Видавництво Генеза

О.С. ІСТЕР, О.В. ЄРГІНА

ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ

Геометрія

10

О.С. ІСТЕР, О.В. ЄРГІНА

ГЕОМЕТРІЯ

(ПРОФІЛЬНИЙ РІВЕНЬ)

Підручник для **10** класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Київ
«Генеза»
2018

УДК 514(075.3)
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Наказ Міністерства освіти і науки України
від 31.05.2018 № 551)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Істер О.С.
І-89 Геометрія: (профіл. рівень) : підруч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти / О.С. Істер, О.В. Єргіна. — Київ : Генеза, 2018. — 368 с. : іл.
ISBN 978-966-11-0225-4.
УДК 512(075.3)

ISBN 978-966-11-0225-4

Шановні десятикласниці та десятикласники!

У попередніх класах ви вивчали планіметрію – геометрію на площині. Починаючи з 10-го класу, вивчатимете геометрію у просторі. Її називають *стереометрією*.

Підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам оволодіти такою системою знань з геометрії та набути тих компетентностей, які будуть потрібні не тільки в повсякденному житті, а й у майбутній трудовій діяльності та яких буде достатньо для продовження навчання у вищих навчальних закладах.

Для зручності матеріал підручника структуровано за допомогою розділів, параграфів, рубрик. Кожен параграф містить теоретичний матеріал, зразки розв’язування задач і вправ, запитання до теоретичного матеріалу, завдання для класної і домашньої робіт, проектної діяльності, графічні роботи тощо.

Вивчення геометрії потребує наполегливості, логіки мислення, просторової уяви. Тому теоретичний матеріал підручника авторський колектив намагався викласти простою, доступної мовою, проілюструвати малюнками та прикладами з повсякденного життя.

У підручнику є умовні позначення:

– треба запам’ятати; – запитання до параграфів;

– «ключова» задача (задача, висновки якої використовують для розв’язування інших задач);

– теорема; – наслідок з теореми; – доведення закінчено;

1.24 – вправа для виконання у класі;

1.25 – вправа для виконання вдома.

Усі задачі і вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня.

У кінці теоретичного матеріалу деяких параграфів ви знайдете завдання для **«Графічних робіт»**, які сприятимуть розвитку просторової уяви та допоможуть навчитися правильно відтворювати умову задачі на малюнку. Рубрика **«Розв’яжіть задачі та виконайте вправи»** містить значну кількість завдань для класної та домашньої робіт, усних вправ, завдань для проектної діяльності, що відповідають темі параграфа та допоможуть добре її опрацювати. Рубрика **«Задачі підвищеної складності»** містить завдання для поглиблення знань з геометрії та підготовки до різноманітних математичних змагань. У рубриці **«Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу»** пропонується розв'язати вправи, які допоможуть актуалізувати знання, потрібні для вивчення наступної теми. У рубриці **«Життєва математика»** зібрано задачі, які відображають реальні життєві ситуації, пов'язані з економічною грамотністю і підприємливістю, екологічною безпекою, здоровим способом життя, громадянською відповідальністю, тобто усім тим, без чого неможливо уявити людину в повсякденному житті. Рубрика **«Цікаві задачі для учнів неледачих»** містить задачі, які зазвичай називають нестандартними, задачі математичних олімпіад різних країн світу, задачі, які сформулювали видатні математики, тощо. Наприкінці кожного параграфа в рубриці **«Перевірте свою компетентність»** ви знайдете тестові завдання, завдяки яким зможете повторити геометрію, перевірити рівень своєї готовності до складання зовнішнього незалежного оцінювання.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, якщо виконаєте завдання **«Домашньої самостійної роботи»** та **«Завдання для перевірки знань»**. У кінці кожного розділу наведено вправи для його повторення.

Підручник містить багато цікавих фактів з історії становлення і розвитку геометрії, життєвого шляху українських математиків, що долучилися до творення шкільного курсу геометрії та олімпіадного руху.

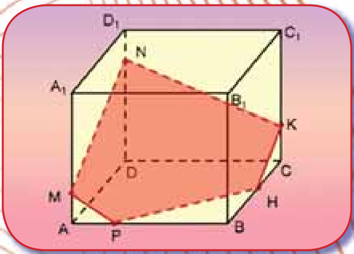
Шановні вчительки та вчителі!

Сподіваємося, що підручник суттєво допоможе вам в організації процесу навчання учнів геометрії. Авторський колектив намагався створити його таким, щоб він у повній мірі реалізував мету державної програми з математики, сприяв формуванню в учнів наукового світогляду, усвідомленню математичних знань як невід'ємної складової загальної культури людини і необхідної умови повноцінного життя в сучасному суспільстві, допоміг оволодіти системою математичних знань, навичками та вміннями, потрібними в повсякденному житті та в майбутній професійній діяльності, забезпечив розвиток логічного мислення, інтуїції, просторової уяви, алгоритмічної, інформаційної та графічної культури, формував життєві компетентності, загальнолюдські цінності особистості, виховував національну самосвідомість. Окрім традиційної структури (розділи, параграфи, рубрики), поділу навчального матеріалу на теоретичну і практичну складові, підручник містить рубрику «Життєва математика», що сприятиме реалізації наскрізних ліній програми з математики та формуватиме в учнів предметні та ключові компетентності. Диференційованість задач і вправ за чотирма рівнями складності, зміст рубрик «Цікаві задачі для учнів неледачих» і «Задачі підвищеної складності» допоможуть забезпечити особистісно-орієнтований підхід до організації процесу навчання та сприятимуть формуванню позитивної мотивації учнів до вивчення геометрії.

У підручник включено велику кількість задач і вправ, графічні роботи, завдання для проектної діяльності, а в кінці кожного розділу розміщено додаткові вправи для повторення, систематизації та узагальнення навчального матеріалу розділу.

РОЗДІЛ 1

ВСТУП ДО СТЕРЕОМЕТРІЇ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ:

- ***пригадаємо*** просторові фігури (куб, прямокутний паралелепіпед, піраміду); основні поняття та аксіоми планіметрії;
- ***дізнаємося*** про аксіоматичний метод побудови геометрії, основні поняття та аксіоми стереометрії;
- ***навчимося*** розв’язувати нескладні задачі на доведення і дослідження; побудову перерізів куба, прямокутного паралелепіпеда та піраміди.

§ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТЕРЕОМЕТРІЇ. АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ ТА НАСЛІДКИ З НИХ

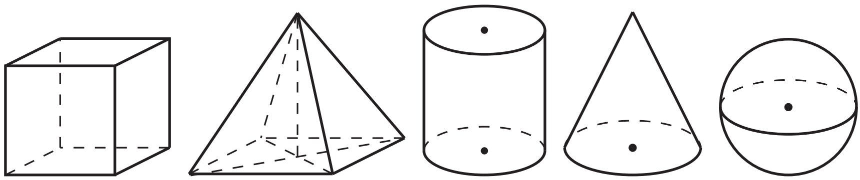
1. Предмет стереометрії

Шкільний курс геометрії складається з планіметрії і стереометрії. У курсі планіметрії 7–9 класів ви вивчали властивості плоских геометричних фігур, тобто фігур, усі точки яких лежать в одній площині (відрізок, коло, трикутник тощо).

***Стереометрія* – це розділ геометрії, який вивчає властивості геометричних фігур у просторі.**

Термін «стереометрія» походить від грец. «стереос» – просторовий, «метрео» – міряти.

У курсі математики основної школи ви вже ознайомилися з геометричними тілами – прямокутним паралелепіпедом, кубом, пірамідою, циліндром, конусом і кулею (мал. 1.1). Предмети, що нас оточують, зазвичай повторюють форму просторових фігур або їх комбінацій. Тому геометрія, зокрема стереометрія, має і прикладне (практичне) значення. Геометричні задачі доводиться розв’язувати в архітектурі та будівництві, геодезії та машинобудуванні, інших галузях науки й техніки.



Мал. 1.1

На уроках геометрії в 10–11 класах ви значно розширите та поглибите знання про геометричні фігури в просторі.

2. Аксіоматичний метод побудови геометрії

Система вивчення курсу стереометрії, як і курсу планіметрії, ґрунтується на загальному для побудови математичної теорії аксіоматичному методі. Зокрема, *аксіоматичний метод побудови геометрії* містить такі чотири етапи.

1) *На початку вводять основні (неозначувані, ще кажуть, первісні) поняття.* Вони відповідають тим геометричним об’єктам, для яких неможливо сформулювати означення, але які легко інтуїтивно уявити. Так, наприклад, у планіметрії такими поняттями є точка, пряма і відстань. При цьому в ге-

ометрії оперують й іншими загальними для математичної теорії поняттями, наприклад поняттям множини.

2) *Формулюють аксіоми, що описують основні властивості неозначуваних понять, тобто вводять систему аксіом*. Нагадаємо, що аксіоми – це твердження, які приймають без доведення. Вони описують неодноразово перевірені й підтверджені на практиці реальні властивості геометричних об'єктів, які відповідають неозначуваним поняттям, а тому зазвичай є інтуїтивно очевидними.

У математичній теорії система аксіом має бути: а) *несуперечливою*, тобто такою, щоб з неї в процесі доведення не можна було прийти до двох висновків, що суперечать один одному; б) *незалежною*, тобто такою, щоб жодна з аксіом побудованої системи не була логічним наслідком інших аксіом цієї системи; в) *повною*, тобто такою, щоб її було достатньо для доведення або спростування логічним шляхом будь-якого твердження про об'єкти цієї математичної теорії.

Систему аксіом разом з основними поняттями та основними залежностями між ними називають ***аксіоматикою***.

У шкільному курсі геометрії повною мірою реалізовано тільки першу вимогу до системи аксіом – несуперечливість. Для більшої наочності та простоти доведень математичних фактів система аксіом шкільного курсу геометрії, як правило, не є незалежною і не є повною.

Повернемося до етапів аксіоматичного методу побудови геометрії.

3) *Використовуючи неозначувані поняття, визначають інші, більш складні, поняття*. Так, наприклад, використовуючи поняття точки і прямої, дають означення відрізка та променя.

4) *Використовуючи всі введені поняття та аксіоми доводять теореми*.

Усі теореми шкільного курсу геометрії (а також інших розділів математики) доводять за допомогою строгих логічних міркувань. Жодних інших властивостей геометричних фігур, крім тих, що описано в аксіомах чи доведено раніше (навіть якщо вони здаються нам очевидними), використовувати не можна.

Аксіоматичний метод використовують не лише для побудови геометричної теорії, хоча саме в геометрії цей метод було використано вперше. Його застосовано також в арифметиці, теорії ймовірностей, теорії множин тощо. На аксіоматиці ґрунтуються і деякі розділи фізики, зокрема механіка, термодинаміка, електродинаміка тощо. Спроби ж застосувати аксіоматичний метод для побудови інших наук – етики, соціології, політекономії, біології – успіху не мали.

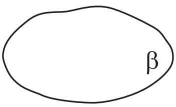
3. Основні поняття стереометрії

Основними (неозначуваними) поняттями в стереометрії є поняття *точки, прямої* і *площини*.

Нагадаємо, що уявлення про точку дає, наприклад, слід на папері від дотику добре загостреного олівця, слід на дошці від дотику крейди тощо. Позначати точки, як і раніше, будемо великими латинськими літерами A, B, C, ...

Уявлення про пряму дає промінь світла, струна на гітарі, розмітка між двома смугами прямолінійної дороги тощо. Прямі можна проводити за допомогою лінійки. При цьому отримують зображення лише частини прямої, а всю пряму уявляють нескінченною в обидва боки. Позначати прямі, як і раніше, будемо малими латинськими літерами a, b, c, d, ... або двома великими латинськими літерами за назвами двох точок цієї прямої: AB, CD, MN, ...

Мал. 1.2



Мал. 1.3

Уявлення про площину дає поверхня стола, футбольне поле, віконна шибка, стеля тощо. Площину в геометрії вважають рівною та необмеженою, вона не має краю та не має товщини. На малюнку площину прийнято зображати у вигляді паралелограма (мал. 1.2) або довільної замкненої області (мал. 1.3). При цьому отримують зображення лише частини площини. Позначати площини будемо малими грецькими літерами α (альфа), β (бета), γ (гама), ...

Інші поняття стереометрії вводять за допомогою *означень*.

4. Аксіоми стереометрії

Основні властивості найпростіших геометричних фігур формулюють за допомогою *аксіом*. Аксіоми приймають як вихідні положення. Усі аксіоми планіметрії, відомі нам із 7-го класу, справджуються і в стереометрії. Нагадаємо їх.

I. Яка б не була пряма, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.
II. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і до того ж тільки одну.
III. З трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.
IV. Кожний відрізок має певну довжину, більшу за нуль.
V. Довжина відрізка дорівнює сумі довжин частин, на які він розбивається будь-якою його внутрішньою точкою.
VI. Кожний кут має певну градусну міру, більшу за нуль. Розгорнутий кут дорівнює 180°.

VII. Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.
VIII. На площині через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести лише одну пряму, паралельну даній.

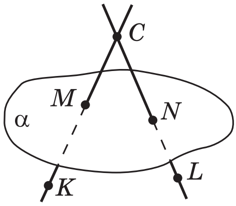
Оскільки в планіметрії усі фігури лежали в одній площині, а в стереометрії вони можуть лежати в різних площинах, останню аксіому – *аксіому паралельності прямих* – для стереометрії уточнено.

А нове поняття – *площина* – потребує ще й розширення системи аксіом, тобто доповнення стереометрії аксіомами, що описують властивості точок, прямих і площин у просторі.

Ці завдання реалізує нова група аксіом – група аксіом С.

C_I. Яка б не була площина, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать.

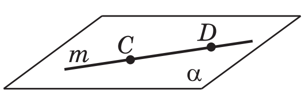
На малюнку 1.4 точки M і N належать площині α (площина α проходить через ці точки), а точки C, K і L – не належать цій площині. Для запису, як і в планіметрії, будемо використовувати символи $\in$ і $\notin$. Тому «точка M належить площині α» записуватимемо так: $M \in \alpha$, а «точка C не належить площині α» – так: $C \notin \alpha$.



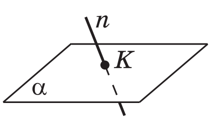
Мал. 1.4

C_{II}. Якщо дві точки прямої належать площині, то всі точки прямої належать цій площині.

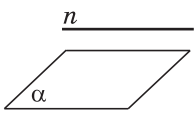
У цьому випадку кажуть, що *пряма належить площині* або *площина проходить через пряму*. На малюнку 1.5 точки C і D прямої m належать площині α, тому і пряма m, що проходить через ці точки, належить площині α. Щоб записати, що «пряма m належить площині α» будемо використовувати символ підмножини та писати так: $m \subset \alpha$. Запис $n \not\subset \alpha$ означатиме, що пряма n не належить площині α, тобто на прямій n існує точка, що площині α не належить (мал. 1.6 та 1.7). На малюнку 1.6 пряма n і площина α мають одну спільну точку K. У такому випадку кажуть, що пряма n *перетинає* площину α *в точці* K, а записують так: $n \cap \alpha = K$.



Мал. 1.5

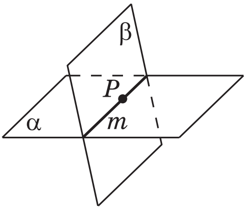


Мал. 1.6



Мал. 1.7

Аксіома C_{II} має різні практичні застосування. Одне з них – перевірка «рівності» лінійки. Для цього лінійку прикладають краєм, який перевіряють, до плоскої поверхні, наприклад стола. Якщо край лінійки рівний, то він усіма своїми точками прилягатиме до поверхні стола. Якщо ж край нерівний, то в деяких місцях між ним і поверхнею стола утвориться просвіт.



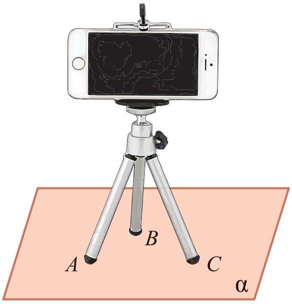
Мал. 1.8

Якщо через пряму m проходять дві різні площини α і β, то кажуть, що *площини α і β перетинаються по прямій m* (мал. 1.8), і записують так: $\alpha \cap \beta = m$.

C_{III}. Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку.

На малюнку 1.8 площини α і β мають спільну точку P, тобто P належить як площині α, так і площині β. Аксіома C_{III} стверджує, що тоді площини α і β перетинаються по прямій m, причому точка P, у свою чергу, належатиме цій прямій m.

C_{IV}. Через будь-які три точки, які не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну.



Мал. 1.9

Практичною ілюстрацією цієї аксіоми є, наприклад, стійкість на підлозі будь-якої триноги (табурета на трьох ніжках, фотоштатива тощо). Три точки A, B, C, які є кінцями триноги, завжди можна розмістити у площині підлоги α (мал. 1.9). Тому площину α можемо називати ще площиною ABC і позначати так: (ABC). Позначення площини трьома її точками, що не лежать на одній прямій, будемо використовувати і надалі.

Якщо ж узяти чотири довільні точки, то через них може не проходити жодна площина. Практичною ілюстрацією цього факту може стати стілець із чотирма ніжками, які не однакові за довжиною. Тоді стілець буде стояти на трьох ніжках, тобто спиратися на три «точки», а кінець четвертої ніжки (четверта «точка») не буде лежати у площині підлоги, і тому стілець буде хитатися.

5. Найпростіші наслідки з аксіом стереометрії

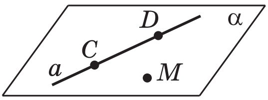
Сформулюємо найпростіші наслідки з аксіом стереометрії у вигляді теорем та доведемо їх.

Т е о р е м а 1 (про існування і єдиність площини, що проходить через пряму і точку, що їй не належить). **Через пряму і точку, що їй не належить, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо пряму a і точку M таку, що $M \notin a$ (мал. 1.10).

1) Позначимо на прямій a довільні точки C і D. Оскільки C, D і M не лежать на одній прямій, то через них, за аксіомою C_{IV}, можна провести площину α. Точки C і D лежать у площині α, а тому, за аксіомою C_{II}, пряма a належить площині α. Отже, площина α проходить через пряму a і точку M.

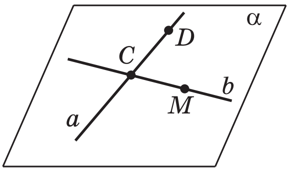
2) Доведемо, що така площина єдина. Припустимо, що через пряму a і точку M проходить ще якась площина α_1. Але тоді ця площина має проходити і через точки C і D, що лежать на прямій a. Маємо, що через точки C, D і M, які не лежать на одній прямій, проходять дві різні площини α і α_1, що суперечить аксіомі C_{IV}. Отже, наше припущення хибне, а тому через пряму a і точку M, що їй не належить, проходить єдина площина α. ■



Мал. 1.10

Т е о р е м а 2 (про існування і єдиність площини, яка проходить через дві прямі, що перетинаються). **Через дві прямі, що перетинаються, можна провести площину, і до того ж тільки одну.**

Д о в е д е н н я. Розглянемо прямі a і b, причому $a \cap b = C$ (мал. 1.11). Позначимо на прямій b точку M, а на прямій a – точку D, обидві відмінні від точки C. Маємо три точки M, C і D, які не лежать на одній прямій, а тому далі доведення аналогічне до доведення попередньої теореми. Пропонуємо завершити його самостійно. ■



Мал. 1.11

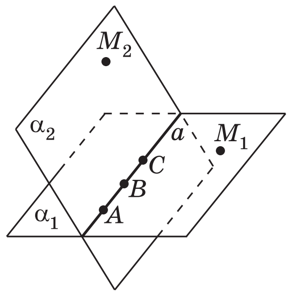
З аксіоми C_{IV} та теорем 1 і 2 доходимо висновку, що площину можна задавати:

1) трьома точками, що не лежать на одній прямій;
2) прямою і точкою, що їй не належить;
3) двома прямими, що перетинаються.

Ще один спосіб задання площини розглянемо згодом.

Задача 1. Довести, що через три точки, які лежать на одній прямій, можна провести площину. Скільки існує таких площин?

Доведення. Нехай точки A, B і C лежать на одній прямій – прямій a (мал. 1.12).



Мал. 1.12

1) За аксіомою I існує точка, що прямій a не належить, назвемо її M_1. За теоремою 1 через пряму a і точку M_1 можна провести площину, назвемо її α_1. Вона проходитиме і через три дані точки.

2) За аксіомою C_I існують точки, які не належать площині α_1. Розглянемо точку M_2, яка не належить площині α_1, а тому не належить і прямій a, оскільки $a \subset \alpha_1$. Тоді через пряму a і точку M_2 можна провести площину α_2. Ця площина також, як і площина α_1, проходить через три дані точки.

Міркуючи аналогічно, можна дійти висновку, що існує безліч площин, які проходять через три точки, що лежать на одній прямій.

Відповідь. Безліч.

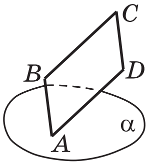
Задача 2. Дано площину α і паралелограм $ABCD$. Чи може площині α належати:

1) тільки одна вершина паралелограма;
2) тільки дві вершини паралелограма;
3) тільки три вершини паралелограма?

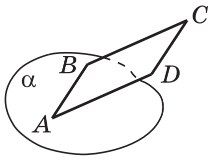
Розв'язання. 1) Може (мал. 1.13).

2) Може (мал. 1.14).

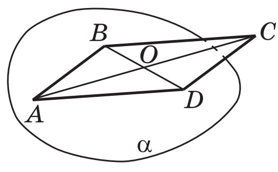
3) Припустимо, що три вершини паралелограма A, B і D належать площині α, а вершина C – ні (мал. 1.15). Проведемо діагоналі паралелограма AC і BD. Нехай O – точка їх перетину. Оскільки $B \in \alpha$ і $D \in \alpha$, то $BD \subset \alpha$, а тому $O \in \alpha$. Оскільки $A \in \alpha$ і $O \in \alpha$, то $AO \subset \alpha$. Але $C \in AO$, тому $C \in \alpha$. Маємо, що всі чотири вершини паралелограма належать площині α, що суперечить умові. Отже, наше припущення хибне, а тому тільки три із чотирьох вершин паралелограма $ABCD$ не можуть належати площині α.



Мал. 1.13



Мал. 1.14



Мал. 1.15

Відповідь. 1) Так; 2) так; 3) ні.

А ще раніше...

Давньогрецький учений Евклід у своїй видатній праці «Начала» зібрав й узагальнив досвід грецьких математиків. Були відомі Евклідові й аксіоми стереометрії, які ми розглянули в цьому параграфі. Так, наприклад, аксіому C_{II} *Евклід сформулював так: «Частини прямої лінії не можуть лежати одна над площиною, а інша – у самій площині», а аксіому* C_{III} *– так: «Дві площини перетинаються по прямій лінії».*

Безсумнівно, «Начала» Евкліда вже понад два тисячоліття слугують зразком дедуктивної побудови геометрії. Однак математики впродовж віків наголошували на основному недоліку аксіом Евкліда, включно з його постулатами, – їх неповноту, тобто недостатність їх для чіткої логічної побудови геометрії, за якої кожне твердження (теорема), якщо воно не фігурує в списку аксіом, має бути логічно виведене з аксіом і вже доведених раніше тверджень.

Упродовж століть математики неодноразово вдавалися до спроб дедуктивної побудови геометрії, завершився цей процес лише наприкінці XIX ст. завдяки роботам математиків М. Паша, Дж. Пеано, Дж. Веронезе, М. Пієрі і, в першу чергу, завдяки видатному німецькому математику Давиду Гільберту. У своїй класичній праці «Основи геометрії» (1899 р.) Гільберт сконструював аксіоматику геометрії так, що логічна структура геометрії стала абсолютно прозорою. Так, Гільберт не дав прямого означення основних геометричних об'єктів: точки, прямої, площини. Усе, що потрібно знати про ці об'єкти, він виклав в аксіомах, які є, по суті, їх непрямими означеннями.

Серед аксіом Гільберта є й аксіоми стереометрії. Наприклад, одну з аксіом цього параграфа Гільберт сформулював так: «Якщо точки A і B прямої a лежать в площині α, то будь-яка точка цієї прямої лежить в площині α».

Д. Гільберт
(1862–1943)

• Що таке стереометрія? • Які фігури називають плоскими, а які – просторовими? Наведіть приклади таких фігур. • Що таке аксіоматичний метод побудови геометрії? • Назвіть основні поняття стереометрії. • Як зображують і як позначають площини у стереометрії? • Сформулюйте аксіоми стереометрії. • Сформулюйте й доведіть найпростіші наслідки з аксіом стереометрії.

Графічна робота № 1

Виконайте малюнки до тверджень і підпишіть точки, прямі та площини на отриманих малюнках.

1. Пряма KL належить площині β.
2. Пряма AC перетинає площину α в точці D.
3. Площина γ проходить через пряму c і точку L, що цій прямій не належить, та перетинає пряму b в точці M.
4. Прямі AB і AC перетинають площину α у двох різних точках.
5. Прямі AB і AC перетинають площину β в одній і тій самій точці.
6. Площини α і β перетинаються по прямій c і перетинають пряму MN відповідно в точках M і N.
7. Площини α і β перетинаються по прямій c, площини α і γ також перетинаються по прямій c.
8. Площини α і β перетинаються по прямій KL, а площини α і γ перетинаються по іншій прямій – прямій KN.
9. Прямі a, b і c мають спільну точку K і лежать в одній площині.
10. Прямі a, b і c мають спільну точку, але не існує площини, якій належать усі ці три прямі.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

1.1. Намалюйте площину α, точку M, що належить цій площині, та точку N, яка цій площині не належить. Запишіть відповідні твердження за допомогою символів.

1.2. Намалюйте площину β та пряму a, що їй належить. Запишіть відповідне твердження за допомогою символів.

1.3. Дано пряму m, що належить площині β. Виконайте малюнок і позначте на ньому точки A і B, які належать площині β, але не належать прямій m.

1.4. Точки A і B належать площині α. Виконайте малюнок і позначте на ньому точку C, яка належить площині α, але не належить прямій AB, та точку K, яка не належить площині α.

1.5. Намалюйте площину γ та пряму a, що перетинає її у точці M. Скільки точок прямої a лежить у площині γ?

1.6. (*Усно.*) Які з тверджень істинні:
1) будь-які дві точки завжди належать одній прямій;
2) будь-які три точки завжди належать одній прямій;
3) будь-які три точки завжди належать одній площині;
4) будь-які чотири точки завжди належать одній площині?

1.7. (*Усно.*) Чи можуть дві різні площини мати лише:
1) одну спільну точку; 2) дві спільні точки;
3) три спільні точки; 4) 2020 спільних точок?

1.8. Чи можуть пряма й площина мати лише:
1) одну спільну точку; 2) дві спільні точки;
3) три спільні точки; 4) 999 спільних точок?

2

1.9. (*Усно.*) Чи однакові за змістом твердження: «пряма належить площині» і «пряма й площина мають спільну точку»? Відповідь обґрунтуйте.

1.10. Відомо, що через три дані точки можна провести принаймні дві площини.
1) Яким є взаємне розміщення цих точок?
2) Скільки площин можна провести через ці три точки?

1.11. Відомо, що через дані пряму й точку можна провести принаймні дві площини.
1) Яким є взаємне розміщення прямої і точки?
2) Скільки площин можна провести через ці пряму й точку?

1.12. Дано дві прямі, через які не можна провести площину. Чи можуть ці прямі перетинатися? Відповідь обґрунтуйте.

1.13. Дано дві площини, які не перетинаються. Чи можуть ці площини мати спільну точку? Відповідь обґрунтуйте.

1.14. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині.
1) Чи можуть деякі три з них належати одній прямій?
2) Чи можуть прямі AB і CD перетинатися?
Відповіді обґрунтуйте.

1.15. Площини α і β мають три спільні точки A, B і C.
1) Чи можна дійти висновку, що α і β збігаються?
2) У якому випадку можна дійти висновку, що α і β збігаються?

1.16. (*Усно.*) Чому мотоцикл із коляскою може припаркуватися на дорозі стійко, а мотоциклу без коляски потрібна додаткова опора?

1.17. Чому незамкнені двері відчиняються, а замкнені двері нерухомі?

1.18. Прямі AB і CD перетинаються. Доведіть, що прямі AC і BD лежать в одній площині.

1.19. Через прямі AB і AC проведено площину. Доведіть, що цій площині належить медіана AM трикутника ABC.

1.20. Доведіть, що через будь-яку пряму і точку можна провести площину. Розгляньте два випадки.

1.21. Доведіть, що через будь-які три точки можна провести площину. Розгляньте два випадки.

1.22. Три прямі, які проходять через точку P, перетинають пряму a відповідно в точках A, B і C. Доведіть, що точки A, B, C і P лежать в одній площині.

1.23. Прямі AB і AC перетинають пряму a в точках M і N відповідно. Доведіть, що точки A, B, C, M і N лежать в одній площині.

1.24. У трапецію вписано коло. Чи можна стверджувати, що площина трапеції збігається з площиною:
1) яка проходить через середню лінію трапеції;
2) яка проходить через діагональ трапеції;
3) яка проходить через середини всіх сторін трапеції;
4) кола, вписаного у трапецію?

1.25. Навколо трикутника описано коло. Чи можна стверджувати, що площина трикутника збігається з площиною:
1) яка проходить через деяку середню лінію трикутника;
2) яка проходить через медіану трикутника;
3) яка проходить через середини всіх сторін трикутника;
4) кола, вписаного у трикутник?

3 **1.26.** Пряма b проходить через центри вписаного й описаного кіл трикутника ABC. Чи можна стверджувати, що $b \subset (ABC)$?

1.27. Пряма a проходить через центр кола. Чи можна стверджувати, що пряма перетинає коло? Виконайте відповідний малюнок.

1.28. Пряма c перетинає сторони AB і AC трикутника ABC. Чи можна стверджувати, що $c \subset (ABC)$?

1.29. (*Усно.*) Як за допомогою двох ниток столяр може перевірити, чи лежать кінці чотирьох ніжок стола (або стільця) в одній площині?

1.30. Прямі a і b перетинаються в точці K. Доведіть, що всі прямі, які не проходять через точку K і перетинають обидві ці прямі, лежать в одній площині.

1.31. Чи лежать в одній площині прямі a, b і c, якщо будь-які дві з них перетинаються, але не існує точки, що належить усім трьом прямим?

1.32. Кожні дві з трьох прямих a, b і c перетинаються, проте не існує площини, якій належать усі три прямі. Яке взаємне розміщення прямих a, b і c?

1.33. Через точку перетину прямих KL і KM проведено пряму a, що не лежить з прямими KL і KM в одній площині. Доведіть, що прямі a і LM не перетинаються.

1.34. Прямі a, b і c належать одній площині та перетинаються у точці K. Доведіть, що існує площина, яка не проходить через точку K і перетинає три дані прямі.

1.35. Площини α і β перетинаються. Пряма a належить площині α і перетинає площину β в точці A, пряма b належить площині β і перетинає площину α в точці B. Доведіть, що AB – пряма перетину площин α і β.

1.36. Площини α і β перетинаються по прямій c. Пряма a належить площині α і перетинає площину β. Чи перетинаються прямі a і c? Відповідь обґрунтуйте.

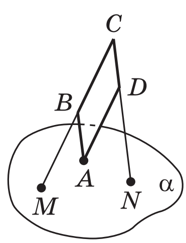
1.37. Точка M не належить площині трикутника ABC. Доведіть, що прямі MA і BC не перетинаються.

1.38. Дано пряму l і точку P, що їй не належить. Точка K не належить площині, що проходить через пряму l і точку P. Доведіть, що прямі l і PK не перетинаються.

1.39. (*Усно.*) Чи означають одне й те саме два таких твердження: «прямі a і b належать різним площинам» і «прямі a і b не належать одній площині»?

1.40. Дві вершини паралелограма та точка перетину його діагоналей належать площині α. Чи можна стверджувати, що дві інші вершини паралелограма також належать площині α?

1.41. Вершина A опуклого плоского чотирикутника належить площині α (мал. 1.16), а вершини B, C і D не належать цій площині. Прямі CB і CD перетинають площину α відповідно в точках M і N. Чи правильно виконано малюнок 1.16? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 1.16

1.42. Вершина D плоского чотирикутника $ABCD$ належить площині β, а всі інші вершини – їй не належать. Прямі BC і AC перетинають площину β відповідно в точках K і L. Доведіть, що точки K, L і D лежать на одній прямій.

1.43. 1) Нехай A, B, C – три точки простору. Доведіть нерівність: $AB \leqslant BC + CA$.

2) Скільки площин можна провести через точки M, N і P, якщо $MN = 0{,}5$ дм, $NP = 40$ мм, $MP = 8$ см?

