; I = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_R}{Z_{RC}} => U_R = U_0\frac{Z_{RC}}{Z}$$

$$U_{RLC}^2 = U_L^2 + U_{RC}^2 - 2U_{RC}U_L\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = U_L^2 + U_{RC}^2 - 2U_{RC}U_L\sin(\varphi)$$

$$U_{RLC} = IZ; U_{RC} = IZ_{RC}; U_L = IX_L$$

З трикутника струмів $I_C^2 + I_R^2 = I^2 = \frac{U_{RC}^2}{X_C^2} + \frac{U_{RC}^2}{R^2} = \frac{U_{RC}^2}{Z_{RC}^2} => Z_{RC} = \frac{X_C R}{\sqrt{X_C^2+R^2}}$;

$$\sin(\varphi) = \frac{I_C}{I} = \frac{Z_{RC}}{X_C}$$

$$Z^2 = X_L^2 + Z_{RC}^2 - \frac{2Z_{RC}X_LZ_{RC}}{X_C} = \omega^2L^2 + Z_{RC}^2(1-2\omega^2LC) = \frac{L}{C} - Z_{RC}^2$$

$$Z^2 = \frac{L}{C} - \frac{X_C^2R^2}{X_C^2+R^2} = \frac{L}{C} - \frac{R^2}{1+R^2\omega^2C^2} = \frac{L}{C}\frac{1}{1+\frac{R^2C}{L}}$$

$$Z_{RC} = \frac{R}{\sqrt{1+R^2\frac{C}{L}}}$$

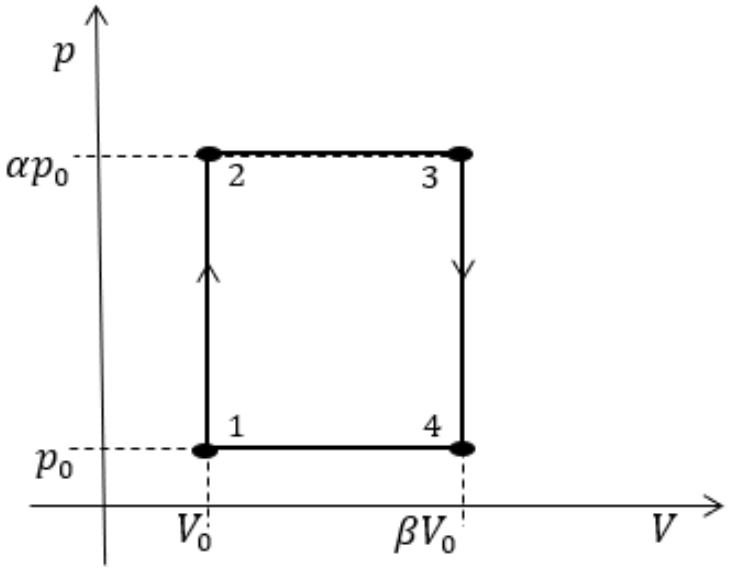
$$I_R = \frac{U_R}{R} = \frac{U_0}{R}\frac{Z_{RC}}{Z} = \frac{U_0}{R}\frac{\frac{R}{\sqrt{1+R^2\frac{C}{L}}}}{\sqrt{\frac{\frac{L}{C}}{1+\frac{R^2C}{L}}}} = U_0\sqrt{\frac{C}{L}} \neq f(R)$$

$$P = \frac{I_R^2}{2}R = \frac{U_0 C}{2L}R$$

Як бачимо, сила струму, що йде через резистор, не залежить від опору цього резистора. Така схема використовується у техніці як стабілізатор струму.

(176) 1.Розглянемо цикл, що складається з двох ізохор та двох ізобар.

Нехай $p_{\text{кінцеве}} = \alpha p_0,\ V_{\text{кінцеве}} = \beta V_0$, де α та β – числові коефіцієнти ($\alpha > 1, \beta > 1$). Запишемо вираз для ККД даного циклу та дослідимо його на максимальне значення.



$$\begin{cases} \eta = \dfrac{A}{Q_{\text{підведене}}} \\ A = p_0V_0(\alpha-1)(\beta-1) \\ Q_{\text{підведене}} = A_{13} + \Delta U_{13} \\ A_{13} = \alpha p_0 V_0(\beta-1) \\ \Delta U_{13} = \dfrac{i}{2}(\alpha p_0 * \beta V_0 - p_0V_0) = \dfrac{3}{2}p_0V_0(\alpha\beta-1) \end{cases}$$

Розв’язуючи систему рівнянь, отримаємо

$$\eta = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\frac{5}{2}\alpha\beta-\alpha+\frac{3}{2}}$$

Маємо декілька способів дослідження цієї функції. Можемо знайти повний диференціал або дослідити функцію іншим чином:

$$\eta = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\frac{5}{2}\alpha\beta-\alpha+\frac{3}{2}} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\frac{5}{2}\alpha\beta+(\frac{3}{2}\alpha-\frac{5}{2}\alpha)+\frac{3}{2}} = \frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\frac{5}{2}\alpha(\beta-1)+\frac{3}{2}(\alpha+1)} = \frac{1}{\frac{5}{2(1-\frac{1}{\alpha})}+\frac{\frac{3}{2}(\alpha+1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}}$$

Тоді $\frac{5}{2(1-\frac{1}{\alpha})} + \frac{\frac{3}{2}(\alpha+1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \to \min$,

так як $\alpha > 1$ та $\beta > 1$, то $\frac{5}{2(1-\frac{1}{\alpha})} + \frac{\frac{3}{2}(\alpha+1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \to \min$,

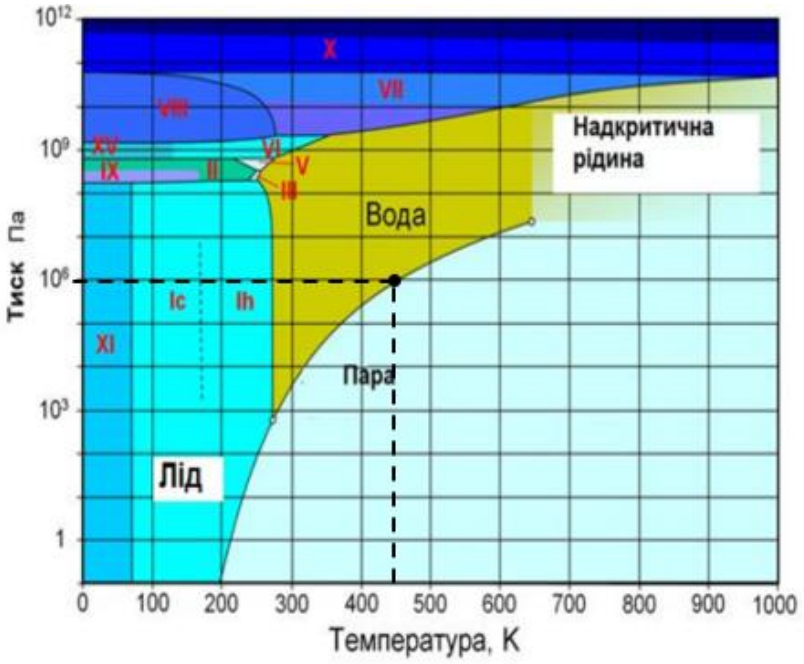
при $\frac{5}{2(1-\frac{1}{\alpha})} \to \min$, та $\frac{\frac{3}{2}(\alpha+1)}{(\alpha-1)(\beta-1)} \to \min$.

З цього маємо, що $\alpha \to \infty$ та $\beta \to \infty$, а $\eta_{\text{макс}} = 0.4$

2. Запишемо ККД для ідеальної теплової машини Карно $\eta = \frac{T_н - T_х}{T_н}$.

За умовою $T_х = -3°C = 270\ K$.

Тоді $\eta = \eta_{\text{макс}} \Rightarrow \frac{T_х}{1-\eta_{\text{макс}}} = T_н = 450\ K$.



3. Так як за умовою нагрівач – кипляча вода, користуючись наведеною в умові діаграмою, знайдемо точку на графіку, на межі вода-пар з температурою $T_н = 450\ K$ та наведемо значення тиску.

$$p = 10^6 \text{ Па}$$

(177) Позначимо початкову масу зорі $2M$, а масу планети m. На планету весь час діє сила тяжіння з боку сферично симетричної системи. Отже, поки газова оболонка розташована ближче до зорі, ніж планета, маса оболонки «додається» до маси зорі; тому тяжіння відразу після вибуху не змінюється. Газова оболонка не створює тяжіння всередині; отже, коли планета опиниться всередині цієї оболонки, вона відчуватиме лише тяжіння «залишку» зорі масою M. Інакше кажучи, в момент «зустрічі» планети з газовою оболонкою відбувається практично миттєве зменшення сили тяжіння вдвічі. Строго кажучи, «зовнішня» сферична оболонка впливає на потенціальну енергію планети, але ж не впливає на її рух. Тому ми просто ігноруватимемо вплив «зовнішньої» оболонки на потенціальну енергію.

а) Під час руху коловою орбітою швидкість планети становила

$$v_0 = \sqrt{G\frac{2M}{R}}.$$

Ця швидкість не зміниться відразу після зустрічі з газовою оболонкою. Тому повна механічна енергія планети після цього

$$W = W_p + W_k = -G\frac{Mm}{R} + \frac{mv_0^2}{2} = 0.$$

Отже, планета переходить на незамкнену (параболічну) траєкторію.

б) Визначимо велику піввісь a_0 початкової орбіти планети:
$2a_0 = R + R/2$, звідки $a_0 = 3R/4$. Початкова механічна енергія планети становить

$$W_0 = W_{0p} + W_{0k} = -G\frac{2M\cdot m}{R} + \frac{mv_0^2}{2}.$$

Зрозуміло, що значення v_0 тепер менше, ніж у пункті a. Щоб знайти це значення, скористаємося зв'язком між механічною енергією тіла на еліптичній орбіті в центральному полі тяжіння та великою піввіссю орбіти:

$$W_0 = -G\frac{2M\cdot m}{2a_0}.$$

Звідси $v_0 = 2\sqrt{G\frac{M}{3R}}$.

Після зустрічі з газовою оболонкою параметри орбіти змінюються. Нове «ефективне» (без урахування впливу газової оболонки) значення механічної енергії планети:

$$W = -G\frac{Mm}{R} + \frac{mv_0^2}{2} = -G\frac{Mm}{3R}.$$

Енергія від'ємна, отже, нова орбіта теж еліптична, а рух є періодичним. Скориставшись співвідношенням $W = -G\frac{M\cdot m}{2a}$, визначимо піввісь нової еліптичної орбіти: $a = 3R/2$. Оскільки швидкість $\vec{v}_0$ перпендикулярна радіус-вектору від зорі до планети в момент зустрічі, точка зустрічі належить великій осі нової орбіти.

Інша точка перетину орбіти в великою віссю лежить на відстані $2a - R = 2R$ від зорі. Отже, найвіддаленіша від зорі точка орбіти перетворилася на найближчу.

Щоб визначити малу піввісь b орбіти (див. рисунок), скористаємося тим, що сума відстаней кожної точки еліпсу до двох його фокусів дорівнює $2a$,

тобто $MF_1 = MF_2 = a$ (зоря розташована, наприклад, у фокусі F_1).

Очевидно, $c = a - R = R/2$, тоді мала піввісь згідно теореми Піфагора

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2}R.$$

Як бачимо, наш еліпс не дуже сильно відрізняється від кола ($b \approx 0{,}94a$).

Тривалість року (тобто період обертання планети навколо зорі) залежить тільки від півосі еліптичної орбіти. Тому подумки замінимо еліптичну орбіту на колову з радіусом $a = 3R/2$.

Швидкість руху планети буде $v = \sqrt{G\frac{M}{a}}$, тоді період обертання

$$T = \frac{2\pi a}{v} = 2\pi a\sqrt{\frac{a}{GM}} = 3\pi R\sqrt{\frac{3R}{2GM}}.$$

(178) Прикладена напруга буде ділитися між лампочкою та транзистором, тобто

$$U_0 = U_Л + U_{КЕ} \qquad (1)$$

Напруга на лампі за законом Ома дорівнюватиме:

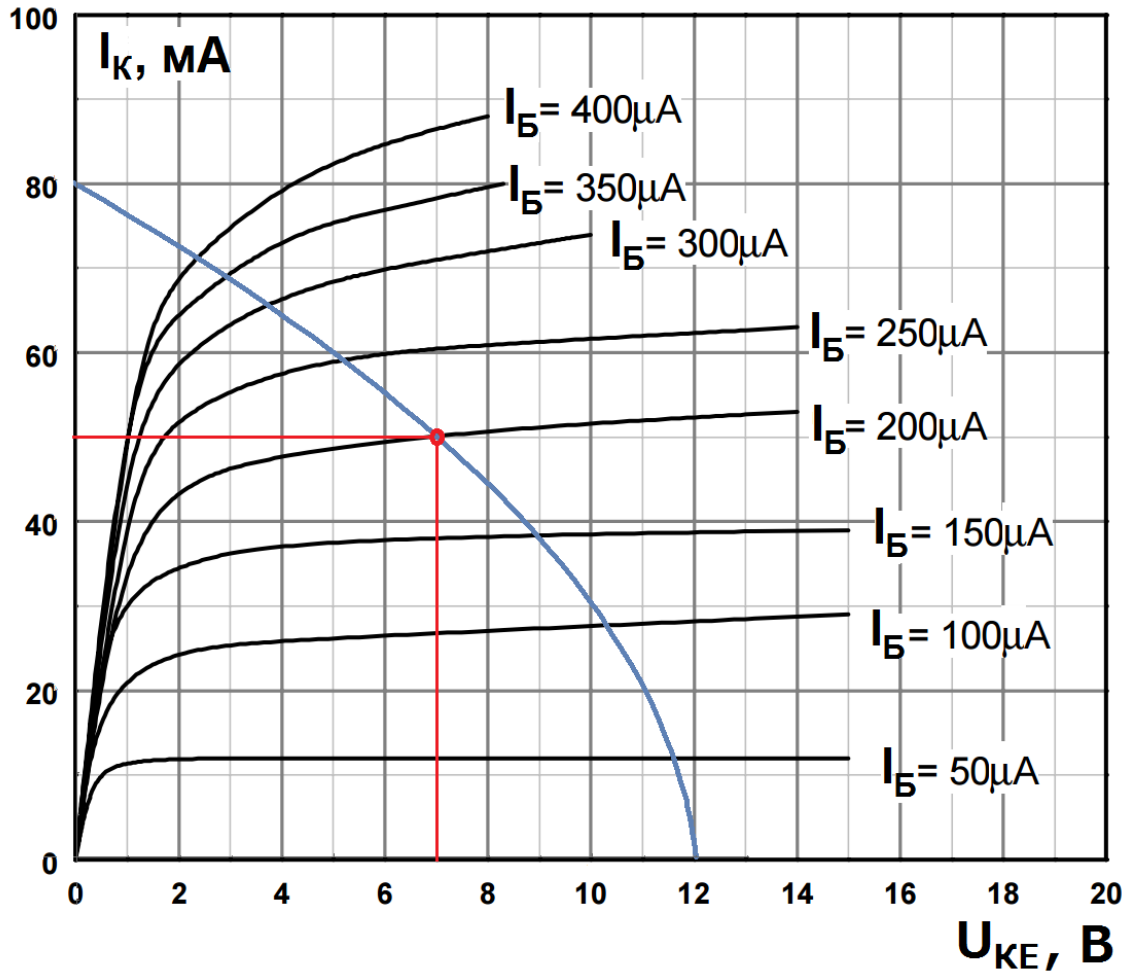
$$U_Л = I_К \cdot R_Л = I_К \cdot R_0(1+\alpha \cdot I_К) = R_0 \cdot I_К + \alpha \cdot R_0 \cdot I_К^2 \qquad (2)$$

Підставивши (1) в (2), отримаємо

$$U_{КЕ} = U_0 - R_0 \cdot I_К - \alpha \cdot R_0 \cdot I_К^2 \qquad (3)$$

Графік даної функції $U_{КЕ}(I_К)$ можна зобразити у тому самому масштабі, що й характеристики транзистора (див. Рис.). Цей графік слід будувати по точках для більшої точності. Очевидно, будуть реалізуватися значення струму $I_К$ та напруги $U_{КЕ}$, що належатимуть як цьому графіку, так і гілці характеристики транзистора, що відповідає значенню струму бази, для якого $U_0 = I_Б \cdot R$, тобто

$$I_Б = \frac{U_0}{R} = 200 мкА$$

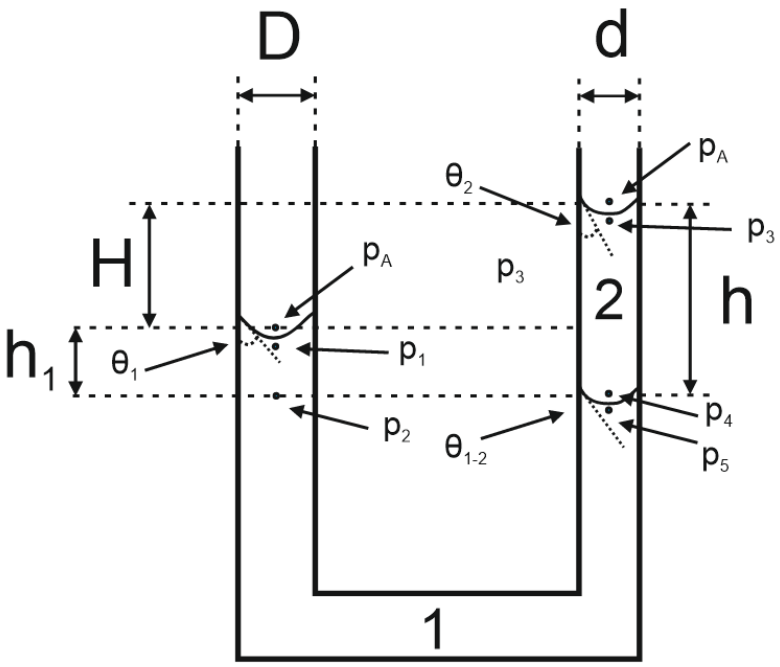


Таким чином, з побудови виходить, що $U_{КЕ} = 7В, \quad I_К = 50мА$.

Споживану потужність можна, очевидно, знайти за формулою:

$$P = U_0 \cdot (I_К + I_Б) \approx 12 \cdot 0.05 = 0.6 Вт$$

(179) Будемо для визначеності вважати, що всі меніски поверхонь рідин є вигнутими вниз, як на рисунку.



З теорії поверхневого натягу відомо, що на межі поділу між будь-якими двома середовищами неодмінно виникає сила натягу, яка спрямована вздовж межі поділу та намагається скоротити площу контакту цих середовищ. З умови рівноваги речовини на межі поділу трьох середовищ (дивіться докладніше в літературі) маємо такі зв'язки між коефіцієнтами натягу та кутами змочування:

А) Для межі поділу повітря, скла та рідини 1:

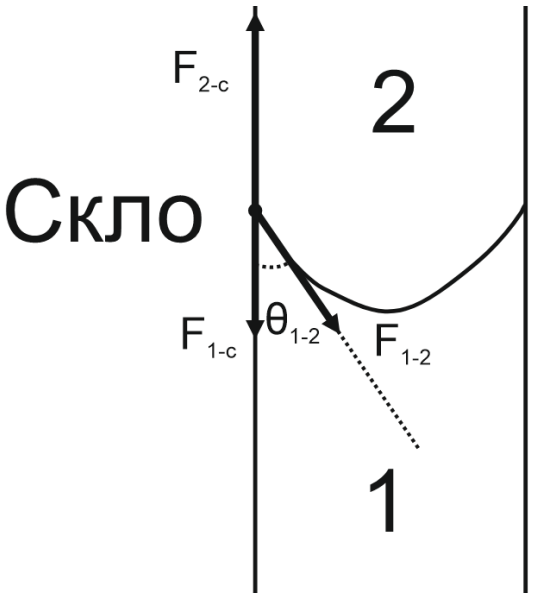
$$\sigma_{1-с} + \sigma_{1-п} \times \cos(\theta_1) = \sigma_{п-с}. \quad (1)$$

Б) Для межі поділу повітря, скла та рідини 2:

$$\sigma_{2-с} + \sigma_{2-п} \times \cos(\theta_2) = \sigma_{п-с}. \quad (2)$$

В) Для межі поділу скла, речовини 1 та рідини 2:

$$\sigma_{1-с} + \sigma_{1-2} \times \cos(\theta_{1-2}) = \sigma_{2-с}. \quad (3)$$



Вивести ці співвідношення доволі просто, якщо записати на вісь вздовж скла умову рівноваги маленького контуру на межі поділу трьох середовищ. Як приклад, на рисунку знизу зображений випадок для межі поділу скла, рідини 1 та рідини 2 із зображеними силами натягу.

А) Розв'яжемо задачу методом тисків.

Тиск над обидвома поверхнями рідин в повітрі дорівнює атмосферному.

Тиск під викривленою поверхнею рідини 1 в лівому коліні з визначення лапласівського тиску:

$$p_1 = p_A - \frac{4\sigma_{1-п}\cos(\theta_1)}{D}.$$

Із зануренням в рідину 1 тиск збільшується через гідростатичний доданок:

$$p_2 = p_1 + \rho_1 g h_1 = p_A - \frac{4\sigma_{1-п}\cos(\theta_1)}{D} + \rho_1 g h_1. \quad (4)$$

Тиск під верхньою викривленою поверхнею рідини 2 в правому коліні з визначення лапласівського тиску:

$$p_3 = p_A - \frac{4\sigma_{2-\text{п}}\cos(\theta_2)}{d}.$$

Із зануренням в рідину 2 тиск збільшується через гідростатичний доданок:

$$p_4 = p_3 + \rho_2 gh = p_A - \frac{4\sigma_{2-\text{п}}\cos(\theta_2)}{d} + \rho_2 gh.$$

Тиск під викривленою границею рідин 1 та 2 з визначення лапласівського тиску:

$$p_5 = p_4 - \frac{4\sigma_{1-2}\cos(\theta_{1-2})}{d} = p_A - \frac{4\sigma_{2-\text{п}}\cos(\theta_2)}{d} + \rho_2 gh - \frac{4\sigma_{1-2}\cos(\theta_{1-2})}{d} \quad (5)$$

Тиски p_2 та p_5 знаходяться в одній рідині на одному рівні, а отже мають бути рівними. Звідси:

$$p_A - \frac{4\sigma_{1-\text{п}}\cos(\theta_1)}{D} + \rho_1 g h_1 = p_A - \frac{4\sigma_{2-\text{п}}\cos(\theta_2)}{d} + \rho_2 gh - \frac{4\sigma_{1-2}\cos(\theta_{1-2})}{d}$$

Різниця висот верхніх поверхонь рідини 2 та 1 в другому та першому колінах:

$$H = h - h_1 = h\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{4}{\rho_1 g}\left(\frac{\sigma_{1-\text{п}}\cos(\theta_1)}{D} - \frac{\sigma_{2-\text{п}}\cos(\theta_2) + \sigma_{1-2}\cos(\theta_{1-2})}{d}\right) \quad (6)$$

Остаточно ми можемо сказати, що отримали відповідь на питання задачі коли підставимо в рівняння (6) зв'язки між коефіцієнтами натягу та кутами змочування (1), (2) та (3):

$$H = h\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_1}\right) - \frac{4}{\rho_1 g}\left(\frac{\sigma_{\text{п}-\text{с}} - \sigma_{1-\text{с}}}{D} - \frac{\sigma_{\text{п}-\text{с}} - \sigma_{1-\text{с}}}{d}\right). \quad (7)$$

Б) Розв'яжемо задачу енергетичним методом.

Основна ідея цього методу (метод віртуальних переміщень) полягає в тому, що сума робіт всіх сил, що діють на систему в рівновазі, при малому віртуальному переміщенні системи від положення рівноваги має дорівнювати нулю.

Уявно опустимо вниз ліву поверхню рідини 1 на δl зберігаючи форми всіх менісків. В такому випадку рідини в правому коліні піднімуться на δl_1.

Знайдемо зв'язок між δl_1 та δl з умови збереження об'єму рідин:

$$\frac{\pi D^2}{4}\delta l = \frac{\pi d^2}{4}\delta l_1.$$

Звідси,

$$\delta l = \delta l_1 \frac{d^2}{D^2} \quad (8)$$

Пригадаємо, що енергія поверхні визначається через коефіцієнт поверхневого натягу цієї поверхні між двома речовинами як $W = \sigma S$.

Тоді, при малому зміщенні вниз лівої поверхні рідини 1 площа поверхні між склом та повітрям стає більшою, енергія цієї поверхні збільшується, значить поверхневі сили на цій границі роблять від'ємну роботу, а площа поверхні між рідиною 1 та склом зменшується, значить енергія цієї поверхні зменшується, що означає, що поверхневі сили на цій границі роблять додатну роботу. Площа поверхні між рідиною 1 та повітрям не змінюється, адже форма менісків лишається сталою. Аналогічний аналіз можна провести й для правих менісків.

Отже, малі віртуальні роботи сил натягу при такому зміщенні нашої системи дорівнюють:

А) Робота від збільшення площі границі повітря-скло в лівому коліні $\delta A_{\text{п}-\text{с л}} = -\sigma_{\text{п}-\text{с}}\pi D\delta l$

Б) Робота від зменшення площі границі рідина 1-скло в лівому коліні $\delta A_{1-\text{с л}} = \sigma_{1-\text{с}}\pi D\delta l$

В) Робота від зменшення площі границі повітря-скло в правому коліні $\delta A_{\text{п}-\text{с п}} = \sigma_{\text{п}-\text{с}}\pi d\delta l_1$

Г) Робота від зміни площі контакту рідини 2 із склом нема, адже ця площа не змінюється

Д) Робота від збільшення площі границі рідини 2-скло в правому коліні $\delta A_{1-\text{с п}} = -\sigma_{1-\text{с}}\pi d\delta l_1$

Також при такому віртуальному зміщенні в системі працює сила тяжіння. По факту, прошарок рідини 1 товщини δl зміщується вниз на висоту h_1, тобто сила тяжіння здійснює роботу:

$$\delta A_{mg1} = \frac{\pi D^2}{4}\delta l\rho_1 h_1 g.$$

В той же час прошарок рідини 2 товщини δl_1 підіймається вверх на висоту h, тобто сила тяжіння здійснює роботу:

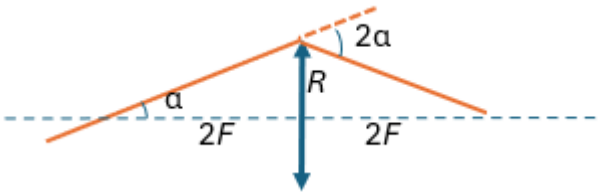
$$\delta A_{mg2} = -\frac{\pi d^2}{4}\delta l_1\rho_2 hg.$$

Сума всіх вищенаведених віртуальних робіт має дорівнювати нулю, якщо система знаходиться в рівновазі.

$$\sum \delta A_i = 0$$

Тоді, підсумовуючи всі віртуальні роботи, прирівнюючи їх до нуля та враховуючи рівняння (8) отримаємо таку саму відповідь, як і в попередньому пункті (рівняння (7)).

(180) Найменша кількість лінз буде у випадку, коли кожна відхилятиме промінь на найбільший кут. Оскільки відстань від лінзи до предмету і до зображення однакові у випадку подвійного фокуса, саме це відповідатиме умові задачі. Знайдемо на який кут відхиляється промінь. Зазначимо, що всі промені від розташованої у подвійному фокусі світної точки після лінзи сходяться в іншому подвійному фокусі, тому набільший кут відхилення буде для крайніх променів, що проходять через края лінзи.



Отже, кожна лінза повертатиме промінь на кут 2α (див. рис.), де $\alpha = arctg(R/2F) = arctg(RD/2) = arctg(0{,}01) \approx RD/2 = 0{,}01$ радіан.

Тоді кількість кутів 2α, що вкладаються у повний оберт 2π радіан: $\pi/\alpha = \pi/arctg(RD/2) \approx 314{,}16$. Можна було скористатися і наближеним виразом:

$\pi/\alpha \approx 2\pi/RD = 100\pi \approx 314{,}17.$

У будь-якому випадку 314 лінз не вистачає. Треба взяти 315.

Оскільки при кожному проходженні втрачається 2% енергії, залишається 0,98. Отже, після проходження через 315 лінз залишиться $0{,}98^{315}$ ≈0,0017 частина від початкової енергії променю, або вона зменшиться в $0{,}98^{-315} \approx 580$ разів.

Промінь заломлюється на границі середовищ. Якщо замість повітря (за замовчуванням) взяти воду, показник заломлення якої в 1,33 більший, то й у стільки ж разів слід збільшити показник заломлення 1,5 матеріалу лінз, щоб кути всіх заломлень залишилися незмінними $\left(\frac{sin\alpha}{sin\gamma} = \frac{n_2}{n_1}\right)$.

$\tilde{n} = 1{,}33 \cdot 1{,}5 = 1{,}995 \approx 2.$

(181) Між віссю та ободом металевого диску при його обертанні виникне електрорушійна сила (ЕРС), пов'язана із роботою сили інерції при переміщенні нею заряджених частинок (електронів). Дана сила інерції виникає внаслідок доцентрового прискорення при обертанні диску. На віддалі x від осі ця сила інерції дорівнюватиме:

$$F_i(x) = m\omega^2 x \qquad (1)$$

Де m – маса електрона. Робота цієї сили інерції при переміщенні електрона від осі до ободу дорівнюватиме:

$$A = \int_0^R F_i(x)dx = \int_0^R m\omega^2 x dx = m\omega^2 \int_0^R x dx = m\omega^2 \frac{R^2}{2} \quad . \qquad (2)$$

Електрорушійну силу (у вольтах) можна отримати, розділивши цю роботу на заряд електрона. Ця ЕРС, власне, буде дорівнювати напрузі U з умови задачі:

$$U = \frac{A}{e} = \frac{m\omega^2 R^2}{2e}. \qquad (3)$$

На двигун подаватиметься напруга:

$$U_д = U_0 - \beta U = U_0 - \beta \frac{m\omega^2 R^2}{2e}. \qquad (4)$$

В той же час, за умовою кутова швидкість визначається напругою $\alpha U_д$:

$$\omega = \alpha U_д \qquad (5)$$

Підставивиши (4) у (5), отримуємо

$$\omega = \alpha U_д = \alpha\left(U_0 - \beta \frac{m\omega^2 R^2}{2e}\right) \qquad (6)$$

(6) являє собою квадратне рівняння, яке можна переписати у стандартному вигляді:

$$\frac{\alpha\beta mR^2}{2e}\omega^2+\omega-\alpha U_0=0, \qquad (7)$$

і з якого можна знайти кутову швидкість:

$$\omega=\frac{e}{\alpha\beta mR^2}\left(-1\pm\sqrt{1+\frac{2\alpha^2\beta mR^2U_0}{e}}\right) \qquad (8)$$

Оскільки кутова швидкість має бути додатною, у (8) слід залишити лише знак «+». Знаючи кутову швидкість, з (3) можна визначити значення ЕРС U:

$$U=\frac{m\omega^2R^2}{2e}.$$

Підставимо усі числові значення. Для кутової швидкості отримуємо:

$$\omega\approx 444\,\frac{рад}{с},$$

що складає приблизно 4200 обертів на хвилину. Електрорушійна сила U при цьому складатиме:

$$U\approx 5.6\cdot\ 10^{-9}\,В=5.6нВ.$$

Таким чином, ЕРС, яка виробляється подібним генератором, є вкрай малою навіть при досить великій частоті обертання. Тому зауваження про гарне екранування диску та струмознімачів є дуже істотним (бо, зазвичай, рівень шумів є істотно більшим за декілька нановольт).

Слід також відзначити, що якщо б у формулі для напруги, що подається на диск:

$$U_д=U_0-\beta U=U_0-\beta\frac{m\omega^2R^2}{2e}$$

замість мінуса стояв плюс, система стала б нестійкою, бо зростання напруги U призводило б до збільшення кутової швидкості, що вело б до ще більшого зростання напруги U і т.д., аж поки система не зруйнувалася б від надмірної швидкості обертання.

(182) Ця система являє собою певний складний пружинний маятник. Під час малих коливань пружини весь час розтягнені. Період власних коливань не залежить від прискорення вільного падіння (тяжіння впливає тільки на положення рівноваги), тому надалі не враховуватимемо сили тяжіння. Позначимо x_1, x_2, x_3 видовження відповідних пружин (якщо точніше, то це додаткові до рівноважних значень видовження), y — вертикальне зміщення блоку від положення рівноваги (додатним уважатимемо зміщення *вниз*).

Щоб отримати рівняння коливань, напишемо рівняння динаміки та кінематичного зв'язку. При цьому врахуємо: оскільки блок невагомий, сила пружності пружини 3 вдвічі більша за силу натягу нитки, що утримує цей блок. Прискорення верхнього важка дорівнює $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, прискорення нижнього $\frac{d^2(y+x_3)}{dt^2}$. Отже, маємо:

$$\begin{cases} 2y=x_1+x_2, \\ m\ddot{x}_1=k_1(x_2-x_1), \\ m(\ddot{y}+\ddot{x}_3)=-k_3x_3, \\ k_3x_3=2k_1x_2. \end{cases}$$

Тут точки над позначенням величини — позначення диференціювання за часом.

Шукатимемо залежність змінних величин від часу у «гармонічному» вигляді: наприклад, $x_i(t) = A_i e^{i\omega t}$ або в еквівалентному вигляді це $x_i(t) = A_i \cos(\omega t + \varphi_i)$. Після підстановок отримаємо систему лінійних рівнянь відносно амплітуд A_1, A_2:

$$\begin{cases} (k_1 - m\omega^2)A_1 - k_1 A_2 = 0, \\ -m\omega^2 A_1 + 4k_1 A_2 - m\omega^2(1+4\alpha)A_2 = 0. \end{cases}$$

Ця система має нетривіальне (ненульове) розв'язання за умови

$$(k_1 - m\omega^2)(-m\omega^2(1+4\alpha) + 4k_1) - k_1 m\omega^2 = 0.$$

Ми отримали так зване характеристичне рівняння, з якого можна визначити значення циклічної частоти власних коливань системи. Це квадратне рівняння відносно невідомої величини ω^2. Зручно перейти до невідомої величини $z = m\omega^2/k_1$, тоді рівняння набуває вигляду

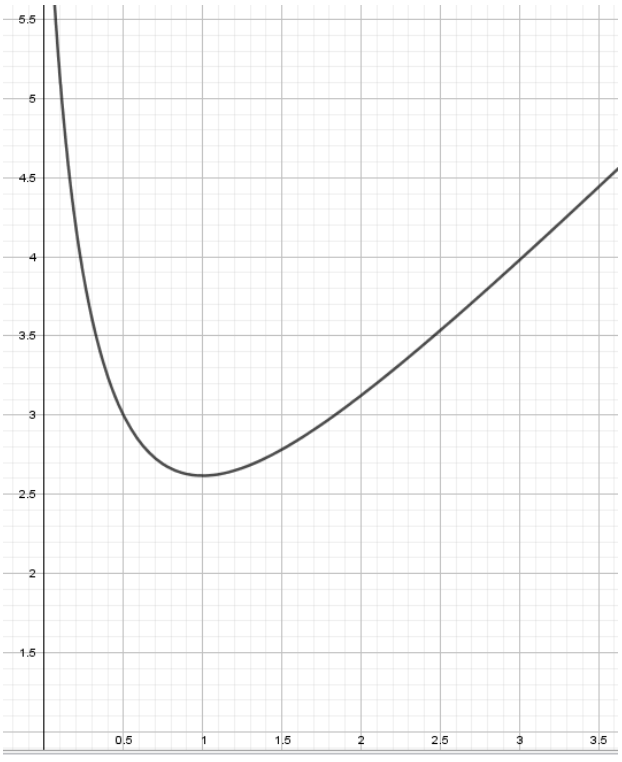
$$z^2(1+4\alpha) - 2z(3+2\alpha) + 4 = 0.$$

Дискримінант цього рівняння завжди є додатним. Отже, воно має два різні корені, вирази для яких легко записати. З теореми Вієта випливає, що ці корні додатні, тобто відповідають дійсним значенням циклічної частоти (як і має бути для незагасаючих коливань).

Наявність двох різних власних частот (позначимо більшу з них ω_+, а меншу ω_-) легко було й передбачити: адже наша система має саме два ступені свободи. У загальному випадку рух системи можна уявити як суперпозицію двох гармонічних коливань з відповідними частотами. Співвідношення амплітуд і фаз цих гармонічних коливань залежить від початкових умов. Саме ці співвідношення й відрізнялися в різних експериментах.

Але суперпозиція двох гармонічних коливань у загальному випадку (коли частоти коливань незрівнянні) не тільки не є гармонічним коливанням, а й взагалі не є періодичним процесом! Умова періодичності має вигляд $\frac{\omega_+}{\omega_-} = \frac{N_+}{N_-}$, де N_+, N_- — натуральні числа (практично бажано, щоб вони не були занадто великими, інакше періодичність процесу важко буде й помітити). Отже, для періодичності потрібно, щоб відношення f коренів останнього квадратного рівняння дорівнювало відношенню *квадратів* двох натуральних чисел. Легко переконатися, що

$$f = \left(\frac{\omega_+}{\omega_-}\right)^2 = \frac{3+2\alpha+\sqrt{4\alpha^2-4\alpha+5}}{3+2\alpha-\sqrt{4\alpha^2-4\alpha+5}}.$$



Наведений нижче графік цієї функції $f(\alpha)$ легко побудувати, скориставшись однією з численних математичних програм (їх застосування цілком припустиме в заочному турі олімпіади).

Відразу привертає увагу те, що $f(\mathbf{3}) = 4 = 2^2$, а це нас цілком влаштовує.

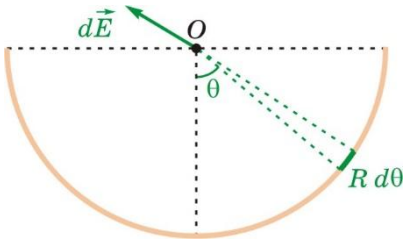
Зрозуміло, що учасники олімпіади можуть вибрати інші значення. Наприклад, $f(\mathbf{2,15}) = 3{,}24 = (9/5)^2$, а $f(\mathbf{0,65}) = f(\mathbf{1,5}) = (5/3)^2$. Усі аналогічні відповіді є прийнятними. Їх правильність легко перевірити підстановкою.

(183) 1. Уявімо, що ми «добудували» сферу, додавши зверху другу так само заряджену півсферу. Як відомо, всередині утвореної однорідно зарядженої сфери електричне поле відсутнє. Це означає, що додана верхня півсфера утворює, наприклад, у точці A таке саме за модулем електричне поле, як і нижня (зрозуміло, що напруженості цих полів $\vec{E}_{\text{верх}-A}$ і $\vec{E}_A$протилежні): $\vec{E}_{\text{верх}-A} = -\vec{E}_A$. З симетрії системи очевидно, що $\vec{E}_{\text{верх}-A} = -\vec{E}_B$. Отже, $\vec{E}_A = \vec{E}_B$ (незалежно від r, h).

2. Очевидно, вектор $\vec{E}_O$ напрямлений вгору. Скористаємося принципом суперпозиції. Для цього подумки розділимо півсферу горизонтальними «розрізами» на тоненькі кільцеві смужки. На рисунку показано невелику ділянку такої смужки. Якщо площа ділянки dS, то її заряд $\sigma \cdot dS$, і вона створює в центрі напруженість поля $dE_O = k\frac{\sigma}{R^2}dS$ (тут $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$). Нас цікавить тільки вертикальна складова цієї напруженості: $dE_{O\text{верт}} = k\frac{\sigma}{R^2}dS \cdot \cos\theta$.

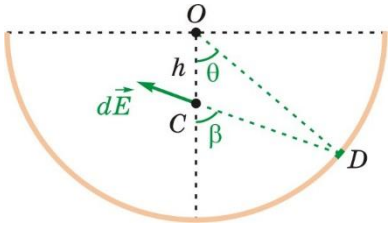
Для всієї смужки $dS = 2\pi R^2 \sin\theta d\theta$, тобто $dE_O = k\frac{\sigma}{R^2} \cdot 2\pi R^2 \sin\theta\cos\theta d\theta = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\theta\cos\theta d\theta$.

Після простого інтегрування дістанемо $E_O = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$.



3. Очевидно, вектор $\vec{E}_C$ теж напрямлений вгору. Знов скористаємося принципом суперпозиції (див. рисунок). Довжину відрізку CD знайдемо з теореми косинусів, тоді $\cos\beta = \frac{R\cos\theta - h}{CD}$, а $dE_{C\text{верт}} = -k\frac{\sigma}{CD^2}dS \cdot \cos\beta$.

Здійснивши заміну змінних $x = R^2 + h^2 - 2Rh\cos\theta$, маємо після інтегрування $E_C = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0 h^2}\left(1 - \frac{R}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$. Легко бачити: коли $h \to 0$, отримуємо $E_C \to \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$. Коли ж $h \to R$, $E_C \to \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}\left(2 - \sqrt{2}\right)$.



(184) 1) До включення магнітного поля температура речовини T, а намагніченість нуль, тобто магнітні моменти атомів орієнтовані хаотично.

2) Включаємо поле. Температура речовини T не зміниться через наявність термостату. Більше половини магнітних моментів атомів вишикуються вздовж магнітного поля, а інші

– проти. Так відбувається бо орієнтація магнітного моменту вздовж поля ($E_+ = -\mu B$) є більш енергетично вигідною ніж проти ($E_- = \mu B$). Потенціальна енергія атомів в магнітному полі в такому випадку стає від'ємною. Речовина стає намагніченою. Визначимо кількість атомів в певному об'ємі, магнітні моменти яких орієнтовані вздовж поля та проти. Для цього треба використати розподіл Больцмана по енергіям.

$n_+ = Ae^{-\frac{E_+}{kT}} = Ae^{\frac{\mu B}{kT}}$ – кількість атомів орієнтованих вздовж поля.

$n_- = Ae^{-\frac{E_-}{kT}} = Ae^{-\frac{\mu B}{kT}}$– кількість атомів орієнтованих проти поля.

Визначимо нормувальний коефіцієнт А з умови, що сума концентрацій n_+ та n_- дорівнює n:

$$n_+ + n_- = n_0$$

Звідси $A = \frac{n_0}{\left(e^{\frac{\mu B}{kT}} + e^{-\frac{\mu B}{kT}}\right)}$

В результаті $n_+ = n_0 \frac{e^{\frac{\mu B}{kT}}}{\left(e^{\frac{\mu B}{kT}} + e^{-\frac{\mu B}{kT}}\right)}$, $n_- = n_0 \frac{e^{-\frac{\mu B}{kT}}}{\left(e^{\frac{\mu B}{kT}} + e^{-\frac{\mu B}{kT}}\right)}$

Повна намагніченість (спрямована вздовж поля) дорівнює

$$M = n_+\mu - n_-\mu = n_0\mu \frac{\left(e^{\frac{\mu B}{kT}} - e^{-\frac{\mu B}{kT}}\right)}{\left(e^{\frac{\mu B}{kT}} + e^{-\frac{\mu B}{kT}}\right)}$$

Цей вираз можна спростити замінивши $\frac{\left(e^{\frac{\mu B}{kT}} - e^{-\frac{\mu B}{kT}}\right)}{\left(e^{\frac{\mu B}{kT}} + e^{-\frac{\mu B}{kT}}\right)}$ на так званий гіперболічний тангенс $th(\frac{\mu B}{kT})$. Отже, $M = n_0\mu * th(\frac{\mu B}{kT})$.

3) Коли ми від'єднуємо речовину від термостата, то її повна енергія стає сталою. Після виключення магнітного поля тіло розмагнічується, потенціальна енергія речовині у магнітному полі знову виросте й температура речовини впаде бо на підвищення потенціальної енергії тіла до нуля (поле зникло, енергії атомів в магнітному полі немає) енергія береться з теплової енергії речовини.

Знайдемо зниження температури речовини із закону збереження енергії:

$$CT + U_{\text{магн}} = \text{C}T_{\text{к}}$$

Тут С – теплоємність одиниці об'єму, $T_{\text{к}}$ – кінцева енергія речвини. Визначимо енергію речовини $U_{\text{магн}}$ в магнітному полі до відключення поля.

$$U_{\text{магн}} = n_+E_+ + n_-E_- = -n_0\mu B \frac{\left(e^{\frac{\mu B}{kT}} - e^{-\frac{\mu B}{kT}}\right)}{\left(e^{\frac{\mu B}{kT}} + e^{-\frac{\mu B}{kT}}\right)} = -n_0\mu B * th(\frac{\mu B}{kT})$$

Тоді $T_{\text{к}} = T - \frac{n_0\mu B}{C} th(\frac{\mu B}{kT})$

Якщо B є великим, тобто $B \gg \frac{kT}{\mu}$, то $T_{\text{к}} \to T - \frac{n_0\mu B}{C}$.

(185) А) Знайдемо потужність випромінення Сонця (світність Сонця)

$$L_\odot = 4\pi R_\odot^2 \sigma T_\odot^4$$

Де $R_\odot$ та $T_\odot$ - радіус Сонця та температура його фотосфери, σ- стала Стефана Больцмана.
Тоді поверхнева густина потоку сонячного випромінювання на відстані l від нього ($l \gg R_0$) буде

$\omega_\odot = \frac{L_\odot}{4\pi R^2}$

$$\omega_\odot = \left(\frac{R_\odot}{l}\right)^2 \sigma T_\odot^4$$

Так як форма КА – сфера, то можна вважати, що випромінення Сонце надає перпендикулярно до площі поперечного перерізу КА. Тому потужність випромінювання від Сонця, що надає поверхня КА визначається виразом:

$$P_\odot = \omega_\odot \pi R^2$$

де R- радіус КА.
З (2*) та (3)

$$P_\odot = \sigma T_\odot^4 \pi (\frac{R * R_\odot}{l})^2$$

З огляду на альбедо КА, отримуємо поглинену КА потужність випромінення Сонця:

$$P_\odot^* = (1 - A)P_\odot$$

Де А – альбедо поверхні КА.

$$(4) \longrightarrow (5)$$

$$P_\odot^* = (1 - A)\sigma T_\odot^4 \pi (\frac{R * R_\odot}{l})^2$$

Так як за умовою, КА швидко обертається навколо своєї осі, то в умовах термодинамічної рівноваги, потужність(поглинута всією поверхнею КА) повинна дорівнювати потужності, яку КА випромінює в космічний простір те ж з цієї своєї поверхні, отже, повинна виконуватись умова:

$$4\pi R\sigma T_к^4 = (1 - A)\sigma T_\odot^4 \pi (\frac{R * R_\odot}{l})^2$$

Де $T_к$ −температура оболонки КА(припускаємо,що температура міжпланетного простору дорівнює нулю).

$$l = \sqrt{1 - A} * \frac{R_\odot}{2} * \frac{T_\odot^2}{T_к^2} \approx 0{,}11 \text{ а. о.}$$

Б) Знаємо, що для відстані від супутника до центрального тіла в перицентрі та апоцентрі існують залежності

$$\begin{bmatrix} r_a = a(1 + e) \\ r_п = a(1 - e) \end{bmatrix}$$

Де а – велика піввісь орбіти; е – ексцентриситет орбіти. За умовою r_a − відстань в афелії(відома); $r_п$ − відстань l, знайдена нами в попередньому пункті. Отже:

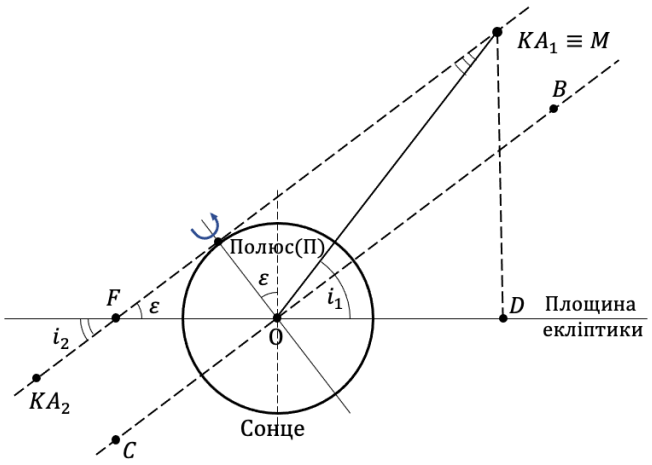
$$\begin{cases} 0.92 = a(1 + e) \\ 0.11 = a(1 - e) \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} e \approx 0.786 \\ a \approx 0.515(\text{а. о}) \end{bmatrix}$$

Період обертання КА знайдемо, використовуючи 3ій Закон Кеплера:

$$\frac{T_0^2}{T_{КА}^2} = \frac{a_0^3}{a^3} \Rightarrow T_{КА} = 134{,}6 \text{ доби}$$

Для розрахунків прийняли період обертання Землі рівним даному року(≈ 3652422доби), а радіус орбіти Землі поклали рівним 1 а.о.

В) Для того, щоб КА міг ефективно виконувати картографування північних регіонів фотосфери Сонця, необхідно, щоб з мінімальної відстані до зорі апертура КА «бачила» б північний полюс Сонця. Зобразимо на рисунку взаємне розташування Сонця та КА в момент, коли КА може «бачити» полюс Сонця. На рисунку полюс позначений як П, центр Сонця як О, ε- кут нахилу осі добового обертання Сонця.



Відносно нормалі до екліптики(кут нахилу площини екватора Сонця до площини екліптики); $КА_1, КА_2$ – положення КА в перицентрі для двох положень відносно екліптики; $\dot{r}_1, \dot{r}_2$ - нахил орбіти КА відносно площини екліптики($KA_1 - KA_2$ паралельно до СВ, так як $l \gg R_\odot$).

Для того, щоб гарантовано спостерігати Північний полюс Сонця КА повинен, перебуваючи в положенні $КА_1$,знаходитись не нижче площини дотичної до поверхні Сонця в точці П. (Якщо перицентр орбіти КА знаходиться з полюсом П в одному півпросторі відносно площини, що проходить через центр Сонця перпендикулярно до екліптики, нахил орбіти дорівнює нулю)

Для положення $КА_1$: $OM \sin\psi = ОП = R_\odot \Rightarrow \psi = \arcsin\left(\frac{R_\odot}{OM}\right) \approx 2{,}4°$

Отже, $\angle MOD = i_1 = \psi + \varepsilon = 7{,}5° + 2{,}4° = 9{,}9° \approx 10°$

$$i_1 \approx 10°$$

Відповідь:

1) $l = 0{,}11$ а. о. ($\approx 16{,}5$ млн км)

2) $l \approx 0{,}786; T_{KA} \approx 134{,}6$ доби;

3) $i \approx 10°$

(186) Напишемо рівняння Бернуллі та рівняння нерозривності для потоку води в трубі.

$$p_A + \frac{\rho V_0^2}{2} = p + \frac{\rho V^2}{2}$$

$$V_0 S_0 = VS$$

Звідси отримуємо:

$$p = p_A + \frac{\rho V_0^2}{2}\left(1 - \frac{S_0^2}{S^2}\right)$$

Вода у звуженні закипить, якщо тиск насичених парів за даної температури стане більшим або рівним за тиск у звуженні.

Знайдемо тиск насичених парів води за даної температури проінтегрувавши рівняння Клапейрона-Клаузіуса.

Зміна питомого об'єму речовини при фазовому переході це різниця обернених густин пару за даної температури та води $\Delta v = \frac{V_{\text{п}}}{m_{\text{п}}} - \frac{V_{\text{в}}}{m_{\text{в}}} = \frac{1}{\rho_{\text{п}}} - \frac{1}{\rho_{\text{в}}}$. Тут можна знехтувати доданком із густиною води, адже густина води буде так чи інакше набагато більшою за густину пару за температур, які нас цікавлять.

Отже, отримуємо

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L\rho_{\text{п}}}{T}$$

З рівняння Менделєєва-Клапейрона отримаємо залежність густини пару від тиску та температури:

$$\rho_{\text{п}} = \frac{\mu p}{RT},$$

де $\mu = 18$ г/моль – молярна маса води. Підставляємо його в рівняння Клапейрона-Клаузіуса.

Маємо диференціальне рівняння, яке просто проінтегрувати:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L\mu p}{RT^2}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{L\mu dT}{RT^2}$$

Після інтегрування:

$$p = Ce^{-\frac{L\mu}{RT}},$$

де C – константа інтегрування, яку легко знайти знаючи, що тиск насичених парів води при $T_0 = 373\ K = 100℃$ дорівнює атмосферному p_A.

Отримуємо залежність тиску насичених парів води від температури у вигляді:

$$p_{\text{нас}} = p_A e^{\frac{L\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}.$$

Прирівнюємо цей тиск до виразу тиску у звуженні труби з рівняння Бернуллі:

$$p_A + \frac{\rho V_0^2}{2}\left(1 - \frac{S_0^2}{S^2}\right) = p_A e^{\frac{L\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}$$

Виражаємо відношення площ

$$\frac{S_0}{S} = \sqrt{1 + \frac{2p_A}{\rho V_0^2}\left(1 - e^{\frac{L\mu}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)}\right)} \approx 13.7$$

Звідси, отримуємо відповідь, що площа у звуженні може бути меншою за перетин труби не більше ніж у $\frac{S_0}{S}$ =13.7 разів.

(187) А) На рисунку 1 зображена перша частинка, зсунута відносно другої на кут α. Сила тертя спокою утримує першу бусинку, яку намагається зсунути вліво проекція сили Кулона. В умові не конкретизовано про який коефіцієнт тертя йдеться, тому вважаємо, що коефіцієнт тертя ковзання дорівнює максимальному коефіцієнту тертя спокою і дорівнює $\boldsymbol{\mu}$. Тоді

$$F\sin\alpha = F_{\text{тер}} \le \mu N = \mu F\cos\alpha.$$

Оскільки частинки однакові, така ж умова одночасно виконується і для другої частинки. Маємо, що спокій можливий, якщо $\text{tg}\alpha \le \mu$, або $\frac{\sqrt{r^2-h^2}}{h} \le \mu$, звідки знаходимо відстань між частинками r і відповідь на перше питання:

$$r \in \left[h; h\sqrt{1+\mu^2}\right].$$

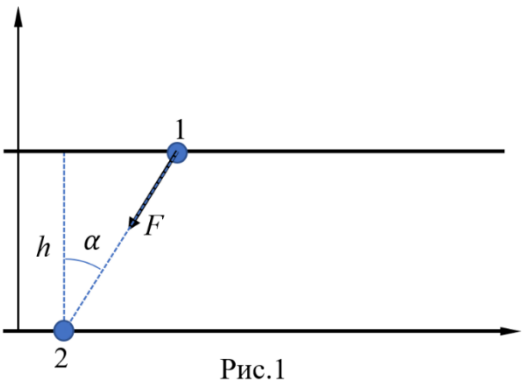


Рис.1

Б) Розглянемо спочатку випадок а), коли нехтуємо тертям. Нехай першій частинці надають швидкість $\boldsymbol{v}$, спрямовану вправо. Оскільки маси частинок однакові, центр мас рухатиметься зі швидкістю $\boldsymbol{v/2}$ вправо, а відносно нього частинки здійснюватимуть коливання з положення рівноваги і початковими швидкостями $\boldsymbol{v/2}$ в протилежних напрямках. Вони рухатимуться симетрично і через деяких час змістяться відносно положення рівноваги у системі центру мас на деяку відстань (координата x), як зображено на рисунку 2.

Другий закон Ньютона для однієї бусинки матиме з урахуванням умови, що $x \ll h$, вигляд рівняння гармонічних коливань:

$$ma_x = -F sin\alpha = -\frac{kq^2}{r^2}\frac{x}{r/2} \approx -2\frac{kq^2}{h^3}x,$$

або

$$a_x + 2\frac{kq^2}{mh^3}x = 0.$$

Це означає, що остерігатиметься рівномірний рух центру мас зі швидкістю $v/2$ і гармонічні коливання навколо нього з амплітудою x_m та циклічною частотою $\omega = \sqrt{\frac{2kq^2}{mh^3}}$. Розв'язок рівняння гармонічних коливань можна записати у вигляді

$$x(t) = x_m\sin(\omega t + \varphi_0),$$

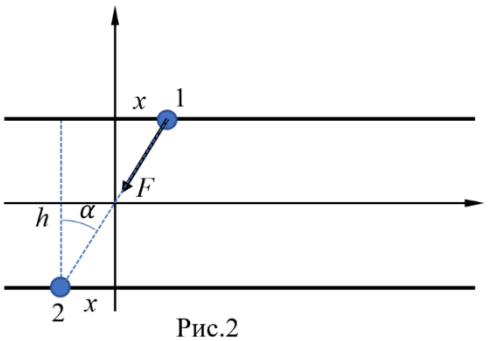


Рис.2

де з умови $x(0) = 0, v_x(0) = v/2$ для першої частинки, знаходимо $x(t) = A\sin\omega t$, де $A = v/(2\omega)$. Тоді відносно нерухомої системи відліку з початком осі абсцис між початковими положеннями частинок:

$$x_1(t) = \frac{v}{2}t + A\sin\omega t = \frac{v}{2}\left(t + \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right),$$

$$x_2(t) = \frac{v}{2}t - A\sin\omega t = \frac{v}{2}\left(t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Розглянемо тепер випадок малої початкової швидкості за наявності сил тертя. Вважатимемо, що під малою швидкістю мається на увазі така, що призводить до малих зміщень у порівнянні з усіма характерними розмірами, зокрема зі зміщенням на кут менший ніж $\text{arctg}\mu$. Справа в тому, що випадок малої сили тертя, коли перша бусинка, незважаючи на малу швидкість,

проходить дуже малий межевий кут $\mathrm{arctg}\mu$ і зриває з місця другу, не можна отримати з загальної формули для начебто довільного μ, хоча чому б довільному μ не бути й дуже малим. У нас рухатиметься тільки перша частинка, і другий закон Ньютона для неї матиме вигляд (Рис.1):

$$ma_x = -Fsin\alpha - \mu F\cos\alpha \approx -\frac{kq^2}{r^2}\left(\frac{x}{r} + \mu\frac{h}{r}\right).$$

Для малих зміщень з точністю до першого порядку по x/h маємо рівняння гармонічних коливань зі зсувом положення рівноваги:

$$a_x + \frac{kq^2}{mh^3}(x + \mu h) = 0.$$

Частота коливань $\widetilde{\omega} = \sqrt{\frac{kq^2}{mh^3}}$, а зсув центру коливань $-\mu h$ відносно початкового положення. Розв`язок рівняння з урахуванням початкових умов:

$$x(t) = \frac{v}{\widetilde{\omega}}\sin(\widetilde{\omega}t) - \mu h\big(1 - cos(\widetilde{\omega}t)\big).$$

Менш точне наближення маємо, нехтуючи у рівнянні коливань x у порівнянні з μh.

Тоді з $a_x + \frac{kq^2}{mh^3}(x + \mu h) = 0$ отримуємо стале прискорення $a_x = -\mu\frac{kq^2}{mh^2}$ і рівносповільнений рух тільки під дією сили тертя (й дійсно, проекцією сили Кулона на напрям стержня при малих зміщеннях можна знехтувати).

$$x(t) = vt - \mu\frac{kq^2}{mh^2}\frac{t^2}{2}.$$

В) Найменш можливу швидкість v, яку необхідно надати першій частинці, щоб система намистинок розлетілася, для випадку а), коли нехтуємо тертям, знайдемо з закону збереження енергії у системі відліку центру мас:

$$2\frac{m(v/2)^2}{2} + \left(-\frac{kq^2}{h}\right) = 2\frac{m(v_\infty/2)^2}{2} + \left(-\frac{kq^2}{r_\infty}\right) = 0 + 0 = 0.$$

Звідси маємо

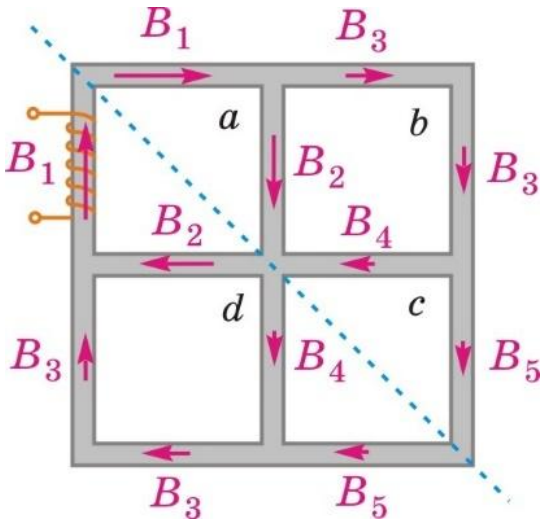
$$v = 2\sqrt{\frac{kq^2}{mh}}.$$

Спочатку може здатися, що відповідь на питання б) чи можуть за наявності тертя бусинки розлетітися на нескінченність, має бути негативною, оскільки в цьому випадку сила тертя діяла б на частинки нескінченний час, зменшуючи й зменшуючи їхню кінцеву кінетичну енергію. Насправді, за рахунок збільшення відстані і зміни кута, частинки все слабше притискає до стержнів сила Кулона, і сила тертя зменшується. Якщо це зменшення досить стрімке, то робота сили тертя навіть на нескінченній відстані може мати кінцеве значення.

Рух буде наступним: перша частинка, якій надали швидкість v, рухатиметься до кута $\alpha_1 = \mathrm{arctg}\mu$, після чого зрушить з місця і потягне за собою кулонівською силою, поволі розганяючи, другу частинку (сама ж перша частинка весь час гальмує). Але ж для кутів більших за $\alpha_1 = \mathrm{arctg}\mu$ (див. Рис.1) сила тертя $\mu F\cos\alpha$ менша за проекцію $F\sin\alpha$ сили Кулона F, як власне й

було доведено у відповіді А). Отже й величина роботи сили тертя після кута α_1, буде меншою за роботу сили Кулона, яка, як ми тільки що з'ясували у п. а), не може зупинити розліт частинок. Висновок: за певної початкової швидкості v сценарій нескінченного розльоту частинок можливий.

(188) 1. Наведена система має більш високу симетрію, ніж це очевидно з першого погляду. Якщо, наприклад, урахувати неперервність і замкнутість ліній магнітної індукції, то магнітне поле у лівій верхній горизонтальній ділянці осердя таке саме (за модулем), як магнітне поле B_1 всередині котушки 1. На рисунку нижче показано вісь симетрії та розподіл магнітного поля по ділянках осердя. Ми враховуємо, що розімкнені котушки жодним чином не впливають на магнітне поле в осерді. На рисунку наведені модулі індукції магнітного поля.