1.44. Скільки площин можна провести через точки K, L і M, якщо $KL = 5$ см, $LM = 110$ мм, $KM = 0{,}6$ дм?

4 **1.45.** Кожна з трьох прямих перетинається з двома іншими. Скільки різних площин можна провести через дані прямі, беручи їх попарно? Укажіть та обґрунтуйте всі можливі випадки.

1.46. Основи трьох бісектрис трикутника належать площині α. Чи належать площині α вершини трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

1.47. Середини трьох сторін трикутника належать площині α. Чи належать площині α вершини трикутника? Відповідь обґрунтуйте.

1.48. Основи висот трикутника належать площині β. Чи можна стверджувати, що площині β належать вершини трикутника?

1.49. Прямі a, b і c проходять через точку D. Площина, що не проходить через точку D, перетинає прямі a, b і c у точках, що не лежать на одній прямій. Доведіть, що прямі a, b і c не лежать в одній площині.

1.50. Пряма a належить площині α, а пряма b перетинає цю площину в точці K, що не належить прямій a. Доведіть, що прямі a і b не перетинаються.

1.51. Прямі m і n не лежать в одній площині. На прямій a, що перетинає прямі m і n відповідно в точках M і N, позначено точку A, що не збігається ані з точкою M, ані з точкою N. Чи можна через точку A провести ще одну пряму, відмінну від прямої a, щоб вона перетинала прямі m і n?

1.52. Прямі a і b не лежать в одній площині. Прямі c і d перетинають кожну з прямих a і b у попарно різних точках. Чи можна стверджувати, що прямі c і d не перетинаються?

1.53. Нехай m – пряма перетину площин α і β, пряма a належить площині α. Доведіть, що прямі m і a перетинаються тоді й тільки тоді, коли пряма a перетинає площину β.

1.54. Яку найменшу кількість сірників треба мати, щоб скласти з них 4 правильних трикутники, сторона кожного з яких дорівнює довжині сірника?

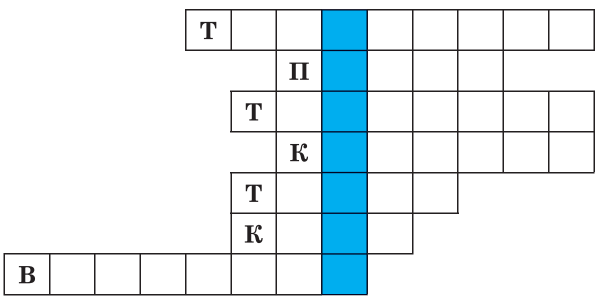
1.55. Яку найменшу кількість сірників треба мати, щоб скласти з них 6 квадратів, сторона кожного з яких дорівнює довжині сірника?

1.56. Доведіть, що коли будь-які дві з n прямих ($n > 2$) перетинаються і всі точки їх попарних перетинів різні, то всі прямі лежать в одній площині.

1.57. (*Просторова теорема Дезарга*.) Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ лежать у різних площинах, а прямі, яким належать відповідні сторони трикутників, попарно перетинаються у точках P, Q і R (наприклад, прямі AB і A_1B_1 перетинаються у точці P). Доведіть, що точки P, Q і R лежать на одній прямій.

1.58. Відношення висоти до ширини екрана телевізора дорівнює 9 : 16. Діагональ екрана телевізора дорівнює 40 дюймів. Знайдіть ширину екрана в сантиметрах.

1.59. (*Видатні українці*.) 1) Пригадайте планіметричні фігури та запишіть їх назви в рядки (перші літери назв фігур вказано). У виділеному стовпчику отримаєте прізвище видатного українського математика.



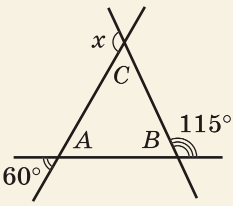
2) Знайдіть відомості про життєвий шлях цього математика.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 1

1. Знайдіть градусну міру кута x (див. мал.).

А	Б	В	Г	Д
120°	125°	130°	135°	140°



2. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $A(-2;\ 7)$, $B(2;\ 4)$.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	7

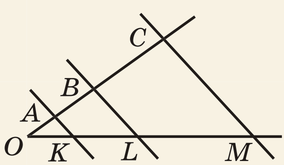
3. Сторони трикутника, одна з яких на 2 см більша за іншу, утворюють кут 120°. Знайдіть периметр трикутника, якщо довжина третьої сторони дорівнює 7 см.

А	Б	В	Г	Д
7 см	10 см	15 см	18 см	інша відповідь

4. Укажіть міру внутрішнього кута правильного 20-кутника.

А	Б	В	Г	Д
150°	154°	156°	160°	162°

5. Відомо, що $AK \parallel BL \parallel CM$, $OA = 2$ см, $AB = 4$ см, $KL = 6$ см, $LM = 9$ см (див. мал.). Установіть відповідність між відрізком (1–4) та його довжиною (А–Д).



Відрізок		*Довжина відрізка*	
1	BC	А	3 см
2	OK	Б	6 см
3	OC	В	9 см
4	OL	Г	12 см
		Д	15 см

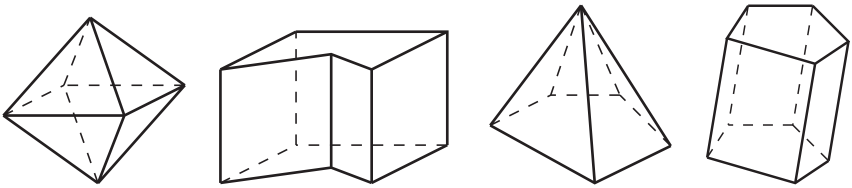
	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 3 см і 13 см, а діагональ ділить тупий кут навпіл. Знайдіть площу трапеції (у см^2).

§ 2. ПОЧАТКОВІ УЯВЛЕННЯ ПРО МНОГОГРАННИКИ. НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ ПЕРЕРІЗІВ МЕТОДОМ СЛІДІВ

У попередніх класах ви вже ознайомилися з деякими просторовими фігурами, наприклад прямокутним паралелепіпедом, кубом, пірамідою.

Прямокутний паралелепіпед, куб і піраміда – це *многогранники*. Многогранник являє собою геометричне тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості плоских многокутників. На малюнку 2.1 зображено деякі многогранники.



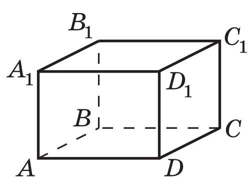
Мал. 2.1

Плоскі многокутники, що утворюють поверхню многогранника, називають *гранями многогранника*, сторони цих многокутників – *ребрами многогранника*, а вершини цих многокутників – *вершинами многогранника*.

Один з розділів курсу стереометрії буде присвячено многогранникам, а поки що пригадаємо основні відомості про *прямокутний паралелепіпед, куб, піраміду* та навчимося розв'язувати найпростіші задачі, пов'язані з ними, і будувати їх найпростіші *перерізи*.

1. Прямокутний паралелепіпед. Куб

Сірникова коробка, цеглина, платтяна шафа тощо дають уявлення про *прямокутний паралелепіпед*. Поверхня прямокутного паралелепіпеда складається із шести прямокутників (мал. 2.2), які є його *гранями*. Сторони і вершини цих прямокутників є відповідно *ребрами* і *вершинами* прямокутного паралелепіпеда: усього – 12 ребер і 8 вершин. Грані $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ прямокутного паралелепіпеда, зображеного на малюнку 2.2, є його *основами*, тому цей прямокутний паралелепіпед будемо називати $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (за назвами його основ).



Мал. 2.2

В одному з наступних параграфів детально розглянемо, як у стереометрії зображувати плоскі й просторові фігури.

Зокрема, з малюнка 2.2 зрозуміло, що прямокутник у стереометрії зазвичай зображують паралелограмом. Отже, прямокутний паралелепіпед доцільно зображувати так, як його зображено на малюнку 2.2.

Довжини непаралельних ребер прямокутного паралелепіпеда називають його *лінійними вимірами*. Прямокутний паралелепіпед має три лінійних виміри, які ще називають довжиною, шириною і висотою прямокутного паралелепіпеда.

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі три лінійних виміри між собою рівні, називають *кубом*. Усі грані куба – квадрати.

2. Піраміда

Нехай маємо довільний многокутник, наприклад чотирикутник $ABCD$, і точку Q, що не належить площині цього многокутника. Сполучимо точку Q з усіма вершинами многокутника (мал. 2.3). Многогранник, який обмежено даним чотирикутником і трикутниками ABQ, BCQ, CDQ і ADQ, називають *пірамідою*, а сторони цих чотирикутника і трикутників – *ребрами піраміди*. Невидимі ребра на малюнку зображують пунктиром. Чотирикутник $ABCD$ – *основа піраміди*, трикутники – *бічні грані*, точка Q – *вершина піраміди*, відрізки QA, QB, QC, QD – *бічні ребра*.

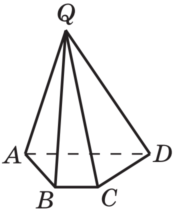
Піраміду називають *n-кутною*, якщо її основою є n-кутник.

Домовимося називати піраміду за назвою її основи і вершини, починаючи з вершини. На малюнку 2.3 маємо *чотирикутну піраміду* $QABCD$.

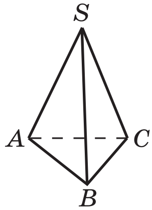
Піраміду, основою якої є трикутник, називають *трикутною пірамідою,* або *тетраедром*. Усі грані тетраедра – трикутники. На малюнку 2.4 маємо тетраедр $SABC$. Тетраедр, усі грані якого правильні трикутники, називають *правильним тетраедром*. Усі шість його ребер мають однакову довжину.

3. Найпростіші задачі з многогранниками

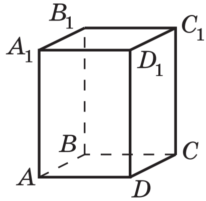
Розглянемо найпростіші задачі з просторовими фігурами, які ми щойно пригадали.



Мал. 2.3



Мал. 2.4



Мал. 2.5

Задача 1. На малюнку 2.5 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Чи належить точка C_1 площині CDD_1?
2) У якій точці пряма AB перетинає площину B_1C_1C?
3) Яка площина проходить через точку B і пряму CD?
4) По якій прямій перетинаються площини ABC і A_1B_1B?

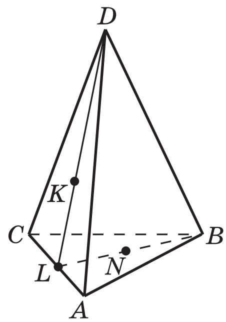
Розв'язання. 1) Грань прямокутного паралелепіпеда CDD_1C належить площині CDD_1. Тому точка C_1 належить цій площині.
2) Оскільки $B \in AB$ і $B \in (B_1C_1C)$, то $AB \cap (B_1C_1B) = B$.
3) Через точку B і пряму CD проходить площина BCD.
4) Оскільки $AB \subset (ABC)$, $AB \subset (A_1B_1B)$, то $(ABC) \cap (A_1B_1B) = AB$.

Відповідь. 1) Так; 2) B; 3) (BCD); 4) AB.

Задача 2. На малюнку 2.6 зображено трикутну піраміду $DABC$. Укажіть:
1) площини, яким належить пряма KL;
2) точку перетину прямої BN з площиною CAD;
3) пряму перетину площин DKB і ABC.

Розв'язання.
1) Оскільки $K \in (ACD)$ і $L \in (ACD)$, то $KL \subset (ACD)$, аналогічно $KL \subset (DLB)$.
2) Оскільки $L \in BN$ і $L \in (CAD)$, то $BN \cap (CAD) = L$.
3) Оскільки $LB \subset (DKB)$ і $LB \subset (ABC)$, то $(DKB) \cap (ABC) = LB$.

Відповідь. 1) (ACD), (DLB); 2) L; 3) LB.

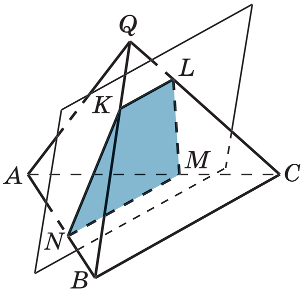


Мал. 2.6

4. Поняття про переріз многогранника

Під час вивчення стереометрії вам траплятимуться задачі, для розв'язування яких важливо мати переріз просторової фігури певною площиною. Серед них будуть і ті, що пов'язані з многогранниками. З'ясуємо, що ж розуміють під поняттям перерізу многогранника.

Січною площиною многогранника називатимемо будь-яку площину, по обидва боки якої є точки даного многогранника. Січна площина перетинатиме грані многогранника по відрізках. Многокутник, сторонами якого є ці відрізки, і називатимемо *перерізом многогранника*. На малюнку 2.7 чотирикутник $KLMN$ є перерізом трикутної піраміди $QABC$.



Мал. 2.7

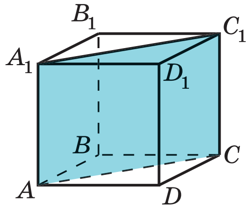
Зауважимо, що січну площину можна задавати будь-яким з відомих нам способів задання площини: трьома точками, що не лежать на одній прямій; прямою і точкою, що їй не належить; двома прямими, що перетинаються. Для побудови перерізу достатньо побудувати точки перетину січної площини з ребрами многогранника. Далі кожні дві такі точки, що належать одній і тій самій грані, сполучити відрізками. Многокутник, який отримаємо в такий спосіб, і буде перерізом многогранника.

Далі розглянемо кілька найпростіших побудов перерізів прямокутного паралелепіпеда, куба та піраміди.

5. Побудова перерізу прямокутного паралелепіпеда і куба

Переріз прямокутного паралелепіпеда або куба площиною, що проходить через два бічних ребра, які не належать одній грані, називають *діагональним перерізом*.

На малюнку 2.8 діагональним перерізом прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ є прямокутник AA_1C_1C, одна зі сторін якого – діагональ AC основи, а інша – бічне ребро AA_1.



Мал. 2.8

Іноді в задачах треба не лише побудувати переріз, а й знайти його площу чи периметр або використати побудований переріз з іншою метою.

Задача 3. Знайти площу діагонального перерізу AA_1C_1C прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, де $AD = 5$ см, $DC = 12$ см, $AA_1 = 4$ см.

Р о з в ' я з а н н я. Переріз зображено на малюнку 2.8.

1) У трикутнику ADC ($\angle D = 90°$) маємо:

$$AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \text{ (см)},$$

2) $S_{AA_1C_1C} = AC \cdot AA_1 = 13 \cdot 4 = 52$ (см^2).

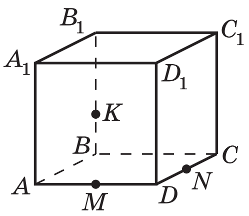
В і д п о в і д ь. 52 см^2.

Далі розглянемо, як будувати перерізи прямокутного паралелепіпеда або куба.

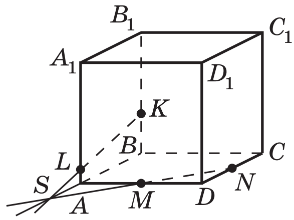
Задача 4. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. На його ребрах AD, DC і BB_1 позначено точки M, N і K (мал. 2.9). Побудувати переріз куба площиною, що проходить через точки M, N і K.

Р о з в ' я з а н н я. Січною площиною буде площина MNK.

1) Спочатку побудуємо пряму, по якій площина MNK перетинає бічну грань AA_1B_1B. Точка K є спільною точкою для площини MNK і грані AA_1B_1B.



Мал. 2.9



Мал. 2.10

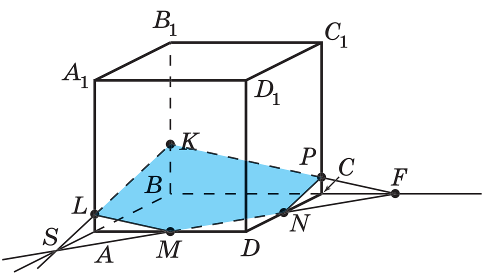
2) Знайдемо ще одну спільну точку площини MNK і грані AA_1B_1B. Продовжимо відрізки MN і AB, які належать одній і тій самій площині ACD, до їх перетину в точці S (мал. 2.10). Оскільки $S \in AB$, а $AB \subset (AA_1B)$, то $S \in (AA_1B)$. Отже, точка S належить і площині MNK, і грані AA_1B_1B. Тоді пряма KS належить і площині MNK, і грані AA_1B_1B, отже, і є тією прямою, по якій січна площина перетинає грань AA_1B_1B.

3) Пряма SK перетинає ребро AA_1 в точці L.

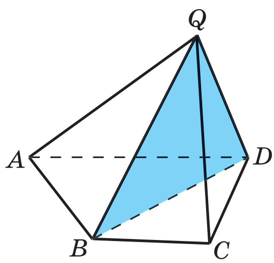
4) Продовжимо MN до перетину з прямою BC, матимемо точку F (мал. 2.11).

5) Пряма KF належить як площині MNK, так і грані BB_1C_1C та перетинає CC_1 у точці P (мал. 2.11).

6) Отже, многокутник $KLMNP$ – шуканий переріз.



Мал. 2.11



Мал. 2.12

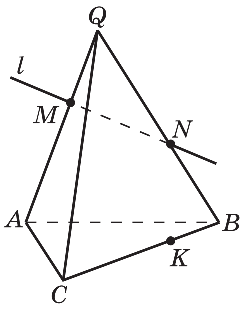
6. Побудова перерізу піраміди

Переріз піраміди, що проходить через два бічних ребра, які не належать одній грані, називають *діагональним перерізом*.

На малюнку 2.12 BQD – діагональний переріз чотирикутної піраміди $QABCD$. Діагональним перерізом піраміди є трикутник, однією з вершин якого є вершина піраміди.

Розглянемо, як побудувати переріз піраміди.

Задача 5. Пряма l перетинає бічні ребра QA і QB тетраедра $QABC$ в точках M і N (мал. 2.13), точка K належить ребру основи BC. Побудувати переріз піраміди, що проходить через пряму l і точку K.



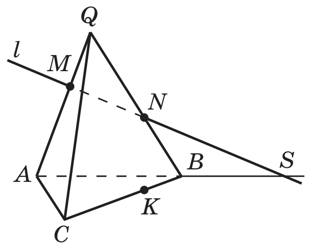
Мал. 2.13

Р о з в ' я з а н н я. 1) Точка K є спільною точкою січної площини і площини ABC. Знайдемо ще одну їх спільну точку.

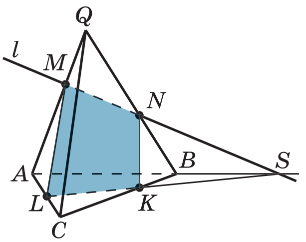
2) Прямі l і AB не паралельні та лежать в одній площині – площині QAB. Нехай S – точка їх перетину (мал. 2.14). Ця точка належить як січній площині, так і площині ABC.

3) Отже, січна площина і площина ABC перетинаються по прямій SK. Пряма SK перетинає ребро AC у деякій точці L.

4) Отже, чотирикутник $KLMN$ – шуканий переріз (мал. 2.15).



Мал. 2.14



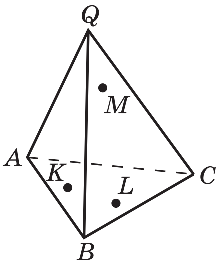
Мал. 2.15

Зауважимо, що за умовою задачі 5 прямі l і AB не паралельні. Якби пряма l була паралельна прямій AB, то точки їх перетину не існувало б. У такому разі переріз тетраедра $QABC$ площиною, що проходить через пряму l і точку K, треба було б будувати в інший спосіб. Цей спосіб розглянемо в одному з наступних параграфів.

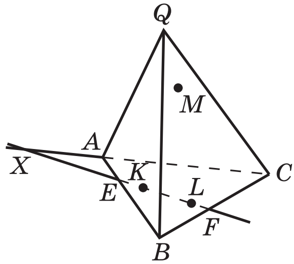
7. Метод слідів

Повертаючись до задач 4 і 5 про побудову перерізів куба і тетраедра, зауважимо, що в обох випадках побудова ґрунтувалася на знаходженні ліній перетину січної площини з гранями многогранника, тобто на знаходженні так званих «слідів», які залишає січна площина на гранях многогранника. Звідси й походить назва вказаного методу побудови перерізу – *метод слідів*. Сліди січної площини на гранях многогранника і є сторонами того многокутника, який є шуканим перерізом.

У задачах 4 і 5 точки, якими було задано січну площину, належали ребрам многогранника. Розглянемо, як методом слідів побудувати переріз у випадку, коли січну площину задано точками, що лежать на гранях многогранника.



Мал. 2.16



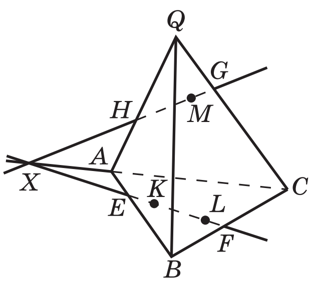
Мал. 2.17

Задача 6. Точки K і L належать грані ABC тетраедра $QABC$, а точка M належить грані QAC (мал. 2.16). Побудувати переріз тетраедра площиною, що проходить через точки K, L і M.

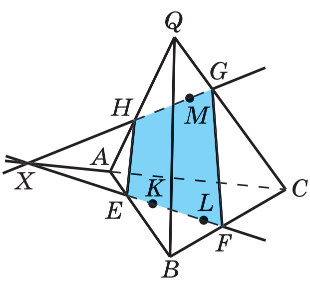
Р о з в ' я з а н н я. Щоб побудувати переріз, знайдемо сліди, які залишає січна площина KLM на гранях тетраедра.

1) Оскільки точки K і L належать грані ABC, то пряма KL належить площині ABC і перетинає ребро AB у точці E, ребро BC – у точці F, продовження ребра AC – у точці X (мал. 2.17). Отже, відрізок EF – слід січної площини на грані ABC.

2) Точка X належить прямій AC, тому належить і площині AQC. Оскільки точки X і M лежать у площині AQC, то пряма XM належить площині AQC і перетинає ребро AQ у точці H, ребро QC – у точці G (мал. 2.18). Отже, відрізок HG – слід січної площини на грані AQC.



Мал. 2.18



Мал. 2.19

3) Тоді відрізки EH і GF – сліди січної площини на гранях AQB і BQC відповідно (мал. 2.19).

4) Отже, чотирикутник $EFGH$ (мал. 2.19) – шуканий переріз.

Розв'язування задачі 6 стисло можна записати так:

1) $K \in (ABC)$, $L \in (ABC)$, тоді $KL \subset (ABC)$, $KL \cap AB = E$, $KL \cap BC = F$, $KL \cap AC = X$, тому $EF \subset (ABC)$, отже, $EF = (KLM) \cap (ABC)$.

2) $X \in (AQC)$, $M \in (AQC)$, тоді $XM \subset (AQC)$, $XM \cap AQ = H$, $XM \cap QC = G$, тому $HG \subset (AQC)$, отже, $HG = (KLM) \cap (AQC)$.

3) $EH = (KLM) \cap (AQB)$, $GF = (KLM) \cap (BQC)$.

4) Чотирикутник $EFGH$ – шуканий переріз.

Зауважимо, що за умовою задачі 6 прямі KL і AC не паралельні. Спосіб побудови перерізу у випадку, коли $KL \parallel AC$ розглянемо в одному з наступних параграфів.

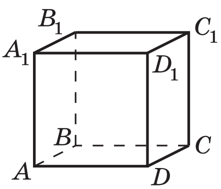
• Що являє собою многогранник? • З яких елементів складається поверхня прямокутного паралелепіпеда і що називають його лінійними вимірами? • Яку фігуру називають кубом? • Назвіть елементи піраміди. • Що називають січною площиною многогранника? • Що називають перерізом многогранника? • Що називають діагональним перерізом прямокутного паралелепіпеда або куба? • Що називають діагональним перерізом піраміди? • Що розуміють під методом слідів для побудови перерізу?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **2.1.** На малюнку 2.20 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Чи належить точка C площині ABD?

2) Чи належить точка B площині DCC_1?



Мал. 2.20

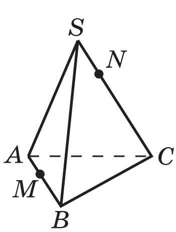
3) У якій точці пряма AA_1 перетинає площину ABC?

4) Укажіть будь-яку пряму, що перетинає площину AA_1B.

5) Укажіть площину, що проходить через точку B і пряму C_1C.

6) Укажіть будь-яку пряму, що належить площині $A_1B_1C_1$.

2.2. На малюнку 2.21 зображено трикутну піраміду $SABC$, точку M, що належить ребру AB, та точку N, що належить ребру SC.



Мал. 2.21

1) Чи належить точка M площині ABC?

2) Чи належить точка B площині SAC?

3) У якій точці пряма SB перетинає площину ABC?

4) Укажіть будь-яку пряму, що перетинає площину SBC.

5) Укажіть площину, яка проходить через точку N і пряму SA.

6) Укажіть будь-яку пряму, що належить площині SAB.

2.3. Побудуйте діагональний переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

2.4. Побудуйте діагональний переріз куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$.

2.5. Дано п'ятикутну піраміду $QABCDE$. Побудуйте її діагональний переріз, який проходить через бічні ребра QA і QC.

2.6. Побудуйте діагональний переріз чотирикутної піраміди $QABCD$, що проходить через бічні ребра QB і QD.

2

2.7. На малюнку 2.21 зображено трикутну піраміду $SABC$. Укажіть:

1) пряму перетину площин ASB і SMC;
2) площину, що проходить через прямі BN і SC.

2.8. На малюнку 2.20 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Укажіть:
1) пряму перетину площин DD_1C_1 і ABD;
2) площину, що проходить через прямі A_1B і AB_1.

2.9. Побудуйте переріз куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ площиною, що проходить через точки A, B і C – середини ребер KL, LM і LL_1 відповідно.

2.10. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, що проходить через точки A, C і середину ребра BB_1.

2.11. $QABC$ – трикутна піраміда, $AB = 6$ см, $BC = 4$ см, $AC = 8$ см.

1) Побудуйте переріз піраміди площиною, що проходить через середини бічних ребер QA, QB і QC.
2) Знайдіть периметр цього перерізу.

2.12. $QKLM$ – трикутна піраміда, основою якої є правильний трикутник KLM, $KL = 6$ см.

1) Побудуйте переріз, що проходить через точку L і точки A і B – середини ребер QK і QM відповідно.
2) Знайдіть довжину відрізка AB.

2.13. Побудуйте тетраедр $QABC$ і на його ребрах AB і QA позначте відповідно точки M і K.

1) Побудуйте прямі перетину площин ABQ і CMK, CMK і ABC, CMK і AQC.
2) Укажіть, яку фігуру можна отримати як переріз даного тетраедра площиною CMK.

2.14. Побудуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і на його грані $ABCD$ позначте дві довільні точки M і K. Побудуйте:

1) пряму перетину площини A_1MK з гранню $ABCD$;

2) точки перетину площини A_1MK з прямими, що містять ребра куба AD і BC;

3) відрізок, по якому площина A_1MK перетинає грань AA_1D_1D.

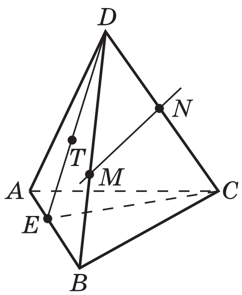
3 **2.15.** На малюнку 2.22 зображено тетраедр $DABC$. Назвіть:

1) усі площини, яким належить кожна з прямих TE, MN, DB, AB, EC;

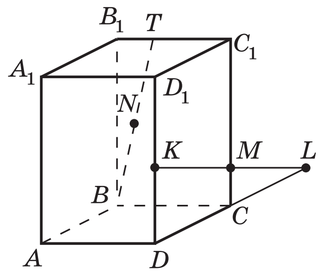
2) точку перетину прямої DN із площиною ABC; прямої CE з площиною ABD;

3) точки, що належать як площині ADB, так і площині ABC;

4) пряму перетину площин DTC і ABC.



Мал. 2.22



Мал. 2.23

2.16. На малюнку 2.23 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть:

1) точки, що належать як площині DCC_1, так і площині BTB_1;

2) усі площини, яким належить пряма DL;

3) точку перетину прямої KM із площиною ABC; прямої BN із площиною $A_1B_1C_1$;

4) пряму перетину площин NB_1C_1 і ABC.

2.17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 2.24).

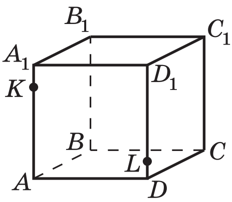
1) Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте точку перетину прямої KL із площиною ABC та точку перетину прямої KL із площиною $A_1B_1C_1$. Побудову обґрунтуйте.

2) За якої умови таку побудову виконати неможливо?

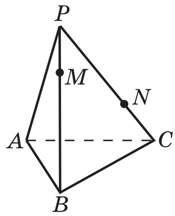
2.18. $PABC$ – трикутна піраміда (мал. 2.25).

1) Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте точку перетину прямої MN із площиною ABC. Побудову обґрунтуйте.

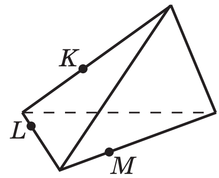
2) За якої умови така побудова неможлива?



Мал. 2.24



Мал. 2.25



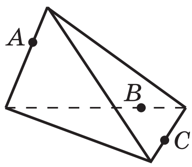
Мал. 2.26

2.19. Перенесіть у зошит малюнок 2.26 і побудуйте переріз піраміди площиною KLM.

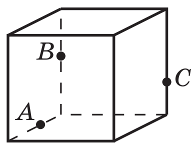
2.20. Перенесіть у зошит малюнок 2.27 і побудуйте переріз піраміди площиною ABC.

2.21. Перенесіть у зошит малюнок 2.28 і побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною ABC.

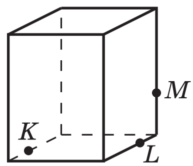
2.22. Перенесіть у зошит малюнок 2.29 і побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною KLM.



Мал. 2.27



Мал. 2.28

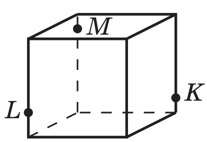


Мал. 2.29

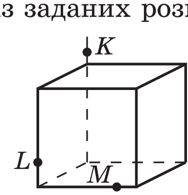
2.23. Через кінці трьох ребер куба, що виходять з однієї вершини, провели площину. Знайдіть лінії перетину цієї площини з гранями куба. Знайдіть периметр і площу фігури, обмеженої цими лініями, якщо ребро куба дорівнює 1 дм.

2.24. Ребро куба дорівнює 4 см. Через середини трьох ребер куба, що виходять з однієї вершини, провели площину. Знайдіть периметр і площу отриманого перерізу.

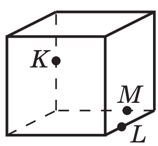
2.25. На малюнках 2.30–2.32 точки K, L і M належать ребрам куба або їх продовженням. Перенесіть кожний малюнок у зошит і побудуйте на ньому переріз куба площиною KLM для кожного із заданих розміщень точок K, L, M.



Мал. 2.30

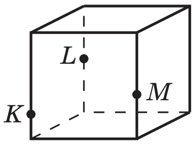


Мал. 2.31

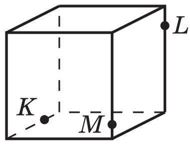


Мал. 2.32

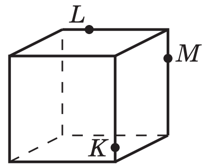
2.26. Точки K, L і M належать ребрам куба (мал. 2.33–2.35). Перенесіть кожний малюнок у зошит і побудуйте на ньому переріз куба площиною KLM.



Мал. 2.33

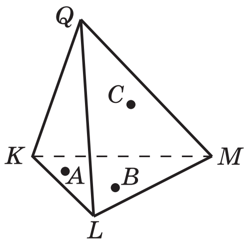


Мал. 2.34

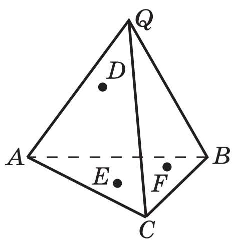


Мал. 2.35

2.27. Точки A і B належать грані KLM тетраедра $QKLM$, а точка C – грані QKM (мал. 2.36). Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте переріз тетраедра площиною ABC.



Мал. 2.36



Мал. 2.37

2.28. Точки E і F належать грані ABC тетраедра $QABC$, а точка D – грані AQB (мал. 2.37). Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте переріз тетраедра площиною DEF.

2.29. $PABC$ – трикутна піраміда (див. мал. 2.25). Пряма MN не паралельна прямій BC. Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте пряму перетину площин AMN і ABC. Побудову обґрунтуйте.

2.30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (див. мал. 2.24). Пряма KL не паралельна прямій AD. Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте пряму перетину площин KLC і ABC. Побудову обґрунтуйте.

4 **2.31.** 1) Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через середини трьох його ребер, що виходять з однієї вершини.

2) Знайдіть площу цього перерізу, якщо лінійні виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 8 см, 8 см і 6 см.

2.32. 1) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром 2 см. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через пряму BD і середину ребра AA_1.
2) Знайдіть площу отриманого перерізу.

2.33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Побудуйте його переріз площиною KLM, якщо:

1) точки K, L і M належать ребрам BB_1, CC_1, DD_1 відповідно і $BK : KB_1 = 1 : 3$, $CL : LC_1 = 3 : 1$, $DM : MD_1 = 3 : 2$;
2) точки K, L і M – середини ребер AB, BC і DD_1 відповідно.

2.34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Побудуйте його переріз площиною EFG, якщо:

1) точки E, F і G належать ребрам AA_1, BB_1, CC_1 відповідно і $AE : EA_1 = 1 : 2$, $BF : FB_1 = 2 : 1$, $CG : GC_1 = 1 : 1$;
2) точки E, F і G – середини ребер AB, AD і CC_1.

2.35. 1) Площина α проходить через вершину Q тетраедра $QABC$ та точки M і K, що належать ребрам AB і BC відповідно. Побудуйте переріз тетраедра площиною α.

2) Площина β проходить через середини ребер QA, QB і QC тетраедра $QABC$. Побудуйте переріз тетраедра площиною β.

3) Побудуйте відрізок прямої перетину площин α і β, що лежить всередині тетраедра.

2.36. Ребро правильного тетраедра $QABC$ дорівнює 6 см. Точки L і K – середини ребер AQ і BQ відповідно, точка T належить ребру QC, причому $QT : TC = 4 : 1$. Знайдіть відстань від точок A, B і C до лінії перетину площин TLK і ABC.

2.37. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 4 см. Точка M належить ребру AA_1, $AM = 3$ см. Точка N належить ребру CC_1, $NC_1 = 1$ см. Точка K ділить ребро DD_1 у відношенні $1 : 3$, рахуючи від вершини D. Знайдіть відстань від точки B до лінії перетину площин KMN і ABC.

2.38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром 4 см, точка M – середина ребра AA_1, точка N належить ребру DD_1, $D_1N = 3$ см. Знайдіть:

1) K_1 – точку перетину прямої MN з площиною ABC;
2) K_2 – точку перетину прямої MN з площиною $A_1B_1C_1$;
3) довжину відрізка K_1K_2;
4) K_3 – точку перетину прямої BK_1 з площиною DK_1C;
5) у якому відношенні, рахуючи від точки C, точка K_3 ділить відрізок CD;
6) пряму перетину площин $K_1K_2K_3$ і AA_1B.

2.39. Дано тетраедр $QEFG$, усі ребра якого по 4 см. Точки L і M належать ребрам QG і QE відповідно, $QL = 1$ см, $QN = 1$ см, точка M – середина ребра QM. Знайдіть:

1) K_1 – точку перетину прямої ML і площини EFG;
2) K_2 – точку перетину прямої MN і площини EFG;
3) довжину відрізка K_1K_2;
4) точку перетину прямої MN і площини ELF;
5) пряму перетину площин LK_1K_2 і NFE;
6) відношення, у якому площина LK_1K_2 ділить відрізок QE, рахуючи від точки Q.

2.40. $QABC$ – тетраедр, усі ребра якого по 4 см. Точки M і K – середини ребер AQ і BQ відповідно, точка E належить ребру CQ, $QE = 3$ см. Знайдіть:
1) L_1 – точку перетину прямої ME з площиною ABC;
2) L_2 – точку перетину прямої KE з площиною ABC;
3) довжину відрізка L_1L_2;
4) точку перетину прямої ME з площиною AKC;
5) пряму перетину площин ML_1K і L_2QC;
6) у якому відношенні площина ML_1L_2 ділить відрізок QB, рахуючи від точки Q.

2.41. У 2008 році в Україні було створено найбільший на той час у світі квітковий годинник. Годинниковий механізм на тлі квіткового панно розмістився на схилі біля майдану Незалежності в Києві. Діаметр годинника – 19,5 м, діаметр циферблата – 16,5 м, довжина стрілок – 4 м і 7 м. Знайдіть довжину кіл, які описують кінці годинної та хвилинної стрілок за один оберт. (Для спрощення обчислень використайте округлення: $\pi \approx 3$).

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

2.42. На площині дано пряму m і точку A, що цій прямій не належить. Скільки прямих, паралельних прямій m, можна провести через точку A?

2.43. $ABCD$ – паралелограм. У площині паралелограма проведено пряму KL так, що $KL \parallel BC$. Доведіть, що $KL \parallel AD$.

2.44. (*Київська міська математична олімпіада, 1989 р.*) Периметр трикутника ABC дорівнює $2p$, довжина сторони AB дорівнює b, кут ABC дорівнює β. Коло із центром у точці O, яке вписано у цей трикутник, дотикається до сторони BC у точці K. Обчисліть площу трикутника BOK.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 2

1. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника, основа якого 6 см, а бічна сторона 7 см.

А	Б	В	Г	Д
19 см	20 см	21 см	22 см	23 см

2. Гострий кут паралелограма дорівнює 60°, а його сторони – 5 см і 12 см. Знайдіть меншу діагональ паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
12 см	13 см	$\sqrt{109}$ см	$\sqrt{113}$ см	інша відповідь

3. Укажіть відстань від точки $P(-3; 4)$ до початку координат.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	7

4. Знайдіть менший гострий кут прямокутного трикутника, якщо один його катет в $\sqrt{3}$ разів більший за інший.

А	Б	В	Г	Д
10°	15°	20°	25°	30°

5. Установіть відповідність між властивістю правильного многокутника (1–4) та кількістю його сторін (А–Д).

Властивість

1 внутрішній кут дорівнює 135°
2 зовнішній кут дорівнює 30°
3 зовнішній кут на 100° менший від внутрішнього
4 кількість діагоналей дорівнює 35

Кількість сторін

А 8
Б 9
В 10
Г 11
Д 12

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Сторони трикутника, одна з яких утричі більша за іншу, утворюють між собою кут 120°. Знайдіть меншу сторону трикутника, якщо його площа дорівнює $12\sqrt{3}$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Скільки площин можна провести через дві прямі, які перетинаються?

А. Жодної **Б.** Одну **В.** Дві **Г.** Безліч

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 2.38). Укажіть точку, що належить площині DD_1C_1.

А. A **Б.** A_1 **В.** B_1 **Г.** C

3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 2.38). Укажіть пряму, яка перетинає площину ABA_1.

А. D_1C_1 **Б.** B_1C_1 **В.** BB_1 **Г.** DD_1

2

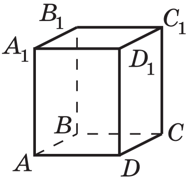
4. Прямі AB і CD перетинаються. Тоді...

А. Точка A не належить площині BCD

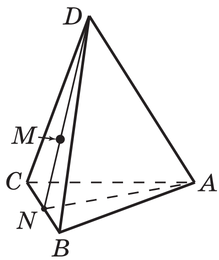
Б. Точка D не належить площині ABC

В. Прямі AD і BC лежать в одній площині

Г. Прямі AC і BD не лежать в одній площині



Мал. 2.38



Мал. 2.39

5. $DABC$ – трикутна піраміда (мал. 2.39). Укажіть пряму, по якій перетинаються площини DMA і ABC.

А. AN **Б.** AM **В.** BC **Г.** AB

6. $DABC$ – тетраедр (мал. 2.39). Укажіть площину, що проходить через прямі AN і DB.

А. ADN **Б.** ABC

В. ADB **Г.** Такої площини не існує

3

7. Пряма m перетинає дві сторони паралелограма $ABCD$. У якому випадку можна стверджувати, що пряма m належить площині паралелограма?

А. Якщо пряма m перетинає сторони AB і AD

Б. Якщо пряма m перетинає сторони AB і CD

В. Якщо пряма m перетинає сторони AB і BC

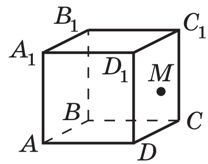
Г. Якщо пряма m перетинає сторони BC і CD

8. Скільки площин можна провести через точки K, L і M, якщо $KL = 1$ см, $LM = 22$ мм, $KM = 3{,}2$ см?

А. Жодної **Б.** Одну **В.** Дві **Г.** Безліч

9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 2.40). Точка M належить грані CDD_1C_1. Укажіть пряму, по якій перетинаються площини D_1C_1M і ABC.

А. Такої прямої не існує **Б.** D_1M
В. CD **Г.** BC



Мал. 2.40

10. Прямі a і b перетинаються в точці A, прямі a і c – у точці B, а прямі b і c – у точці C. Пряма m проходить через точку A. Скільки різних прямих можна провести через прямі a, b, c і m, беручи їх попарно (тобто кожна з площин має проходити через дві із чотирьох даних прямих)?

А. Одну **Б.** Одну або три
В. Одну або чотири **Г.** Безліч

11. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка K – середина BC, точка L – середина CD, точка M – середина AA_1. Укажіть фігуру, що є перерізом куба площиною KLM.

А. Квадрат **Б.** Трикутник
В. Шестикутник **Г.** П’ятикутник

12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = AD = 4$ см, $CC_1 = 3$ см. Знайдіть площу перерізу паралелепіпеда площиною, що проходить через пряму BD і точку C_1.

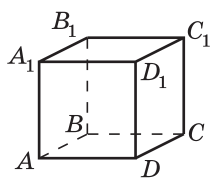
А. $2\sqrt{34}$ см^2 **Б.** $\sqrt{34}$ см^2 **В.** $4\sqrt{34}$ см^2 **Г.** $2\sqrt{17}$ см^2

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 1–2

1. Пряма a належить площині γ. Виконайте відповідний малюнок і позначте на ньому точку M, яка належить площині γ і не належить прямій a, та точку P, яка не належить площині γ.

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 2.41).
1) Чи належить точка D площині A_1B_1B?
2) Чи належить точка C_1 площині C_1D_1D?

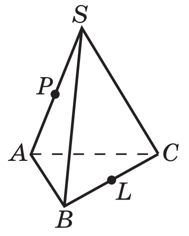
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 2.41).
1) У якій точці пряма AB перетинає площину B_1C_1C?
2) Укажіть будь-яку пряму, що належить площині $A_1B_1C_1$.



Мал. 2.41

4. Через прямі AC і BC проведено площину. Доведіть, що бісектриса CL трикутника ABC належить цій площині.

5. $SABC$ – трикутна піраміда (мал. 2.42), точка P належить ребру AS, точка L – ребру BC. Укажіть:
1) пряму перетину площин SBC і SLA;
2) площину, що проходить через прямі BP і AS.

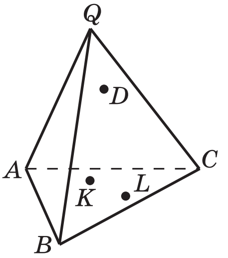


Мал. 2.42

6. $QKLM$ – тетраедр, $KL = 14$ см, $LM = 16$ см, $KM = 10$ см.
1) Побудуйте переріз, що проходить через середини ребер QK, QL, QM цього тетраедра.
2) Знайдіть периметр отриманого перерізу.

7. Скільки площин можна провести через точки A, B і C, якщо:
1) $AB = 20$ мм, $BC = 0,7$ дм, $AC = 5$ см;
2) $AB = 5$ см, $BC = 30$ мм, $AC = 0,06$ м?

8. Точки K і L належать грані ABC, а точка D – грані QAC тетраедра $QABC$ (мал. 2.43). Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте переріз тетраедра площиною DKL.



Мал. 2.43

9. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = 4$ см, $AD = 3$ см, $AA_1 = 6$ см. Знайдіть площу перерізу даного прямокутного паралелепіпеда площиною, що проходить через пряму BD і точку N – середину AA_1.

Додаткові завдання

10. Пряма l перетинає сторони AB і AD трапеції $ABCD$. Чи можна стверджувати, що пряма l належить площині трапеції?

11. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте його переріз площиною MNK, де точки M, N і K – середини ребер AD, DC і BB_1 відповідно.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 1

До § 1

1. 1) Намалюйте площину α та точки A і B, які належать площині α.
2) Скільки існує точок, крім A і B, які належать площині α?

2. 1) Намалюйте площину α, що проходить через дві прямі m і n, які перетинаються.

2) Позначте на малюнку точку K, що належить площині α, але не належить жодній з прямих m і n.
3) Позначте на малюнку точку P, що не належить площині α.
4) Позначте на малюнку точку M, що належить прямій m. Чи належить точка M площині α?

2

3. Скільки різних площин можна провести через:
1) дві довільні точки;
2) три точки, що не лежать на одній прямій;
3) чотири точки, що лежать на одній прямій;
4) довільну пряму?

4. Точки A, B і C – вершини трикутника, точка N не належить площині ABC. Чи лежить у цій площині:
1) середина відрізка AB;
2) середина відрізка BN;
3) бісектриса CK трикутника ABC?

5. Точка D не належить площині, що проходить через прямі AC і AB. Доведіть, що прямі BC і AD не перетинаються.

6. Через середини сторін AB і AC трикутника ABC проведено площину α. Чи можна стверджувати, що α і площина ABC збігаються?

7. (*Задача-жарт.*) О 12 годині з поверхні бутерброда злетіло три мухи. Через який час вони знову опиняться в одній площині?

3

8. Точка O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC. Чи можна стверджувати, що точка C належить площині α, якщо цій площині належать точки A, B і O?

9. Дві сусідні вершини чотирикутника $ABCD$ і точка перетину його діагоналей належать площині α. Доведіть, що площині α належать і дві інші вершини чотирикутника.

10. Площини α і β перетинаються по прямій c. Пряма a належить площині α і перетинає площину β в точці N. Чи належить точка N прямій c? Відповідь обґрунтуйте.

11. Чи можна стверджувати, що всі точки кола належать площині α, якщо:
1) дві точки кола належать площині α;
2) якщо точка кола і центр кола належать площині α;
3) якщо дві точки кола і центр кола належать площині α;
4) якщо три точки кола належать площині α?

12. Дано пряму і точку, що їй не належить. Доведіть, що всі прямі, які проходять через дану точку та перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

13. Скільки площин можна провести через точки A, B і C, якщо:
1) $AB = 2a$, $BC = 3a$, $AC = a$;
2) $AB = 7b$, $BC = 5b$, $AC = 10b$?

4

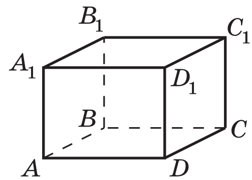
14. Три площини мають спільну точку. Скільки різних прямих може утворитися при перетині цих площин? Укажіть і обґрунтуйте всі можливі випадки.

15. Площина α перетинає прямі SA, SB і SC у точках A_1, B_1 і C_1 відповідно. Доведіть, що прямі SA, SB і SC лежать в одній площині тоді й тільки тоді, коли точки A_1, B_1 і C_1 лежать на одній прямій.

До § 2

1

16. На малюнку 2.44 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$.



Мал. 2.44

1) Назвіть будь-які дві точки, які не належать площині ABC.
2) Назвіть будь-яку точку, яка належить площині AA_1B_1, але не належить прямій AA_1.
3) Назвіть будь-які дві прямі, які перетинають площину DD_1C_1.
4) Назвіть площину, яка проходить через точку B_1 і пряму D_1C_1.

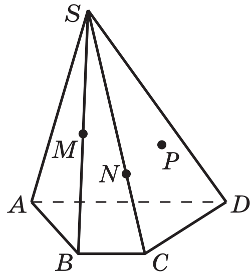
17. Побудуйте два будь-яких діагональних перерізи шестикутної піраміди.

2

18. На малюнку 2.44 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть:
1) пряму, по якій перетинаються площини ABC і A_1AD_1;
2) площину, що проходить через прямі DC_1 і CD.

19. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через вершини A, C і B_1. Знайдіть периметр цього перерізу, якщо сторона куба дорівнює 1 дм.

20. Побудуйте переріз чотирикутної піраміди $QABCD$ площиною, що проходить через діагональ основи AC і середину ребра QB.



Мал. 2.45

3

21. $SABCD$ – чотирикутна піраміда (мал. 2.45), точка P належить грані SCD.

1) Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте точку перетину прямої MN

з площиною ABC та точку перетину прямої SP з площиною ABC.

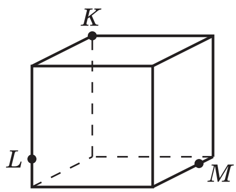
2) Доведіть, що прямі MN і SP не перетинаються.

22. $QABC$ – трикутна піраміда. Точка P – середина AC, $K \in BC$, $L \in AQ$. Побудуйте переріз піраміди площиною PKL, якщо точка K не є серединою BC.

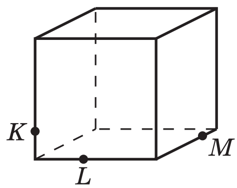
23. 1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через середини трьох його ребер, які виходять з однієї вершини.

2) Знайдіть площу цього перерізу, якщо ребро куба дорівнює $2a$ см.

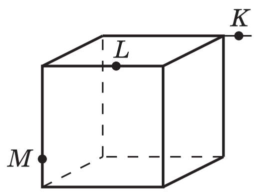
24. Точки K, L і M належать ребрам куба або їх продовженням (мал. 2.46–2.48). Перенесіть малюнки в зошит і побудуйте на кожному з них переріз куба площиною KLM.



Мал. 2.46



Мал. 2.47



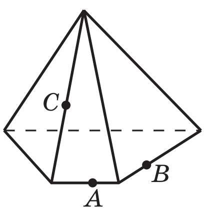
Мал. 2.48

4

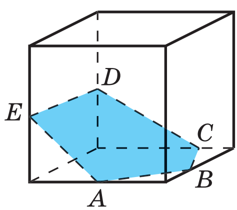
25. $SABCD$ – чотирикутна піраміда (мал. 2.45). Прямі MN і BC – непаралельні. Перенесіть малюнок у зошит і побудуйте прямі перетину площин MNP і SCD, MND і ABC.

26. Перенесіть малюнок 2.49 у зошит і побудуйте переріз піраміди площиною ABC.

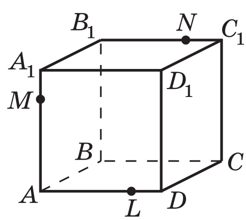
27. Учень побудував переріз прямокутного паралелепіпеда площиною (мал. 2.50). Чи є помилки на малюнку?



Мал. 2.49



Мал. 2.50



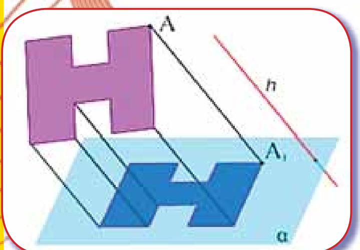
Мал. 2.51

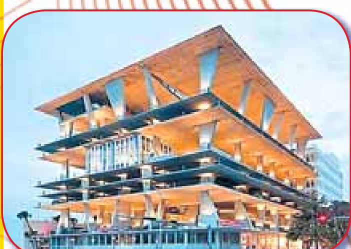
28. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром 5 см (мал. 2.51). Точка M належить ребру AA_1, точка N – ребру B_1C_1, точка L – ребру AD, причому $A_1M = DL = C_1N = 1$ см.

1) Побудуйте переріз куба площиною MLN.

2) Обчисліть периметр отриманого перерізу.

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ





У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ:

- ***пригадаємо*** взаємне розміщення прямих і площин у просторі;
- ***дізнаємося*** про паралельне проектування та його властивості, ознаки мимобіжних прямих, паралельності прямої і площини, паралельності площин;
- ***навчимося*** класифікувати взаємне розміщення прямих, прямих і площин, площин у просторі; установлювати паралельність прямих, прямої і площини, площин; установлювати мимобіжність прямих; будувати зображення фігур і перерізи многогранників методом слідів та методом внутрішнього проекціювання.

§ 3. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ

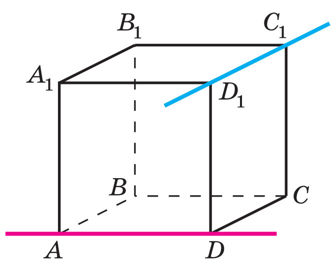
1. Прямі у просторі

З курсу планіметрії вам відомо, що для двох прямих на площині є лише два випадки взаємного розміщення: вони або перетинаються, або паралельні. Оскільки в просторі існують площини і в цих площинах справджуються планіметричні властивості, то згадані випадки взаємного розміщення прямих зберігаються також і у просторі.

Проте у просторі можливий ще один випадок розміщення прямих. Розглянемо куб (мал. 3.1). Прямі AD і D_1C_1 не мають спільних точок і не паралельні. У такому випадку кажуть, що *дві прямі не лежать в одній площині*, тобто не існує жодної площини, яка проходила б через обидві ці прямі.

Дві прямі, які не лежать в одній площині, називають *мимобіжними*.

На малюнку 3.1 прямі AD і D_1C_1 – мимобіжні. Наочне уявлення про мимобіжні прямі дають дві дороги, одна з яких проходить по мосту, а друга під мостом (мал. 3.2).



Мал. 3.1

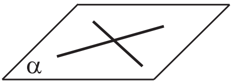
Мал. 3.2

Нагадаємо, що планіметрія – це геометрія на площині, а отже, усі фігури належать цій одній площині. Натомість у стереометрії розглядають не одну, а безліч площин, тому фігури можуть належати різним площинам. Отже, означення *паралельних прямих* у стереометрії в порівнянні з означенням паралельних прямих на площині потребує уточнення.

Дві прямі у просторі називають *паралельними*, якщо вони лежать в одній площині і не перетинаються.

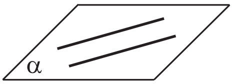
Паралельність прямих a і b позначають, як і у планіметрії: $a \parallel b$.

Отже, у просторі *є три випадки взаємного розміщення двох прямих*:



Мал. 3.3

1) прямі лежать в одній площині та мають спільну точку, тобто це прямі, що перетинаються (мал. 3.3);



Мал. 3.4

2) прямі лежать в одній площині та не мають спільних точок, тобто це паралельні прямі (мал. 3.4);

3) прямі не лежать в одній площині, тобто це мимобіжні прямі.

Прикладами всіх зазначених випадків розміщення прямих можуть бути прямі перетину стін кімнати між собою та зі стелею і підлогою, або прямі, що містять ребра куба. Так, на малюнку 3.1 прямі AB і BC перетинаються в точці B, прямі AD і BC – паралельні, прямі AD і D_1C_1 – мимобіжні.

2. Паралельні прямі у просторі

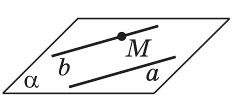
З означення паралельних прямих випливає, що через дві паралельні прямі можна провести площину. Ця площина єдина. Якщо припустити, що через паралельні прямі a і b можна провести дві різні площини, то це означатиме, що дві різні площини проведено через пряму a і деяку точку M прямої b. А це суперечить теоремі про існування і єдиність площини, що проходить через пряму і точку, яка їй не належить. Отже,

через дві паралельні прямі можна провести площину, і до того ж тільки одну.

Тепер до трьох способів задання площини, які ми розглянули в § 1 (с. 11), можна додати ще один: *площину можна задавати двома паралельними прямими*.

Як відомо з курсу планіметрії, на площині через точку, яка не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній (*аксіома VIII, с. 9*). Така сама властивість справджується і у просторі.

Теорема 1 (про існування прямої, паралельної даній). **Через будь-яку точку простору, що не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.**



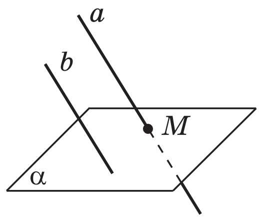
Мал. 3.5

Доведення. Розглянемо пряму a і точку M, що їй не належить (мал. 3.5). Через пряму a і точку M можна провести єдину площину, назвемо її α. У площині α справджується аксіома паралельності прямих, тобто через точку M можна провести єдину пряму b, паралельну прямій a. Отже, у просторі через точку M, що не належить даній прямій a, можна провести єдину пряму, паралельну прямій a. ■

Сформулюємо й доведемо властивість паралельних прямих.

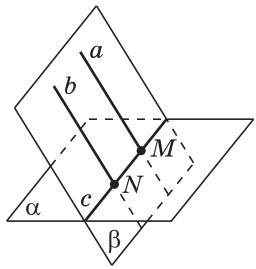
Т Теорема 2 (про перетин площини паралельними прямими). **Якщо одна з двох паралельних прямих перетинає площину, то і друга пряма перетинає цю площину.**

Доведення. Нехай $a \parallel b$ і пряма a перетинає площину α в точці M (мал. 3.6). Доведемо, що пряма b також перетинає площину α, тобто має з нею одну спільну точку.



Мал. 3.6

1) Оскільки $a \parallel b$, то через ці прямі можна провести площину β. Оскільки α і β мають спільну точку – точку M, то вони перетинаються по прямій. Позначимо цю пряму через c (мал. 3.7). Вона належить площині β і перетинає пряму a у точці M, тому вона перетинає і пряму b, паралельну a, у деякій точці N. Оскільки $N \in c$, $c \subset \alpha$, то $N \in \alpha$. Отже, точка N – спільна точка прямої b і площини α.



Мал. 3.7

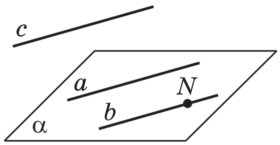
2) Доведемо, що пряма b не має з площиною α інших спільних точок. Припустимо, що пряма b має з площиною α ще одну спільну точку. Тоді дві точки прямої b належать площині α, а тому пряма b належить площині α. Оскільки пряма b належить і площині β, то пряма b є прямою перетину площин α і β, тобто збігається з прямою c. Це неможливо, оскільки прямі c і a перетинаються в точці M, а за умовою b і a – паралельні. Отже, наше припущення хибне, тому пряма b має з площиною α тільки одну спільну точку – точку N. ■

З курсу планіметрії ви знаєте, що на площині дві прямі, які паралельні третій прямій, паралельні між собою. Ця властивість справджується і у просторі.

Т Теорема 3 (ознака паралельності прямих). **Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.**

Доведення. Нехай $a \parallel c$ і $b \parallel c$. Доведемо, що $a \parallel b$.

1) Позначимо точку N на прямій b та проведемо через точку N і пряму a площину α (мал. 3.8). Доведемо, що $b \subset \alpha$. Припу-



Мал. 3.8

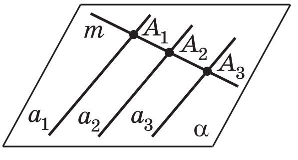
стимо, що пряма b перетинає площину α (у точці N). Тоді за попередньою теоремою площину α також перетинає і пряма c, яка паралельна прямій b. Оскільки $a \parallel c$ і c перетинає α, то за попередньою теоремою пряма a також перетинає α. Але це неможливо, оскільки $a \subset \alpha$. Отже, наше припущення хибне, тому $b \subset \alpha$.

2) Припустимо, що a і b перетинаються в деякій точці. Тоді через цю точку проходять дві прямі, a і b, паралельні прямій c, що суперечить теоремі про існування прямої, яка паралельна даній.

3) Отже, прямі a і b лежать в одній площині і не перетинаються. Тому вони паралельні. ■

Задача 1. Довести, що всі паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині.

Д о в е д е н н я. 1) Нехай паралельні прямі a_1 і a_2 перетинають пряму m в точках A_1 і A_2 відповідно (мал. 3.9). Проведемо через прямі a_1 і a_2 площину α. Оскільки $A_1 \in \alpha$ і $A_2 \in \alpha$, то $m \subset \alpha$.



Мал. 3.9

2) Проведемо пряму a_3, яка паралельна a_1 і a_2 і перетинає пряму m у точці A_3. Доведемо, що $a_3 \subset \alpha$. Припустимо, що пряма a_3 має з площиною α лише одну спільну точку – A_3, тобто пряма a_3 перетинає площину α. Оскільки $a_1 \parallel a_3$ і пряма a_3 перетинає α, то за теоремою про перетин площини паралельними прямими отримаємо, що пряма a_1 перетинає площину α. Але це суперечить тому, що пряма a_1 належить α. Отже, наше припущення хибне, тому $a_3 \subset \alpha$.

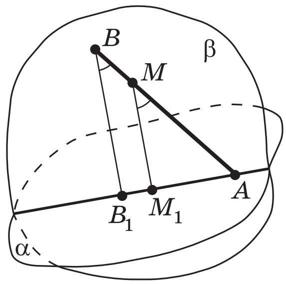
3) Оскільки a_3 – довільна пряма, яка паралельна прямим a_1 і a_2 і перетинає пряму m, то всі паралельні прямі, які перетинають дану пряму, лежать в одній площині, а саме в площині α. ■

Задача 2. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Через кінець B і точку M цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і M_1 відповідно (мал. 3.10). Знайти довжину відрізка MM_1, якщо $BB_1 = 15$ см і $BM : MA = 1 : 2$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Оскільки $BB_1 \parallel MM_1$, то через прямі BB_1 і MM_1 можна провести площину, назвемо її β.

2) Площини α і β перетинаються по прямій B_1M_1, $A \in \alpha$. Оскільки $A \in BM$, $BM \subset \beta$, то $A \in \beta$. Отже, $A \in \alpha$, $A \in \beta$, $\alpha \cap \beta = B_1M_1$, тому $A \in B_1M_1$.

3) Розглянемо $\triangle AMM_1$ і $\triangle ABB_1$, у яких $\angle ABB_1 = \angle AMM_1$ (як відповідні кути при паралельних прямих BB_1 і MM_1 та січній AB), кут A – спільний. Тоді $\triangle AMM_1 \sim \triangle ABB_1$ (за двома кутами), тому $\frac{AM}{AB} = \frac{MM_1}{BB_1}$.



Мал. 3.10

4) Оскільки за умовою $BM : MA = 1 : 2$, позначимо $BM = x$ (см), $MA = 2x$ (см). Тоді $AB = BM + MA = x + 2x = 3x$ (см). Маємо: $\frac{2x}{3x} = \frac{MM_1}{15}$, тобто $MM_1 = \frac{2 \cdot 15}{3}$, отже, $MM_1 = 10$ (см).

Відповідь. 10 см.

Зауважимо, що паралельними бувають не лише прямі, а й промені та відрізки. *Відрізки* або *промені* називають *паралельними*, якщо вони лежать на паралельних прямих.

Важливо також зауважити, що у стереометрії паралельні на площині прямі зображують паралельними прямими (більш докладно про це – в одному з найближчих параграфів). Проте, якщо зображення прямих на площині виявилися паралельними, то самі ці прямі у просторі можуть бути і непаралельними (див. задачу 5 цього параграфа).

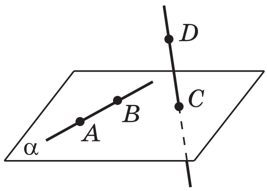
3. Мимобіжні прямі

З'ясуємо, як встановити, що прямі є мимобіжними, не використовуючи означення. Доведемо теорему, що є *ознакою мимобіжності прямих*.

Т Теорема 4 (ознака мимобіжності прямих). **Якщо одна з двох прямих лежить у деякій площині, а друга пряма перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то ці дві прямі – мимобіжні.**

Доведення. Нехай пряма AB належить площині α, а пряма CD перетинає цю площину в точці C (мал. 3.11). Доведемо, що прямі AB і CD – мимобіжні.

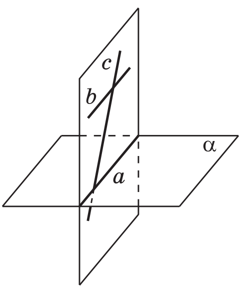
Припустимо, що прямі AB і CD не є мимобіжними, тобто лежать у деякій площині β. Тоді площина β визначається прямою AB і точкою C, яка не належить цій прямій. Але така



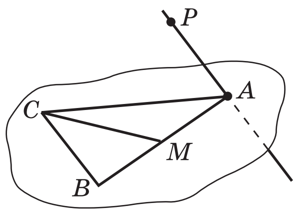
Мал. 3.11

площина, що проходить через пряму AB і точку C, уже існує, це площина α. А оскільки така площина єдина, то β збігається з α. Проте це неможливо, адже пряма CD, за умовою, не належить площині α. Прийшли до протиріччя з умовою. Отже, наше припущення є хибним. Тому прямі AB і CD – мимобіжні. ■

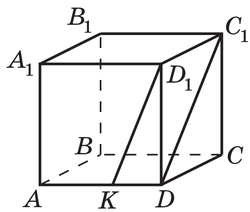
Зауважимо, що коли одна з двох прямих лежить у площині α, а друга не лежить у цій площині, то ці прямі не обов'язково мимобіжні. Наприклад, на малюнку 3.12 $a \subset \alpha$, $b \not\subset \alpha$, $c \not\subset \alpha$, але a і b – не є мимобіжними (вони паралельні), a і c також не є мимобіжними (вони перетинаються).