Кількість магнітних ліній, що входять у певне «перехрестя» осердя, має дорівнювати кількості ліній, що виходять із нього. Це дозволяє записати рівняння: $B_1 = B_2 + B_3, B_3 = B_4 + B_5$.

Скористаємося також теоремою про циркуляцію магнітного поля. З неї, зокрема, випливає, що циркуляція по контурах b, c дорівнює нулю. Якщо сила струму в котушці 1 дорівнює i, то можемо написати: $2l(B_1 + B_2) = \mu\mu_0 N_1 i, 2B_3 + B_4 - B_2 = 0, B_4 - B_5 = 0$.

Ми отримали п'ять незалежних рівнянь для п'яти невідомих значень індукції магнітного поля. З них легко знайти:

$$B_5 = \frac{\mu\mu_0 N_1 i}{24l}, B_1 = 7B_5, B_2 = 5B_5, B_3 = 2B_5, B_4 = B_5 .$$

Отже, сумарний магнітний потік через витки котушки 1 становить , $\Phi = N_1 b^2 B_1 = \frac{7\mu\mu_0 N_1^2 b^2 i}{24l}$, а індуктивність відповідно $L_1 = \frac{\Phi}{i} = \frac{7\mu\mu_0 N_1^2 b^2}{24l}$.

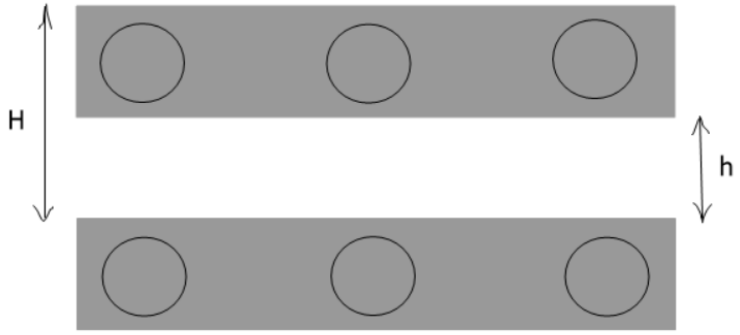
2. Напруга на ідеальній котушці дорівнює за модулем ЕРС у цій котушці. Тому амплітудне значення напруги (отже, й діюче значення) пропорційне амплітудному значенню індукції магнітного поля всередині котушки та кількості витків у ній. Таким чином, можна записати співвідношення:

$U_1 : U_2 : U_3 = (N_1 B_1) : (N_2 B_2) : (N_3 B_3) = (7N_1) : (5N_2) : (2N_3)$.

Звідси $U_2 = \frac{20}{7} U_1 = 20$ В, $U_3 = \frac{12}{7} U_1 = 12$ В.

(189) Розглянемо шари атомів речовини як на картинці. На один атом приходиться об'єм H^3, отже одразу можемо визначити Н через концентрацію: $nH^3 = 1$, або інакше

$$H = \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A \rho}}$$



Якщо використовувати цей діелектрик в конденсаторі, то ємність конденсатора підвищується за рахунок того, що ефективна відстань між пластинами конденсатора скорочується (без діелектрика вона була кратна H, тобто всьому пустому простору, а з діелектриком поле існує лише між атомними шарами, тому ефективна відстань між пластинами кратна h).

Отже, ємність без діелектрику $\sim\frac{\varepsilon_0 S}{H}$, а з діелектриком $\sim\frac{\varepsilon_0 S}{h}$. Якщо вводити діелектричну проникність, то ємність з діелектриком більша за ємність без діелектрика в ε разів. Отже, звідси $\frac{H}{h}=\varepsilon$.

Лінійний розмір атому $d_a = H - h = \sqrt[3]{\frac{\mu}{N_A\rho}}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) \approx 1.26 * 10^{-10}$ м, що є доволі адекватним значенням. Правда, треба зізнатись, що дана модель працює доволі погано для багатьох інших речовин, особливо газів, тому її швидко і відкинули.

1) В діелектрику буде поле $E=\frac{U_0}{d}$. Воно складається із зовнішнього поля та поля поляризованих зарядів: $E = E_0 - E_{\text{пол}}$, при цьому $\varepsilon E = E_0$. Звідси $E_{\text{пол}} = E(\varepsilon - 1)$. Поляризацію можна представити як зміщення позитивних і від'ємних зарядів один відносно одного. Якщо зміщення дорівнює l, то на протилежних частинах діелектрику виступить поверхневий заряд з модулем σ =pn=qnl, де p – дипольний момент одного атому, q – величина заряду, яка зміщується в кожному атомі, тобто q=Zq_e. Поверхневий заряд Zq_enl створює поле як в конденсаторі $E_{\text{пол}}=\frac{Zq_e\text{nl}}{\varepsilon_0}$.

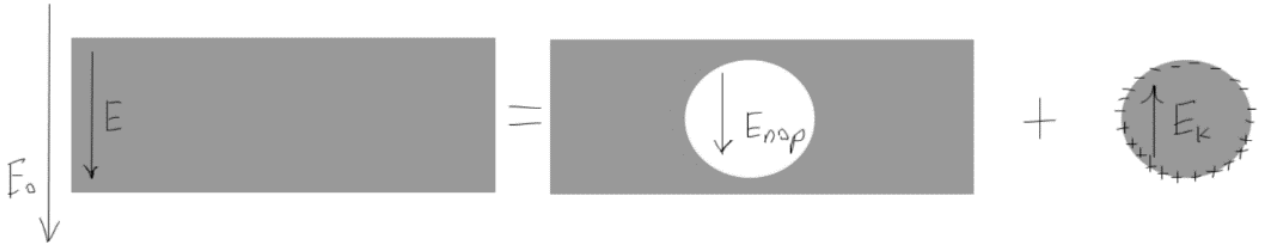
Отже, в результаті:

$$l=\frac{\varepsilon_0 U_0(\varepsilon-1)\mu}{Zq_e N_A\rho}\approx 1.54*10^{-20}\text{ м}$$

Це зміщення є в $\frac{l}{d_a}\approx 10^{-10}$ частиною від лінійного розміру атома.

2) Нехай поле в діелектрику дорівнює E. За принципом суперпозиції воно складається із поля в порожнині та поля, що створює вирізана поляризована куля в середині себе:

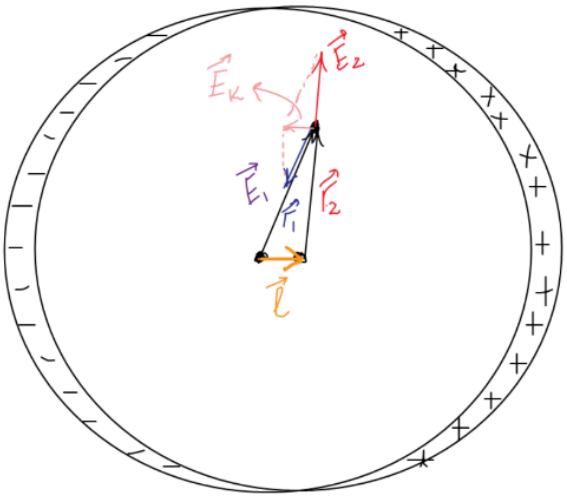
$$E = E_{\text{пор}} - E_{\text{к}} \qquad (1)$$



Знайдемо дипольний момент p. В попередньому пункті ми пов'язували поляризаційне поле в пласкому діелектрику із дипольним моментом та полем всередині діелектрика E. $E_{\text{пол}} = \frac{\text{np}}{\varepsilon_0} = E(\varepsilon - 1)$. Звідси:

$$\text{np} = E\varepsilon_0(\varepsilon - 1) \qquad (2)$$

Розглянемо тепер поле $E_{\text{к}}$ від вирізаної діелектричної кулі. Процедура його виводу стандартна. Скажемо, що до прикладання зовнішнього поля ця куля складалась із куль двох протилежних зарядів, що накладались одна на одну так, що всюди заряд був нуль. Після прикладання зовнішнього поля ці кулі трохи розійдуться вздовж поля на відстань l між їх центрами і заряди різних знаків вийдуть на протилежні поверхні. Це значення l пов'язане із дипольним моментом кожного атому p=ql. Повний заряд однієї кулі по модулю Q=Vnq, тобто густина заряду одного знаку



$$\rho_{\text{з}} = \text{nq} = \frac{np}{l}. \qquad (3)$$

З теореми Гауса поле всередині однієї зарядженої кулі на відстані r від її центру дорівнює E=$\frac{r\rho_{\text{з}}}{3\varepsilon_0}$.

Поле поляризованої кулі тоді дорівнює сумі полів від заряджених куль (див рисунок нижче $\vec{E}_{\text{к}}=\vec{E}_1 + \vec{E}_2$.

Тоді $\vec{E}_{\text{к}} = -\frac{\vec{r}_1\rho_{\text{з}}}{3\varepsilon_0} + \frac{\vec{r}_2\rho_{\text{з}}}{3\varepsilon_0} = -\frac{\vec{l}\rho_{\text{з}}}{3\varepsilon_0}$. А по модулю:

$$E_{\text{к}} = \frac{l\rho_{\text{з}}}{3\varepsilon_0}. \qquad (4)$$

Також з умови

$$p = \alpha\varepsilon_0 E_{\text{пор}} \qquad (5)$$

Об'єднуючи рівняння (1)-(5) та формулу для концентрації отримуємо відповідь:

$\alpha = \frac{3(\varepsilon-1)\mu}{(\varepsilon+2)N_A\rho} \approx 2 * 10^{-29}$ м^3.

3) $\alpha = V = \frac{\pi d^3}{6}$, звідки:

$$d = \sqrt[3]{\frac{6\alpha}{\pi}} \sim 3 * 10^{-10} \text{ м}$$

(190) А) Максимуми відповідають випадку, коли тіло рухається до спостерігача з максимальною швидкістю наближення $\left|-V_{\text{оберт}} + V_{\text{ЦМ}}\right|$. Мінімуми відповідають випадку, коли тіло рухається до спостерігача з максимальною швидкістю віддалення $V_{\text{оберт}} + V_{\text{ЦМ}}$. Тут $V_{\text{оберт}}$ - лінійна обертальна швидкість тіла по орбіті, $V_{\text{ЦМ}}$ – швидкість центра мас системи, яка і відповідає за віддалення (пов'язане із розширенням Всесвіту) об'єкту як цілого від спостерігача на Землі. Ми можемо ці швидкості додавати класичним чином, бо рухомою системою відліку є центр мас системи, а з умови слідує, що відстань до цього об'єкту порядка декількох парсек, а значить, швидкість віддалення порядка десятків-сотень км/с, що набагато менше за швидкість світла (Якщо використовувати релятивістську формулу додавання швидкостей, то

відповідь буде відрізнятись всього на 4%). Але, при цьому, з умови $V_{\text{оберт}}$ є дуже великим і ми це маємо враховувати у формулах для частот.

Застосуємо рівняння для релятивістського ефекту Доплера для випадку, коли джерело рухається.
Отримуємо:

$$\frac{\nu_{max}}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - \frac{(-V_{\text{оберт}} + V_{\text{ЦМ}})^2}{c^2}}}{1 + \frac{-V_{\text{оберт}} + V_{\text{ЦМ}}}{c}}$$

$$\frac{\nu_{min}}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - \frac{(V_{\text{оберт}} + V_{\text{ЦМ}})^2}{c^2}}}{1 + \frac{V_{\text{оберт}} + V_{\text{ЦМ}}}{c}}$$

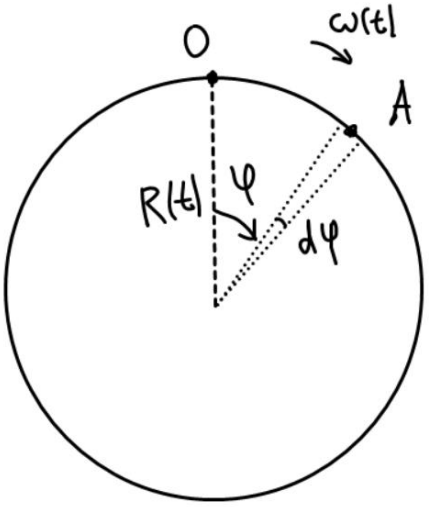
З графіку $\frac{\nu_{max}}{\nu_0} = 1.2242, \frac{\nu_{min}}{\nu_0} = 0.8161.$
Розв'язавши систему рівнянь вище, отримуємо,

$$\frac{-V_{\text{оберт}} + V_{\text{ЦМ}}}{\text{c}} \approx -0.1996$$

$$\frac{V_{\text{оберт}} + V_{\text{ЦМ}}}{\text{c}} \approx 0.2005$$

Звідси $V_{\text{ЦМ}} \approx 134.5 \frac{\text{км}}{\text{с}}$. (Якщо використовувати релятивістську формулу додавання швидкостей, то $V_{\text{ЦМ}} \approx 139.9 \frac{\text{км}}{\text{с}}$).
Підставляємо у закон Хаббла і отримуємо $r = \frac{V_{\text{ЦМ}}}{H} \approx 2$ мпк.

Б) Нехай в момент часу, коли Всесвіт є дуже маленьким, стиснутим майже в точку, в якомусь місці відбувається спалах світла і воно починає поширюватись в усі сторони. Розглянемо рух лише вздовж однієї осі. По факту, задача зводиться до кінематичної вздовж лише одної вісі, адже всі напрямки у Всесвіті рівноправні. Будемо шукати відстань, яку встигне подолати світло за час життя Всесвіту. Варіантів розв'язку задачі є багато. В тому числі дану задачу можна розв'язувати «в лоба» через диференціальне рівняння, наприкінці розв'язку якого доведеться ще й робити трюк із врахуванням ненульового початкового часу старту світла для того щоб потім спрямувати цей час в нуль і отримати коректну відповідь. Ми приведемо спочатку два інших, найпростіших варіанти розв'язку, а потім прямий розв'язок, яким намагались робити цю задачу більшість із вас.



1 спосіб

Зручно розглянути аналогію із колом, яке роздувається по закону $R = \alpha\sqrt{t}$, де R – радіус кола, t – час від народження Всесвіту, α – коефіцієнт пропорційності. Всі тіла Всесвіту знаходяться на колі (одновимірний простір) і віддаляються також за кореневим законом. По колу світло рухається із швидкістю с. Ми, для зручності, можемо ввести моментальну «кутову швидкість» світла на колі:

$$\omega(t) = \frac{c}{R(t)}.$$

Точка О – початок руху. Точка А – положення світла в момент часу t.

Тоді «кут», який проходить світло за час життя Всесвіту дорівнює $\varphi = \int_0^{t_0} \omega(t)dt = \int_0^{t_0} \frac{c}{\alpha\sqrt{t}} dt = \frac{2c}{\alpha}\sqrt{t_0}$.

Відстань, яка буде від точки початку руху світла до точки закінчення: $L = \varphi R(t_0) = 2ct_0$. Цікаво, що цей результат вдвічі більший за той, який був би отриманий у безкінечному Всесвіті, що не розширюється.

2 спосіб

Розв'яжемо без аналогій з виходами в додаткові виміри. Уявіть собі шнур, який одним кінцем закріплений до стіни (точка народження світла), а інший кінець тягнеться в сторону. Закон збільшення відстані між двома будь-якими точками шнура нам відомий: відстань зростає як корінь з часу з певним коефіцієнтом пропорційності, який залежить від того яку пару точок ми обрали. І вже по цьому шнуру біжить світло, як жук.

Отже, відстань між двома нерухомим точками у Всесвіті зростає пропорційно кореню з часу. Але це одні й ті самі точки, вони не рухаються самі по собі, розтягується лише простір, як гума. Тоді логічно ввести певний параметр, що вказував би нам на відстань між нерухомими тілами в певний конкретний обраний нами фіксований момент часу τ. Нехай в момент часу τ відстань між точками дорівнює l_τ, тоді відстань між ними в момент часу t:

$$l(t) = l_\tau \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}} = l_\tau * a(t).$$

Тобто, щоб отримати відстань між двома нерухомими (не мають власної швидкості) точками в певний момент часу t ми маємо домножити l_τ (величина, що не залежить від часу) на функцію $a(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\tau}}$, яку в космології та Загальній теорії відносності називають масштабним фактором, який дозволяє дуже зручно працювати із розмірами у Всесвіті, який розширюється (часто масштабний фактор обирають таким, щоб він дорівнював одиниці в момент часу, в якому існуємо ми з вами, проте це не принципово). У порівнянні із першим способом розв'язку даної задачі, $a(t)$ є аналогом радіусу кола, бо вказує наскільки розширився простір, l_τ – кутом між точками кола в певний момент часу, а $l(t)$ –відстанню між точками в даний момент.

Нехай світло вийшло в початковий момент часу із певної точки і віддаляється від неї. Нехай також в певний момент часу світло знаходиться на відстані $l(t)$ від точки старту. Відстань між цим положенням світла і місцем старту світла в момент часу τ дорівнює l_τ. Якщо світло внаслідок свого руху зміститься в нову точку простору $l(t) + dl$, то між точкою старту світла та новим положенням світла відстань в момент часу τ вже дорівнює $l_\tau + dl_\tau$. Для дуже малого проміжку часу можна вважати, що Всесвіт не встигає розширитись і $dl = dl_\tau * a(t) = c * dt$.

Звідси $dl_\tau = \frac{c*dt}{a(t)}$, і, значить, аналог кутової швидкості з першого способу розв'язку рівний $\frac{dl_\tau}{dt} = \frac{c}{a(t)}$, і, врешті-решт

$$l_\tau = \int_0^{t_0} \frac{c\sqrt{\tau}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\tau} \int_0^{t_0} \frac{c}{\sqrt{t}} dt = 2c\sqrt{t_0\tau}$$

Тобто, колись (через τ після народження Всесвіту) між нами та найбільш віддаленою точкою Всесвіту, яку ми можемо бачити, бо до нас дійшло світло, була відстань $2c\sqrt{t_0\tau}$. А наразі між нами відстань

$$L = l_\tau a(t_0) = 2ct_0.$$

3 спосіб

Проте, більшість з вас намагались розв'язувати задачу «в лоб» через диференціальне рівняння. Нехай світло народжується в якійсь певній точці в перші моменти Всесвіту. Нехай через певний час світло опинилось на відстані y(t). «Швидкість світла» відносно початкової точки, в якій воно народилось:

$$\frac{dy}{dt} = v = c + v_{\text{простору}},$$

тут $v_{\text{простору}}$- швидкість точки простору, яку зараз проходить світло відносно точки народження світла.

Якщо відстань між двома точками простору дорівнює y(t)=$\alpha\sqrt{t}$, то швидкість віддалення однієї з цих точок відносно іншої внаслідок розширення Всесвіту $v_{\text{простору}} = \frac{d(\alpha\sqrt{t})}{dt} = \frac{\alpha}{2\sqrt{t}}$. Але коефіцієнт α нам невідомий і він є різним для різних пар точок у Всесвіті, тож підставимо у швидкість розширення цей коефіцієнт з формули y(t)=$\alpha\sqrt{t}$.Отримуємо:

$$v_{\text{простору}} = \frac{y(t)}{2t}.$$

В результаті отримуємо доволі неприємне диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{dt} = c + \frac{y(t)}{2t}.$$

Розв'яжемо його розбивши розв'язок на загальний розв'язок однорідної частини рівняння та частний розв`язок неоднорідної частини.

Тобто, $y(t) = y_{\text{однор}}(t) + y_{\text{неоднор}}(t)$. Вгадаємо $y_{\text{неоднор}}$. Нехай $y_{\text{неоднор}} = K * t$, де К – певний коефіцієнт. Підставимо цей вираз у диференціальне рівняння. Вийде:

$$\frac{dy_{\text{неоднор}}}{dt} = c + \frac{y_{\text{неоднор}}}{2t}$$

$$\text{К} = c + \frac{\text{К}}{2}$$

Бачимо, що $y_{\text{неоднор}} = K * t$ – частним розв'язком, якщо К = 2с. Тобто $y_{\text{неоднор}} = 2ct$.

Підставимо у диф. рівняння вираз для загального розв'язку $y(t) = y_{\text{однор}} + 2ct$. Отримаємо:

$$\frac{dy_{\text{однор}}(t)}{dt} = \frac{y_{\text{однор}}(t)}{2t}$$

Розв'язок цього диференціального рівняння знайти дуже просто прямим інтегруванням.

$$y_{\text{однор}}(t) = A\sqrt{t},$$

де А – константа інтегрування.

Отже, загальний розв'язок: $y(t) = 2ct + A\sqrt{t}$.

Але, на цьому наші проблеми не закінчуються. Ми не можемо визначити константу А підставивши початкову умову, що при t=0, $y(t = 0) = 0$, адже ми отримаємо тривіальну тотожність.

Взагалі, варто зауважити, що ми навіть по формі диф. рівняння могли зрозуміти, що точка t=0 є особливою, адже част стоїть у знаменнику одного з доданків.

Проте, цю проблему можна обійти наступним трюком. Скажемо, що світло народжується в певний дуже маленький час після народження Всесвіту. Нехай цей момент часу дорівнює $t_{\text{поч}}$. Тоді початкова умова стає такою, що при t=$t_{\text{поч}}$, $y(t=0)=0$. Підставляємо це в загальний розв'язок і отримуємо:

$$y(t=t_{\text{поч}})=0=2ct_{\text{поч}}+A\sqrt{t_{\text{поч}}},$$

Звідки $A=-2c\sqrt{t_{\text{поч}}}$.

Тоді $y(t_0)=2ct_0-2c\sqrt{t_{\text{поч}}t_0}$. Якщо спрямувати $t_{\text{поч}}$ до нуля, то ми отримуємо вже добре знайому нам відповідь $L=y(t_0)=2ct_0$.

(191) Ми не будемо переходити в неінерціальну (обертову) систему відліку, це тільки зробить розгляд складнішим (подумайте, чому). Очевидно, центр мас системи залишиться нерухомим. Позначимо деформацію пружини x, а кутову швидкість обертання ω. Скористаємось законами збереження моменту імпульсу та механічної енергії. Врахуємо, що швидкість руху кульки складається з «радіальної» (вона за модулем дорівнює $\left|\frac{dx}{2dt}\right|$) та складової, перпендикулярної до осі пружини (її модуль $\frac{l+x}{2}\omega$). Закони збереження можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} 2m\left(\frac{l+x}{2}\right)^2\omega=2m\frac{l}{2}v_0, \\ \frac{m}{4}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{m}{4}(l+x)^2\omega^2+\frac{kx^2}{2}=mv_0^2. \end{cases}$$

Підставивши в друге рівняння $\omega=\frac{2lv_0}{(l+x)^2}$, отримаємо диференціальне рівняння:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=4v_0^2\frac{x(2l+x)}{(l+x)^2}-\frac{2kx^2}{m}.$$

Розв'язати це рівняння ми навіть не намагатимемося. Проте його треба проаналізувати. Зручніше буде перейти до безрозмірних змінних z,T за допомогою підстановки $x=lz, t=\frac{l}{2v_0}T$. Тоді рівняння набуває вигляду $\left(\frac{dz}{dT}\right)^2=\frac{z(2+z)}{(1+z)^2}-Az^2$. Тут введена стала $A=\frac{kl^2}{2mv_0^2}$.

Врахуємо також, що $z=0$, $\frac{dz}{dT}=0$, коли $T=0$. Значення z змінюється від нуля до певного максимального значення, за якого теж виконується умова $\frac{dz}{dT}=0$. Відповідне рівняння можна звести до кубічного, воно обов'язково має дійсний розв'язок. Переписавши це рівняння у вигляді $1+\frac{2}{z}=A(1+z)^2$, отримуємо в лівій частині монотонно спадаючу функцію, а в правій — монотонно зростаючу. Тому рівняння має *єдиний* розв'язок. Підставивши числові значення, дістанемо $A=\frac{20}{9}$. Тепер легко підібрати корінь останнього наведеного рівняння: $z=0{,}5$.

Таким чином, деформація пружини змінюється від нуля до 0,1 м, а довжина пружини — від 0,2 до 0,3 м. Кутова швидкість змінюється від 13,3 рад/с (за максимальної довжини пружини) до 30 рад/с (за мінімальної довжини, тобто коли пружина недеформована).

(192) Початкова кількість атомів Li в посудині: $N_{\text{Li}} = \frac{p_0 V_0}{kT_0} = 7{,}24 \cdot 10^{16}$. Тут k — стала Больцмана. Отже, $N_{\text{Li}} = 1000N$. Таким чином, після завершення рекомбінації електронів і йонів кількість атомів літію в посудині збільшиться на одну тисячну частку. Під час кожного акту рекомбінації виділяється енергія $W_0 = 5{,}4\ \text{еВ} = 8{,}64 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Напишемо закон збереження енергії, не враховуючи можливість переходу атомів у збуджений стан:

$$1000N \cdot \frac{3}{2}kT_0 + NW_0 = 1001N \cdot \frac{3}{2}kT.$$

$$\text{Звідси } T = \frac{1000}{1001}T_0 + \frac{2W_0}{3003k} = 1042\ \text{К}.$$

Можна спробувати врахувати те, що частина атомів буде у збудженому стані. Але частка таких атомів становить $\exp\left(-\frac{W_{\text{збудж}}}{kT}\right)$, що становить приблизно $\exp(-20)$ або $2 \cdot 10^{-9}$. Отже, витрати енергії на їх збудження та вплив цих витрат на кінцеву температуру можна й не враховувати.
Остаточно отримуємо $\Delta T = 41$ К.

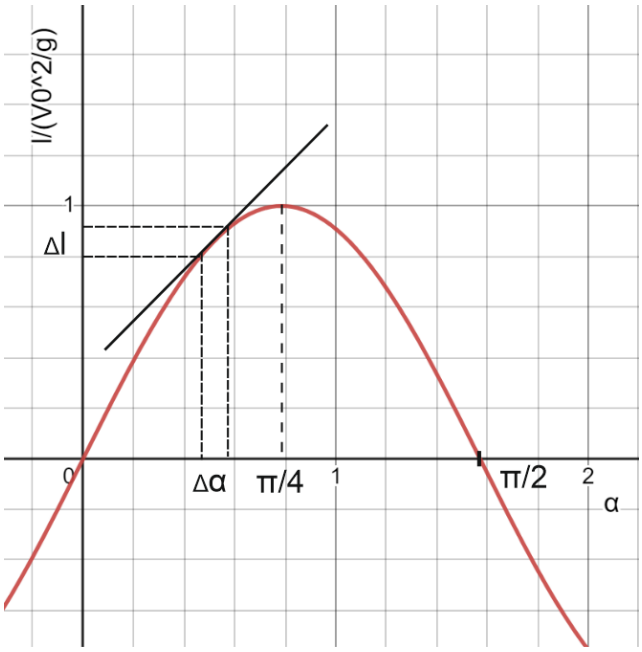
(193) 1) Запишемо систему рівнянь рівноприскореного руху на горизонтальну та вертикальну вісі для кінцевої точки руху (перед ударом із Землею):

$$\begin{cases} l = V_0 \cos(\alpha)\, t \\ 0 = V_0 \sin(\alpha)\, t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Звідси

$$l = \frac{V_0^2}{g}\sin(2\alpha)$$

Побудуємо графік цієї залежності.



Бачимо, що кучність попадань тим більша, чим менший кут нахилу дотичної (чим менша похідна за модулем), адже якщо кут нахилу дотичної невеликий, то всі картоплі випущені в кут $\Delta\alpha$ попадуть в доволі невеликий проміжок Δl. Отже, у випадку проміжку а) від 15° до 35° максимальна кучність буде при куті 35°, тобто на вістані $\frac{V_0^2}{g}\sin(70°) \approx 0.94\frac{V_0^2}{g}$. На проміжку

б) від $35°$ до $50°$ максимальна кучність буде при куті $45°$, тобто на вістані $\frac{V_0^2}{g}\sin(90°) = \frac{V_0^2}{g}$. На проміжку в) від $50°$ до $70°$ максимальна кучність буде при куті $50°$, тобто на вістані $\frac{V_0^2}{g}\sin(100°) \approx 0.98\frac{V_0^2}{g}$.

2) Запишемо систему рівнянь рівноприскореного руху на горизонтальну та вертикальну вісі для будь-якого моменту польоту:

$$\begin{cases} x = V_0\cos(\alpha)\,t \\ y = V_0\sin(\alpha)\,t - \dfrac{gt^2}{2} \end{cases}$$

Позбуваючись часу отримуємо траєкторію:

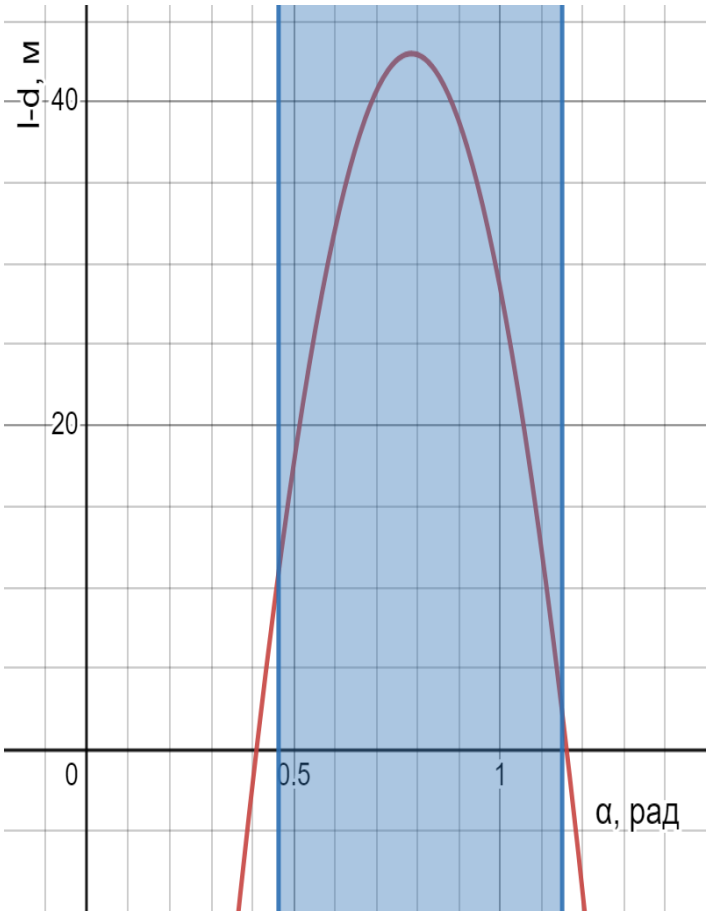
$$y(x) = x * tg(\alpha) - \frac{gx^2}{2V_0^2}(1 + tg^2(\alpha))$$

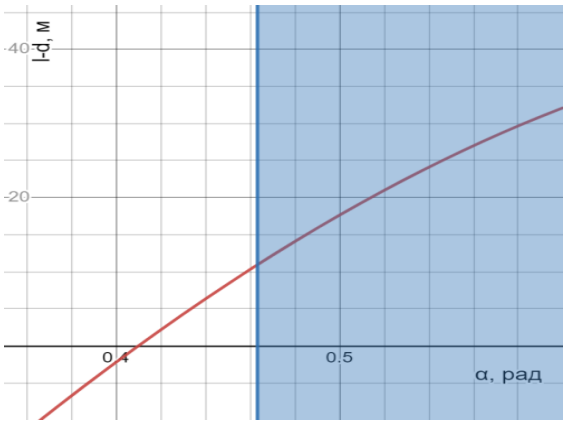
Умовою перелітання картоплі через будинок є $y(x = d) \geq h$. Тобто, ми маємо задовільнити дві умови:

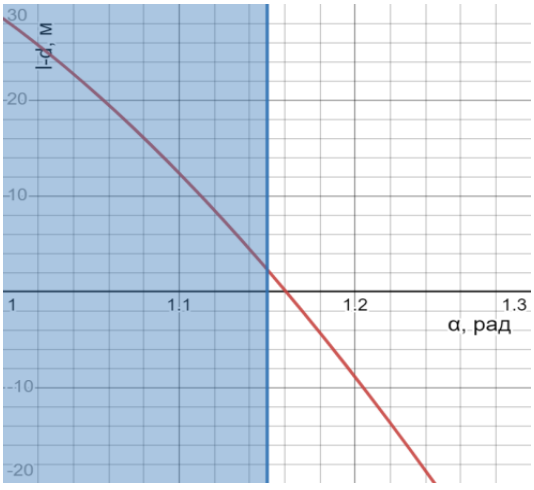
А) $d * tg(\alpha) - \frac{gd^2}{2V_0^2}(1 + tg^2(\alpha)) \geq h$

Б) $l - d = \frac{V_0^2}{g}\sin(2\alpha) - d$, тобто довжина неураженої картоплею зони за будівлею має бути мінімальною.

Зобразимо графічно ці дві умови.







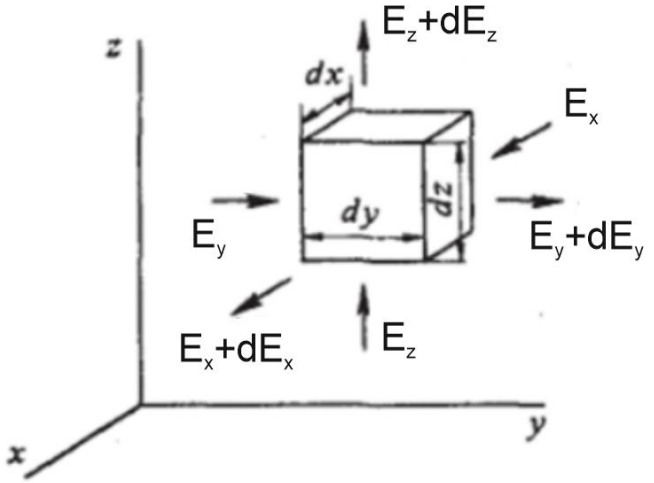
Зафарбована область відповідає умові А.

Всередині цієї області потрібно знайти найменше значення кривої з умови Б. Очевидно, що це найменше значення буде або на лівій межі зафарбованої області, або на правій. Далі можна рахувати обидва значення на краях аналітично, але ми зробимо це графічно. Наблизимо нижню частину графіка.

Спочатку подивимось на ліву межу. Бачимо, що перетин близький до 10 м.

Тепер правий край. Очевидно, що на правому краю межі шукана відстань є меншою. Приблизно вона дорівнює 2 метри. Це і є відповідь на питання другої частини задачі.

(194) А) З міркувань симетрії вздовж вісі y поле змінюватись не може, адже електроди дуже довгі. Отже, коефіцієнт $\beta = 0$.



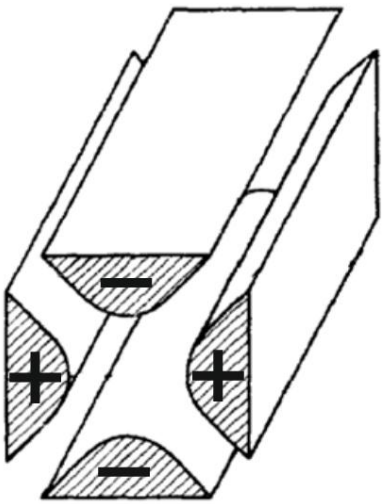
Для визначення α та γ скористаємось теоремою Гауса для маленького паралелепіпеда, що знаходиться в довільній точці між електродами. Повний потік електричного поля має дорівнювати 0.

$E_z(z)dxdy - E_z(z+dz)dxdy +$
$E_x(x)dzdy - E_x(x+dx)dzdy = 0$

Звідси

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_x}{\partial x}$$

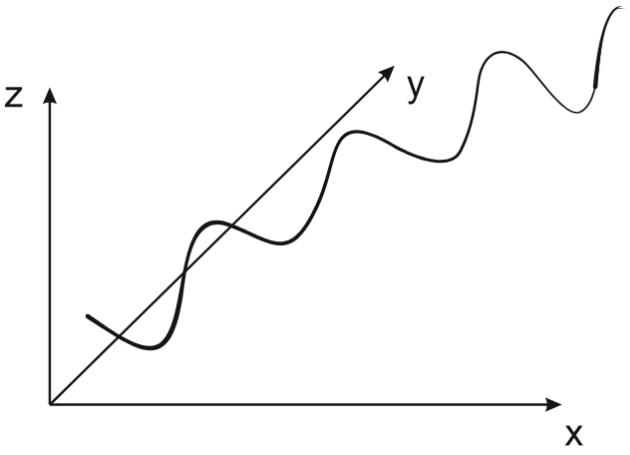
В результаті отримуємо, що $\alpha = -\gamma$ і функція потенціалу приймає наступний вигляд. Оберемо варіант, в якому $\gamma = 1$, а $\alpha = -1$. (Очевидно, що $\gamma = -1$, а $\alpha = 1$ теж є можливим варіантом, але це та сама система, просто повернута на $\pi/2$ навколо вісі y.)



Б) З огляду на вирази для проекцій напруженостей можливим є лише такий варіант розташування зарядів як на рисунку нижче.

У випадку другого можливого варіанту ($\gamma = -1$, $\alpha = 1$) Знаки зарядів на рисунку просто протилежні до тих, які зображені на рисунку.

В) Рух по вісі z для електрона буде стійкий, адже при відхиленнях від вісі y буде виникати повертаюча сила, а ось по вісі x сила буде навпаки виводити електрон з положення рівноваги, тож рух буде якісно нагадувати наступну функцію:



Тобто по вісі z будуть гармонічні коливання, по вісі y рівномірний рух, а по вісі x відхилення (за експоненційним законом) до одного з електродів (в залежності від

того, до якого електрода електрон перебував ближче на початку руху).

(195) А) Згідно з умовою і розмірністю маємо вирази для густини струму і напруженості $j = \frac{I}{S}$, $E = \frac{U}{l}$. Враховуючи закон Ома $I = \frac{U}{R}$, а також вираз для опору $R = \rho_0 \frac{l}{S}$, знаходимо:

$$E = \rho_0 j = 0{,}27 \frac{\text{В}}{\text{м}}.$$

Б) Дріт почне рухатись в напрямку руху електронів. Оскільки за напрямок струму прийнято брати напрямок руху додатних зарядів, то дріт зрушить в напрямку того контакту, на якому був «+» (мав більший потенціал). Знайдемо швидкість руху електронів.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{\Delta N_e e}{\Delta t} = \frac{n_e \Delta V e}{\Delta t} = \frac{n_e S \Delta l e}{\Delta t} = n_e S v e,$$

звідки

$$v = \frac{j}{n_e e},$$

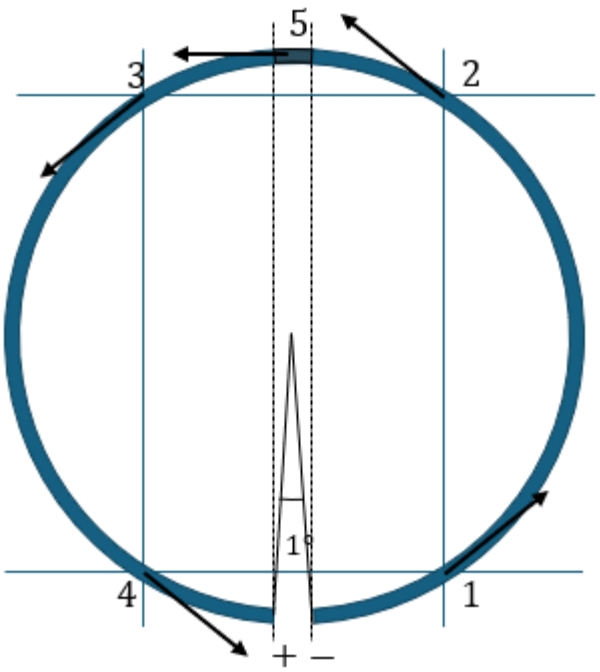
де введена концентрація електронів n_e. Далі можна скористатися простою ідеєю: у скільки разів маса дроту більша за масу його електронів провідності, у стільки ж разів швидкість руху провідника буде меншою за v. Це є відображенням закону збереження імпульсу:

$$N_e m_e v = m u,$$

де m – маса провідника ($m = \rho V$), а N_e – загальна кількість електронів провідності ($N_e = n_e V$). Підставимо все у вираз для швидкості провідника:

$$u = \frac{N_e m_e v}{m} = \frac{n_e V m_e j}{\rho V n_e e} = \frac{m_e j}{\rho e} \approx 2 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

В) Розглянемо рух цього ж дроту, якщо він матиме форму майже замкненого кола дугою у 359° (див. схем. рис.). На рисунку була вибрана довільна точка 1 з напрямком руху деякої групи електронів Симетрично до неї були позначені точки 2, 3, 4 з такими ж за кількістю групами електронів, а, отже, й такими ж імпульсами. Сумарний імпульс цих чотирьох груп як по вертикалі, так і по горизонталі дорівнює нулю. При такому підході не скомпенсованими залишаться тільки електрони у частині кільця 5, симетричній до частини, якої не достає. Імпульс цієї частини буде у 359 разів меншим за імпульс у випадку прямолінійного дроту. Отже і швидкість центру мас цього майже кільця, який знаходиться на 1/359 частину радіусу вище від геометричного центру, спрямована вліво і дорівнюватиме



$$\frac{u}{359} \approx 5{,}6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

З невеликим наближенням можна сказати, що точки кільця обертатимуться навколо центру за годинниковою стрілкою майже зі швидкістю u.

Г) Припустимо, що після відведення контактів електрони трохи зсунулись на деяку невелику відстань x. Тоді попереду їхнього руху на краю дроту виникла надлишкова концентрація від'ємного заряду, а позаду, на кінці дроту, який за інерцією покинули електрони, концентрація такого ж за величиною додатного заряду $q = \Delta N_e e = n_e \Delta V e = n_e S x e$. Різнойменні заряди наче на пластинах конденсатора утворюють в основному об'ємі провідника поле напруженістю $E = \frac{q}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{\varepsilon_0} n_e x e$. Це поле діє на електрони з силою $F = eE$ і гальмує їх. Проекція другого закону Ньютона набуває вигляду:

$$m_e a_x = -eE = -\frac{1}{\varepsilon_0} n_e x e^2.$$

Маємо рівняння гармонічних коливань

$$a_x + \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 m_e} x = 0$$

з періодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\varepsilon_0 m_e}{n_e e^2}}.$$

Чверть цього періоду і буде часом τ зупинки, з моменту, коли на електрон не діяла сила, до моменту, коли ця сила виросла до максимального значення і зупинила частинку. Цікаво, що час зупинки не залежить ні від початкового значення струму, ні від характеристик металу, окрім концентрації електронів провідності.

Вважаючи для оцінки, що кожен атом алюмінію віддає в зону провідності один електрон, маємо, що концентрація електронів дорівнює концентрації атомів, або $n_e = n_a = \frac{N}{V} = \frac{m}{\mu}\frac{N_A}{V} = \frac{\rho N_A}{\mu} = 6 \cdot 10^{28}\text{м}^{-3}$. Час зупинки

$$\tau = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 m_e}{n_e e^2}} \approx 10^{-16}\text{с}.$$

Виявляється така зупинка відбувається майже миттєво, і електрони не встигають пройти якусь помітну відстань навіть у порівнянні з атомом.

(196) Спочатку, коли апарат перебував на коловій орбіті, були врівноважені сила притягання його до Сонця та відцентрова сила:

$\frac{\gamma M m}{R_0^2} = \frac{m u_0^2}{R_0}$, звідки початкова швидкість апарату

$$u_0 = \sqrt{\frac{\gamma M}{R_0}}\,. \qquad (1)$$

Після розгортання «вітрила» швидкість апарату не зміниться, а загальна сила притягання до Сонця зменшиться, оскільки тиск сонячного випромінювання буде «відштовхувати» апарат від Сонця. Тому рівновага сил порушиться, тобто орбіта стане з колової еліптичною.

Оскільки повна потужність випромінювання Сонця W_S, на «вітрило» падатиме випромінювання потужністю

$$W = W_S \frac{S_0}{4\pi R^2}. \qquad (2)$$

Кожен квант, падаючи на поверхню «вітрила» та дзеркально відбиваючись, передаватиме йому імпульс $\Delta p = \frac{2h\upsilon}{c}$. (3)

При цьому додаткова сила відштовхування від Сонця за рахунок тиску випромінювання складатиме $F_r = N\Delta p = \frac{2Nh\upsilon}{c}$, (4)

де N - кількість квантів, що падає на за одиницю часу. В той же час енергія одного кванту, помножена на N, дасть потужність випромінювання, що падатиме на поверхню, тобто $W = Nh\upsilon$. Звідси отримуємо:

$$F_r = \frac{2Nh\upsilon}{c} = \frac{2W}{c} = \frac{W_S S_0}{2\pi c R^2}. \qquad (5)$$

Тоді сила притягання апарату до Сонця з урахуванням тиску випромінювання:

$$F = F_g - F_r = \frac{\gamma Mm}{R^2} - \frac{W_S S_0}{2\pi c R^2}. \qquad (6)$$

Для цієї сили зберігається залежність від віддалі $F \sim \frac{1}{R^2}$, тобто нова орбіта справді буде еліптичною.

Якби в початковий момент існував баланс сил притягання та відштовхування, було б справедливим співвідношення

$$\frac{\gamma Mm}{R_0^2} - \frac{W_S S_0}{2\pi c R_0^2} = \frac{m\mathrm{v}_0^2}{R_0}, \qquad (7)$$

що дало б початкову швидкість

$$\mathrm{v}_0 = \sqrt{\frac{1}{R_0}\left(\gamma M - \frac{W_S S_0}{2\pi mc}\right)}. \qquad (8)$$

Насправді ж швидкість в початковий момент часу складатиме u_0 (1). Оскільки $u_0 > \mathrm{v}_0$, і швидкість в цей момент спрямована перпендикулярно до напрямку на Сонце, можна стверджувати, що дана точка буде найближчою до Сонця для нової еліптичної орбіти (перигелієм). Протилежною точкою орбіти буде точка найбільшого віддалення від Сонця (афелій). За законом збереження моменту імпульсу маємо:

$$mu_0 R_0 = mu_1 R_1. \qquad (9)$$

В співвідношенні (9) невідомими є значення швидкості і віддалі від Сонця в афелії u_1 та R_1. Тому самого рівняння (9) для їхнього знаходження недостатньо. Потрібне ще одне рівняння, яким може бути закон збереження енергії. Потенціальна енергія, що відповідає силі притягання (6), залежатиме від віддалі між апаратом та Сонцем за законом:

$$E_p = -\frac{\gamma Mm}{R} + \frac{W_S S_0}{2\pi c R}. \tag{10}$$

Тоді закон збереження енергії запишеться:

$$\frac{mu_0^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{R_0} + \frac{W_S S_0}{2\pi c R_0} = \frac{mu_1^2}{2} - \frac{\gamma Mm}{R_1} + \frac{W_S S_0}{2\pi c R_1}, \tag{11}$$

або ж

$$\frac{mu_0^2}{2} - \frac{\alpha}{R_0} = \frac{mu_1^2}{2} - \frac{\alpha}{R_1}, \tag{12}$$

де

$$\alpha = \gamma Mm - \frac{W_S S_0}{2\pi c}. \tag{13}$$

З (9) маємо $u_1 = u_0 \frac{R_0}{R_1}$. Підставимо це в (12). Отримаємо:

$$\frac{mu_0^2}{2} - \frac{\alpha}{R_0} = \frac{m}{2}\left(u_0 \frac{R_0}{R_1}\right)^2 - \frac{\alpha}{R_1},$$

Звідки для величини $1/R_1$ маємо квадратне рівняння:

$$\frac{m}{2}(u_0 R_0)^2 \left(\frac{1}{R_1}\right) - \alpha \frac{1}{R_1} - \frac{mu_0^2}{2} + \frac{\alpha}{R_0} = 0, \tag{14}$$

розв'язки якого:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{m(u_0 R_0)^2}\left[\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2m(u_0 R_0)^2\left(\frac{mu_0^2}{2} - \frac{\alpha}{R_0}\right)}\right] \tag{15}$$

Підставимо сюди значення u_0 з виразу (1).

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{m\frac{\gamma M}{R_0}R_0^2}\left[\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2m\frac{\gamma M}{R_0}R_0^2\left(\frac{m}{2}\frac{\gamma M}{R_0} - \frac{\alpha}{R_0}\right)}\right] =$$

$$= \frac{1}{\gamma Mm R_0}\left[\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \gamma Mm(\gamma Mm - 2\alpha)}\right]$$

Нарешті, підставимо значення α з (13). Отримаємо:

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{\gamma MmR_0}\left[\gamma Mm-\frac{W_S S_0}{2\pi c}\pm\sqrt{\left(\gamma Mm-\frac{W_S S_0}{2\pi c}\right)^2+\gamma Mm\left(\gamma Mm-2\left(\gamma Mm-\frac{W_S S_0}{2\pi c}\right)\right)}\right]=$$

$$=\frac{1}{\gamma MmR_0}\left[\gamma Mm-\frac{W_S S_0}{2\pi c}\pm\sqrt{(\gamma Mm)^2-\frac{\gamma MmW_S S_0}{\pi c}+\left(\frac{W_S S_0}{2\pi c}\right)^2-(\gamma Mm)^2+\frac{\gamma MmW_S S_0}{\pi c}}\right]=$$

$$=\frac{1}{\gamma MmR_0}\left[\gamma Mm-\frac{W_S S_0}{2\pi c}\pm\frac{W_S S_0}{2\pi c}\right]$$

Якщо в цьому виразі обрати знак «+», вийде $R_1=R_0$, що можливо лише для колової орбіти. Але в нашому випадку орбіта еліптична, і $R_1>R_0$. Отже, слід обрати знак «-». Тоді

$$\frac{1}{R_1}=\frac{1}{\gamma MmR_0}\left[\gamma Mm-\frac{W_S S_0}{\pi c}\right],$$

Тобто для віддалі апарату від Сонця в афелії маємо:

$$R_1=\frac{\gamma MmR_0}{\gamma Mm-\frac{W_S S_0}{\pi c}}=\frac{R_0}{1-\frac{W_S S_0}{\pi c\gamma Mm}} \qquad (16)$$

(197) А) Промені від віддаленої точки, які падають на кришталик, можна вважати паралельними. Вони заломлюються і сходяться на сітківці ока, утворюючи зображення (Рис.1). Запишемо закон заломлення світла і прирівняємо вираз для радіусу зіниці з двох трикутників: з гострим кутом γ на сітківці і гострим кутом α у центрі кривизни кришталика.

$$\begin{cases} n=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\approx\dfrac{\alpha}{\beta}, \\ 2R\gamma\approx r\alpha, \\ \alpha=\gamma+\beta. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему, знаходимо

$$\frac{r}{R}=2\frac{n-1}{n}=\frac{1}{2}.$$

Радіус кривизни кришталика r у два рази менший за радіус кривизни R сітківки, а з нею і склоподібного тіла.

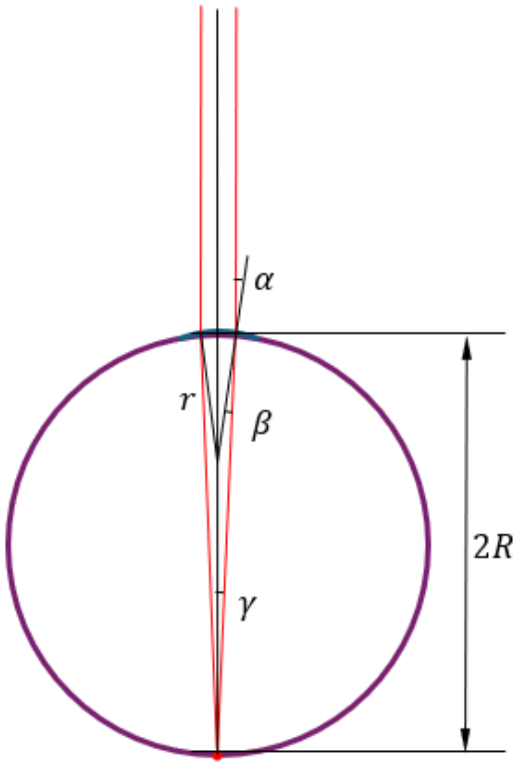


Рис.1

Б) Хід променів в оптиці можна вважати оберненим. Тому промені від точки на сітківці у такому ж стані ока вийдуть паралельними (Рис.1), і потраплятимуть в око окуліста, яке сприйматиме їх як нескінченно віддалені. На зразок того, як ми через лупу у її фокальній площині розслабленим оком розглядаємо деталі зображення, що формально віддалено у нескінченність, але й має нескінченні розміри. Отже зображення точок сітківки буде віддалене на нескінченність, хоча окуліст розуміє, що насправді сітківка поряд.

В) Кутове збільшення можна ввести як відношення тангенсу кута α, під яким, підсвічуючи ліхтариком, окуліст розглядає деякий елемент сітківки, до тангенсу кута δ, під яким такого ж розміру елемент розглядав би окуліст у повітрі з відстані найкращого зору $l = 25$ см. Все робимо аналогічно знаходженню кутового збільшення лупи. Оскільки зображення нескінченно далеко, відстань, з якої розглядає сітківку окуліст, для розрахунків не має значення. На схематичному Рис.2 елемент сітківки позначений стрілкою довжиною h, його уявне зображене віддалене на нескінченність – великою блідою стрілкою умовної довжини H. Користуємось малістю кутів, оскільки елемент сітківки, який можна побачити крізь зіницю ока малий навіть коли зіниця розширена спеціальними очними краплями, і законом заломлення $n \approx \frac{\alpha}{\beta}$.

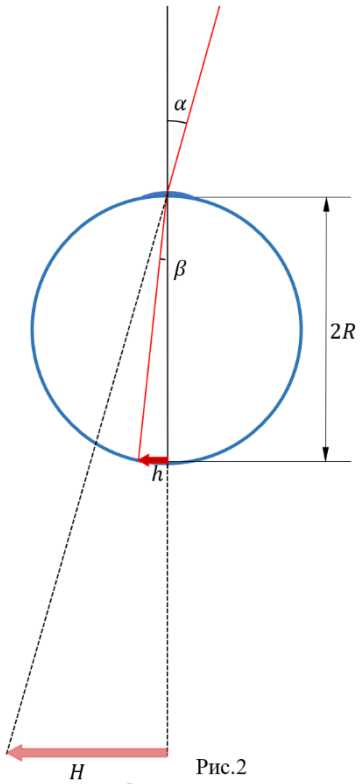


Рис.2

Кутове збільшення: $\frac{tg\alpha}{tg\delta} \approx \frac{n\beta}{\frac{h}{l}} = n\frac{\frac{h}{2R}}{\frac{h}{l}} = n\frac{l}{2R} \approx \frac{4}{3}\frac{25\text{см}}{2\text{см}} \approx 17.$

Г) Коли людина відкрила очі під водою, все, що вона бачить, здається розмитим. Оскільки коефіцієнти заломлення води, кришталика і склоподібного тіла практично однакові (за умовою задачі однакові), то заломлення світлових променів на границі вода-кришталик, кришталик-склоподібне тіло не відбуватиметься, і око можна розглядати як своєрідну камеру обскура. Тоді ступінь розмитості визначається в першу чергу розміром отвору, особливо, якщо йдеться про зображення від «віддалених точкових джерел світла». За умовою діаметр зіниці ока (відкритої частини кришталика) у 10 разів менший за діаметр сітківки. Практично паралельні промені від віддаленого джерела будуть обмежені отвором зіниці ока і проектуватимуть її на сітківку. Два таких круга дотикатимуться, якщо кут між напрямками на джерела буде $\theta = \frac{d}{2R} = \frac{1}{20}$ (Рис.3). Отже, розмиті плями від двох віддалених точкових джерел світла людина бачитиме як роздільні, якщо кут між напрямками на джерела буде більшим за $\theta = \frac{1}{20} \approx 2{,}9°$.

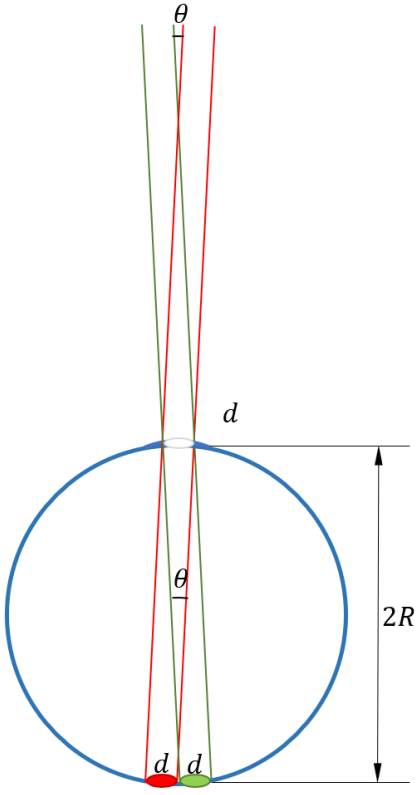


Рис.3

(198) Розглянемо всю систему: труби + вода в інерційній системі відліку – земля. Сумарний момент сил який діє на цю систему – $M(\omega)$. Якщо часу пройшло вже багато, то кутову швидкість можна вважати постійною. Тоді зміна моменту імпульсу системи полягає виключно в тому, що вода вилітає з ненульвовим кутовим моментом. А саме, зміна моменту імпульсу за час Δt

$$\Delta L = Rv_x\Delta m,$$

де Δm – маса води яка вилітає за час Δt, $\Delta m = 2\rho Sv\Delta t$ (2 труби); v_x – горизонтальна швидкість з якою вода вилітає з фонтану відносно землі, $v_x = v\cos\alpha - \omega R$.

З основного рівняння обертальної динаміки, маємо

$$M(\omega) = \frac{\Delta L}{\Delta t} = R(v\cos\alpha - \omega R)2\rho S v. \qquad (1)$$

Слід зазначити, що це рівняння виконується тільки при обертанні системи. Для $\omega = 0$ воно переходить у нерівність $M(\omega) > R2\rho S v^2 \cos\alpha$. Детальніше цей факт буде розглянутий пізніше.

З цього рівняння знаючи $M(\omega)$ можна знайти $\omega(\alpha)$. Це ми і зробимо, але трохи пізніше. Зараз спробуємо знайти вираз для $r(\alpha)$, знаючи $\omega(\alpha)$.

Радіус на який долітає вода $r = v_x t$, де t – це час, який кожна краплина води проводить у повітрі. $t = \frac{2v_y}{g}$, а $v_y = v\ \sin\alpha$. Звідси:

$$r = (v\cos\alpha - \omega R)\frac{2v\sin\alpha}{g}. \qquad (2)$$

Тепер розглянемо конкретні випадки:

а) $M(\omega) = M_0 = \text{const}$. Рівняння (1) приймає вигляд:

$$M_0 = R(v\cos\alpha - \omega R)2\rho S v.$$

Отже:

$$(v\cos\alpha - \omega R) = \frac{M_0}{2R\rho S v}. \qquad (3)$$

Підставляємо до рівняння (2) і отримаємо:

$$r = \frac{M_0}{2R\rho S v}\frac{2v\sin\alpha}{g}. \qquad (4)$$

Видно, що r максимальне тоді, коли максимальне α. Як видно з рівняння (3) максимальне α відповідає мінімальній кутовій швидкості. Мінімально можлива $\omega = 0$. Звідси:

$$\cos\alpha = \frac{M_0}{2R\rho S v^2}.$$

Підставляємо до (4) і отримуємо:

$$r = \frac{M_0}{\rho g R S}\sqrt{1 - \left(\frac{M_0}{2\rho R S v^2}\right)^2}.$$

Окремо треба розглянути випадок, коли фонтан навіть не почне обертатись. Розв'язок для цього режиму очевидний – кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$ і $r = (v\cos\alpha - \omega R)\frac{2v\ \sin\alpha}{g} = \frac{v^2}{g}$. Зрозуміло, що цей варіант найкращий, коли він взагалі можливий. Знайдемо умови, коли цей варіант реалізується: $2R\rho S v^2\cos\alpha < M_0$. Тобто

$$\sqrt{2}R\rho S v^2 < M_0.$$

Інакше таке положення неможливе і реалізується варіант зазначений вище.

б) $M(\omega) = A\cdot\omega,\ A = \text{const}$. Рівняння (1) приймає вигляд:

$$A\cdot\omega = R(v\cos\alpha - \omega R)2\rho S v.$$

Отже:

$$\omega = \frac{v}{R}\frac{2\rho SvR^2}{A + 2\rho SvR^2}\cos\alpha$$

Підставляємо до рівняння (2) і отримаємо:

$$r = \left(v\cos\alpha - v\frac{2\rho SvR^2}{A + 2\rho SvR^2}\cos\alpha\right)\frac{2v\sin\alpha}{g} = \frac{1}{1 + \frac{2\rho SvR^2}{A}}\frac{v^2\sin 2\alpha}{g}.$$

З цього рівняння ми бачимо, що кут під яким має вилітати вода дорівнює $\frac{\pi}{4}$ і не залежить від A! Використавши цей факт отримаємо

$$r = \frac{1}{1 + \frac{2\rho SvR^2}{A}}\frac{v^2}{g}.$$

Відповідь:

а) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ і $r = \frac{v^2}{g}$, якщо $\sqrt{2}R\rho Sv^2 < M_0$;

$\cos\alpha = \frac{M_0}{2R\rho Sv^2}$ і $r = \frac{M_0}{\rho gRS}\sqrt{1 - \left(\frac{M_0}{2\rho RSv^2}\right)^2}$, якщо $\sqrt{2}R\rho Sv^2 > M_0$.

б) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ і $r = \frac{1}{1+\frac{2\rho SvR^2}{A}}\frac{v^2}{g}$.

(199) А) Як і в полі сили тяжіння, так і в полі неінерціальних відцентрових сил в різних точках концентрація газів різна. Перейдемо в систему відліку із центрифугою, яка обертається із кутовою швидкістю ω.

Скористаємось розподілом Больцмана для визначення концентрації газів в різних точках: $n = Ce^{-\frac{E}{kT}}$,

де Е – потенціальна енергія частинки газу певної маси в полі потенціальної сили (в даному випадку відцентрової сили), а С – певна константа. Відмітимо, що можна було й не використовувати розподіл Больцмана, а просто розглянути стійкість малого шматку газу одного сорту на довільній відстані від центру центрифуги – результати були б однакові.