Мал. 3.12



Мал. 3.13



Мал. 3.14

Задача 3. Точка P не лежить у площині трикутника ABC, CM – медіана цього трикутника (мал. 3.13). Яким є взаємне розміщення прямих CM і AP?

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $CM \in (ABC)$, $AP \cap (ABC) = A$, $A \notin CM$, то прямі CM і AP – мимобіжні (за ознакою мимобіжності прямих).

В і д п о в і д ь. Прямі мимобіжні.

Для доведення мимобіжності прямих часто використовують метод від супротивного.

Задача 4. Прямі AB і CD мимобіжні. Довести, що прямі AD і BC також мимобіжні.

Д о в е д е н н я. Припустимо, що прямі AD і BC не є мимобіжними, тобто або паралельні, або перетинаються. Тоді в кожному із цих двох випадків через прямі AD і BC можна провести площину, і тому всі чотири точки A, B, C, D будуть належати цій площині. Але тоді прямі AB і CD не будуть мимобіжними, що суперечитиме умові задачі.

Отже, наше припущення, що прямі AD і BC не є мимобіжними, є хибним, а тому прямі AD і BC – мимобіжні. ■

Задача 5. Точка K належить ребру AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 3.14). На малюнку прямі KD_1 і DC_1 паралельні. А чи паралельні вони насправді?

Р о з в ' я з а н н я. Пряма C_1D належить площині грані куба CDD_1C_1, а пряма KD_1 перетинає цю грань у точці D_1. Тому, за ознакою мимобіжності прямих, прямі KD_1 і DC_1 – мимобіжні.

В і д п о в і д ь. Ні.

• Які дві прямі називають мимобіжними? • Які дві прямі у просторі називають паралельними? • Назвіть усі випадки взаємного розміщення двох прямих у просторі. • Сформулюйте й доведіть теорему про існування прямої, яка паралельна даній. • Сформулюйте й доведіть теорему про перетин площини паралельними прямими. • Сформулюйте й доведіть ознаку паралельності прямих. • Сформулюйте й доведіть ознаку мимобіжності прямих.

Графічна робота № 2

Виконайте малюнки до тверджень і підпишіть точки, прямі та площини на отриманих малюнках.

1. Прямі a і b належать площині α і перетинаються.

2. Прямі a і b належать площині β і не мають спільних точок.

3. Прямі AB і CD такі, що точка A не належить площині BCD, а точка B не належить прямій CD.

4. Площина α перетинає паралельні прямі c, d і m у точках C, D і M, що належать одній прямій.

5. Площина β перетинає паралельні прямі c, d і m у точках C, D і M, що є вершинами трикутника.

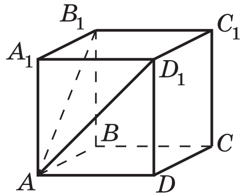
6. На прямій m, що перетинає площину α в точці A, вибрано по різні боки від точки A точки M_1 і M_2. Прямі M_1N_1 і M_2N_2 паралельні між собою та перетинають площину α в точках N_1 і N_2.

7. Вершини B і C трикутника ABC належать площині γ, а вершина A – їй не належить. Пряма m перетинає сторону AB трикутника в точці M, сторону AC – у точці N, а площину γ – у точці K.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **3.1.** На малюнку 3.15 зображено куб. Яким є взаємне розміщення прямих:

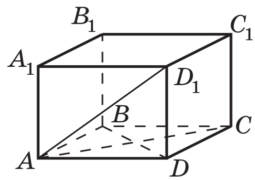
1) AB і AB_1; 2) AD і BC;
3) AD_1 і BC; 4) DD_1 і CC_1;
5) A_1D_1 і B_1A_1; 6) D_1C_1 і BC?



Мал. 3.15

3.2. На малюнку 3.16 зображено прямокутний паралелепіпед. Яким є взаємне розміщення прямих:

1) AB і CD; 2) AC і BD;
3) AD і A_1D_1; 4) AC і AD_1;
5) BB_1 і DD_1; 6) A_1D_1 і DC?



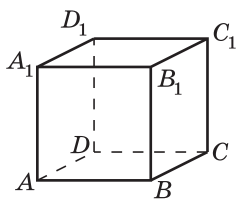
Мал. 3.16

3.3. (*Усно.*) Скільки різних площин можна провести:

1) через дві прямі, що перетинаються;
2) через дві паралельні прямі;
3) через дві мимобіжні прямі?

3.4. Прямі a і b не паралельні і не перетинаються. Скільки різних площин можна провести через ці дві прямі?

2 **3.5.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 3.17). Доведіть, що $AD \parallel B_1C_1$.



Мал. 3.17

3.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 3.17). Доведіть, що $DC \parallel A_1B_1$.

3.7. Пряма MN, що не лежить у площині ромба $ABCD$, паралельна стороні AB цього ромба. З’ясуйте взаємне розміщення прямих: 1) MN і CD; 2) AM і CD. Відповідь обґрунтуйте.

3.8. Пряма KL, що не лежить у площині квадрата $ABCD$, паралельна стороні BC цього квадрата. З’ясуйте взаємне розміщення прямих: 1) KL і AD; 2) LB і CD. Відповідь обґрунтуйте.

3.9. Прямі m і n не паралельні, пряма a паралельна прямій m. Чи можна стверджувати, що пряма a перетинає пряму n:
1) на площині; 2) у просторі?

3.10. Чи можна стверджувати, що пряма, яка перетинає одну з двох паралельних прямих, перетинає й другу:
1) на площині; 2) у просторі?

3.11. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Чи можуть прямі AB і CD:

1) бути паралельними;
2) перетинатися;
3) бути мимобіжними?

Відповідь обґрунтуйте.

3.12. Точки A, B, C і D лежать в одній площині. Чи можуть прямі AB і CD:

1) бути паралельними; 2) перетинатися;
3) бути мимобіжними?

Відповідь обґрунтуйте.

3.13. Намалюйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і виділіть ребро CC_1 цього куба кольоровим олівцем. Запишіть усі ребра куба, які:

1) паралельні ребру CC_1; 2) перетинають ребро CC_1;
3) мимобіжні з ребром CC_1.

3.14. Намалюйте прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і виділіть ребро CD цього куба кольоровим олівцем. Запишіть усі ребра куба, які:

1) паралельні ребру CD; 2) перетинають ребро CD;
3) мимобіжні з ребром CD.

3.15. Намалюйте прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і виділіть діагональ AC грані $ABCD$ кольоровим олівцем. Запишіть усі прямі, що містять діагоналі інших п'яти граней паралелепіпеда (усього 10 діагоналей), які:

1) паралельні прямій AC;
2) перетинають пряму AC;
3) мимобіжні з прямою AC.

3.16. Намалюйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і виділіть діагональ A_1B грані ABB_1A_1 кольоровим олівцем. Запишіть усі прямі, що містять діагоналі інших п'яти граней (усього 10 діагоналей), які:

1) паралельні прямій A_1B; 2) перетинають пряму A_1B;
3) мимобіжні з прямою A_1B.

3.17. Через кінці A, B і середину M відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину α в точках A_1, B_1 і M_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка MM_1, якщо $AA_1 = 8$ см, $BB_1 = 4$ см і відрізок AB не перетинає площину α.

3.18. Через кінець A відрізка AB проведено площину α. Через кінець B і середину C цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо $CC_1 = 7$ см.

3.19. Прямі a і b – паралельні. Пряма c перетинає пряму a і не перетинає пряму b. Доведіть, що прямі b і c – мимобіжні.

3.20. Прямі m і n перетинаються, пряма a паралельна прямій m і не перетинає пряму n. Доведіть, що прямі n і a – мимобіжні.

3.21. Пряма n, яка не лежить у площині трикутника ABC, перетинає його сторону BC в точці K.

1) Чи може пряма n перетинати сторону AB?
2) Яким є взаємне розміщення прямих n і AC?

Відповіді обґрунтуйте.

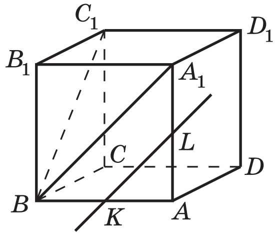
3.22. Пряма m проходить через вершину A трикутника ABC і не лежить у площині цього трикутника. BM – медіана трикутника.

1) Чи може пряма m перетинати сторону BC?
2) Яким є взаємне розміщення прямих m і BM?

Відповіді обґрунтуйте.

3.23. (*Усно.*) У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 3.18) K – середина AB, L – середина AA_1. Яким є взаємне розміщення прямих:

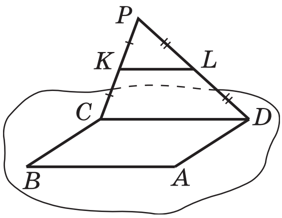
1) AB і KL; 2) BB_1 і KL;
3) A_1D_1 і KL; 4) C_1A_1 і AB;
5) A_1C_1 і BB_1; 6) A_1C_1 і A_1D_1;
7) C_1B і AB; 8) C_1B і BB_1;
9) C_1B і A_1D_1; 10) KL і A_1B?



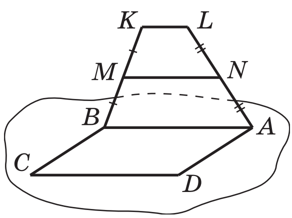
Мал. 3.18

3.24. Паралелограм $ABCD$ і трикутник CDP не лежать в одній площині (мал. 3.19), K – середина CP, L – середина PD.

1) Доведіть, що $KL \parallel AB$.
2) Знайдіть KL, якщо $AB = 8$ см.



Мал. 3.19



Мал. 3.20

3.25. Паралелограм $ABCD$ і трапеція $ABKL$, у якої $AB \parallel KL$, не лежать в одній площині (мал. 3.20), M – середина BK, N – середина AL.

1) Доведіть, що $MN \parallel CD$.
2) Знайдіть MN, якщо $CD = 10$ см, $KL = 4$ см.

3.26. Точки M і N належать прямій a, а точки K і L – прямій b, причому $a \parallel b$. Чи можуть прямі KM і LN:
1) перетинатися; 2) бути паралельними;
3) бути мимобіжними?

3.27. Точки A і B належать прямій m, а точки C і D – прямій n, причому m і n перетинаються. Чи можуть прямі AC і BD:
1) перетинатися; 2) бути паралельними;
3) бути мимобіжними?

3.28. Нехай $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.
1) Яким є взаємне розміщення прямих AD і CC_1?
2) Чи існують прямі, що належать площині CDD_1 і перетинають кожну з прямих AD і CC_1?
3) Якщо прямі, зазначені в попередньому пункті, існують, то вкажіть, скільки їх.

3.29. Пряма a належить площині α, а пряма b паралельна прямій a та має з площиною α спільну точку C. Доведіть, що $b \subset \alpha$.

3.30. Прямі a і b паралельні, $a \subset \alpha$. Чи може пряма b перетинати площину α?

3 **3.31.** Дано чотири попарно паралельні прямі a, b, c і d, жодні три з яких не лежать в одній площині. Намалюйте всі площини, що проходять через кожні дві з даних прямих. Скільки таких площин можна провести?

3.32. Дано три попарно паралельні прямі m, n і k, що не лежать в одній площині. Намалюйте всі площини, що проходять через кожні дві з даних прямих. Скільки таких площин можна провести?

3.33. Прямі a і b перетинаються. Яким може бути взаємне розміщення прямих b і c, якщо прямі a і c:
1) паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні?

До кожного можливого розміщення виконайте відповідний малюнок. Якщо розміщення неможливе, доведіть це.

3.34. Прямі a і c паралельні. Як можуть бути розміщені прямі b і c, якщо прямі a і b:
1) паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні?
До кожного можливого розміщення виконайте відповідний малюнок. Якщо розміщення неможливе, доведіть це.

3.35. Три прямі розміщено так, що кожні дві з них перетинаються. Чи лежать ці три прямі в одній площині? Відповідь обґрунтуйте.

3.36. Прямі a і b – мимобіжні, $c \parallel a$, $d \parallel b$. Чи можна стверджувати, що прямі c і d – мимобіжні?

3.37. Відомо, що $a \parallel b$, $c \parallel a$, $d \parallel b$. Чи правильно, що $c \parallel d$?

3.38. Через кінець C відрізка CD проведено площину α. Через кінець D і точку A цього відрізка проведено паралельні прямі, що перетинають площину α в точках D_1 і A_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка AA_1, якщо $DD_1 = 12$ см і $CA : AD = 3 : 1$.

3.39. Через кінець M відрізка MN проведено площину β. Через кінець N і точку B цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину β в точках N_1 і B_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка NN_1, якщо $MB : BN = 3 : 2$ і $BB_1 = 15$ см.

3.40. Доведіть, що середини ребер AQ, CQ, BC і AB тетраедра $QABC$ лежать в одній площині. Визначте вид фігури, вершинами якої є ці точки.

3.41. Дано два паралелограми $ABCD$ і $ABMN$, які не лежать в одній площині. Доведіть, що $\triangle AND = \triangle BCM$.

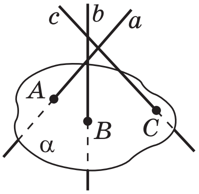
3.42. Трикутник KLM належить площині α. Через його вершини проведено паралельні прямі, які перетинають площину α. На цих прямих по один бік від площини α відкладено рівні між собою відрізки KK_1, LL_1 і MM_1. Доведіть, що $\triangle KLM = \triangle K_1L_1M_1$.

3.43. На малюнку 3.21 прямі a, b і c попарно перетинаються і перетинають площину α відповідно в точках A, B і C.

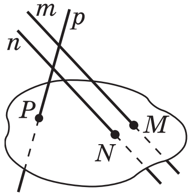
1) Чи є помилки на малюнку?
2) Якщо так, виконайте малюнок правильно.

3.44. На малюнку 3.22 прямі m і n паралельні, а пряма p перетинає кожну з прямих m і n. Прямі m, n і p перетинають площину β відповідно в точках M, N і P.

1) Чи є помилки на малюнку?
2) Якщо так, виконайте малюнок правильно.



Мал. 3.21



Мал. 3.22

3.45. Дано дві мимобіжні прямі a і b. Точки A_1 і A_2 належать прямій a, а точки B_1 і B_2 – прямій b. Чи можуть відрізки A_1B_1 і A_2B_2 мати спільну середину? Відповідь обґрунтуйте.

3.46. Дано дві мимобіжні прямі a і b. Точки A_1 і A_2 належать прямій a, а точки B_1 і B_2 – прямій b. Точка B_1 – середина відрізка A_1C_1, а точка B_2 – середина відрізка A_2C_2. Чи можуть точки C_1 і C_2 збігатися? Відповідь обґрунтуйте.

3.47. Площини α і β перетинаються по прямій m, $A \in \alpha$, $A \notin m$, $B \in \beta$, $B \notin m$. Доведіть, що прямі AB і m – мимобіжні.

3.48. $ABCD$ – паралелограм, $P_{ABCD} = 40$ см. Точка N не належить площині паралелограма. Знайдіть $P_{A_1B_1C_1D_1}$, де A_1, B_1, C_1, D_1 – середини відрізків NA, NB, NC і ND відповідно.

3.49. Точка M не лежить у площині квадрата $ABCD$, $AB = 3$ см. Знайдіть $P_{A_1B_1C_1D_1}$, де A_1, B_1, C_1, D_1 – середини відрізків MA, MB, MC і MD відповідно.

3.50. Скільки існує прямих, паралельних прямій a, кожна з яких має принаймні одну спільну точку з прямою b, якщо прямі a і b:

1) перетинаються;
2) паралельні;
3) мимобіжні?

3.51. Дано дві мимобіжні прямі a і b та точку M, що не належить жодній з них. Через точку M проведіть пряму m, що перетинає прямі a і b. Чи завжди цю задачу можна розв'язати?

3.52. Дано дві мимобіжні прямі a і b та пряму c, що перетинає як пряму a, так і пряму b. Доведіть, що будь-яка пряма, паралельна прямій c, є мимобіжною принаймні з однією з прямих a або b.

3.53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7 – середини його ребер AB, BC, BB_1, CC_1, DD_1, A_1B_1 і A_1D_1 відповідно. Яким є взаємне розміщення прямих:

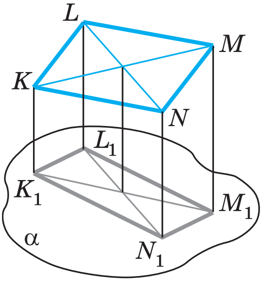
1) K_1K_2 і K_3K_4;
2) K_2K_3 і K_6K_7;
3) K_2K_3 і K_5K_7;
4) K_5K_7 і K_3K_6;
5) K_2K_5 і K_3K_7;
6) K_1K_2 і K_4K_5?

3.54. $QABC$ – тетраедр, точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 – середини ребер AQ, AB, BC, CQ, QB і AC відповідно. Яким є взаємне розміщення прямих:

1) AQ і BC;
2) M_1M_5 і BC;
3) M_2M_5 і M_3M_4;
4) M_3M_4 і M_1M_5;
5) M_2M_4 і M_1M_5;
6) M_2C і M_3M_6;
7) M_1M_2 і M_5M_6;
8) M_5M_6 і M_2M_4?

4 **3.55.** Через кінці A, B і середину M відрізка AB проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину β в точках A_1, B_1 і M_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка BB_1, якщо $AA_1 = 9$ см, $MM_1 = 1$ см, $AA_1 > BB_1$ і відрізок AB перетинає площину β.

3.56. Через кінці M, N і середину A відрізка MN проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину α в точках M_1, N_1 і A_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка AA_1, якщо $NN_1 = 10$ см, $MM_1 = 2$ см і відрізок MN перетинає площину α.



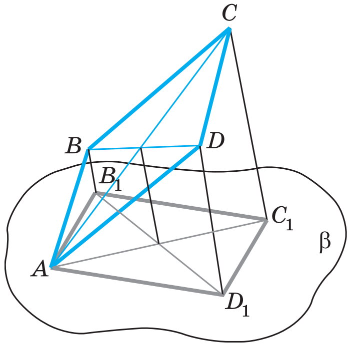
Мал. 3.23

3.57. Паралелограм $KLMN$ не перетинає площину α (мал. 3.23). Через його вершини K, L, M і N проведено паралельні прямі, що перетинають площину α в точках K_1, L_1, M_1 і N_1 відповідно. Знайдіть KK_1, якщо $LL_1 = 8$ см, $MM_1 = 12$ см, $NN_1 = 9$ см.

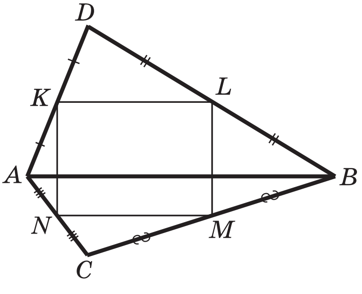
3.58. Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено площину β так, що вершини B, C і D їй не належать (мал. 3.24). Через точки B, C і D проведено паралельні прямі, що перетинають площину β у точках B_1, C_1 і D_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо $BB_1 = 2$ см, $DD_1 = 10$ см.

3.59. Трикутники ABC і ABD не лежать в одній площині (мал. 3.25). Точки K, L, M і N – середини відрізків AD, BD, CB і AC відповідно.

1) Визначте вид чотирикутника $KLMN$.
2) Знайдіть P_{KLMN}, якщо $AB = a$ см, $CD = b$ см.



Мал. 3.24



Мал. 3.25

3.60. $QABC$ – правильний тетраедр з ребром завдовжки 12 см. Точки K_1, K_2, L_1, L_2 – середини ребер AQ, CQ, AB і CB відповідно. Знайдіть довжину відрізка прямої перетину площин BK_1K_2 і QL_1L_2, що міститься всередині тетраедра.

3.61. Точка D не лежить у площині трикутника ABC, K – середина AB, L – середина CD, M – точка перетину медіан (центроїд) трикутника ABC.
1) Чи може фігура $ADLB$ бути трапецією?
2) Доведіть, що прямі MD і KL перетинаються.
3) У якому відношенні, рахуючи від точки D, пряма KL ділить відрізок DM?

3.62. Точка D не лежить у площині трикутника ABC, M_1 – центроїд трикутника ABC, M_2 – центроїд трикутника DBC.
1) Визначте взаємне розміщення прямих DM_1 і AM_2.
2) У якому відношенні, рахуючи від точки D, пряма AM_2 ділить відрізок DM_1?

3.63. Трапеція $ABCD$ ($AD \parallel BC$) не перетинає площину α, $BC = 0{,}5AD$, точка K – точка перетину діагоналей трапеції. Через усі вершини трапеції і точку K проведено паралельні прямі AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 і KK_1, точки A_1, B_1, C_1, D_1, K_1 належать площині α. Знайдіть KK_1 і CC_1, якщо $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 4$ см, $DD_1 = 7$ см.

3.64. Трикутник ABC і площина α не мають спільних точок. Точка N – середина AC, точка M – центроїд трикутника. Через точки A, B, C, N і M проведено паралельні прямі, що перетинають площину α у точках A_1, B_1, C_1, N_1 і M_1 відповідно. Знайдіть KK_1 і CC_1, якщо $AA_1 = 9$ см, $BB_1 = 11$ см, $MM_1 = 7$ см.

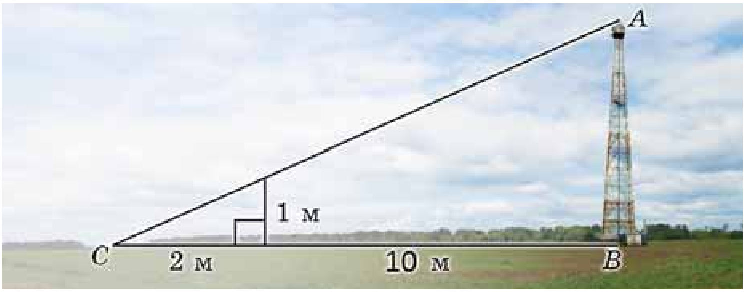
3.65. Дано правильний тетраедр $A_1A_2A_3A_4$, ребро якого має довжину a см, M_1, M_2, M_3, M_4 – центроїди граней $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ відповідно.

1) Доведіть, що $M_1M_2 \parallel A_1A_2$.

2) Знайдіть довжину кожного з ребер тетраедра $M_1M_2M_3M_4$.

3.66. Точка D не належить площині трикутника ABC. На відрізках BD, AD, AC і BC вибрано точки K, L, M і N так, що $DK : KB = DM : MA = CL : LA = CN : NB = 1 : 3$. Знайдіть периметр чотирикутника $KLMN$, якщо $AB = 16$ см, $DC = 20$ см.

3.67. Використовуючи дані, наведені на малюнку 3.26, знайдіть висоту щогли AB.



Мал. 3.26

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

3.68. У трикутнику ABC точка K – середина AB, точка L – середина BC. Знайдіть: 1) KL, якщо $AC = 16$ см; 2) AC, якщо $KL = 3$ см.

3.69. Пряма MN паралельна стороні AB трикутника ABC, $M \in AC$, $N \in BC$, $CM = 2$ см, $AC = 6$ см, $MN = 3$ см. Знайдіть AB.

3.70. (*Національна олімпіада Австрії, 1971 р.*). Медіани трикутника ABC перетинаються в точці M. Доведіть, що $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3(AM^2 + BM^2 + CM^2)$.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 3

1. У колі, радіус якого 10 см, проведено хорду завдовжки 16 см. Знайдіть відстань від центра кола до даної хорди.

А	Б	В	Г	Д
5 см	6 см	7 см	8 см	10 см

2. Укажіть координати середини відрізка AB, якщо $A(-2; 7)$, $B(4; 0)$.

А	Б	В	Г	Д
(3,5; 1)	(–1; 3,5)	(4; 7)	(1; 3,5)	(–3; 3,5)

3. У коло вписано чотирикутник $ABCD$. Знайдіть кут A, якщо $\angle C = 80°$.

А	Б	В	Г	Д
100°	80°	60°	40°	знайти неможливо

4. Знайдіть радіус кола, вписаного у правильний трикутник зі стороною $2\sqrt{3}$ см.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$ см	2 см	1 см	$\frac{\sqrt{3}}{3}$ см	3 см

5. Установіть відповідність між довжинами сторін трикутника (1–4) та його видом (А–Д).

Довжини сторін трикутника

1 6 см, 6 см, 9 см
2 6 см, 7 см, 10 см
3 6 см, 8 см, 10 см
4 6 см, 7 см, 8 см

Вид трикутника

А гострокутний різносторонній
Б гострокутний рівнобедрений
В прямокутний
Г тупокутний різносторонній
Д тупокутний рівнобедрений

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Сума зовнішніх кутів трикутника ABC, узятих по одному при вершинах B і C, дорівнює 240°. Знайдіть градусну міру кута BAC.

§ 4. ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ У ПРОСТОРІ. ОЗНАКА ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

1. Взаємне розміщення прямої і площини

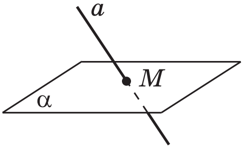
Як стверджує аксіома C_{II}, якщо дві точки прямої належать площині, то і вся пряма (тобто всі її точки) належить цій площині. Пряма і площина можуть також мати тільки одну спільну точку або не мати спільних точок узагалі. Отже, можна дійти висновку, що *є три випадки взаємного розміщення прямої і площини*:

1) пряма може належати площині (мал. 4.1);

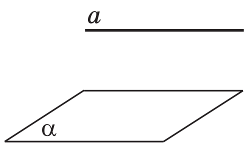
Мал. 4.1

2) пряма і площина можуть мати одну спільну точку, тобто перетинатися (мал. 4.2);

3) пряма і площина можуть узагалі не мати спільних точок (мал. 4.3).



Мал. 4.2



Мал. 4.3

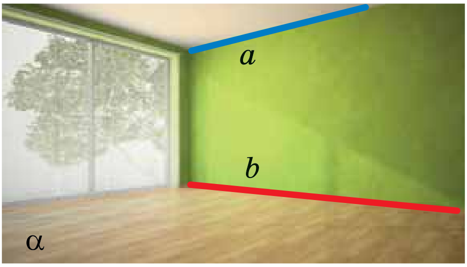
2. Паралельність прямої і площини

Пряму і площину називають *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок.

На малюнку 4.3 пряма a паралельна площині α, що позначають так: $a \parallel \alpha$.

Уявлення про паралельні між собою пряму і площину в повсякденному житті можна отримати, наприклад, спостерігаючи за туго натягнутими дротами лінії електропередач, що є паралельними поверхні землі (мал. 4.4), або за лінією перетину стіни кімнати зі стелею, що є паралельною підлозі (пряма a на малюнку 4.5 паралельна площині підлоги α).

Мал. 4.4

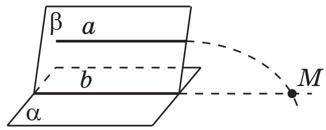


Мал. 4.5

Зауважимо, що у площині підлоги є пряма b, яка паралельна прямій a (мал. 4.5). Доведемо, що наявність у площині α прямої b, паралельної прямій a, є *ознакою паралельності прямої і площини*.

Т Теорема 1 (ознака паралельності прямої і площини). **Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.**

Доведення. Нехай $a \not\subset \alpha$ і $a \parallel b$, $b \subset \alpha$ (мал. 4.6). Доведемо, що $a \parallel \alpha$.



Мал. 4.6

1) Оскільки $a \parallel b$, то через прямі a і b можна провести площину, назвемо її β (мал. 4.6).

2) Тоді пряма b лежить у кожній з площин α і β, отже, є прямою їх перетину.

3) Припустимо, що пряма a не паралельна площині α, тоді вона її перетинає, тобто має з нею спільну точку M.

4) Оскільки $M \in a$, $a \subset \beta$, то $M \in \beta$. Тобто точка M належить і площині α, і площині β, а тому належить прямій b перетину площин α і β.

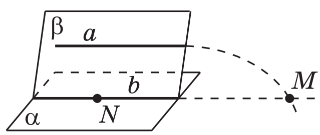
5) Отже, отримали, що прямі a і b перетинаються в точці M, що суперечить умові. Тому наше припущення хибне.

6) Отже, пряма a паралельна площині α. ■

Із цієї теореми, зокрема, випливає факт існування і спосіб побудови прямої, яка паралельна даній площині та проходить через точку, що цій площині не належить.

Т Теорема 2 (обернена до ознаки паралельності прямої і площини). **Якщо дана пряма паралельна деякій площині, то в цій площині знайдеться пряма, паралельна даній прямій.**

Доведення. Нехай a і α – дані пряма і площина, $a \parallel \alpha$ (мал. 4.7).



Мал. 4.7

1) У площині α виберемо довільну точку N. Через пряму a і точку N, що їй не належить, проведемо площину β.

2) Площина β відмінна від площини α, оскільки проходить через пряму a, яка не належить площині α.

3) Оскільки площини α і β мають спільну точку N, то вони перетинаються по деякій прямій b, що проходить через цю точку.

4) Доведемо, що $b \parallel a$. Прямі a і b лежать в одній площині – площині β і не збігаються. Припустимо, що вони перетинаються в точці M. Оскільки $M \in b$, а $b \subset \alpha$, то $M \in \alpha$. Маємо, що точка M – точка перетину прямої a з площиною α, а це суперечить умові.

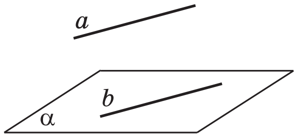
5) Отже, наше припущення хибне, тому $a \parallel b$. ■

Н Наслідок. Якщо пряма паралельна площині, то через будь-яку точку цієї площини можна провести пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

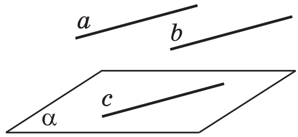
Задача 1. Довести, що коли одна з двох паралельних прямих паралельна деякій площині, то друга пряма або паралельна цій площині, або лежить у цій площині.

Доведення. Нехай a і b – дані прямі, $a \parallel b$, $a \parallel \alpha$.

1) Пряма b може належати площині α (мал. 4.8) (у цьому випадку умова задачі виконується).



Мал. 4.8



Мал. 4.9

2) Пряма b може не належати площині α (мал. 4.9). У площині α, за теоремою, оберненою до ознаки паралельності прямої і площини, існує пряма c, паралельна a. Отже, $a \parallel c$, $a \parallel b$. Тоді, за ознакою паралельності прямих, маємо, що $b \parallel c$. Ураховуючи, що $c \subset \alpha$, за ознакою паралельності прямої і площини, отримаємо, що $b \parallel \alpha$.

3) Отже, $b \subset \alpha$ або $b \parallel \alpha$. ■

Задача 2. Довести, що коли площина проходить через пряму, паралельну іншій площині, і перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна даній прямій.

Доведення. Нехай через дану пряму a, паралельну площині α, проходить площина β, яка перетинає α по прямій b (мал. 4.6). Доведемо, що $b \parallel a$, від супротивного.

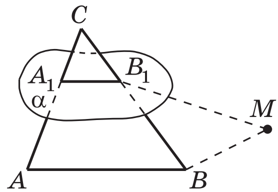
1) Прямі a і b лежать в одній площині – площині β.

2) Припустимо, що a і b перетинаються в точці M. Але тоді точка M – точка перетину прямої a і площини α, що суперечить умові.

3) Отже, наше припущення хибне, тому $a \parallel b$. ■

Зауважимо, що висновок цієї задачі можна вважати ще однією ознакою паралельності прямих.

Задача 3. Площина, паралельна стороні AB трикутника ABC, перетинає сторону AC у точці A_1, а сторону BC – у точці B_1. Знайти довжину сторони AB, якщо $A_1B_1 = 10$ см, $AC : A_1C = 5 : 2$.



Мал. 4.10

Розв'язання. 1) Прямі AB і A_1B_1 лежать в одній площині – площині трикутника ABC (мал. 4.10).

2) Припустимо, що AB і A_1B_1 перетинаються в точці M.

3) Оскільки $M \in A_1B_1$, $A_1B_1 \in \alpha$, то $M \in \alpha$. Тоді точка M є точкою перетину прямої AB і площини α, що суперечить умові. Отже, $AB \parallel A_1B_1$.

4) Розглянемо трикутники ACB і A_1CB_1, у яких кут C – спільний, $\angle CB_1A_1 = \angle CBA$ (як відповідні при паралельних прямих AB і A_1B_1 та січній CB). Тому $\triangle ACB \sim \triangle A_1CB_1$ (за двома кутами).