При віддаленні від центру центрифуги енергія частинки в полі відцентрової сили падає, адже вона спрямована від центру. Приймемо енергію частинки на внутрішній поверхні центрифуги рівною нулю, тоді враховуючи, що $W_{\text{пот}}(r) - W_{\text{пот}}(r_1) = -\int_{r_1}^{r} F_{\text{відцентр}}dr = -\int_{r_1}^{r} F_{\text{відцентр}}dr = -\frac{m\omega^2(r^2 - {r_1}^2)}{2}$,

отже $W_{\text{пот}}(r) = -\frac{m\omega^2(r^2 - {r_1}^2)}{2}$.

Тоді, концентрація молекул гексафториду $^{235}UF_6$ на відстані r:

$$n_{235}(r) = C_1 e^{\frac{m_{235}\omega^2(r^2 - {r_1}^2)}{2kT}},$$

а концентрація молекул гексафториду $^{238}UF_6$ на відстані r:

$$n_{238}(r) = C_2 e^{\frac{m_{238}\omega^2(r^2 - {r_1}^2)}{2kT}},$$

де m_{235} та m_{238} маси молекул гексафторидів $^{235}UF_6$ та $^{238}UF_6$ відповідно.

Маса гексафториду $^{235}UF_6$ m_{235} менша за m_{238}, а отже концентрація n_{238} з віддаленням від центру центрифуги буде наростати швидше, аніж n_{235}. Це значить, що найвища відносна концентрація гексафториду $^{235}UF_6$ буде біля внутрішньої стінки центрифуги і буде дорівнювати:

$$\eta_* = \frac{n_{235}(r_1)}{n_{235}(r_1) + n_{238}(r_1)} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Відомо, що відносна концентрація гексафториду $^{235}UF_6$ в усій центрифузі дорівнює η=0.7%.

Б) Виразимо цю відносну концентрацію через C_1, C_2 та інші параметри системи.

Нехай h – висота центрифуги. Кількість частинок гексафториду $^{235}UF_6$ в усій центрифузі:

$$N_{235} = C_1 \int_{r_1}^{r_2} C_1 e^{\frac{m_{235}\omega^2(r^2 - {r_1}^2)}{2kT}} 2\pi r h dr = C_1 \frac{2kT\pi h}{m_{235}\omega^2}\left(e^{\frac{m_{235}\omega^2({r_2}^2 - {r_1}^2)}{2kT}} - 1\right)$$
$$\approx C_1 \frac{2kT\pi h}{m_{235}\omega^2}\left(e^{\frac{m_{235}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} - 1\right).$$

Аналогічно: $N_{238} \approx C_2 \frac{2kT\pi h}{m_{238}\omega^2}\left(e^{\frac{m_{238}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} - 1\right)$

Тоді,

$$\eta = \frac{N_{235}}{N_{235} + N_{238}} = \frac{\frac{C_1}{m_{235}}\left(e^{\frac{m_{235}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} - 1\right)}{\frac{C_1}{m_{235}}\left(e^{\frac{m_{235}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} - 1\right) + \frac{C_2}{m_{238}}\left(e^{\frac{m_{238}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} - 1\right)}.$$

Звідси $C_2 = C_1 \frac{m_{238}}{m_{235}} \frac{\left(e^{\frac{m_{235}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{m_{238}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} - 1\right)} \frac{1-\eta}{\eta}$.

Остаточно, концентрація гексафториду $^{235}UF_6$ біля внутрішньої стінки центрифуги буде:

$$\eta_* = \frac{1}{1 + \frac{m_{238}}{m_{235}} \frac{\left(e^{\frac{m_{235}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{m_{238}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} - 1\right)} \frac{1-\eta}{\eta}} = \frac{\eta}{\eta + \frac{m_{238}}{m_{235}} \frac{\left(e^{\frac{m_{235}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{m_{238}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} - 1\right)} (1-\eta)}$$

$$m_{235} \approx 5.79585 * 10^{-25} \text{ кг}$$

$$m_{238} \approx 5.84578 * 10^{-25} \text{ кг}$$

Підставивши числові значення отримуємо, що $e^{\frac{m_{235}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} \gg 1$ та $e^{\frac{m_{238}\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} \gg 1$, отже можна зробити спрощення: $\eta_* \approx \frac{\eta}{\eta + \frac{m_{238}}{m_{235}} e^{\frac{(m_{235} - m_{238})\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} (1-\eta)}$

Враховуючи, що $\eta \ll 1$ та $\frac{m_{238}}{m_{235}} e^{\frac{(m_{235} - m_{238})\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} (1-\eta) \gg \eta$ отримуємо:

$$\eta_* \approx \eta \frac{m_{235}}{m_{238}} e^{\frac{(m_{238}-m_{235})\omega^2 {r_2}^2}{2kT}} \approx 1.07\eta$$

Якщо зробити n ітерацій, то відносна концентрація виросте в 1.07^n, що з іншого боку дорівнює $\frac{3\%}{0.7\%}$.

Звідси n$\approx log_{1.07}(\frac{3.1}{0.7}) \approx 22$.

(200) А) Енергія диполя в електричному полі $W = -\vec{p}\vec{E} = -\gamma E^2$, отже якщо $\gamma > 0$, то диполь буде прагнути в область більшого поля.

Запишемо модуль вектора напруженості електричного поля разом із залежністю від часу в загальному вигляді для стоячої хвилі $E = Csin(ax)\sin(\omega t + \varphi_0)$.
Енергія диполя, що утвориться з атому в даному електричному полі:

$$W = -\vec{p}\vec{E} = -\gamma C^2 sin^2(ax)\sin^2(\omega t + \varphi_0)$$

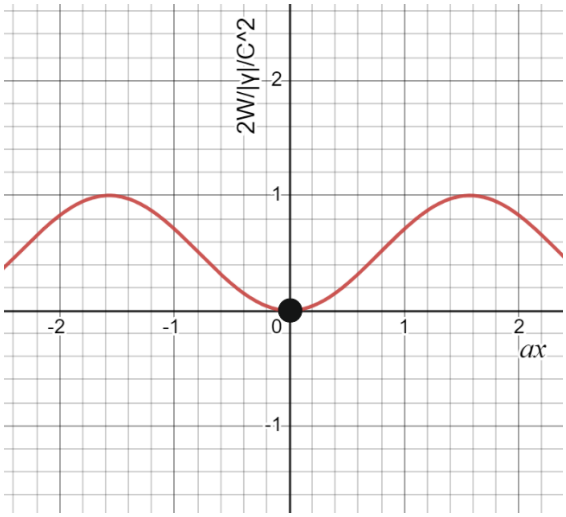
Якщо коливання в часі швидкі, то усереднимо енергію по часу:

$$\bar{W} = -\frac{1}{2}\gamma C^2 sin^2(ax)$$

А) Розглянемо спочатку ситуацію з $\gamma < 0$.
Енергія

$$\bar{W} = \frac{1}{2}|\gamma| C^2 sin^2(ax)$$

буде виглядати як на графіку нижче з позначеною точкою стійкої рівноваги (яких очевидно нескінченна кількість).



Біля положення рівноваги

$$\bar{W} = \frac{1}{2}|\gamma| C^2 sin^2(ax) \approx \frac{|\gamma| C^2 a^2 x^2}{2}$$

Що є потенціальною енергією для квазіпружної сили, а отже

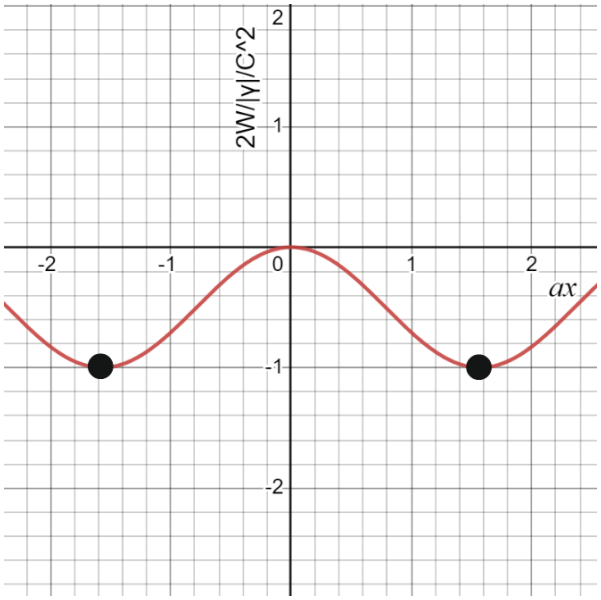
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{|\gamma| C^2 a^2}}$$

Б) Розглянемо ситуацію з $\gamma > 0$.

Енергія

$$\bar{W} = -\frac{1}{2}\gamma C^2 sin^2(ax)$$

буде виглядати як на графіку нижче з позначеними точками стійкої рівноваги (яких очевидно нескінченна кількість).



Змістимо вісь x таким чином, щоб нуль координат по іксам був в точці рівноваги: $ax \to ax` + \frac{\pi}{2}$.

$$\bar{W} = -\frac{1}{2}\gamma C^2 sin^2(ax) = -\frac{1}{2}\gamma C^2 sin^2\left(ax` + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\gamma C^2 cos^2(ax`)$$
$$\approx -\frac{1}{2}\gamma C^2\left(1 - \frac{(ax`)^2}{2}\right)^2 \approx -\frac{1}{2}\gamma C^2(1 - (ax`)^2) = -\frac{1}{2}\gamma C^2 + \frac{\gamma C^2 a^2 x^2}{2}$$

І знову ми отримуємо потенціальну енергію квазіпружної сили. Отже, період лишиться таким самим.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\gamma C^2 a^2}}.$$

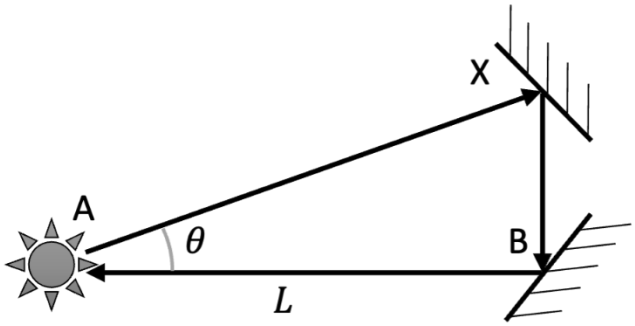
(201) В авторському розв'язку ми знайдемо спочатку загальну формулу і потім просто підставимо випадки $45°$ та $135°$.

В умові сказано, що «Жоден наземний експеримент не може виміряти швидкість світла! Ми можемо виміряти лише, так звану, прямо-зворотню швидкість світла – середню швидкість з якою світло вилітає з однієї точки та повертається назад до неї.»

По-перше розглянемо експеримент з горизонтальним дзеркалом в точці C. Світло відбивається від C назад в точку A. Оскільки швидкості вгору та вниз однакові, то середня швидкість буде теж їм дорівнювати. Тобто $v_{A\to C} = v_{A\to D} = c$.

Тепер уявімо собі, що більш досвідчений експериментатор вирішив повторити дослід з вимірюванням швидкості світла, але використав декілька дзеркал під різними кутами (див. рисунок). В результаті він все одно отримає таку ж середню швидкість, рівну c.

Використовуючи цей уявний експеримент і знайдемо швидкість $v_{A\to X}$ вздовж A->X, тобто під кутом θ до напряму A->B.



Дзеркала поставимо таким чином, щоб кут $\angle ABX = 90°$, тоді час за який світло пролітає A->X->B->A дорівнює

$$t = \frac{AX}{v_{A\to X}} + \frac{BX}{v_{X\to B}} + \frac{AB}{v_{B\to A}}.$$

Нехай $AB = L$, тоді $AX = \frac{L}{\cos\theta}$, $BX = L\tan\theta$. З умови відомо, що $v_{B\to A} = \frac{2}{3}c$ та $v_{X\to B} = v_{A\to D} = c$. Підставляючи, отримаємо

$$t = \frac{\frac{L}{\cos\theta}}{v_{A\to X}} + \frac{L\tan\theta}{c} + \frac{L}{\frac{2}{3}c}.$$

З іншого боку, ми знаємо, що середня швидкість дорівнює c, тобто

$$c = \frac{AX + BX + AB}{t} = \frac{\frac{L}{\cos\theta} + L\tan\theta + L}{t}.$$

Об'єднуючи ці два рівняння отримаємо

$$\frac{L}{c\cos\theta} + \frac{L\tan\theta}{c} + \frac{L}{c} = \frac{\frac{L}{\cos\theta}}{v_{A\to X}} + \frac{L\tan\theta}{c} + \frac{L}{\frac{2}{3}c}.$$

Після спрощень

$$\frac{1}{c\cos\theta} = \frac{1}{v_{A\to X}\cos\theta} + \frac{1}{2c},$$

$$v_{A\to X} = \frac{c}{1 - \frac{\cos\theta}{2}}.$$

Це і є фінальна відповідь – залежність швидкості від напрямку. Легко перевірити, що кути $0°$, $90°$ та $180°$ дають правильну швидкість вздовж A->B та B->A. Також легко отримати відповідь для випадків $45°$ та $135°$ – це буде $\frac{c}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}}$ та $\frac{c}{1+\frac{1}{2\sqrt{2}}}$, відповідно.

Відповідь: в загальному випадку, залежність швидкості світла від напрямку

$$v_{A\to X}=\frac{c}{1-\frac{\cos\theta'}{2}},$$

для випадків $45°$ та $135°$ буде $\frac{c}{1-\frac{1}{2\sqrt{2}}}$ та $\frac{c}{1+\frac{1}{2\sqrt{2}}}$, відповідно.

P.S. Для всіх зацікавлених: відео, яке надихнуло нас на цю задачу, з каналу Veritasium «Why No One Has Mesured The Speed Of Light».

(202) А) У краплини зарядженої рідини є дві енергії: енергія електричної взаємодії кулі «самої із собою» та поверхнева енергія.

Енергію електричної взаємодії можна рахувати двома стандартними шляхами: порахувати повну енергію електричного поля або порахувати роботу по створенню такої кулі при нанесенні на неї шарів рідини з нескінченності. Енергія електричної взаємодії: $W_{\text{ел}}=\frac{3}{5}\frac{q^2}{R}$.

Поверхнева енергія: $W_{\text{пов}}=4\pi\sigma R^2$.

З закону збереження енергії кінетична енергія уламків рівна сумарній потенціальній енергії цілої кулі мінус потенціальні енергії уламків, враховуючи, що радіус уламку зменшується в $\sqrt[3]{2}$ по відношенню до початкової кулі через розділ пополам:

$$W_{\text{кін}}=\frac{3}{5}\frac{q^2}{R}\left(1-2^{-\frac{2}{3}}\right)+4\pi\sigma R^2(1-2^{1/3})$$

Ця енергія має бути більшою за нуль, інакше початкова крапля буде стабільною відносно такого розпаду

$$\frac{3}{5}\frac{q^2}{R}\left(1-2^{-\frac{2}{3}}\right)+4\pi\sigma R^2(1-2^{1/3})\geq 0$$

Звідси $\frac{q^2}{\sigma R^3}\geq 14.7$

Швидкість кожного уламку $V=2\sqrt{\frac{1}{m}(\frac{3}{5}\frac{q^2}{R}\left(1-2^{-\frac{2}{3}}\right)+4\pi\sigma R^2(1-2^{1/3}))}$

Б) Знайдемо аналогічну різницю енергій при розпаді уламків на 2 частини:

$$W_{\text{розп}}=\frac{3}{5}\frac{q^2}{R}\left(\frac{2^{-\frac{2}{3}}}{2}-2\frac{2^{\frac{2}{3}}}{16}\right)+4\pi\sigma R^2\left(\frac{2^{\frac{1}{3}}}{2}-2\frac{1}{2^{\frac{4}{3}}}\right)=0.07\frac{q^2}{R}-2.06\sigma R^2$$

З умови розпаду першої найбільшої краплини випливає, що перший доданок $0.07\frac{q^2}{R}\geq 1.03\sigma R^2$. Це означає, що в залежності від параметрів системи дочірні краплі (після першого розпаду) можуть бути як стійкими до розпаду на дві половинки (якщо $W_{\text{розп}}<0$) або нестійкими (якщо $W_{\text{розп}}>0$).

Якщо $\frac{q^2}{\sigma R^3}>29.4$, то дочірні краплі нестійкі, якщо $\frac{q^2}{\sigma R^3}<29.4$, то стійкі.

1) Енергія ядерної взаємодії: $W_{\text{яд}}=-\alpha_1 V$.

Поверхнева енергія: $W_{\text{пов}} = \alpha_2 S$.

Електрична енергія: $W_{\text{ел}} = \frac{3}{5}\frac{Z^2 {q_e}^2}{R}$.

Тоді енергія ядра урану:

$$W_u = -\alpha_1 \frac{4}{3}\pi R^3 + \alpha_2 4\pi R^2 + \frac{3}{5}\frac{Z^2 {q_e}^2}{R} = -2994.5 \text{ МеВ}.$$

Тут R=8 фм – радіус ядра урана-238.

Енергія кожного уламку:

$$W_{u/2} = -\alpha_1 \frac{4}{3}\pi R^3 * \frac{1}{2} + \alpha_2 4\pi R^2 * \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} + \frac{3}{5}\frac{Z^2 {q_e}^2}{R} * \frac{1}{4 * 2^{-\frac{1}{3}}} = -1412.6 \text{ МеВ}.$$

Енергетичний вихід реакції дорівнює: $Q = |W_u| - 2|W_{u/2}| = 169.3$ МеВ

(203) Перш за все знайдемо потужність, яку споживає двигун теплового насосу

$$\boldsymbol{P_{сп} = IUcos\varphi}, \quad (1)$$

де $\boldsymbol{I}$ та $\boldsymbol{U}$ – діючі значення сили струму та напруги.

Відомо, що для гармонічного струму

$$\boldsymbol{I = \frac{I_0}{\sqrt{2}}},\ \boldsymbol{U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}} \quad (2)$$

З (1) та (2) отримуємо

$$\boldsymbol{P_{сп} = \frac{1}{2} I_o U_o cos\varphi}. \quad (3)$$

Якщо вважати, що робота насосу здійснюється у неперервному режимі, то за час $\boldsymbol{d\tau}$ двигун насосу виконає роботу

$$\boldsymbol{\delta A' = P_к d\tau = \frac{1}{2} I_o U_o d\tau cos\varphi}. \quad (4)$$

Нехай миттєве значення в момент часу $\boldsymbol{\tau}$ холодильного коефіцієнту насосу $\boldsymbol{\xi}$, отже, використовуючи (4) можемо записати вираз для кількості теплоти $\boldsymbol{\delta Q_н}$, яку для цього моменту за час $\boldsymbol{d\tau}$ двигун насосу відбирає від оточуючого середовища – вулиці

$$\boldsymbol{\delta Q_н = \xi \delta A'}. \quad (5)$$

З (4) та (5)

$$\boldsymbol{\delta Q_н = \frac{1}{2} I_o U_o \xi d\tau cos\varphi}. \quad (6)$$

За цей же час кількість теплоти, яка надійде в приміщення завдяки роботі насосу можна знайти з закону збереження енергії (ЗЗЕ)

$$\boldsymbol{\delta Q_{пр} = \delta A' + \delta Q_н}. \quad (7)$$

Підставимо (4) та (6) у (7)

$$\boldsymbol{\delta Q_{пр} = (1 + \xi)\frac{1}{2} I_o U_o d\tau cos\varphi = \varkappa \frac{1}{2} I_o U_o d\tau cos\varphi}. \quad (7')$$

Нехай в момент часу $\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\tau} \geq 0$) температура в приміщенні була $\boldsymbol{T(\tau)}$. Тоді за час $\boldsymbol{d\tau}$ в приміщення надходить кількість теплоти $\boldsymbol{\delta Q_{пр}}$, що визначається виразом (7′), але водночас йдуть і «витратні» процеси, які пов'язані з відведенням тепла з кімнати.

Один з цих «витратних» каналів – виток тепла за рахунок тепловіддачі зовнішніх граней стін приміщення. Інший канал втрат за рахунок виходу деякої маси нагрітого в об'ємі кімнати повітря назовні через щілини та інші порушення герметичності приміщення.

Розглянемо закон зміни маси в кімнаті в процесі її нагрівання. За умовою задачі об'єм приміщення та тиск в ньому залишаються сталими. Отже, з рівняння Клапейрона-Менделєєва для моментів часу $\boldsymbol{\tau}$ та $\boldsymbol{\tau + d\tau}$ можемо записати наступне.

$$\text{При} \quad T = T_O\colon\ m = m_O. \quad \text{Тому:} \quad \text{const} = m_O T_O. \quad \text{Звідси:}$$

$$m(T(\tau)) = \frac{m_O T_O}{T}. \tag{8}$$

Знайшли закон зміни маси в приміщенні як функцію від часу $\boldsymbol{\tau}$, що минув від початку її нагрівання. Різниця між $\boldsymbol{m_o}$ та $\boldsymbol{m(T(\tau))}$ і є масою, яка залишила приміщення за час $\boldsymbol{\tau}$ нагрівання кімнати.

В співвідношеннях (5)-(7′) ми використовуємо миттєві значення холодильного та теплового коефіцієнтів насосу. Замінимо ці параметри їх середніми значеннями за час прогрівання приміщення, як це допускає умова задачі. За стандартною процедурою маємо:

$$\bar{æ} = \bar{\xi} + 1 = \frac{1}{T_H - T_O}\int_{T_O}^{T_H}\frac{T dT}{T - T_C} = \frac{1}{T_H - T_O}\int_{T_O - T_C}^{T_H - T_C}\frac{(z + T_C)dz}{z} =$$

$$\left|\begin{matrix} T - T_C = z \\ dT = dz \\ T = z + T_C \end{matrix}\right|$$

$$= \frac{1}{T_H - T_O}\int_{T_O - T_C}^{T_H - T_C}\left(1 + \frac{T_C}{z}\right)dz = \frac{1}{T_H - T_O}(z + T_C \ln z)\Big|_{T_H - T_C}^{T_H - T_C} =$$

$$= \frac{1}{T_H - T_O}\left(T_H - T_C + T_C \ln(T_H - T_C) - (T_O - T_C) - T_C \ln(T_O - T_C)\right) =$$

$$= \frac{1}{T_H - T_O}\left(T_H - T_O + T_C \ln\frac{T_H - T_C}{T_O - T_C}\right) = 1 + \frac{T_C}{T_H - T_O}\ln\left(\frac{T_H - T_C}{T_O - T_C}\right).$$

Остаточно

$$\bar{æ} = 1 + \frac{T_C}{T_H - T_C}\ln\left(\frac{T_H - T_C}{T_O - T_C}\right). \tag{9}$$

Початкове значення (до нагрівання) внутрішньої енергії повітря в кімнаті

$$\frac{i}{2}\frac{m_0}{M}RT_0 = U_0,$$

де $\boldsymbol{i}$ – кількість ступенів вільності молекул, що входять до складу повітря; $\boldsymbol{M}$ – молярна маса повітря; $\boldsymbol{R}$ – універсальна газова стала.

З урахуванням (8) співвідношення (7′) можна подати у вигляді

$$\frac{\delta Q_{np}}{\delta A'} = æ; \quad \bar{æ} = \frac{<\delta Q_{np}>}{\delta A'} = 1 + \frac{T_C}{T_H - T_C}\ln\left(\frac{T_H - T_C}{T_O - T_C}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta Q_{np} = \bar{æ}\delta A' = \left(\frac{\bar{æ}}{2} I_0 U_0 \cos\varphi\right) d\tau. \qquad (7'')$$

Запишемо рівняння теплового балансу для довільного моменту часу $\boldsymbol{\tau}$, що минув від початку нагрівання. Врахуємо, що зміна внутрішньої енергії за таких обставин рівна $dU = \frac{i}{2}\frac{m(T)}{M}RdT + \frac{i}{2}\frac{dm(T)}{M}RT = \frac{i}{2}\frac{m(T)}{M}RdT - \frac{i}{2}\frac{m(T)}{MT}TdT = 0$. Отже, у втратах тепла треба врахувати лише роботу газу по розширенню $PdV = \frac{m(T)}{M}RdT$ та втрати через теплопровідність.

$$\frac{m(T)}{M}RdT + \alpha S(T + dT - T_C)d\tau \underset{3ЗЕ}{=} \left(\frac{\bar{æ}}{2} I_0 U_0 \cos\varphi\right) d\tau = Bd\tau. \qquad (10)$$

Тут коефіцієнт $B = \frac{\bar{æ}}{2} I_0 U_0 \cos\varphi$. Виконаємо підстановку (8) в (10)

$$\frac{m_0 T_0}{M} \cdot \frac{R}{T} dT + \alpha STd\tau + \underbrace{\alpha SdTd\tau}_{\|\ 0} - \alpha ST_C d\tau = Bd\tau; \qquad (11)$$

(ми знехтували в (11) добутком диференціалів з огляду на їх менший порядок малості у порівнянні з диференціалами першого порядку).

Нехай $\left(\frac{m_0 T_0}{M} R = D\right)$. Тоді (11) можна переписати у вигляді

$$D\frac{dT}{T} = (\alpha ST_C - \alpha ST + B)d\tau;$$

Звідки

$$d\tau = \frac{DdT}{T(\alpha ST_C - \alpha ST + B)} = \frac{DdT}{T(E - FT)} \Rightarrow d\tau = \frac{DdT}{T(E - FT)}. \qquad (12)$$

Зробимо ще одну заміну $E = \alpha ST_C + B$ та $F = \alpha S$.

Виконаємо розкладання дробу правої частини (12) на елементарні, застосувавши для цього метод невизначених коефіцієнтів із довідки. Маємо

$$\frac{D}{T(E - FT)} = \frac{a}{T} + \frac{b}{E - FT} = \frac{aE - aFT + bT}{T(E - FT)} = \frac{aE + T(b - aF)}{T(E - FT)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} aE = D; \\ b - aF = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = D/E; \\ b = DF/E \end{cases} \Rightarrow \frac{D}{T(E - FT)} = \frac{D}{ET} + \frac{DF}{E(E - FT)}. \qquad (13)$$

Перевірка коректності розкладу:

$$\left(= \frac{DE - \cancel{DFT} + \cancel{DFT}}{ET(E - FT)} = \frac{D\cancel{E}}{\cancel{E}T(E - FT)} = \frac{D}{T(E - FT}\right).$$

Після цього виконаємо інтегрування в (12) маючи результат розкладу дробу (13):

$$\tau = \int_{T_0}^{T} \frac{DdT}{T(E-FT)} = \frac{D}{E}\left(\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T} + \int_{T_0}^{T} \frac{FdT}{E-FT} + \right) = \frac{D}{E}\left(\ln T \Big|_{T_0}^{T} + \int_{E-FT_0}^{E-FT} \frac{F\left(-\frac{dz}{F}\right)}{z} + \right) =$$

$$\left| \begin{array}{l} E - FT = z \\ -FdT = dz \\ dT = -\frac{dz}{F} \end{array} \right|$$

$$= \frac{D}{E}(\ln T - \ln T_0 - \ln(E-FT) + \ln(E-FT_0)) = \frac{D}{E}\left(\ln \frac{T}{T_0} + \ln \frac{E-FT_0}{E-FT} \right) =$$

$$= \frac{D}{E} \ln \frac{T(E-FT_0)}{T_0(E-FT)}$$

$$\Rightarrow \tau \frac{E}{D} = \ln \frac{T(E-FT_0)}{T_0(E-FT)} \Rightarrow \frac{T(E-FT_0)}{T_0(E-FT)} = e^{\frac{E}{D}\tau}. \qquad (14)$$

Виконаємо перевірку найменувань:

$$\frac{\cancel{\text{К}}}{\cancel{\text{К}}} \cdot \frac{\text{Вт} - \frac{\text{Вт}}{\cancel{\text{К}}} \cdot \cancel{\text{К}}}{\text{Вт} - \frac{\text{Вт}}{\cancel{\text{К}}} \cdot \cancel{\text{К}}} = 1 = \left[\frac{T(E-FT)}{T_0(E-FT_H)} \right]. \left[E / D^{\tau} \right] = \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{Дж}} = 1.$$

Розв’яжемо (15) відносно температури. Отримуємо:

$$T(E-FT_0) = T_0(E-FT)e^{\frac{E}{D}\tau}.$$

$$TE - TFT_0 = T_0Ee^{\frac{E}{D}\tau} - FT_0Te^{\frac{E}{D}\tau};$$

$$T(E - FT_0 + FT_0e^{\frac{E}{D}\tau}) = T_0Ee^{\frac{E}{D}\tau};$$

$$T(\tau) = \frac{T_0Ee^{\frac{E}{D}\tau}}{E + FT_0(e^{\frac{E}{D}\tau} - 1)} = \frac{T_0E}{(E-FT_0)e^{\frac{E}{D}\tau} + FT_0}. \qquad (15)$$

(15) є шуканою відповіддю на перше запитання задачі.

Деякі наслідки з (15)

а) $\tau = 0$: $T(0) = \frac{T_0E}{E - F\cancel{T_0} + F\cancel{T_0}} = \frac{T_0E}{E} = T_0.$

б)$\tau \to \infty$: $T_\infty = \lim_{\tau \to 0} T(\tau) = \frac{E}{F} = \frac{\alpha S T_C + 1/2 \bar{\text{æ}} I_0 U_0 \cos\varphi}{\alpha S} = T_C + \frac{1}{2}\frac{\bar{\text{æ}}}{\alpha S} I_0 U_0 \cos\varphi.$

Отже

$$T_\infty = T_C + \frac{1}{2}\frac{\bar{æ}}{\alpha S} I_0 U_0 \cos\varphi. \qquad (16)$$

Середнє значення теплового коефіцієнту насоса в (16) задається виразом (9).

Отриманий вираз (16) є відповіддю на третє питання задачі.

Для відповіді на друге запитання задачі скористаємось залежністю (15). Виходить:

$$T(\tau^*) = T_H \Rightarrow \tau^* = \frac{D}{E}\ln\left(\frac{T_H(E - FT_0)}{T_0(E - FT_H)}\right). \qquad (17)$$

ОДЗ виразу (17):

$$\frac{E - FT_0}{E - FT_H} > 0 \Rightarrow (E - FT_0)(E - FT_H) > 0 \Rightarrow E - FT_H > 0 \Rightarrow FT_H < E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_H < \frac{E}{F} = T_C + \frac{1}{2}\frac{\bar{æ}}{\alpha S} I_0 U_0 \cos\varphi = T_\infty(\eta). \qquad (*)$$

Вираз (17) і є шуканим, де $\boldsymbol{\tau^*}$ – мінімальний час за який від початку нагрівання температура в приміщенні досягне значення $\boldsymbol{T_н}$, *якщо у всіх формулах, що містять ККД двигуна насоса покласти* $\boldsymbol{\varphi} = 0$ (при виконанні умови (*) ОДЗ).

Нарешті, подамо відповідь на останнє – четверте – запитання задачі.

$$\max T_\infty \geq T_H \Rightarrow T_H \leq T_C + \frac{1}{2}\frac{\bar{æ}}{\alpha S} I_0 U_0 \cos\varphi \Rightarrow T_C \geq T_H - \frac{1}{2}\frac{\bar{æ}}{\alpha S} I_0 U_0 \cos\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \min T_C = T_H - \frac{1}{2}\frac{\bar{æ}}{\alpha S} I_0 U_0 \cos\varphi. \qquad (18)$$

Зрозуміло, що мінімум виразу (18) (мінімум мінімуму) досягається, якщо покласти $\boldsymbol{\varphi} = 0$:

$$\min T_C = T_H - \frac{1}{2}\frac{\bar{æ}}{\alpha S} I_0 U_0 \qquad (19)$$

Вираз (19) і є відповіддю на четверте запитання задачі.

Задача повністю розв'язана.

Відповіді: $T(\tau) = \dfrac{T_0 E e^{\frac{E}{D}\tau}}{E + FT_0(e^{\frac{E}{D}\tau} - 1)} = \dfrac{T_0 E}{(E - FT_0)e^{\frac{E}{D}\tau} + FT_0}.$

$$\tau^* = \frac{D}{E}\ln\left(\frac{T_H(E - FT_0)}{T_0(E - FT_H)}\right).$$

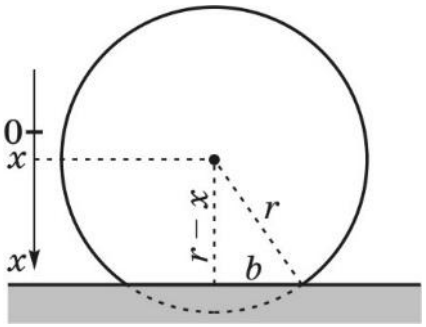
$$T_\infty = T_C + \frac{1}{2}\frac{\bar{æ}}{\alpha S} I_0 U_0 \cos\varphi.$$

$$\min T_C = T_H - \frac{1}{2}\frac{\bar{æ}}{\alpha S} I_0 U_0$$

де $E = \alpha S T_C + \frac{\bar{\varepsilon}}{2} I_0 U_0 \cos\varphi$, $D = \frac{m_0 T_0}{M} R$, $F = \alpha S$.

(204) А. М'яч торкається підлоги, маючи швидкість $v_{\max} = \sqrt{2aH}$, де $H = 1{,}5$ м, a — прискорення м'яча під час падіння з урахуванням сили тяжіння та архімедової сили. За другим законом динаміки $a = g - \frac{m_{\text{air}} g}{m} = g\left(1 - \frac{M_{\text{air}} p_{\text{atm}} V_0}{m R T_0}\right)$. Тут $V_0 = \frac{4\pi}{3} r^3 = 0{,}087$ м^3 — об'єм м'яча. Зазначимо, що різниця між прискоренням м'яча та прискоренням вільного падіння не така вже й маленька, бо середня густина м'яча перевищує густину повітря лише приблизно в 7 разів.

Під час зіткнення нижня частина оболонки, яка торкається підлоги, стає плоскою. Площа дотику $S = \pi b^2 = 2\pi r x$ (див. рисунок).



Ми врахували, що $x \ll r$. Сили, що виникають під час зіткнення, набагато перевищують силу тяжіння, тому цю останню силу ми не враховуємо. Сила, що діє на плоску ділянку оболонки, перевищує відповідну силу атмосферного тиску на величину $\Delta F = \Delta p S = (p_0 - p_{\text{atm}}) S$ (тут $p_0 = 120$ кПа). Саме такою можна вважати й рівнодійну всіх зовнішніх сил (якби зовнішній тиск на всі ділянки оболонки був однаковим, рівнодійна дорівнювала б нулю). Оскільки відносна зміна об'єму м'яча під час зіткнення мала, вважатимемо надлишковий тиск Δp незмінним. Тоді рівняння руху м'яча під час зіткнення можна записати у вигляді:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\frac{2\pi r \Delta p}{m} x.$$

Це рівняння гармонічних коливань з циклічною частотою $\omega = \sqrt{\frac{2\pi r \Delta p}{m}}$. Час зіткнення дорівнює половині періоду коливань, тобто $\boldsymbol{\tau = \frac{\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi m}{2 r \Delta p}} = 1{,}5 \cdot 10^{-2}}$ **с**.

Б. Перш за все скористаємося результатами розв'язання завдання А: $x_{\max} = \frac{v_{\max}}{\omega} = \sqrt{\frac{mgH}{\pi r \Delta p}\left(1 - \frac{M_{\text{air}} p_{\text{atm}} V_0}{m R T_0}\right)} = 2{,}5$ см. Отже, об'єм повітря всередині м'яча в момент максимального стискання зменшується на $\Delta V_{\max} = 0{,}51$ дм^3. Це становить малу частку об'єму м'яча: $\alpha = \frac{\Delta V_{\max}}{V_0} \approx 6 \cdot 10^{-3}$. Отже, зроблені вище наближення є припустимими.

За наведених умов можна вважати процес стиснення та подальшого розширення повітря адіабатним. Отже, $pV^\gamma = \text{const}$, де $\gamma = 1{,}4$ — показник адіабати для двохатомного газу (саме таким можна вважати повітря). Звідси $p_{\max}(1-\alpha)^\gamma = p_0$. Враховуючи, що $\alpha \ll 1$, маємо $p_{\max} = (1 + \alpha\gamma) p_0$. Таким чином, $p_{\max} - p_0 = \boldsymbol{\alpha\gamma p_0} \approx \mathbf{1}$ кПа. Це теж відносно незначне збільшення.

Щоб знайти $\Delta T_{\max}$, скористаємося рівнянням Клапейрона:

$$\frac{p_{\max}(V_0 - \Delta V_{\max})}{T_0 + \Delta T_{\max}} = \frac{p_0 V_0}{T_0}.$$

Звідси $\Delta \boldsymbol{T_{\max}} = \boldsymbol{\alpha(\gamma - 1)T_0} \approx \boldsymbol{0,7}$ К.

В. Оскільки $x_{\max} \ll H$, робота сил тяжіння та Архімеда:

$$A_1 = mgH\left(1 - \frac{M_{\text{air}} p_{\text{atm}} V_0}{mRT_0}\right) \approx 10 \text{ Дж}.$$

Максимальне збільшення внутрішньої енергії повітря в м'ячі

$$\Delta U = \frac{5}{2}\nu R \Delta T_{\max} = \frac{5 p_0 V_0 \Delta T_{\max}}{2T_0} \approx 60 \text{ Дж}.$$

Маємо явне «порушення» закону збереження енергії. Пояснюється воно просто: ми поки не врахували роботу атмосферного повітря під час стискання м'яча:

$$\boldsymbol{A_2 = p_{\text{atm}} \Delta V_{\max} \approx 50} \text{ Дж}.$$

Тепер все стає на свої місця: як і мало бути, $\boldsymbol{\Delta U = A_1 + A_2}$. Зазначимо, що $A_1 + A_2 \approx p_0 \Delta V_{\max}$.

Г. З наведених вище результатів маємо: за відсутності опору повітря прискорення руху м'яча $a = 8{,}7$ м/с^2, кінцева швидкість $v_{\max} = 5{,}1$ м/с, час падіння $t = 0{,}59$ с. Густина повітря $\rho_{\text{air}} = \frac{p_{\text{atm}} M_{\text{air}}}{RT_0} = 1{,}16 \ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$. За швидкості $v_{\max}$ сила опору повітря становила б 3,6 Н, що є суттєвою величиною для легкого м'яча. Але середнє значення сили опору значно менше. Тому можна розглядати рух без опору повітря як «нульове» наближення та шукати поправки до нього, вважаючи їх малими.

Наприклад, роботу сили опору можна оцінити так:

$$A_{\text{оп}} = -\int_0^t \frac{\rho_{\text{air}}(at)^2}{2} \pi r^2 \cdot at \cdot dt = -\frac{\pi \rho_{\text{air}} r^2 a^3 t^4}{8}.$$

Отримуємо $A_{\text{оп}} = -2{,}75$ Дж. Тоді кінцеву швидкість можна знайти через зміну кінетичної енергії: $\frac{m v_{\text{уточн}}^2}{2} = \frac{m v^2}{2} + A_{\text{оп}}$. Звідси отримуємо приблизне значення швидкості 4,4 м/с. Це вже досить непогане наближення (можна порівняти з наведеним нижче точним значенням).

Якщо тепер приблизно оцінити середню швидкість руху як $v_{\text{уточн}}/2$, отримаємо уточнений час руху:

$$t_{\text{уточн}} = 2H / v_{\text{уточн}} = 0{,}68 \text{ с}.$$

Отже, за нашою грубою оцінкою опір повітря зменшує кінцеву швидкість руху на 0,7 м/с і збільшує час руху на 0,09 с. Наведене нижче точне розв'язання дає відповідно близько 0,6 м/с і 0,03 с. Таким чином, ми принаймні отримали результати, правильні за порядком величини.

Додаток до пункту Г. ***Точне розв'язання.*** Виразимо густину повітря через відомі параметри, скориставшись рівнянням стану газу: $\rho_{\text{air}} = \frac{p_{\text{atm}} M_{\text{air}}}{RT_0}$. Напишемо рівняння другого закону динаміки з урахуванням сили опору рухові:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - \rho_{\text{air}} g V_0 - \frac{\pi r^2 \rho_{\text{air}}}{2} v^2.$$

Це рівняння можна написати у вигляді $\frac{dv}{u^2 - v^2} = kdt$. Тут параметр

$$u = \sqrt{\frac{8gr}{3}\left(\frac{m}{\rho_{\text{air}} V_0} - 1\right)}$$

це швидкість усталеного руху м'яча під час тривалого падіння; $k = \frac{\pi r^2 \rho_{\text{air}}}{2m}$. Зазначимо, що існує співвідношення $ku^2 = g\left(1 - \frac{\rho_{\text{air}} V_0}{m}\right)$. За наведених значень параметрів $\rho_{\text{air}} = 1{,}16\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$, $u = 7{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $k = 0{,}17\ \text{м}^{-1}$.

Після інтегрування з урахуванням початкових умов маємо

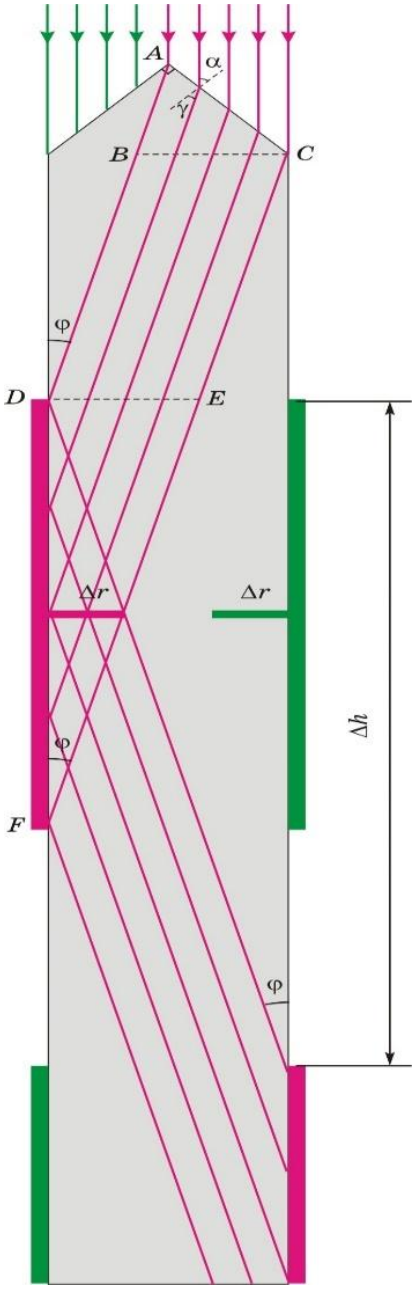
$kt = \frac{1}{2u} \ln \frac{u+v}{u-v}$, звідки $v(t) = u \cdot \text{th}(kut)$.

Після ще одного інтегрування отримаємо залежність переміщення від часу: $s(t) = k^{-1} \cdot \ln \text{ch}\,(kut)$.

Тепер ми можемо знайти час падіння

$$\boldsymbol{t = (ku)^{-1} \ln\left(e^{kH} + \sqrt{e^{2kH} - 1}\right) = 0{,}62}\ \text{с},$$

а також кінцеву швидкість $\boldsymbol{v = 4{,}5}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$.



(205) Розглянемо переріз виробу площиною, що проходить через вісь симетрії. Для спрощення рисунку розглянемо спочатку лише світлові промені, що падають на правий «схил» конічної поверхні (на рисунку, вони показані червоними, це ніяк не пов'язано зі справжнім кольором). Кут падіння α цих променів дорівнює 45°. Із закону заломлення знаходимо кут заломлення γ: $\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{n}$, звідки $\gamma = 30°$. Отже, після заломлення промені відхиляються від вертикалі на кут $\varphi = \alpha - \gamma = 15°$. Кут падіння світла на бічну поверхню циліндра (75°) значно перевищує граничний кут повного відбивання. Тому, як бачимо з рисунку, світло не виходить через бічну поверхню назовні, а промені всюди всередині пластика утворюють кут $\varphi = 15°$ з вертикаллю. Світло почергово потрапляє на ділянки поверхні, позначені вертикальними червоними смугами. Визначимо з трикутника ABC ширину BC горизонтального перерізу «червоного» пучка. Оскільки кути трикутника дорівнюють 60, 75 і 45°, отримуємо:

$$BC = AC\frac{\sin 60°}{\sin 75°} = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{r}{\sin 75°} = r\sqrt{6\left(2 - \sqrt{3}\right)} = 1{,}27r$$

(на олімпіаді, зрозуміло, швидше відразу скористатися калькулятором). Для отримання повної картини слід додати ще «зелені» промені, що падають на лівий «схил» конічної поверхні і йдуть симетрично до «червоних» відносно осі виробу.

Очевидно, що найменша товщина Δr світлого кільця (тобто найбільший його внутрішній радіус $r_{\text{темн}}$) спостерігається на рівні середини вертикальних смуг (червоних і зелених). Отже, отримуємо:

$$r_{\text{темн}} = r - \Delta r = r - \frac{BC}{2} = 0{,}37r = 3{,}7 \text{ мм}.$$

Період Δh легко знайти з прямокутного трикутника DEF (де $DE = BC$):

$$\Delta h = 2r \operatorname{ctg} \varphi = 75 \text{ мм}.$$

(206) А) Як ми з вами знаємо атоми та молекули є стабільними та якщо їх не чіпати можуть існувати в такому стані роками. Якщо подивитись на запропоновану модель молекули – в ній електрони не знаходяться в рівновазі (сила притягання від протонів більша ніж відштовхування від протилежного електрону). Більше того, як відомо з теореми Ірншоу, будь-яка комбінація зарядів не може знаходитись в стійкій рівновазі тільки завдяки силам Кулона. Тобто навіть якщо трохи змінити геометрію системи, рівновага такої молекули не буде стійка, а отже такі молекули не можуть довго існувати в природі.

Є декілька способів вирішити цю проблему. Наприклад, ввести додаткову силу відштовхування, яка б не підпускала частинки ближче ніж на $r = 0.1$ нм. Це можна собі уявити таким чином – нехай кожен електрон та протон це тверді кульки радіусом $r/2$. Тоді дійсно вони зберуться у конфігурацію, яку запропонував молодий дослідник. Інший спосіб, який історично використовувався для моделі атома водню – постулювати, що електрони обертаються навколо протонів. Тоді сили Кулона будуть компенсувати дію відцентрових сил.

Насправді, виявляється, що обидва ці пояснення неправильні і єдиний спосіб скласти правильну модель атома та молекули водню – використовувати квантову механіку. В той же час, проста запропонована модель дозволяє якісно зрозуміти, чому молекулам вигідно утворюватися та по порядку величини оцінити енергію, що виділяється за таких реакцій.

Б) Використовуючи формулу для потенціальної енергії електростатичної взаємодії двох зарядів, можна знайти потенціальну енергію одного атому водню в нашій моделі. Це буде:

$$E_{\text{атом}} = k\frac{q_p q_e}{r} = -k\frac{e^2}{r}.$$

Енергія вийшла від’ємною – це наслідок того, що електрон та протон притягаються.

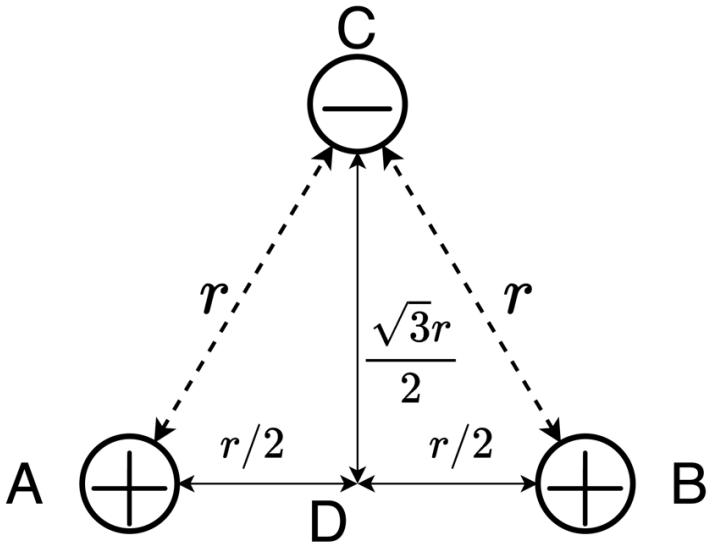
Тепер розглянемо молекулу водню в нашій моделі. Щоб знайти повну потенціальну енергію молекули нам треба врахувати всі попарні взаємодії. Це буде: 4 взаємодії протон-електрон, 1 взаємодія протон-протон та 1 взаємодія електрон-електрон. Всі відстані між протонами та електронами рівні та рівні r, тому енергія кожної такої взаємодії буде як енергія атома: $E_{p-e} = -k\frac{e^2}{r}$. Енергія взаємодії між протонами буде схожа, але додатня (оскільки протони відштовхуються): $E_{p-p} = k\frac{e^2}{r}$.

Тепер знайдемо енергію взаємодії двох електронів, для цього спочатку знайдемо відстань між ними. Розглянемо верхній трикутник ABC з електрону та двох протонів та проведемо висоту CD (див. рисунок). Оскільки трикутник рівносторонній, то висота буде також грати роль медіани та ділити відрізок AB навпіл, значить $AD = DB = r/2$. Використовуючи це, висоту CD

можна знайти з теореми Піфагора: $CD = \sqrt{CB^2 - DB^2} = \sqrt{r^2 - (r/2)^2} = \frac{\sqrt{3}r}{2}$. Відстань між електронами вдвічі більше за висоту: $r_e = \sqrt{3}r$.

Тоді енергія взаємодії двох електронів вийде

$$E_{e-e} = k\frac{e^2}{r_e} = k\frac{e^2}{\sqrt{3}r}.$$



Повна енергія молекули водню тоді виходить:

$$E_{\text{мол}} = 4E_{p-e} + E_{p-p} + E_{e-e} = -4k\frac{e^2}{r} + k\frac{e^2}{r} + k\frac{e^2}{\sqrt{3}r} = \left(-3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)k\frac{e^2}{r}.$$

Легко помітити, що потенціальна енергія молекули менша за потенціальну енергію початкових двох атомів:

$2E_{\text{атом}} = -2k\frac{e^2}{r}$.

Куди ж дівається зайва енергія? Вона переходить в кінетичну енергію молекули, що утворилась, та атомів/молекул навколо – тобто в теплову енергію.

Із закону збереження енергії випливає, що при утворенні однієї молекули виділяється така кількість тепла

$$Q = 2E_{\text{атом}} - E_{\text{мол}} = -2k\frac{e^2}{r} - \left(-3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)k\frac{e^2}{r} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)k\frac{e^2}{r}.$$

Або підставляючи числа

$$Q = 9.7 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}.$$

Щоб порахувати енергію яка виділиться для 1 кг атомів водню, треба знайти скільки утвориться молекул. Для цього треба просто всю масу розділити на масу однієї молекули. Оскільки кожна молекула складається з двох атомів водню: $m_{H_2} = 2m_H$. Тоді кількість молекул:

$$N = \frac{m}{2m_H} = \frac{1}{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27}} = 3.0 \cdot 10^{26}.$$

Значить, повна енергія, яка виділиться дорівнює:

$$Q_{\text{повна}} = NQ = 3.0 \cdot 10^{26} \cdot 9.7 \cdot 10^{-19} \approx 300 \text{ МДж}.$$

Відповідь: 300 МДж.

(207) Зауважимо, що під час рівномірного руху автоцистерни сила тиску на стінки цистерни є сталою. Найбільший тиск спостерігаємо поблизу дна цистерни. Його значення ρgh. Тиск зростає лінійно із збільшенням глибини, тому значення сили тиску F_1 на кожну грань цистерни

$$F_1 = \frac{1}{2}\rho g h^3 \qquad (1)$$

Під час гальмування та руху заокругленням спостерігаємо дію фіктивних сил інерції, пов'язані з неінерційністю системи відліку «автоцистерна». Модуль F_2 фіктивних сил інерції знаходимо з формули

$$F_2 = ma, \qquad (2)$$

де a – модуль прискорення, що діє на масу m в цистерні.
Таким чином, маса m діє на стінку із силою, що визначається з (2). Ця сила додається до модуля сили F_1 і створює загальну силу тиску на грань цистерни (прискорення $\boldsymbol{a}$ при гальмуванні або при русі коловим заокругленням перпендикулярне одній з граней цистерни).

$$m = \rho h^3. \qquad (3)$$

Отже, під час руху з прискоренням загальна сила, що діє на грань цистерни (передню або бічні) може бути знайдена з формули

$$F_{заг} = F_1 + F_2. \qquad (4)$$

З (1)-(4) маємо

$$F_{заг} = \rho h^3(\frac{1}{2}g + a). \qquad (5)$$

Для безпеки руху необхідно вимагати, щоб

$$F_{заг} < F_{гр}. \qquad (6)$$

(5) разом із (6) дає

$$\rho h^3(\frac{1}{2}g + a) \leq F_{гр}. \qquad (7)$$

При гальмуванні перед світлофором на прямолінійній ділянці шляху модуль прискорення a_1 можна знайти з виразу

$$a_1 = \frac{v^2}{2l}, \qquad (8a)$$

а при рівномірному русі заокруглення модуль прискорення a_2 є

$$a_2 = \frac{v^2}{R_i}, \qquad (8b)$$

де R_i – радіус і-го заокруглення.

Для виконання вимоги (7) прискорення a, знайдені з виразів (8a) та (8b) повинні бути такими, щоб для максимально дозволеного значення швидкості руху v_{max} не відбувся розрив цистерни.

За умовою $l \leq \frac{1}{2}(R_{max} - R_{min})$, тому з (8а) при русі з максимально дозволеною швидкістю маємо

$$a_1 \geq \frac{V_{max}^2}{Rmax - Rmin}. \quad (9)$$

Водночас, максимальне значення модуля прискорення a_2 при русі з максимально дозволеною швидкістю досягається при русі з мінімальним значенням радіуса заокруглення R_{min}:

$$a_{2max} = \frac{V_{max}^2}{R_{min}}. \quad (10)$$

За умовою найбільший радіус криволінійної ділянки R_{max} менш ніж в два рази більший за найменший радіус R_{min} заокруглення дороги, тому знаменник в (9) менший за знаменник у виразі (10), а, отже, відповідно й дріб у правій частині виразу (9) більший за дріб, що стоїть у правій частині виразу (10). Дійсно, нехай

$$R_{max} = 2\times R_{min} - \varepsilon\ (\varepsilon > 0).$$

Тоді

$$R_{max} - R_{min} = 2\times R_{min} - \varepsilon - R_{min} = R_{min} - \varepsilon < R_{min}.$$

Звідси приходимо до висновку про те, що

$$a_{1min} = \frac{V_{max}^2}{Rmax - Rmin} \quad (11)$$

за умов задачі завжди перевищує a_{2max}.

В (7) параметри ρ, h та g є сталими, змінним параметром є модуль прискорення a. Знайдемо його

$$a \leq \frac{F_{\text{гр}}}{\rho h^3} - \frac{g}{2.} \quad (12)$$

Якщо a_{1min} перевищить значення a з виразу (11), то відбудеться розрив цистерни. Отже, повинна виконуватись вимога

$$a_{1min} \leq a \leq \frac{F_{\text{гр}}}{\rho h^3} - \frac{g}{2.} \quad (13)$$

З (11) та (13) отримуємо

$$\frac{V_{max}^2}{Rmax - Rmin} \leq a \leq \frac{F_{\text{гр}}}{\rho h^3} - \frac{g}{2.},$$

звідси

$$V_{max} = \sqrt{(\frac{F_{\text{гр}}}{\rho h^3} - \frac{g}{2.})(Rmax - Rmin)}. \quad (14)$$

Відповідь: $V_{max} = \sqrt{(\frac{F_{\text{гр}}}{\rho h^3} - \frac{g}{2.})(Rmax - Rmin)}$.

(208) А) Під час кочення вгору центр кільця піднімається, але тягарець опускається. Якщо при цьому загальна потенціальна енергія зменшуватиметься, а за рахунок сил тертя кільце не проковзуватиме, то воно рухатиметься вгору. Отже, задачу можна розв`язати енергетично, знайшовши за якого положення потенціальна енергія кільця з тягарцем мінімальна. А можна розглянути моменти сил, наприклад відносно точки А (Рис.1), які для руху вгору мають обертати колесо проти годинникової стрілки. Оскільки маси тягарця й кільця однакові, центр мас системи знаходиться від центру кільця на половині радіусу. Лінія дії сумарної сили тяжіння прикладеної до центру мас має проходити лівіше точки А, щоб обертати кільце відносно неї проти годинникової стрілки. У граничному випадку ця лінія проходить через точку А, а радіус «центр кільця – тягарець» горизонтальний (Рис. 1). Катет навпроти кута удвічі менший за гіпотенузу, отже $\alpha = 30°$. **Кільце може покотитися вгору** за менших кутів нахилу, тобто, **коли відношення висоти похилої площини до її довжини менше ½.**

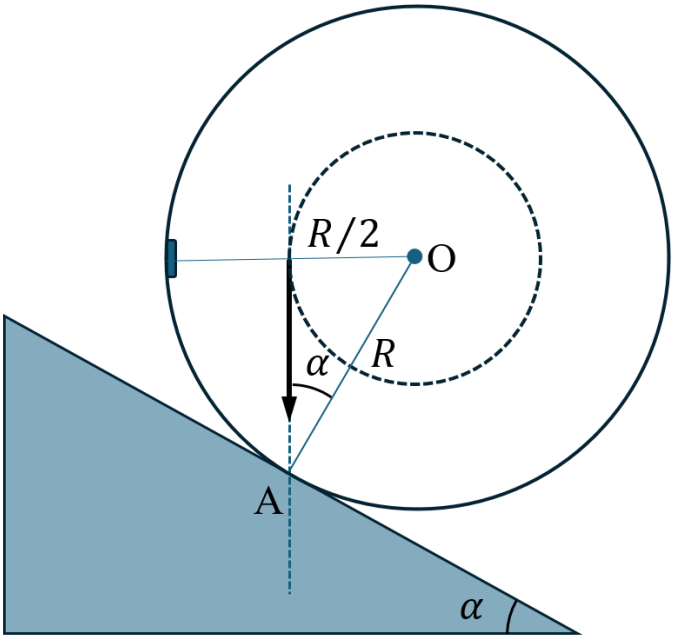


Рис.1

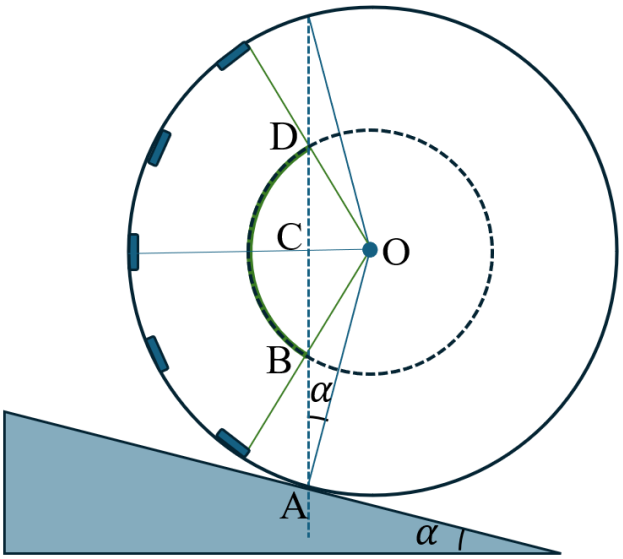


Рис.2

Б) Для відношення висоти похилої площини до її довжини як ¼, маємо сектор можливих положень центру мас системи у 120° (Рис. 2). Дійсно, CO дорівнює $1/4R$ (з подібності трикутника ACO з трикутником похилої площини), але ж CO є й катетом у трикутнику BCO, у якого гіпотенуза BO $1/2R$, звідки кут OBC 30°, а кут BOD 120°, що складає третину від 360°. Отже, **якщо ставити кільце навмання** відносно місця положення пластиліну, **ймовірність** того, **що воно покотиться вгору складатиме 1/3**.

В) Для досягнення більшої швидкості поставимо кільце з тягарцем на площину у крайньому верхньому положенні тягарця, за якого кільце почне котитися вгору (положення з максимальною для цього випадку потенціальною енергією і центром мас системи у точці D, Рис.3). Поки центр мас перебуватиме зліва від вертикального пунктиру через точку А (дотику кільця і поверхні похилої площини), кільце розганятиметься і збільшуватиме свою швидкість. Отже максимальної швидкості воно досягне, повернувши на кут 120° і прокотившись відстань $2\pi R/3$, коли центр мас системи опиниться у точці В. Точка А переміститься вгору вздовж площини, піднявшись на висоту $\frac{2\pi R}{3}\sin\alpha$, де $\sin\alpha = \frac{1}{4}$. Тому у цей момент потенціальна енергія системи зменшиться на

$$2mg\left(\frac{R}{2}\sqrt{3} - \frac{2\pi R}{3}\sin\alpha\right) = mgR\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$$

і настільки ж збільшиться кінетична енергія, оскільки за умовою втрати механічної енергії відсутні. Припустимо, центр кільця має у цей момент швидкість $\vec{v}$. Тоді швидкість тягарця відносно центру кільця має таку ж величину v, але утворює зі швидкістю $\vec{v}$ близький до 180° кут $150° + \alpha$ (див. Рис.3) Тому кінетична енергія тягарця відносно нерухомої системи відліку

$$E_т = \frac{7-3\sqrt{5}}{8} mv^2 \approx 0{,}036mv^2$$

буде малою величиною, а кінетична енергія кільця (складається з поступальної енергії центру мас і обертальної навколо нього)

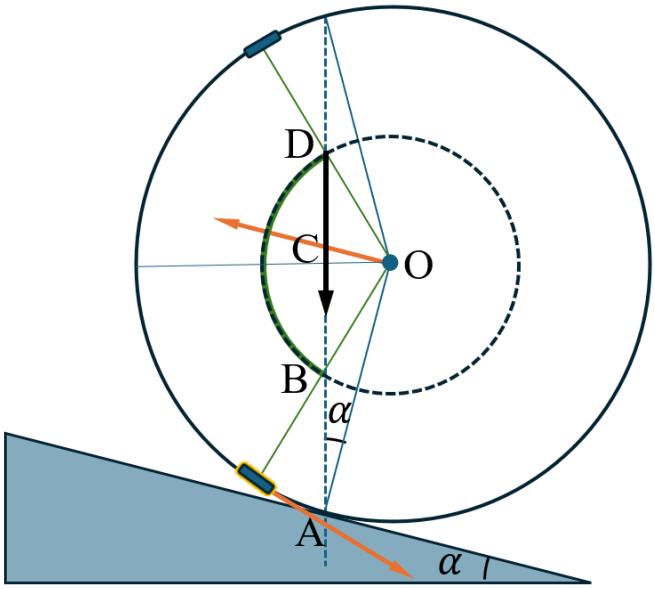


Рис.3

$$E_к = mv^2,$$

звідки, дорівнюючи загальну кінетичну енергію до зменшення потенціальної, знаходимо (для $g = 9{,}8\ м/с^2$)

$$v = \sqrt{2gR\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\pi}{9}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}} + 1\right)} \approx 0{,}986 м/с \approx 1 м/с.$$

(209) Нехай довжина одного резистора *L*, а опір – *r=ρL*. Нехай через граничні резистори біжить струм *I*. Тоді в центральних резисторах струм ділиться навпіл, тобто дорівнює *I/2*. Звідси отримуємо

$$U = \left(I + \frac{I}{2} + I\right) r, \qquad I = \frac{2U}{5r}$$

З закону Джоуля-Ленца, повна потужність теплового випромінення дорівнює

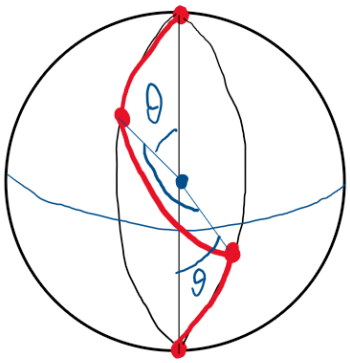
$$P = U \times nI = \frac{2n}{5}\frac{U^2}{r}$$

Щоб нагрівач не перенагрівся, його повна потужність має бути обмеженою. З рівняння теплових витрат:

$$P < \alpha \cdot 4\pi R^2 \cdot \Delta T, \qquad \Delta T = 80C° - 20C° = 60C°$$

$$P < 1.4 \cdot 10^{-3} \cdot 4\pi \cdot 100 \cdot 60\ Вт = 106\ Вт$$

отримуємо максимально можливу потужність 106 Вт.



Переходимо до цікавої частини: знаходження *r*. Побудуємо один шлях між полюсами сфери.

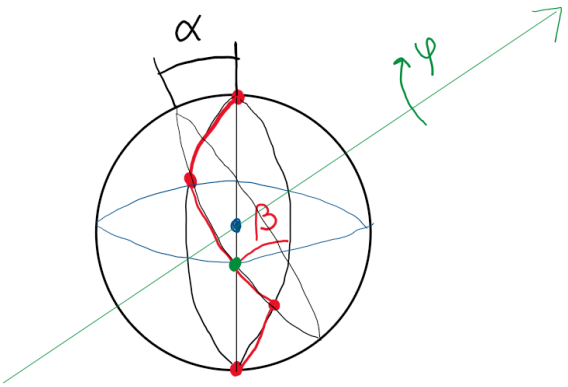
Цей шлях складається з трьох сегментів, кожен з яких покриває однаковий кут $\theta = L/R$. Нам треба знайти цей кут. Уявимо, що це Земля, а ми рухаємось по неї з південного полюсу до північного.

Тоді рух по першому та третьому сегменту відбувається строго на північ з 90° до 90°-θ південної довготи та з 90°-θ до 90° північної довготи відповідно. В центральному сегменті ми рухаємось не на північ, тому наближаємося до полюса ми повільніше, зсунувшись лише на деяку довготу $\theta_2<\theta$.

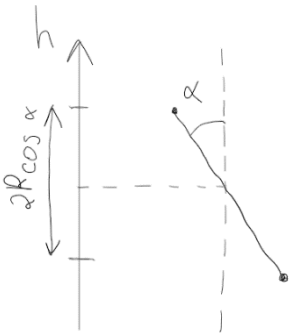
Рівняння на кут тоді має вигляд

$$2\theta + \theta_2 = \pi$$

Тут, нам все ще треба виразити θ_2 через геометрію нашої траєкторії.



Нам треба визначити кут β – кут, на який ми повернулись на сегменті 2 замість того, щоб іти на північ. Згадуючи про сітку з ромбів, ми отримуємо, що $\beta = \pi/n$. Інші два необхідні кути – це кут α та φ. Кут α – це кут між двома колами: вертикальним, що проходить між полюсами та нашим положенням на екваторі, та похиленим, якому належить центральний сегмент. Кут φ – це кут «широти» відносно вісі обертання, пов'язаної з похилим колом. Визначимо кут φ таким чином, що в точці перетину екватора він дорівнював нулю.



Тоді сегмент 2 відповідає інтервалу $\varphi \in [-\theta/2, \theta/2]$.

Рівномірний рух по колу – це коливання. Спроектуємо похиле коло на вертикальну площину, як зображено на малюнку:

$$h(\phi) = R\cos\alpha\sin\phi$$

Для більш прозорої аналогії, уявимо, що ми рухаємось з якоюсь швидкістю v. Тоді $\varphi=vt/R$, і кутова частота коливань $\omega=v/R$.

На початку та кінці сегменту 2, висота дорівнює $h=\pm R\sin\theta_2/2$. Отже

$$R\sin\frac{\theta_2}{2} = R\cos\alpha\sin\frac{\theta}{2}$$

Для повної системи рівнянь, треба виразити α. Для цього ми знову уявимо, що ми мандрівники і рухаємось зі швидкістю v. На сегменті 1 ми рухались на північ. Наша вертикальна швидкість одразу перед поворотом була $v\sin\theta$, а одразу після повороту – $v\sin\theta\cos\beta$. З іншого боку, для коливань швидкість буде

$$h = R\cos\alpha\sin\omega t$$

$$v_h = R\cos\alpha\cdot\omega\sin\omega t$$

Підставляючи всі інгредієнти:

$$R\cos\alpha\frac{v}{R}\cos\frac{\theta}{2} = v\sin\theta\cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{\sin\theta}{\cos\frac{\theta}{2}}\cos\beta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\beta$$

Тепер ми можемо знайти θ_2

$$\sin\frac{\theta_2}{2} = 2\cos\beta\sin^2\frac{\theta}{2} = \cos\beta(1-\cos\theta)$$

$$\theta_2 = 2\arcsin[\cos\beta(1-\cos\theta)]$$

З нього ми можемо отримати кінцеве рівняння на θ

$$2\theta + 2\arcsin[\cos\beta(1-\cos\theta)] = \pi$$

$$\cos\beta(1-\cos\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\cos\beta = \cos\theta(1+\cos\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{\cos\beta}{1+\cos\beta}$$

Звідси ми нарешті можемо виразити опір одного ребра *r* та кінцеву потужність теплового випромінення:

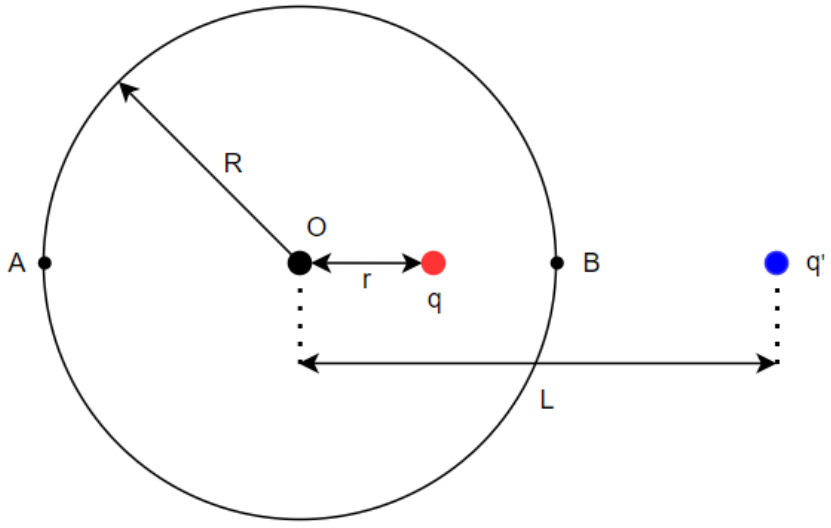
$$P = \frac{2U^2}{5\rho R}\frac{n}{\arccos[\frac{\cos(\pi/n)}{1+\cos(\pi/n)}]} = \frac{2U^2}{5\rho R}f(n)$$

Підставляючи числа, отримуємо P = 15 Вт $f(n)$. Значення:

n	4	5	6	7	8
f(n)	3.50	4.52	5.51	6.50	7.47
P	52.5	67.7	82.7	97.5	112

З урахуванням обмеження на 106 Вт, фінальна відповідь: **треба взяти *n=7.***

(210) А) В товщі металу сфери поля не повинно бути, отже наведений на внутрішній поверхні заряд розподілиться так, щоб повністю компенсувати поле заряду у сфері. Цей заряд на внутрішній поверхні сфери буде рівний -q. На зовнішній поверхні заряд буде q+Q для того щоб повний заряд на сфері був Q. Більше того, заряд на зовнішній поверхні буде розподілений рівномірно, адже внутрішні заряди повністю компенсували свою дію. Це означає, що потенціал сфери відносно нескінченності буде рівний $k\frac{q+Q}{R}$, а поле поза сферою буде таке, як від заряду q+Q, який поміщений в центр сфери.



Б) Скористаємося методом зображень. Ми знаємо, що потенціал сфери рівний $k\frac{q+Q}{R}$ проте спочатку підберемо такий уявний заряд-зображення, щоб він разом із реальним зарядом q давав

нульовий потенціал в будь-якій точці сфери. Це відома задача і її розв'язок дає такі параметри для величини та положення заряду-зображення (можете перевірити це для найпростіших точок A та B):

$$q' = -q\frac{L}{R}$$
$$L = \frac{R^2}{r}$$

Цей заряд-зображення імітує дію всередині сфери від зарядів, що наведені на внутрішній частині сфери. Проте, як ми знаємо, потенціал сфери не нуль, отже має бути ще десь заряд, який надасть їй цей потенціал. В центрі сфери він перебувати не може, адже заряди зображення всі мають бути з іншого боку від реального заряду. Тоді з фізичних міркувань легко зрозуміти, що цей заряд q+Q там же, де і реальний – рівномірно розмазаний на зовнішній поверхні сфери. Цей заряд не створює поля всередині сфери, а отже не впливає на заряд q. Тоді єдина сила, яка діє на заряд q – від заряду зображення q' і це сила притягання до найближчої точки сфери.

$$F = \left|k\frac{qq'}{(L-r)}\right| = k\frac{q^2\frac{R}{r}}{(\frac{R^2}{r}-r)^2}$$

Тоді прискорення заряда $a_з = \frac{F}{m}$, а сфери $a_{сф} = \frac{F}{M}$.

Тоді відносне прискорення зближення сфери та заряда

$$a = a_з + a_{сф} = k\frac{q^2\frac{R}{r}}{\left(\frac{R^2}{r}-r\right)^2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}\right).$$

(211) У обох випадках можна вважати, що магнітне поле струму зосереджене всередині системи (практично не виходить назовні).

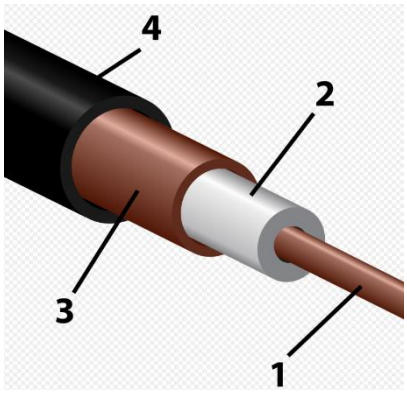
А) Припустимо, струм у верхньому провіднику шини тече на нас, а в нижньому — від нас. Скористаємося законом повного струму (теоремою про циркуляцію магнітного поля), щоб *окремо* визначити магнітне поле верхнього $B_{верх}$ та нижнього $B_{ниж}$ струмів. Для цього візьмемо замкнутий контур у формі прямокутника, центр якого збігається з центром $O_{верх}$ верхнього провідника. Отримаємо: верхній струм утворює над собою магнітне поле, напрямлене горизонтально ліворуч, а під собою горизонтальне магнітне поле, напрямлене горизонтально праворуч. Індукція поля $B_1 = \mu_0\frac{I}{2b}$. У точках, що лежать усередині верхнього провідника, індукція магнітного поля лінійно залежить від різниці висот y даної точки та точки $O_{верх}$: $B_2(y) = B_1\frac{2y}{a}$. Вище від $O_{верх}$ поле напрямлене ліворуч, а нижче — праворуч.

Для поля $B_{ниж}$ виконуються аналогічні закономірності, але напрям поля слід змінити на протилежний.

Додавши за принципом суперпозиції магнітні поля обох провідників, доходимо висновку: за межами шини поля компенсують одне одного, а в діелектрику підсилюють, утворюючи однорідне горизонтальне магнітне поле з індукцією $2B_1$, напрямлене праворуч. Усередині провідників поле лінійно спадає від $2B_1$ на внутрішній поверхні до нуля на зовнішній.

Щоб отримати індуктивність, можна знайти повну енергію W магнітного поля, проінтегрувавши густину енергії $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$ по об'єму шини (діелектрику та двом провідникам). Отримаємо $W = \frac{2B_1^2}{\mu_0} bl\left(d + \frac{2a}{3}\right) = \frac{\mu_0 I^2 l}{2b}\left(d + \frac{2a}{3}\right)$. Оскільки $W = \frac{LI^2}{2}$, індуктивність шини $\boldsymbol{L = \frac{\mu_0 l}{b}\left(d + \frac{2a}{3}\right)}$. Зверніть увагу, що індуктивність зменшується зі збільшенням ширини шини.

Б) Розглянемо тепер коаксіальний кабель. Застосовуючи знов-таки закон повного струму, отримуємо залежність індукції магнітного поля від відстані r до осі кабелю:



$B = \mu_0 \frac{2I}{\pi d^2} r$, якщо $r < \frac{d}{2}$;

$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}$, якщо $\frac{d}{2} < r < \frac{3d}{2}$;

$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}\left(\frac{25}{16} - \frac{r^2}{4d^2}\right)$, якщо $\frac{3d}{2} < r < \frac{5d}{2}$;

$B = 0$, якщо $r > \frac{5d}{2}$.

Повну енергію W магнітного поля визначимо інтегруванням густини енергії $w = \frac{B^2}{2\mu_0}$ по об'єму: $W = \frac{\pi l}{\mu_0}\int_0^{5d/2} B^2 r dr$. Провівши інтегрування по трьох інтервалах значень r, отримуємо:

$$W = \frac{\mu_0 l I^2}{\pi}\left(\frac{1}{16} + \frac{\ln 3}{4} + \frac{625}{1024}\ln\frac{5}{3} - \frac{33}{128}\right) = \frac{\mu_0 l I^2}{1024\pi}(625\ln 5 - 369\ln 3 - 200).$$

Або: $W \approx 0{,}1245\mu_0 l I^2$, що дає $\boldsymbol{L \approx 0{,}25\mu_0 l}$.

(212) Перш за все звернімо увагу: всі ділянки наведеного графіка — відрізки прямих. Скористаємося також співвідношеннями $\Delta U = \nu C_V \Delta T, Q = \nu C \Delta T$. Тут C — молярна теплоємність газу під час певного етапу процесу, C_V — молярна теплоємність газу під час ізохорного процесу. Оскільки для кожної прямолінійної ділянки маємо $\frac{Q}{\Delta U} = \frac{C}{C_V} = \text{const}$, на кожному етапі процесу теплоємність газу є незмінною. Такі процеси називають політропними, для них виконується рівняння $pV^n = \text{const}$, де $n = \frac{C_p - C}{C_V - C}$. Окремими випадками політропного процесу є всі ізопроцеси та адіабатний процес. Розглянемо тепер різні етапи процесу.

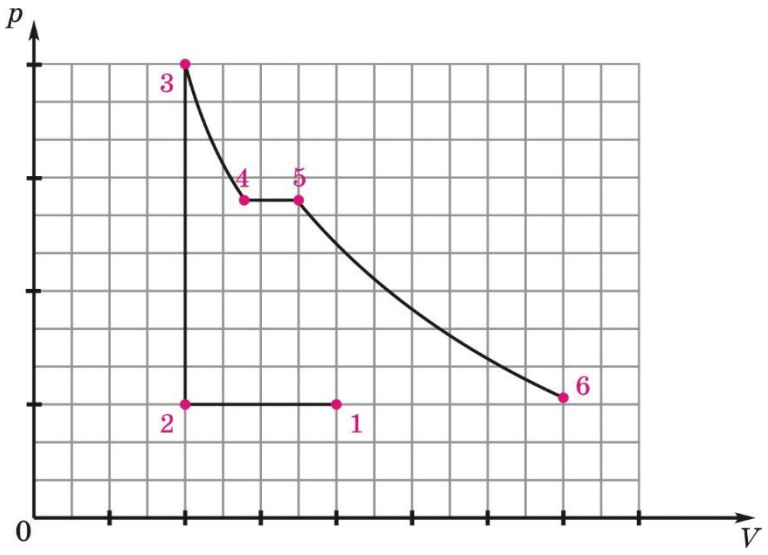
Відомо, що молекули вуглекислого газу CO_2 є лінійними, тому мають стільки ж ступенів свободи, скільки двохатомні молекули. Отже, молярні теплоємності $C_V = \frac{5}{2}R$, $C_p = \frac{7}{2}R$, а $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1{,}4$.

Етап 1–2: $Q = -28$ кДж, $\Delta U = -20$ кДж, тобто $\frac{Q}{\Delta U} = \frac{C}{C_V} = 1{,}4$. Інакше кажучи, $C = C_p$. На етапі 1–2 відбувається ***ізобарне*** охолодження (і, відповідно, стискання) газу. Абсолютна температура та об'єм газу зменшилися вдвічі ($T_2 = T_1/2$). Зазначимо, що $U_1 = \frac{5}{2}\nu R T_1 = 40$ кДж, звідки $\nu R T_1 = 16$ кДж.

Етап 2–3: $Q = 60$ кДж, $\Delta U = 60$ кДж, тобто $Q = \Delta U, C = C_V$. Тут відбувається ***ізохорне*** нагрівання газу. Абсолютна температура збільшилася в 4 рази, $T_3 = 2T_1$.

Етап 3–4: $Q = 11$ кДж, $\Delta U = 0$. Це ***ізотермічний*** процес, Q дорівнює роботі газу: $Q = \int_{V_3}^{V_4} p \cdot dV = \nu R T_3 \int_{V_3}^{V_4} \frac{dV}{V} = 2\nu R T_1 \ln\frac{V_4}{V_3}$. Звідси випливає співвідношення $V_4 = 1{,}4V_3$.

Етап 4–5: $Q = 35$ кДж, $\Delta U = 25$ кДж, тобто (як і на етапі 1–2) $Q = 1{,}4\Delta U, C = 1{,}4C_V$. Отже, і на цьому етапі процес є ***ізобарним*** (це ізобарне нагрівання з відповідним розширенням). Абсолютна температура та об'єм газу збільшилися в 1,31 разу, відповідно до $T_5 = 2{,}62\,T_1$ і $V_5 = 1{,}84\,V_2$.



Етап 5–6: $Q = 0$, $\Delta U = -25$ кДж. Це ***адіабатний*** процес. Очевидно, $\frac{T_6}{T_5} = \frac{U_6}{U_5} = 0{,}76$. Згідно рівнянню адіабатного процесу $pV^{1,4} = \text{const}$ або $TV^{0,4} = \text{const}$. Звідси $V_6 \approx 1{,}8V_1$, відповідно $p_6 \approx 1{,}1p_1$.

Графік процесу в координатах p, V наведений нижче. Як бачимо, процес не є циклічним, графік не замикається.

(213) А) Позначимо довжину середньої частини нитки через *l*, а довжину бокової через *L*. Тоді з $Lsin\alpha + lsin\gamma = Lsin\beta$ знаходимо $\frac{L}{l} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \approx 3{,}146$.

Для першого вузла знаходимо

$$\begin{cases} T_1 sin\alpha = mg + Tsin\gamma, \\ T_1 cos\alpha = Tcos\gamma, \end{cases}$$

звідки $mg = Tcos\gamma(tg\alpha - tg\gamma)$.

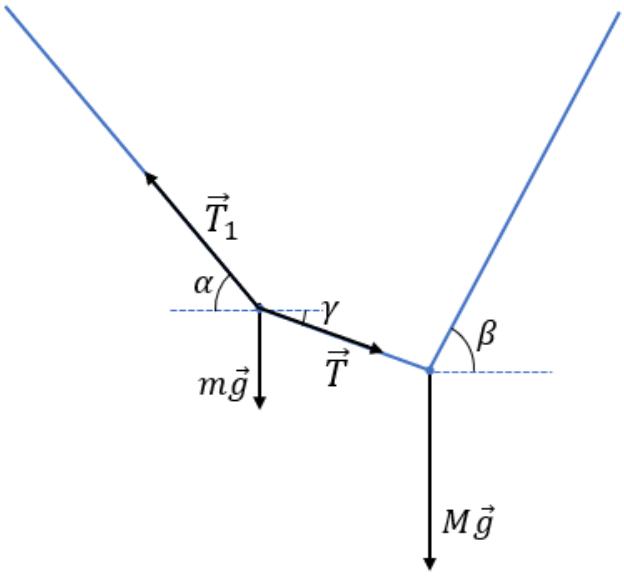
Аналогічно для другого вузла

$$Mg = Tcos\gamma(tg\alpha + tg\beta).$$

Отже

$$\frac{M}{m} = \frac{tg\beta + tg\alpha}{tg\alpha - tg\gamma} = 2\left(\sqrt{3} + 1\right)$$

і маса батону $M = 2\left(\sqrt{3} + 1\right)m \approx 1000$ г.



Б) Чотири нитки і квадрат шальки між точками кріплення ниток утворюють піраміду з ребром 26 см і висотою (за т. Піфагора $\sqrt{26^2 - 10^2} = 24$) $h = 24$ см. Після зміщення тягарців на $x = 5$ см, центр ваги навантаженої шальки змістився відносно центру квадратної основи на відстань $htg\delta \approx 4{,}23$ см. З умови рівноваги (вимушено нехтуємо висотою тягарців у порівнянні з h) знаходимо масу шальки: $m_{\text{ш}} = m\frac{x - htg\delta}{htg\delta} \approx 33{,}2$ г.

Тепер відношення мас слід переписати у вигляді:

$$\frac{M_б + m_ш}{m_т + m_ш} = 2\left(\sqrt{3} + 1\right),$$

Звідки знаходимо $M_б \approx 1148$ г. Батон виявився нестандартної маси.

В) Зауважимо, що за натягнутої нитки між тілами, їхня потенціальна енергія під час коливань не змінюватиметься, і тому на відповідь не впливатиме. Для знаходження періоду коливань запишемо вираз для повної механічної енергії. Кінетична енергія системи

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2},$$

Потенціальна енергія відносно рівня підвісу

$$U = -mgLsin\alpha - MgLsin\beta,$$

де кут β повязаний з α геометрією задачі. Використовуємо такі ж позначення для кутів, хоча вони при малих коливаннях трохи відрізнятимуться від рівноважних $\alpha_0 = 45°$ і $\beta_0 = 60°$. Рівноважне положення відповідає мінімуму потенціальної енергії. Отже, похідна від потенціальної енергії, наприклад, по куту α має дорівнювати в точці мінімума 0:

$$-mgLcos\alpha - MgLcos\beta\frac{d\beta}{d\alpha} = 0,$$

звідки

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = -\frac{M}{m}\frac{cos\beta}{cos\alpha} = -\left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right).$$

Таким за модулем буде і відношення швидкостей при малих коливаннях поблизу рівноважних кутів. Оскільки маси рухаються вздовж кіл однакових радіусів L,

$$\frac{v}{V} = \frac{L|\,d\alpha/dt|}{L\,|d\beta/dt\,|} = \left|\frac{d\alpha}{d\beta}\right| = \sqrt{6} + \sqrt{2}.$$

Зазначимо, що це відношення можна було отримати й інакше, наприклад, з кінематики зв'язку через однаковість проекції швидкостей на напрям натягнутої середньої нитки довжиною l (див. Рис.):

$$vsin(\alpha - \gamma) = Vsin(\beta + \gamma).$$

Запишемо повну енергію системи:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} - mgLsin\alpha - MgLsin\beta =$$

$$= \frac{mL^2\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{ML^2\dot{\beta}^2}{2} - mgLsin(\alpha_0 + \Delta\alpha) - MgLsin(\beta_0 + \Delta\beta) =$$

$$= \frac{mL^2\dot{\Delta\alpha}^2}{2} + \frac{ML^2\dot{\Delta\beta}^2}{2} - mgLsin\alpha_0 cos\Delta\alpha - MgLsin\beta_0 cos\Delta\beta.$$

Продиференціюємо за часом і врахуємо малість коливань:

$$\dot{\Delta\beta}\left[L^2\left(m(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + M\right)\ddot{\Delta\beta} + gL\left(m(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 sin\alpha_0 + Msin\beta_0\right)\Delta\beta\right] = 0.$$

Тривіальний розв'язок відсутності коливань дає $\Delta\dot{\beta} = 0$. Нульове значення виразу в дужках відповідає рівнянню гармонічних коливань відносно $\Delta\beta$:

$$\Delta\ddot{\beta} + \frac{g}{L}\frac{m(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 sin\alpha_0 + Msin\beta_0}{m(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 + M}\Delta\beta = 0.$$

звідки період малих коливань

$$T_{\text{мал.кол.}} = 2\pi\sqrt{2\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}\frac{l}{g}} \approx 2{,}9 \text{ с.}$$

Цей період не залежить від зарядів тіл доки нитка довжиною l натягнута. Сила кулонівської взаємодії з'єднаних ниткою зарядів компенсується величиною сили натягу нитки, а під час такого руху потенціальна енергія кулонівської взаємодії не змінюється. Крайній випадок станеться, по-перше, коли заряди тіл протилежного знаку і, по-друге, якщо сила кулонівського притяжіння дорівнюватиме за модулем силі натягу нитки, що з'єднує тіла, коли ті не заряджені. Силу натягу цієї нитки T легко знайти з системи, наведеної на початку розв'язку

$$\begin{cases} T_1 sin\alpha = mg + Tsin\gamma, \\ T_1 cos\alpha = Tcos\gamma, \end{cases}$$

звідки

$$T = \frac{mg}{cos\gamma(tg\alpha - tg\gamma)} = (\sqrt{3}+1)mg.$$

Отже, нитка не провисатиме за малих коливань, якщо

$$-\frac{kq_1q_2}{l^2} < (\sqrt{3}+1)mg,$$

або добуток зарядів має перевищувати $q_1q_2 > -(\sqrt{3}+1)\frac{mgl^2}{k} = -1{,}36 \cdot 10^{-10}$Кл^2 аж до розриву нитки у випадку однойменних зарядів.

Якщо до m додати масу шальки $m_{\text{ш}} \approx 33{,}2$ г, тоді $q_1q_2 > -1{,}6 \cdot 10^{-10}$Кл^2.

(214) Аналогічно до розв'язку задачі №5 10 класу можна вивести перетворення «трикутника» в «зірку» для конденсаторів. Вводячи аналогічні індексні позначення, враховуючи правила послідовного та паралельного з'єднання конденсаторів, а також розглядаючи кожну пару вузлів можна отримати наступну систему рівнянь:

$$\sigma = C_{12} \cdot C_{23} + C_{23} \cdot C_{13} + C_{13} \cdot C_{12}$$

$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_{13} + C_{23}}{\sigma}$$

$$\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_{12} + C_{13}}{\sigma}$$

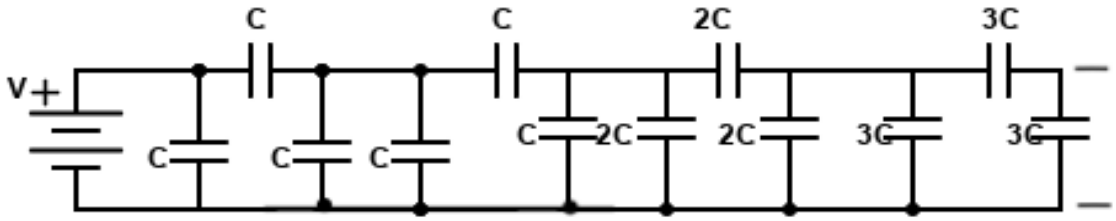
$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3} = \frac{C_{12} + C_{23}}{\sigma}$$

Розв'язавши цю систему рівнянь відносно ємностей C_1, C_2 і C_3 отримаємо формули для перетворення «трикутника» в «зірку» :

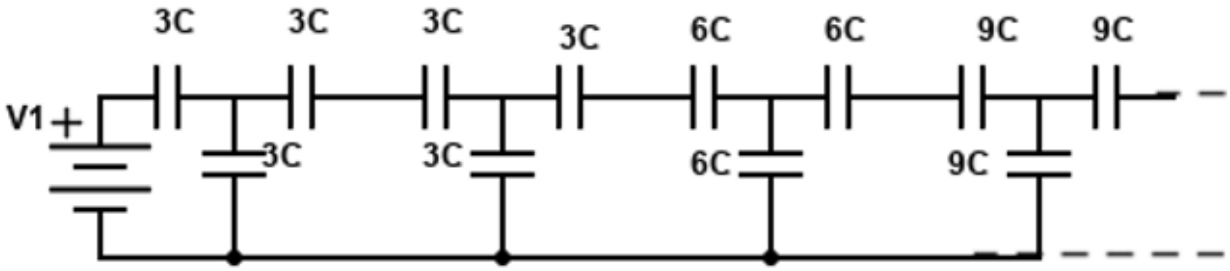
$C_1 = \frac{\sigma}{C_{23}}$; $C_2 = \frac{\sigma}{C_{13}}$; $C_3 = \frac{\sigma}{C_{12}}$

Тепер перейдемо до вирішення задачі:

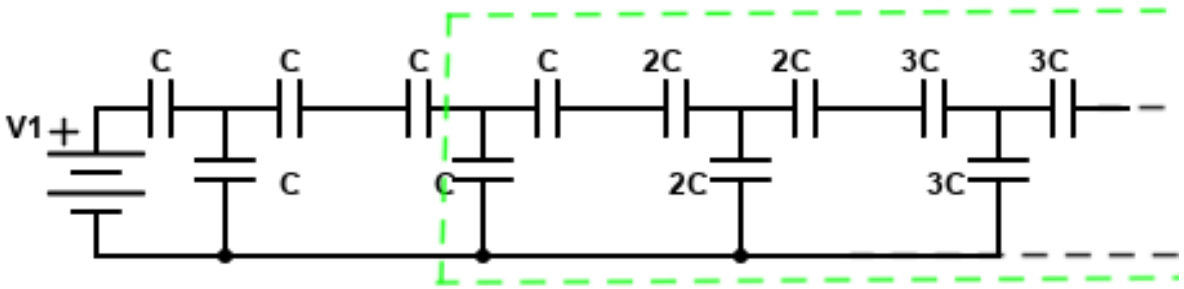
Розіб’ємо кожен конденсатор окрім нульового між точками $А_i Б_i$ на два паралельно з’єднаних попередні два за значенням в ряду Фібоначчі та об’єднаємо усі конденсатори у трикутники як показано на рисунку:



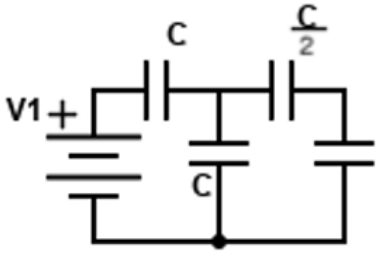
Після цього застосуємо перетворення «трикутника» в «зірку» для кожного трикутника:



Тепер можна побачити що усі елементи ланцюга кратні 3, а отже можна привести ланцюг до наступного вигляду з загальною ємністю $\frac{\alpha C}{3}$:



Тепер можна легко помітити що усе що знаходиться правіше зеленої лінії і є шукане значення $f(\alpha)C$. Тепер замінимо усе що знаходиться в зеленому квадраті на конденсатор ємністю $f(\alpha)C$. Таким чином отримуємо наступне коло:



Не забуваючи врахувати що загальна ємність кола дорівнює $\frac{\alpha C}{3}$ отримуємо наступне співвідношеня:

$$\frac{\alpha}{3}\mathrm{C} = \frac{\mathrm{C}\left(\mathrm{C} + \dfrac{f(\alpha)C \cdot \dfrac{C}{2}}{f(\alpha)C + \dfrac{C}{2}}\right)}{2C + \dfrac{f(\alpha)C \cdot \dfrac{C}{2}}{f(\alpha)C + \dfrac{C}{2}}}$$

Нарешті, після нескладних підрахунків отримуємо точне значення для $f(\alpha)$:

$f(\alpha) = \frac{2\alpha-3}{9-5\alpha}$.

(215) А. Знайти різницю потенціалів на кінцях металевого стержня можна або за допомогою зміни магнітного потоку, або через нульову рівнодійну для сил зі сторони електричного і магнітного полів, що діють на носії зарядів всередині стержня:

$$U = vBl = 11 \text{ мкВ}.$$

Б. Під час руху з обертанням швидкість $\vec{v}$ довільної точки стержню на відстані r від його середини, де знаходиться центр мас, дорівнює векторній сумі швидкості центру мас $\vec{u}$ і відносної швидкості $v_{\text{від}} = \omega r$. За рахунок цього сила Лоренца $\vec{F}_{\text{л}} = q\vec{v} \times \vec{B}$ розділяється на дві складові. Причому друга, пов'язана з обертанням навколо центру мас, приводитиме до нульової різниці потенціалів між кінцями стержня. А першу слід спроектувати на довжину стержня і прирівняти до qE, щоб знайти напруженість електричного поля, а з нею і різницю потенціалів між кінцями. Тоді для деякого моменту часу, починаючи з перпендикулярного до швидкості центру положенню стержня $U = uBl\cos(\omega t) = 11\cos(2t)$мкВ. Максимальне значення 11 мкВ можна було б отримати просто, розглянувши момент часу, коли стержень перпендикулярний до швидкості центру мас.

В, Г. Рівняння синусоїди (в СІ): $y = 0{,}1 + 0{,}05\sin(10\pi x)$. Формула $U = vBl$ зберігатиме своє значення, де ефективна довжина дорівнює подвоєній відстані до синусоїди від осі абсцис: $l = 2y = \ 0{,}2 + 0{,}1\sin(10\pi x)$, де $x = 0{,}5t$. Отже

$$I = \frac{U}{R} = (2 + \sin(5\pi t)) \cdot 220 \text{ нА}.$$

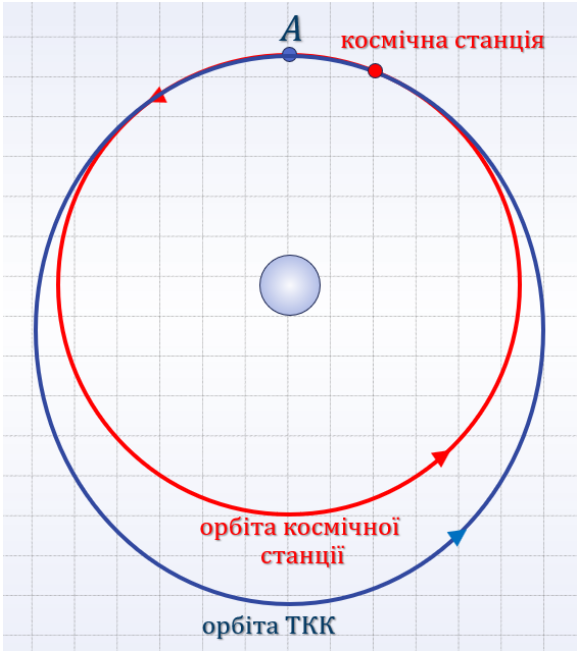
Теплова потужність буде змінюватись за законом

$$P = I^2R = (2 + \sin(5\pi t))^2 \cdot 2{,}2^2 \cdot 10^{-13} \text{ Вт}$$
$$= \left(4 + 4\sin(5\pi t) + \frac{1}{2}\big(1 - \cos(10\pi t)\big)\right) \cdot 2{,}2^2 \cdot 10^{-13} \text{ Вт}.$$

Середнє значення потужності за повний період або протягом тривалого інтервалу часу 2,178 пВт.

(216) Визначимо найкращий порядок дій. На перший погляд може здатися, що ТКК має почати маневр з «гальмування». Але тоді він перейде на еліптичну орбіту, у якої велика піввісь a буде меншою від радіуса R початкової орбіти. Згідно з третім законом Кеплера період обертання такою еліптичною орбітою буде меншим від періоду T_0 обертання космічної станції. Отже,

коли ТКК повернеться в точку A, де він отримав короткий гальмівний імпульс, космічна станція ще не встигне зробити повний оберт і тому ще більше «відставатиме» від ТКК. Таким чином, як не дивно з «земної» точки зору, ТКК має отримати поштовх, через який він *збільшить* швидкість і перейде на «більшу» (зовнішню, див. схематичний рисунок) еліптичну орбіту.



Період обертання ТКК має стати $T = T_0 + \Delta t = T_0 + s/v_0$, де $s = 12{,}6$ км, а $v_0 = \sqrt{G\,M/R} = 7{,}73$ км/с.

Як випливає з третього закону Кеплера:

$$a = R\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2/3} = R\left(1+\frac{\Delta t}{T_0}\right)^{2/3} = R\left(1+\frac{2s}{3v_0T_0}\right) = R\left(1+\frac{s}{3\pi R}\right).$$

Ми скористалися тим, що $v_0T_0 = 2\pi R$, а $s \ll R$.

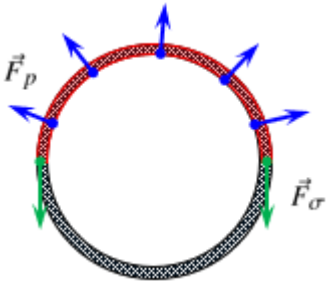
Врахуємо тепер, що механічну енергію W корабля можна виразити через велику піввісь його траєкторії: $W = -G\frac{Mm}{2a}$. Оскільки $W_0 = -G\frac{Mm}{2R}$, після переходу на еліптичну орбіту маємо $W = W_0\frac{R}{a} = W_0 + \frac{mv_0^2}{2}\cdot\frac{s}{3\pi R}$. Отже, треба збільшити *кінетичну* енергію ТКК на $\Delta W = \frac{mv_0^2}{2}\cdot\frac{s}{3\pi R}$. За умови невеликого збільшення швидкості $\Delta W = mv_0\,\Delta v$, тому потрібне збільшення імпульсу $\Delta p = m\Delta v = mv_0\cdot\frac{s}{6\pi R}$.

Відповідно до закону збереження імпульсу маса витраченого для переходу на еліптичну орбіту палива $m_{1\text{ пал}} = \frac{\Delta p}{u} = m\frac{v_0}{u}\cdot\frac{s}{6\pi R}$. Тут $u = 3$ км/с. Але слід ще врахувати: для *м'якої* стиковки додаткову швидкість ТКК треба «загасити», для чого потрібна знов така сама витрата палива.

Отже, остаточно: $\boldsymbol{m_{\text{пал}} = 2m_{1\text{ пал}} = m\frac{v_0}{u}\cdot\frac{s}{3\pi R}}$ **=3,1 кг.**

Зауважимо, що є формальна можливість зробити період $T = T_0 + s/(nv_0)$, де n — будь-яке натуральне число. Це дозволить зменшити в n разів витрату палива, але збільшить кількість обертів до зустрічі та стиковки. З умови задачі видно, що така «економія» неприпустима, час є дорожчим.

(217) Труба розривається від напруження, що діє у перерізі в дотичному напрямку (див. рис.). Розглянемо сили, що діють на невелику ділянку «половинки» труби довжиною Δl, відмічену на рисунку червоним. Це сили $\vec{F}_p$ тиску рідини, результуюча яких дорівнює $F_p = p\cdot 2r\Delta l$, де p – надлишковий тиск рідини (в цьому можна впевнитися, помітивши, що сума сил тиску, що діють на воду в верхній половинці труби на рисунку, дорівнює майже нулю, а отже вертикальна сила, що діє на діаметральний переріз, компенсує шукану силу зі сторони поверхні труби), а також сили $\vec{F}_\sigma$ пружності з боку іншої половинки труби, які дорівнюють $F_\sigma = \sigma\cdot 2\Delta l d$ (тут σ – напруження в матеріалі труби, тобто сила, що діє на одиницю



площі перерізу труби, в даному випадку в дотичному напрямку). Прирівнюючи ці дві сили, маємо, що напруження пропорційне до тиску у трубі і обернено пропорційне товщині стінок.

А) В першому випадку критичним значенням цього відношення (яке досягається у нижній точці труби) було $\rho gR(1 - \sin \varphi_0)/d_0$. Коли ж товщину стінок зробили змінною, ця величина немонотонно змінюється з висотою. Вважаючи, що залили всю чверть кола, і переходячи від змінної кут до вертикальної координати y, яку відраховуємо від верхньої точки труби униз, отримаємо:

$$\frac{\rho gR \sin\varphi}{d_0 + \alpha \sin^2\varphi} = \frac{\rho gy}{d_0 + \alpha y^2/R^2} = \frac{\rho g}{d_0/y + \alpha y/R^2}.$$

Цей вираз досягає максимального значення при $y_m = R\sqrt{d_0/\alpha}$. Якщо воно менше за R, то критерієм, коли труба витримає тиск, треба записати у цій точці, а якщо більше R, то найбільш вразливою точкою є нижня точка труби. Порівнюючи в усіх випадках з першим випадком отримаємо, що якщо $\varphi_0<30°$, то труба втримає тиск при $\alpha > d_0 \sin\varphi_0/(1 - \sin\varphi_0)$, а якщо $\varphi_0>30°$, то при $\alpha > d_0/4(1 - \sin\varphi_0)^2$.

Б) Тиск газу практично однаковий по всій довжині трубки, тому «зміцнення» труби не допоможе – в обох випадках найтонша частина стінки має товщину d_0. Значення тиску буде, як і у першому випадку $\rho gR(1 - \sin \varphi_0)$. Цікаво, що якщо для зміцненої труби можна передбачити найнебезпечніше місце – верхній, найтонший переріз – то для труби постійної товщини формально немає виділеного місця, в якому вона може не витримати (на практиці це може бути місце з будь-яким дефектом, або там, де товщина буде трішки меншою).

В) Найоптимальнішим буде змінювати товщину так, щоб відношення тиску до товщини було постійним вздовж труби, тобто

$$\frac{\rho gR \sin\varphi}{d(\varphi)} = const = \frac{\rho gR(1 - \sin\varphi_0)}{d_0},$$

звідки маємо для шуканої залежності

$$d(\varphi) = d_0 \frac{\sin\varphi}{1 - \sin\varphi_0}.$$

У цьому випадку ймовірність розриву кожної ділянки труби формально однакова, отже ні на якій ділянці не було використано зайвої кількості матеріалу.

(218) А) Обидві планети мають об'єм $V = \frac{4}{3}\pi R_0^3 = \pi R^2 h$

$$R_0 \sim (R^2 h)^{1/3}$$

$$|U_{\text{шар}}| \sim \frac{GM^2}{R_0} \sim \frac{GM^2}{R^{2/3} \cdot h^{1/3}} \sim \frac{GM^2}{R} \cdot (\frac{R}{h})^{1/3} \sim |U_{\text{диск}}| \cdot (\frac{R}{h})^{1/3}$$

Можна зробити висновок, що куляста конфігурація може бути у декілька разів більш енергетично вигідною. Це одна з причин, чому планети неправильної форми не утворюються в процесі нормального формування.

Вид залежності потенціальної енергії U від параметрів G, M, l можна знайти за допомогою аналізу розмірностей. Проте у випадку з дисковою планетою є дві величини, що можуть "зійти"

за характерний розмір: R і h (або їх комбінації). Прямий розв'язок цієї задачі є доволі непростим, тому журі уважно розглядало і оцінювало будь-яку спробу прийти до відповіді. У першому наближенні зміною потенціала точок планети біля площини симетрії в порівнянні з точками на цій площині можна знехтувати.

Б) Оцінимо величину напруженості матеріалу планети в прямокутному перерізі $h \times 2R$. Два півкруги притягуються один до одного із силою $F_G \sim \frac{GM^2}{R^2}$. Їм протидіє сила напруженості $F_T \sim \sigma S \sim \sigma hR$

$$\sigma \sim \frac{GM^2}{hR^3} \sim G\rho^2 Rh \approx 10^9 \text{Па}$$

Напруга в самому центрі буде ще більшою. Сталь її, вірогідно, не витримає.

В) Використаємо закон Гауса для гравітаційного поля $\Phi = -4\pi G m_{\text{всередині}}$

В якості поверхні візьмемо циліндр, одна з основ якого лежить в площині симетрії, а інша на висоті x від першої. З міркувань симетрії, потік поля через нижню основу і бічну поверхню має бути нульовий. Звідси (для $|x| \le h$)

$$g_x(x) = -4\pi G\rho x$$

$$F_x = -4\pi G\rho m x$$

Це квазіпружня сила, відповідно, тіло в тунелі буде рухатись за гармонійним законом.

$$\omega^2 = 4\pi G\rho$$

$$T = \frac{T_0}{2} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{4G\rho}} \approx 1500 \text{ с} \approx 26 \text{ хв}$$

Середня швидкість такого руху складає близько 230 км/год.

(219) А) Якщо паралельний пучок променів падає на кулю, зроблену з однорідного прозорого матеріалу, заломлення відбувається тільки на поверхні, і промені всередині кулі рухаються прямолінійно. Позначимо через γ кут заломлення променів з кутом падіння α і запишемо закон заломлення світла та зв'язок між α і γ, врахувавши, що ці промені потрапляють разом з центральним променем в одну точці внутрішньої поверхні лінзи.

$$\begin{cases} \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n, \\ \alpha = 2\gamma. \end{cases}$$

Скориставшись формулою синуса подвійного кута, отримаємо залежність показника заломлення n від кута α $n = 2\cos\gamma = 2\cos\frac{\alpha}{2}$.

Коефіцієнт заломлення n змінюється від 2 при перпендикулярному падінні до $\sqrt{2}$ при дотичному.

Два основні недоліки спрощеної лінзи зі сталим показником заломлення – це часткове відбиття від границі розділу середовищ «повітря-лінза» і розходження (не паралельність) променів, що вийшли з лінзи, оскільки падали на її поверхню під різними кутами α.

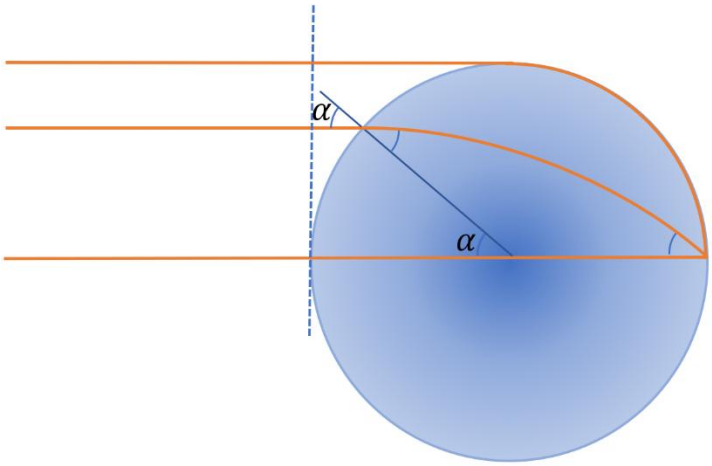
Б) За принципом Ферма час усіх променів, які фокусує лінза Люнеберга, має бути однаковим. Ця ж вимога випливає і з хвильової оптики: у точці максимуму різниця ходу має дорівнювати цілому числу (в нашому випадку нульовому) довжин хвиль, або різниця часу – цілому числу періодів. Тому оптичні системи, які концентрують світло, дають однаковий час руху для різних променів. На рисунку пунктиром зображений фронт паралельного пучка. Дотичний промінь проходить зі швидкістю c відстань $R+\frac{\pi}{2}R$, витрачаючи на це час $\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\frac{R}{c}$.

Час променя, що падає на поверхню лінзи під кутом α складається з часу руху у повітрі $(1-\cos\alpha)\frac{R}{c}$ і часу руху у лінзі $t_л$. Дорівнюючи, знаходимо час руху у лінзі до точки фокусування

$$t_л=\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\frac{R}{c}-(1-\cos\alpha)\frac{R}{c}=\left(\frac{\pi}{2}+\cos\alpha\right)\frac{R}{c}.$$

Час руху до точки фокусування (відбиття) і назад буде удвічі більшим $(\pi+2\cos\alpha)\,R/c$.

В) Оскільки коефіцієнт заломлення збільшується до центру лінзи, першу половину шляху промінь відхилятиметься вбік центру, пройде на мінімальній відстані від нього, коли кут між радіусом і променем дорівнюватиме 90°, після чого симетрично пройде до точки фокусу (див. Рис.). Найбільш радикальне наближення до центру буде у центрального променя (від R до 0 - проходження крізь центр), найменше – у дотичного променя. Але якщо той наблизиться до центру на відстань меншу радіусу лінзи R, тоді в зовнішню частину лінзи випромінювання не проникатиме, що суперечить умові. Отже, в ідеалізованому випадку дотичний промінь має рухатись вздовж чверті кола. При повороті подібного променя його фронт має повертатися на такий самий кут. Отже, час руху двох таких нескінченно близьких уявних променів зі спільним фронтом при повороті на однаковий кут має бути однаковими. Тобто час руху не залежить від радіусу кола r поблизу поверхні лінзи або $t'(R)=0$. У загальному випадку



$$t'(r)=\left(\frac{2\pi r}{v}\right)'=\left(\frac{2\pi r}{c/n}\right)'=\frac{2\pi}{c}(r\cdot n)'=\frac{2\pi}{c}\left(r\cdot\sqrt{a-br^2}\right)'=\frac{a-2br^2}{\sqrt{a-br^2}}.$$

Підставимо $r=R$ в $t'(R)=0$ і знайдемо

$$a-2bR^2=0. \qquad (1)$$

За умовою показник заломлення на границі лінзи дорівнює показнику заломлення повітря, тобто, приблизно 1. Отже маємо ще одне рівняння: $n(R)=\sqrt{a-bR^2}=1$ або

$$a-bR^2=1. \qquad (2)$$

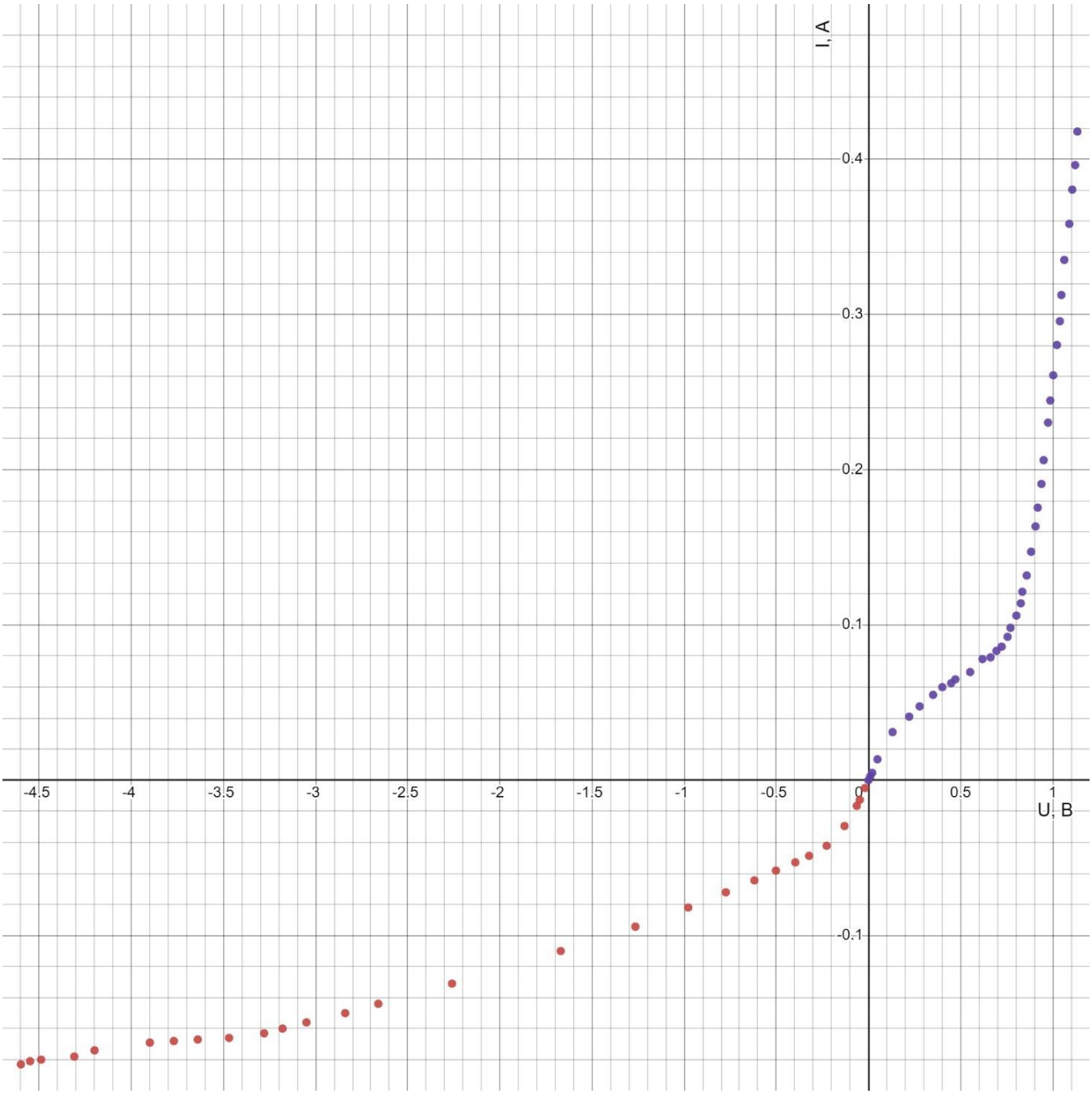
З рівнянь (1) і (2) знаходимо невідомі коефіцієнти: $a=2, b=1/R^2$. Отже, для нашої ідеалізованої лінзи Люнеберга

$$n(r)=\sqrt{2-\frac{r^2}{R^2}}.$$

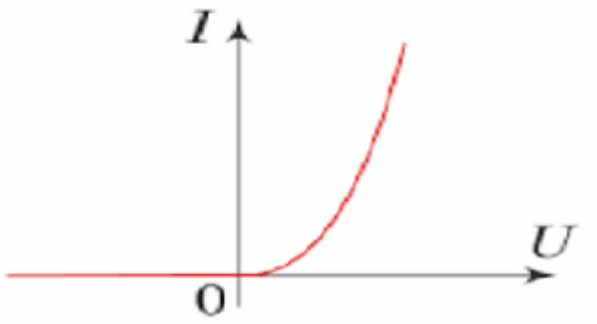
Рівняння (1) можна було отримати інакше зі сталого виразу добутку коефіцієнту заломлення, радіусу і синусу кута для сферично-симетричного розподілу: $n(r)r\sin\alpha=Const$.

Розв’язки експериментальних завдань Інтернет-олімпіади

(220) Побудуймо графік ВАХ по точках з таблиці.



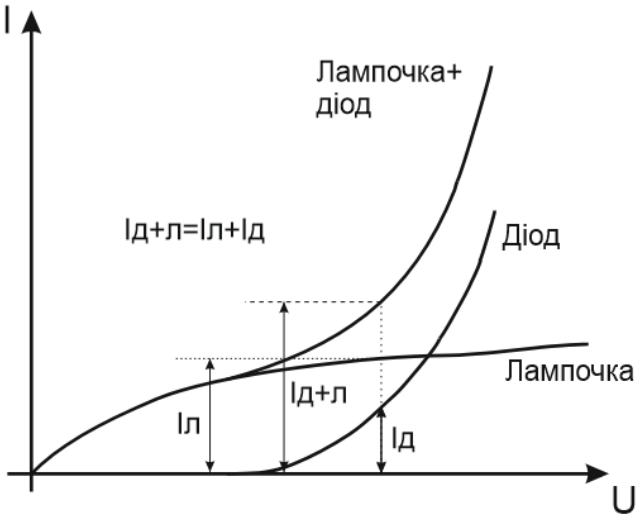
А) Частина графіку у третій чверті (від'ємні значення струму та напруги) дуже схожий на ВАХ лампочки накалювання. Частина графіку у першій чверті від 0 до 0.5 В (орієнтовно) схожа знову таки на частину ВАХ лампочки, а при більших напругах поведінка ВАХ схожа на напівпровідниковий діод. Відповідно, логічно припустити, що в чорному ящику паралельно з'єднані діод та лампочка, в такому випадку такий вигляд ВАХ пояснюється доволі легко. Коли напруга подається від'ємна то діод знаходиться в повністю закритому стані, його опір дуже великий і в колі працює лише лампочка, ВАХ якої ми і бачимо в третій чверті графіка. Коли напруга подається позитивна, то діод підключений в прямому напрямку: спочатку опір у нього дуже великий, але потім нелінійно зменшується. Саме тому в області позитивних напруг спочатку ВАХ виглядає як ВАХ лампочки, бо при малих напругах діод ще не є у відкритому стані і його опір дуже високий. Натомість потім опір діода потроху стає значно меншим за опір лампочки і графік приймає форму гілки діода, що різко здіймається вгору.



Б) Так як при від'ємних напругах діод є приладом з дуже великим опором і, по факту, є розривом кола, то ВАХ одного з приладів – лампочки – можна взяти з третьої чверті графіку ВАХ.

А ось для отримання ВАХ діода можна зробити наступне. Діод та лампочка паралельні, напруги на них однакові, а струм через них обох це сума струмів через кожен. Відповідно, ми можемо нарисувати на одному графіку в позитивних напругах ВАХ діод+лампочка та просто ВАХ лампочки (перенести з від'ємних значень напруги та струму). По точках проводимо лінії, яка буде апроксимувати ці ВАХ. Тоді, за однакових значень напруги будемо віднімати від значень струму ВАХ діод+лампочка значення струму з ВАХ лампочки та наносити отримані точки на графік. В результаті, за умови достатньої частоти нанесення точок ми можемо побудувати приблизний вигляд ВАХ діода.

Можливий варіант зображено нижче.



(221) Основна частота звучання струни може бути визначена як

$$\boldsymbol{\nu = \frac{v}{2L}}$$

де $\boldsymbol{v}$ – швидкість поперечних хвиль у струні,

$\boldsymbol{L}$ – довжина струни у затиснутому стані.

Можливі декілька різних варіантів знаходження швидкості, наприклад:

Варіант 1. Звичайний розрахунок середнього арифметичного (гірший за точністю):

Визначимо швидкість поперечних хвиль для кожного вимірювання, наданого в умові:

Таблиця 3

Перша струна				**Друга струна**			
N, з/п	$\boldsymbol{L}$**, см**	$\boldsymbol{\nu}$**, Гц**	$\boldsymbol{v}$**, м/с**	**N, з/п**	$\boldsymbol{L}$**, см**	$\boldsymbol{\nu}$**, Гц**	$\boldsymbol{v}$**, м/с**
1	21,0	1035,6	435	1	21,0	790,5	332
2	22,1	992,2	439	2	22,1	746,6	330
3	23,3	935,2	436	3	23,3	714,6	333
4	24,6	880,0	433	4	24,6	664,6	327
5	26,0	839,5	437	5	26,0	632,7	329
6	27,5	786,4	433	6	27,5	590,9	325
7	29,1	743,2	433	7	29,1	560,1	326
8	30,8	700,1	431	8	30,8	532,5	328
середнє значення			**434**	**середнє значення**			**329**

За відомим середнім значенням швидкості поперечних хвиль у струні, визначимо дані, яких не вистачає у таблиці 2:

Таблиця 4

Номер струни	**Довжина струни у затиснутому стані, см**	**Основна частота, Гц**	**Номер струни**	**Довжина струни у затиснутому стані, см**	**Основна частота, Гц**
1	32,6	**665,6**	2	32,6	**504,6**
1	34,5	**629,0**	2	34,5	**476,8**
1	**36,9**	588,5	2	**37,2**	442,2
1	**39,1**	555,5	2	**39,4**	417,5
1	**43,8**	495,8	2	**44,3**	371,2

Варіант 2. Метод найменших квадратів

Розглянемо лінійну функцію залежності основної частоти звучання струни від величини, оберненої до довжини струни:

$$\boldsymbol{\nu = \frac{v}{2} * \frac{1}{L}}$$

$$\boldsymbol{y = aX + b}$$

За такої аналогії кутовий коефіцієнт має бути рівним половині швидкості поперечних хвиль у струні.