5) Тоді $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C}$, тобто $\dfrac{AB}{10} = \dfrac{5}{2}$, звідки $AB = 25$ (см).

Відповідь. 25 см.

• Яким може бути взаємне розміщення прямої і площини? • Сформулюйте означення паралельних прямої і площини. • Сформулюйте й доведіть ознаку паралельності прямої і площини. • Сформулюйте й доведіть теорему, обернену до ознаки паралельності прямої і площини. • Сформулюйте наслідок із цієї теореми.

Графічна робота № 3

Виконайте малюнки до тверджень і підпишіть точки, прямі та площини на отриманих малюнках.

1. Через точку M, що не належить площині β, проходить пряма c, паралельна β.

2. Пряма CD паралельна площині α, а пряма CB перетинає площину α у точці B.

3. Площина α проходить через середини сторін AC і BC трикутника ABC і не містить точки C.

4. Сторона AB паралелограма $ABCD$ належить площині γ, а прямі KC і KD перетинають цю площину в точках C_1 і D_1 відповідно.

5. Через пряму a, яка паралельна прямій b, проходить площина β, паралельна прямій b.

6. Прямі a і b мимобіжні. Через пряму a проходить площина γ, паралельна прямій b.

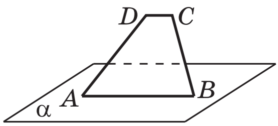
7. Через точку A проведено пряму m, паралельну площинам α і β, які перетинаються по прямій b.

8. Через точку B паралельно мимобіжним прямим a і b проведено площину γ.

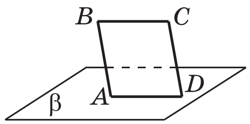
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **4.1.** Основа AB трапеції $ABCD$ належить площині α (мал. 4.11), а основа CD не належить цій площині. Як розміщена пряма CD відносно площини α?

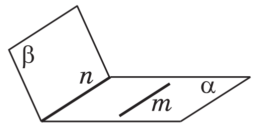
4.2. Сторона AD паралелограма $ABCD$ належить площині β, а сторона BC не належить цій площині (мал. 4.12). Як розміщена пряма BC відносно площини β?



Мал. 4.11



Мал. 4.12



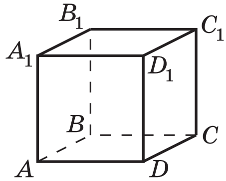
Мал. 4.13

4.3. Площина проходить через одну з двох паралельних прямих і не проходить через другу. Яке взаємне розміщення площини і другої прямої?

4.4. Площини α і β перетинаються по прямій n (мал. 4.13). У площині α проведено пряму m, паралельну прямій n. Яке взаємне розміщеня прямої m і площини β?

4.5. Скільки прямих, паралельних даній площині, можна провести через точку, що не лежить у цій площині? Виконайте малюнок.

4.6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 4.14). Запишіть усі прямі, які:
1) паралельні площині ABC;
2) перетинають площину ABB_1;
3) належать площині AA_1D.



Мал. 4.14

4.7. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 4.14). Запишіть деякі дві прямі, які:
1) паралельні площині BB_1C_1;
2) перетинають площину DCC_1;
3) належать площині $A_1B_1C_1$.

2 **4.8.** Чи правильне твердження (відповідь обґрунтуйте):
1) якщо пряма паралельна площині, то вона не перетинає жодної прямої, що належить цій площині;
2) якщо пряма паралельна площині, то вона не перетинає жодної прямої, що паралельна цій площині?

4.9. Пряма b паралельна площині γ. Чи кожна пряма, що лежить у площині γ, буде паралельна прямій b? Відповідь обґрунтуйте.

4.10. Чи можливо, щоб пряма a перетинала площину α, але у площині α існувала пряма, паралельна прямій a?

4.11. Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає й другу.

4.12. Прямі a і b паралельні. Яким може бути взаємне розміщення прямої b і площини α, якщо:
1) a і α паралельні; 2) a і α перетинаються;
3) пряма a лежить у площині α?
Виконайте відповідні малюнки.

4.13. Прямі a і b перетинаються. Яким може бути взаємне розташування прямої b і площини α, якщо:
1) a і α паралельні; 2) a і α перетинаються;
3) пряма a лежить у площині α?
Виконайте відповідні малюнки.

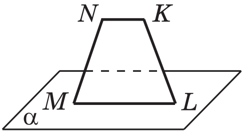
4.14. Пряма m перетинає площину α. Яким може бути взаємне розташування прямих m і n, якщо:
1) α і n паралельні;
2) α і n перетинаються;
3) n належить α?
Виконайте відповідні малюнки.

4.15. Пряма m лежить у площині α. Яким може бути взаємне розташування прямих m і n, якщо:
1) α і n паралельні;
2) α і n перетинаються;
3) n належить α?
Виконайте відповідні малюнки.

4.16. Точка N не лежить у площині прямокутника $ABCD$. Доведіть, що пряма CD паралельна площині ABN.

4.17. Точка L не лежить у площині паралелограма $ABCD$. Доведіть, що пряма AB паралельна площині DLC.

4.18. Через сторону ML чотирикутника $KLMN$, у якого $\angle LNK = \angle NLM$, проведено площину α (мал. 4.15). Доведіть, що $NK \parallel \alpha$.



Мал. 4.15

4.19. Через сторону ML чотирикутника $KLMN$, у якого $\angle NKL + \angle KLM = 180°$, проведено площину α (мал. 4.15). Доведіть, що $NK \parallel \alpha$.

4.20. Дано дві мимобіжні прямі a і b. Через кожну точку прямої b проведено пряму, паралельну прямій a. Доведіть, що всі ці прямі лежать в одній площині. Як розташована ця площина відносно прямої a? Відповідь обґрунтуйте.

4.21. *QABC* – тетраедр, точки *K*, *L*, *N* і *M* – середини ребер *AQ*, *BQ*, *BC* і *AC* відповідно. Яким є взаємне розміщення:
1) прямої *QB* і площини *BMN*;
2) площини *KML* і прямої *LN*;
3) прямої *MN* і площини *ABQ*;
4) площини *AQN* і прямої *CL*?

4.22. *TABC* – тетраедр, точки *K*, *D*, *N* і *M* – середини ребер *AT*, *BT*, *BC* і *AC* відповідно. Яким є взаємне розміщення:
1) площини *ABC* і прямої *MN*;
2) прямої *KD* і площини *TMN*;
3) площини *TMN* і прямої *KC*;
4) прямої *DN* і площини *TMK*?

4.23. Сторона *AB* трикутника *ABC* паралельна площині α, а сторони *CA* і *CB* перетинають площину α в точках *K* і *L* відповідно. 1) Доведіть, що $\triangle CKL \sim \triangle CAB$.
2) Знайдіть *KL*, якщо *CK* = 3 см, *CA* = 7 см, *AB* = 14 см.

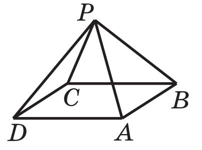
4.24. Сторона *BC* трикутника *ABC* паралельна площині β, а сторони *AB* і *AC* перетинають площину β в точках *M* і *N* відповідно. 1) Доведіть, що $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.
2) Знайдіть *BC*, якщо *MN* = 2 см, *AB* = 9 см, *AM* = 3 см.

4.25. Площина α, яка паралельна основам *AB* і *CD* трапеції *ABCD*, перетинає бічні сторони *AD* і *BC* відповідно в точках *M* і *N*. Знайдіть *AB*, якщо *M* – середина *AD*, *MN* = 6 см, *DC* = 10 см.

4.26. Площина β, яка паралельна основам *AD* і *BC* трапеції *ABCD*, перетинає бічні сторони *AB* і *CD* відповідно в точках *K* і *L*. Знайдіть *KL*, якщо *K* – середина *AB*, *AD* = 12 см, *BC* = 4 см.

3

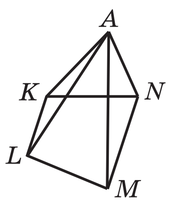
4.27. Доведіть, що коли пряма *n* паралельна кожній з двох площин α і β, які перетинаються, то пряма *n* паралельна прямій перетину площин α і β.



Мал. 4.16

4.28. Доведіть, що через кожну з двох мимобіжних прямих можна провести площину, паралельну другій прямій, і до того ж тільки одну.

4.29. Точка *P* не належить площині паралелограма *ABCD* (мал. 4.16). Запишіть усі пари прямих і площин, паралельних між собою.



Мал. 4.17

4.30. Точка *A* не належить площині трапеції *KLMN* з основами *KL* і *MN* (мал. 4.17). Запишіть усі пари прямих і площин, паралельних між собою.

4.31. Площина α і пряма a, що не лежить у площині α, паралельні одній і тій самій прямій b. Яким є взаємне розміщення прямої a і площини α? Відповідь обґрунтуйте.

4.32. Пряма a паралельна площині β. Через пряму a проведено площину α, що перетинає площину β по прямій c. Яким є взаємне розташування прямих a і c? Відповідь обґрунтуйте.

4.33. Площина α паралельна стороні AB трикутника ABC і перетинає сторони AC і BC у точках D і E відповідно. Знайдіть AC, якщо $AD = 8$ см, $DE = 3$ см, $AB = 7$ см.

4.34. Площина β паралельна стороні BC трикутника ABC та перетинає сторони AB і AC у точках M і N відповідно. Знайдіть AN, якщо $MN = 9$ см, $BC = 13$ см, $NC = 8$ см.

4.35. Трикутник ABP і прямокутник $ABCD$ мають спільну сторону AB і лежать у різних площинах. Через сторону DC і точку M – середину відрізка AP – проведено площину, яка перетинає PB у точці N.

1) Доведіть, що прямі AB і MN паралельні.
2) Знайдіть AB, якщо $MN = 5$ см.
3) Визначте вид чотирикутника $DMNC$.

4.36. Трикутник ADF і ромб $ABCD$ мають спільну сторону AD і лежать у різних площинах. Через сторону BC і точку P – середину DF – проведено площину, яка перетинає AF у точці T.

1) Доведіть, що прямі AD і TP паралельні.
2) Знайдіть TP, якщо $AD = 12$ см.
3) Визначте вид чотирикутника $BTPC$.

4.37. Доведіть, що коли пряма a паралельна площині α, то будь-яка пряма, що паралельна прямій a і проходить через точку площини α, лежить у площині α.

4.38. Точка K належить грані ABC тетраедра $QABC$ і не належить жодному з його ребер. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку K паралельно прямим AB і QC.

4.39. Точка M належить грані ABC тетраедра $TABC$ і не належить жодному з його ребер. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку M паралельно прямим BC і AT.

4.40. У тетраедра $NABC$ усі ребра по 3 дм. Точка K належить ребру BN, $NK = 1$ дм, точка M належить ребру BC, $BM = 2$ дм, точка L – середина ребра AB.

1) Доведіть, що $KM \parallel (ANC)$.

2) Доведіть, що пряма LM перетинає площину ANC.
3) Проведіть через точку L пряму, яка паралельна площині ANC і перетинає ребро BN у точці Q.
4) Знайдіть довжину відрізка KQ.

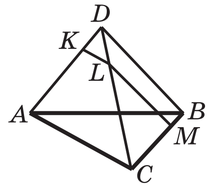
4.41. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точки K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7 і K_8 – середини ребер AB, BB_1, B_1A_1, A_1A, CD, CC_1, C_1D_1 і DD_1 відповідно. Яким є взаємне розміщення:
1) прямої K_3K_4 і площини $K_1K_2K_6$;
2) площини $K_1K_2K_6$ і прямої K_7K_8;
3) прямої K_4K_7 і площини $K_1K_2K_5$;
4) площини AB_1D і прямої K_1K_6;
5) прямої AC і площини $K_3K_4K_5$;
6) площини $K_3K_4K_5$ і прямої BD?

4.42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точки L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7 і L_8 – середини ребер AB, BB_1, B_1A_1, A_1A, CD, CC_1, C_1D_1 і DD_1 відповідно. Яким є взаємне розміщення:
1) прямої L_7L_8 і площини $L_2L_5L_6$;
2) площини $L_2L_5L_6$ і прямої L_3L_4;
3) прямої L_3L_8 і площини $L_1L_5L_6$;
4) площини ADC_1 і прямої L_2L_5;
5) прямої AC і площини $L_1L_7L_8$;
6) площини $L_1L_7L_8$ і прямої BD?

4 **4.43.** Площини α і β перетинаються по прямій n, пряма m є мимобіжною з прямою n і паралельною площині β. Яким може бути взаємне розміщення прямої m і площини α? Відповідь обґрунтуйте.

4.44. Площини α і β перетинаються по прямій c, пряма d паралельна площині α і паралельна прямій c. Яким може бути взаємне розміщення прямої d і площини β? Відповідь обґрунтуйте.

4.45. Точка D не лежить у площині трикутника ABC (мал. 4.18). На відрізках AD, CD і BC позначено точки K, L і M відповідно так, що $DK : KA = DL : LC = BM : MC = 1 : 3$.
1) Доведіть, що пряма AC паралельна площині KLM.
2) Яким є взаємне розміщення прямої BD і площини KLM?
3) Побудуйте точку N – точку перетину площини KLM і відрізка AB. Побудову обґрунтуйте.
4) Знайдіть P_{KLMN}, якщо $AC = 8$ см, $BD = 12$ см.



Мал. 4.18

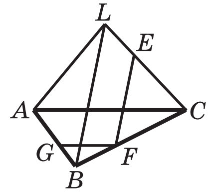
4.46. Точка L не лежить у площині трикутника ABC (мал. 4.19). На відрізках LC, BC і BA позначено точки E, F і G відповідно так, що $LE : EC = BF : FC = BG : GA = 1 : 2$.

1) Доведіть, що $BL \parallel (EFG)$.

2) Яким є взаємне розміщення прямої AC і площини EFG?

3) Побудуйте точку H – точку перетину площини EFG і прямої AL.

4) Знайдіть P_{EFGH}, якщо $AC = 9$ см, $BL = 15$ см.



Мал. 4.19

4.47. Доведіть, що через будь-яку точку простору, яка не лежить на жодній з двох даних мимобіжних прямих, можна провести площину, паралельну кожній із цих двох прямих. Скільки таких площин можна провести?

4.48. Прямі AC і BD – мимобіжні. Точка M лежить на прямій AB між точками A і B. Побудуйте площину, що проходить через точку M паралельно прямим AC і BD. Скільки таких площин можна побудувати?

4.49. Точка P не лежить у площині трикутника ABC, M – середина AP. Яким є взаємне розміщення площини MPB та прямої, що проходить через середини сторін CA і CB?

4.50. Точка L лежить поза площиною паралелограма $ABCD$.

1) Побудуйте пряму перетину площин LAB і LCD.

2) Яким є взаємне розміщення побудованої прямої і площини паралелограма?

4.51. Точка M лежить поза площиною трикутника ABC, E – середина AC, D – середина BC.

1) Побудуйте пряму перетину площин MAB і MED.

2) Яким є взаємне розміщення побудованої прямої і площини трикутника?

4.52. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M і N – середини ребер AB і AC відповідно. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки M і N паралельно прямій BD_1.

4.53. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K – середина ребра AA_1. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки K і D_1 паралельно прямій AC.

4.54. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M належить грані $ABCD$, точка M_1 – грані $A_1B_1C_1D_1$, причому точки M і M_1 не належать ребрам паралелепіпеда. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною, що проходить через точки M і M_1 паралельно прямій AA_1. Розгляньте випадки, коли прямі AA_1 і MM_1 паралельні і коли вони не паралельні. Скільки таких перерізів можна побудувати в кожному із цих випадків?

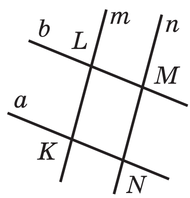
4.55. *QABC* – правильний тетраедр, ребро якого дорівнює 3 см. Точка *M* – центр трикутника *ABC*. Через точку *M* паралельно прямій *BC* проведено переріз, що перетинає ребро *AQ* в точці *N*. Побудуйте цей переріз та укажіть межі зміни периметра та площі перерізу залежно від положення точки *N*.

4.56. *QABC* – правильний тетраедр, ребро якого дорівнює 8 см. Через вершину *A* тетраедра паралельно ребру *BC* проведено переріз.
1) Скільки таких перерізів можна провести?
2) Яку фігуру являє собою цей переріз?
3) Знайдіть площу того з можливих перерізів, який проходить через середину ребра *QB*.

4.57. Одного рулону шпалер вистачає для обклеювання смуги стіни від підлоги до стелі завширшки 1,6 м. Скільки рулонів шпалер потрібно придбати для обклеювання прямокутної кімнати з вимірами 3,7 м × 4,6 м? (Площею вікон і дверей знехтувати.)

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

4.58. Відомо, що $a \parallel b$, $m \parallel n$ (мал. 4.20). Укажіть вид чотирикутника *KLMN*.



Мал. 4.20

4.59. (*Задача Стенфордського університету.*) Дано правильний шестикутник і точку, що належить його площині. Через цю точку проведіть пряму, яка поділить даний шестикутник на два рівновеликих многокутники.

Перевірте свою компетентність

Завдання № 4

1. Обчисліть площу паралелограма, дві сторони якого дорівнюють 6 см і $7\sqrt{3}$ см, а кут між ними 60°.

А	Б	В	Г	Д
21 см^2	$21\sqrt{3}$ см^2	31,5 см^2	63 см^2	обчислити неможливо

2. $ABCD$ – прямокутник, $\angle BDA = 32°$. Знайдіть кут між прямими AC і BD.

А	Б	В	Г	Д
32°	64°	116°	58°	122°

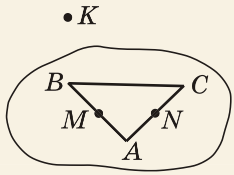
3. Дві взаємно перпендикулярні хорди кола, що мають спільний кінець, дорівнюють 6 см і 8 см. Знайдіть радіус кола.

А	Б	В	Г	Д
5 см	6 см	7 см	8 см	9 см

4. Відомо, що $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$, $AB = 10$ см, $A_1B_1 = 14$ см. Знайдіть $P_{A_1B_1C_1}$, якщо $P_{ABC} = 35$ см.

А	Б	В	Г	Д
42 см	25 см	49 см	40 см	знайти неможливо

5. Дано трикутник ABC і точки M і N, які є відповідно серединами сторін AB і AC цього трикутника (див. мал.). Точка K не належить площині ABC. Установіть відповідність між парою прямих (1–4) та їх взаємним розміщенням (А–Д).



Пара прямих

1 KN і AB
2 MN і BC
3 KM і KN
4 KN і AC

Взаємне розміщення

А перетинаються в точці K
Б перетинаються в точці N
В перетинаються в точці M
Г мимобіжні
Д паралельні

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

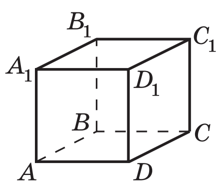
6. Основи трапеції дорівнюють 7 см і 21 см, а бічні сторони – 13 см і 15 см. Знайдіть площу трапеції (у см²).

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 2

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

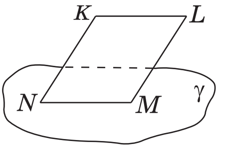
1

1. На малюнку 4.21 зображено прямокутний паралелепіпед. Яким є взаємне розміщення прямих AB і CC_1?



Мал. 4.21

А. Не можна визначити
Б. Паралельні
В. Мимобіжні
Г. Перетинаються



Мал. 4.22

2. Сторона MN ромба $KLMN$ лежить у площині γ (мал. 4.22), а сторона KL не лежить у цій площині. Яким є взаємне розміщення прямої KL і площини γ?

А. Визначити неможливо Б. Перетинає площину
В. Належить площині Г. Паралельна площині

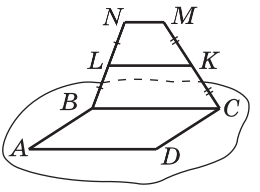
3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 4.21). Укажіть пряму, яка перетинає площину ABA_1.

А. D_1C_1 Б. B_1C_1 В. BB_1 Г. DD_1

2

4. Пряма MN, яка не лежить у площині ромба $ABCD$, паралельна стороні AB цього ромба. Яким є взаємне розміщення прямих MN і CD?

А. Мимобіжні Б. Паралельні
В. Перетинаються Г. Визначити неможливо



Мал. 4.23

5. Квадрат $ABCD$ і трапеція $BCMN$, у якої $BC \parallel MN$, не лежать в одній площині (мал. 4.23). Точка L – середина NB, точка K – середина MC. Знайдіть P_{ABCD}, якщо $MN = 5$ см, $LK = 8$ см.

А. 32 см Б. 40 см
В. 44 см Г. 48 см

6. Точка M не належить площині прямокутника $ABCD$. Укажіть пару паралельних між собою прямої і площини.

А. Пряма CD і площина ABM
Б. Пряма AB і площина ABM
В. Пряма AB і площина BMC
Г. Пряма BD і площина AMC

3

7. $ABCD$ – паралелограм. Точка M не лежить у його площині, точки A_1, B_1, C_1, D_1 – середини відрізків MA, MB, MC і MD відповідно. Знайдіть P_{ABCD}, якщо $P_{A_1B_1C_1D_1} = 10$ см.

А. 10 см Б. 15 см В. 20 см Г. Знайти неможливо

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точки K_1, K_2, K_3, K_4 – середини ребер AA_1, AB, C_1D_1 і C_1C відповідно. Яким є взаємне розміщення прямих K_1K_2 і K_3K_4?

А. Визначити неможливо Б. Паралельні
В. Мимобіжні Г. Перетинаються

9. Площина β паралельна стороні BC трикутника ABC і перетинає сторони AB і AC у точках B_1 і C_1 відповідно, $B_1C_1 = 2$ см, $BC = 6$ см, $CC_1 = 8$ см. Знайдіть AC.

А. 20 см **Б.** 11 см **В.** 12 см **Г.** 16 см

10. Ромб $ABCD$ не перетинає площину γ. Через усі його вершини проведено паралельні прямі, які перетинають площину γ відповідно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Знайдіть DD_1, якщо $AA_1 = 5$ см, $BB_1 = 7$ см, $CC_1 = 10$ см.

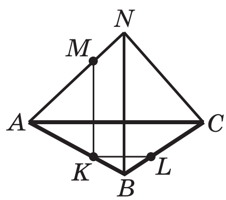
А. 4 см **Б.** 6 см **В.** 8 см **Г.** 2 см

11. Через точки K, L і середину B відрізка KL проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках K_1, L_1 і B_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка KK_1, якщо $LL_1 = 4$ см, $BB_1 = 2$ см, $KK_1 > LL_1$ і відрізок KL перетинає площину α.

А. 6 см **Б.** 10 см **В.** 12 см **Г.** 8 см

12. Точка N не лежить у площині трикутника ABC (мал. 4.24). На відрізках AB, BC і AN узято точки K, L і M так, що $AK : KB = CL : LB = AM : MN = 2 : 1$. Точка F – точка перетину площини KLM і прямої NC. Знайдіть P_{KLFM}, якщо $AC = 15$ см, $BN = 18$ см.

А. 34 см **Б.** 36 см
В. 30 см **Г.** 38 см

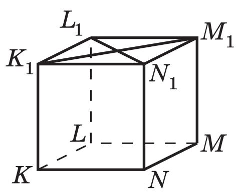


Мал. 4.24

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 3–4

1. На малюнку 4.25 зображено куб. Яким є взаємне розміщення прямих:

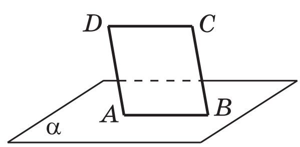
1) K_1N_1 і KN; 2) K_1M_1 і L_1N_1;
3) LL_1 і NN_1; 4) L_1N_1 і M_1M?



Мал. 4.25

2. Сторона AB квадрата $ABCD$ належить площині α, а сторона CD їй не належить (мал. 4.26). Яким є взаємне розміщення прямої CD відносно площини α?

3. $KLMNK_1L_1M_1N_1$ – куб (мал. 4.25). Укажіть будь-які дві прямі, які:
1) паралельні площині KLL_1;
2) перетинають площину KNM;
3) належать площині NMM_1.
Відповідь обґрунтуйте.

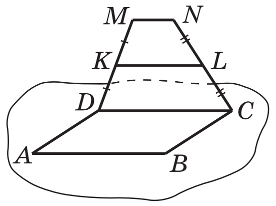


Мал. 4.26

2 **4.** Пряма KN, яка не лежить у площині паралелограма $ABCD$, паралельна стороні BC цього паралелограма. Яким є взаємне розміщення прямих:

1) KN і AD; 2) KC і AB?

Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 4.27

5. Паралелограм $ABCD$ і трапеція $CDMN$, у якої $CD \parallel MN$, не лежать в одній площині, K – середина MD, L – середина NC (мал. 4.27).

1) Доведіть, що $KL \parallel AB$.

2) Знайдіть MN, якщо $AB = 10$ см, $KL = 8$ см.

6. Точка A не лежить у площині ромба $KLMN$. Доведіть, що пряма MN паралельна площині AKL.

3 **7.** $KLMN$ – трапеція, периметр якої дорівнює 30 см. Точка A не лежить у площині трапеції. Знайдіть $P_{K_1L_1M_1N_1}$, де K_1, L_1, M_1, N_1 – середини відрізків AK, AL, AM, AN відповідно.

8. Площина α паралельна стороні AC трикутника ABC та перетинає сторони BA і BC у точках A_1 і C_1 відповідно. Знайдіть довжину сторони BC, якщо $A_1C_1 = C_1C = 4$ см, $AC = 12$ см.

4 **9.** Точка P не належить площині трикутника ABC. На відрізках PA, PC і BC позначено точки K, L і M відповідно. Відомо, що $PK : KA = PL : LC = BM : MC = 2 : 3$.

1) Яким є взаємне розміщення прямої AC і площини KLM?

2) Побудуйте точку N – точку перетину площини KLM і відрізка AB. Побудову обґрунтуйте.

3) Знайдіть периметр чотирикутника $KLMN$, якщо $AC = 10$ см, $PB = 15$ см.

Додаткові завдання

3 **10.** Точка M належить грані QAB тетраедра $QABC$ і не належить жодному з ребер тетраедра. Побудуйте переріз тетраедра, що проходить через точку M паралельно прямим QB і AC.

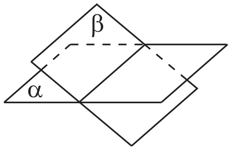
4 **11.** Паралелограм $ABCD$ не перетинає площину α. Через його вершини A, B, C, D проведено паралельні прямі, що перетинають площину α відповідно в точках A_1, B_1, C_1, D_1. Знайдіть AA_1, якщо $BB_1 = 6$ см, $CC_1 = 7$ см, $DD_1 = 10$ см.

§ 5. РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ. ОЗНАКИ ТА ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПЛОЩИН

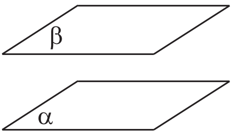
1. Взаємне розміщення двох площин

Як стверджується в аксіомі C_{III}, якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій. Отже, можна зробити висновок, що є *два випадки взаємного розміщення двох площин*:

1) площини можуть перетинатися по прямій (мал. 5.1);
2) площини можуть не мати спільних точок (мал. 5.2).



Мал. 5.1



Мал. 5.2

2. Паралельні площини

Дві площини називають *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок.

На малюнку 5.2 площини α і β паралельні, це позначають так: α ∥ β.

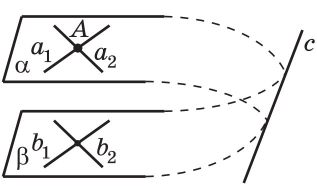
Уявлення про паралельні площини в повсякденному житті дають, наприклад, дно та кришка закритої коробки, стеля і підлога кімнати, шибки склопакета тощо.

Т е о р е м а 1 (ознака паралельності площин). **Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.**

Д о в е д е н н я. Нехай α і β – дані площини (мал. 5.3), a_1 і a_2 – дві прямі, що лежать у площині α і перетинаються в точці A, b_1 і b_2 – дві прямі, що лежать у площині β, причому $a_1 \parallel b_1$, $a_2 \parallel b_2$.

1) Маємо, що $a_1 \parallel \beta$, $a_2 \parallel \beta$ (за ознакою паралельності прямої і площини).

2) Доведемо, що α ∥ β від супротивного. Припустимо, що площини α і β перетинаються по прямій c.



Мал. 5.3

3) Пряма c лежить у площині α і не має спільних точок з a_1. Справді, якби c і a_1 перетиналися, то ця точка була б також точкою перетину прямої a_1 і площини β, але ж $a_1 \parallel \beta$. Тому $a_1 \parallel c$.

4) Аналогічно $a_2 \parallel c$. Приходимо до того, що через точку A проходять дві різні прямі a_1 і a_2, паралельні прямій c, що суперечить теоремі про існування прямої, паралельної даній.

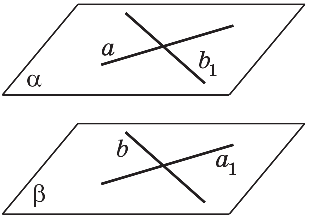
5) Отже, наше припущення хибне, тому $\alpha \parallel \beta$. ■

Н **Наслідок.** **Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини паралельні іншій площині, то ці площини паралельні.**

Задача 1. Побудуйте паралельні площини, що проходять через дві мимобіжні прямі.

Розв'язання. Нехай a і b – мимобіжні прямі.

1) Через довільну точку прямої a проведемо пряму b_1, паралельну b, а через довільну точку прямої b проведемо пряму a_1, паралельну a (мал. 5.4).



Мал. 5.4

2) Через прямі a і b_1 проведемо площину α, а через прямі b і a_1 – площину β.

3) Тоді $\alpha \parallel \beta$ (за ознакою паралельності площин). Отже, вимогу задачі виконано.

Т **Теорема 2** (про існування площини, паралельної даній). **Через точку поза даною площиною можна провести площину, паралельну даній, і до того ж тільки одну.**

Доведення цієї теореми не наводимо, оскільки воно є досить громіздким.

Задача 2. Довести, що дві площини, які паралельні третій площині, паралельні між собою.

Доведення. Нехай $\alpha \parallel \beta$ і $\alpha \parallel \gamma$. Доведемо, що $\beta \parallel \gamma$ від супротивного.

1) Припустимо, що β і γ перетинаються по деякій прямій m, а деяка точка A належить цій прямій.

2) Тоді маємо, що через точку A проходять дві площини β і γ, паралельні площині α, що суперечить теоремі про існування площини, яка проходить через дану точку паралельно даній площині.

Отже, наше припущення хибне, тому $\beta \parallel \gamma$. ■

3. Властивості паралельних площин

Розглянемо деякі властивості паралельних площин.

1. *Якщо дві паралельні площини перетнути третьою площиною, то прямі перетину будуть паралельні.*

Доведення. Нехай площина γ перетинає паралельні площини α і β по прямих a і b відповідно (мал. 5.5).

1) Прямі a і b лежать в одній площині – площині γ, тому вони або перетинаються, або паралельні.

2) Припустимо, що прямі a і b перетинаються в деякій точці. Тоді ця точка належить кожній із площин α і β, тобто площини перетинаються, що суперечить умові.

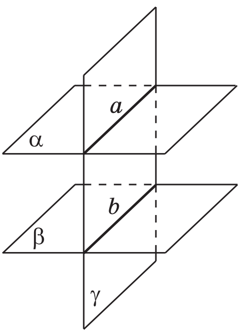
3) Прийшли до протиріччя умові, отже, $a \parallel b$.

2. *Відрізки паралельних прямих, кінці яких належать двом паралельним площинам, між собою рівні.*

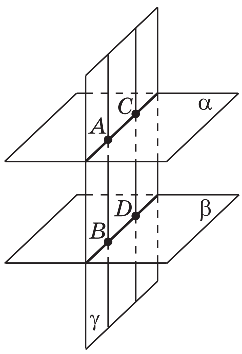
Доведення. Розглянемо відрізки AB і CD паралельних прямих, кінці яких належать двом паралельним площинам α і β, і проведемо через прямі AB і CD площину γ (мал. 5.6).

1) Тоді $\alpha \cap \gamma = AC$, $\beta \cap \gamma = BD$ і за попередньою властивістю матимемо, що $AC \parallel BD$.

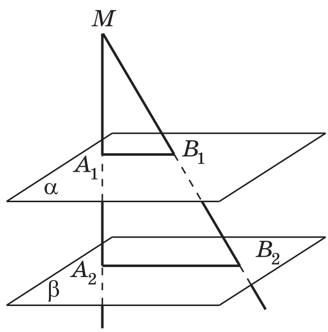
2) Отже, $AB \parallel CD$ і $AC \parallel BD$, тому $ABDC$ – паралелограм. Тоді $AB = CD$ (за властивістю паралелограма).