Для визначення цієї швидкості сформуємо таблицю:

Таблиця 5

Перша струна					
N, з/п	$\frac{1}{L}$, м$^{-1}$ **(X)**	ν, **Гц (У)**	**X*У**	**X²**	**У²**
1	4,76	1035,6	4929,46	22,66	1072467,36
2	4,52	992,2	4484,74	20,43	984460,84
3	4,29	935,2	4012,01	18,40	874599,04
4	4,07	880,0	3581,60	16,56	774400,00
5	3,85	839,5	3232,08	14,82	704760,25
6	3,64	786,4	2862,50	13,25	618424,96
7	3,44	743,2	2556,61	11,83	552346,24
8	3,25	700,1	2275,33	10,56	490140,01
середнє	**3,98**	**864,0**	**3491,79**	**16,07**	**758949,84**

Тоді лінійний коефіцієнт чисельно дорівнює

$$\boldsymbol{a = \frac{v}{2} = 224,89}$$

Звідки швидкість поперечної хвилі у першій струні

$$\boldsymbol{v = 449,78}\ \text{м/с}$$

Таблиця 6

Друга струна					
N, з/п	$\frac{1}{L}$, м$^{-1}$ **(X)**	ν, **Гц (У)**	**X*У**	**X²**	**У²**
1	4,76	790,5	3762,78	22,66	624890,25
2	4,52	746,6	3374,63	20,43	557411,56
3	4,29	714,6	3065,63	18,40	510653,16
4	4,07	664,6	2704,92	16,56	441693,16
5	3,85	632,7	2435,90	14,82	400309,29
6	3,64	590,9	2150,88	13,25	349162,81
7	3,44	560,1	1926,74	11,83	313712,01
8	3,25	532,5	1730,63	10,56	283556,25
середнє	**3,98**	**654,06**	**2644,01**	**16,07**	**435173,56**

Тоді лінійний коефіцієнт чисельно дорівнює

$$\boldsymbol{a = \frac{v}{2} = 173,29}$$

Звідки швидкість поперечної хвилі у другій струні

$$\boldsymbol{v = 346,58}\ \text{м/с}$$

За відомим значенням швидкості поперечних хвиль у струні, визначимо дані, яких не вистачає у таблиці 2:

Таблиця 7

Номер струни	**Довжина струни у затиснутому стані, см**	**Основна частота, Гц**	**Номер струни**	**Довжина струни у затиснутому стані, см**	**Основна частота, Гц**
1	32,6	**689,8**	2	32,6	**531,6**
1	34,5	**651,9**	2	34,5	**502,3**
1	**38,2**	588,5	2	**39,2**	442,2
1	**40,5**	555,5	2	**41,5**	417,5
1	**45,4**	495,8	2	**46,7**	371,2

Частота звучання струни може бути визначена через її механічні характеристики як:

$$\nu = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F_н}{ML}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F_н}{\rho S L^2}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{E\varepsilon}{\rho}} = \frac{v}{2L}$$

Тобто швидкість поперечних хвиль у струні $v = \sqrt{\frac{E\varepsilon}{\rho}}$

За відомим середнім значенням швидкості поширення поперечних хвиль у струні можна визначити її відносне видовження

$$\varepsilon = \frac{\rho v^2}{E}$$

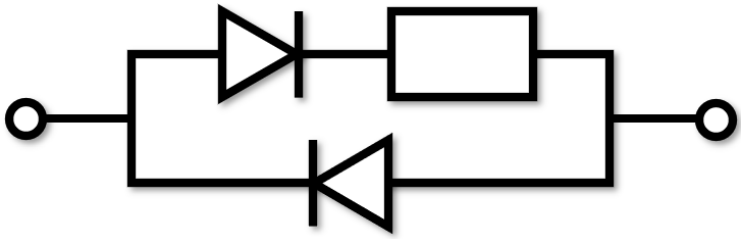
За результатами вимірювань для кожної струни можна отримати наступні значення:

Таблиця 8

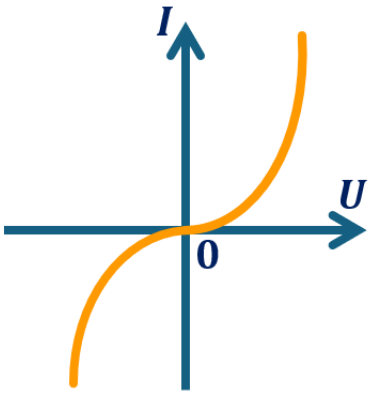
Варіант 1. Звичайний розрахунок середнього арифметичного (гірший за точністю)		
Номер струни	**Середнє значення швидкості поперечних хвиль, м/с**	**Відносне видовження струни**
1	**434**	**$7{,}3 \cdot 10^{-3}$**
2	**329**	**$4{,}2 \cdot 10^{-3}$**
Варіант 2. Метод найменших квадратів (трішки точніший)		
Номер струни	**Середнє значення швидкості поперечних хвиль, м/с**	**Відносне видовження струни**
1	**450**	**$7{,}9 \cdot 10^{-3}$**
2	**347**	**$4{,}7 \cdot 10^{-3}$**

(222)

Схема



Вольт-амперна характеристика

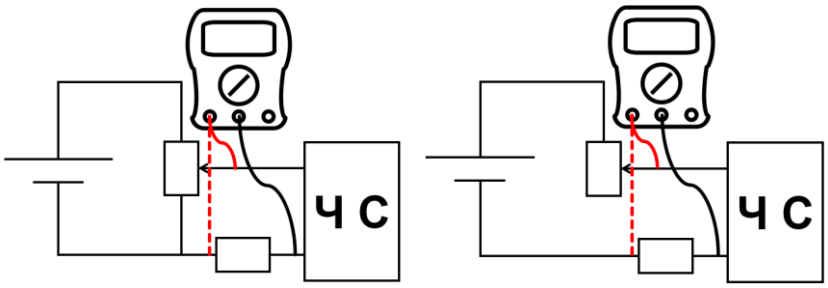


Для її визначення потрібно виміряти вольт-амперну характеристику скриньки при різній полярності прикладеної напруги. Регулювати силу струму через чорну скриньку можна за допомогою реостата або потенціометра. Вимірювання слід проводити при однаковій абсолютній величині струму і різній полярності. При цьому падіння напруги на діодах буде однаковим, а різниця напруг при різній полярності дасть напругу на резисторі.

Результати вимірювань заносимо в таблицю, рахуємо опір. Чим більше точок при різних струмах виміряно, тим більша буде точність! Для перевірки правильності розв'язку і оцінки похибки можна побудувати вольт-амперну характеристику резистора. Вона повинна вийти прямою. Відхилення точок від прямої дасть можливість визначити похибку визначення опору. Якщо ці відхилення носять випадковий характер – це нормально, це відображає реальну точність експерименту. Якщо відхилення систематичні (вольт-амперна характеристика резистора вийшла вигнутою) – це свідчить про неоднаковість діодів. За це учаснику бали не знижуються!

Проводити вимірювання буде зручніше і швидше, якщо для вимірювання струму не перемикати мультиметр в розрив кола, а ввімкнути послідовно ще один невеликий постійний резистор, попередньо вимірявши його опір омметром. Падіння напруги на цьому резисторі дасть можливість визначати величину струму.

Для зняття ВАХ можна було користуватися різними схемами (дивись нижче), але саме перша схема дозволяє зробити це більш якісно.



(223) План експерименту:

1. Затискаємо дротину (не сильно) між гайками, попередньо зігнувши її в скобу. Верхню гайку бажано зафіксувати біля голівки болта.
2. Відмічаємо олівцем місця стику.
3. Закручуємо нижню гайку, рахуючи на яку кількість граней вона обернулася.

4. Знаючи крок різьби 0,7 мм, гайка проходить $\frac{0,7}{6}$ мм за оберт на одну грань, рахуємо кількість граней, що обернулося, і знаходимо товщину дроту.

(224) 1. Зважуємо порожню алюмінієву банку на вагах. Розраховуємо її теплоємність. В нашому випадку 11,63 Дж/К.

2. Зрозуміло, що для визначення питомої теплоти згорання парафіну нам доведеться підпалити свічку і нагрівати за її допомогою банку з водою. Якщо розмістити банку над самою свічкою, то за рахунок ввігнутого дна банки можна буде зменшити втрату тепла. Щоб визначити масу парафіну, що згорає, потрібно використовувати ваги протягом всього досліду. Свічку розмістити на вагах і записувати зміну маси в процесі проведення експерименту.

Зрозуміло, що втрати енергії через стінки банки в навколишнє середовище будуть суттєвими. Щоб це врахувати: тушимо свічу, якщо вона сама ще не встигла це зробити, і даємо банці охолонути, заміряючи час та температуру. Це робимо, щоб позбавитися невідомої величини втрат крізь стінки.

Отже, під час експерименту доведеться спочатку нагрівати банку, а потім охолоджувати. При нагріванні потрібно буде слідкувати за температурою в банці, масою свічки та часом. При охолодженні, відповідно, за часом охолодження та температурою. Очевидно, що для того, щоб врахувати втрати тепла, то потрібно вимірювати проміжки часу для однакових інтервалів зміни температури. Якщо ще врахувати зміну маси свічки і те, що цей процес буде найповільнішим, то можна прийти до висновку, що потрібно записувати час і температуру при кожній зміні маси свічки. А при охолодженні записувати час для тих самих значень температури.

Складаємо енергетичні рівняння і позбавляємося доданку втрат. Але отримуємо тоді залежність швидкості згоряння парафіну від швидкості зміни температури води при нагріванні та охолодженні:

$$q \cdot \Delta m = (c_{\text{води}} \cdot m_{\text{води}} + \text{C}) \cdot \Delta t_{\text{н}} + k \cdot (t_{\text{н}} - t_{\text{серед}}) \cdot \tau_{\text{н}} \quad (1)$$

$$(c_{\text{води}} \cdot m_{\text{води}} + \text{C}) \cdot \Delta t_{\text{ох}} = k \cdot (t_{\text{ох}} - t_{\text{серед}}) \cdot \tau_{\text{ох}} \quad (2)$$

де Δm - маса парафіну, що згоріла, q - питома теплота згорання парафіну, С - теплоємність.

Розділимо кожне рівняння на відповідний час і враховуючи, що ми вимірюємо час для однакової зміни температури $|\Delta t_{\text{ох}}| = \Delta t_{\text{н}} = \Delta t$, то отримуємо рівняння

$$q \cdot \frac{\Delta m}{\tau_{\text{н}}} = (c_{\text{води}} \cdot m_{\text{води}} + \text{C}) \cdot \frac{\Delta t}{\tau_{\text{н}}} + (c_{\text{води}} \cdot m_{\text{води}} + \text{C}) \cdot \frac{\Delta t}{\tau_{\text{ох}}} \quad (3)$$

Або $\frac{\Delta m}{\tau_{\text{н}}} = \frac{(c_{\text{води}} \cdot m_{\text{води}} + \text{C})}{q} \cdot (\frac{\Delta t}{\tau_{\text{н}}} + \frac{\Delta t}{\tau_{\text{ох}}})$ (4)

Експеримент:

Наливаємо воду з пляшки у банку, приблизно 100г. Точну масу знаходимо за допомогою вагів. В нашому випадку 96,42г.

Закріплюємо за допомогою лапок на штативі банку з водою. Під банкою розташовуємо свічку встановлену на вагах. Відстань між дном банки та свічкою повинна бути мінімальною, для зменшення теплових втрат, але достатньою, для того, щоб був приток повітря для нормального горіння свічки. В отвір банки занурюємо термометр.

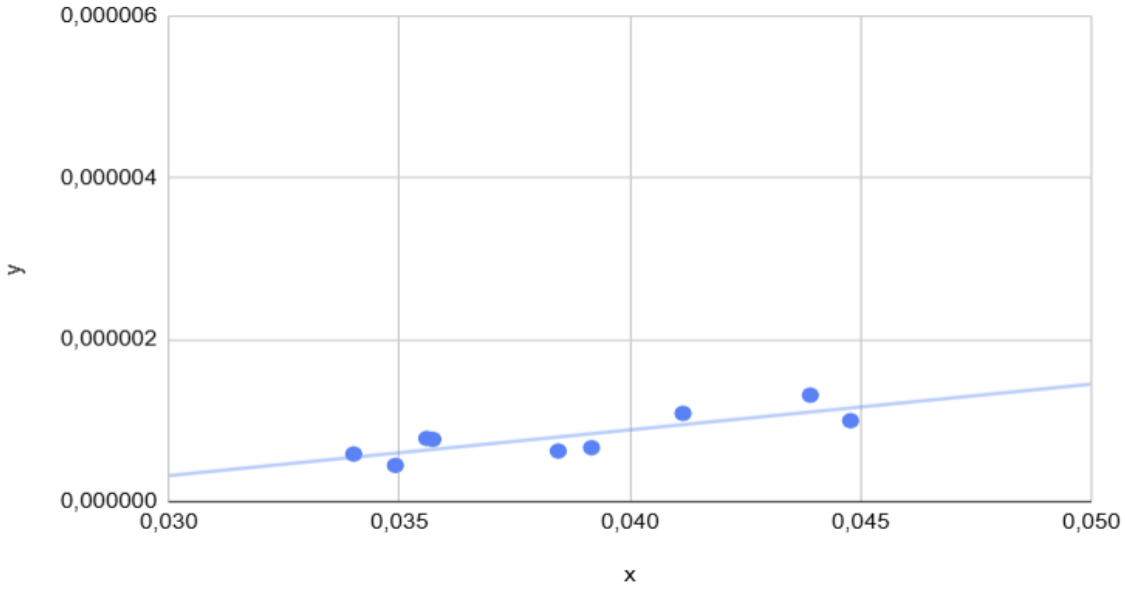
Підпалюємо свічку і вмикаємо секундомір.

t, ℃	Нагрівання $\tau_{\text{загальний час}}$, хв/с	Охолодження $\tau_{\text{загальний час}}$, хв/с	$m_{\text{свічки}}$, г
23,6	0		12,04
34,3	5:34		11,82
36,6	6:38	60:00	11,78
38,5	7:46	54:47	11,74
40,0	8:26	51:21	11,70
41,8	9:30	47:20	11,65
43,6	10:35	43:36	11,60
45,3	11:30	40:50	11,54
46,9	12:37	38:25	11,51
48,1	13:22	36:49	11,48
48,9	14:00	36:14	11,43
50,5	15:04	34:15	11,39

Перерахуємо потрібні нам величини в нову таблицю

№	Δm, кг	$\tau_{\text{нагрів}}$, с	$\tau_{\text{нагрів}}$, с	Δt, ℃
1	0,00004	68	313	1,9
2	0,00004	40	206	1,5
3	0,00005	64	241	1,8
4	0,00005	65	224	1,8
5	0,00006	55	166	1,7
6	0,00003	67	145	1,6
7	0,00003	45	96	1,2
8	0,00005	38	35	0,8
9	0,00004	64	119	1,6

Використовуючи метод найменших квадратів розрахуємо коефіцієнт a з рівняння (4).



Значення а у нашому випадку $5.6 \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг}}{K}$

$$a = \frac{(c_{\text{води}} \cdot m_{\text{води}} + \text{C})}{q} \qquad (5)$$

Отже

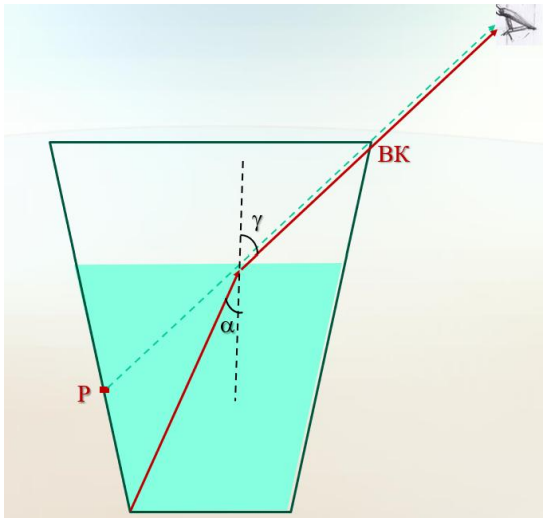
$$q = \frac{(c_{\text{води}} \cdot m_{\text{води}} + \text{C})}{a} \approx 7{,}4 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}} \qquad (6)$$

Знайдений результат співпадає по порядку величини з істинним значенням питомої теплоти згорання парафіну $\sim 10 \frac{\text{МДж}}{\text{кг}}$.

(225) Треба поставити маркером тоненьку горизонтальну риску на внутрішній стороні стінки картонного стакана (на висоті 2–4 см від дна). Після цього треба розміститися самим і розмістити стакан так, щоб бачити **одним оком**, що ця риска (Р) «збігається» з верхнім краєм стакана (ВК), розташованим ближче до ока. Ключовою умовою успішного вимірювання є забезпечення **нерухомості** голови експериментатора під час усього експерименту. І це за умови, що «вільною» рукою експериментатор у цей час потроху доливає в стакан рідину. Експериментатор бачить, що стінка стакана з рискою зорово «піднімається». Треба зупинитися, коли стане хоч трохи видимою межа між стінкою та дном стакана.

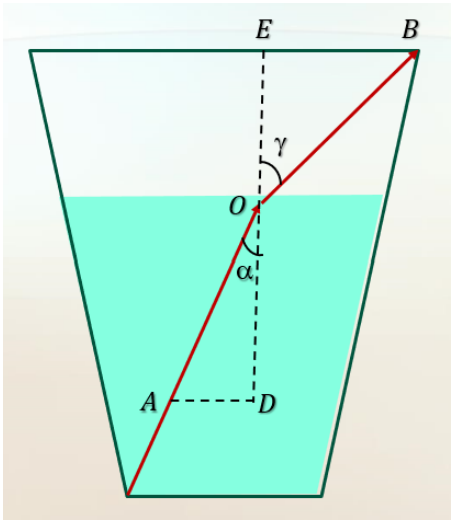
Примітка. *Штатив з кільцем потрібний не для закріплення стакана: просто якщо експериментатор спирається підборіддям на кільце, йому легше тримати голову нерухомою протягом певного часу.*

Тепер треба виміряти висоту шару рідини, відстань від риски Р до дна стакана, а також усі геометричні параметри стакана (висоту, діаметр дна та верхнього горизонтального перерізу). Це дозволить досить точно зробити на міліметровому папері рисунок на кшталт наведеного нижче. Зручно навіть робити цей рисунок (переріз вертикальною площиною, що проходить через вертикальну вісь симетрії стакана) в масштабі 1 : 1.



Показник заломлення рідини $n = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$. Кути падіння та заломлення можна було б виміряти й транспортиром. Але ще краще (особливо з урахуванням відсутності транспортира) скористатися стандартною геометричною побудовою. Треба відкласти однакові відрізки OA, OB на падаючому та заломленому променях і побудувати «перпендикуляри до перпендикуляра».

Як легко побачити, $n = \frac{BE}{AD}$.



Вимірювання авторів давали показник заломлення води в межах від 1,31 до 1,37. Зрозуміло, що повна похибка тут є більшою.

(226) Перед проведенням вимірювань слід переконатися, що металеві пластинки помітно не взаємодіють з магнітом, якщо той до них прикласти**.** Для розв'язку цієї експериментальної задачі можуть існувати різні підходи, але більшість з них зводиться до того, що треба вимірювати затухання коливання математичного маятника із магнітом на кінці, який коливається біля пара- або діамагнітних металевих пластинок. Затухання коливань провокуються появою струмів Фуко в товщі цих металів.

Ми покажемо дві основні можливі теоретичні моделі та постановки експериментів у випадку використання математичного маятника.

В обох моделях треба за нитку пластиліном підвісити магніт на кільцевий тримач або лапку штатива, а на певній відстані під магнітом розташувати металеву пластинку. Важливо стежити за тим, щоб магніт не знаходився близько до залізних елементів штативу, парти чи підлоги.

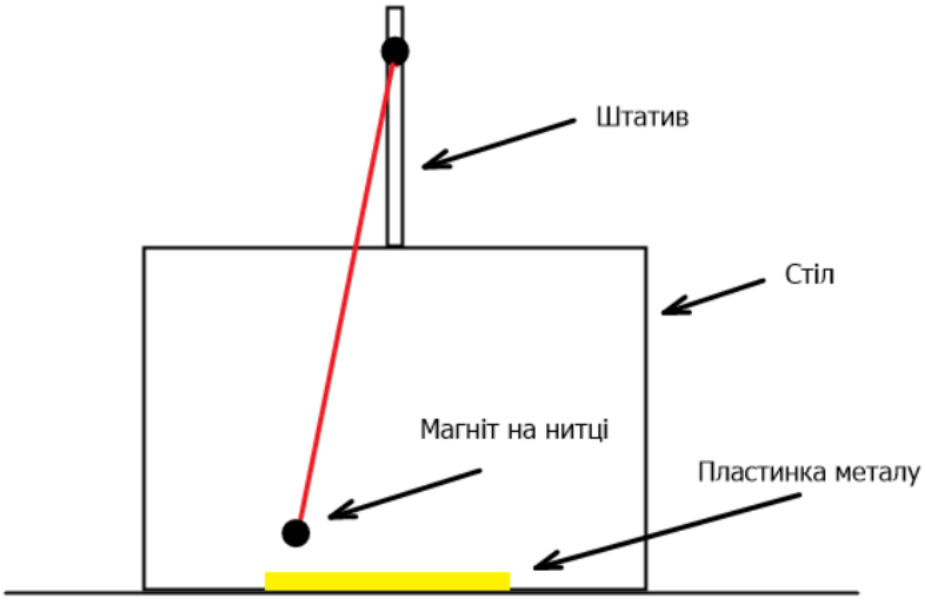


Рис. 1

За можливості, для цього найкращим варіантом є коливати магніт не поблизу поверхні парти (адже це означає, що десь поблизу знаходиться і залізна основа штатива), спустити нитку до підлоги і покласти металеву пластинку на лист міліметрового паперу, на якому зручно фіксувати положення пластинки та робити відмітки для подальшого стеження за амплітудою коливань магніту.

Перша модель. В даній моделі досліджуються коливання магніта з невеликою амплітудою, яка сильно не перевищує довжину металевих пластинок.

Однією з причин затухання коливань магніта біля металевої пластинки є виникнення індукційних струмів Фуко через те, що при русі магніта змінюється потік магнітного поля через різні перерізи пластинки. Тобто, частина механічної енергії магніта розсіюється на тепло, яке виникає через протікання індукційних струмів в пластинці.

Потужність теплових втрат в металі дорівнює:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{R},$$

де $\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ це характерне індукційне ЕРС, яке виникає в металі. де Ф це магнітний потік через контур, а R - характериний опір контура струму. Як видно з рисунку 2 є 3 основних види струмів, які паралельні граням пластинки, що можуть виникати в пластинках. Вияснимо чому пропорційна потужність втрат для кожного із цих струмів.

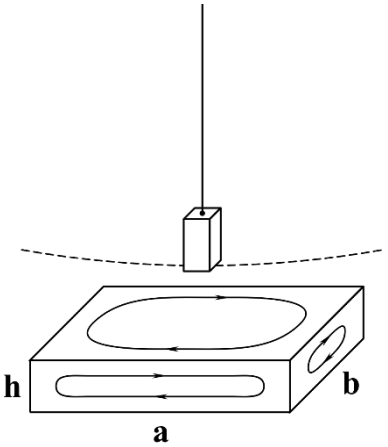


Рис. 2

ЕРС індукції визначається як магнітним полем, так і геометрією контуру зі струмом:

$$\varepsilon = -S\frac{\Delta B_{\perp}}{\Delta t},$$

де S – площа контуру, $B_\perp$ – складова магнітної індукції, перпендикулярна до площини контуру. Щоб оцінити залежність теплових втрат від товщини платівок, необхідно знати вид контурів вихрових струмів у пластинах. Розглянемо три різні варіанти такого розташування струмів. Нехай платівка має розміри a×b×h (див. Рис. 2), причому a~b, а h<<a. Опір контуру визначається за формулою $R = \rho l / S'$, де l і S' - ефективні довжина і площа перерізу струму, а ρ – шуканий нами питомий опір матеріалу.

Тоді для потужності втрат $P = \frac{\varepsilon^2}{R} = \frac{1}{R}\left(S\frac{\Delta B_\perp}{\Delta t}\right)^2 = \frac{S^2 S'}{\rho l}\left(\frac{\Delta B_\perp}{\Delta t}\right)^2$ у кожному із трьох випадків циркуляції струмів (див. рис.2) отримаємо такі вирази

$$P_{ab} \sim \left(\frac{\Delta B_\perp}{\Delta t}\right)^2 \frac{a^5}{\rho}\frac{h}{a}$$

$$P_{ah} \sim P_{bh} \sim \left(\frac{\Delta B_\perp}{\Delta t}\right)^2 \frac{a^5}{\rho}\left(\frac{h}{a}\right)^3 \sim P_{ab}\left(\frac{h}{a}\right)^2$$

Оскільки $h/a \approx 1/20$, то потужність втрат P_{ab} при циркуляції струму в площині ab за величиною на два порядки перевищує потужність втрат у двох інших випадках. Звичайно, для різних площин можуть відрізнятися невідомі нам значення $\Delta B_\perp / \Delta t$, але оскільки поле магніту дуже неоднорідне, при його русі над пластинкою будуть змінюватися всі компоненти поля, тому для різних орієнтацій контурів струмів $\Delta B_\perp / \Delta t$ не повинно відрізнятися. За бажання уникнути цієї невизначеності можна провести кілька вимірювань, по-різному закріплюючи магніт на нитці (змінюючи положення його полюсів), але так чи інакше очевидно, що основні втрати будуть давати струми у площині ab.

Додамо також, що $\Delta B_\perp / \Delta t$ пропорційне до швидкості руху магніта, адже в кожній точці пластинки перпендикулярна компонента магнітного поля міняється в часі наступним чином

$$\frac{dB_\perp(\vec{r}(t) - \vec{r}_0)}{dt} \sim B'_\perp(\vec{r}(t) - \vec{r}_0) * \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = B'_\perp(\vec{r}(t) - \vec{r}_0) * |\vec{v}|,$$

де $\vec{r}(t)$ – радіус-вектор положення магніта, $\vec{r}_0$ – координата довільної точки пластини.

Звідси ми бачимо, що зміна потоку магнітного поля за одиницю часу буде пропорційна до швидкості руху магніта та пропорційна до певної функції положення магніта. Далі для сильного спрощення будемо вважати, що цю функцію положення магніта можна не враховувати і вважати, що зміна потоку пропорційна лише швидкості магніта. Треба ще раз підкреслити, що в умовах даної задачі, особливо враховуючи, що металеві пластинки є невеликими, це дійсно є сильним спрощенням реальних складних ефектів. Трохи мінімізувати відхилення нашої моделі від реальності можна створюючи коливання магніту лише невеликої амплітуди, яка є порядка розміру половини довжини пластинки, або ненабагато її перевищує. Дана модель очевидно має свої недоліки, проте дозволяє досліджувати велику зміну амплітуди коливання, що важливо для експерименту і спрощує зняття даних.

Врешті-решт, об'єднуючи викладені вище міркування можемо сказати, що потужність втрат

$$P \sim \frac{v^2 h}{\rho}.$$

Тоді модуль сили, що гальмує магніт $F_{\text{магн опору}} \sim \frac{P}{v} = \frac{vh}{\rho}$.

Тоді виникає ідея, що можна описувати затухання коливань від тертя з повітрям як силу, яка теж пропорційна першому ступеню швидкості.

Отже, можемо сказати, що ми маємо коливання із затуханням, де сили опору руху пропорційні швидкості, а значить з теорії коливань можна стверджувати, що амплітуда коливань затухає в часі по експоненційному закону:

$$A(t) = A_0 * e^{-\beta t},$$

де $\beta = \beta_{\text{повітря}} + \beta_{\text{магнітна}} = \beta_{\text{повітря}} + k\frac{h}{\rho}$, тут k – деякий коефіцієнт пропорційності.

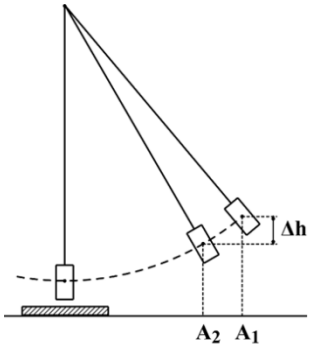


Рис. 3

Тоді виникає ідея проведення досліду. Відмічаємо на міліметровці, на якій лежить пластинка, два положення, які відповідають початковій і кінцевій амплітуді коливання маятника, як зображено на рисунку 3 (але тільки бажано не робити початкову амплітуду значно більшою за розмір пластинки).

Час затухання коливань між цими положеннями обернено пропорційний до β: $t \sim \frac{1}{\beta}$. Значить можна провести 3 групи вимірювань: (1) маятник коливається без пластинок під ним, а отже його амплітуда коливань зменшується лише повітрям за час $t_0 \sim \frac{1}{\beta_{\text{повітря}}}$; (2) маятник коливається над першою (мідною) пластинкою і $t_{\text{м}} \sim \frac{1}{\beta_{\text{повітря}} + k\frac{h_{\text{м}}}{\rho_{\text{м}}}}$;

(3) маятник коливається над другою (алюмінієвою) пластинкою і $t_{\text{а}} \sim \frac{1}{\beta_{\text{повітря}} + k\frac{h_{\text{а}}}{\rho_{\text{а}}}}$. Звідси легко отримати, що

$$\frac{\rho_{\text{м}}}{\rho_{\text{а}}} = \frac{(t_0 - t_{\text{а}})}{(t_0 - t_{\text{м}})} \frac{t_{\text{м}}}{t_a} \frac{h_{\text{м}}}{h_{\text{а}}}.$$

Товщини пластинок легко вимірюються штангенциркулем. Часи затухання (зменшення амплітуди) мають в усіх трьох випадках вимірюватись між однаковими крайніми (початковою та кінцевою) амплітудами. Бажано один і той самий час вимірювати хоча б 5-10 разів для покращення точності. Стежити за зміною амплітуди коливань зручніше всього стоячи і дивлячись зверху вниз майже вздовж нитки маятника, тоді буде гарно видно граничні мітки амплітуд і чітке горизонтальне положення магніту. Також під час проведення експерименту треба дослідним шляхом підібрати таку висоту магніта над пластинками, щоб, з одного боку, затухання не відбувалось дуже швидко, але й висота не може бути сильно великою, адже тоді магнітне затухання буде дуже слабким і ми матимемо затухання майже виключно під дією опору повітря.

Друга модель. Дана модель схожа на першу, але для вимірювання використовуються значно більші амплітуди коливань маятника, ніж в першій моделі. Проте, для цієї моделі принципово, що зміна амплітуди, час якої вимірюється, має бути невелика, що може вносити свої незручності.

Легко переконатись, що період коливань маятника від матеріалу пластинки практично не залежить. Як виміряти втрати енергії? За час одного коливання енергія втрачається нерівномірно, тому зручною характеристикою може бути величина середньої потужності втрат енергії за період T

$$P = \frac{mg\Delta h}{T}$$

де m – маса магніту, Δh – різницю висот двох послідовних максимальних відхилень маятника в одному із крайніх положень. Але Δh мале і незручне для виміру. Найзручніше вимірювати проекцію крайніх положень магніту на горизонтальну площину підлоги. Однак і в цьому випадку похибка експерименту буде все ж таки досить високою. Для підвищення точності треба дозволити магніту зробити побільше коливань. Щоб втрати енергії за кожен період при цьому були приблизно рівними, необхідно, щоб за час вимірювань зміна амплітуди була малою порівняно з самою амплітудою (ΔA<<A). Цей спосіб дозволяє зробити амплітуди коливань доволі великими, як на рисунку 3. При цьому можливі два підходи до знаходження P: вимірювати зміну амплітуди за фіксований час або вимірювати час, за який змінюється амплітуда на фіксоване значення. Другий підхід здається значно зручнішим. Отже як і в першому випадку, буде вимірюватись час зменшення амплітуди між двома завчасно визначеними положеннями.

Ці міркування призводять до наступної схеми експерименту (див. Рис. 3). На лінії коливання маятника відзначаємо дві досить близькі точки A_1 та A_2 – початкову та кінцеву амплітуди коливань. Потім в одне і те саме місце під маятником кладемо металеві пластинки і з кожною з них проводимо один і той же експеримент, вимірюючи часи t_0, t_1, t_2, за які амплітуда коливань в кожному з випадків зміниться від A_1 до A_2. Така схема експерименту дозволяє врахувати опір повітря. Коливання маятника над металевою пластинкою та без неї має приблизно однакову аеродинаміку, тому однакова і потужність втрат за рахунок опору повітря

$$P_0 = \frac{mg\Delta h}{t_0}$$

Оскільки у всіх вимірах початкова та кінцева амплітуди коливань однакові, зміна механічної енергії маятника mgΔh також буде однаковою. Енергія mgΔh йде на роботу проти сил опору повітря (потужність P_0) та на збудження та підтримку індукційних струмів у металах (потужності P_1 та P_2). Таким чином

$$P_1 + P_0 = \frac{mg\Delta h}{t_1},\ P_2 + P_0 = \frac{mg\Delta h}{t_2}$$

З вищенаведеного легко отримуємо, що

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{(t_0 - t_1)t_2}{(t_0 - t_2)t_1}.$$

Залишається лише встановити зв'язок потужності індукційних втрат із питомим опором металу пластинки. Але ми вже робили це в попередній моделі:

$$P \sim \frac{v^2 h}{\rho}.$$

В даному способі амплітуда коливань доволі велика і можна вважати, що швидкість прольоту над пластинкою (коли народження індукційних струмів найбільш значне) майже стала, тоді

$$P \sim \frac{h}{\rho}.$$

А отже,

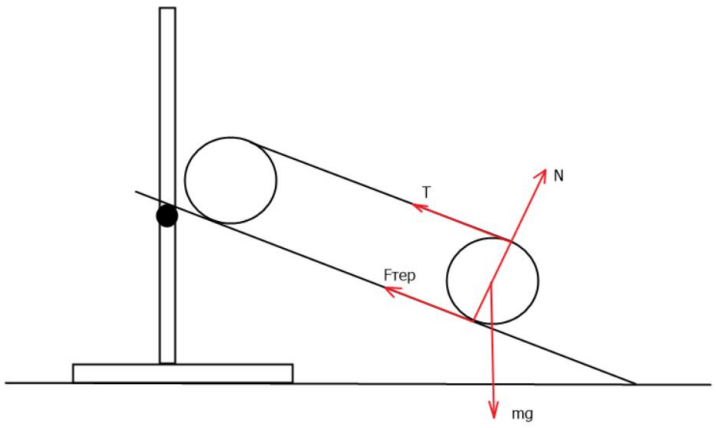
$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_1(t_0 - t_2)t_1}{h_2(t_0 - t_1)t_2},$$

що, до речі, співпадає із формулою в першій моделі.

P.S. В теорії можна було би спробувати побачити відмінність між періодами коливань такого маятника над пластинками та без, адже теорія коливань із затуханням говорить, що такі періоди коливань будуть відрізнятись. Проте, якщо коливання не затухають швидко, то відмінність періодів буде дуже мала, а якщо сильно наблизити магніт до пластинок, то затухання буде дуже швидким і нормально виміряти період буде майже неможливим. Тому, цей спосіб не видається гарним.

P.P.S. Реальне відношення між питомими опорами міді і алюмінію приблизно дорівнює 0.61. Товщини пластинок в задачі були підібрані так, що $\frac{h_м}{h_а}$ вже дає значення близько до 0.75. Тобто, при таких товщинах часи коливань над мідною та алюмінієвою пластинками повинні бути доволі близькими. У авторів задачі в даному експерименті значення відношення питомих опорів вийшло приблизно 0.64.

(227) А) Можна придумати багато способів вимірювання коефіцієнту тертя круглого тіла із листком паперу. Наприклад можна було б зробити із двох кульок похилу площину (підняти одну кульку по відношенню з іншою на певній відстані між ними по горизонталі), прикріпити лист паперу до дошки і покласти дошку папером на кульки так, щоб до кульок дотикався лише папір та класично шукати кут нахилу, при якому дошка поїде. Але цей експеримент важко робити одному та стабілізовувати вузьку дошку на кульках. Також існує ще велика кількість способів, з яких ми докладно опишемо наступний, ідею якого демонструє рисунок.



На верхню поверхню дошки крыпиться аркуш паперу і за допомогою штатива з цієї дошки робиться похила площина. На верхню частину дошки скотчем кріпиться одна тенісна кулька, до верхньої частини якої кріпиться край нитки. Інший край нитки кріпиться до будь-якої точки іншої кульки, на що важливо витратити якомога менше скотчу. Після цього система встановлюється в положення як на рисунку вище. З умов рівноваги нижньої кульки легко вивести, що проковзувати по поверхні дошки вона почне при куті нахилу дошки α, який пов'язаний із коефіцієнтом тертя наступною формулою:

$$\mu = \frac{tg(\alpha)}{2}.$$

Автори задачі отримали значення $\mu \approx 0.2$.

Б) В цьому пункті дуже важливим було натренуватись закручувати кульку так, щоб її центр мас мінімально рухався по поверхні. Момент сили тертя легко вивести з основного закону динаміки обертального руху

$$-\mathrm{M}_{\text{тер}} = I\varepsilon,$$

звідки $\mathrm{M}_{\text{тер}} = -I * \varepsilon = -\frac{2}{5}mR^2 * \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$. В досліді треба очікувати коли кулька повністю зупиниться, отже $N * 2\pi = \frac{1}{2}|\Delta\omega|\Delta t$, де N – кількість обертів до повного гальмування, Δt – час повного гальмування, $\Delta\omega$ – зміна кутової швидкості при повному гальмуванні.

Звідки, $\mathrm{M}_{\text{тер}} = \frac{8}{5}\pi mR^2 N/\Delta t^2$. Маса легко міряється вагами, радіус штангенциркулем, кількість обертів очима та мозком, а час секундоміром. Великі оберти для вимірювання не підходять, адже порахувати кількість обертів в цьому випадку неможливо. Тому час гальмування доволі невеликий, отже бажано робити багато дослідів і результат усереднювати.

В) Характерне плече моменту сили тертя оцінюється елементарно $d = \frac{\mathrm{M}_{\text{тер}}}{\mu mg}$, а площа плями $S = \pi d^2$.

Автори виміряли значення для всіх кульок, але тут приведемо значення лише однієї з них, для прикладу:

$$\mathrm{M}_{\text{тер}} \approx 2.5 * 10^{-5}\ \text{Н} * \text{м}$$

$$d \approx 0.7\ \text{мм}$$

$$S \approx 1.5\ \text{мм}^2$$

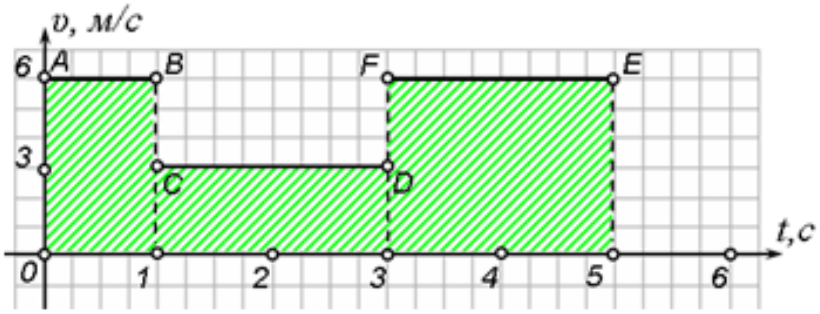
Розв’язки завдань фізичного марафону 8 клас

(228) Петрик подолав зі швидкістю 4 км/год третину шляху за третину часу. Для того щоб встигнути до школи вчасно він має подолати третину шляху в зворотному напрямі (рухаючись додому) і ще три третини (у напрямі від дому до школи), тобто всього чотири третини шляху. Якби Петрик не забув зошит, то за час, який лишився він мав подолати дві третини шляху. Якщо Петрик повернеться додому за зошитом, то йому знадобиться за той же час подолати чотири третини шляху, тобто у два рази більший шлях. Отже, його швидкість бігу має бути у два рази більшою за швидкість ходьби - 8 км/год.

Відповідь: 8 км/год

(229) Для розв’язання задачі зручно скористатись властивістю графіка швидкості, згідно якої площа фігури, обмежена графіком, віссю Ot та перпендикулярами опущеними на цю вісь чисельно рівна шляху (на рисунку ця площа заштрихована):

$$L = 6\frac{м}{с}\cdot 1с + 3\frac{м}{с}\cdot 2с + 6\frac{м}{с}\cdot 2с = 24\,м$$



Середня швидкість $\upsilon_s = \frac{24\,м}{5\,с} = 4{,}8\frac{м}{с}$. ***Відповідь: υ = 4,8 м/с***

(230) Оскільки маса речовини, яка бере участь у плавленні кубика і твердненні кульки є однаковою, то і кількість теплоти, яка виділиться при твердненні і поглинатиметься при плавленні будуть по модулю однаковими. Від форми тіла ця кількість теплоти НЕ залежить. ***Відповідь: Q.***

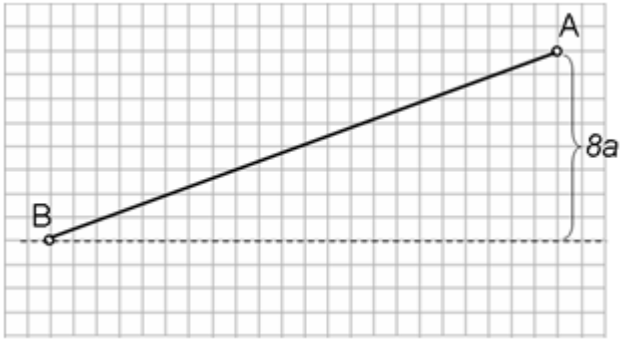
(231) Оскільки ремені нерозтяжні, то лінійна швидкість точок ободу блоків 1 та 2 однакова:

$\upsilon = 2\pi(2R)\nu_1 = 2\pi R\nu_2$, де $\nu_2=2\nu_1=60$ *об/хв.* Оскільки блоки 2 та 3 з’днані нерухомо, то частоти їх обертання однакові: $\nu_2=\nu_3=60$ *об/хв.* Оскільки ремені нерозтяжні, то лінійна швидкість точок ободу блоків 3 та 4 однакова: $\upsilon = 2\pi(2R)\nu_3 = 2\pi R\nu_4$, де $\nu_4=2\nu_3=120$ *об/хв.* ***Відповідь: ν_4=120 об/хв.***

(232) З графіка слідує, що період коливань маятника 1,2 с, отже, 75 % періоду коливань - це 0,9 с. За цей час кулька маятника долає шлях 18 см. Середня швидкість кульки за цей час:

$\upsilon_{CP} = \frac{18\,см}{0{,}9\,с} = 20\frac{см}{с} = 0{,}2\frac{м}{с}$. ***Відповідь: υ_{CP}=0,2 м/с***

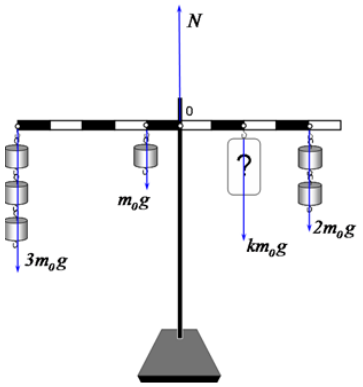
(233) Під час руху від моменту старту, точка А, до моменту зупинки, точка В, сила тертя, що діє на санчата виконує роботу по перетворенню механічної енергії санчат внутрішню. Отже, робота сили тертя дорівнює зміні механічної енергії, яку мали санчата в точці А. У точці А санчата мають потенціальну механічну енергію відносно нульового рівня, який містить точку В $E_0 = mg(8a)$. Тоді робота



сили тертя $A_{TP} = 0 - E_0 = -mg(8a)$. Щоб затягнути санки із точки В у точку А необхідно виконати роботу проти сили тертя $A_1 = -A_{TP} = mg(8a)$ та по збільшенню потенціальної енергії санчат $A_2 = E_0 - 0 = mg(8a)$. Таким чином, повна робота, яку необхідно виконати, щоб втягнути санки з точки В у точку А: $A = A_1 + A_2 = 16mga$. ***Відповідь: A=16mga***

(234) Позначимо довжину білої або чорної смуги L, масу одного важка m_0, шукану кількість важків k. Розставимо сили, які діють на важіль (див. рис.). Складемо рівняння моментів для важеля відносно його осі обертання, точки О:

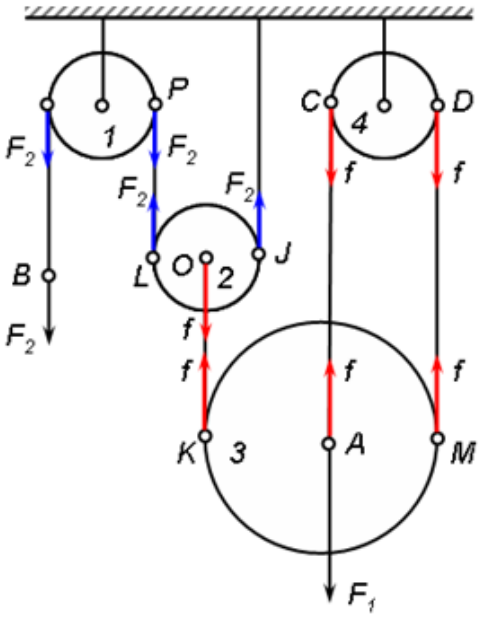
$$3m_0g \cdot 5L + m_0gL = km_0g \cdot 2L + 2m_0g \cdot 4L$$



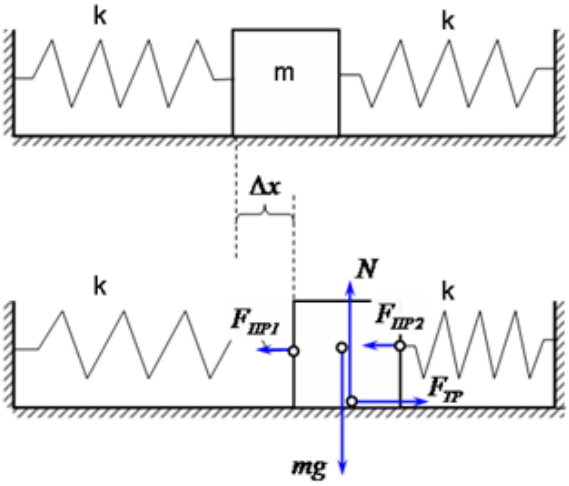
Скоротивши спільні множники, отримаємо: $15 + 1 = 2k + 8$.
Звідки $k = 4$. ***Відповідь: k = 4 важки.***

(235) Розставимо сили, які діють на нитки. Оскільки нитка ACDMKO нерозтяжна, а блоки невагомі, то з умови рівноваги рухомого блоку 3 слідує, що $3f = F_1$ звідки $f = \frac{F_1}{3}$. Оскільки нитка JLPB нерозтяжна, а блоки невагомі, то з умови рівноваги рухомого блоку 2 слідує, що $f = 2F_2$. Підставивши значення f, отримаємо:

$2F_2 = \frac{F_1}{3}$ звідки $\frac{F_1}{F_2} = 6$. **Відповідь: F_1/F_2=6.**



(236) Розставимо сили, які діють на брусок при його зміщенні (див. рис.). Оскільки брусок знаходиться на межі ковзання, то сила тертя, що діє на брусок визначається як $F_{TP} = \mu N$, та рівнодійна сил, які діють на брусок, дорівнює нулю. Розпишемо рівнодійну: $R = F_{ПР1} + F_{ПР2} - F_{TP} = 0$. Оскільки пружини однакові і їх абсолютне видовження Δx однакове, то $F_{ПР1} = F_{ПР2} = k \cdot \Delta x$. Оскільки $N=mg$, то $F_{TP} = \mu N = \mu mg$. Підставимо вирази для сил у формулу рівнодійної: $2k \cdot \Delta x = \mu mg$ звідки $\mu = \frac{2k\Delta x}{mg} = 0{,}6$. **Відповідь: μ=0,6.**



(237) За законом Архімеда виштовхувальна сила, яка діє на тіло занурене у рідину або газ, дорівнює вазі витісненої рідини. Отже, сила Архімеда дорівнює $F_A = m_B \cdot g = 1$ Н. ***Відповідь: 1 Н***

(238) При падінні м'ячика на підлогу його потенціальна енергія $E_П = mgh$ перетворюється в кінетичну $E_K = \frac{m\upsilon^2}{2}$, яку має м'ячик перед ударом об підлогу. За законом збереження повної механічної енергії $E_K = E_П = mgh$. Після удару об підлогу м'ячик підстрибує і відбуваються зворотні перетворення енергії: з кінетичної у потенціальну. Якщо під час удару у м'ячика залишається 80% початкової енергії, то можемо знайти висоту підняття м'яча після першого удару: $mgh_1 = 0{,}8mgh$ звідки $h_1 = 0{,}8h = 1{,}2\ м$. З аналогічних міркувань, висота підскоку після другого удару: $h_2 = 0{,}8h_1 = 0{,}96\ м$, після третього удару: $h_3 = 0{,}8h_2 = 0{,}768 м$. ***Відповідь: h_3=76,8 см.***

(239) Час необхідний для повного розплавлення речовини масою m (часина графіка паралельна осі Oτ) дорівнює τ_1=40 хв=2400 с. Отже, кількість теплоти необхідна для повного розплавлення: $Q = P\tau_1 = \lambda m$ звідки $\lambda = \frac{P\tau_1}{m} = 96\ кДж/кг$. ***Відповідь: λ=96 кДж/кг.***

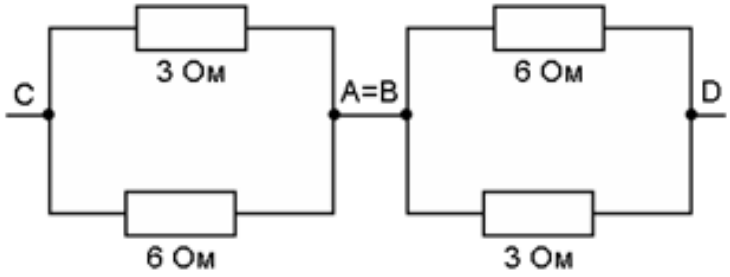
(240) ***Відповідь: Виконання роботи***

(241) Оскільки нагрівник НЕ може нагріти воду вище 78 ^{0}C, отже, при цій температурі потужність нагрівника рівна потужності тепловтрат $P = P_{TB}$. Після вимкнення нагрівника, тепло передається від води оточуючому середовищу: $Q = P_{TB}\tau = cm\Delta t$. Оскільки зміна температури при охолодженні незначна, вважатимемо, що потужність тепловтрат при охолодженні стала. Підставимо замість P_{TB} величину P: $P\tau = cm\Delta t$, звідки $P = \frac{cm\Delta t}{\tau} = 70\ Вт$. ***Відповідь: P=70 Вт.***

(242) Початкова сила F_1 взаємодії першої кульки з зарядом q_1=(-3) мкКл та другої q_2=(+9) мкКл визначається за законом Кулона: $F_1 = \frac{k|q_1| \cdot |q_2|}{L^2}$. Після дотику третьою кулькою до першої заряди цих кульок стануть однаковими і дорівнюватимуть $Q_1 = \frac{-3мкКл + 5мкКл}{2} = 1\ мкКл$.

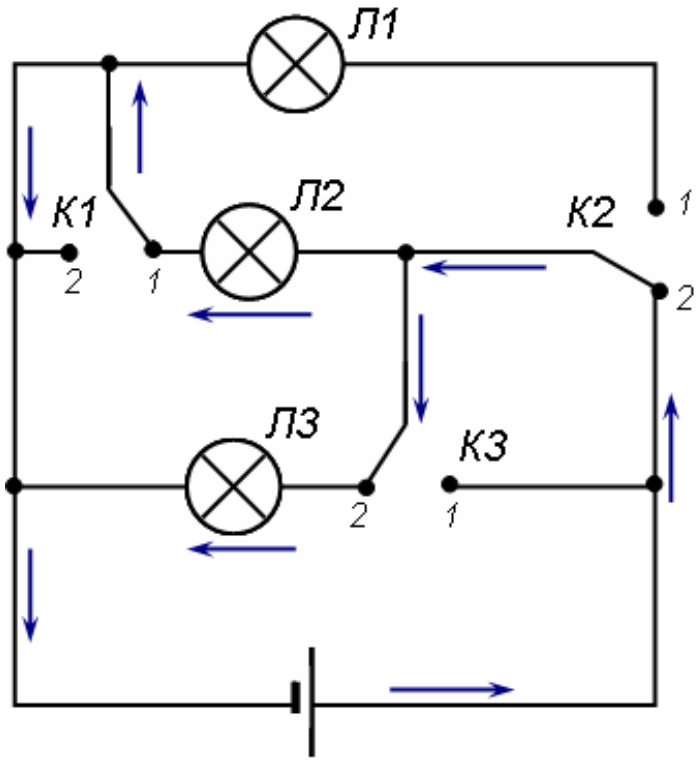
Після дотику третьою кулькою, заряд якої вже (+1) мкКл до другої, заряди обох кульок стануть рівними $Q_2 = \frac{1мкКл + 9мкКл}{2} = 5\ мкКл$. Сила взаємодії F_2 першої та другої кульок після дотиків стане рівною $F_2 = \frac{k|Q_1|\cdot|Q_2|}{L^2}$. Поділимо F_1 на F_2: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{|q_1|\cdot|q_2|}{|Q_1|\cdot|Q_2|} = \frac{27}{5} = 5{,}4$. ***Відповідь: сила зменшиться в 5,4 рази.***

(243) Оскільки перетинка АВ не має електричного опору, отже, напруга (різниця потенціалів) між точками А та В дорівнює нулю. Тому ці точки можна з'єднати в одну, замінивши дану схему еквівалентною (див рис.). Отримавши еквівалентну схему, використовуючи закони з'єднання провідників неважко знайти опір даної ділянки кола: R= 4 Ом. ***Відповідь: R= 4 Ом.***



(244) Світитимуться лампочки, через які тектиме струм. Розстановка струму у колі (див. рис.) показує, що світитимуться лампочки Л2 та Л3.

Відповідь: Л2, Л3.



(245) При контакті циліндру з льодом, усе тепло, яке виділятиметься при охолодженні циліндра масою $m_Т$ піде на плавлення льоду масою $m_Л$. Складемо рівняння теплового балансу:

$c_T m_T \Delta t = \lambda m_Л$. Розпишемо масу тіла: $c_T \rho_T V \Delta t = \lambda m_Л$. Звідки маса льоду, що розтане дорівнює: $m_Л = \frac{c_T \rho_T V \Delta t}{\lambda} = c_T \rho_T \left(\frac{V \Delta t}{\lambda} \right)$. Отже, чим більший добуток $c_T \rho_T$, тим більша маса льоду розплавиться, оскільки усі величини в дужках для трьох циліндрів будуть однакові. Обчислимо дані добутки для кожного циліндра: для алюмінію $c_A \rho_A \approx 2{,}48 \frac{МДж}{м^3 \, ^0C}$, для заліза: $c_З \rho_З \approx 3{,}51 \frac{МДж}{м^3 \, ^0C}$, для свинцю $c_З \rho_З \approx 1{,}47 \frac{МДж}{м^3 \, ^0C}$. Отже, найбільше зануриться у лід залізний циліндр.

Відповідь: залізний

(246) Розпишемо одиниці вимірювання отриманої величини: $Па = \frac{Н}{м^2}$; $Вт = \frac{Дж}{с} = \frac{Н \cdot м}{с}$

$$\frac{\frac{Н}{м^2} \cdot кг}{\frac{Н \cdot м}{с} \cdot с} = \frac{Н \cdot кг}{м^2} \cdot \frac{с}{Н \cdot м \cdot с} = \frac{кг}{м^3}$$ - це одиниці вимірювання густини

Відповідь: густина

(247) Шкала опору позначена kΩ та MΩ. Як видно на проміжку від 0,1 до 0,2 кОм міститься 5 поділок, отже, ціна поділки шкали 0,02 кОм=20 Ом. ***Відповідь: 20 Ом.***

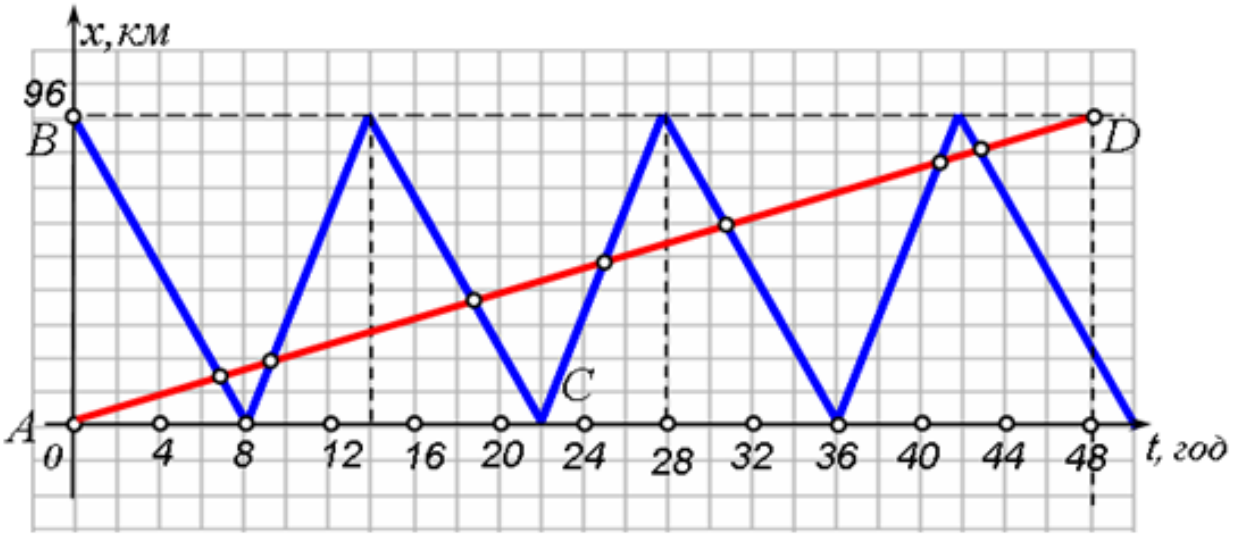
(248) Позначимо швидкість фізика u. Фізик рухався t=15 хв=0,25 год, до моменту коли помітив втрату і ще t=0,25 год до моменту, коли знову дійшов до куща, де втратив капелюх. Від куща до місця де знайшов капелюх минув час T і фізик подолав шлях L=1,5 км. А течія річки, швидкість якої υ=2 км/год за час (2t+T) знесла капелюх на цю ж відстань L. Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} L = uT \\ L = \upsilon(2t + T) \Rightarrow T = \frac{L - 2\upsilon t}{\upsilon} \end{cases}$$

Отже, $u = \frac{L}{T} = \frac{\upsilon L}{L - 2\upsilon t} = 6 \, \frac{км}{год}$.

Відповідь: u=6 км/год.

(249) Дана задача може бути розв'язана і з використанням законів руху, і за допомогою графіків. Більш наочний і швидкий результат дає саме графічний підхід. Рухаючись від В до А, проти течії, швидкість пароплава відносно берега 12 км/год, отже, на подолання 96 км йому знадобиться 8 год. При русі вздовж течії від А до В швидкість пароплава відносно берега 16 км/год і на подолання 96 км знадобиться 6 год. Таким чином пароплав здійснить один рейс за 14 год. Пліт, який рухається відносно берега зі швидкістю течії 2 км/год на подолання відстані від А до В витратить 48 год. Побудуємо в одній системі координат графіки руху плота і пароплава для проміжку часу 48 год (див рис.)



Кількість точок перетину графіків - це і є кількість зустрічей пароплава і плота. З рисунка видно, що їх буде 7. ***Відповідь: 7.***

(250) Частота обертання заднього колеса ν_1 і веденої зірки однакові, оскільки вони скріплені між собою нерухомо і мають спільну вісь обертання. Оскільки велосипед рухається без проковзування, отже, швидкість руху велосипеда і лінійна швидкість руху по колу точок ободу заднього колеса однакові і дорівнюють $\upsilon=6{,}28$ *м/с*. Враховуючи, що радіус колеса R=0,4 м, знайдемо частоту обертанні колеса і веденої зірки:

$$\nu_1 = \frac{\upsilon}{2\pi R} = 2{,}5\frac{об}{с} = 150\frac{об}{хв}$$

Враховуючи, що лінійні швидкості зубців веденої і ведучої зірки однакові отримаємо

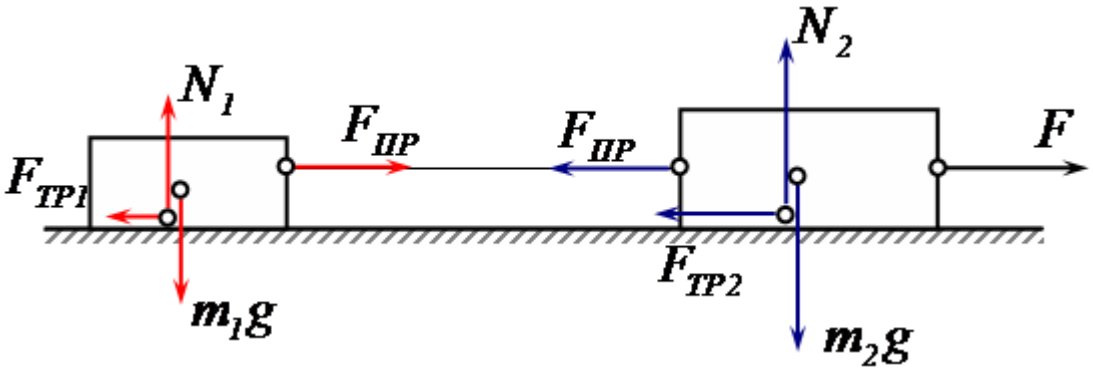
$$L_1\nu_1 = L_2\nu_2$$

Де L_1 та L_2 - довжини кіл обода веденої та ведучої зірки відповідно. Позначивши відстань між сусідніми зубцями L_0, кількість зубців веденої зірки N_1, а ведучої N_2 =50, можемо записати попередню рівність так

$$L_0N_1\nu_1 = L_0N_2\nu_2 \text{ звідки } N_1 = \frac{N_2\nu_2}{\nu_1} = \frac{50\cdot 30\frac{об}{хв}}{150\frac{об}{хв}} = 10$$

Відповідь: N_1=10.

(251) Розставивши сили, які діють на кожне з тіл (див рис) знайдемо максимальну силу тертя (силу тертя ковзання), яка діятиме на кожне з тіл під час руху: $F_{TP1} = \mu m_1 g = 4\,H$; $F_{TP2} = \mu m_2 g = 6\,H$. Отже, щоб зрушити систему брусків з місця знадобиться горизонтальна сила тяги 10 Н. В нашому випадку, на систему діє сила тяги 8 Н, отже, система рухатись НЕ буде. Сили 8 Н достатньо, щоб зрушити з місця брусок m_2, але не достатньо, щоб зрушити обидва бруски.



Оскільки бруски перебувають у спокої, отже, рівнодійна сил, що діють на кожен з брусків рівна нулю. Розпишемо рівнодійну сил, що діють на брусок m_2:

$$R_2 = F_{TP2} + F_{ПР} - F = 0 \Rightarrow F_{ПР} = F - F_{TP2} = F - \mu m_2 g = 2\ H$$

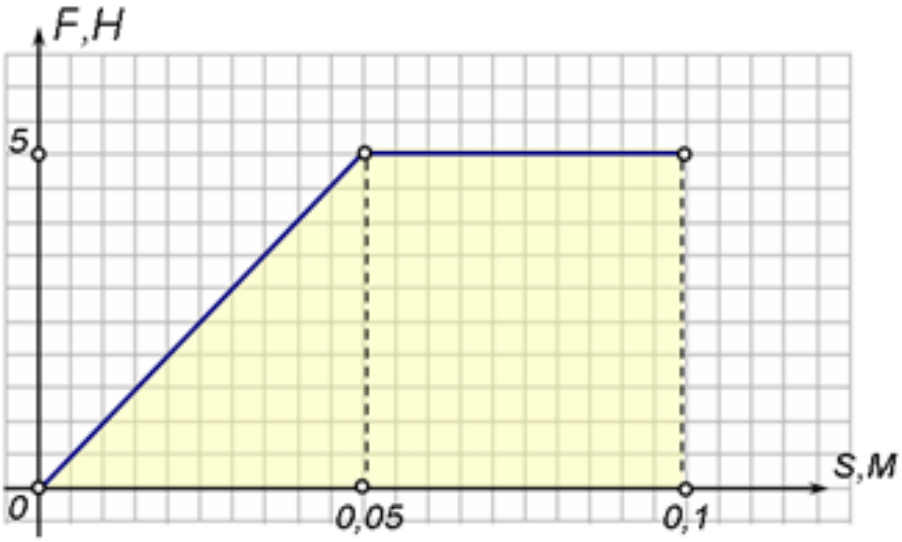
Сила тертя, що діє на брусок m_2 буде максимальною 6 Н, оскільки сила тяги 8 Н. Цієї сили тяги достатньо, щоб зрушити цей брусок з місця і натягнути нитку силою 2 Н.

Розпишемо рівнодійну сил, що діють на брусок m_1:

$$R_1 = F_{TP1} - F_{ПР} \Rightarrow F_{ПР} = F_{TP1} = 2\ H$$

Сила тертя, що діє на брусок m_1 - це сила тертя спокою. Ця сила тертя спокою буде меншою за максимально можливу, яка дорівнює 4 Н. ***Відповідь: 2 Н.***

(252) Щоб робота виконана по підніманню кубика була мінімальною, кубик потрібно виймати рівномірно. Сила тяжіння, що діє на кубик дорівнює 5 Н. Оскільки густина кубика у два рази менша за густину води, то кубик плаватиме у воді і буде занурений наполовину своєї висоти. Щоб вийняти кубик з води слід перемістити його центр мас на висоту 5 см, прикладаючи при цьому вертикально вгору силу, яка буде лінійно змінюватись від 0 до 5 Н.



При переміщенні кубика на наступні 5 см потрібно прикласти до нього постійну силу, направлену вертикально вгору, яка рівна силі тяжіння кубика - 5 Н. Щоб знайти загальну роботу зручніше всього побудувати графік прикладеної сили F від переміщення s (див рис.) Згідно властивості цього графіка, площа фігури, яка обмежена графіком, віссю Os та

перпендикулярами, опущеними на цю вісь чисельно рівна роботі. Дана фігура (на рисунку виділена жовтим кольором) є прямокутною трапецією, отже, робота

$$A = \frac{0{,}05м + 0{,}1м}{2} \cdot 5Н = 375мДж$$

Відповідь: А=375 мДж.

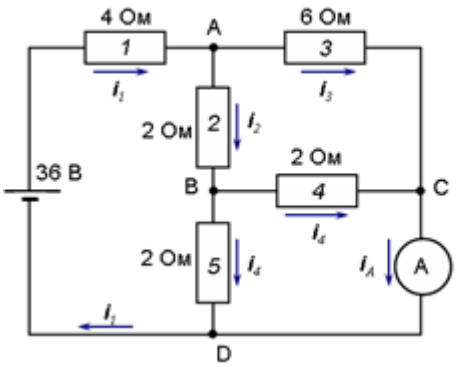
(253) Витрата води - це об'єм, який витікає з крана за одиницю часу: $\gamma = \frac{V}{t} = 12\frac{л}{хв} = 0{,}0002\frac{м^3}{с}$. Вода буде нагріватись, поки тектиме по нагрівнику, тому: $cm(t - t_0) = P\tau$ (1), де m - маса води, що нагрівається при протіканні через нагрівник; $t_0=10^0C$ - температура води, що втікає у нагрівач; t - температура води, що витікає з нагрівача, τ - час протікання води по нагрівачу. Маса води, яка нагрівається може бути знайдена як: $m = \rho V = \rho \cdot \gamma \cdot \tau$ (2). Підставивши вираз (2) в (1), отримаємо: $c\rho\gamma\tau(t - t_1) = P\tau$ звідки $t = \frac{P}{c\rho\gamma} + t_0 = 12^0 C$. ***Відповідь: t=12 °C.***

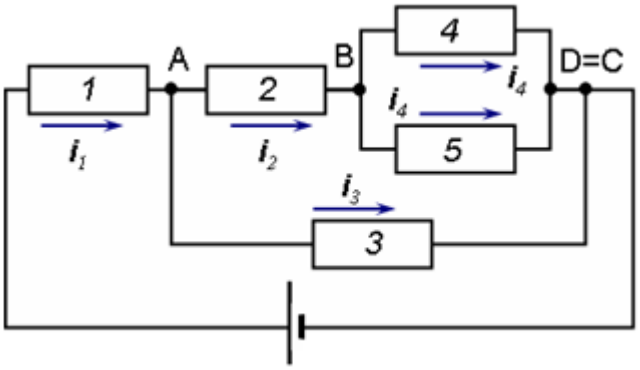
(254) ККД - це відношення корисної роботи до затраченої. Корисною в даному випадку є механічна робота, яка перетворюється у внутрішню енергію сірки: $A_K = Q = cm(t - t_0)$, де c - питома теплоємність сірки, m - маса сірки на сірнику; $t=170\ ^0C$, $t_0=20\ ^0C$. Отже, $A_K = Q = cm(t - t_0) = 0{,}21Дж$. Затрачена робота - це робота виконана по переміщенню сірника по коробці проти сили тертя: $A_3 = F_{TP}s = \mu Fs = 0{,}7Дж$. Тоді ККД сірника: $\eta = \frac{A_K}{A_3} \cdot 100\% = 30\%$. **Відповідь: η=30 %.**

(255) З графіка слідує, що потужність тепловіддача при *0 °C* складає *(-100)Вт*. Це означає, що під час плавлення потужність отриманого льодом тепла складає $P_1=100$ *Вт*. Отже, час танення льоду τ_1 можна знайти з рівняння: $\lambda m = P_1\tau_1$, звідки $\tau_1 = \frac{\lambda m}{P_1} = 3300c = 55хв$. З графіка знаходимо, що температура повітря у кімнаті *20 °C*, оскільки при цій температурі потужність тепловіддачі дорівнює нулю, так як тіло і кімната перебувають у тепловій рівновазі. При нагріванні льодяної води від *0 °C* до *20 °C* потужність теплообміну змінюється лінійно від *100 Вт* до *0*. Оскільки залежність потужності тепловіддачі від температури тіла лінійна, вважатимемо, що під час усього процесу нагрівання потужність приймає середнє значення P_2=50 Вт. Тоді час нагрівання льодяної води можна знайти з рівняння: $cm(t - t_0) = P_2\tau_2 \Rightarrow$ $\tau_2 = \frac{cm(t - t_0)}{P_2} = 1680c = 28хв$. Отже, загальний час танення льоду і нагрівання води до кімнатної температури 83 хв.

Відповідь: τ=83 хв.

(256) Розставивши струми, які течуть у колі і пронумерувавши резистори можна замінити дану схему еквівалентною (див. рис). З рисунка видно, що струм, який тече через амперметр можна знайти як $i_A=i_4+i_3=i_1- i_4$.





З рисунка слідує, що повний опір кола *R=6 Ом*, тоді $i_1 = \frac{U}{R} = 6\ A$. Опір ділянки ABD у два рази менший за опір резистора R_3, тому у вузлі А струм розділиться у співвідношенні $i_2 = \frac{2}{3} i_1 = 4\ A$ та $i_3 = \frac{1}{3} i_1 = 2\ A$. У вузлі В струм розділиться на дві рівні частини, оскільки попори резисторів R_4 та R_5 однакові: $i_4 = \frac{1}{2} i_2 = 2\ A$. Отже, амперметр покаже силу струму $i_A = i_4 + i_3 = 4\ A$.

Відповідь: i_A= 4А.

(257) Перша похила ділянка графіка відповідає процесу плавлення льоду. Зменшення об'єму вмісту калориметра обумовлене тим, що об'єм льоду більший ніж об'єм води, яка утвориться після танення цього льоду. Знайдемо масу льоду $m_Л$ та води $m_В$ у посудині в початковий момент часу.

Початковий об'єм вмісту калориметра: $V_1 = \frac{m_В}{\rho_В} + \frac{m_Л}{\rho_Л}$ (1), де $V_1=1{,}25*10^{-3}\ м^3$ (згідно графіка).

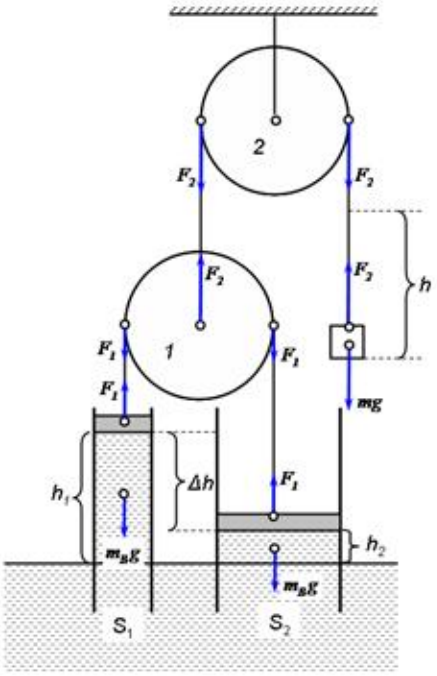
Об'єм вмісту калориметра після повного розплавлення льоду: $V_2 = \frac{m_В}{\rho_В} + \frac{m_Л}{\rho_В}$ (2), де $V_2=1{,}20*10^{-3}\ м^3$ (згідно графіка). Знайшовши різницю виразів (1) та (2) знайдемо масу льоду: $m_Л = \frac{\rho_В \rho_Л (V_1 - V_2)}{\rho_В - \rho_Л} = 0{,}45 кг$, тоді початкова маса води $m_В = \rho_В V_2 - m_Л = 0{,}54 кг$.

З графіка слідує, що плавлення льоду відбувалось протягом τ_1=2,4 хв=144 с. Для процесу плавлення льоду запишемо рівняння теплового балансу, позначивши Р - потужність нагрівника: $\lambda m_Л = P\tau_1$ (3)

Ділянка графіка, яка паралельна осі Оτ відповідає процесу нагрівання води масою m=($m_Л$ +$m_В$)=1,2 кг від t_0=0 °С до кипіння t=100 °С. Згідно графіка, процес нагрівання тривав τ_2=10,8хв–2,4хв=8,4хв=504 с. Для процесу нагрівання запишемо рівняння теплового балансу: $cm(t - t_0) = P\tau_2$ (4). Поділивши рівності (3) та (4) знайдемо питому теплоту плавлення льоду: $\lambda = \frac{cm(t - t_0)\tau_1}{m_Л \tau_2} = 320 \frac{кДж}{кг}$. ***Відповідь: λ=320 кДж/кг.***

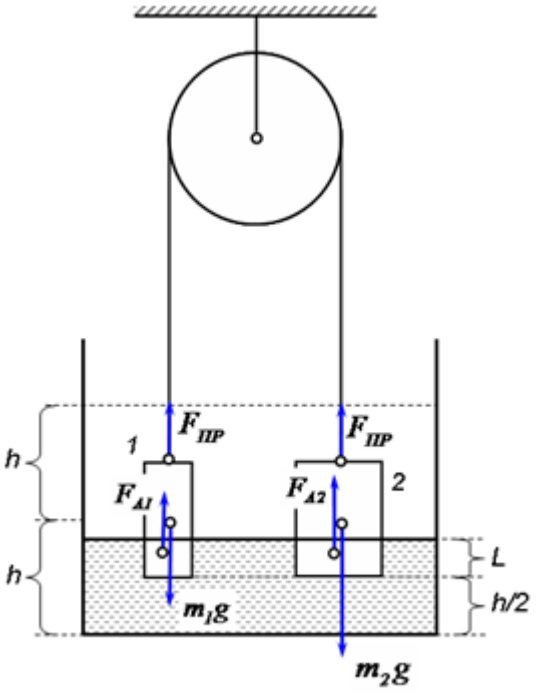
(258) Зобразимо систему у стані, коли вантаж не утримують і вся система перебуває у стані спокою (див. рис.). Оскільки блок 2 нерухомий, то $F_2=mg$. З умови рівноваги рухомого блоку 1 слідує, що

$$F_1 = \frac{F_2}{2} = \frac{mg}{2}.$$



Оскільки сили, що діють на поршні однакові, тоді і маси води, які піднімуться за кожним із поршнів над поверхнею будуть однакові: $m_B = \rho S_1 h_1 = \rho S_2 h_2$ звідки $h_1 = \frac{S_2 h_2}{S_1} = 6h_2$. З умови рівноваги кожного з поршнів слідує, що $F_1 = m_B g$. Підставивши значення F_1 та розписавши масу води $m_B=\rho S_2 h_2$, яка піднялась за поршнем, отримаємо $\frac{mg}{2} = \rho S_2 h_2 g$, звідки $h_2 = \frac{m}{2\rho S_2} = 0{,}1\,м$. Тоді, $h_1 = 6h_2 = 0{,}6\,м$. Оскільки блок 1 рухомий, то його переміщення становить $h = h_2 + \frac{h_1 - h_2}{2} = 0{,}35\,м$ і це переміщення дорівнює переміщенню вантажу m. ***Відповідь: h=35 см.***

(259) Розглянемо випадок, коли обидва вантажі занурені у воду на однакову глибину. Оскільки вантажі з'єднані ниткою, яка перекинута через нерухомий блок, то обидва вантажі перемістяться на висоту $h/2$ і будуть занурені у воду на однакову висоту L. Отже, висота рівня води у посудині $H=L+h/2$. Щоб знайти L запишемо умову рівноваги для кожного з вантажів:



для першого: $F_{ПР} = m_1 g - F_{A1}$ (1)

для другого: $F_{ПР} = m_2 g - F_{A2} = 2m_1 g - F_{A2}$ (2)

Оскільки вантажі з'єднані ниткою, яка перекинута через нерухомий блок, то сили натягу нитки $F_{ПР}$, які діють на кожен вантаж, однакові, тоді з рівностей (1) та (2) отримаємо:

$m_1 g - F_{A1} = 2m_1 g - F_{A2}$. Розписавши сили Архімеда, які діють на кожен з вантажів, і звівши подібні, отримаємо: $\rho_0 g S_2 L - \rho_0 g S_1 L = m_1 g$ (3).

Розпишемо S_1 та S_2, використовуючи густини речовин важків:

$S_1 = \frac{m_1}{\rho_1 h}$ (4) та $S_2 = \frac{m_2}{\rho_2 h} = \frac{2m_1}{\rho_2 h}$ (5)

Підставимо (4) та (5) в (3): $\rho_0 g L \frac{2m_1}{\rho_2 h} - \rho_0 g L \frac{m_1}{\rho_1 h} = m_1 g$ звідки $L = \frac{h\rho_1\rho_2}{\rho_0(2\rho_1 - \rho_2)} = 0{,}3h$.

Отже, висота налитої рідини: $H = L + 0{,}5h = 0{,}8\,h = 8\ см$.

Відповідь: H=8 см.

(260) На рисунку зображені сили, які діють у системі. Запишемо рівняння моментів для стержня 1 відносно точки O_1:

$$m_2gL + F_3L = F_2L, \text{ звідки } m_2g + F_3 = F_2 \ (1)$$

Запишемо рівняння моментів для стержня 2 відносно точки O_2:

$$F_3L + F_2 \cdot 3L = F_1 \cdot 3L, \text{ звідки } F_2 = \frac{3F_1 - F_3}{3} \ (2).$$

Врахувавши, що $F_1=mg$, з умови рівноваги важка, прирівняємо (1) та (2):

$m_2g + F_3 = \frac{3mg - F_3}{3}$ звідки $F_3 = \frac{3mg - 3m_2g}{4}$ (3), тоді $F_2 = m_2g + F_3 = \frac{3mg + m_2g}{4}$ (4)

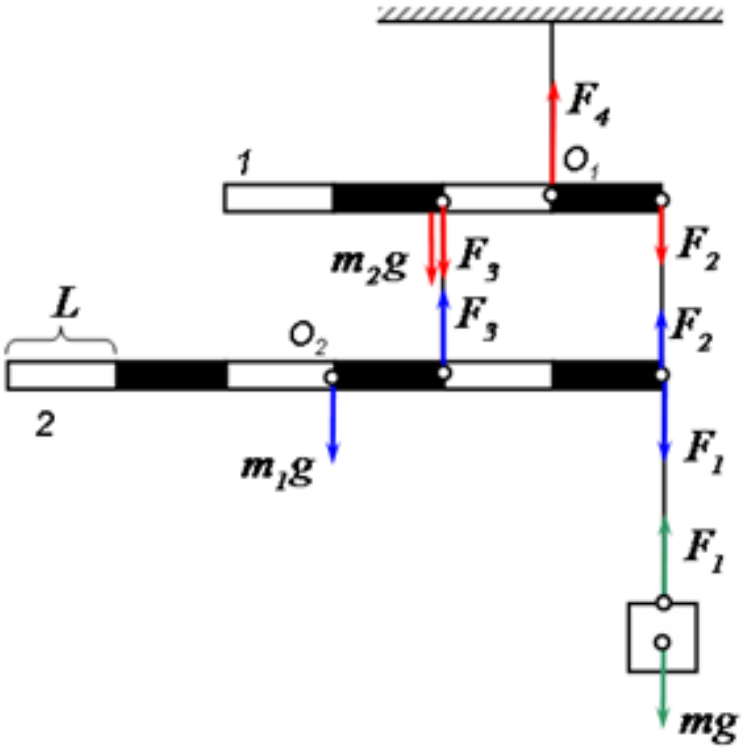
Оскільки стержень 2 перебуває у рівновазі, то рівнодійна сил, які на нього діють, рівна нулю:

$$m_1g + F_1 = F_3 + F_2 \ (5)$$

Підставимо (3) та (4) в (5): $m_1g + mg = \frac{3mg - 3m_2g}{4} + \frac{3mg + m_2g}{4}$ звідки $2m_1 + m_2 = m$ (6)

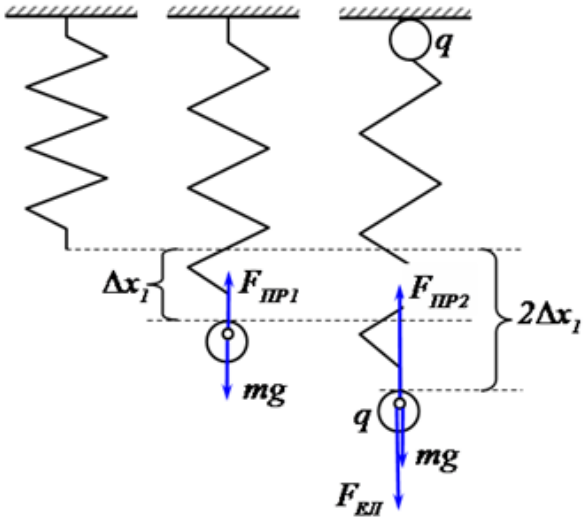
Врахувавши, що стержні зроблені з одного матеріалу та мають однакову площу поперечного перерізу маємо: $\rho = \frac{m_1}{S6L} = \frac{m_2}{S4L}$, звідки $m_2 = \frac{2}{3}m_1$ (7). Підставимо (7) в (6): $2m_1 + \frac{2}{3}m_1 = m$ звідки $m_1 = \frac{3m}{8} = 300\,г$.

Відповідь: m_1=300 г.



(261) З умови рівноваги кульки у першому випадку: $F_{ПР1} = mg$. Розписавши силу пружності за законом Гука, отримаємо: $k\Delta x_1 = mg$, звідки

$$\Delta x_1 = \frac{mg}{k} = 1\ см$$



З умови рівноваги кульки у другому випадку: $F_{ПР2} = mg + F_{ЕЛ}$. Розпишемо силу пружності за законом Гука, а електричну силу - за законом Кулона: $k2\Delta x_1 = mg + \frac{Kq^2}{(L_0 + 2\Delta x_1)^2}$

Підставивши $k\Delta x_1 = mg$

$$mg = \frac{Kq^2}{(L_0 + 2\Delta x_1)^2},$$

звідки $q^2 = \frac{mg \cdot (L_0 + 2\Delta x_1)^2}{K} = 25 \cdot 10^{-12}\ Кл^2$. $q = 5 \cdot 10^{-6}\ Кл$.

Відповідь: q=5 мкКл.

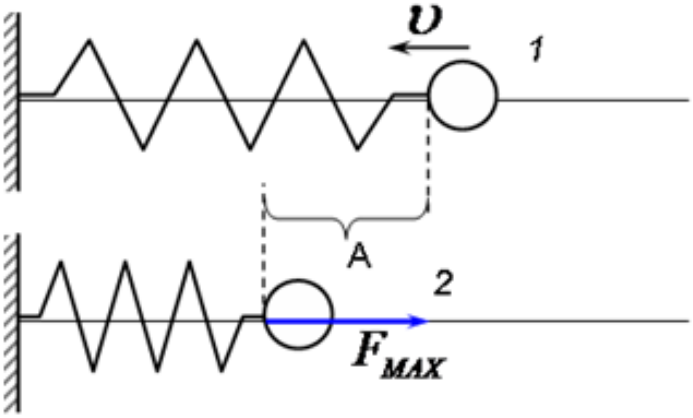
(262) Розглянемо два стани кульки: 1 - момент поштовху; 2 - стан, коли кулька зупинилась в амплітудному положенні, а пружина стиснулась (або розтягнулась). При русі на кульку діють лише сили пружності пружини і спиці та сила тяжіння. Отже, повна механічна енергія кульки при переході із стану 1 в 2 залишається сталою. Повна механічна енергія в стані 1:

$$E_1 = E_{КІН} = \frac{m\upsilon^2}{2}$$

Повна механічна енергія в стані 2:

$$E_2 = E_{ПОТЕНЦ} = \frac{kA^2}{2} \cdot \frac{kA^2}{2} = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

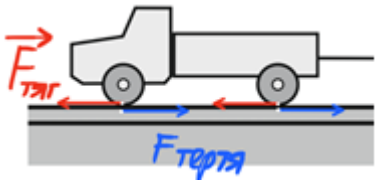
звідки $A^2 = \frac{m\upsilon^2}{k} = 0{,}0025 м^2$.



Отже, $A = 0{,}05 м$ - це максимальне зміщення кульки від положення рівноваги, тобто амплітуда коливань. За одне повне коливання кулька долатиме чотири амплітуди $L_1 = 4A = 0{,}2 м$. З формули періоду коливань знайдемо кількість повних коливань кульки за 6 хв: $N = \frac{t}{T} = \frac{360 с}{0{,}6 с} = 600$. Шлях пройдений за 600 коливань: $L = NL_1 = 120 м$.

Відповідь: L=120 м.

(263) 1) За визначенням тиску: $p = \frac{F}{S} = \frac{mg}{a^2} = \frac{\rho a^3 g}{a^2} = \rho a g$ тоді сторона куба: $a = \frac{p}{\rho g} = \frac{1}{30}$ *м*, а його маса відповідно: $m = \rho V = \rho a^3 = 0{,}1$ *кг* . ***Відповідь: m=0,1 кг.***



2) Після запуску двигуна машинки її колеса почнуть обертатися. В точці дотику колес з поверхнею виникають сили тертя спокою. Одні прикладені до поверхні та направлені проти напряму руху машинки, інші прикладені до колес та направлені в сторону руху. Це і є сили тяги, що приводять в рух машинку. По мірі просування вперед пружина деформується, натяг нитки зростає, і в певний момент машинка зупиняється, а колеса починають проковзувати. Сила тертя ковзання може бути обчислена за законом Амонтона-Кулона:

$$F_{TEP} = \mu N_1 = \mu M g = 0{,}8\ H$$

Видовження пружини спричиненого силою тяги:

$$F_{тягиl} = T = k \cdot x$$

$$k \cdot x = \mu M g$$

$$x = \frac{\mu M g}{k} = 0{,}2 м$$

Відповідь: x=0,2 м

3) Сила, з якою кубик діє на опору - це його вага, яка за модулем дорівнює силі реакції пори $P=N_1$.

з умови рівноваги: $mg = N_1 + F_{ПР1}$, звідки $P = mg - k \cdot x = 0{,}2\ \ H$. ***Відповідь: P=0,2 H***

4) Умовою відриву кубика від опори є те, що він перестає на цю опору діяти

$$N_2 = 0$$

$$F_{ПР2} = mg = F_{тягиl2}$$

$$\mu(M + n \cdot m_0)g = mg$$

Де *n* – це необхідна кількість монет:

$$n = \frac{m - \mu M}{\mu m_0} = 10$$

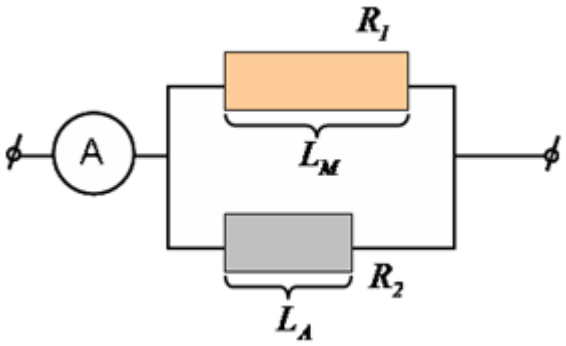
Отже для відриву кубика потрібно покласти 10 монет. Оскільки їх кладуть щосекунди то на це буде потрібно 9 секунд. ***Відповідь: t = 9 с.***

(264) Введемо позначення: діаметр керамічного циліндра $D=0{,}06$ *м*; діаметр дроту $d=0{,}75*10^{-3}$ *м*; кількість витків мідного дроту $N_M=300$; кількість витків алюмінієвого дроту $N_A=200$; напруга на клемах джерела $U=12$ *В*, питомий опір мідного дроту $\rho_M = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\ Ом \cdot м$; питомий опір алюмінієвого дроту $\rho_A = 2{,}9 \cdot 10^{-8}\ Ом \cdot м$.

Виконаємо деякі підготовчі дії, що спростити подальші математичні перетворення.

Знайдемо довжину намотки з мідного дроту: $L_M = N_M \cdot \pi \cdot D \approx 41{,}4 м$;

Знайдемо довжину намотки з алюмінієвого дроту: $L_A = N_A \cdot \pi \cdot D \approx 37{,}7 м$



Знайдемо опір одиниці довжини мідного дроту:

$$r_M = \frac{R_M}{L_M} = \frac{\rho_M}{S} = \frac{4\rho_M}{\pi d^2} \approx 0{,}038 \frac{Ом}{м}$$

Знайдемо опір одиниці довжини алюмінієвого дроту: $r_A = \frac{R_A}{L_A} = \frac{\rho_A}{S} = \frac{4\rho_A}{\pi d^2} \approx 0{,}066 \frac{Ом}{м}$

1) Знайдемо покази амперметра для випадку коли повзунок знаходиться у місці з'єднання алюмінієвого та мідного дротів.

В цьому випадку дану схему можна замінити еквівалентною (див. рис.):

Загальний опір з'єднання:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \text{ де } R_1 = r_M L_M,\ R_2 = r_A L_A$$

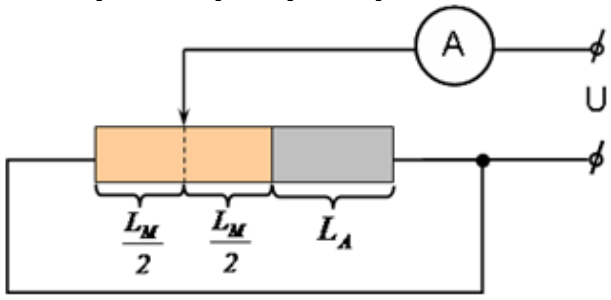
Підставивши значення r_M та r_A, отримаємо:

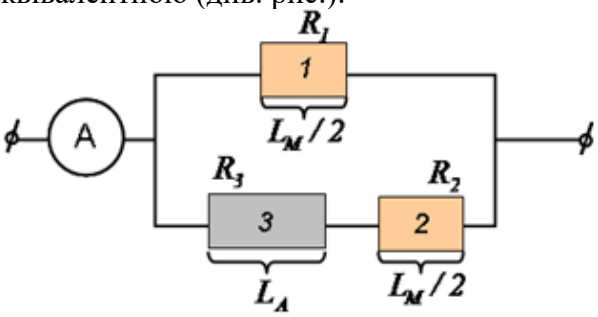
$$R = \frac{L_M r_M \cdot L_A r_A}{L_A r_A + L_M r_M} \approx 0{,}96\ Ом$$

Покази амперметра: $I = \frac{U}{R} \approx 12{,}4\ A$. ***Відповідь:*** $I \approx 12{,}4\ A$.

2) Знайдемо покази амперметра, коли повзунок знаходиться посередині мідної намотки.

В цьому випадку дану схему можна замінити еквівалентною (див. рис.):





Загальний опір з'єднання: $R = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$, де $R_1 = R_2 = \frac{r_M L_M}{2}$, $R_3 = r_A L_A$

Підставивши значення r_M та r_A та спростивши, отримаємо:

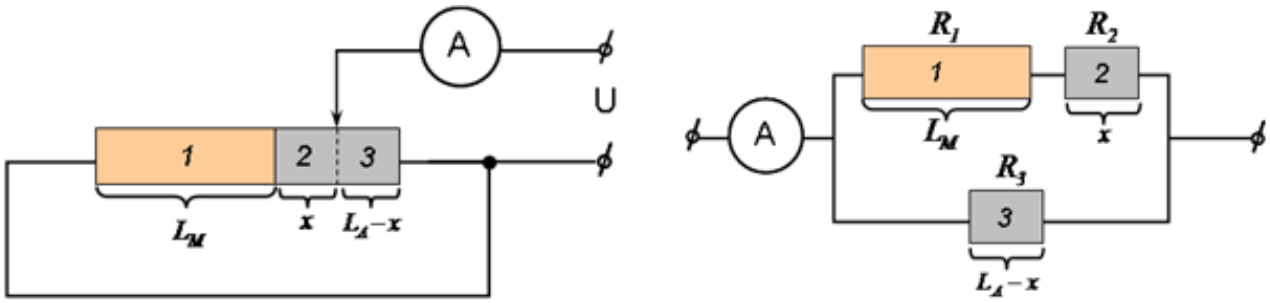
$$R = \frac{L_M r_M \cdot (2L_A r_A + L_M r_M)}{4(L_A r_A + L_M r_M)} \approx 0{,}63\ Ом$$

Покази амперметра: $I = \frac{U}{R} \approx 19\ A$. ***Відповідь:*** $I \approx 19\ A$

3) Знайдемо мінімальну силу струму.

Сила струму буде мінімальною, якщо опір ділянки кола буде максимальним. Знайдемо положення повзунка, при якому опір даної ділянки кола найбільший. Нехай при максимальному опорі ділянки кола повзунок реостата змістили на відстань *x* від точки з'єднання провідників в бік алюмінієвої намотки.

В цьому випадку дану схему можна замінити еквівалентною (див. рис.):



Загальний опір з'єднання: $R = \dfrac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$, де $R_1 = r_M L_M$, $R_2 = r_A \cdot x$, $R_3 = r_A \cdot (L - x)$

Підставивши R_1, R_2, R_3 отримаємо: $R_{MAX} = \dfrac{(L_A - x) r_A \cdot (L_M r_M + r_A x)}{L_A r_A + L_M r_M}$

Перепишемо даний вираз в такому вигляді:

$$x^2 \cdot [r_A]^2 - x \cdot [r_A \cdot (L_A r_A - L_M r_M)] + [R_{MAX}(L_A r_A + L_M r_M) - L_M r_M L_A r_A] = 0$$

Ми отримали квадратне рівняння відносно x. Оскільки значення опору ділянки максимальне R_{MAX}, то дане квадратне рівняння повинно мати два однакові корені, тобто дискримінант цього рівняння має дорівнювати нулю:

$$D = (L_A r_A - L_M r_M)^2 r_A^2 - 4 r_A^2 [R_{MAX}(L_A r_A + L_M r_M) - L_A r_A \cdot L_M r_M] = 0$$

Звідки $R_{MAX} = \dfrac{L_A r_A + L_M r_M}{4} \approx 1{,}02\ Ом$

Таке значення опору буде при: $x = \dfrac{L_A r_A - L_M r_M}{2 r_A} = 6{,}9\ м$ - довжина алюмінієвого дроту від місця намотки.

При цьому опори частин $R_1 + R_2 = r_M L_M + r_A x = 2{,}03 Ом$ та $R_3 = r_A (L_A - x) = 2{,}03\ Ом$

Покази амперметра: $I = \dfrac{U}{R} \approx 11{,}8\ A$.

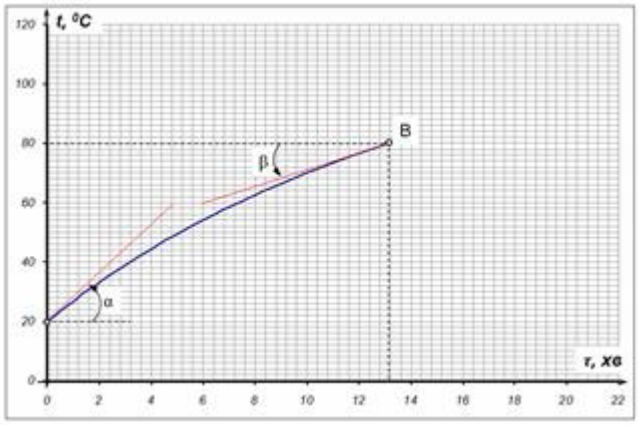
Відповідь: $I \approx 11{,}8\ A$.

(265) Введемо позначення: c - питома теплоємність води; L - питома теплота кипіння води; m - маса води; P - потужність нагрівника; P_{TO} - потужність теплообміну з оточуючим середовищем.

1) Щоб знайти ***потужність електроплитки*** розглянемо точку А на графіку, координати якої (0 хв; 20 °С). Проведемо дотичну до графіка функції у цій точці (див рис.). Тепло, яке виділяє нагрівник іде частково на нагрівання води, а частково на теплообмін із середовищем:

$$P \cdot \tau = c\,m\Delta t + P_{TO} \cdot \tau$$

Тангенс кута нахилу дотичної дорівнює відношенню: $\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{P - P_{TO}}{c\,m}$.



Для невеликої різниці температур між водою і середовищем потужністю P_{TO} можна знехтувати, тому: $\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{P}{c\,m}$ звідки знаходимо потужність нагрівника: $P = c\,m \cdot \frac{\Delta t}{\Delta \tau}$.

Зручно взяти *Δt=6 °C*, *Δτ=0,8 хв*.

В цьому випадку залежність температури від часу дуже близька до лінійної, тоді.

$P = c\,m \cdot \frac{\Delta t}{\Delta \tau} = 525\ Bm \approx 530 Bm$. ***Відповідь: P=530 В.***

2) Щоб знайти ***потужність теплообміну з оточуючим середовищем при температурі 100°С*** виконаємо наступні кроки:

Знайдемо потужність теплообміну при 80 °С. Для цього проведемо дотичну до графіка у точці В з координатами (13,2 хв; 80 °С). Тангенс кута нахилу дотичної дорівнює відношенню: $\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{P - P_{TO}}{c\,m}$, звідки $P_{TO}(80^0 C) = P - c\,m\frac{\Delta t}{\Delta \tau}$. Зручно взяти *Δt=6 °С*, *Δτ=2 хв,* тоді $P_{TO}(80^0 C) \approx 320\ Bm$. Оскільки потужність теплообміну прямо пропорційна різниці температур води та оточуючого середовища, отже, $P_{TO} = k(t_{ВОДИ} - t_{СЕРД})$, звідки можемо скласти пропрцію

$$\frac{P_{TO}(80^0 C)}{80^0 C - 20^0 C} = \frac{P_{TO}(100^0 C)}{100^0 C - 20^0 C}$$ звідси $P_{TO}(100^0 C) = \frac{4}{3} P_{TO}(80^0 C) \approx 427 Bm$

Відповідь: P_{TO}(100 °С) = 427 Вт

3) Знайдемо час, який знадобиться для википання усієї води з посудини.

Під час кипіння температура води змінюватись не буде, тому потужність теплообміну з оточуючим середовищем залишатиметься сталою і дорівнюватиме *380 Вт.* Тоді для процесу википання води можна записати: $P \cdot \tau_K = L\,m + P_{TO}(100^0 C) \cdot \tau_K$, де τ_K - час википання води.

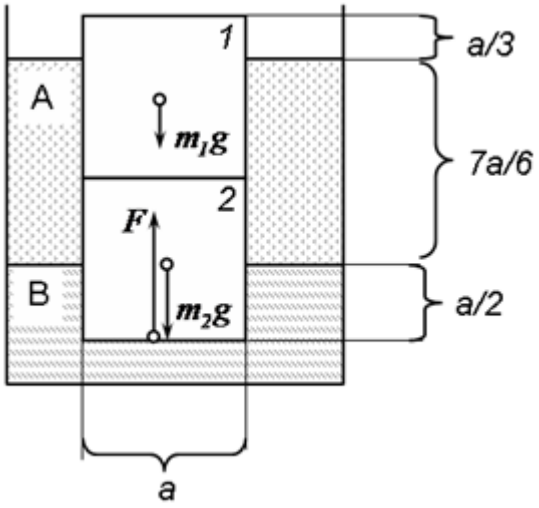
Звідки $\tau_K = \frac{Lm}{P - P_{TO}(100^0 C)} \approx 22\,300\ c \approx 372\ хв \approx 6{,}2\ год$. ***Відповідь: τ_K = 6,2 год.***

(266) ***1) Знайдемо густини рідин A та B***, врахувавши, що $\rho_B=1{,}2\,\rho_A$. Розглянемо систему кубиків як одне ціле. На кубики діють сили тяжіння m_1g та m_2g та на нижню грань кубика 2 діє сила тиску стовпчика рідини F (див рис). Силу атмосферного тиску ми не врахували, оскільки сила атмосферного тиску на верхню грань системи і складова сили атмосферного тиску, що діє на нижню грань системи кубиків будуть однакові.

Запишемо умову рівноваги системи кубиків:

$$F = m_1 g + m_2 g$$

Розписавши сили, отримаємо:



$$\begin{cases} a^2 \cdot \left(\rho_A g \dfrac{7a}{6} + \rho_B g \dfrac{a}{2} \right) = \rho_1 a^3 g + \rho_2 a^3 g \\ \rho_B = 1{,}2\rho_A = \dfrac{6\rho_A}{5} \end{cases}$$

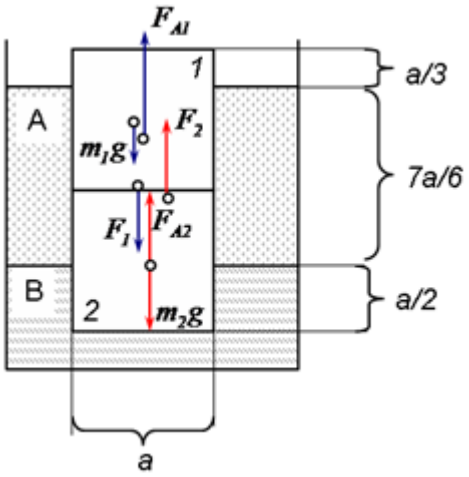
Розв'язавши цю систему знайдемо, що

$$\begin{cases} \rho_A = \dfrac{30(\rho_1 + \rho_2)}{53} \\ \rho_B = \dfrac{36(\rho_1 + \rho_2)}{53} \end{cases}$$

Відповідь: $\rho_A = \dfrac{30(\rho_1 + \rho_2)}{53}$; $\rho_B = \dfrac{36(\rho_1 + \rho_2)}{53}$

2-а) Знайдемо величину і напрям сил взаємодії кубиків для випадку, коли у простір між ними потрапляє рідина.

Розставимо сили, які діють на кожен з кубиків. На кубик 1 діє сила тяжіння m_1g, сила Архімеда F_{A1}, сила взаємодії кубика 2 - F_1 , припустимо, що ця сила направлена вниз; на другий кубик діють сила тяжіння m_2g, сила Архімеда F_{A2}, сила взаємодії кубика 1 - F_2, яка направлена вгору (див рис.). Запишемо умову рівноваги для кожного кубика:



$$\begin{cases} m_1 g + F_1 = F_{A1} \\ m_2 g = F_2 + F_{A2} \end{cases}$$

Розписавши сили, які входять до цієї системи отримаємо:

$$\begin{cases} \rho_1 a^3 g + F_1 = \rho_A g \dfrac{2a}{3} \cdot a^2 \\ \rho_2 a^3 g = F_2 + \left(\rho_A g \dfrac{a}{2} \cdot a^2 + \rho_B g \dfrac{a}{2} \cdot a^2 \right) \end{cases}$$

Підставивши значення ρ_A та ρ_B, отримаємо, що $F_1 = F_2 = \left(\dfrac{20\rho_2 - 33\rho_1}{53} \right) g a^3$

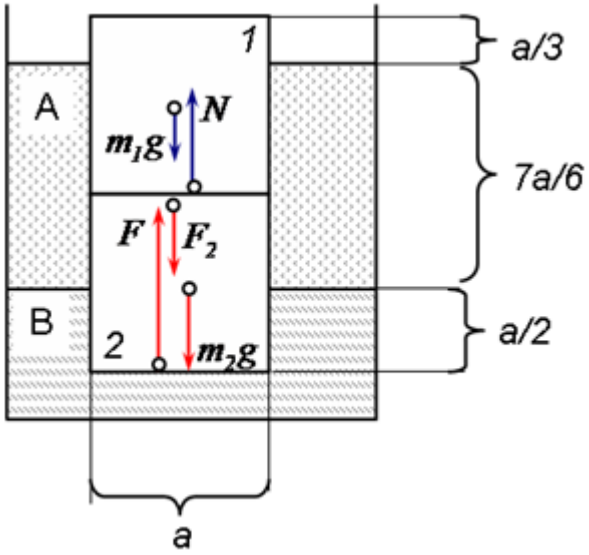
З цього виразу слідує:

- ✓ Якщо $20\rho_2 > 33\rho_1$ сили будуть направлені так як показано на рисунку ;
- ✓ Якщо $20\rho_2 < 33\rho_1$, то сили будуть мати протилежні напрямки, до тих, які вказані на рисунку;
- ✓ Якщо $20\rho_2 = 33\rho_1$, то кубики взаємодіяти не будуть.

Відповідь: $F_1 = F_2 = \left(\frac{20\rho_2 - 33\rho_1}{53}\right) g a^3$

2-б) Знайдемо величину і напрям сил взаємодії кубиків для випадку, коли у простір між ними рідина НЕ потрапляє.

Якщо між кубиками не проникає рідина, отже, сила Архімеда на кубик 1 НЕ діє.



Розставимо сили, які діють на кожен з кубиків. На кубик 1 діє сила тяжіння m_1g, сила нормальної реакції N збоку кубика 2 ; на другий кубик діють сила тяжіння m_2g, вага кубика 1 - F_2, сила тиску стовпчиків рідини F, яка діє на нижню грань кубика 2 (див рис.). Причому за величиною сили N та F_2 рівні. Запишемо умову рівноваги для будь-якого з кубиків:

$$\begin{cases} N = m_1 g = \rho_1 a^3 g \\ m_2 g + F_2 = F \end{cases}$$

З першої умови значно простіше отримати величину сили взаємодії кубиків: $N = F_2 = \rho_1 a^3 g$.

Напрямки сил взаємодії кубиків вказані на рисунку. ***Відповідь:*** $N = F_2 = \rho_1 a^3 g$.

Розв’язки завдань фізичного марафону 9 клас

(267) Загальна довжина шляху 350 м, загальний час руху ¼ години. Середня швидкість руху 0,35 км/0,25 год = 1,4 км/год.

(268) Позначимо довжину шляху l, швидкості $v_1 = 5$ м/с, $v_2 = 10$ м/с. Загальний час руху $t = \frac{l}{4v_1} + \frac{3l}{4v_2} = \frac{l(v_2+3v_1)}{4v_1v_2}$, середня швидкість становить $v_{\text{сер}} = \frac{4v_1v_2}{v_2+3v_1} = 8$ м/с.

(269) Траєкторія комахи — три чверті кола. Довжина шляху $\frac{3}{4} \cdot 2\pi R$, модуль переміщення $R\sqrt{2}$. Шукане відношення $3\pi/2\sqrt{2} \approx 3{,}33$.

(270) Хвилинна стрілка здійснює оберт за 15 хв, секундна — за 3 хв. Отже, щохвилини вони проходять відповідно 1/15 і 1/3 оберту. Секундна стрілка щохвилини здійснює «додатково» 1/3 – 1/15 = 4/15 оберту. Тому вона робить повний «додатковий» оберт за 15/4 хв, тобто за 3 хв 45 с.

(271) Початковий і кінцевий рівні води відповідають об’ємам (13 ± 1) мл і (37 ± 1) мл. Отже, об’єм зануреного тіла (24 ± 2) см^3, а густина тіла належить інтервалу від 120/26 до 120/22 г/см^3 (тобто від 4600 до 5450 кг/м^3).

(272) Очевидно кожна вертикальна «поділка» на рисунку відповідає висоті стовпчика ртуті, тиск якого 750 мм рт. ст. Тиск на рівні поверхні ртуті в трубці практично дорівнює нулю. Отже, тиск у точці A дорівнює 300 мм рт. ст.

(273) Очевидно кожна вертикальна «поділка» на рисунку відповідає висоті стовпчика ртуті, тиск якого 750 мм рт. ст. Тиск на рівні поверхні ртуті в трубці практично дорівнює нулю. Отже, тиск у точці A дорівнює 300 мм рт. ст.

(274) У випадках Б, Г виграш у силі взагалі відсутній. У випадку А він дорівнює 7/2 = 3,5, у випадку — 2, у випадку Д виграш у силі 8/2 = 4, тобто у випадку Д виграш у силі найбільший.

(275) Якщо вантаж піднімають на висоту h, то металеве кільце — на висоту $3h/8$. При цьому корисна робота Mgh, а додаткова робота з піднімання кільця $3mgh/8$. Отже, ККД механізму $\eta = \frac{M}{M+3m/8} = 0{,}8$, або 80 %.

(276) Тіло плаває, коли сила Архімеда дорівнює силі тяжіння (0,08 Н).

(277) Перша кулька остигла на 60 °С, нагрівши воду на 15 °С. Отже, теплоємність води більша в 4 рази. Якщо ж перенести разом три кульки, то відношення теплоємностей буде 4 : 3. Тоді з рівняння теплового балансу випливає, що кінцева температура $t = \left(3t_{\text{кул}} + 4t_{\text{вод}}\right)/7 \approx 52$ °С.

(278) Рівняння теплового балансу має вигляд $Lm_{\text{пар}} = m_{\text{л}}\left(\lambda + c_{\text{вод}}\Delta t_{\text{вод}}\right)$, звідки $m_{\text{л}} = 3$ г.

(279) Загальний опір кола змінюється від 30 до 90 Ом, тобто втричі. У стільки ж разів змінюється сила струму в колі. Оскільки потужність пропорційна I^2, вона змінюється в 9 разів.

(280) Кожен відрізок провідника має опір 8 Ом. Опір чотирьох таких відрізків, з’єднаних паралельно, дорівнює 8 Ом/4, тобто 2 Ом.

(281) Оскільки опір провідника пропорційний відношенню ρ/S, відношення опорів провідників $R_{AB} : R_{BC} : R_{AC} = 1 : 2 : 3$. Провідники AB і BC з’єднані послідовно, їх загальний опір $3R_{AB}$.

Третій провідник має такий самий опір, він приєднаний до ділянки з перших двох провідників паралельно. Отже, загальний опір кола $3R_{AB}/2$.

(282) Сила струму в резисторах 3, 4, 5 напевно менша від сили струму в резисторі 2. Отже, залишається порівняти тільки I_1 з I_2. Якщо опір кожного резистора r, то опір «вертикальної» ділянки кола з резистором 1 становить $2r$, а $R_{2-3-4-5} = 5r/3$. Оскільки $R_{2-3-4-5} < 2r$, найбільшою є сила струму в резисторі 2.

(283) Якщо опір кожного резистора r, то опір усієї ділянки кола $R = 0{,}6r$. Отже, $r = 5R/3 =$ 50 Ом.

(284) Розмір зображення в плоскому дзеркалі завжди дорівнює розміру самого предмета.

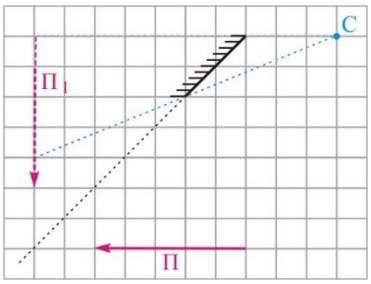
(285) Як відомо, лінійне збільшення зображення в лінзі $\Gamma = \frac{f}{d}$ (ми застосовуємо стандартні позначення). У даному випадку $\Gamma = 1{,}5$. Оскільки сума f і d дорівнює 0,75 м, отримуємо $d =$ 0,3 м і $f = 0{,}45$ м. З формули тонкої лінзи тоді випливає, що фокусна відстань лінзи 0,18 м.

(286) У ядрі ${}^{7}_{3}\mathrm{Li}^{+}$ три протони, а в електронній оболонці тільки 2 електрони. Отже, кількість заряджених частинок дорівнює 5.

(287) Максимальний виграш у силі відповідає максимальному плечу прикладеної сили. Отже, силу слід прикласти до лівого кінця дроту (точки B) перпендикулярно відрізку OB. Довжина цього відрізку й буде максимально можливим плечем сили. Цей відрізок — гіпотенуза прямокутного трикутника з катетами 6 і 8 одиниць (клітинок), тобто в цих одиницях $OB = 10$, що в 2,5 раза більше, ніж плече сили тяжіння вантажу (відрізку OB). Отже, максимальний виграш у силі — в 2,5 раза.

(288) Робітник «розв'язує» ту саму «задачу», що й промінь світла у випадку заломлення на межі двох середовищ (відповідно до принципу Ферма світло «вибирає» траєкторію, час поширення якою є мінімальним). Отже, можна просто скористатися кутами падіння та заломлення: $N = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$. Скориставшись теоремою Піфагора, з рисунку легко визначити відразу синуси відповідних кутів: $\sin\alpha = 3/5, \sin\beta = 4/5$. Отже, $N = 4/3 \approx 1{,}33$.

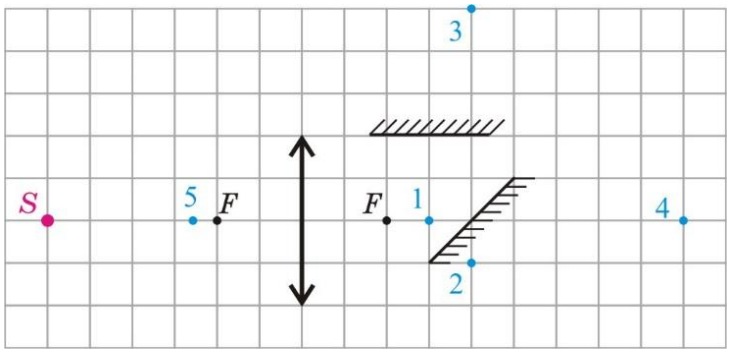
(289) Відповідь (80 %) легко побачити з рисунку, на якому $П_1$ — зображення предмета П.



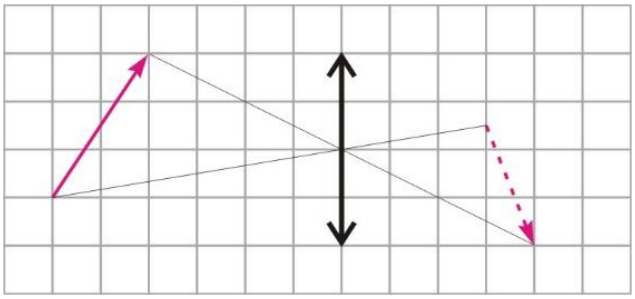
(290) Відбиті від дзеркала промені та їх продовження до уявного зображення лампи в дзеркалі утворюють конус, вісь якого є похилою. Оскільки всі паралельні перерізи конусу геометрично подібні, освітлена пляма на арені має форму кола. Вершина конусу (уявне зображення лампи) розташована на висоті 10 м над ареною та на висоті 2 м над дзеркалом. Отже, діаметр світлої плями в 5 разів більший за діаметр дзеркала.

(291) На рисунку показані послідовні зображення світної точки, які утворюються після проходження лінзи (1), послідовних відбивань від дзеркал (2, 3, 4) і ще одного проходження лінзи

(5). Очевидно, шукана відстань належить інтервалу від 3 до 4. Зазначимо, що після першого проходження через лінзу світло потрапляє тільки на нижнє дзеркало, а вже після цього — на верхнє та знов на нижнє.



(292) Див. рисунок. Легко бачити, що відстань між нижньої точки предмета та оптичним центром лінзи трохи перевищує 6 см (точніше, це $\sqrt{37}$ см, що приблизно дорівнює 6,08 см).



(293) На момент початку руху «Мерседеса» відстань від нього до «Запорожця» становила $l - 60$, а до «Ланоса» $l - 30$ (тут l — шукана довжина шляху, відстані наводимо в кілометрах, а час — у годинах). Швидкість зближення «Мерседеса» та «Запорожця» (їх відносна швидкість) 180 км/год, а швидкість зближення «Мерседеса» та «Ланоса» — 210 км/год. Час руху «Мерседеса» до цих зустрічей відповідно $t_1 = \frac{l-60}{180}$ і $t_2 = \frac{l-30}{210}$. Оскільки мерседес проїжджає 10 км за 1/12 години, маємо рівняння $t_1 - t_2 = \pm\frac{1}{12}$ (знак залежить від того, яка зустріч відбувається першою). Звідси знаходимо довжину шляху: (240 ± 105) км. Отже, відповідь 345 км.

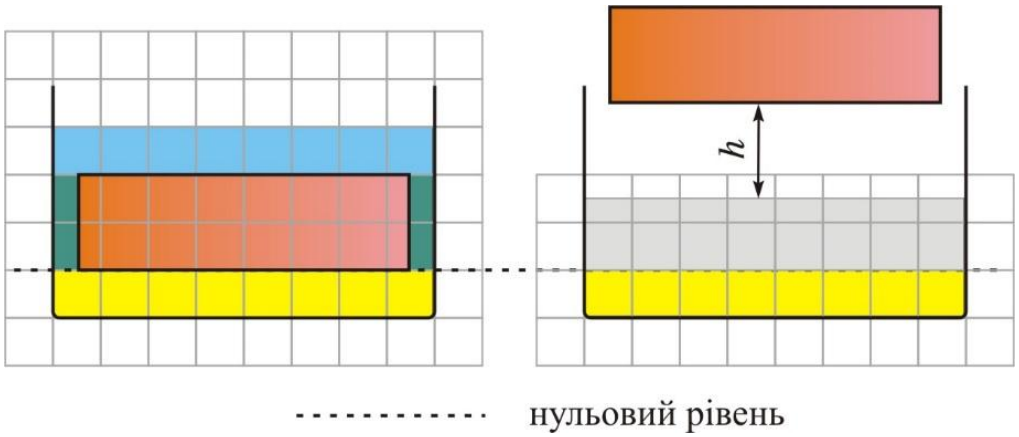
(294) Позначимо M, m відповідно маси вантажу та кожного блоку. Разом з вантажем доводиться піднімати й три *рухомі* блоки. Якщо вантаж піднімаємо на h, то ці блоки піднімаються відповідно на $h, 2h, 4h$. Отже, ККД механізму $\eta = \frac{Mgh}{Mgh+mg(h+2h+4h)} = \frac{M}{M+7m} = 0{,}72$.

(295) Різниця температур між повітрям і речовиною всередині склянок практично незмінна. Отже, потужність потоку тепла є однаковою та практично незмінною для обох склянок. Тому час τ процесу пропорційний отримані кількості теплоти: $\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{0{,}1\lambda m+mc\Delta t}{mc\Delta t} = 1 + \frac{\lambda}{10c\Delta t}$. Звідси $\tau_2 = 45$ хв.

(296) Місткість другої посудини більша в 4 рази. Отже, довжина ребра другого куба більша в $k = 4^{1/3} \approx 1{,}59$ раза. Необхідна для повного танення льоду кількість теплоти Q пропорційна об'єму льоду, тобто k^3, а потужність P потоку тепла — площі поверхні посудини, тобто k^2. Час танення льоду $t = \frac{Q}{P}$ пропорційний k. Отже, для другої посудини він більший у k разів і приблизно дорівнює 32 хвилини.

(297) Під час кантування потрібно лише повернути кубик на 45°, далі він рухатиметься сам. Таким чином, потрібно підняти центр кубика (він є й центром тяжіння) на $h = a(\sqrt{2}-1)/2$, де a — довжина ребра куба. Відповідна робота $A = (mg - F_{\text{А}})h$, де $F_{\text{А}} = \rho_{\text{пов}} g a^3$ — сила Архімеда з боку повітря (у даному випадку кубик настільки легкий, що сила Архімеда порівнянна з силою тяжіння). Отже, $A = ga(m - \rho_{\text{пов}} a^3)\,(\sqrt{2}-1)/2 \approx 0{,}621$ Дж ≈ 620 мДж.

(298) Найзручніше скористатися законом збереження енергії (за наведених припущень можна вважати, що зберігається *механічна* енергія). Від початкового моменту до моменту найбільшого підйому циліндра відбувається просто перетворення потенціальної енергії рідини в потенціальну енергію циліндра (адже частина води під час спливання циліндра опускається). Якщо густина рідини ρ, площа основи посудини S, а $b = 10$ см, то об'єм циліндра $3bS/2$, а його маса $m = \rho bS/2$. Після виходу циліндра з рідини її рівень понизиться на $1{,}5b$ (див. рисунок). «Зелений» і «блакитний» шари рідини (масою відповідно $\rho bS/2$ і ρbS) утворюють тепер один «сірий» шар масою $3\rho bS/2$).



Нехай нульовий рівень відліку висоти збігається з початковим положенням нижньої грані циліндра. Нагадаємо, що потенціальна енергія тіла залежить від висоти його центра тяжіння. Тоді ми можемо записати:

$$mgb + \rho bS/2 \cdot gb + \rho bS \cdot g \cdot 2{,}5b = mg(h + 2{,}5b) + 3\rho bS/2 \cdot g \cdot 0{,}75b.$$

Звідси отримуємо $h = \frac{9}{4}b = 225$ мм. **Відповідь:** 225.

Зазначимо, що в реальній ситуації далеко не вся вивільнена енергія переходить у кінетичну енергію циліндра, а потім у його потенціальну енергію. Значна частка енергії переходить у кінетичну енергію рідини.

(299)

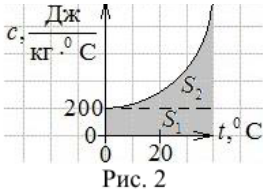


Рис. 2

Див. рис. 2. $Q = m \cdot S$, де S – площа під графіком $c(t)$.

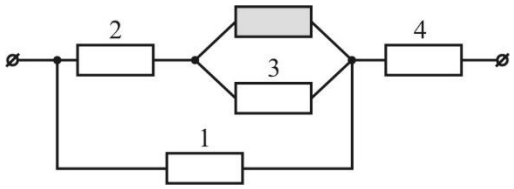
$$S = S_2 + S_1 = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(1000 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^0\text{C}} - 200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^0\text{C}}\right) \cdot 40\,{}^0\text{C} +$$

$$+200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot {}^0\text{C}} \cdot 40\,{}^0\text{C} \approx 1{,}488 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}, \text{ тоді}$$

$$Q = 0{,}4\text{кг} \cdot 1{,}488 \cdot 10^4 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \approx 6\text{кДж}.$$

(300) На рисунку наведено еквівалентну схему кола. З неї бачимо, що сила струму в «сірому» резисторі дорівнює I_3, $I_2 = 2I_3$. Якщо опір кожного резистора r, то напруга на резисторі 1 дорівнює $3I_3 r$, тому $I_1 = 3I_3$. Сила струму в резисторі 4: $I_4 = I_1 + I_2 = 5I_3$. З формули $P = I^2 r$

випливає, що потужність струму в резисторі 4 у 25 разів перевищує потужність у «сірому» резисторі, тобто становить 750 мВт.



(301) Можна вважати, що дзеркало «додає» ще одне таке саме джерело світла, розташоване на висоті 4 м (це уявне зображення реального джерела світла). Відстань цього «додаткового» джерела від підлоги вдвічі більша за відстань реального джерела від підлоги. Оскільки освітленість від точкового джерела обернено пропорційна квадрату відстані до нього, «додаткова» освітленість становить ¼ від початкової. Отже, освітленість збільшиться на 25 %.

(302) Тягарець не може витягти пластинку загальною масою 351 г з води (навіть з урахуванням виграшу в силі в 4 рази, що дає система блоків), але зменшує її «осадку» в воді. Після вмикання нагрівача лід потроху тане (протягом цього процесу жодних втрат енергії немає, тому що температура всіх частин системи однакова). Тому осадка пластинки збільшується, вона опускається, а тягарець рухається вгору. Легко переконатися, що пластинка повністю зануриться за умови

$$4m_{\text{тяг}} + \rho_{\text{в}}\left(\frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}} + \frac{m_{\text{ал}}}{\rho_{\text{ал}}}\right) = m_{\text{л}} + m_{\text{ал}},$$

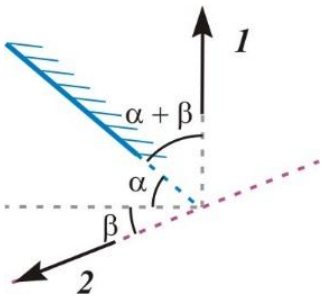
тобто коли маса льоду зменшиться до $m_{\text{л}} = 99$ г (коли маса льоду зменшиться на $\Delta m = 171$ г). На це піде час $t = \frac{\lambda \Delta m}{P} = 171$ с. Практично відразу після цього пластинка опуститься на дно, піднявши тягарець на висоту $4h$ (довжина червоної ділянки нитки це дозволяє). Після цього рух частин системи припиниться, після повного танення льоду кулька лежатиме на дні. Отже, шукана середня швидкість дорівнює $\frac{4h}{t}$, тобто приблизно 0,94 см/с. Насправді середня швидкість трохи менша, оскільки опускання на дно теж триває певний час.

Коментар. Проте легко показати, що час руху в воді не перевищує кількох секунд. Якщо припустити $a = kt$, то $h = kt^3/6$. У нас коефіцієнт дорівнює десь 1/162 м/с^3 (це початкове значення, далі він ще зростає). Звідси час (точніше, верхня границя часу) 7,3 с. Це не дуже суттєво, середня швидкість зменшиться не більше ніж на 0,04 см/с. Журі не очікує такої оцінки від учасників.

(303) Позначимо шукані кути: кут нахилу площини дзеркала до горизонту α, а кут нахилу похилої площини β. Очевидно, рухи кульки та пластини почалися одночасно, тому модулі їх переміщень за певний час відповідно $h = \frac{gt^2}{2}$ і $H = \frac{at^2}{2}$. Це означає, що наша оптична система дає дійсне зображення вертикального відрізку — відрізок під кутом β до горизонту, з лінійним збільшенням $\Gamma = \frac{H}{h} = \frac{a}{g} = \sin\beta$.