Мал. 5.5



Мал. 5.6



Мал. 5.7

Задача 3. Два промені зі спільним початком – точкою M – перетинають паралельні площини α і β у точках A_1, B_1 і A_2, B_2 відповідно (мал. 5.7). Довести, що трикутники A_1MB_1 і A_2MB_2 подібні.

Доведення. 1) Проведемо через прямі MA_2 і MB_2 площину. Вона перетинатиме площину α по прямій A_1B_1, а площину β – по прямій A_2B_2.

2) Тоді $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ (за властивістю паралельних площин).

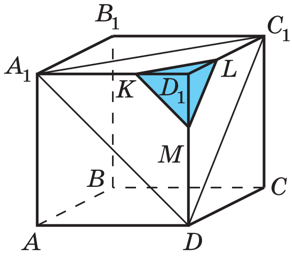
3) Розглянемо трикутники A_1MB_1 і A_2MB_2, у яких кут M – спільний, $\angle MB_1A_1 = \angle MB_2A_2$ (як відповідні кути при перетині паралельних прямих A_1B_1 і A_2B_2 січною MB_2).

4) Тому $\triangle A_1MB_1 \sim \triangle A_2MB_2$ (за двома кутами), що й треба було довести.

Властивості та ознаки паралельних площин дають змогу в досить зручний спосіб будувати перерізи многогранників, які паралельні деякій площині.

Задача 4. На ребрі A_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ позначено точку K так, що $A_1K : KD_1 = 2 : 1$.

1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точку K паралельно площині A_1C_1D.
2) Знайдіть площу цього перерізу, якщо ребро куба дорівнює a см.



Мал. 5.8

Р о з в ' я з а н н я. 1) У грані $A_1B_1C_1D_1$ проведемо пряму KL так, що $KL \parallel A_1C_1$ і $L \in C_1D_1$, а у грані A_1ADD_1 – пряму KM так, що $KM \parallel A_1D$ і $M \in DD_1$ (мал. 5.8).

Тоді за ознакою паралельності площин $(KML) \parallel (A_1C_1D)$, отже, трикутник KLM – шуканий переріз.

Зауважимо, що за властивістю паралельних площин $ML \parallel C_1D$.

2) Оскільки $KM \parallel A_1D$, то $\triangle A_1DD_1 \sim \triangle KMD_1$ (доведіть самостійно).

Тоді $\dfrac{KD_1}{A_1D_1} = \dfrac{MD_1}{DD_1}$, тому $D_1K = D_1M = \dfrac{a}{3}$.

Аналогічно $D_1L = \dfrac{a}{3}$.

У трикутнику KMD_1 ($\angle D_1 = 90°$):

$KM = \sqrt{KD_1^2 + D_1M^2} = \dfrac{a}{3}\sqrt{2}$.

Аналогічно $KL = ML = \dfrac{a}{3}\sqrt{2}$.

$\triangle KML$ – правильний. Знайдемо його площу:

$$S_{KML} = \frac{KM^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(\frac{a}{3}\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{18} \text{ см}^2.$$

В і д п о в і д ь. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{18}$ см².

• Яким може бути взаємне розміщення двох площин? • Сформулюйте означення паралельних площин. • Сформулюйте й доведіть ознаку паралельності площин. Сформулюйте наслідок із цієї ознаки. • Сформулюйте теорему про існування площини, паралельної даній. • Сформулюйте й доведіть властивості паралельних площин.

Графічна робота № 4

Виконайте малюнки до тверджень і підпишіть точки, прямі та площини на отриманих малюнках.

1. Пряма AB паралельна площині γ, а площина ABC перетинає площину γ по прямій CD.
2. Пряма a паралельна кожній із двох паралельних площин β і γ.
3. Пряма m паралельна кожній із площин β і γ, які перетинаються.
4. Площини α і β перетинаються по прямій m, а площини β і γ – по прямій n; прямі m і n – паралельні.
5. Площини α і β перетинаються по прямій m, а площини β і γ – по прямій n; прямі m і n перетинаються в точці K.
6. Площини α і β перетинаються по прямій a, площини α і γ – по прямій b; площини β і γ – паралельні.
7. Площини α і β перетинаються по прямій a, площини α і γ – по прямій b; площини β і γ – по прямій c.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

5.1. Наведіть приклади паралельних площин з повсякденного життя.

5.2. Площини α і β паралельні. Пряма a лежить у площині α. Яким є взаємне розміщення прямої a і площини β?

5.3. Площини α і β паралельні. Пряма a лежить у площині α, пряма b – у площині β. Чи можуть прямі a і b перетинатися?

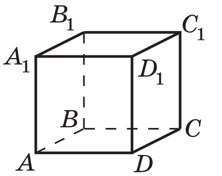
5.4. На малюнку 5.9 зображено прямокутний паралелепіпед. Чи паралельні площини:

1) ABC і $A_1B_1C_1$; 2) ABB_1 і ABC?

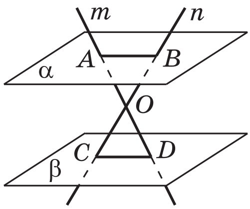
5.5. На малюнку 5.9 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чи паралельні між собою площини:

1) AA_1D і ACD; 2) ABB_1 і CDC_1?

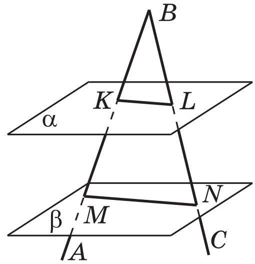
5.6. Прямі m і n перетинаються в точці O і перетинають паралельні площини α і β відповідно в точках A, B, C і D (мал. 5.10). Яким є взаємне розміщення прямих AB і CD?



Мал. 5.9



Мал. 5.10



Мал. 5.11

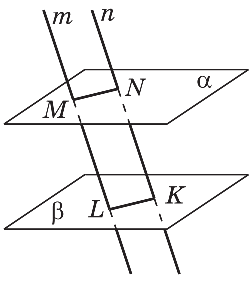
5.7. Сторони кута ABC перетинають паралельні площини α і β відповідно в точках K, L, M і N (мал. 5.11). Яким є взаємне розміщення прямих KL і MN?

5.8. Площини α і β паралельні. Точка M не належить жодній з них. Скільки існує прямих, що проходять через точку M і паралельні кожній з площин α і β?

5.9. Площини α і β паралельні. Точка P не належить жодній з них. Скільки існує площин, що проходять через точку P і паралельні кожній з площин α і β? Скільки існує таких площин?

5.10. Відрізки ML і NK паралельних прямих m і n містяться між паралельними площинами α і β (мал. 5.12). Знайдіть:

1) MN, якщо $LK = 3$ см;
2) ML, якщо $NK = 9$ см.



Мал. 5.12

5.11. Відрізки ML і NK паралельних прямих m і n містяться між паралельними площинами α і β (мал. 5.12). Знайдіть:

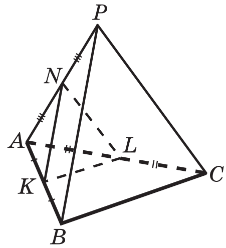
1) NK, якщо $ML = 10$ см;
2) LK, якщо $MN = 4$ см.

2 **5.12.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 5.9). Укажіть паралельні площини, яким належать мимобіжні прямі AA_1 і DC. Відповідь обґрунтуйте.

5.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 5.9). Укажіть паралельні площини, яким належать мимобіжні прямі AB і B_1C_1. Відповідь обґрунтуйте.

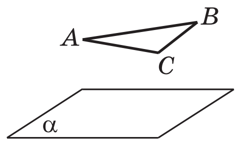
5.14. (*Усно.*) По якій прямій перетинаються площини перерізів AB_1C_1D і BDD_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$?

5.15. Точка P не лежить у площині трикутника ABC (мал. 5.13). Точки K, L, N – середини відрізків AB, AC і AP відповідно. Доведіть, що площина KLN паралельна площині BPC.



Мал. 5.13

5.16. Прямі, що містять сторони AC і AB трикутника ABC, паралельні площині α (мал. 5.14). Доведіть, що пряма BC також паралельна площині α.



Мал. 5.14

5.17. У площині β існують три прямі, паралельні площині α. Чи можна зробити висновок, що площини α і β паралельні?

5.18. Чи можуть бути паралельними площини, які проходять через мимобіжні прямі?

5.19. Доведіть, що коли пряма перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу.

5.20. Площини α і β паралельні. Пряма a паралельна площині α і не лежить у площині β. Доведіть, що пряма a паралельна площині β.

5.21. Доведіть, що коли площина перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає й другу.

5.22. Площини α і β перетинаються. Точка M не належить жодній з них. Доведіть, що будь-яка площина, що проходить через точку M, перетинає принаймні одну з площин α або β.

5.23. Площини α і β паралельні. Яким може бути взаємне розміщення прямої a і площини β, якщо:
1) пряма a паралельна площині α;
2) пряма a перетинає площину α;
3) пряма a належить площині α?
До кожного з випадків виконайте відповідний малюнок.

5.24. Площини α і β перетинаються по прямій b. Яким може бути взаємне розміщення прямої a і площини β, якщо:
1) пряма a паралельна площині α;
2) пряма a перетинає площину α;
3) пряма a належить площині α?
До кожного з випадків виконайте відповідний малюнок.

5.25. Пряма a паралельна площині α. Яким може бути взаємне розміщення площин α і β, якщо:
1) пряма a належить площині β;
2) пряма a перетинає площину β;
3) пряма a паралельна площині β?
До кожного з випадків виконайте відповідний малюнок.

5.26. Пряма a перетинає площину α. Яким може бути взаємне розміщення площин α і β, якщо:
1) пряма a належить площині β;
2) пряма a перетинає площину β;
3) пряма a паралельна площині β?
До кожного з випадків виконайте відповідний малюнок.

5.27. Через точку O, яка лежить між паралельними площинами α і β, проведено прямі m і n (мал. 5.10). Пряма m перетинає площини α і β в точках A і D, а пряма n – у точках B і C відповідно. Знайдіть AB, якщо $OC = OB$ і $CD = 5$ см.

5.28. Площини α і β паралельні. Паралельні прямі a і b перетинають площину α в точках A і B, а площину β – у точках C і D відповідно. Доведіть, що $\angle ABC = \angle BCD$.

5.29. Площини β і γ паралельні. Паралельні прямі m і n перетинають площину β у точках M і N, а площину γ – у точках K і L відповідно. Доведіть, що $\angle MNL + \angle NLK = 180°$.

5.30. Чи правильне твердження: «Якщо пряма належить площині α і паралельна площині β, то площини α і β паралельні»? Відповідь обґрунтуйте.

5.31. Чи можуть перетинатися площини, які паралельні одній і тій самій прямій?

5.32. Дві прямі, що належать площині α, відповідно паралельні двом прямим, що належать площині β. Чи можна стверджувати, що $\alpha \parallel \beta$?

5.33. Основи трапеції паралельні площині α. Чи можна стверджувати, що площина трапеції паралельна площині α?

5.34. Площини α і β паралельні. У площині α лежить трикутник ABC. Через його вершини проведено паралельні прямі, що перетинають площину β відповідно в точках A_1, B_1 і C_1. Чи будуть між собою рівними трикутники ABC і $A_1B_1C_1$?

5.35. Трикутник ABC належить площині α. З одного боку від площини α відкладено рівні й паралельні між собою відрізки AA_1, BB_1 і CC_1. Доведіть, що площина $A_1B_1C_1$ паралельна площині α.

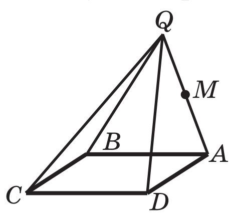
3 **5.36.** Площини α і β паралельні. Через точку M площини β проведено пряму m, паралельну площині α. Доведіть, що пряма m належить площині β.

5.37. Площини β і γ паралельні. У площині β проведено пряму b. Через точку C площини γ проведено пряму c, паралельну b. Доведіть, що пряма c належить площині γ.

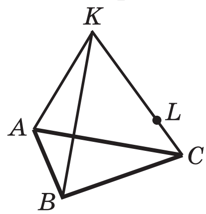
5.38. Точка S не належить площині трикутника ABC. Точки K, L і M належать відрізкам SA, SB і SC відповідно, $\angle MKA + \angle KAC = 180°$, $\angle LKA + \angle KAB = 180°$. Доведіть, що площини ABC і KLM паралельні.

5.39. Точка Q не належить площині трикутника KLM. Точки A, B і C належать відрізкам QK, QL і QM відповідно, $\angle QAC = \angle QKM$, $\angle QCB = \angle QML$. Доведіть, що площини KML і ABC паралельні.

5.40. Точку Q, що не лежить у площині паралелограма $ABCD$, сполучено з його вершинами (мал. 5.15). На відрізку QA позначено точку M. Побудуйте площину, що проходить через точку M паралельно площині паралелограма.



Мал. 5.15



Мал. 5.16

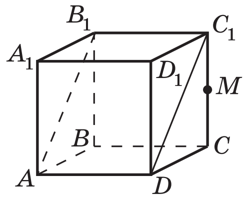
5.41. Точку K, що не лежить у площині трикутника ABC, сполучено з його вершинами, $L \in KC$ (мал. 5.16). Побудуйте площину, що проходить через точку L паралельно площині ABC.

5.42. Площини α і β паралельні. Через точку K, яка лежить між цими площинами, проведено прямі a і b, які перетинають площину α у точках A_1 і B_1, а площину β – у точках A_2 і B_2. Знайдіть довжину відрізка A_2B_2, якщо $A_1B_1 = 10$ см, $KB_1 = 6$ см, $KB_2 = 3$ см.

5.43. Два промені з початком у точці A перетинають одну з двох паралельних площин у точках K_1 і L_1, а другу – у точках K_2 і L_2. Знайдіть довжину відрізка K_1L_1, якщо $AK_1 : AK_2 = 4 : 5$, $K_2L_2 = 20$ см.

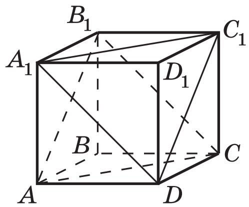
5.44. Два промені з початком у точці B перетинають одну з двох паралельних площин у точках C_1 і D_1, а другу – у точках C_2 і D_2. Знайдіть довжину відрізка C_2D_2, якщо $C_1D_1 = 8$ см, $BC_1 = 10$ см, $BC_2 = 15$ см.

5.45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 5.17). M – середина CC_1. Проведіть через точку M площину, паралельну площині ADC_1.



Мал. 5.17

5.46. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 5.18). Доведіть, що площини A_1C_1D і AB_1C паралельні.



Мал. 5.18

5.47. Площини α і β паралельні. Точки M і N належать площині α, K і L – площині β. Відрізки ML і KN перетинаються, причому $ML = KN$ та $MN = KL$.

1) Доведіть, що точки M, N, K і L лежать в одній площині.

2) Визначте вид чотирикутника $MNLK$.

3) Знайдіть площу чотирикутника $MNLK$, якщо $KL = 5$ см, $ML = 13$ см.

5.48. Площини β і γ паралельні. Точки A і B належать площині β, а точки C і D – площині γ, причому $AB = CD$. Відрізки AC і BD перетинаються.

1) Доведіть, що точки A, B, C і D лежать в одній площині.

2) Визначте вид чотирикутника $ABCD$.

3) Знайдіть величину кута ADC, якщо $\angle DAB = 130°$.

5.49. Точка K належить грані ABC тетраедра $QABC$ і не належить жодному з його ребер. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку K паралельно площині QAB.

5.50. Точка M належить грані ABC тетраедра $TABC$ і не належить жодному з його ребер. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точку M паралельно площині TBC.

5.51. Три відрізки M_1M_2, N_1N_2 і K_1K_2 не лежать в одній площині та мають спільну середину. Доведіть, що $(M_1N_1K_1) \parallel (M_2N_2K_2)$.

5.52. Дано площину α і точку M, що їй не належить. Доведіть, що всі прямі, що проходять через точку M паралельно площині α, лежать в одній площині. Як ця площина розташована відносно площини α?

5.53. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина A_1B_1, N – середина B_1C_1, K – середина AD, F – середина CD, L – середина CC_1, O – точка перетину діагоналей квадрата

$ABCD$, A_1 – середина відрізка AQ. Яким є взаємне розташування площин:

1) BB_1D і MFK;
2) MNF і MNK;
3) BMN і KFD_1;
4) MNK і FLN;
5) QB_1D_1 і A_1DO;
6) A_1C_1C і MKF?

5.54. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M – середина A_1B_1, N – середина B_1C_1, K – середина AD, F – середина CD; O – точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$, A_1 – середина відрізка AQ. Яким є взаємне розташування площин:

1) ACD і $A_1B_1C_1$;
2) MKF і OQB;
3) A_1C_1D і ACB_1;
4) DMN і B_1KF;
5) MOB і QBD;
6) A_1B_1D і QC_1D_1?

5.55. Точка L лежить на ребрі C_1D_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причому $D_1L : LC_1 = 2 : 3$.

1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точку L паралельно площині D_1B_1C.

2) Знайдіть площу цього перерізу, якщо довжина ребра куба дорівнює 10 см.

5.56. Точка N належить ребру B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причому $B_1N : NC_1 = 1 : 2$.

1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точку N паралельно площині B_1D_1C.

2) Знайдіть периметр перерізу, якщо довжина ребра куба дорівнює 15 см.

5.57. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро дорівнює 10 см. Точка M – середина ребра AA_1.

1) Побудуйте точку L – точку перетину площини CB_1M з ребром AD.

2) Знайдіть довжину відрізка ML.

4 **5.58.** Три прямі, що перетинаються в одній точці й не лежать в одній площині, перетинають одну з двох паралельних площин у точках A, B, C, а другу – у точках A_1, B_1, C_1. Доведіть, що трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ подібні.

5.59. Площина трикутника ABC зі сторонами 5 см, 5 см і 8 см паралельна площині α. Світло, що виходить з точки S, відкидає на площину α тінь $A_1B_1C_1$ від трикутника ABC.

1) Знайдіть довжину сторін трикутника $A_1B_1C_1$, якщо $SA : AA_1 = 1 : 2$.

2) Обчисліть площу трикутника $A_1B_1C_1$.

3) З’ясуйте, чи можна обчислити площу трикутника $A_1B_1C_1$, не знаходячи довжин його сторін.

5.60. Площина β паралельна площині трикутника KLM. Світло, що виходить з точки Q, відкидає на площину β тінь $K_1L_1M_1$ від трикутника KLM. Сторони трикутника $K_1L_1M_1$ дорівнюють 12 см, 15 см, 9 см. Знайдіть:
1) сторони трикутника KLM, якщо $QK : KK_1 = 2 : 1$;
2) площу трикутника KLM.

5.61. У тетраедрі $QABC$ проведено переріз $A_1B_1C_1$, паралельний площині ABC. Яким є взаємне розміщення прямих, що містять медіани AM і A_1M_1 трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ відповідно?

5.62. $QABC$ – правильний тетраедр з ребром 4 см. Точка M – точка перетину медіан трикутника ABC; точка K належить відрізку QM, причому $QK : KM = 3 : 1$. Через точку K паралельно площині ABC проведено площину. Знайдіть периметр отриманого при цьому перерізу.

5.63. $NABC$ правильний тетраедр, ребро якого 8 см. Точка L – точка перетину бісектрис трикутника ABC, T – середина NL. Через точку T паралельно площині ABC проведено площину. Знайдіть площу отриманого при цьому перерізу.

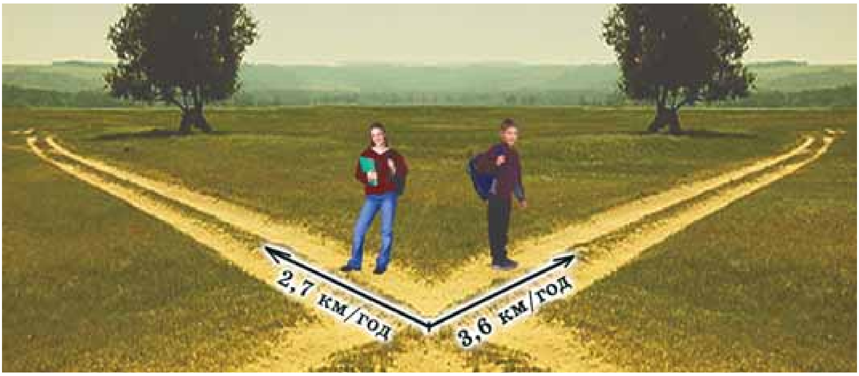
5.64. На трьох попарно паралельних прямих, які не лежать в одній площині, узято три рівних між собою відрізки AA_1, BB_1 і CC_1 так, що точки A_1, B_1 і C_1 лежать по один бік від площини ABC. Доведіть, що:
1) площини ABC і $A_1B_1C_1$ паралельні;
2) $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$;
3) пряма перетину площин A_1BC і AB_1C_1 паралельна кожній з площин ABC і BCC_1;
4) пряма, що проходить через точки перетину медіан трикутників ABC і $A_1B_1C_1$, паралельна прямій AA_1.

5.65. Пряма AC перетинає паралельні площини α, β і γ відповідно в точках A, B і C. Пряма BN перетинає площини α і γ відповідно в точках M і N. Знайдіть MN, якщо $AC = 1$ дм, $BC = 3$ дм, $BM = 4$ дм.

5.66. Пряма AB перетинає паралельні площини α, β і γ відповідно в точках A, B і C. Пряма AL перетинає площини β і γ відповідно в точках K і L. Знайдіть KL, якщо $AC = 4$ дм, $BC = 1$ дм, $AK = 15$ дм.

5.67. На ребрах QA, QB і QC тетраедра $QABC$ позначено точки M, N і K відповідно так, що $QM : MA = QN : NB = QK : KC$.
1) Доведіть, що площини ABC і MNK паралельні.
2) Знайдіть S_{ABC}, якщо $S_{MNK} = 10$ см^2 і $QM : MA = 1 : 2$.

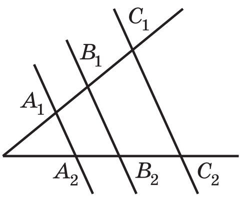
5.68. Іванко й Оленка, зустрівшись на перехресті, продовжили рухатися по взаємно перпендикулярних дорогах, Іванко зі швидкістю 3,6 км/год, Оленка – 2,7 км/год. Якою буде відстань між ними (у км) через 45 хв?



Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

5.69. На малюнку 5.19 прямі A_1A_2, B_1B_2 і C_1C_2 паралельні між собою. Заповніть пропуски так, щоб утворилося правильне співвідношення:

1) $\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2} = \dfrac{B_1C_1}{\dots}$; 2) $\dfrac{A_2B_2}{B_2C_2} = \dfrac{\dots}{\dots}$.



Мал. 5.19

5.70. (*Всеукраїнська математична олімпіада, 1985 р.*) У прямокутному трикутнику відрізок, що сполучає точку перетину медіан з основою бісектриси, проведеної до катета, перпендикулярний до цього катета. Знайдіть кути трикутника.

Перевірте свою компетентність

Завдання № 5

1. Якою НЕ може бути площа трикутника, дві сторони якого дорівнюють 3 см і 4 см?

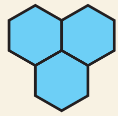
А	Б	В	Г	Д
1 см^2	7 см^2	5 см^2	6 см^2	2 см^2

Продовження

2. Кути трикутника відносяться як 2 : 3 : 4. Чому дорівнює різниця між найбільшим і найменшим кутами трикутника?

А	Б	В	Г	Д
$60°$	$50°$	$40°$	$30°$	$20°$

3. Три правильних шестикутники розміщено так, як зображено на малюнку. Діаметр кола, описаного навколо одного з них, дорівнює 4 см. Знайдіть периметр зафарбованого многокутника.



А	Б	В	Г	Д
12 см	48 см	$12\sqrt{3}$ см	24 см	інша відповідь

4. У трикутнику ABC $AB = 2\sqrt{3}$ см, $BC = 4$ см, $\angle B = 30°$. Знайдіть сторону AC.

А	Б	В	Г	Д
2 см	$2\sqrt{7}$ см	4 см	3 см	$2\sqrt{3}$ см

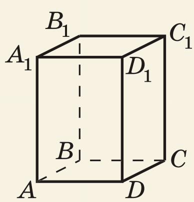
5. На малюнку зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між площиною (1–4) та трьома точками, що належать цій площині (А–Д).

Площина

1 (BCD)
2 (DD_1C_1)
3 (ABC_1)
4 (BB_1D)

Точки

А A, C_1, D_1
Б D_1, B_1, C_1
В A, B, D
Г D, C, C_1
Д B, D, D_1



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Центр кола, описаного навколо рівнобічної трапеції, належить її більшій основі. Знайдіть радіус цього кола, якщо діагональ трапеції дорівнює 10 см, а її висота – 6 см.

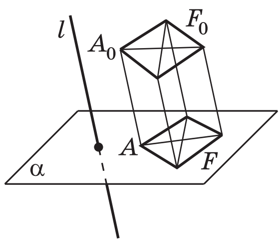
§ 6. ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКЦІЮВАННЯ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ. ЗОБРАЖЕННЯ ФІГУР У СТЕРЕОМЕТРІЇ

Для стереометрії важливе значення має таке зображення просторових фігур на площині, яке дає максимально повне уявлення про фігуру. Поки що, вивчаючи властивості найпростіших геометричних фігур (точок, прямих, площин), ми використовували суто умовні, інтуїтивно зрозумілі зображення цих найпростіших фігур. У цьому параграфі ознайомимося з деякими правилами зображення просторових фігур на площині.

1. Паралельне проекціювання

Для зображення просторових фігур на площині часто використовують *паралельне проекціювання*. Розглянемо цей спосіб зображення фігур.

Нехай α – деяка площина, а l – пряма, яка перетинає цю площину (мал. 6.1). Припустимо, що ми маємо на площині α зобразити фігуру F_0, що не лежить у цій площині.



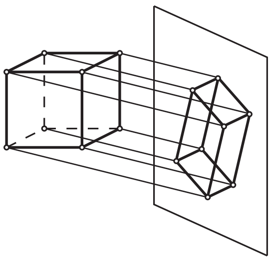
Мал. 6.1

Для цього проведемо через довільну точку A_0 фігури F_0 пряму, паралельну прямій l. Точка A перетину цієї прямої з площиною α і буде зображенням точки A_0 на площині α. Побудувавши таким способом зображення кожної точки фігури F_0, отримаємо фігуру F – зображення фігури F_0 на площині α.

Точку A при цьому називають *зображенням* точки A_0 *на площині* α, або *паралельною проекцією* точки A_0 на площину α, а фігуру F – зображенням фігури F_0 на площині α, або паралельною проекцією фігури F_0 на площину α. Кажуть також, що фігуру F отримано з фігури F_0 за допомогою *паралельного проекціювання*. Пряму l називають *проектуючою прямою*, а площину α – *площиною проекції*.

За допомогою паралельного проекціювання можна зображувати на площині як плоскі фігури (пряму, відрізок, трикутник тощо), так і просторові (піраміду, куб тощо). Уявлення про паралельне проекціювання просторової фігури, наприклад куба, можна отримати, якщо помістити перед екраном виготовлений із дроту каркас куба та освітити його проектором (мал. 6.2).

У побуті прототипом паралельного проекціювання можна вважати тінь, що падає на плоску поверхню (землю, стіну тощо) при сонячному або електричному освітленні (мал. 6.3).



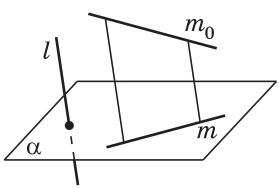
Мал. 6.2

Мал. 6.3

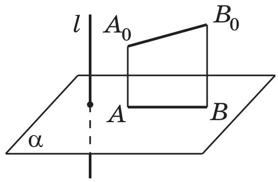
2. Властивості паралельного проекціювання

Сформулюємо основні властивості паралельного проекціювання за умови, що відрізки та прямі, які проектуються, не паралельні проектуючій прямій l.

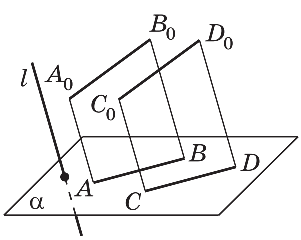
1. ***Проекцією прямої є пряма*** **(мал. 6.4).**
2. ***Проекцією відрізка є відрізок*** **(мал. 6.5).**
3. ***Проекції паралельних відрізків – паралельні відрізки*** **(мал. 6.6)** ***або відрізки, що належать одній прямій*** **(мал. 6.7).**
4. ***Проекції паралельних прямих паралельні або збігаються.***
5. ***Проекції паралельних відрізків або відрізків, що лежать на одній прямій, пропорційні самим відрізкам.***



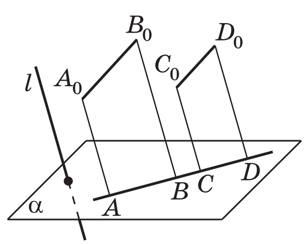
Мал. 6.4



Мал. 6.5

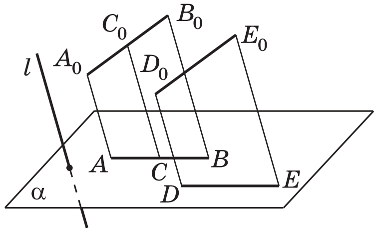


Мал. 6.6



Мал. 6.7

На малюнку 6.8 відрізки A_0C_0 і C_0B_0 – відрізки однієї прямої, AC і CB – відповідно їх проекції. За властивістю 5: $\frac{A_0C_0}{AC} = \frac{C_0B_0}{CB}$.



Мал. 6.8

На цьому ж малюнку $A_0B_0 \parallel D_0E_0$, тоді $\frac{A_0B_0}{AB} = \frac{D_0E_0}{DE}$, де DE – паралельна проекція відрізка D_0E_0 на площину α.

Н а с л і д о к. **Середина відрізка проектується в середину його проекції.**

Повертаючись до малюнка 6.2, на якому зображено паралельне проекціювання куба, можна бачити, що грань куба, яка є квадратом, проектується у чотирикутник, сусідні сторони якого не є між собою рівними і не утворюють прямого кута. Тому можна дійти висновку, що ані величина кута, ані довжини відрізків при паралельному проекціюванні, не обов'язково зберігаються.

Оскільки площину проекції та напрям проекціювання обирають довільним чином, зображення деяких фігур можуть виявитися не досить зручними для роботи з ними, наприклад, мати занадто великі або, навпаки, малі розміри, або такими, що не створюватимуть повного уявлення про фігуру, що проектувалася. Тому, отримавши деяку паралельну проекцію фігури на площині, зображенням цієї фігури можемо вважати і будь-яку фігуру, що буде подібною отриманій паралельній проекції.

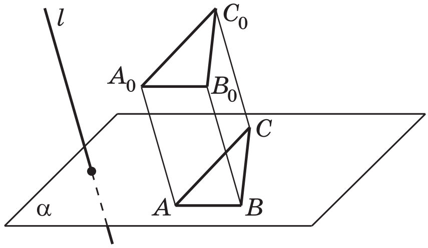
Для успішного розв'язування стереометричних задач до зображень плоских фігур висувають такі вимоги: зображення фігури має бути правильним, наочним і бажано, щоб його можна було побудувати досить швидко у неважкий спосіб. Так, наприклад, паралельною проекцією відрізка може бути відрізок, а може бути і точка (у випадку, коли відрізок паралельний проектуючій прямій), проте у цьому випадку зображення відрізка вже не буде наочним.

3. Зображення плоских фігур

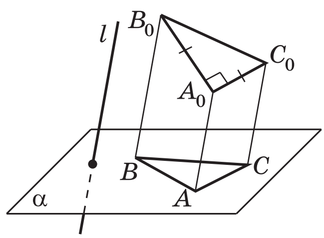
У стереометрії зображення плоских фігур ґрунтується на властивостях паралельного проекціювання. Розглянемо кілька прикладів зображень плоских фігур (за умови, що площина фігури не є паралельною проектуючій прямій).

Трикутник і його елементи. Нехай $A_0B_0C_0$ – трикутник, а A, B, C – проекції відповідно точок A_0, B_0, C_0 на площину α (мал. 6.9). Оскільки проекцією відрізка є відрізок, то трикутник ABC є зображенням трикутника $A_0B_0C_0$.

! Зображенням кожного трикутника є трикутник довільного виду.



Мал. 6.9



Мал. 6.10

Наприклад, на малюнку **6.10** зображенням прямокутного рівнобедреного трикутника $A_0B_0C_0$ (з прямим кутом A_0) є різносторонній трикутник ABC.