Це зображення утворюється «у два кроки». Спочатку лінза дає дійсне перевернуте зображення ***1*** на відстані 2/3 м праворуч від себе (це легко отримати з формули тонкої лінзи). Це зображення зменшене втричі: $\Gamma = \frac{f}{d} = \frac{1}{3}$. Далі вже це зображення є «предметом» для дзеркала, яке й дає остаточне зображення ***2***. Оскільки розмір зображення в плоскому дзеркалі збігається з розміром предмета, маємо $\sin\beta = \frac{1}{3}$, звідки $\beta = 19{,}47°$.

Зазначимо: щоб плоске дзеркало давало *дійсне* зображення, на нього має падати *збіжний* пучок світла (інакше кажучи, «предмет» має бути *уявним*). У даному випадку це просто означає, що дзеркало розташоване між лінзою та зображенням ***1***.



Тепер ми можемо відповісти на поставлене запитання. Скористаємося тим, що зображення ***1*** і ***2*** розташовані симетрично відносно площини дзеркала (див. рисунок). З рисунку бачимо, що $2\alpha + \beta = 90°$, тобто шуканий кут нахилу площини дзеркала $\alpha = 45° - \beta/2 = 35{,}26°$.

(304) Позначимо відстань від готелю до музею L, швидкості автобуса та туристів-пішоходів відповідно $v_а$ і $v_п$. *Мінімальний* час відповідає випадку, коли обидві половини групи витрачають на переміщення *однаковий* час. Адже якщо якась половина групи дістанеться музею раніше, то це за рахунок «надмірного» використання автобуса. Тим самим збільшується час руху іншої половини групи (отже, й загальний час руху).

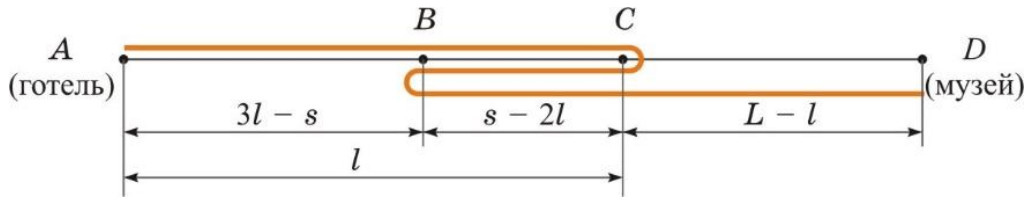
Таким чином, кожна половина групи має проїхати автобусом однакову відстань l і пройти пішки $L - l$. Зрозуміло, що час руху $t = \frac{l}{v_а} + \frac{L-l}{v_п}$ тим менший, чим більша відстань l. Слід розглянути різні можливі випадки.

1. Якщо запас ходу s не перевищує L, то $l = s/2$: автобус підвозить першу половину групи (далі ці туристи йдуть пішки), зупиняється та чекає на решту туристів, після чого підвозить їх на таку саму відстань. Очевидно, що немає сенсу їхати назустріч туристам, бо це зменшить можливе значення l і збільшить час руху. У цьому випадку

$$t_1 = \frac{s}{2v_а} + \frac{2L - s}{2v_п}$$

(перевірте самі, що виходить у випадках $s \to 0$ і $s \to L$).

2. Якщо $s > L$, то з'являється можливість ще зменшити час: автобус підвозить половину групи на відстань $l > L/2$, потім рухається назад до зустрічі з рештою туристів і везе їх уже до музею (теж на відстань l). Очевидно, що автобус проїжджає *назад* відстань $s - 2l$. Тому решта туристів має пройти до зустрічі з автобусом відстань $AB = 3l - s$ (див. рисунок, на якому умовно показано рух автобуса). Ця відстань має збігатися з довжиною пішого переходу $CD = L - l$, звідки отримуємо $l = (L + s)/4$.

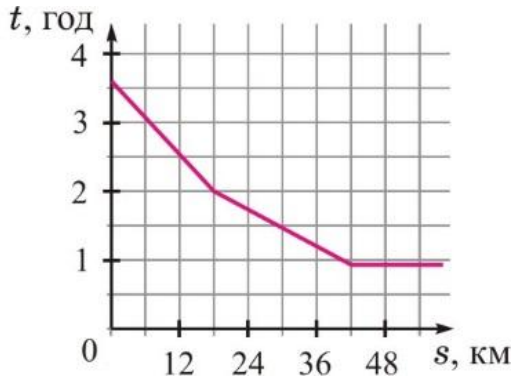


Отже, у цьому випадку загальний час руху $t_2 = \frac{L+s}{4v_а} + \frac{3L-s}{4v_п}$ (за умови $s \to L$ отримуємо, як і в попередньому випадку, час $\frac{L}{2v_а} + \frac{L}{2v_п}$).

Час руху автобуса $t_{а} = \frac{s}{v_{а}}$. За умови $s < L\frac{v_{п} + 3v_{а}}{v_{а} + 3v_{п}}$ цей час менший від загального часу руху t_2, тобто автобус має певний час стояти (наприклад, у точці B), чекаючи на пасажирів. За умови ж $s > s_0 = L\frac{v_{п} + 3v_{а}}{v_{а} + 3v_{п}}$ формально отримуємо час руху автобуса, більший за t_2, що неможливо. Фактично нема сенсу збільшувати пробіг автобуса понад s_0, тобто «надлишкове пальне» просто не треба витрачати.

Якщо $s \geq s_0$, мінімальний час руху вже не залежить від s і дорівнює $t_0 = \frac{s_0}{v_{а}} = \frac{L\left(v_{п} + 3v_{а}\right)}{v_{а}\left(v_{а} + 3v_{п}\right)}$.

За наведених в умові даних графік $t(s)$ див. на рисунку ($t_0 = \frac{14}{15}$ год ≈ 0,93 год).



Мінімальний час руху: а) 2,53 год (2 год 32 хв); б) 1,47 год (1 год 28 хв); в) 0,93 год (56 хв).

(305) Закон Ома, який виконується для металів і сплавів, означає що середня швидкість упорядкованого руху вільних електронів пропорційна «силі» електричного поля. Якщо ми маємо справу з так званим двополюсником (наприклад, з одним резистором або з'єднанням резисторів з двома зовнішніми контактами), то сила струму I пропорційна напрузі U між зовнішніми контактами. Наші циліндри мають по чотири контакти. Отже, сила струму через певний контакт має лінійно залежати від *трьох* напруг (між даним контактом і кожним із решти контактів). Наприклад, $I_A = k_{AB}U_{AB} + k_{AC}U_{AC} + k_{AD}U_{AD}$. Тут з'явилися три сталі коефіцієнти перед напругами замість одного (цей один, обернений до опору, називають провідністю). Якщо знати всі коефіцієнти, то можна розрахувати силу струму через будь-який контакт. Із симетрії циліндра випливає, що два з трьох коефіцієнтів однакові: $k_{AB} = k_{AD}$. Для зручності позначимо $k_{AB} = k_1, k_{AC} = k_2$. Очевидно, що $k_{CD} = k_1, k_{BD} = k_2$ тощо.

Спробуємо виразити коефіцієнти k_1, k_2 через відомий опір r. Для цього знов-таки скористаємося симетрією наших чотириполюсників. Якщо прикласти напругу U до контактів A і C (див. рис. 2), $U_{AB} = U_{AD} = \frac{U}{2}$. Отже,

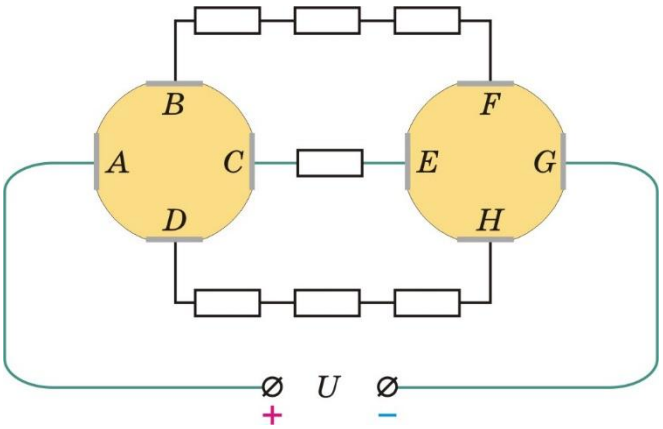
$$I_A = 2k_1\frac{U}{2} + k_2U = \frac{U}{r}, \text{ тобто } k_1 + k_2 = r^{-1}.$$

Якщо ж прикласти напругу U до контактів A і B (див. рис. 3), $U_{AC} = U_{AD} = \frac{U}{2}$. Отже,

$$I_A = k_1U + k_1\frac{U}{2} + k_2\frac{U}{2} = \frac{U}{r}, \text{ тобто } \frac{3}{2}k_1 + \frac{1}{2}k_2 = r^{-1}.$$

З останніх двох рівнянь маємо $k_1 = k_2 = (2r)^{-1}$. Тепер ми можемо розглянути й систему з 9 циліндрів. Перш за все помітимо, що можна трохи відсунути «верхній» і нижній» (на рисунку)

циліндри від центрального, тобто перервати контакти між ними. Після цього напруга (різниця потенціалів) між «розірваними» контактами лишається рівною нулю, тобто струм через ці пари контактів не потече навіть якщо їх знов з'єднати. Отже, три з дев'яти циліндрів «працюють» в режимі, показаному на рис. 2, тобто як резистори з опором r. Чотири ж «кутові» циліндри «працюють» в режимі рис. 3 — тобто теж як резистори з опором r. Тепер ми можемо навести значно спрощену еквівалентну схему кола (див. рисунок, де всі резистори мають опір r).



Нам залишилося розібратися з двома симетрично розташованими циліндрами. Зазначимо, що загальна сила струму в колі $I = I_A = I_G$, а сила струму в центральному резисторі дорівнює $I_C = I_E$. Відповідно до закону збереження електричного заряду (або першому правилу Кірхгофа, якщо хтось із вас це знає) та симетрії кола можна записати співвідношення: $I_A = I_B + I_C + I_D$, $I_B = I_D$ та аналогічні співвідношення для контактів $E - H$.

Позначимо для зручності $U_{AB} = U_{AD} = x$. Очевидно, що U_{FG} і U_{HG} теж дорівнюють x. Аналогічно позначимо $U_{AC} = U_{EG} = y$. Тоді можна скласти рівняння:

$$I_C = \frac{U-2y}{r} = (2r)^{-1}(y + 2(y - x)), \qquad I_B = \frac{U-2x}{3r} = (2r)^{-1}(x + (x - y)).$$

Звідси легко отримати $x = \frac{5}{16}U, y = \frac{3}{8}U$. Тоді $I_C = \frac{U}{4r}, I_B = \frac{U}{8r}$. Повна ж сила струму (сила струму через джерело) $I = 2I_B + I_C = \frac{U}{2r}$. Інакше кажучи, загальний опір системи $R = \frac{U}{I} = 2r$.

Що ж до напруги $U_{AB} = x$, то ми вже знайшли цю величину: вона дорівнює $\frac{5}{16}U$.

У загальному випадку опори різні (R_1 — протилежні контакти, R_2 — ближні). Тоді $k_1 = (R_2)^{-1} - (2R_1)^{-1}$, $k_2 = 3(2R_1)^{-1} - (R_2)^{-1}$. Очевидно, це має сенс за умови $2R_1/3 < R_2 < 2R_1$. За наданої умови непогано спрацював метод Гамова («зірка» на чотири промені з опорами по ½), проте в загальному випадку цей номер не проходить.

Розв’язки завдань фізичного марафону 10 клас

(306) Промінь світла «притискається» до перпендикуляру в точці падіння, коли переходить у середовище з більшим показником заломлення, і навпаки. Правильна відповідь *а*).

(307) Момент сили тяжіння, що діє на секцію моста відносно шарніру на березі дорівнює $mg \cdot \frac{1}{4} \cdot 40$ м, а момент сили взаємодії між секціями $F \cdot 10$ м. Дорівнюючи, знаходимо $F = mg = 200$ кН.

(308) Один з можливих розв’язків такий. Через 2 с вертикальна складова швидкості зменшиться до 5 м/с, а горизонтальна залишиться незмінною. Тому $v = \sqrt{5^2 + 25^2 \cdot 3}\,\frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 43{,}6$ м/с. Обираємо відповідь 44 м/с.

(309) Раніше досягне фінішу автомобіль, що розганявся з більшим прискоренням, оскільки більшу часу ніж інший частину рухався з максимальною швидкістю. Відстань між автомобілями, коли вони їхали з однаковою швидкістю, вже не змінювалася, і тому відповідь не залежить від загальної довжини шоссе. Але цієї швидкості вони досягли за різний час. $\Delta t = v\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) = 2$ с, раніше до фінішу прийде другий автомобіль.

(310) Коли ми зазвичай дорівнюємо силу Архімеда до ваги тіла, прискорення вільного падіння скорочується. У ліфті ми відчуваємо перевантаження, наче збільшилась сила тяжіння, але це відноситься як до тіла, так і до рідини навколо нього. Тому занурення не залежить від прискорення ліфту. Оскільки густина тіла вдвічі менша за густину води, зануреним буде половина бруска.

(311) Любі залишається 1/3 від усього шляху l. Якщо вона повернеться додому за телефоном (2/3 l), а потім від дому весь шлях l, щоб встигнути на урок, загальна відстань виявиться 5/3 l, що у 5 разів більше ніж залишилося. Отже вона має збільшити швидкість у 5 разів (часом на пошук телефону нехтуємо).

(312) Піднімають не тільки вантаж, а й рухомий блок, збільшуючи енергію механічної системи на $(m + m_\text{Б})gh$. Корисною є тільки mgh. Отже $m = 0{,}8(m + m_\text{Б})$, звідки $m = 4m_\text{Б}$.

(313) За сталої напруги струм збільшиться у стільки ж разів, у скільки зменшиться опір, тобто у 10/9. Потужність пропорційна струму у квадраті, отже збільшиться у кожній лампі в $(10/9)^2 \approx 1{,}23$. Обираємо відповідь 1,2 Вт.

(314) Піднімався корабель 6 с, опускався 11,5 с (рахуємо проміжки між положеннями центру космічного корабля). Оскільки модуль переміщення практично однаковий, ділимо числа 11,5/6 $\approx 1{,}917$ і вибираємо відповідь 1,9.

(315) За формулою тонкої лінзи знаходимо відстань до зображення 0,5 м. Після повороту на 60° відстань від світлодіоду до площини лінзи зменшилась удвічі до 0,5 м. Це більше за фокусну відстань 1/3 м, тому зображення залишилося дійсним, а відстань до нього від площини лінзи стане 1 м. Зазначимо, що зображення весь час повороту залишалося на прямій променя від світлодіоду через оптичний центр лінзи оскільки це промінь не заломлюється. Таким чином, воно віддалилося від оптичного центру у точку на відстані $1\text{м}/\sin 30° = 2$ м. Отже, зображення світлодіоду перемістилося по прямій на відстань 2 м – 0,5 м = 1,5 м.

(316) До кожної вершини куба загалом підходить 8 кубів, заповнюючи весь простір. Тому можна вважати, що кожному такому кубику «належить» 1/8 від маси атому золота Au197 у вершині. Кожен атом срібла Ag108 знаходиться на середині грані між двома сусідніми кубиками. Тому одному кубику «належить» ½ від кожного атома срібла. Рахуємо загальну масу

кубика об'ємом $(0{,}5\text{ нм})^3$: $m = 8 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot 197\text{а. о. м.}\right) + 6 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 108\text{а. о. м.}\right) = 521\text{ а. о. м.}$ Ділимо масу на об'єм і знаходимо 6918,88 кг/м^3. Або наближено 6920 кг/м^3.

(317) Сила, з якою пружина діє на лід, дорівнює $kx = 2$ Н. Разом з сумарною силою тяжіння на воду і лід вони створюють тиск на дно посудини. Після того, як лід розтане, зникне ця додаткова сила 2 Н. Тиск на дно зменшиться на $\Delta P = kx/S$, що забезпечиться меншим на $\Delta h = \frac{\Delta P}{\rho g} = 1$ см рівнем води. Звісно, задачу можна було розв'язати й інакше.

(318) За законом Фарадея $m = kq$, де заряд q, що пройшов через електроліт, можна знайти як площу під графіком струму або як добуток середніх значень струму 3 А і 4 А на відповідні проміжки часу (це правильно внаслідок рівномірності зростання струму). Отже $q = 700$ Кл і $m = 231$ мг.

(319) Опори такі, що схема має симетрію. Струм через резистори 1 і 4 буде однаковий I_1. Однаковим, але іншим I_2, буде й струм через резистори 2 і 3.

Різниця цих струмів, як видно з Рис.6, і буде відповіддю на питання задачі. Оскільки опором провідника *AB* можна знехтувати, з'єднаємо точки *A* і *B*. Загальний струм через джерело 80 В/16 Ом = 5 А, ділиться між паралельно з'єднаними резисторами 1 і 3 обернено пропорційно до їх опорів, тобто $I_1 = 4$ А, $I_2 = 1$ А. Звідси $I_1 - I_2 = 3$ А.

(320) З координат бачимо, що заряди утворюють рівносторонній трикутник, отже четвертий заряд слід розташувати у його центрі, що знаходиться на перетині медіан, які діляться у відношення 2:1. Тому ордината 4-го заряду буде утричі меншою за ординату третього: $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$.

(321) Стіл висить на коротких ланцюгах, а довгі додатково тягнуть його вниз. Два коротких мають втримувати mg і чотири сили натягу довгих ланцюгів. Отже короткі натягнуті сильніше. Оскільки всі ланцюги масивні, чим вище вздовж них, тим більшою буде сила натягу. Тому максимальні сили натягу будуть біля верхніх місць кріплення коротких ланцюгів, а мінімальні – у найнижчих ділянках довших. Тоді на стіл разом з усіма ланцюгами діють вниз загальна сила тяжіння $(m_{\text{ст}} + m_{\text{лан}})g$ і $4T_{min}$, а вгору $2T_{\text{max}}$: $2T_{\text{max}} = 4T_{min} + (m_{\text{ст}} + m_{\text{лан}})g$

Підставимо числові значення: $T_{\text{max}} = 2T_{min} + \frac{1}{2}(m_{\text{ст}} + m_{\text{лан}})g = \mathbf{180}$ Н.

(322) Відстань між стрілами визначається відстанню по вертикалі та відстанню по горизонталі. Відстань по горизонталі постійна, поки обидві стріли знаходяться у повітрі і дорівнює $\Delta x = v_0 \cos\alpha\ \Delta t = 100$ м. Відстань по вертикалі після вильоту другої стріли буде зменшуватись і досягне мінімального значення 0, коли обидві стріли будуть знаходитися на одному рівні. В цей момент відстань між стрілами і буде найменшою, рівною **100 м**.

Цей розв'язок слід перевірити, оскільки можливо, що через 4 с перша стріла знизиться нижче точки пострілу. Тоді найменшою буде відстань у момент вильоту другої стріли. Перевірка показує, що через 4 с руху перша стріла буде вище точки пострілу, не зважаючи на те, яке значення прискорення вільного падіння взяти: 9,8 м/с^2 чи 10 м/с^2.

(323) Густина буде найменшою, коли траєкторія бляшанки дотикатиметься до корабля, оскільки зі збільшенням радіусу орбіти період збільшується (довжина кола збільшується, а швидкість зменшується). Це означає, що радіус орбіти бляшанки дорівнює радіусу корабля, тобто вона рухається з першою космічною швидкістю $v = \sqrt{GM/R}$. Враховуючи $M = 4/3\pi R^3\rho$ і $T = 2\pi R/v$, маємо $\rho = 3\pi/(GT^2) \approx$ **320 г/см^3**.

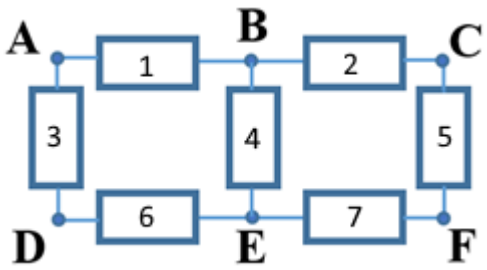
(324) Введемо позначення: $N_0 = 2{,}5 \cdot 10^{11}$, $T_{1/2} = 15$ год, $t = 30$ год, $A = 175$ Бк, $V_1 = 1$ мл.

Оскільки з моменту введення у кров розчину солі пройшов час $t = 2T_{1/2}$, то кількість ядер радіоактивного Na у крові зменшилась у 4 рази: $N = N_0/4$. Тоді кількість ядер Na у пробі крові об'ємом V_1 знайдемо із співвідношення $N_1 = \dfrac{N}{V} \cdot V_1$, де V – шуканий об'єм крові у тілі людини. Активність радіоактивного Na у пробі крові можна обчислити за формулою $A = \dfrac{0{,}69}{T_{1/2}} \cdot N_1$.

Остаточно маємо співвідношення $A = \dfrac{0{,}69}{T_{1/2}} \cdot \dfrac{N_0 V_1}{4V}$, з якого отримаємо робочу формулу:

$$V = \frac{0{,}69\, N_0 V_1}{4 A T_{1/2}} = \frac{0{,}69 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-3}\ \text{л}}{4 \cdot 175\ \text{Бк} \cdot 15 \cdot 3600\ \text{с}} \approx 4{,}6\ \text{л}.$$

(325) В силу симетрії схеми принципово різних варіантів підключень між указаними точками буде тільки шість: *AB*, *AC*, *AD*, *AE*, *AF*, *BE*. Обчислимо загальний опір електричного кола у кожному з цих випадків, позначивши опір кожного резистора *R*. Для зручності також пронумеруємо резистори.



1) При підключенні до точок *A* і *B* маємо:

$R_{257} = 3R$ (послідовне з'єднання),

$$R_{4257} = \frac{3R \cdot R}{3R + R} = \frac{3}{4}R \text{ (паралельне з'єднання)},$$

$$R_{364257} = \frac{3}{4}R + 2R = \frac{11}{4}R \text{ (послідовне з'єднання)},$$

$$R_{AB} = R_{1364257} = \frac{\frac{11}{4}R \cdot R}{\frac{11}{4}R + R} = \frac{11}{15}R \text{ (паралельне з'єднання)}.$$

2) При підключенні до точок *A* і *D* значення опору вийде таким самим, як і у випадку *AB*:

$$R_{4257}=\frac{3R\cdot R}{3R+R}=\frac{3}{4}R,\qquad R_{142576}=\frac{3}{4}R+2R=\frac{11}{4}R,\quad R_{AD}=R_{3142576}=\frac{\frac{11}{4}R\cdot R}{\frac{11}{4}R+R}=\frac{11}{15}R.$$

3) При підключенні до точок *A* і *C* в силу симетрії схеми струм між точками *B* та *E* протікати не буде, тому резистор 4 на загальний опір не впливає, можна його «видалити». Після цього матимемо:

$R_{12}=2R,\qquad R_{3675}=4R,\qquad R_{AC}=R_{123675}=\frac{2R\cdot 4R}{2R+4R}=\frac{4}{3}R.$

4) При підключенні до точок *A* і *E* матимемо:

$$R_{4257}=\frac{3R\cdot R}{3R+R}=\frac{3}{4}R,\qquad R_{14257}=R+\frac{3}{4}R=\frac{7}{4}R,\qquad R_{36}=2R,$$

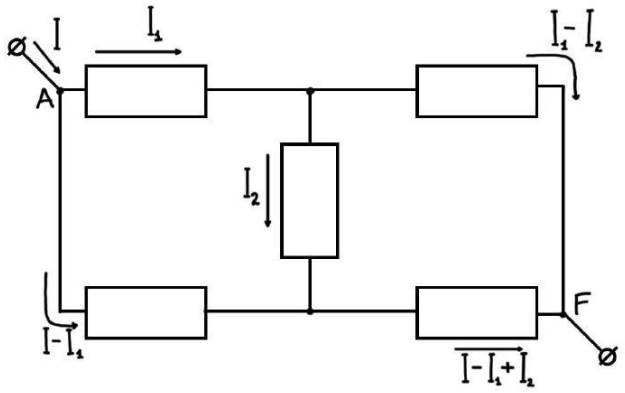
$$R_{AE}=R_{3614257}=\frac{\frac{7}{4}R\cdot 2R}{\frac{7}{4}R+2R}=\frac{14}{15}R.$$

5) При підключенні до точок *B* і *E* матимемо:

$R_{136}=R_{257}=3R,$

$$R_{BE}=R_{1364257}=\frac{3R\cdot 3R\cdot R}{3R\cdot 3R+3R\cdot R+3R\cdot R}=\frac{3}{5}R.$$

6) Для обчислення загального опору між точками *A* та *F* уявимо собі, що ми підключили електричне коло до джерела напруги *U* і розставимо на схемі струми.



Тепер, користуючись властивостями послідовного та паралельного з'єднань, можемо записати систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_1R+I_2R=(I-I_1)\cdot 2R \\ (I_1-I_2)\cdot 2R=I_2R+(I-I_1+I_2)\cdot R \\ I_1R+(I_1-I_2)\cdot 2R=U \end{cases}$$

звідки знайдемо:

$$I_1 = \frac{3U}{7R}, \qquad I_2 = \frac{U}{7R}, \qquad I = \frac{5U}{7R}.$$

З останньої рівності робимо висновок, що $R_{AF} = \frac{U}{I} = \frac{7}{5}R$.

Отже, мінімальне значення опору дорівнює $\frac{3}{5}R$, максимальне $\frac{7}{5}R$, а їхнє відношення дорівнює **7/3**.

(326) Промені світла від свічки потрапляють на поверхню лінзи, заломлюються в ній, потрапляють на дзеркало, відбиваються в ньому і знову потрапляють в лінзу. Таким чином формується зображення свічки в оптичній системі «лінза-дзеркало». Для визначення положення зображення свічки в цій ситемі використаємо правило, що в оптичній системі предметом для певного елемента системи є зображення, яке створює попередній елемент системи. Лінза дає перше зображення (використовуємо формулу тонкої лінзи) на відстані 36 см справа від оптичного центра лінзи (усі розіри підставляємо у см):

$$\frac{1}{18} + \frac{1}{f} = \frac{1}{12} \Rightarrow f = 36 \text{ см}.$$

Друге зображення вже формує дзеркало на відстані 30 см зліва від дзеркала (на дзеркало падає пучок променів від лінзо, що сходиться). Тобто для лінзи це «уявний» предмет на відстані –24 см від лінзи. Знов використовуємо формулу тонкої лінзи і отримуємо відствнь від лінзи до кінцевого зображення свічки

$$\frac{1}{-24} + \frac{1}{f'} = \frac{1}{12} \Rightarrow f' = 8 \text{ см}.$$

Тобто зображення свічки в системі «лінза-дзеркало» буде дійсним і на відстані 8 см зліва від оптичного центра лінзи.

Оскільки промені світла від свічки потрапляють не тільки на поверхню лінзи, а й безпосередньо у дзеркало, то у дзеркалі формується уявне зображення свічки на відстані 30 см справа від оптичного центра лінзи. Таким чином відстань між дійсним зображенням свічки в системі «лінза-дзеркало» і уявним зображенням свічки в дзеркалі становить **38 см**.

(327) ***1 спосіб.*** Оскільки на систему «людина-дошка» не діють горизонтальні сили (дошка лежить на гладенькому льоду), центр мас системи під час руху людини весь час залишається нерухомим. Маса людини у два рази більша за масу дошки, отже, спочатку людина перебувала на відстані $l/6$ від центра мас по один його бік, наприкінці руху — на відстані $l/6$ по другий бік від центра мас. Таким чином людина перемістилася відносно землі на відстань $l/3$.

Будемо вважати, що цю відстань людина подолала рухаючись рівноприскорено під дією максимальної сили тертя спокою $F = \mu Mg$. Таким чином прискорення людини становило $a = \mu g$. Для переміщення під час рівноприскореного руху маємо

$$s = \frac{v^2}{2a} \Rightarrow \frac{l}{3} = \frac{v^2}{2\mu g}.$$

Звідси максимальна швидкість людини

$$v = \sqrt{\frac{2\mu g l}{3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}4 \cdot 10 \cdot 6}{3}} = \mathbf{4}\ \left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right).$$

2 спосіб. На людину діє максимальна сила тертя спокою $F = \mu M g$, яка на шляху $l/3$ виконує роботу $A = Fs = \mu g M \cdot \frac{l}{3}$. Ця робота йде на збільшення кінетичної енергії людини

$$\mu g M \cdot \frac{l}{3} = \frac{M v^2}{2}.$$

Звідси максимальна швидкість людини

$$v = \sqrt{\frac{2\mu g l}{3}} = \mathbf{4}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Зауваження! Якщо ми обчислимо роботу сили на всій довжині дошки $A = \mu g M l$, то слід врахувати, що ця робота йде на збільшення кінетичної енергії не тільки людини, а й дошки

$$\mu g M l = \frac{M v^2}{2} + \frac{m u^2}{2}. \qquad (1)$$

З закону збереження імпульсу для мас і швидкостей людини та дошки маємо

$$M v = m u \Rightarrow \frac{m u^2}{2} = \frac{M v^2}{2m}. \qquad (2)$$

Підставляємо (2) в (1) і отримуємо

$$\mu g M l = \frac{M v^2}{2} + \frac{M v^2}{2m} \Rightarrow \mu g l = \frac{v^2}{2} + \frac{M v^2}{2m} \Rightarrow \mu g l = \frac{3 v^2}{2}.$$

Звідси максимальна швидкість людини

$$v = \sqrt{\frac{2\mu g l}{3}} = \mathbf{4}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

(328) Під час рівномірного падіння сила опору повітря компенсує силу тяжіння. Сила опору має залежати від швидкості руху, ефективної площі поверхні і густини повітря. Правильну розмірність забезпечує єдина комбінація цих величин:

$$F_{\text{оп}} = C \rho S v^2,$$

де C – безрозмірна стала, яка визначається формою тіла (її подвоєне значення називається коефіцієнтом аеродинамічного опору). Таку ж формулу можна отримати, розглянувши силу як швидкість зміни імпульсу повітря (зручніше у системі відліку тіла, що падає). Дорівнюючи силу опору $F_{\text{оп}}$ до mg, знаходимо вираз для швидкості:

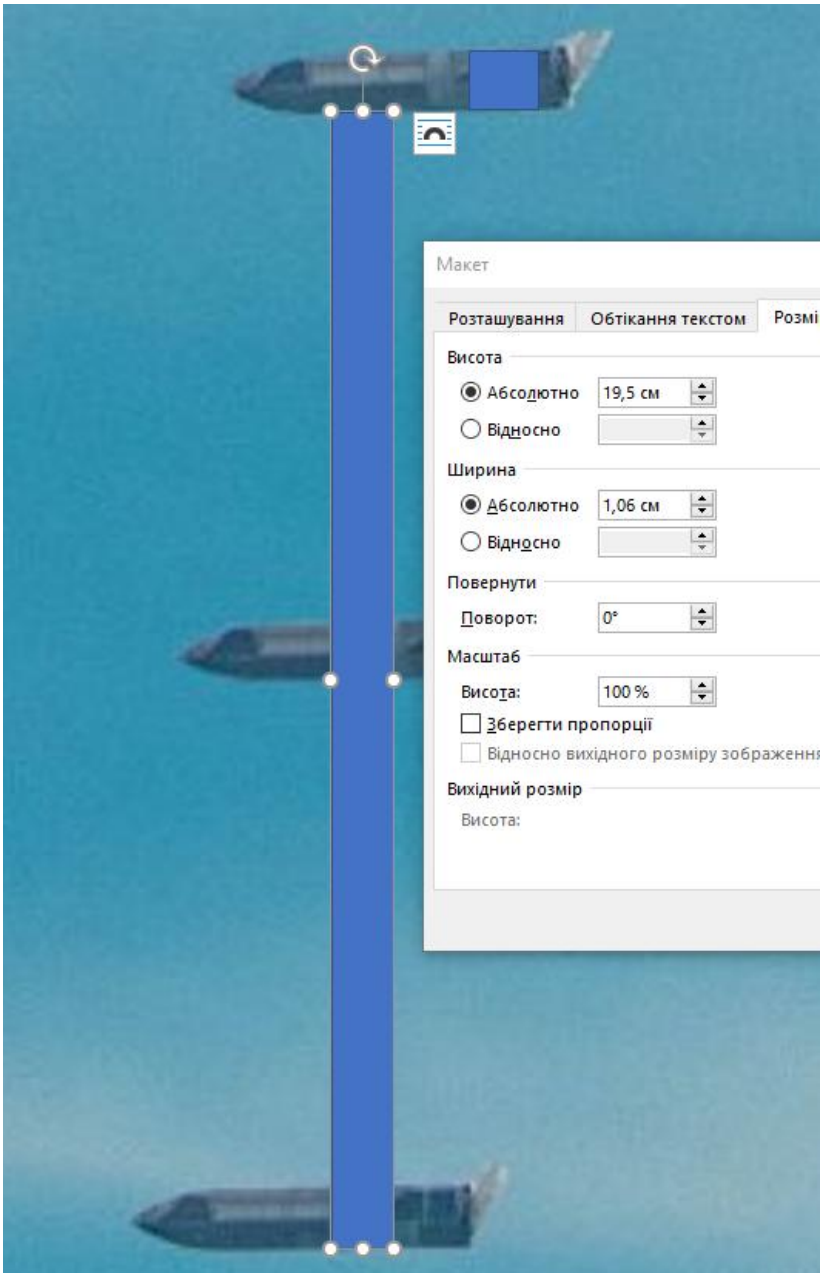
$$v = \sqrt{\frac{mg}{C \rho S}}.$$

Оскільки форма і маса кораблів за умовою однакові, відношення швидкостей на Марсі і на Землі матиме вигляд:

$$\frac{v_\text{М}}{v_\text{З}} = \sqrt{\frac{g_\text{М}}{g_\text{З}}\frac{\rho_\text{З}}{\rho_\text{М}}}.$$

Швидкість спуску корабля у земній атмосфері знайдемо з зображення (див. скриншот нижче). Відстань, яку проходив корабель за 2 с у 19,5 разів перевищувала діаметр корабля (на скриншоті масштаб підібраний так, щоб діаметр SN10 дорівнював 1 см). Отже швидкість $v_\text{З}$ була приблизно 88 м/с. Підставляю числові дані і отримуємо:

$$v_\text{М} = v_\text{З}\sqrt{\frac{g_\text{М}}{g_\text{З}}\frac{\rho_\text{З}}{\rho_\text{М}}} \approx \mathbf{482}\ \text{м/с}.$$



Звісно, під час вимірів могли бути похибки, і тому правильною вважалася відповідь у межах ± 10 м/с від зазначеною, а відповідь у межах ± 40 м/с оцінювалася у 2 бали. Що стосується іншої моделі, а саме лінійної залежності сили опору від швидкості (сила в'язкого тертя за невеликих розмірів тіл та швидкостей), ті, хто додатково припустив при цьому, що коефіцієнт динамічної в'язкості пропорційний густині повітря й виходив з формули $v_\text{М} = v_\text{З}\frac{g_\text{М}}{g_\text{З}}\frac{\rho_\text{З}}{\rho_\text{М}}$ та отримав відповідний вимірам результат, отримав 1 бал.

(329) Показники на лічильнику 220 В і 5А дають максимальну потужність 1,1 кВт для усієї квартири (сьогодні це менше, ніж споживає один електрочайник). Отже, за годину (3600 с) диск зробить 1,1·1250 обертів. Звідси можемо знайти період або частоту. Швидкість $v = \frac{\pi d}{T} \approx$ 9,6 см/с.

(330) На перший погляд здається, що в умові задачі не вистачає початкової довжини пружини l_0. Ймовірно, якщо розв'язувати задачу у загальному вигляді, l_0 має скоротитися.

Розглянемо два крайні випадки: коли пружина максимально розтягнута і коли максимально стиснута.

У першому випадку сила тертя спрямована від центру, а сила пружності до центру. Отже $m\omega^2 X = k(X - l_0) - \mu mg$, звідки $X_{max} = \frac{kl_0 + \mu mg}{k - m\omega^2}$.

У другому випадку $m\omega^2 X = k(X - l_0) + \mu mg$, звідки $X_{min} = \frac{kl_0 - \mu mg}{k - m\omega^2}$.

Довжина інтервалу $\Delta X = X_{max} - X_{min} = \frac{2\mu mg}{k - 4\pi^2 \nu^2 m} \approx \mathbf{46}$ см.

(331) Врахуємо розміри кульки.

1. Густина алюмінію ρ=2,7 г/см^3. Радіус алюмінієвої кульки: $R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}} = 2$ см.

2. Як відомо і можна показати із законів збереження, після прямого центрального пружного удару двох тіл однакової маси, вони обмінюються швидкостями руху. Кулька, після удару о праву стінку зупиняється, її маса дорівнює масі коробки, а коробка, придбавши швидкість V, рухається у в'язкому середовищі і до моменту другого зіткнення з кулькою проходить відстань L–2R. У момент другого зіткнення швидкість коробки за рахунок опору стала меншою $V_1 < V$. Після другого зіткнення коробка зупиняється, а кулька придбавши швидкість V_1 рухається до правої стінки і після удару надає коробці її колишню швидкість V_1 і т. д.
Висновок:

1. Можна розглядати рух коробки як безперервний процес - рух до зупинки у в'язкій рідині.

2. На відрізку шляху в L-2R відбувається 2 зіткнення.

Запишемо другий закон Ньютона:

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -kv \implies m\Delta v = -kv\Delta t \implies m\Delta v = -k\Delta S \implies$$

$$m(-v) = -kS.$$

Шлях коробки до зупинки: $S = \frac{mv}{k}$ = 1,215 м ≈ 1,2м.

На цьому шляху коробка зробила S / (L–2R) = 5,28 переміщень.

З них повних переміщень 5, за кожне з яких відбулося 2 зіткнення, а неповне переміщення дає ще одне зіткнення.

Тому: S =1,2 м; N =2× 5+1=11.

(332) Припустимо, що рівноважне видовження, коли мавпа на середині жердини, дорівнює x, а жорсткість кожної гумової стрічки k. Тоді $mg = 2kx$, а період вертикальних коливань пружного маятника

$$T_в = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}}.$$

Період малих горизонтальних коливань маятника довжиною $L = l + x$ (Рис.1)

$$T_г = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{l+x}{g}} > 2\pi\sqrt{\frac{x}{g}} = T_в.$$

Як бачимо, $T_г > T_в$. Те, що під час горизонтальних коливань ефективна довжина маятника може додатково збільшуватися, лише підсилює отриману нерівність.

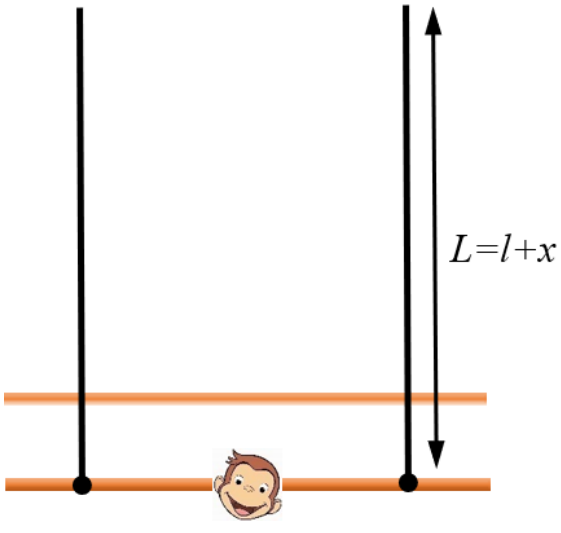


Рис. 1

Відповідь на друге питання залежить від видовження x, яке, в свою чергу, залежить від жорсткості k і маси m. Справді, розглянемо два граничні випадки: видовження дуже мале і дуже велике.

За малого видовження x як тільки мавпа почне перелізати через місце закріплення гумової стрічки до жердини, жердина одразу ж повернеться і набуде вертикального положення, якщо тільки це дозволить довжина другої стрічки (Рис.2). Далі мавпа просто спуститься на край жердини. Оскільки її утримуватиме одна гумова стрічка, видовження буде удвічі більшим (Рис.3).

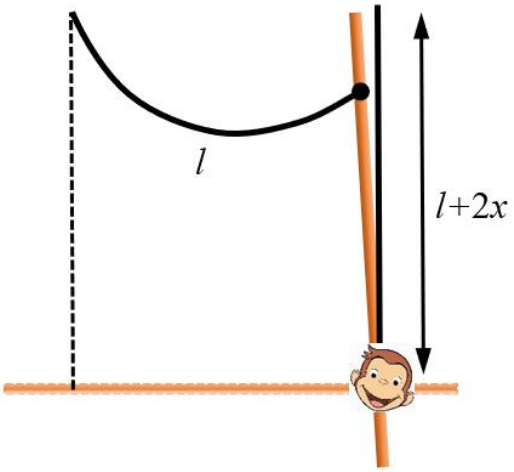


Рис. 2

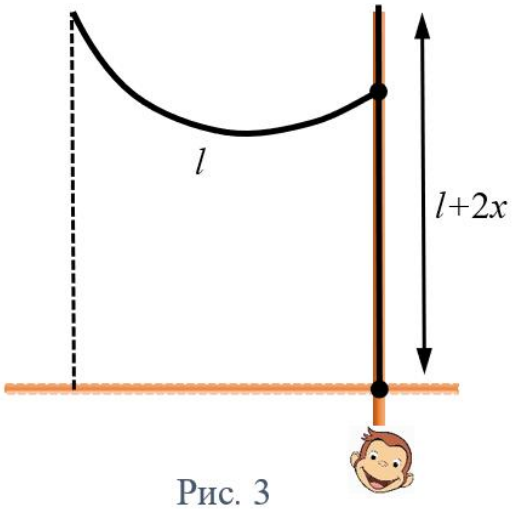


Рис. 3

За великого видовження x розтягнуться обидві стрічки. Але це може відбутися й при невеликих видовженнях, якщо великою буде відстань між стрічками, або стрічки будуть достатньо короткими (форму стелі, яка може обмежувати рух жердини, не обговорюємо). Знайдемо загальну умову, за якої жердина буде вертикальною, одна з ниток нерозтягнутою, а друга максимально видовженою, оскільки всю вагу мавпи прийме на себе (Рис. 4). Умова проста – відстань між точками закріплення нерозтягнутої стрічки має бути меншою за її нерозтягнуту довжину l:

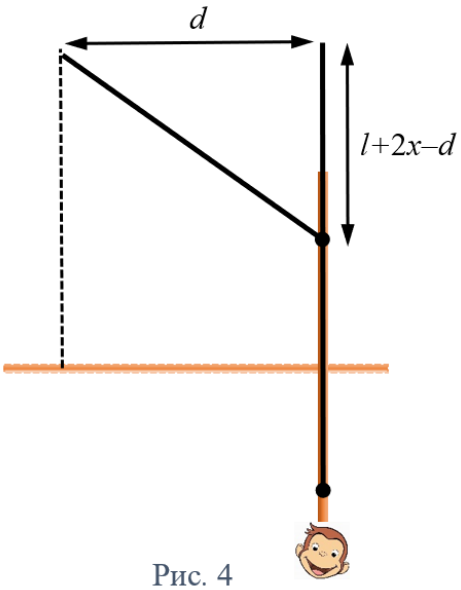


Рис. 4

$$\sqrt{d^2 + (l + 2x - d)^2} \le l, \qquad (1)$$

де $2x = mg/k$. Якщо ж ця умова не виконується, розтягнутими виявляться обидві стрічки, і положення мавпи на жердині набуде неочікуваного вигляду (рис.5). Саме за такого положення лінії дії трьох сил (двох сил натягу $\vec{T}_1$ і $\vec{T}_2$ та сили тяжіння $m\vec{g}$) перетинатимуться в одній точці (точка О на Рис.5), що й забезпечить статичну рівновагу відносно поворотів.

Перевіримо виконання умови (1) для випадку «довжина

жердини $s = 3$ м, довжина кожної гумової стрічки до того як мавпа забралася на жердину $l = 2{,}5$ м, відстань між стрічками $d = 2$ м. Коли мавпа всілася посередині жердини, гумові стрічки видовжилися до $L = 3$ м кожна. Маса мавпи $m = 10$ кг».

За умовою видовження $x = L - l = 0{,}5$ м, звідси знаходимо і жорсткість стрічки $k = mg/2x$, і перевіряємо умову:

$$\sqrt{d^2 + (l + 2x - d)^2} = 2{,}5 \text{ м},$$

що точно співпадає з довжиною нерозтягнутої гумової стрічки $l = 2{,}5$ м. Отже, маємо випадок, зображений на рис.4. Нехтуючи розмірами мавпи, проводимо через нижній кінець жердини рівень відліку потенціальної енергії мавпи у полі земного тяжіння. Тоді її початкова енергія дорівнюватиме нулю, а кінцева, коли мавпа дістанеться середини жердини, $mg(x + (S - d)/2)$.

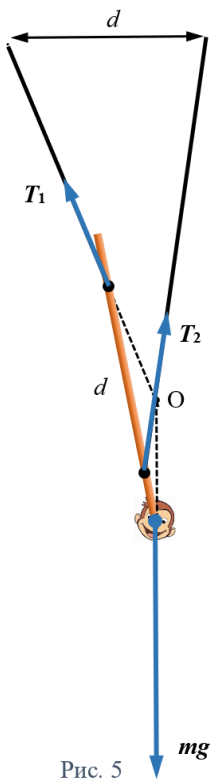


Рис. 5

Початкова енергія розтягнутої на $2x$ стрічки: $2kx^2$. Кінцева енергія пружної деформації двох розтягнутих на x стрічок: kx^2. Отже, робота мавпи піде на збільшення власної потенціальної енергії, а стрічки їй у цьому допомагатимуть.

$$A = mg(x + (S - d)/2) + kx^2 - 2kx^2 == \frac{1}{2}mg(x + S - d) = 75 \text{ Дж}.$$

В останньому виразі ми скористалися тим, що $k = mg/2x$, а прискорення вільного падіння взяли за 10 м/с^2.

(333) Точку на дні не видно з повітря, якщо промені від неї падають на поверхню води під кутом α, більшим за граничний кут повного внутрішнього відбиття α_0 (див. Рис. 1).

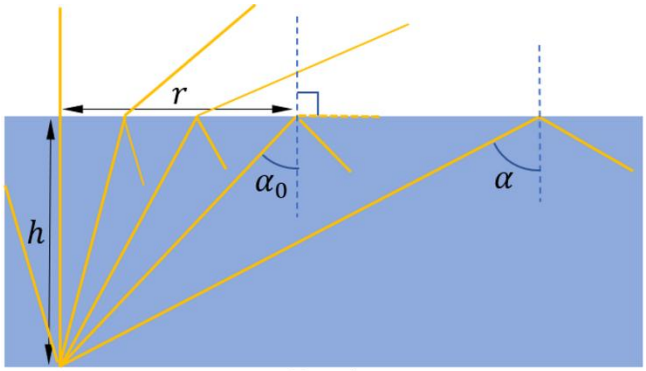


Рис.1

Формально для кута повного внутрішнього відбиття кут заломлення набуває максимально можливого значення 90°:

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin 90°} = \frac{1}{n}.$$

Тоді відстань по горизонталі, яку слід перекрити

$$r = h\text{tg}\alpha_0 = h\frac{\sin\alpha_0}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha_0}} = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Тобто, границя плоту, що перекриватиме сторону многокутника, буде паралельна стороні, але віддалена від неї по горизонталі на відстань r. Що стосується вершини, то тут на однаковій відстані від неї буде дуга кола радіусом r.

Отже форму плоту мінімальної площі можна отримати, домалювавши сторони многокутника прямокутниками, а їхні зовнішні вершини з'єднавши дугами кола. На Рис. 2, як приклад, зображений жовтий п'ятикутник, як частина плоту, який доповнений прямокутниками і секторами кругів. Контур плоту складається з прямолінійних відрізків, загальна довжина яких дорівнює периметру многокутника p, і дуг кіл. Не складно довести, що для будь-якого многокутника всі сектори кругів у сумі дають повний круг з площею πr^2. Наочно це зображено на Рис.3. А сума площ усіх прямокутників є добутком периметру на відстань r: pr. Отже, площа плоту:

$$S_{\text{пл}} = S + pr + \pi r^2,$$

де

$$r = \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$



Рис.2



Рис.3

Зазначимо, що отриманий результат є вірним для будь-якої опуклої фігури, оскільки навіть її гладкий контур можна уявити як ламану, що складається з нескінченно великої кількості нескінченно малих відрізків, що ніяк не змінює логіку розв'язання нашої задачі для довільного многокутника.

(334) Скориставшись симетрією, припустимо, що площина міста перпендикулярна до осі обертання. Визначимо прискорення вільного падіння у місті, площина якого розташована на «висоті» h від центру астероїду (див. рис.). Запишемо проекції другого закону Ньютона для матеріальної точки, відстань від якої до центру астероїду r, вважаючи, що у її системі відліку ніякі горизонтальні сили на неї не діють. В інерціальній системі відліку це означатиме, що доцентрове прискорення викликає тільки проекція сили тяжіння на напрям до осі обертання.

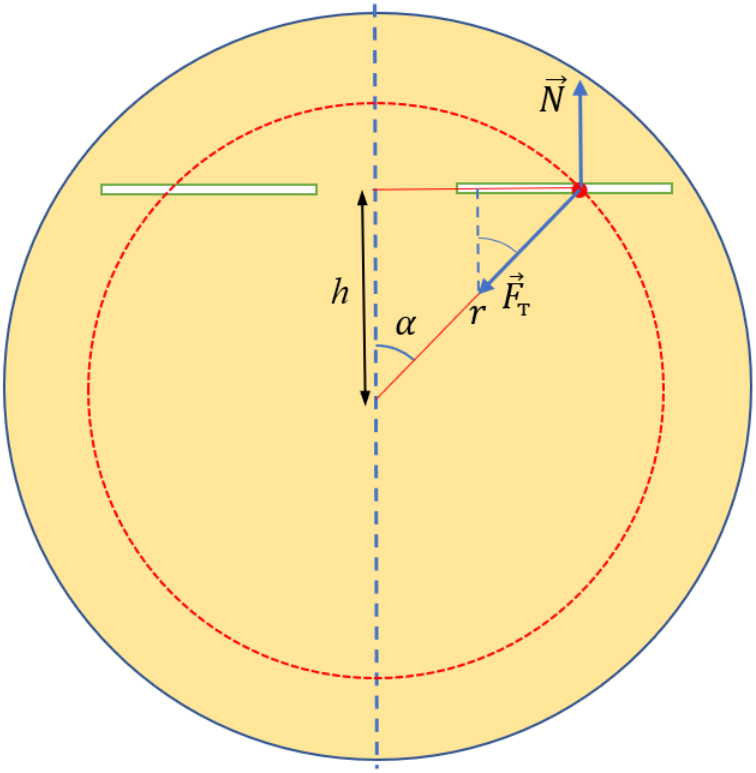
$$\begin{cases} m\omega^2 r\sin\alpha = F_{\text{т}}\sin\alpha, \\ N = F_{\text{т}}\cos\alpha, \end{cases}$$

де сила тяжіння (гравітація зовнішніх шарів компенсується)

$$F_т = \frac{GM_r m}{r^2} = \frac{4}{3}\pi\rho G m r.$$

Отже, для того, щоб досягти поставленої мети, слід розкрутити астероїд до кутової швидкості

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho G}.$$



Прискорення вільного падіння (виходимо з $N = mg$) у такому місті буде всюди однаковим і перпендикулярним до поверхні: $g = \omega^2 h$.

Тобто, можна побудувати міста на різних рівнях з різним значенням прискорення вільного падіння, якщо розкрутити астероїд до визначеної кутової швидкості. Головне, щоб площина міста була перпендикулярною до осі обертання.

У таких містах відцентрова сила інерції повністю компенсується проекцією сили тяжіння. Якщо якомусь тілу надати швидкість вздовж поверхні, на нього у горизонтальному напрямку діятиме лише сила Коріоліса, яка, як відомо, перпендикулярна до швидкості, і тому роботи не виконує, лише змінюючи напрям швидкості. Якщо ж тіло рухається зі сталою швидкістю (нехтуємо силами тертя та опору) під дією спрямованої перепендикулярно до швидкості сталої сили, то будь-які фрагменти траєкторії будуть однаковими. Таку властивість у площині має лише коло. Тіло зі сталою швидкістю рухатиметься вздовж кола і, якщо не зустріне перепон, повернеться назад, або вздовж дуги кола, якщо тілу надати значну швидкість. Такий самий рух спостерігається в однорідному магнітному полі під дією сили Лоренца. Радіуси кіл різні, періоди однакові.

В інерціальній системі відліку аналіз руху складніший. На тіло у горизонтальному напрямку діятиме лише проекція сили тяжіння, що пропорціна відстані до осі обертання. Під дією її складових, як під дією сил Гука, у площині виникнуть взаємоперпендикулярні гармонічні коливання з однаковою частотою. Це відподає руху вздовж еліпсу з центром в точці перетину площини з віссю обертання. Цьому еліпсу з точку зору системи відліку, що обертається разом з містом з кутовою швидкістю $\omega = \sqrt{\frac{4}{3}\pi\rho G}$, відповідають кола.

(335) Кульки можуть рухатись до зіткнення, як в одній площині, так і в різних, але, якщо вертикальні складові їх початкових швидкостей будуть різними, то кульки весь час руху перебуватимуть на різній висоті, і зіткнення не відбудеться. Отже необхідною умовою, яку можна записати, використовуючи тільки α_1, α_2, v_{01}, v_{02} є рівність їх вертикальних швидкостей.

$$v_{01}\sin\alpha_1 = v_{02}\sin\alpha_2.$$

Це наочно зрозуміло з точки зору неінерціальної системи відліку, яка одночасно з кульками починає падати з прискоренням вільного падіння. Відносно неї кульки рівномірно переміщуються вздовж прямих. Точка перетину прямих буде на певній відстані від горизонтальної площини початку руху. Цю відстань (у перпендикулярному до площині напряму) за однаковий час мають пройти обидві кульки, що потребує однакового значення їх вертикальних швидкостей.

Припустимо, що у момент зіткнення швидкості кульок $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Запишемо закон збереження імпульсу і зміну кінетичної енергії, яка йде на нагрів кульок.

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}, \\ \left(c_1m_1 + c_2m_2\right)\Delta t = \dfrac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2} + \dfrac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2} - \dfrac{\left(m_1 + m_2\right)\vec{v}^{\,2}}{2}. \end{cases}$$

З першого рівняння виражаємо $\vec{v}$, підставляємо у друге і після спрощення отримуємо $\left(c_1m_1 + c_2m_2\right)\Delta t = \dfrac{m_1m_2\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2}{2\left(m_1 + m_2\right)}$, звідки

$$\Delta t = \frac{x\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2}{2\left(x + 1\right)\left(c_1x + c_2\right)}, \tag{1}$$

де для зручності введено позначення $m_1/m_2 = x$. Аналіз формули (1) на максимум можна провести без використання похідних, наприклад так:

$$\Delta t = \frac{x\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2}{2\left(x + 1\right)\left(c_1x + c_2\right)} = \frac{x\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2}{2\left(c_1x^2 + (c_1 + c_2)x + c_2\right)} = \frac{\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2/2}{c_1x + (c_1 + c_2) + c_2/x} =$$

$$= \frac{\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2/2}{\left(\sqrt{c_1x} - \sqrt{c_2/x}\right)^2 + \left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}.$$

Найбільше значення Δt буде за найменшого знаменника, тобто, коли повний квадрат $\left(\sqrt{c_1x} - \sqrt{c_2/x}\right)^2$ дорівнюватиме нулю. Звідси знаходимо відношення маси свинцевої кульки m_1 до маси пластилінової m_2, за якого збільшення температури найбільше:

$$x = m_1/m_2 = \sqrt{c_2/c_1}\ .$$

Як бачимо, шукане відношення мас не залежить від швидкостей тіл перед зіткненням. Одночасно з цим отримуємо і найбільше Δt:

$$\Delta t = \frac{\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2}{2\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}.$$

Зазначимо, що максимальне значення Δt вже залежить від швидкостей перед зіткненням, точніше кажучи, від відносної швидкості тіл $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, яка, враховуючи вираз $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ для рівноприскореного руху, дорівнює початковій відносній швидкості:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{01} + \vec{g}t - \left(\vec{v}_{02} + \vec{g}t\right) = \vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}.$$

Оскільки вертикальні складові початкових швидкостей однакові, то відносна початкова швидкість буде горизонтальною і матиме максимальне абсолютне значення, коли тіла рухатимуться в одній площині назустріч одне одному. Тобто,

$$\Delta t_{\max} = \frac{\left(v_{01}\cos\alpha_1 + v_{02}\cos\alpha_2\right)^2}{2\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}.$$

Зазначимо, що величини, які входять до останньої формули, не довільні. На них накладені обмеження, що забезпечують можливість зіткнення, а саме: $v_{01}\sin\alpha_1 = v_{02}\sin\alpha_2$ та інше, аналогічне йому, якщо спроектувати горизонтальні складові швидкостей на перпендикуляр до лінії, що з'єднує початкові точки і дорівняти. Звісно, що є ще одне обмеження – це зіткнення тіл у повітрі. Оскільки геометрія розташування початкових точок та рельєф не задані, останні обмеження записати у термінах умови задачі не можна. Зазначимо також, що випадок не прямого не центрального зіткнення, після якого тіло з двох кульок обертатиметься, зменшить частину енергії, яка піде на нагрів, що не відповідає умові задачі.

(336) Спробуємо з'ясувати, як може залежати опір провідника між двома циліндричними поверхнями при радіальному розподілі струму. Відомо, що для однорідного провідника, площа перерізу S якого не змінюється і перпендикулярна його довжині l, опір: $R = \rho\frac{l}{S}$. Якщо внутрішня циліндрична поверхня має радіус r_0, зовнішня – радіус r, а висота h, можна записати наближену формулу, взявши за довжину провідника l – товщину шару в напрямку проходження струму $l = r - r_0$, а за площу перерізу S – добуток висоти h на деяку середню довжину кола: $2\pi r_c h$. За середній радіус r_c перпендикулярного до напрямку струму перерізу, оціночно можна взяти середнє арифметичне внутрішнього та зовнішнього радіусів, $r_c = (r_0 + r)/2$.

Тоді

$$R = \rho\frac{l}{2\pi r_c h} = \frac{\rho}{\pi h}\cdot\frac{r - r_0}{r + r_0} = \frac{\rho}{\pi h}\cdot\frac{r/r_0 - 1}{r/r_0 + 1}. \qquad (1)$$

З аналізу розмірностей і геометрії циліндру випливає, що у загальному випадку опір має бути пропорційний питомому опору ρ і обернено пропорційним висоті h, зі збільшенням якої збільшується площа перерізу. Тоді радіуси входитимуть у вигляді безрозмірного відношення. Тобто

$$R = \frac{\rho}{h}f(r/r_0). \qquad (2)$$

Рівняння (1) задовільняє (2), хоча і є приблизним для розрахунків у випадку, коли не вдається отримати точну відповідь.

Для того, щоб опір не змінився, необхідно, щоб опір нової захисної оболонки від r_2 до r_3 дорівнював опору тієї частини старої оболонки від r_2 до r_1, що була вилучена.

$$\frac{\rho}{2h} f(r_3/r_2) = \frac{\rho}{h} f(r_1/r_2)$$

Але ж при послідовному з'єднанні опори додаються, тому опір нової оболонки можна уявити як два послідовних від r_2 до r_1 та від r_1 до r_3 (див. рис.2):

$$\frac{\rho}{2h} f(r_1/r_2) + \frac{\rho}{2h} f(r_3/r_1) = \frac{\rho}{h} f(r_1/r_2).$$

Скорочуючи, знаходимо: $f(r_3/r_1) = f(r_1/r_2)$. Отже, для нашої монотонної функції це означає рівність аргументів: $r_3/r_1 = r_1/r_2$, звідки:

$$r_3 = \frac{r_1^2}{r_2} = 20 \text{ см}.$$

Тоді товщина нової оболонки $d = r_3 - r_2 = 15$ см.

Радіус циліндру зменшився удвічі, а для відновлення опору з використанням удвічі менш провідною речовини знадобився утричі товщий її шар, замість відпрацьованого. Наближена формула дає досить велику похибку.

Наприкінці зауважимо, що функція $f(x)$ з точністю до множника є натуральним логарифмом, а опір між двома циліндричними поверхнями визначається за формулою:

$$R = \frac{\rho}{2\pi h} \ln(r/r_0),$$

без якої ми обійшлись. Але все одно вчіть математику!

(337) Позначимо через X глибину занурення нижнього кінця трубки. Тоді довжина стовпчика повітря у трубці при атмосферному тиску P_0 буде $L - X$. Після перекриття верхнього кінця і підняття трубки над водою, рівень води в ній зменшиться до деякого значення Y, тобто, довжина стовпчика повітря стане $L - Y$, а тиск $P = P_0 - \rho g Y$ (Рис.1). Дослід проводимо не поспішаючи, отже процес можна вважати ізотермічним і скористатися $P_0 V_0 = PV$, що в нашому випадку набуває вигляду $P_0(L - X) = (P_0 - \rho g Y)(L - Y)$, звідки знаходимо

$$P_0 = \frac{\rho g Y (L - Y)}{X - Y}. \qquad (1)$$

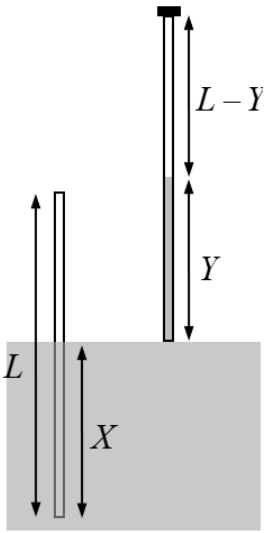


Рис.1

Вважаємо довжину L трубки, а також довідкові дані (густина води і прискорення вільного падіння) відомими точно. Відносна похибка визначення атмосферного тиску:

$$\varepsilon = \frac{\Delta P_0}{P_0} = \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta(L - Y)}{L - Y} + \frac{\Delta(X - Y)}{X - Y} = \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta Y}{L - Y} + \frac{\Delta(X - Y)}{X - Y}.$$

Для того, щоб мінімізувати ε, слід зменшити чисельники і збільшити знаменники. У чисельниках стоять інструментальні похибки: $\Delta Y = 0{,}5$ мм і $\Delta(X-Y) = \Delta X + \Delta Y = 1$ мм, якщо міряти X та Y окремо. Однак ми можемо безпосередньо виміряти зміну висоти стовпчика $x = X - Y$, і тоді $\Delta(X-Y) = \Delta x = 0{,}5$ мм – відносна похибка останнього доданку в ε зменшиться вдвічі!

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y} + \frac{1}{L-Y} + \frac{1}{x}\right) \text{ мм} = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{Y(L-Y)} + \frac{1}{x}\right) \text{ мм.} \qquad (2)$$

Саме останній доданок дає найбільший внесок в інструментальну похибку, оскільки вимірюється мала величина (атмосферний тиск значно перевищує гідростатичний). x залежить від X, а, отже, і від Y. Тому для того, щоб остаточно мінімізувати ε, виразимо з формули (1) $x = \dfrac{\rho g Y(L-Y)}{P_0}$ і підставимо в (2):

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{L + P_0/\rho g}{Y(L-Y)} \text{ мм.}$$

Мінімального значення ε набуде за максимального значення знаменника. Беремо похідну, або виділяємо повний квадрат і знаходимо: $Y = L/2$.

Тоді, скориставшись знанням приблизного значення атмосферного тиску, густини води і прискорення вільного падіння, знаходимо:

$x = \frac{\rho g}{P_0}\frac{L^2}{4} \approx 2{,}5$ см, $X = Y + x = 52{,}5$ см, $\varepsilon = \frac{1}{2}\frac{L + P_0/\rho g}{Y(L-Y)}$ мм $= 2{,}2\%$.

Отже, трубку слід занурити на 52,5 см, що після її підняття очікувано дає стовпчик довжиною 50 см в межах абсолютної похибки 0,5 мм.

Існує **інший, більш точний, метод** визначення атмосферного тиску, який дозволяє майже вдвічі збільшити зміщення стовпчика. Після того, як трубку витягли з води, слід виміряти Y, після чого її перевернути і виміряти зміщення стовпчика y (див. Рис.2). Знову для ізотермічного процесу записуємо:

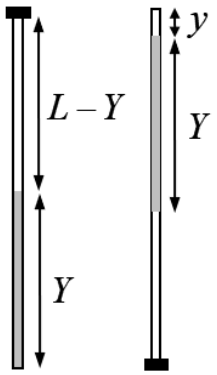


Рис.2

$$(P_0 - \rho g Y)(L-Y) = (P_0 + \rho g Y)(L - Y - y),$$

Звідки знаходимо

$$P_0 = \rho g \frac{Y(2L - 2Y - y)}{y}. \qquad (3)$$

Відносна похибка

$$\varepsilon = \frac{\Delta P_0}{P_0} = \frac{\Delta Y}{Y} + \frac{\Delta(2L - 2Y - y)}{2L - 2Y - y} + \frac{\Delta y}{y}.$$

Знову аналізуємо чисельник $\Delta(2L - 2Y - y)$. Якщо міряти тільки Y і y, маємо $\Delta(2L - 2Y - y) = 2\Delta Y + \Delta y = 1{,}5$ ìì . Якщо ж, наприклад, додатково міряти $l = Y + y$

разом, маємо $\Delta(2L-2Y-y)=\Delta Y+\Delta(Y+y)=\Delta Y+\Delta l=1$ мм, виграш у 1,5 рази. Таким чином, маємо

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Y}+\frac{2}{2L-2Y-y}+\frac{1}{y}\right)\text{мм}. \quad (4)$$

Виразимо з (3) y і підставимо у (4):

$$\varepsilon=\frac{2Y^2+aLY+a(a+2)L^2}{4aLY(L-Y)}\text{мм},$$

де $a=P_0/\rho gL\approx 10$. Візьмемо похідну, прирівняємо до нуля і отримаємо квадратне рівняння (можна обійтися без похідної, виділивши після деяких перетворень повний квадрат):

$$Y^2+2aLY-aL^2=0.$$

Фізичним умовам задовольняє $Y=L\left(\sqrt{a+a^2}-a\right)\approx 48{,}8$ см, звідки з формули (1) $X=\frac{Y(L-Y)}{aL}+Y\approx 51{,}3$ см, що на 1,2 см менше, ніж у попередньому випадку. Відносна похибка $\varepsilon\approx 1{,}254\%\approx 1{,}3\%$.

Отже, для максимальної точності слід занурити трубку на 51,3 см, потім витягти, заміряти висоту стовпчика води 48,8 см, далі перевернути трубку і заміряти як зміщення стовпчика y, так і довжину або частини с повітрям, або водяного стовпчика зі зміщенням l. Звісно, реальна похибка буде дещо більшою за рахунок інших похибок.

Зазначимо, що такі ж самі відповіді для X можна було отримати, не мінімізуючи ε, а шукаючи максимальні зміщення (це можна довести за допомогою матаналізу).

Додаток (як знайти екстремум у задачі «Майже експеримент» без похідної)

1-й випадок

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\frac{L+P_0/\rho g}{Y(L-Y)}\text{мм}$$

$\varepsilon\to min$, коли $Y(L-Y)\to max$

$$Y(L-Y)=L^2/4-(L/2-Y)^2$$

Оскільки мінімальне значення квадрату 0, маємо $Y=L/2$ і

$$\varepsilon_{min}=\frac{1}{2}\frac{L+P_0/\rho g}{L^2/4}\text{ мм}.$$

2-й випадок

$$\varepsilon=\frac{2Y^2+aLY+a(a+2)L^2}{4aLY(L-Y)}\text{мм}$$

Треба мінімізувати

$$F(Y)=\frac{2Y^2+aLY+a(a+2)L^2}{Y(L-Y)}=\frac{2(Y^2-LY)+2LY+aLY+a(a+2)L^2}{Y(L-Y)}$$
$$=-2+(a+2)L\frac{Y+aL}{LY-Y^2}=-2+\frac{(a+2)L}{\frac{LY-Y^2}{Y+aL}}$$

$F(Y)\to min$, коли

$$f(Y)=\frac{LY-Y^2}{Y+aL}\to max$$

Для зручності позначимо $z=Y+aL$. Тоді

$$f(z)=\frac{L(z-aL)-(z-aL)^2}{z}=(1+2a)L-\left(z+\frac{(a+a^2)L^2}{z}\right)$$
$$=(1+2a)L-2\sqrt{a+a^2}L-\left(\sqrt{z}-\sqrt{\frac{(a+a^2)}{z}}L\right)^2.$$

ми досягнемо поставленої мети, коли повний квадрат в останньому виразі набуде свого мінімального значення 0 ($z=\sqrt{a+a^2}L$). Тоді

$$f=(1+2a)L-2\sqrt{a+a^2}L=\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{a}\right)^2L$$

і

$$\varepsilon=\frac{1}{4aL}\left(-2+\frac{(a+2)}{\left(\sqrt{1+a}-\sqrt{a}\right)^2}\right)\text{мм.}$$

Значення висоти водяного стовпчика $Y=z-aL=(\sqrt{a+a^2}-a)L$.

Розв’язки завдань фізичного марафону 11 клас

(338) Рівняння, що зв'язує кути θ_1 і θ_2 має вигляд: $\sin\theta_1 = \frac{3}{2}\sin\theta_2$.

(339) λ=150 нм.

(340) h=R.

(341) n= $\frac{R}{d}$.

(342) Графік Д.

(343) 1, 2, 3, 4.

(344) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\cos\alpha}}$.

(345) φ=π/2 рад.

(346) $I_1\frac{B_2}{B_1}$.

(347) η=$(A_1+A_2)/A_1$=20%.

(348) 80 Дж.

(349) U=$\sqrt{2} * \pi * BSN\nu$ =16 В.

(350) J=8/3.

(351) 1 4 3 2.

(352) к=L/3πA=2.

(353) $F = \frac{B^2d^2v/\sin\theta}{(R+dr/\sin\theta)}$.

(354) 18 см.

(355) $F=2*(BR)^2\pi/\mu_0$=20Н.

(356) $\frac{W\text{магн}}{W\text{ел}} = \frac{L}{CR^2}$.

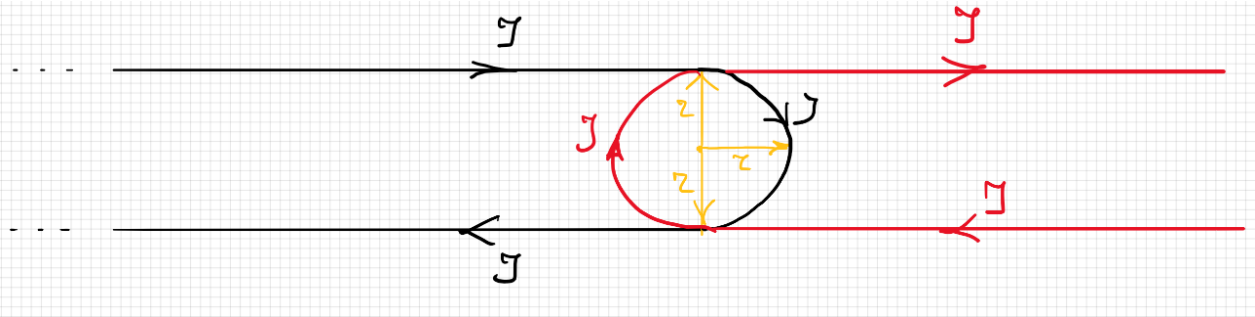
(357) Беручи похідну від закону радіоактивного розпаду можна отримати активність: $A=N_0\frac{ln2}{T_{1/2}}2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$. В умовах задачі дане відношення активностей вуглецю-14. Логарифмуючи це відношення можна отримати час, який вуглець розпадався: $t=T_{1/2}\frac{ln8}{ln2}$. Відповідь. 17100 років.

(358) Застосуємо для корабля другий закон Ньютона в імпульсній формі F=dp/dt. Далі враховуємо, що імпульс тіла, яке рухається зі швидкістю, близькою до швидкості світла у вакуумі дорівнює: $p = \frac{MV}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$, беремо похідну від цього виразу і отримуємо $F = \frac{Ma}{\sqrt{(1-V^2/c^2)^3}}$. Після чого підставляємо значення швидкості і отримуємо відповідь. Відповідь $F = \frac{Ma}{\sqrt{(1-V^2/c^2)^3}} = \sqrt{8}$Ma.

(359) Спочатку застосуємо формулу сферичного дзеркала (2/R=1/d + 1/f) і знайдемо положення зображення джерела світла: 3 R/2. Якщо перейти у систему відліку, що пов'язана з дзеркалом, то в ній джерело почало рухатися вгору зі швидкістю V. Виходячи з подібності трикутників, отримуємо, що зображення в цій системі починає рухатися зі швидкістю 2 V вниз. Тоді відносно землі його швидкість буде дорівнювати 3V. Відповідь: 3.

(360) Охолодження гелію відбувається за рахунок випаровування. Якщо ми відкачали всі насичені пари, то об'єм над гелієм дуже швидко заповниться новими парами при тому самому тиску насичених парів, адже температура змінюється дуже мало. Відповідь отримуємо записавши закон збереження енергії при охолодженні гелію ($L\Delta m = cm\Delta T$) за рахунок випаровування та закон Менделєєва-Клапейрона для насиченого пару ($pV = \frac{\Delta m}{\mu}RT$). В результаті отримуємо: $p = \frac{cmRT\Delta T}{LV\mu}$. Відповідь: 4,16 кПа.

(361)



Добудуємо до стартового дроту, що зображений чорним кольором, ще один червоний (див. рис.) Цілком зрозуміло, що завдяки цьому індукція магнітного поля в нашій точці подвоїться. Але зараз її буде легко розрахувати за принципом суперпозиції, як суму спрямованих в один бік магнітних полів двох нескінченних прямих дротів та колового струму. Тобто:

$$B = \frac{1}{2}\left(2B_{\text{прям}} + B_{\text{кол}}\right) = \frac{1}{2}\left(2\frac{\mu_0 I}{2\pi r} + \frac{\mu_0 I}{2r}\right) = \mu_0 i(2+\pi)/(4\pi r)$$

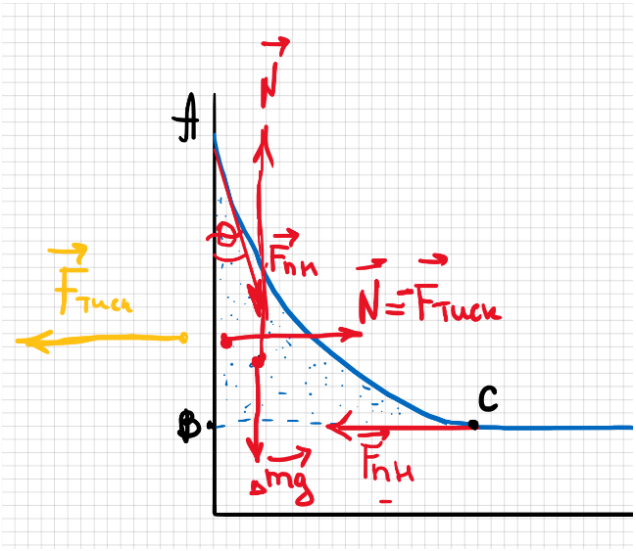
Відповідь: $\mu_0 i(2+\pi)/(4\pi r)$.

(362) Розглянемо порцію рідини, що обмежена поверхнею рідини, стінкою та горизонтальним перерізом (див. рис.). З умови рівноваги на горизонтальну вісь: $N + F_{\text{пн}}sin\theta = F_{\text{пн}}$,

$$\frac{\rho g h^2 d}{2} = \sigma d(1 - sin\theta).$$

$$h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}(1 - sin\theta)}$$

Відповідь: 1.



(363) Зсунемо поршень на невелику відстань x з положення рівноваги і розглянемо квазіупружні коливання, що виникнуть після цього. З того боку, де насичену пару стискають, тиск не змінюється, так як пара залишається насиченою. З іншого боку поршня, пара стає ненасиченою і її тиск зменшується. Повертаюча сила при цьому дорівнює: $F = S\left(p_{нп} - p_{нп}\frac{L/2}{L/2+x}\right) \approx \frac{2p_{нп}S}{L}x = \frac{2\nu RT}{L^2}x$. Тоді період коливань: $T = \sqrt{2}\pi L\sqrt{\frac{M}{\nu RT}}$. Відповідь: $\sqrt{2}$.

(364) Потрапивши у «область» електрон продовжує рухатися по спіралі, шаг якої поступово зменшується внаслідок гальмування. Час гальмування : $t = \frac{mV\cos\alpha}{qE}$. Період обертання $T = 2\pi\frac{m}{qB}$

Кількість обертів до зупинки: $N = \frac{t}{T} = \frac{VB\cos\alpha}{2\pi E} = 30$. Внаслідок подальшого повернення ліворуч повна кількість обертів буде вдвічі більшою. Відстань, яку пройшов електрон вздовж силових ліній до зупинки: $S = \frac{m(V\cos\alpha)^2}{2qE} = 11.25$ см. Бачимо, що за час гальмування електрон не залишає «область». Відповідь: 60.

(365) Спочатку застосуємо закон збереження енергії для випадку нерухомої ракетки та отримаємо значення коефіцієнта відновлення 0,9. Далі зручно перейти у систему відліку, що пов'язана з рухомою ракеткою. В цій системі м'яч наближається до неї зі швидкістю 60 м/с, а відлітає з 54 м/с. Для отримання відповіді повертаємося в нерухому систему відліку і отримуємо 74 м/с. Відповідь: 74.

(366) Нехай кожна щілина є джерелом хвилі з амплітудою E. За принципом суперпозиції у точці X у першому випадку амплітуда коливань буде 2E. Так як інтенсивність пропорційна квадрату амплітуди, то A пропорційна $4E^2$. У другому випадку амплітуда буде майже 4E (за умовою задачі відстань до т.X дуже велика). Тоді інтенсивність пропорційна $16E^2$, тобто 4A. Відповідь: 4A.

(367) Внаслідок збільшення рівня води у посудині оптичний шлях збільшиться на: $\Delta = n * dh - 1 * dh = dh(n-1)$ (у воді зростає у повітрі зменшується). Тоді $\frac{d\Delta}{dt} = (n-1)\frac{dh}{dt}$. Це рівносильно віддаленню джерела світла від спостерігача(риби) зі швидкістю $V = (n-1)\frac{dh}{dt}$.

Тоді зміщення частоти(ефект Доплера нехтуючи релятивістськими ефектами):

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}} = \frac{(\mathrm{n}-1)}{\mathrm{c}}\frac{\mathrm{dh}}{\mathrm{dt}}$$

$$\Delta\nu = \frac{(n-1)}{\lambda}V$$

Відповідь: 1000 Гц.

(368) Спочатку застосуємо закон Фарадея для електромагнітної індукції і знайдемо напруженість електричного поля на відстані R від центру області магнітного поля підчас швидкої появи магнітного поля. $E = \frac{dBr^2}{2Rdt}$. Внаслідок цього протон майже миттєво набуває швидкості, яку можна розрахувати, наприклад, за другим законом Ньютона в імпульсній формі:$qEdt = mdV$. Це дозволить нам отримати величину B_0: $B_0 = \frac{2RMV}{qr^2}$. Далі розглянемо процес вимкнення магнітного поля. Індукційний струм, що виникає у кільці при цьому, приводить до збільшення внутрішньої енергії кільця. Застосовуючи закон збереження енергії, закон Фарадея та Джоуля-Ленца, нескладно отримати вираз для збільшення температури кільця: $\Delta\mathrm{T} = \frac{\mathrm{a}}{\rho\rho_{\text{ел}}\mathrm{c}}(\frac{VM}{q})^2 = 1\ K$.

Відповідь: 1 К.

(369) Для знаходження потужності на зовнішньому колі як завжди користуємося законом Джоуля-Ленца та законом Ома для повного кола. Легко довести, що ця потужність буде мати максимальне значення за умови, коли опір зовнішнього кола буде дорівнювати внутрішньому опору джерела. Тому, якщо уважно придивитися, стає зрозумілим, що немає необхідності розраховувати значення опору у кожному випадку. А правильним варіантом відповіді буде мостова схема підключення резисторів, що наведена на рис. Г.

(370) Зрозуміло, що вольтметр постійної напруги не буде встигати реагувати на коливання змінної напруги великої частоти і його можна вважати його покази рівними U_1=5В. Вольтметр змінної напруги буде усереднять квадрат загальної напруги на джерелах і показувати її діюче значення:

$$U = \mathrm{U}_2 = \sqrt{U_1^2 + \overline{(U_2\sqrt{2}sinwt)^2}} = \sqrt{U_1^2 + U_2^2} = 13\ \text{В}$$

Таким чином різниця між показами вольтметрів буде складати 13-5=8 В. Відповідь: 8 В.

(371) Напишемо другий закон Кірхгофа для коливального контуру у той момент, коли струм був максимальним.$-L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = iR.\frac{q}{C} = IR.\ \rightarrow q = ICR$ – заряд *конденсатора в момент максимального значення струму.* Енергія контуру в цей момент: $\mathrm{W} = \frac{\mathrm{LI}^2}{2} + \frac{q^2}{2C} = \frac{\mathrm{I}^2}{2}(CR^2 + L)$. Відповідь: 44 Дж.

(372) За методом розмірності можна отримати кельвін лише єдиною комбінацією густини, маси, постійної Планка та постійної Больцмана. В такій комбінації ступінь густини буде 2/3: $T = \frac{h^2\rho^{2/3}}{km^{5/3}}$. Звідси легко отримати правильну відповідь. Відповідь: 0,25.

(373) Для встановлення взаємозв'язку між періодом та амплітудою зручно скористатися методом масштабування. Так як сила пропорційна кубу зміщення, то повна енергія системи має вигляд:

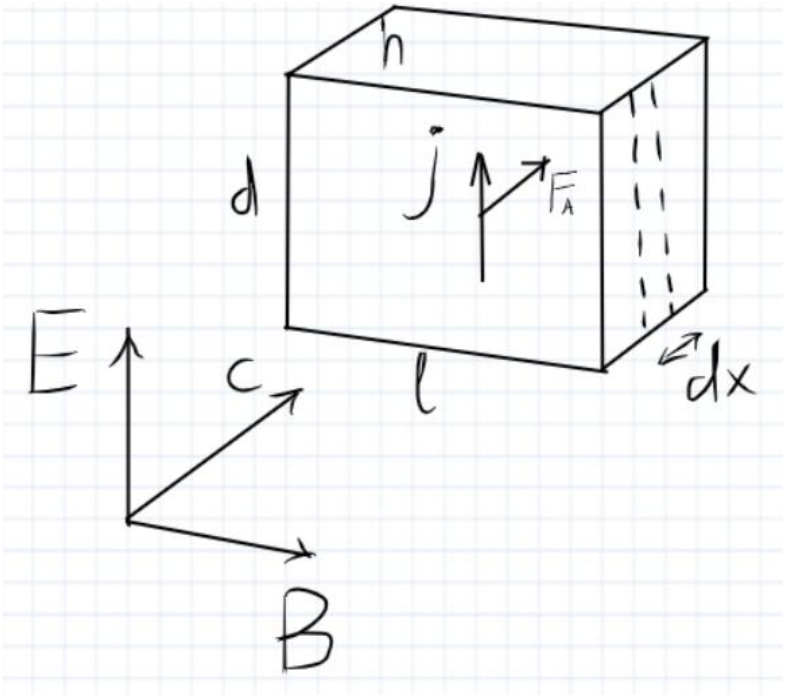
$$W = kx^4 + \text{MV}^2$$

Якщо змінити масштаб відстані у α, а масштаб часу у β разів, то вираз енергії прийме свій звичний вигляд за умови, що α=1/ β. Відповідь: T/2.

(374) В задачі мова йде про так звані ваги Роберваля. Ця модель активно використовується для виробництва побутових механічних вагів. Вони є зручними тим, що абсолютно не важливо в яку точку шальок класти предмет, який ви хочете зважити. Правильна відповідь для даної задачі: на ліву шальку треба покласти предмет масою 6 кг, рівно стільки ж, скільки знаходиться і на правій. Те, що така система перебуватиме за даних умов у рівновазі можна довести за допомогою методу віртуальних переміщень, врахувавши, що з геометричних міркувань при зміщеннях системи зміна висоти для обох шальок є однаковою за модулем. Відповідь: 6 кг.

(375) Цю задачу можна розв'язувати багатьма способами. Найпростіший – застосувати 3 закон Кеплера, який пов'язує характерні часи системи (не дивлячись на те, що ми маємо тут відштовхування, а не притягання, закони, які описують рух зарядів, є дуже за формою на закони руху небесних тіл) та характерні відстані: $\frac{{T_1}^2}{{a_1}^3} = \frac{{T_2}^2}{{a_2}^3}$. Іншим варіантом є метод масштабування. Третій варіант розв'язку полягає у тому, що ми знаємо, що всі характерні відстані зростають в чотири рази. Із закону збереження енергії просто отримати, що всі середні швидкості на подібних інтервалах зменшуються в 2 рази. В результаті, при діленні характерних відстаней на характерні швидкості отримуємо, що час зросте у 8 разів. Відповідь: 8 с.

(376) 1. «Хвильовий тиск». Розглянемо фрагмент пластинки зі сторонами l та d.



Електрична компонента електромагнітної хвилі викликає пластині появу вертикального струму із густиною:

$$j(t) = \frac{E(t)}{\rho_{\text{ел}}}$$

Знайдемо струм в пластинці на відстані x від поверхні. Площа поперечного перерізу для такого струму l*dx. Тоді струм:

$$dI(t) = j(t)\text{ldx} = \frac{E(t)}{\rho_{\text{ел}}}\text{ldx}$$

З боку магнітного поля електромагнітної хвилі на цей струм діє сила Ампера:

$$dF_A = dI(t)B(t)d$$

Електромагнітна хвиля є бігучою, отже:

$$dF_A(t) = \frac{Esin(\omega t - kx)}{\rho_{ел}} Bsin(\omega t - kx) d * l * dx = \frac{EBsin^2(\omega t - kx)}{\rho_{ел}} Sdx$$

Тут S=d*l – площа фрагменту пластинки, на яку падає електромагнітна хвиля.

Тоді повний тиск на всю пластинку дорівнює:

$$p = \frac{1}{S}\int_0^h dF_A(t) = \frac{EB}{\rho_{ел}}\int_0^h sin^2(\omega t - kx)dx = \frac{EBh}{2\rho_{ел}}.$$

2. Під час руху стрілки у зовнішньому магнітному полі кожна її маленька ділянка стає джерелом електричного струму.

Розглянемо нескінченно малу ділянку стрілки, яка обертається з деяким періодом τ довжиною dx на відстані x від центру циферблата:

ЕРС, яка виникає у цій ділянці: $d\varepsilon = Bv_x dx \sin 90°$.

Швидкість цієї ділянки: $v_x = \frac{2\pi x}{\tau}$.

$$d\varepsilon = \frac{2\pi Bxdx}{\tau}.$$

Загальну ЕРС, яка виникає у всій стрілці, можна знайти декількома способами:

1) швидкість частин стрілки зростає лінійно при збільшенні відстані від центру циферблата.

Тоді можна використовувати середнє значення величини ЕРС

$$\varepsilon = \frac{\frac{2\pi Bl^2}{\tau} - 0}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi Bl^2}{\tau}}.$$

2) побудуємо залежність величини $\frac{2\pi Bx}{T}$ від відстані від центру циферблата x. Площа фігури під цим графіком має фізичний сенс ЕРС, яка виникає у всій хвилинній стрілці:

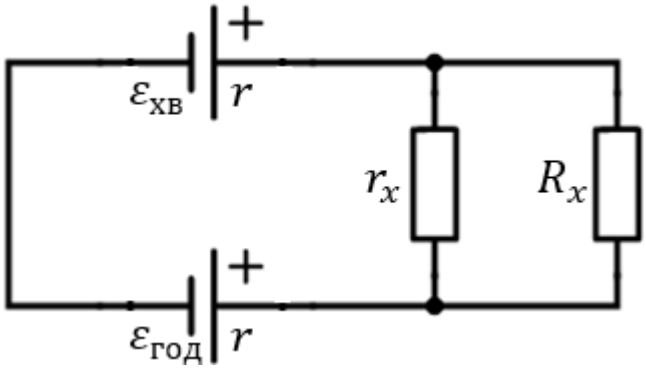


$$\varepsilon = S_{фіг} = \frac{2\pi Bl^2}{2\tau} = \boldsymbol{\frac{\pi Bl^2}{\tau}}.$$

3) сумарна ЕРС визначається за правилами додавання (інтегрування):

$$\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} d\varepsilon = \int_0^l \frac{2\pi Bxdx}{\tau} = \frac{2\pi B}{\tau}\int_0^l xdx = \frac{2\pi B}{\tau}\left(\frac{l^2}{2} - 0\right) = \boldsymbol{\frac{\pi Bl^2}{\tau}}.$$

У довільний момент часу t еквівалентне електричне коло має вигляд як на рисунку, де $r = \lambda l$ – опір стрілок; $r_x = \lambda l_x$ – опір ділянки обода між стрілками;
$R_x = \lambda(2\pi l - l_x)$ – опір зовнішньої ділянки обода.



$$l_x = \left(\frac{2\pi l}{\frac{T}{12}} - \frac{2\pi l}{T}\right)t = \frac{22\pi lt}{T},$$

де $T = 12$ год – період обертання годинної стрілки.

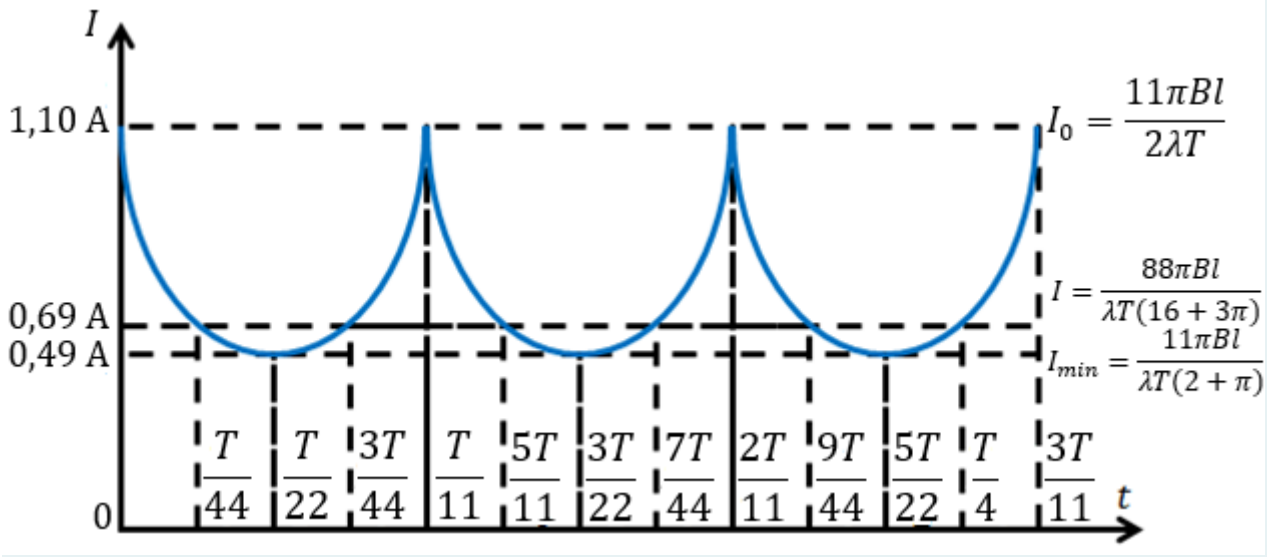
За законом Ома для повного кола:

$$I = \frac{\varepsilon_{\text{хв}} - \varepsilon_{\text{год}}}{\frac{r_x R_x}{r_x + R_x} + 2r}.$$

$$I = \frac{11\pi Bl^2}{T\left(\frac{\lambda l_x \lambda(2\pi l - l_x)}{2\pi l \lambda} + 2\lambda l\right)} = \boxed{\frac{\boldsymbol{11\pi Bl}}{\boldsymbol{2\lambda T\left(1 + \frac{11\pi t}{T} - 121\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2\right)}}}.$$

Ця функція визначає залежність сили струму у хвилинній стрілці від часу.
Графік даної функції

- при $t \in \left[0; \frac{T}{22}\right]$ має вигляд квадратичної гіперболи;
- при $t \in \left[\frac{T}{22}; \frac{T}{11}\right]$ є симетричним відтворенням попередньої гілки;
- а надалі періодично повторюється.



Максимальне значення струму чисельно дорівнює

$$\boldsymbol{I_0 = \frac{11\pi Bl}{2\rho T} = \frac{11 * 3,14 * 480 * 10^{-3} * 9 * 10^{-2}}{2 * 1,57 * 10^{-5} * 12 * 3600} = 1,10}\ \text{А}$$

З урахуванням того, що лампочка починає світитися лише за сили струму, більшій за 0,9 А, то протягом часу, доки годинна і хвилинна стрілки не співпадуть знову, лампочка світиться на початку свого руху, після чого гасне, а потім запалюється під кінець періоду. Моменти часу, коли лампочка гасне чи запалюється визначимо, підставивши числові значення у функцію залежності струму від часу:

$$0,9 = \frac{1,1}{1 + \frac{11\pi t}{T} - 121\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2}$$

Після математичних перетворень отримаємо квадратне рівняння:

$$\frac{0,9}{\pi}\left(\frac{11\pi t}{T}\right)^2 - 0,9\left(\frac{11\pi t}{T}\right) + 0,2 = 0$$

Звідки

$$\frac{11\pi t}{T} = \frac{0,9 \pm \sqrt{0,9^2 - 0,8 * \frac{0,9}{\pi}}}{2 * \frac{0,9}{\pi}} = \frac{\pi\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{0,8}{0,9\pi}}\right)}{2},$$

Звідки

$$\boxed{t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{0,8}{0,9\pi}}}{22} T}$$

Перший момент часу, коли лампочка гасне:

$$t_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{0,8}{0,9 * 3,14}}}{22} * 12 * 3600 = 301 \text{ с.}$$

Отже, протягом доби лампочка світиться протягом

$$\Delta t = 44 t_1 = 13244 \text{ с.}$$

Відповідь:

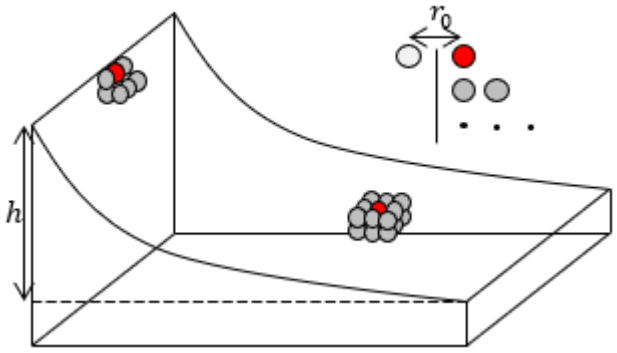
$$\boxed{I = \frac{11\pi Bl}{2\lambda T\left(1 + \frac{11\pi t}{T} - 121\pi\left(\frac{t}{T}\right)^2\right)}}$$

$$\boxed{\Delta t = 13244 \text{ с} = 220 \text{ хв } 44 \text{ сек} = 3 \text{ год } 40 \text{ хв } 44 \text{ сек}}$$

3. «Вгору по стінці».

За умовою, взаємодія атому рідини зі стінкою набагато більша за значенням, ніж енергія її взаємодії з іншими атомами рідини. Тому атоми рідини, що «відчули» притягання до атомів стіни, починають стрімко підійматися вгору вздовж стінки. Під час цього процесу шар рідини у стіни буде зменшуватися з висотою. Максимальною, можна вважати висоту, до якої досягне хоча б одна молекула як показано на рисунку. Нехай наша посудина має нескінченно високі стінки, що дозволить досягнути такого ефекту.

Так як поверхня рідини у стані рівноваги еквіпотенційна, то напишемо закон збереження енергії для атому рідини, обравши за нульовий рівень потенціальної енергії сили тяжіння ту частину, де поверхня рідини практично горизонтальна:



$$W_1 = W_2$$

$$W_1 = W_{\text{з водою}_1}$$

$$W_2 = W_{\text{зі стінкою}} + W_{\text{з водою}_2} + mgh$$

$$\left(\frac{a}{{r_0}^{12}} - \frac{b}{{r_0}^6}\right) + (W_{\text{з водою}_2} - W_{\text{з водою}_1}) + mgh = 0$$

Не зважаючи на те, що у першому положенні атом беспосередньо взамодіє з 17 атомами рідини (за умови кубічної гратки), а у другому з 9, цією енергією можна знехтувати у порівнянні з енергією взаємодії атома рідини з атомами стіни: $W_{\text{з водою}_2} - W_{\text{з водою}_1} \approx 0$

Тоді отримуємо у стані рівноваги: $\left(\frac{a}{{r_0}^{12}} - \frac{b}{{r_0}^6}\right) + mgh = 0,$

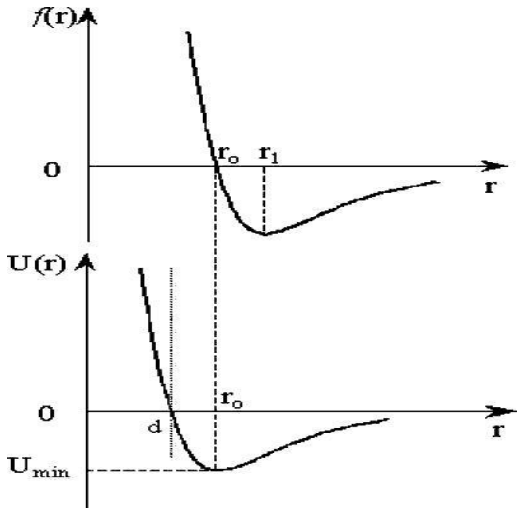
де r_0 – це середня відстань між атомами стіни та рідині, що досягли найвищщої висости, підіймаючись угору.

Значення r_0 можна оцінити з тих міркувань, що у положенні рівноваги, де рівнодійна сил міжатомного притягання та відштовхування дорівнює нулю, спосткрігається потенційна «яма». Візьмемо похідну від виразу енергії:

$$F = U' = 0$$

$$-\frac{12}{{r_0}^{13}} + \frac{6b}{{r_0}^{7}} = 0$$

$$\boxed{r_0 = \sqrt[6]{\frac{2a}{b}}}$$



Враховуючи це, закон збереження енергії дає наступне значення максимальної висоти.

$$\frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + mgh = 0$$

$$\boxed{h = \frac{b^2}{4mga}} = 3.8\text{м}$$

Для знаходження висоти підняття рідини скористуємося законом Ньютона для частини рідини, рівень якої вище за рівень горизонтальної поверхі рідини, вважаючи змочування повним.

$$\sigma \cdot \Delta L = \rho \cdot g \frac{h^2}{2} \Delta L.$$

Це дасть нам наступний вираз та оціночне значення коеффіцієнту поверхневого натягу для густини води:

$$\sigma = \rho \cdot g \frac{h^2}{2} = 71 \text{ кН/м}.$$

Як бачимо, це значення суттєво перевищує порядок табличних значеннь коеффіцієнтів. Це підтверджує, що для рідин, для молекул яких сила притягання до стіни значно більша за сили притягання однієї до іншої, «працює» зовсім інша модель повединки рідини. Існує велика кількість факторів, що впливає на здійсненність такого явища, найбільш суттєвим з яких на наш погляд є значне зростання в'язкості рідини та великий вплив випаровування, яким ми при розв'язанні знехтували.

(377) 1. При переході між зонами з різним потенціалом електрони змінюють свою швидкість. Отже, в даній задачі потік електронів можна розглядати як світловий промінь, що падає на плоскопаралельну пластину з коефіцієнтом заломлення, відмінним від оточуючого середовища.

За законом збереження енергії знайдемо швидкість електронів в зоні з потенціалом φ_2:

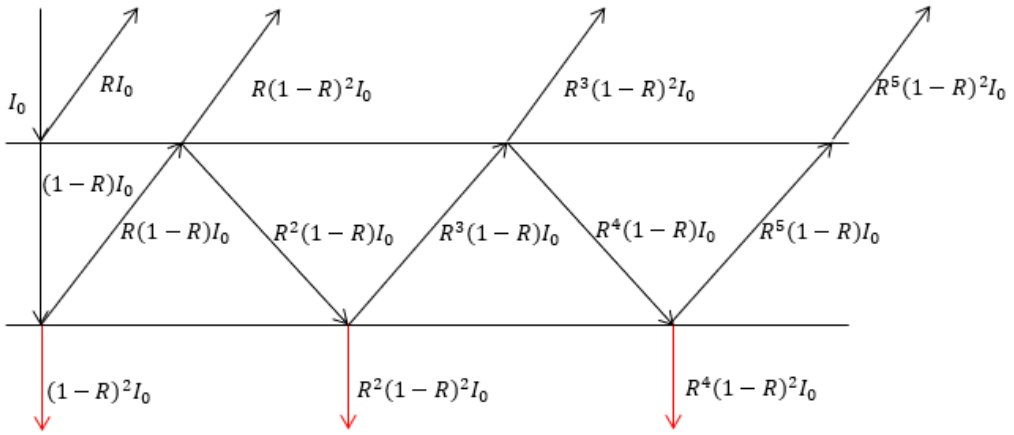
$$-q_e\varphi_1 + \frac{m{V_1}^2}{2} = -q_e\varphi_2 + \frac{m{V_2}^2}{2}$$

$$V_2 = \sqrt{{V_1}^2 - q_e(\varphi_1 - \varphi_2)} < V_1$$

Застосуємо оптичну аналогію, знайшовши відносний коефіцієнт заломлення зони з потенціалом φ_2 відносно зони з φ_1: $n = \frac{V_1}{V_2}$.

Звідси коефіцієнт відбиття $R = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$

При проходженні електронів крізь зону з потенціалом φ_2 пучок електронів буде багаторазово розділятись і буде відбуватись безкінечне відбиття та проходження частини пучку падаючих електронів як це зображено нижче на рисунку:



Додамо всі пучки, які проходять крізь зону з потенціалом φ_2 та скористаємось формулою для суми геометричної прогресії:

$$\sum I = (1-R)^2I_0 + R^2(1-R)^2I_0 + R^4(1-R)^2I_0 + \cdots = \frac{(1-R)^2}{1-R^2}I_0 = I_0\frac{0.96^2}{1-16*10^{-4}}$$
$$= 0.923\ I_0$$

$\frac{I}{I_0} = 92.3\%$ - отримуємо кількість електронів що пройде крізь плоскопаралельну зону.

2. За квантовою теорією частинки, які мають масу можуть розглядатись як хвилі. Отже, необхідно знайти довжину хвилі, яка відповідає поведінці пучків електронів. Знайдемо швидкість електронів, які розігнані потенціалом U з закону зміни енергії:

$$\frac{mV^2}{2} = q_eU,$$

$$V = \sqrt{\frac{2q_eU}{m}},$$

Імпульс цих електронів: $p = \sqrt{2meU}$.

Співвідношення, яке пов'язує довжину хвилі частинок, які мають масу, та їх імпульси, описується гіпотезою де Бройля. Виведемо його зі співвідношення між енергією кванта та його імпульсом, яке постулюємо таким самим як і для фотона:

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = pc$$

Звідси: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} = \frac{6.63*10^{-34}}{\sqrt{2*9{,}1*10^{-31}*16*10^{-20}*150}}$ м $= 10^{-10}$м

$$\frac{\lambda_{\text{опт}}}{\lambda_{\text{електр}}} = \frac{500*10^{-9}}{10^{-10}} = 5000$$

3. Напруги, що прискорюють електрони, при яких спостерігаються максимуми та мінімуми на графіку залежності струму в системі є меншими ніж потенціали збудження атомів, які

фігурують в аналогах дослідів Франка і Герца (особливо явно це проявляється для так званих благородних газів), де відбувались непружні удари електронів з атомами через наявність у атоми внутрішньої структури (квантових рівнів). Отже, причини наявності максимумів та мінімумів на графіку є іншими. В реальності при малих напругах максимуми та мінімуми спостерігаються на графіку через явище інтерференції електронів на атомі (аналог просвітленої оптики). Це явище має назву ефекта Рамзауера.

Якщо ми знаємо напруги, при яких відбувається підсилення або послаблення потоку електронів через газ, то записуючи умови максимумів та мінімумів проходження електронів як хвиль крізь атом (який, для спрощення, ми розглядаємо у вигляді плоскопаралельної пластинки із потенціалом, відмінним від навколишнього нульового) можна отримати оціночні значення розміру атома та середнього потенціалу всередині нього.

Знайдемо спочатку коефіцієнти заломлення в атомі для електронної хвилі.

За Законом Збереження Енергії: $eU = -e\varphi_A + \frac{mV^2}{2}$

$$V = \sqrt{\frac{2eU}{m}(U+\varphi_A)}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$n = \frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{(U+\varphi_A)}{U}}$$

$$n_1 = \frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{(U_1+\varphi_A)}{U_1}}$$

$$n_2 = \frac{V}{V_0} = \sqrt{\frac{(U_2+\varphi_A)}{U_2}}$$

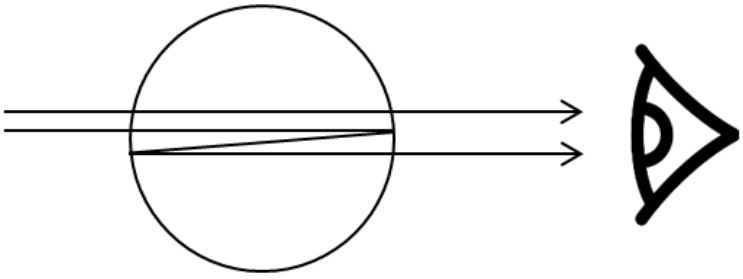
Довжина хвилі електронів у міжатомному просторі після прискорення певним потенціалом U (див. попередній пункт 2):

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

Знайдемо умови максимуму та мінімуму на графіку через умови на оптичні різниці ходу:

$\Delta = 2dn_1 = 2k\frac{\lambda_1}{2}$ - максимум

$2dn_2 = (2k+1)\frac{\lambda_2}{2}$ – мінімум



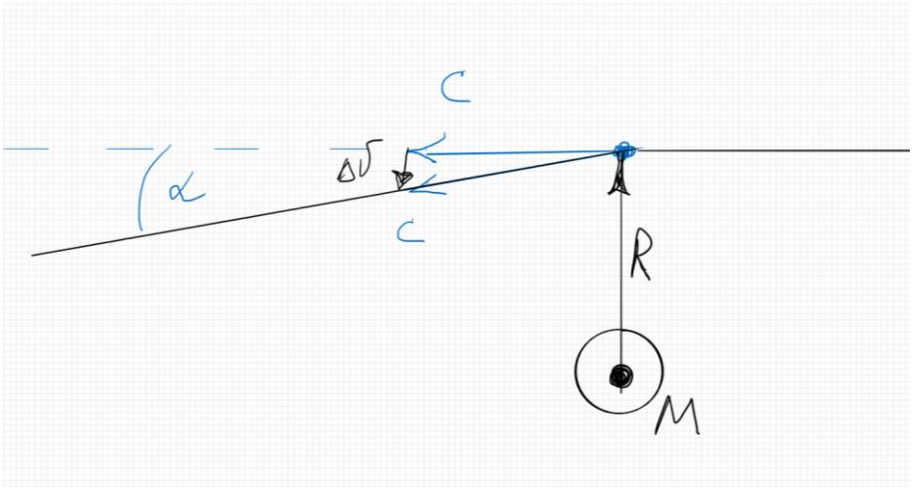
Запишемо рівняння для першого максимуму та першого мінімуму (за умовою задачі k для максимуму = 1; k для мінімуму = 1):

$$\begin{cases} 2d\sqrt{U_1+\varphi_A} = \dfrac{hk}{\sqrt{2me}} = \dfrac{h}{\sqrt{2me}} \\ 2d\sqrt{U_2+\varphi_A} = \dfrac{h(2k+1)}{2\sqrt{2me}} = \dfrac{3h}{2\sqrt{2me}} \end{cases}$$

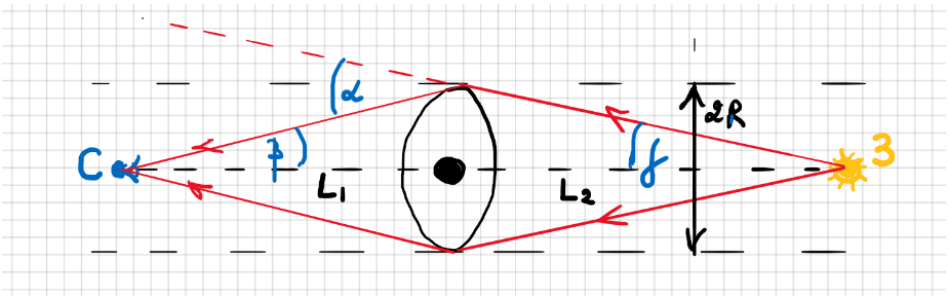
Розв'язуючи систему, отримуємо: $\varphi_A = \frac{9U_1-4U_2}{5} = 1.46$ В

$$d = \frac{h\sqrt{5}}{\sqrt{32me(U_2-U_1)}} \approx 3.8 * 10^{-10}\text{м}$$

(378) 1. Наведемо можливий варіант розв'язання. Поблизу зорі фотон набуває прискорення: $\alpha = \frac{GM}{R^2}$. Внаслідок чого швидкість змінюється за напрямком і її приріст за оціночний час R/c можна оцінити як: $\Delta\upsilon = \frac{GM}{R^2} \cdot \frac{R}{c}$. Тому кут зміни напряму фотону: $\alpha \sim \frac{GM}{R \cdot c^2} \rightarrow \alpha \sim \frac{4GM}{R \cdot c^2}$.



2. Внаслідок симетрії бачимо, що для спостерігача зображення зорі має вигляд кільця. Знайдемо, наприклад, його кутовий радіус β як $\beta = \frac{R}{L_1}$. Як бачимо, β=α-γ, де $\beta = \frac{R}{L_2}$.

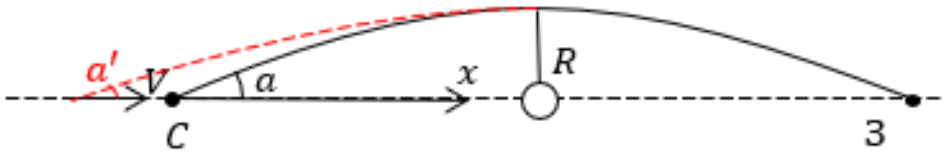


Враховуючи це та результат попереднього пункту:

$$R\left(\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_2}\right) = \frac{4GM}{R \cdot c^2} \rightarrow R^2 = \frac{4GML_1L_2}{c^2(L_1+L_2)}$$

$$\beta = \frac{R}{L_1} = \sqrt{\frac{4GML_2}{c^2L_1(L_1+L_2)}}$$

3. а) Застосуємо релятивістський закон додавання швидкостей:



$$U_x = \frac{U_x + V}{1 + \frac{U_x{}'V}{c^2}} \Rightarrow U_x{}' = \frac{U_x - V}{1 - \frac{U_x V}{c^2}}$$

$U_x, U_x{}'$
– це проекції швидкості тіла на напрямок руху спостерігача у двох різних системах відліку.

V – швидкість спостерігача.

Зрозуміло, що $\mathrm{U_x} = -\mathrm{c}\cos\mathrm{a}\,, \mathrm{U_x}' = -\mathrm{c}\cos\mathrm{a}' \Longrightarrow -\cos\mathrm{a}' = \frac{-\cos\mathrm{a}-\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}}{1+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}\cos\mathrm{a}} \Longrightarrow \boxed{\cos\mathrm{a}' = \frac{\cos\mathrm{a}+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}}{1+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}\cos\mathrm{a}}}$

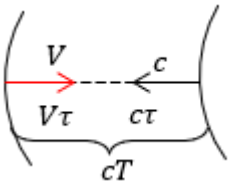
Як бачимо, кути дуже малі, тому застосуємо наближені формули розрахунку косинуса:

$$1 - \frac{a'^2}{2} = \frac{c\cos a + V}{c + V\cos a} = \frac{c - c\frac{a^2}{2} + V}{c + V - V\frac{a^2}{2}}$$

$$a' = \sqrt{\frac{c - V}{c + V}}\,\mathrm{a}$$

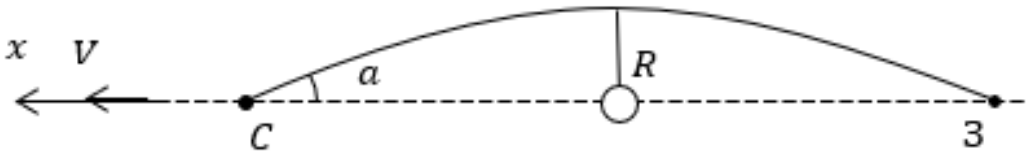
За умовою $\mathrm{V} = \frac{\mathrm{c}}{2} \Longrightarrow \mathrm{a}' = \frac{\varphi}{\sqrt{3}}\mathrm{M} \approx 1''$.

б) Розглянемо, як буде змінюватися довжина хвилі внаслідок руху приймача назустріч світловим променям (ефект Доплера).



Нехай, Т-період хвилі у системі відліку, в якій спостерігач нерухомий

$(V + c)\tau = cT$



$$\tau = \frac{\mathrm{T}}{1 + \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}}$$

τ- інтервал часу між отриманням сигналу рухомим спостерігачем з точки зору нерухомого

$\mathrm{T}' = \tau'$- цей інтервал у системі відліку «рухомий спостерігач».

$$T' = \tau' = \tau\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{V}}{c}\right)^2} = \frac{T}{1+\frac{\mathrm{V}}{c}}\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{V}}{c}\right)^2} = T\sqrt{\frac{1-\frac{\mathrm{V}}{c}}{1+\frac{\mathrm{V}}{c}}} \Longrightarrow \nu' = \nu\sqrt{\frac{1+\frac{\mathrm{V}}{c}}{1-\frac{\mathrm{V}}{c}}}$$

Тоді, $\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\nu}{\nu'} = \sqrt{\frac{1-\frac{\mathrm{V}}{c}}{1+\frac{\mathrm{V}}{c}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

в) Розглянемо випадок з віддаленням спостерігача.

$$U_x = \frac{U_x - V}{1-\frac{U_x{}'V}{c^2}}$$

Зрозуміло, що $\mathrm{U_x} = \mathrm{c}\cos\mathrm{a}\,, \mathrm{U_x}' = \mathrm{c}\cos\mathrm{a}' \Longrightarrow \boxed{\cos\mathrm{a}' = \frac{\cos\mathrm{a}-\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}}{1-\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}\cos\mathrm{a}}}$

Нехай, $\mathrm{V} \to \mathrm{c}$, тоді, $\cos\mathrm{a}' = \frac{\cos\mathrm{a}-1}{1-\cos\mathrm{a}} = -1$

Тобто зображення зорі виявляється попереду спостерігача і поступово стискається у точку.

С точки зору довжини хвилі, то наближується до дуже великих значень:

$$\lambda' = \lambda\sqrt{\frac{1+\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}}{1-\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{c}}}}.$$

Переможці Інтернет-олімпіади

2020-2021

9 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Богдан Марина	Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради	1
Гамов Олексій	Харківський навчально-виховний комплекс № 45 «Академічна гімназія» Харківської міської ради Харківської області	2
Зазубик Діана	Ліцей № 5 Івано-Франківської міської ради	2
Нескоромна Діана	Комунальний заклад «Харківський фізико-математичний ліцей № 27 Харківської міської ради Харківської області»	3
Лук'янов Ігор	Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка	3
Палант Едуард	Комунальний заклад «Харківський фізико-математичний ліцей № 27 Харківської міської ради Харківської області»	3

10 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Никифорчин Андрій	Українська гімназія № 1 Івано-Франківської міської ради	1
Трегубенко Борис	Києво-Печерський ліцей № 171 «ЛІДЕР» Печерського району м. Києва	2
Лазоренко Олександр	Природничо-науковий ліцей № 145 Печерського району м. Києва	3
Желябовський Дем'ян	Приватна організація «Заклад освіти І-ІІІ ступеня: початкова школа, гімназія, ліцей: «Науково-дослідницька школа «Базис»»	3

11 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Кузьма Володимир	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	1
Забільський Данііл	Комунальний заклад «Маріупольський міський ліцей Маріупольської міської ради Донецької області»	2
Кузнєцов Макар	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Моргай Ангеліна	Комунальний заклад «Маріупольський міський ліцей Маріупольської міської ради Донецької області»	3
Сараєв Артем	Комунальний заклад «Харківський фізико-математичний ліцей № 27 Харківської міської ради Харківської області»	3
Ждан Артур	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Уланов Віктор	Комунальний заклад освіти «Дніпровський ліцей інформаційних технологій при Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара» Дніпровської міської ради	3

2021-2022

9 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Балашов Іван	Комунальний заклад освіти «Дніпровський ліцей інформаційних технологій при Дніпровському національному університеті імені Олеся Гончара» Дніпровської міської ради	1
Топал Артур	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Фітьо Юрій	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Потапов Данило	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Садовий Данило	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Похваленко Велимир	Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради	3
Компанець Олександра	Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради	3

10 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Зазубик Діана	Ліцей №5 Івано-Франківської міської ради	1
Гамов Олексій	Харківський навчально-виховний комплекс №45 «Академічна гімназія» Харківської міської ради	2
Палант Едуард	Комунальний заклад «Харківський фізико-математичний ліцей №27 Харківської міської ради Харківської області»	2
Лук'яніхін Віктор	Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка	3
Суворов Петро	Український фізико-математичний ліцей Київського національного університету імені Тараса Шевченка	3
Білоус Альберт	Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради	3
Нескоромна Діана	Комунальний заклад «Харківський фізико-математичний ліцей №27 Харківської міської ради Харківської області»	3

11 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Богдан Марина	Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради	1
Голоднік Володимир	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Никифорчин Андрій	Ліцей ім. Миколи Сабата Івано-Франківської міської ради	3
Лазоренко Олександр	Природничо-науковий ліцей № 145 Печерського району м. Києва	3

2022-2023

9 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Тхор Милослава	Природничо-науковий ліцей № 145 Печерського району м. Києва	1
Островський Володимир	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Мінтенко Дмитро	Чернівецький ліцей №3 медичного профілю Чернівецької міської ради	2
Федірко Олесь	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	3
Чабан Світозар	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Глова Маркіян	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Лавренюк Святослав	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	3
Шут Андрій	ЗОШ №3 І-ІІІ ступенів імені В.О.Нижниченка Горішньоплавнівської міської ради Кременчуцького району Полтавської області	3
Малафеєв Всеволод	Харківський навчально-виховний комплекс №45 "Академічна гімназія" Харківської міської ради Харківської області	3

10 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Павук Максим	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	1
Назаревич Кирило	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Потапов Данило	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Жаріхін Ігнат	Харківський навчально-виховний комплекс №45 "Академічна гімназія" Харківської міської ради Харківської області	2
Власенко Владислав	Київський природничо-науковий ліцей №145 Печерського району м. Києва	3
Бізюкова Ірина	Комунальний заклад «Харківський науковий ліцей-інтернат "Обдарованість"»	3
Компанець Олександра	Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради	3
Жилочкін Вадим	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Заболотна Анастасія	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3

Фітьо Юрій	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3

11 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Богдан Марина	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	1
Зазубик Діана	Ліцей №5 Івано-Франківської міської ради	2
Білоус Альберт	Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради	2
Суворов Петро	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	3
Палант Едуард	Харківський фізико-математичний ліцей № 27 Харківської міської ради Харківської області	3
Кондрачук Ярослав	Київський природничо-науковий ліцей №145 Печерського району м. Києва	3
Гамов Олексій	Харківський навчально-виховний комплекс №45 "Академічна гімназія" Харківської міської ради Харківської області	3

2023-2024

9 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Лавренюк Святослав	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	1
Вращук Назарій	«Рішельєвський науковий ліцей» Одеської міської ради	2
Курницький Олег	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Рубцов Михаїл	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	2
Ніколенко Микола	Дніпровський науковий ліцей інформаційних технологій Дніпровської міської ради	3
Федоров Денис	Комунальний заклад «Харківський науковий ліцей-інтернат "Обдарованість"»	3
Сачко Артем	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	3
Сивак Юлія	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Федоскіна Соф'я	Комунальний заклад Харківський ліцей №161 «Імпульс» Харківської міської ради	3

10 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Островський Володимир	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	1
Мінтенко Дмитро	Чернівецький ліцей №3 медичного профілю Чернівецької міської ради	1

Тхор Милослава	Природничо-науковий ліцей №145 міста Києва	2
Федірко Олесь	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	2
Загіка Андрій	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	2
Огородник Богдан	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Чабан Світозар	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Ковальчук Артем	Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради	3
Глова Маркіян	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Приймак Данило	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Малафеєв Всеволод	Харківський навчально-виховний комплекс №45 "Академічна гімназія" Харківської міської ради Харківської області	3
Беженар Святослав	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	3

11 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Прасолов Олександр	Чорноморський академічний ліцей імені Тараса Шевченка Чорноморської міської ради Одеського району Одеської області	1
Ілинич Назарій	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	1
Абдулханов Амір	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	2
Колодчак Богдан	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Ткачук Владислав	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Власенко Владислав	Київський природничо-науковий ліцей №145 Печерського району м. Києва	2
Любімова Марина	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	2
Фітьо Юрій	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Вершинін Іван	Херсонський фізико-технічний ліцей Херсонської міської ради	3
Заболотна Анастасія	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Назаревич Кирило	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3

Потапов Данило	Львівський фізико-математичний ліцейінтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Павук Максим	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Плєвакін Микола	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	3
Стаднійчук Тимофій	Київський природничо-науковий ліцей №145 Печерського району м. Києва	3

2024-2025

9 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Юштіна Марія	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	1
Соломка Ростислав	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	1
Журба Михайло	Природничо-науковий ліцей №145 міста Києва	2
Мусієнко Владислав	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	2
Петрунів Ростислав	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Борзій Вікторія	Комунальний заклад Харківський ліцей №161 «Імпульс» Харківської міської ради	2
Партика Лінда	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Костянтин Комунальний	«Рішельєвський науковий ліцей» Одеської міської ради	3
Крапивін Артем	Миколаївський ліцей імені професора М. Александрова Миколаївської міської ради	3
Роїк Христина	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Сафонов Гліб	Приватний заклад освіти ліцей «Школа Базис» міста Києва	3
Урсул Поліна	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	3

10 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Рубцов Михаїл	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	1
Возний Микита	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	1
Лавренюк Святослав	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	1
Зембович Дарина	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	2

Сачко Артем	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	2
Козій Василь	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Курницький Олег	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	2
Волошин Микола	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	3
Грабовий Лев	Черкаська загальноосвітня школи І-ІІІ ступенів № 26 ім. І.Ф. Момота Черкаської міської ради	3
Дугіна Юстина	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Гладкий Іван	Ліцей №1 імені Володимира Красицького Хмельницької міської ради	3
Загородній Максим	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Ніколенко Микола	Дніпровський науковий ліцей інформаційних технологій Дніпровської міської ради	3

11 клас

Прізвище, ім'я	Навчальний заклад	Диплом
Островський Володимир	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	1
Федірко Олесь	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	2
Тхор Милослава	Природничо-науковий ліцей №145 міста Києва	2
Вращук Назарій	«Рішельєвський науковий ліцей» Одеської міської ради	2
Жупинський Гліб	«Харківський ліцей №1» Харківської міської ради	2
Липницький Владислав	Русанівський ліцей міста Києва	3
Ковальчук Артем	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	3
Держипольський Ярослав	Український фізико-математичний ліцей при КНУ ім. Т.Г.Шевченка	3
Огородник Богдан	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3
Загіка Андрій	Українського фізико-математичного ліцею КНУ імені Тараса Шевченка	3
Покора Роман	Львівський фізико-математичний ліцей-інтернат при Львівському національному університеті імені Івана Франка	3

Навчальне видання

ПАШКО Максим,

ОРЛЯНСЬКИЙ Олег,

ГЕЛЬФГАТ Ілля та ін.

Збірник задач

Всеукраїнських учнівських

Інтернет-олімпіад з фізики

та «Фізичного марафону»

2020-2025

Навчально-методичний посібник

Друк офсетний

Формат замовлення 100*700/18

Наклад 200шт

Видавець ФОП Вольф І.Є.
Свідоцтво про внесення суб'єкта господарювання
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції ДК №8225 від 27.11.2024 р.
03040, м. Київ, вул. Васильківська, буд.6, кв.106