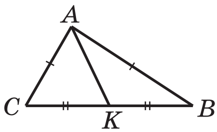
Виходячи з наслідка властивості 5, маємо:

! Проекцією медіани трикутника є медіана проекції трикутника, а проекцією середньої лінії трикутника – є середня лінія проекції трикутника.

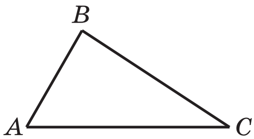
Якщо в задачі не задано метричних співвідношень між елементами трикутника, то паралельною проекцією його бісектриси буде довільний відрізок, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони. Паралельною проекцією висоти трикутника також буде довільний відрізок, що сполучає вершину трикутника з точкою протилежної сторони або з точкою, що лежить на продовженні цієї сторони (у випадку, коли ця висота проведена з вершини гострого кута тупокутного трикутника).

У рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, є також бісектрисою і висотою. Тому паралельною проекцією бісектриси і висоти рівнобедреного трикутника, проведених до основи, є медіана проекції трикутника, проведена до його основи. На малюнку **6.11** трикутник ABC – паралельна проекція рівнобедреного трикутника $A_0B_0C_0$, у якого

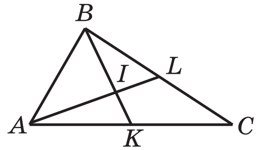
$A_0B_0 = A_0C_0$. AK – проекція медіани, бісектриси й висоти цього трикутника, проведених до основи.



Мал. 6.11



Мал. 6.12



Мал. 6.13

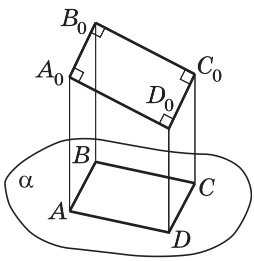
Задача 1. Трикутник ABC є паралельною проекцією рівностороннього трикутника (мал. 6.12). Побудувати проекцію центра кола, вписаного в рівносторонній трикутник.

Розв'язання. Центром кола, вписаного у трикутник, є точка перетину його бісектрис. Оскільки трикутник, який проектуємо, є рівностороннім, то його бісектриси є також і медіанами, а точка перетину бісектрис відповідно збігається з точкою перетину медіан. Тому для побудови проекції центра кола, вписаного в рівносторонній трикутник, треба побудувати проекцію точки перетину медіан. Для цього маємо провести дві медіани трикутника ABC, наприклад AL і BK (мал. 6.13), які є проекціями медіан трикутника ABC, отже, і його бісектрис. Тоді точка I перетину відрізків AL і BK і буде проекцією центра кола, вписаного в рівносторонній трикутник.

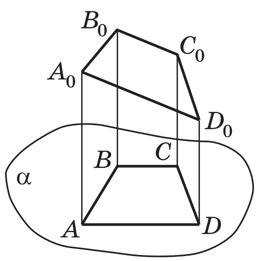
Паралелограм і його види. Оскільки проекціями паралельних і рівних між собою відрізків є паралельні і рівні між собою відрізки (за властивостями 3 і 5 паралельного проекціювання), то проекцією паралелограма є паралелограм.

Зображенням кожного паралелограма є паралелограм довільного виду.

Зокрема, довільний паралелограм може бути зображенням прямокутника (мал. 6.14), ромба, квадрата. І навпаки, квадрат може бути зображенням паралелограма, що не є квадратом.



Мал. 6.14

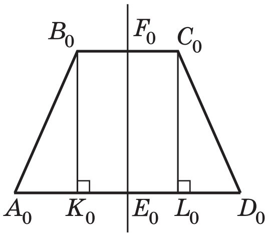


Мал. 6.15

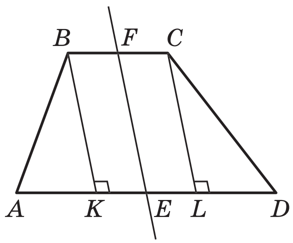
Трапеція. Оскільки проекцією паралельних відрізків є паралельні відрізки, то зображенням трапеції є трапеція. Якщо $ABCD$ – зображення трапеції $A_0B_0C_0D_0$ з основами A_0D_0 і B_0C_0 (мал. 6.15), то $\frac{A_0D_0}{AD} = \frac{B_0C_0}{BC}$ або $\frac{A_0D_0}{B_0C_0} = \frac{AD}{BC}$ (за властивістю 5 паралельного проекціювання).

Задача 2. $ABCD$ – паралельна проекція рівнобічної трапеції $A_0B_0C_0D_0$ з основами A_0D_0 і B_0C_0, $A_0D_0 > B_0C_0$. Побудувати проекції висот трапеції, що виходять з вершин тупих кутів.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Нехай $A_0B_0C_0D_0$ – рівнобічна трапеція, $A_0D_0 \parallel B_0C_0$, $A_0D_0 > B_0C_0$ (мал. 6.16), $ABCD$ – її проекція, у якої $\frac{AD}{BC} = \frac{A_0D_0}{B_0C_0}$.



Мал. 6.16



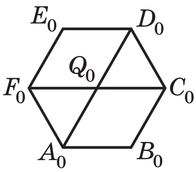
Мал. 6.17

2) Нехай E_0 – середина A_0D_0, F_0 – середина B_0C_0, тому E_0F_0 – вісь симетрії трапеції. Якщо E – середина AD, F – середина BC, то EF – проекція осі симетрії рівнобічної трапеції (за властивістю 5 паралельного проектування) (мал. 6.17).

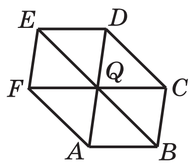
3) B_0K_0 і C_0L_0 – висоти трапеції $A_0B_0C_0D_0$, причому $B_0K_0 \parallel F_0E_0$; $C_0L_0 \parallel F_0E_0$. Оскільки проекціями паралельних відрізків є паралельні відрізки (властивість 3 паралельного проекціювання), то проекції висот B_0K_0 і C_0L_0 мають бути паралельними проекції осі симетрії трапеції. Тому для побудови проекцій висот B_0K_0 і C_0L_0 треба з вершин B і C провести відрізки, паралельні відрізку FE. Отже, BK і CL – зображення висот трапеції, проведених з вершин тупих кутів.

Правильний шестикутник. Нехай $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$ – правильний шестикутник (мал. 6.18). Діагоналі A_0D_0 і C_0F_0 ділять його на два ромби $F_0E_0D_0Q_0$ і $C_0B_0A_0Q_0$, взаємно симетричні відносно точки Q_0.

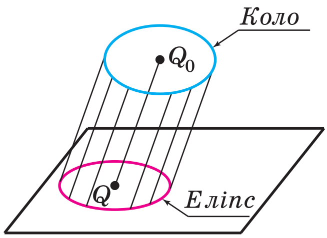
Для зображення правильного шестикутника спочатку побудуємо паралелограм $FEDQ$, який є зображенням ромба $F_0E_0D_0Q_0$ (мал. 6.19), далі симетричний йому відносно точки Q паралелограм $CBAQ$. Сполучивши точки A і F, C і D, отримаємо зображення $ABCDEF$ правильного шестикутника $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$.



Мал. 6.18



Мал. 6.19



Мал. 6.20

Коло. Паралельну проекцію кола називають *еліпсом* (мал. 6.20). Точку Q, яка є проекцією центра кола – точки Q_0, називають *центром еліпса*.

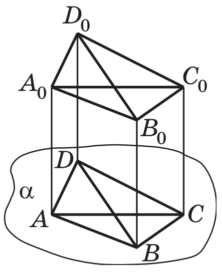
4. Зображення просторових фігур у стереометрії

Властивості паралельного проекціювання та способи зображення плоских фігур у стереометрії допомагають отримати наочні зображення просторових фігур, зокрема, многогранників.

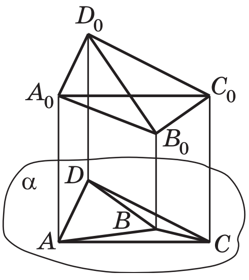
У § 2 ви вже розглянули одне з можливих зображень прямокутного паралелепіпеда, куба та тетраедра. Покажемо, що ці зображення узгоджуються із властивостями паралельного проекціювання, тобто дійсно є паралельними проекціями згаданих просторових тіл на площину.

Зображення многогранника складають із зображень його ребер, побудованих за допомогою паралельного проекціювання. При цьому для наочності малюнка домовляються видимі ребра многогранника зображувати суцільною лінією, а невидимі – пунктиром. Як же зрозуміти, які саме ребра є видимими, а які – ні? Уявімо, що з боку спостерігача паралельно напряму проекціювання на многогранник падає яскраве світло. Тоді поверхня многогранника виявиться частково освітленою. Ті ребра многогранника, які належать його освітленій частині, вважають видимими, а ті, які належать неосвітленій частині, – невидимими.

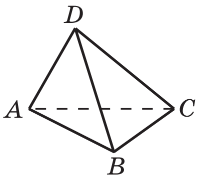
Розглянемо проекції різних моделей тетраедра, виготовлених із дроту (мал. 6.21 і 6.22), та врахуємо, що проекціями чотирьох його вершин є чотири точки, а проекціями шести його ребер – шість відрізків, що сполучають ці точки. Для того щоб малюнок був наочним, напрям проекціювання маємо



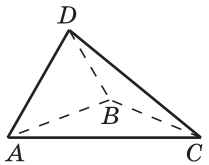
Мал. 6.21



Мал. 6.22



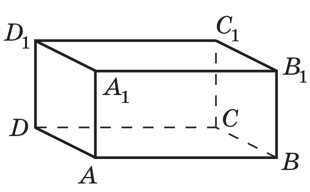
Мал. 6.23



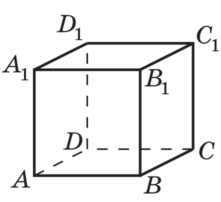
Мал. 6.24

вибрати так, щоб він не був паралельним жодному з ребер тетраедра. Отже, маємо спосіб побудови зображення тетраедра, яке вже розглядали раніше – у § 2 (мал. 6.23 і 6.24).

Будуючи зображення прямокутного паралелепіпеда і куба, треба враховувати, що всі грані прямокутного паралелепіпеда – прямокутники, а всі грані куба – квадрати. Це означає, що проекціями всіх шести граней згаданих многогранників є паралелограми. При цьому ту грань прямокутного паралелепіпеда, що міститься на першому плані, як і протилежну їй грань, прийнято зображувати прямокутником, а такі самі грані куба – квадратами. Отже, маємо обґрунтований спосіб побудови зображень прямокутного паралелепіпеда і куба, які розглядалися нами раніше у § 2. На малюнку 6.25 маємо зображення прямокутного паралелепіпеда, тому чотирикутник AA_1B_1B – прямокутник, а на малюнку 6.26 – зображення куба, тому чотирикутник AA_1B_1B – квадрат.



Мал. 6.25



Мал. 6.26

А ще раніше...

Нарисна геометрія – розділ геометрії, у якому геометричні властивості предметів, що нас оточують, вивчають за допомогою зображення їх на площині або на будь-якій іншій поверхні.

Об'єктом нарисної геометрії є виклад і обґрунтування методів побудови зображень просторових форм на площині та способів розв'язування задач геометричного характеру за заданими зображеннями цих форм.

Зображення, побудовані відповідно до правил нарисної геометрії, дають змогу уявити форму предметів, їх взаємне розташування у просторі, визначити розміри.

Вивчення нарисної геометрії сприяє розвитку просторової уяви і навичок логічного мислення, що має велике значення в підготовці й творчому розвитку майбутнього фахівця.

Як наука нарисна геометрія існує лише з кінця XVIII ст. Її творцем вважають французького вченого, інженера й політичного діяча Гаспара Монжа (1746–1818).

Головною науковою працею Монжа вважають «Нарисну геометрію», де викладено метод проекціювання предметів на дві взаємно перпендикулярні площини. Ця книжка вийшла друком у 1799 р., ознаменувавши народження нової науки.

Створивши нарисну геометрію, Монж звів у струнку систему розрізнений і різноманітний матеріал, який частково існував і до нього. Стародавні єгиптяни вміли правильно передавати форму й розміри зведених ними пірамід і храмів. За біблійним переказом, під час зведення дивовижного за архітектурою храму Соломона в Єрусалимі (приблизно 3 тисячі років тому) не було чутно ані тесла, ані молота. Складні за формою камені, мабуть, обтісувалися на рудниках і на місце будівництва доставлялися вже готовими. А це було можливо лише за наявності креслень.

У галузі теорії зображень працювали також Леонардо да Вінчі, Альбрехт Дюрер, Блез Паскаль. А деякі винахідники й інженери, зокрема І.П. Кулібін та І.І. Ползунов, виконували свої креслення за правилами прямокутного проекціювання ще до появи «Нарисної геометрії» Монжа.

• Що таке паралельне проекціювання? • Що таке проектуюча пряма, площина проекції? • Сформулюйте властивості паралельного проекціювання. • Як зображують проекцію трикутника і його елементів при паралельному проекціюванні; проекцію паралелограма; проекції ромба, прямокутника, квадрата; проекції трапеції, правильного шестикутника, кола? • Як зобразити при паралельному проекціюванні прямокутний паралелепіпед, куб, тетраедр?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **6.1.** AB – паралельна проекція відрізка A_0B_0, CD – паралельна проекція відрізка C_0D_0. Відомо, що $A_0B_0 \parallel C_0D_0$. Чи можуть відрізки AB і CD бути:

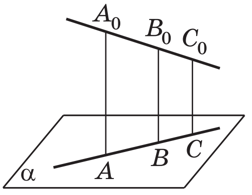
1) паралельними; 2) перпендикулярними?

6.2. MN – паралельна проекція відрізка M_0N_0, KL – паралельна проекція відрізка K_0L_0. Відомо, що $M_0N_0 \parallel K_0L_0$. Чи можуть відрізки KL і MN:

1) належати одній прямій;

2) перетинатися під кутом 30°?

6.3. Точки A_0, B_0, C_0 лежать на одній прямій, $A_0B_0 = 8$ см, $B_0C_0 = 5$ см (мал. 6.27). Точки A, B, C – паралельні проекції точок A_0, B_0, C_0 на площину α. Знайдіть відношення $AB : BC$.



Мал. 6.27

6.4. Точка B_0 ділить відрізок A_0C_0 у відношенні 7 : 4, рахуючи від точки A_0 (мал. 6.27). Точки A, B, C – паралельні проекції точок A_0, B_0, C_0 на площину α. Знайдіть відношення $BC : AB$.

6.5. (*Усно.*) Чи може рівносторонній трикутник бути паралельною проекцією:

1) рівностороннього трикутника;
2) рівнобедреного трикутника;
3) прямокутного трикутника;
4) різностороннього тупокутного трикутника?

6.6. Чи може прямокутний трикутник бути паралельною проекцією:

1) прямокутного трикутника;
2) правильного трикутника;
3) рівнобедреного тупокутного трикутника;
4) різностороннього трикутника?

6.7. (*Усно.*) Чи може паралельною проекцією трапеції бути:

1) квадрат; 2) трапеція;
3) прямокутник; 4) паралелограм?

6.8. (*Усно.*) Чи може паралельною проекцією ромба бути:

1) паралелограм; 2) ромб;
3) трапеція; 4) квадрат?

6.9. Чи може паралельною проекцією прямокутника бути:

1) квадрат; 2) паралелограм;
3) прямокутник; 4) трапеція?

2 **6.10.** 1) Чи можуть не рівні відрізки мати рівні паралельні проекції?

2) Чи можуть рівні відрізки мати не рівні паралельні проекції?

3) Чи може довжина паралельної проекції відрізка бути більшою за довжину цього відрізка?

6.11. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проекціями:

1) площини;

2) відрізка;

3) двох паралельних прямих?

6.12. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проекціями:

1) прямої;

2) променя;

3) двох паралельних відрізків?

6.13. (*Усно*.) Наведіть приклади яких-небудь фігур у просторі, що проектуються в:

1) точку; 2) відрізок; 3) пряму.

6.14. (*Усно*.) Чи може проекція прямої збігатися із самою цією прямою? Відповідь обґрунтуйте.

6.15. Чи можуть дві прямі, що перетинаються, проектуватися:

1) у дві прямі, що перетинаються;

2) у дві паралельні прямі;

3) в одну пряму;

4) у пряму і точку?

6.16. Чи можуть дві мимобіжні прямі проектуватися:

1) у дві прямі, що перетинаються;

2) у дві паралельні прямі;

3) в одну пряму;

4) у пряму і точку, що їй не належить?

6.17. У просторі дано пряму і точку, яка їй не належить. Чи може паралельна проекція даної точки належати проекції даної прямої? Виконайте малюнок.

6.18. Нехай α і β – паралельні площини. Чи правильно, що довжини проекцій заданого відрізка на ці площини рівні?

6.19. Точки A_0, B_0, C_0 лежать на одній прямій і проектуються на площину α в точках A, B і C відповідно (мал. 6.27), $A_0B_0 = 8$ см, $B_0C_0 = 5$ см, $BC = 4$ см. Знайдіть AB.

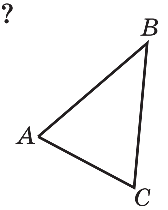
6.20. Точки A_0, B_0, C_0 лежать на одній прямій і проектуються на площину α в точках A, B і C відповідно (мал. 6.27), $B_0C_0 = 3$ см, $BC = 2$ см, $AB = 5$ см. Знайдіть A_0B_0.

6.21. Чи може паралельною проекцією трапеції з основами 2 см і 6 см бути трапеція з основами 1 см і 4 см?

6.22. Чи може паралельною проекцією трапеції з основами 4 см і 8 см бути трапеція з основами 2 см і 4 см?

6.23. Маємо три точки. Яким має бути розташування цих точок між собою у просторі та відносно проектуючої прямої, щоб їх проекціями були:
1) одна точка;
2) дві точки;
3) три точки, що лежать на одній прямій;
4) три точки, що не лежать на одній прямій?
Виконайте відповідні малюнки.

6.24. Трикутник ABC – паралельна проекція рівнобедреного трикутника; AB – проекція основи (мал. 6.28). Побудуйте проекцію:
1) середньої лінії трикутника, яка сполучає бічні сторони;
2) висоти трикутника, проведеної до основи.



Мал. 6.28

6.25. Трикутник ABC – паралельна проекція рівнобедреного трикутника, BC – проекція основи (мал. 6.28). Побудуйте проекцію серединного перпендикуляра до основи рівнобедреного трикутника.

6.26. Трикутник ABC – паралельна проекція рівностороннього трикутника (мал. 6.28). Побудуйте проекцію:
1) однієї із середніх ліній трикутника;
2) однієї з бісектрис трикутника.

6.27. Трикутник ABC – паралельна проекція рівностороннього трикутника $A_0B_0C_0$. Побудуйте проекцію центра кола, описаного навколо трикутника $A_0B_0C_0$.

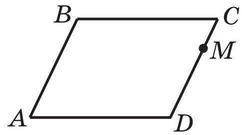
6.28. Трикутник ABC – паралельна проекція правильного трикутника $A_0B_0C_0$. Побудуйте проекції радіусів вписаного та описаного кіл цього трикутника.

6.29. Маємо еліпс, що є паралельною проекцією кола, та його центр. Побудуйте проекцію деякого прямокутного трикутника, вписаного в це коло.

6.30. Трикутник ABC – паралельна проекція прямокутного трикутника $A_0B_0C_0$, де AB – проекція його гіпотенузи. Побудуйте проекцію центра кола, описаного навколо трикутника $A_0B_0C_0$.

6.31. Чи може паралельною проекцією двох мимобіжних прямих бути пара паралельних прямих? Якщо так, виконайте відповідний малюнок.

3 **6.32.** Паралелограм $ABCD$ – паралельна проекція ромба (мал. 6.29). Побудуйте проекцію перпендикуляра, проведеного з точки M, яка належить стороні CD, до діагоналі AC.



Мал. 6.29

6.33. Паралелограм $ABCD$ – паралельна проекція квадрата (мал. 6.29), точка M належить стороні CD. Побудуйте проекцію перпендикуляра, проведеного з точки M до діагоналі BD.

6.34. Зобразіть проекцію правильного шестикутника та проекцію перпендикуляра, проведеного з його центра до меншої діагоналі.

6.35. Зобразіть проекцію правильного шестикутника та проекцію перпендикуляра, проведеного з його центра до однієї зі сторін.

6.36. Чи можна при паралельному проекціюванні паралелограма отримати чотирикутник, два кути якого дорівнюють 85° і 105°? Якщо так, знайдіть два інших кути цього чотирикутника.

6.37. Чи можна при паралельному проекціюванні квадрата отримати чотирикутник, два кути якого дорівнюють 89° і 91°? Якщо так, знайдіть два інших кути цього чотирикутника.

6.38. Трикутник ABC є зображенням рівностороннього трикутника $A_0B_0C_0$. Побудуйте зображення перпендикулярів, які проведено із середини сторони B_0C_0 до сторін A_0B_0 і A_0C_0.

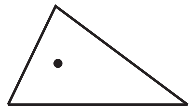
6.39. Трикутник KLM є зображенням трикутника $K_0L_0M_0$, у якого $K_0L_0 : L_0M_0 = 1 : 4$. Побудуйте зображення бісектриси кута L_0.

6.40. Трикутник ABC є зображенням трикутника $A_0B_0C_0$, у якого $A_0B_0 : B_0C_0 = 1 : 3$. Побудуйте зображення бісектриси кута B_0.

6.41. Трапеція $ABCD$ – паралельна проекція рівнобічної трапеції $A_0B_0C_0D_0$, де A_0B_0 і C_0D_0 – основи, кути A_0 і B_0 – гострі. Побудуйте проекції висот трапеції $A_0B_0C_0D_0$, проведених з вершин A_0 і B_0.

6.42. Трапеція $ABCD$ – паралельна проекція рівнобічної трапеції $A_0B_0C_0D_0$, у якої $A_0B_0 = B_0C_0 = C_0D_0$, $A_0D_0 = 2B_0C_0$. Побудуйте зображення висоти трапеції, проведеної з вершини A_0.

6.43. Дано паралельну проекцію трикутника й центр кола, описаного навколо нього (мал. 6.30). Побудуйте проекції висот трикутника.



Мал. 6.30

6.44. Трикутник ABC є зображенням трикутника $A_0B_0C_0$, AM і BK – зображенням його висот A_0M_0 і B_0K_0. Побудуйте зображення центра кола, описаного навколо трикутника ABC.

6.45. Доведіть, що зображення центрально-симетричної фігури також є центрально-симетричною фігурою.

6.46. Доведіть, що паралельна проекція многокутника, площина якого паралельна площині проекції, є многокутником, рівним даному.

6.47. Мимобіжні прямі a і b проектуються на площину γ, яка перетинає обидві прямі так, що пряма a проектується у пряму, паралельну прямій b, а пряма b проектується у пряму, паралельну прямій a. Доведіть, що проекції прямих a і b паралельні.

6.48. Шестикутник $ABCDEF$ – паралельна проекція правильного шестикутника $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з точки A_0 до прямої: 1) C_0F_0; 2) C_0D_0.

6.49. Шестикутник $ABCDEF$ – паралельна проекція правильного шестикутника $A_0B_0C_0D_0E_0F_0$. Побудуйте зображення перпендикуляра, проведеного з точки F_0 до прямої:
1) B_0E_0; 2) B_0C_0.

6.50. Чи можна паралелограм $ABCD$ перегнути по прямій AC так, щоб проекцією трикутника ABC на площину ADC був трикутник ADC?

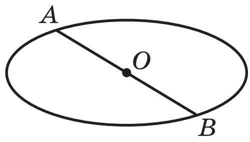
4

6.51. Паралелограм $ABCD$ є паралельною проекцією ромба з кутом 60°. Побудуйте проекції висот ромба, проведених з вершини цього кута.

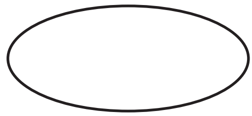
6.52. Паралелограм $KLMN$ є паралельною проекцією ромба з кутом 120°. Побудуйте проекції висот ромба, проведених з вершини цього кута.

6.53. Дано паралельну проекцію кола із центром O (мал. 6.31). Побудуйте проекцію діаметра, перпендикулярного до діаметра AB.

6.54. Дано паралельну проекцію кола із центром O (мал. 6.31). Побудуйте паралельну проекцію квадрата, вписаного в це коло.



Мал. 6.31



Мал. 6.32

6.55. Дано паралельну проекцію кола (мал. 6.32). Побудуйте зображення його центра.

6.56. Маємо зображення кола, його центра і деякої точки, що належить колу. Побудуйте зображення дотичної, що проходить через цю точку.

6.57. Трикутник ABC є зображенням у паралельній проекції прямокутного трикутника з гострим кутом $60°$. Побудуйте зображення бісектриси цього кута.

6.58. Побудуйте паралельну проекцію квадрата, вписаного у правильний трикутник так, що дві вершини квадрата лежать на стороні трикутника, а дві інші вершини належать відповідно двом іншим сторонам трикутника.

6.59. Побудуйте паралельну проекцію рівностороннього трикутника, вписаного у квадрат так, що одна сторона в них спільна, а вершини трикутника лежать усередині квадрата.

6.60. Маємо еліпс, що є паралельною проекцією деякого кола. Побудуйте зображення описаного навколо нього правильного трикутника.

6.61. Маємо еліпс, що є паралельною проекцією деякого кола. Побудуйте зображення правильного трикутника, вписаного в це коло.

6.62. На даному зображенні прямокутного трикутника з катетами 3 і 4 побудуйте зображення центра кола, вписаного у трикутник.

6.63. На даному зображенні трикутника зі сторонами 2, 3 і 4 побудуйте зображення центра кола, вписаного у трикутник.

6.64. Трапеція $ABCD$ – паралельна проекція трапеції $A_0B_0C_0D_0$, у якої $A_0B_0 \parallel C_0D_0$, $\angle A_0 = 90°$, $\angle B_0 = 60°$. Відомо, що у трапецію $A_0B_0C_0D_0$ можна вписати коло. Побудуйте зображення центра цього кола.

6.65. Уздовж прямої послідовно на однакових відстанях один від одного стоять три телеграфних стовпи. Перший і другий віддалені від дороги відповідно на 18 м і 24 м. Знайдіть відстань від дороги до третього стовпа.

6.66. (*Математична олімпіада Нью-Йорка, 1978 р.*) Трикутники ABC і DEF вписані в одне й те саме коло. Доведіть, що рівність їх периметрів рівносильна умові: $\sin A + \sin B + \sin C = \sin D + \sin E + \sin F$.

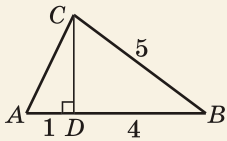
ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 6

1. Діаметр кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює 10 см. Знайдіть медіану трикутника, проведену до гіпотенузи.

А	Б	В	Г	Д
4 см	5 см	6 см	8 см	10 см

2. CD – висота $\triangle ABC$ (див. мал.). Укажіть значення площі трикутника ABC, якщо довжини відрізків дано в сантиметрах.



А	Б	В	Г	Д
4,5 см^2	7 см^2	7,5 см^2	8 см^2	10 см^2

3. Укажіть точку, що належить осі x.

А	Б	В	Г	Д
(0; 5)	(–2; 1)	(4; –4)	(–4; 0)	жодна з наведених

4. Яким є взаємне розміщення кіл, радіуси яких дорівнюють 5 см і 2 см, а відстань між їх центрами – 7 см?

А	Б	В	Г	Д
зовнішній дотик	перетинаються у двох точках	не перетинаються	внутрішній дотик	кола є концентричними

Продовження

5. Градусна міра кута A трикутника ABC удвічі менша від градусної міри кута C і на $20°$ більша за градусну міру кута B; точка I – точка перетину бісектрис трикутника. Установіть відповідність між кутом (1–4) та його градусною мірою (А–Д).

Кут		*Градусна міра кута*	
1	$\angle BAC$	**А**	$30°$
2	$\angle ABC$	**Б**	$50°$
3	$\angle ACB$	**В**	$100°$
4	$\angle AIB$	**Г**	$120°$
		Д	$140°$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Периметр паралелограма дорівнює 18 см, а гострий кут – $60°$. Діагональ паралелограма ділить його тупий кут у відношенні 1 : 3. Знайдіть меншу сторону паралелограма (у см).

§ 7. ПОБУДОВА ПЕРЕРІЗІВ МНОГОГРАННИКІВ

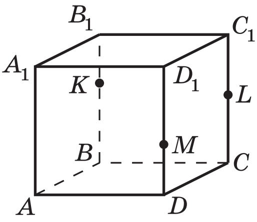
У § 2 ви вже розглядали та навіть будували найпростіші перерізи прямокутного паралелепіпеда, куба і піраміди методом слідів. У цьому параграфі розглянемо більш складні випадки застосування методу слідів, побудову перерізів за допомогою властивостей паралельних прямих і площин, а також методом внутрішнього проекціювання.

1. Побудова перерізу за допомогою властивостей паралельних прямих і площин

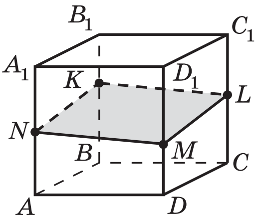
Якщо многогранник, у якого деякі грані між собою паралельні, перетнути площиною, то, за властивістю паралельних площин, прямі перетину цієї площини з паралельними між собою гранями будуть паралельні. Серед відомих нам геометричних тіл саме прямокутний паралелепіпед і куб є тими, що мають пари паралельних між собою граней.

Задача 1. Точки K, L і M належать ребрам BB_1, CC_1 і DD_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 7.1). Побудуйте переріз куба площиною KLM.

Р о з в ’ я з а н н я. 1) Січна площина перетинає грань CDD_1C_1 по відрізку ML, а грань BB_1C_1C – по відрізку KL. Проведемо ці відрізки (мал. 7.2).



Мал. 7.1



Мал. 7.2

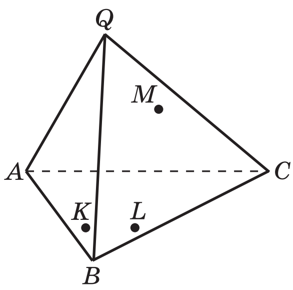
2) Грані AA_1B_1B і CDD_1C_1 паралельні між собою, тому за властивостями паралельних площин січна площина перетне ці грані по паралельних прямих. Проведемо у грані AA_1B_1B пряму KN, паралельну прямій ML, $N \in AA_1$.

3) Сполучимо точки M і N відрізком. Отримаємо шуканий переріз $KLMN$.

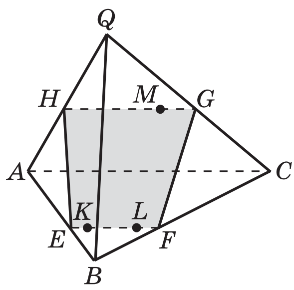
У задачі 6 параграфа 2 ми розглянули побудову перерізу тетраедра $QABC$ площиною KLM у випадку, коли точки K і L містилися у грані ABC так, що прямі KL і AC не були паралельними. Зазначимо, що в разі паралельності KL і AC точки X перетину прямих KL і AC не існувало б. Розглянемо, як побудувати переріз у згаданій задачі у випадку, коли прямі KL і AC паралельні.

Задача 2. Точки K і L належать грані ABC тетраедра $QABC$; $KL \parallel AC$, а точка M належить грані QAC (мал. 7.3). Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точки K, L і M.

Р о з в' я з а н н я. 1) Проведемо пряму KL, яка перетинає ребро AB у точці E, а ребро BC – у точці F (мал. 7.4).



Мал. 7.3



Мал. 7.4

2) Оскільки $KL \parallel AC$ і $AC \subset (AQC)$, то $KL \parallel (AQC)$ (за ознакою паралельності прямої і площини).

3) Оскільки січна площина проходить через пряму KL і $KL \parallel (AQC)$, то січна площина має перетинати грань QAC

по прямій, що паралельна прямій KL (за висновком задачі 2 з § 4).

4) Через точку M паралельно прямій AC проведемо пряму, що перетинає ребро QA в точці H, а ребро QC – у точці G.

5) Отже, $EFGH$ – шуканий переріз.

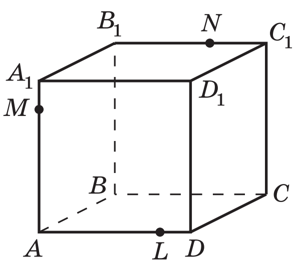
2. Побудова перерізу методом слідів

У § 2 ми вже розв'язали кілька нескладних задач на побудову перерізів многогранників методом слідів. Розглянемо більш складну задачу на побудову перерізу та розв'яжемо її як за допомогою методу слідів, так і з використанням властивостей паралельних прямих і площин.

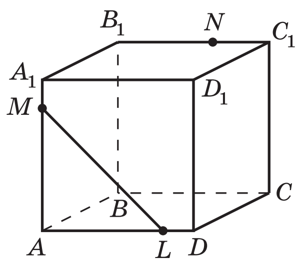
Задача 3. Точки M, N і L належать відповідно ребрам AA_1, B_1C_1 і AD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 7.5). Побудувати переріз куба площиною α, що проходить через точки M, N і L.

Р о з в ' я з а н н я. *1-й спосіб* (методом слідів).

Послідовність побудови перерізу методом слідів подано на малюнках 7.5–7.15.

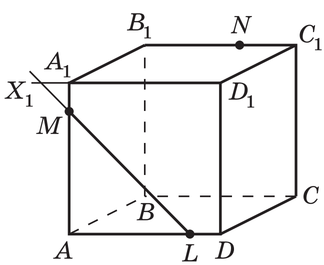


Мал. 7.5



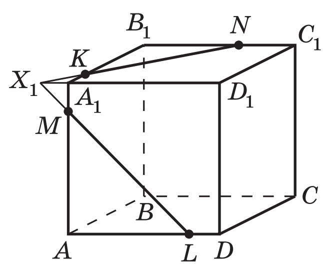
$\alpha \cap (AA_1D) = ML$

Мал. 7.6



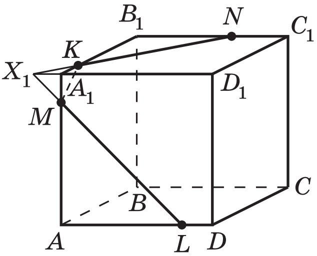
$ML \cap (A_1B_1C_1) = ML \cap A_1D_1 = X_1$

Мал. 7.7



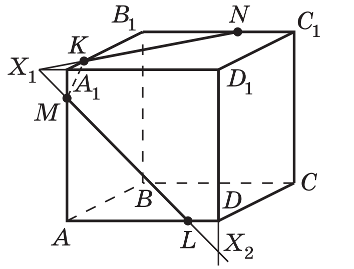
$\alpha \cap (A_1B_1C_1) = KN$

Мал. 7.8



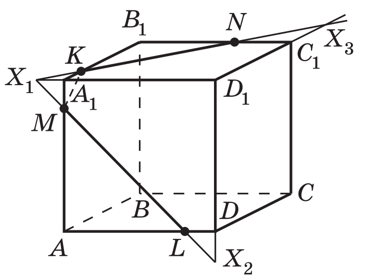
$\alpha \cap (AA_1B_1) = MK$

Мал. 7.9



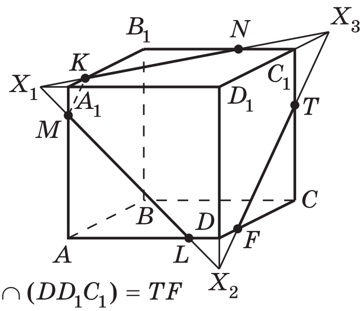
$ML \cap (DD_1C_1) = ML \cap DD_1 = X_2$

Мал. 7.10



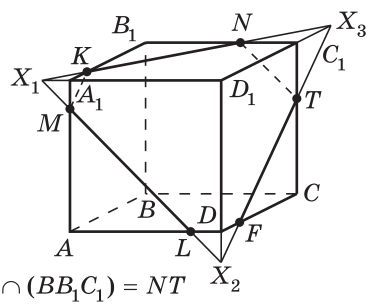
$KN \cap (DD_1C_1) = KN \cap D_1C_1 = X_3$

Мал. 7.11



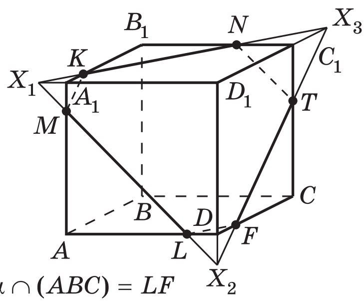
$\alpha \cap (DD_1C_1) = TF$

Мал. 7.12



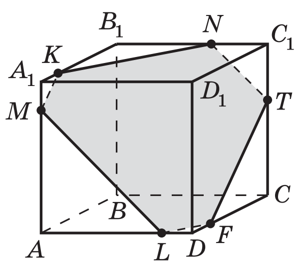
$\alpha \cap (BB_1C_1) = NT$

Мал. 7.13



$\alpha \cap (ABC) = LF$

Мал. 7.14



LMKNTF – шуканий переріз

Мал. 7.15

2-й спосіб (з використанням властивостей паралельних площин).

1) Знаходимо точку K, як у попередньому способі (мал. 7.6–7.8).

2) Оскільки грані AA_1D_1D і BB_1C_1C – паралельні, то січна площина перетне їх по паралельних прямих. Тому у грані BB_1C_1C через точку N паралельно прямій ML проведемо пряму, яка перетне ребро CC_1 у точці T. Отже, $NT \parallel ML$, $T \in CC_1$.

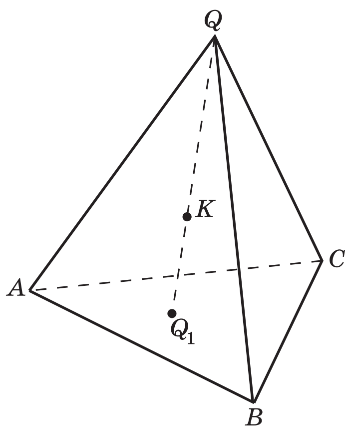
3) Для паралельних граней AA_1B_1B і DD_1C_1C аналогічно маємо, що $TF \parallel MK$, $F \in CD$.

4) Отже, $LMKNTF$ – шуканий переріз.

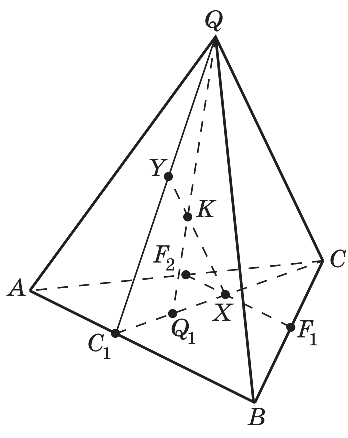
Неважко помітити, що 2-й спосіб для цієї задачі є більш раціональним, ніж метод слідів.

Властивості паралельних прямих і площин для побудови перерізів доцільно використовувати і тоді, коли січна площина за умовою є паралельною деяким прямій або площині, або двом мимобіжним прямим у многограннику.

Задача 4. Побудувати переріз тетраедра $QABC$ площиною, що проходить через точку K, яка лежить усередині тетраедра й не належить жодній його грані, паралельно двом мимобіжним ребрам AB і QC, коли відомо положення точки Q_1 – точки перетину прямої QK і площини ABC (мал. 7.16).



Мал. 7.16



Мал. 7.17

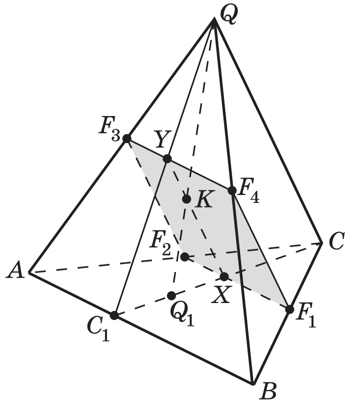
Р о з в ' я з а н н я. 1) Нехай $CQ_1 \cap AB = C_1$ (мал. 7.17).

2) Розглянемо площину QCC_1. Оскільки $K \in QQ_1$, а $QQ_1 \subset (QCC_1)$, то $K \in (QCC_1)$.

3) Оскільки $K \in (QCC_1)$, $QC \in (QCC_1)$, а площина перерізу паралельна прямій QC, через точку K паралельно прямій QC проведемо пряму XY, де $X \in CC_1$, $Y \in QC_1$. Пряма XY належить площині перерізу.

4) Оскільки площина перерізу паралельна прямій AB, то через точку X у площині ABC паралельно прямій AB проведемо пряму F_1F_2, де $F_1 \in BC$, $F_2 \in AC$.

5) Аналогічно, у площині QAB через точку Y паралельно прямій AB проведемо пряму F_3F_4, де $F_3 \in AQ$; $F_4 \in QB$ (мал. 7.18).



Мал. 7.18

6) Тоді $F_1F_2F_3F_4$ – шуканий переріз.

3. Побудова перерізу методом внутрішнього проекціювання

Ми розглянули кілька різних задач на побудову перерізів методом слідів, що свідчить про універсальність цього методу. Проте він має один серйозний недолік: побудова часто займає досить багато місця на площині побудови (аркуші паперу, шкільній дошці тощо), трапляються й випадки, коли точки перетину прямих можуть узагалі опинитися за її межами.

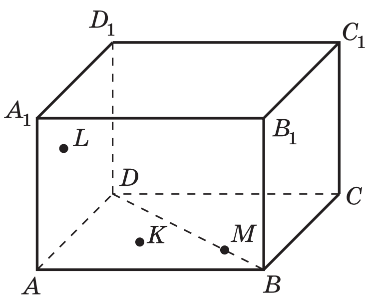
Цього недоліку вдається уникнути в іншому методі – *методі внутрішнього проекціювання*.

Задача 5. Побудувати переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною KLM (мал. 7.19), де $K \in (AA_1B)$, $L \in (AA_1D_1)$, $M \in BD$.

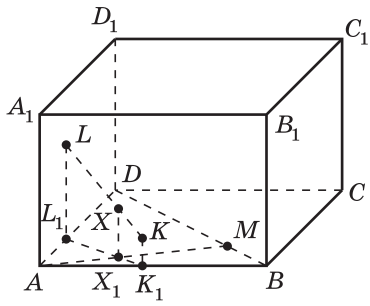
Р о з в ' я з а н н я. 1) Побудуємо проекції точок K і L на площину ABC у напрямі прямої AA_1. Отримаємо точки K_1 і L_1 (мал. 7.20). Відрізок K_1L_1 – проекція відрізка KL.

2) AM і L_1K_1 перетинаються в точці X_1.

3) Точка X_1 – проекція деякої точки X відрізка LK на площину ABC. Щоб знайти точку X, через точку X_1 проведемо пряму, паралельну ребру AA_1, яка перетне відрізок KL у точці X.



Мал. 7.19



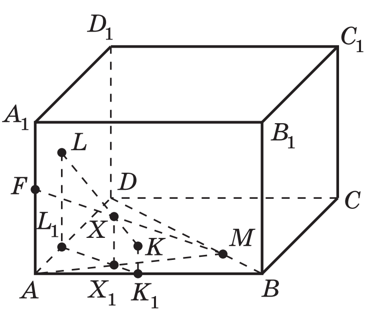
Мал. 7.20

4) Пряма MX перетинає AA_1 у точці F (мал. 7.21). Оскільки KL належить площині перерізу, то й точка X належить площині перерізу. Оскільки M і X належать площині перерізу, то площині перерізу належить і пряма MK, а тому й точка F.

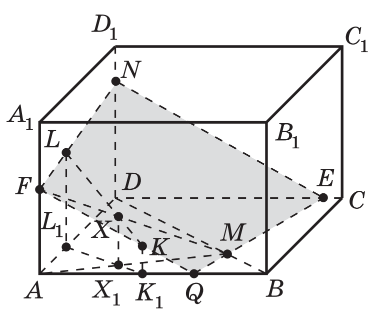
5) $FL \cap DD_1 = N$ (мал. 7.22).

6) $FK \cap AB = Q$.

7) $QM \cap DC = E$.



Мал. 7.21



Мал. 7.22

8) Отже, $FNEQ$ – шуканий переріз (мал. 7.22).

Зауважимо, що слід січної NE на площині CC_1D_1D можна було знайти і за властивістю паралельних площин.

Отже, за розв’язуванням задачі 5 спробуємо описати послідовність побудов у методі внутрішнього проекціювання. А саме:

1) Маючи три точки, що визначають площину перерізу, знаходимо їх проекції на деяку площину, найчастіше площину основи многогранника: площину ACB.

2) Знаходимо проекцію на цю саму площину якоїсь ще не побудованої точки, яка належить перерізу: $X_1 = AM \cap L_1K_1$.

3) Знаходимо саму точку, проекцію якої знайшли вище: $XX_1 \parallel AA_1$, $X = XX_1 \cap LK$.

4) Знаходимо точку, що належить перерізу, на ребрі (або грані) многогранника: $F = MX \cap AA_1$.

5) Закінчуємо побудову перерізу одним з відомих способів.

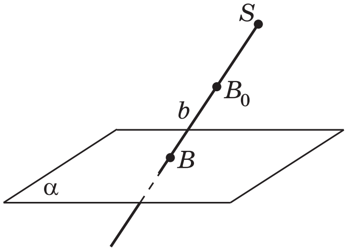
Отже, як видно з малюнків задачі 5, усі побудови, які ми виконували, не виходили за зображення даного многогранника. Тому метод носить саме таку назву – метод *внутрішнього проекціювання*.

Зазначимо, що більшість задач на побудову перерізів розв'язують за допомогою одного з розглянутих методів або послідовного застосування (комбінування) методів внутрішнього проекціювання і слідів. Тому вибір того чи іншого методу (або їх комбінацій) для побудови перерізу залежить як від умови задачі, так і від уподобань самого розв'язувача.

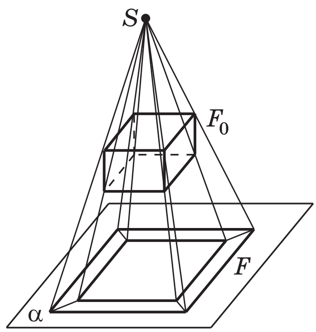
4. Центральне проекціювання

Метод внутрішнього проекціювання можна застосовувати не тільки для побудови перерізів прямокутного паралелепіпеда і куба, а й для побудови перерізів тетраедра. Тільки для побудови перерізів прямокутного паралелепіпеда і куба цим методом використовували паралельне проекціювання, а при побудові перерізів тетраедра використовують *центральне проекціювання*.

Нехай у просторі дано площину α і точку S, що їй не належить. Виберемо довільну точку B_0, яка не лежить у площині, що проходить через точку S паралельно площині α, і проведемо через точки B_0 і S пряму b (мал. 7.23). Нехай пряма SB_0 перетинає площину α у точці B. Точку B, яку побудовано в такий спосіб, називають *центральною проекцією* точки B_0 на площину α. При цьому площину α називають *площиною проекції*, а точку S – *центром проекціювання*.



Мал. 7.23



Мал. 7.24

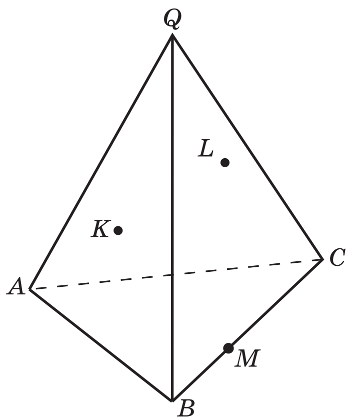
Побудувавши в такий спосіб зображення кожної точки фігури F_0, отримаємо фігуру F – зображення фігури F_0 на площину α (мал. 7.24). Фігуру F при цьому називають центральною проекцією фігури F_0 на площину α. Кажуть також, що фігуру F отримали з фігури F_0 за допомогою центрального проекціювання.

5. Побудова перерізу піраміди методом внутрішнього проекціювання

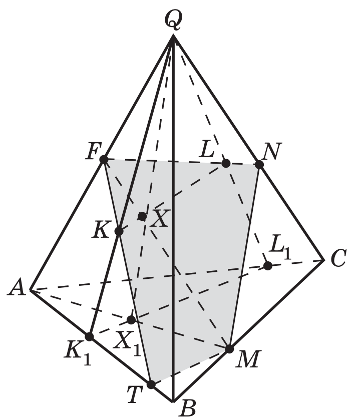
Виконуючи побудову перерізів пірамід, зокрема тетраедрів, методом внутрішнього проекціювання, зручно користуватися саме центральним (а не паралельним) проекціюванням. Зазвичай площиною проекції обирають площину основи піраміди (або одну з граней тетраедра), а центром проекціювання – вершину піраміди (для тетраедра беруть вершину піраміди, протилежну площині проекції).

Задача 6. Побудувати переріз тетраедра $QABC$ площиною, що проходить через точки K, L, M, де $K \in (AQB)$, $L \in (AQC)$, $M \in BC$ (мал. 7.25).

Р о з в ' я з а н н я. Розв'язання цієї задачі аналогічне до розв'язання задачі 5, різниця полягає лише в тім, що замість паралельного проекціювання використовують центральне. При цьому площину ABC обирають площиною проекції, а точку Q – центром проекціювання.



Мал. 7.25



Мал. 7.26

Подамо короткий план розв'язування (мал. 7.26).

1) $QK \cap AB = K_1$; 2) $QL \cap AC = L_1$;
3) $AM \cap K_1L_1 = X_1$; 4) $QX_1 \cap KL = X$;
5) $MX \cap AQ = F$; 6) $FK \cap AB = T$;
7) $FL \cap QC = N$; 8) $FNMT$ – шуканий переріз.

• На прикладі розв'язування задач 1 і 2 покажіть, як використовують властивості паралельних прямих і площин для побудови перерізів. • На прикладі задачі 3 покажіть, як використовують метод слідів для побудови перерізу куба (два способи розв'язування). • На прикладі задачі 4 покажіть, як будують переріз тетраедра за допомогою методу слідів з використанням властивостей паралельних прямих і площин. • Опишіть метод внутрішнього проекціювання. • Що розуміють під центральним проекціюванням?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2 **7.1.** Чи може переріз куба площиною бути:

1) трикутником; 2) рівнобедреним трикутником;
3) прямокутником; 4) семикутником?

У разі позитивної відповіді виконайте схематичний малюнок.

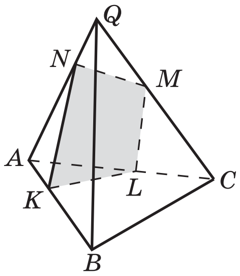
7.2. Чи може переріз куба площиною бути:

1) правильним трикутником; 2) квадратом;
3) шестикутником; 4) восьмикутником?

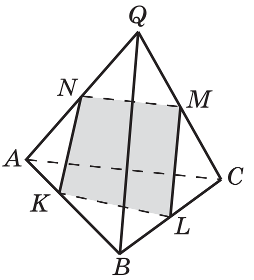
У разі позитивної відповіді виконайте схематичний малюнок.

7.3. Які многокутники можуть бути перерізами куба?

7.4. Чи може чотирикутник $KLMN$ бути перерізом тетраедра $QABC$ (мал. 7.27 і мал. 7.28)?



Мал. 7.27



Мал. 7.28

3 **7.5.** Які правильні многокутники можуть бути перерізами куба площиною?

7.6. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 2.

1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки A, C_1 і точку L – середину ребра DD_1.
2) Якою фігурою є цей переріз?
3) Знайдіть периметр отриманого перерізу.

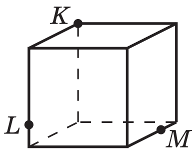
7.7. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 4. Точка K – середина ребра AA_1, L – середина ребра DD_1.

1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки K, L і C.

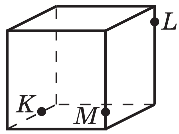
2) Доведіть, що отриманий переріз є прямокутником.

3) Знайдіть площу цього перерізу.

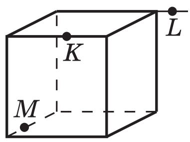
7.8. На малюнках 7.29–7.32 точки K, L і M належать або ребрам, або їх продовженням, або граням куба. Використовуючи властивості паралельних прямих і площин, побудуйте переріз куба площиною KLM для кожного з положень точок K, L і M.



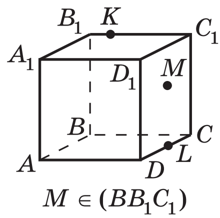
Мал. 7.29



Мал. 7.30

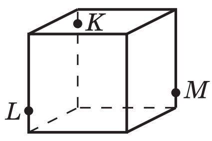


Мал. 7.31

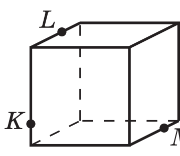


Мал. 7.32

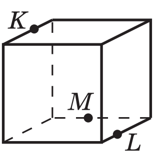
7.9. На малюнках 7.33–7.36 точки K, L і M належать ребрам куба або їх продовженням. Використовуючи властивості паралельних прямих і площин, побудуйте переріз куба площиною KLM для кожного з положень точок K, L і M.



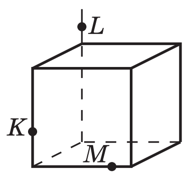
Мал. 7.33



Мал. 7.34



Мал. 7.35



Мал. 7.36

7.10. Точки K, L і M належать відповідно ребрам AA_1, BB_1 і CC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте його переріз площиною KLM, якщо:

1) прямі KL і LM паралельні площині ABC;

2) пряма KL паралельна площині ABC, а пряма LM не паралельна площині ABC;

3) пряма LM паралельна площині ABC, а пряма KL не паралельна площині ABC;

4) прямі KL і LM не паралельні площині ABC.

7.11. Точка K – середина ребра AA_1, точка L – належить ребру BB_1, точка M – ребру CC_1 прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте його переріз площиною KLM, якщо:
1) L – середина BB_1, M – середина CC_1;
2) L – середина BB_1, M – не є серединою CC_1;
3) L – не є серединою BB_1, M – середина CC_1;
4) L – не є серединою BB_1, M – середина CC_1.

7.12. У тетраедрі $QABC$ точка E – середина ребра AQ, точка F належить ребру BQ, а точка M – ребру BC. Побудуйте переріз тетраедра площиною EFM, якщо:
1) F – середина BQ; 2) F – не є серединою BQ.

7.13. У тетраедрі $QABC$ точка M належить ребру AQ, точка N – ребру BQ, а точка K – ребру AC. Побудуйте переріз тетраедра площиною KMN, якщо пряма MN:
1) паралельна прямій AB;
2) не є паралельною прямій AB.

7.14. Усі ребра тетраедра $QABC$ по 8 см. На ребрі QC вибрано точку M так, що $CM = 3$ см.
1) Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через точки M і B паралельно ребру AC.
2) Знайдіть площу отриманого перерізу.

7.15. Усі ребра тетраедра $QABC$ дорівнюють по 8 см. На ребрі QA взято точку N так, що $AN = 5$ см.
1) Побудуйте переріз, що проходить через точки B і N паралельно ребру AC.
2) Знайдіть периметр отриманого перерізу.

7.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро якого дорівнює 10 см, $E \in CD$, $CE : ED = 3 : 2$.
1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точку E паралельно площині BDC_1.
2) Знайдіть периметр отриманого перерізу.

7.17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро якого дорівнює 12 см. $M \in AD$, $DM : MA = 2 : 1$.
1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точку M паралельно площині ACD_1.
2) Знайдіть площу отриманого перерізу.

7.18. У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $K \in B_1C_1$, $L \in BB_1$, $N \in DD_1$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною KLN двома способами: методом слідів і методом внутрішнього проекціювання.

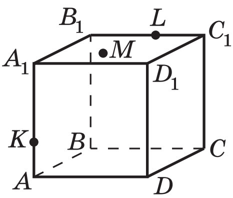
7.19. $KLMNK_1L_1M_1N_1$ – прямокутний паралелепіпед, $A \in LL_1$, $B \in L_1M_1$, $C \in NN_1$. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною ABC двома способами: методом слідів і методом внутрішнього проекціювання.

7.20. $QABC$ – тетраедр, $M \in AQ$, $N \in BQ$, $K \in (ABC)$. Побудуйте переріз тетраедра площиною MNK двома способами: методом слідів і методом внутрішнього проекціювання.

7.21. $DABC$ – тетраедр, $L \in BD$, $N \in DC$, $K \in (ABC)$. Побудуйте переріз тетраедра площиною LNK двома способами: методом слідів і методом внутрішнього проекціювання.

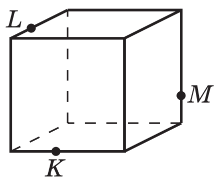
7.22. Побудуйте переріз куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через середину відрізка AD паралельно площині BC_1D.

4 **7.23.** На малюнках 7.37–7.39 точки K, L і M належать або ребрам, або граням куба. Використовуючи властивості паралельних прямих і площин, побудуйте переріз куба площиною KLM для кожного з положень точок K, L і M.

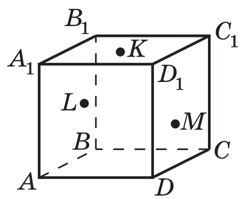


$M \in (A_1B_1C_1)$

Мал. 7.37



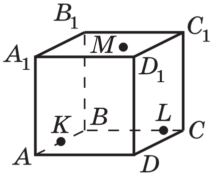
Мал. 7.38



$L \in (AA_1B_1)$, $K \in (A_1B_1C_1)$, $M \in (DD_1C_1)$

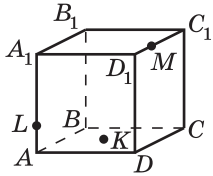
Мал. 7.39

7.24. На малюнках 7.40 і 7.41 точки K, L і M належать або ребрам, або граням куба. Використовуючи властивості паралельних прямих і площин, побудуйте переріз куба площиною KLM для кожного з положень точок K, L і M.



$M \in (A_1B_1C_1)$

Мал. 7.40



$K \in (ABC)$

Мал. 7.41

7.25. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною KLM, якщо $K \in (A_1B_1C_1)$, $L \in (A_1B_1C_1)$, $M \in (AA_1B)$.

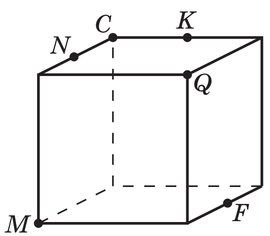
7.26. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ площиною ABC, якщо $A \in (KLM)$, $B \in (KLM)$, $C \in (KK_1L)$.

7.27. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$ площиною ABC, якщо $A \in (KK_1N)$, $B \in (KK_1N)$, $C \in (LL_1M)$.

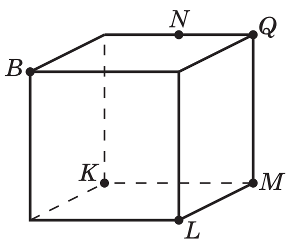
7.28. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною MNL, якщо $M \in (ABB_1)$, $N \in (ABB_1)$, $L \in (CDD_1)$.

7.29. Чи може перерізом куба бути прямокутний трикутник?

7.30. Побудуйте лінію перетину двох січних площин NKF і CMQ (мал. 7.42), які задано точками, що належать ребрам куба, або є вершинами куба.



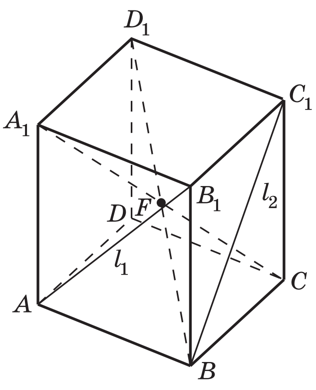
Мал. 7.42



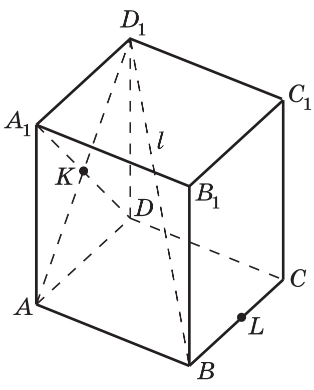
Мал. 7.43

7.31. Побудуйте лінію перетину двох січних площин NKL і BQM (мал. 7.43), які задано точками, що належать ребрам куба або є вершинами куба.

7.32. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точку F паралельно прямим l_1 і l_2 (мал. 7.44).



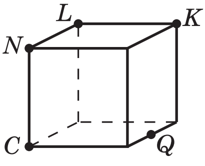
Мал. 7.44



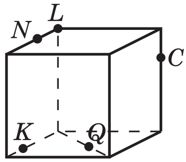
Мал. 7.45

7.33. Побудуйте переріз прямокутного паралелепіпеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площиною, що проходить через точки K і L паралельно прямій l (мал. 7.45).

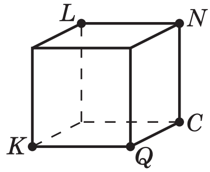
7.34. На малюнках 7.46 і 7.47 точки C, K, L, N і Q лежать або у вершинах куба, або на його ребрах, або на його гранях. Побудуйте точку перетину січної площини NKC із прямою LQ.



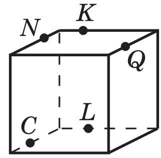
Мал. 7.46



Мал. 7.47



Мал. 7.48



Мал. 7.49

7.35. На малюнках 7.48 і 7.49 точки C, K, L, N і Q лежать або у вершинах куба, або на його ребрах. Побудуйте точку перетину січної площини NKC із прямою LQ.

7.36. $QABC$ – тетраедр, усі ребра якого між собою рівні, M – середина AC, N – середина BC, K – середина QB. Побудуйте два паралельних між собою перерізи тетраедра:

1) один з яких проходить через пряму MN, а другий – через пряму CK;

2) один з яких проходить через пряму QM, а другий – через пряму CK.

7.37. $QABC$ – тетраедр, усі ребра якого між собою рівні, M – середина AC, K – середина BC. Побудуйте два паралельних між собою перерізи тетраедра, один з яких проходить через пряму MB, а другий – через пряму QK.

7.38. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено два паралельних між собою перерізи: один через пряму AC, другий – через пряму BC_1. Знайдіть відношення площ цих перерізів.

7.39. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Побудуйте два паралельних між собою перерізи куба: один з яких проходить через пряму AC, а другий – через пряму KL, де K – середина CD, L – середина A_1B_1.

7.40. Доведіть, що кожний тетраедр має переріз, що є ромбом. Скільки таких перерізів можна побудувати?

7.41. Через точку, що належить ребру тетраедра, проведіть площину α так, щоб отриманий переріз був паралелограмом.

7.42. Два мимобіжних ребра тетраедра мають довжини a і b. Переріз тетраедра, паралельний цим ребрам, є ромбом. У яких відношеннях переріз ділить ребра тетраедра, які він перетинає?

7.43. Точки F, M і K – середини ребер A_1B_1, B_1C_1 і CD куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

1) Який многогранник є перерізом куба площиною, що проходить через точки F, M і K?

2) Знайдіть площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює 2 см.

7.44. Довжина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 1. Точка F – середина ребра A_1B_1, точка Q ділить відрізок AB_1 у відношенні 2 : 1, рахуючи від вершини A, точка K – точка перетину відрізків BC_1 і B_1C.

1) Побудуйте переріз куба площиною FQK.

2) Знайдіть периметр отриманого перерізу.

3) У якому відношенні площина перерізу ділить діагональ AC_1 куба?

7.45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро якого дорівнює 3 см. Точка Q належить ребру B_1C_1, точка M – ребру AD, точки N і L – ребру CD, $AM = C_1Q = CL = DN = 1$.

1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через пряму ML, паралельно прямій NQ.

2) Знайдіть площу отриманого перерізу.

7.46. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. На діагоналях AB_1 і BC_1 позначено точки M і N так, що відрізок MN паралельний площині ABC. Знайдіть відношення, у якому точка M ділить відрізок AB_1, якщо $\frac{MN}{AB} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

7.47. Точки M, N і L – середини ребер AB, CQ і BC тетраедра $QABC$. Через точку L проведено площину, паралельну прямим QM і AN. У якому відношенні ця площина ділить ребро AQ?

7.48. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, точка M – середина AD, точка M – середина CC_1. Через точки M і N проведено переріз, паралельний прямій B_1D. У якому відношенні переріз ділить ребро BB_1?

7.49. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 4 см, точка O – центр грані $ABCD$, точка O_1 – центр грані $A_1B_1C_1D_1$. На відрізку OO_1 узято точку M так, що $O_1M = 1$ см. Через точку M проведено переріз куба, паралельний кожній з двох мимобіжних прямих AC_1 і BD. Знайдіть площу цього перерізу.

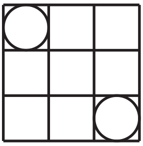
7.50. Тунель має форму півкола радіуса 3 м. Яку найбільшу висоту може мати вантажівка шириною 2 м, щоб вона могла проїхати в цьому тунелі? У відповіді вкажіть наближене значення з точністю до десятих метра.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

7.51. Прямі a і b взаємно перпендикулярні та перетинаються в точці M. Точка A належить прямій a, а точка B – прямій b. Знайдіть:

1) AB, якщо $AM = 5$ см, $MB = 12$ см;
2) AM, якщо $AB = 10$ см, $MB = 8$ см.

7.52. (*Міжнародний математичний конкурс «Кенгуру»*.) Квадрат зі стороною 3 см розділили на 9 рівних квадратиків, у два з яких вписали коло (мал. 7.50). Яка відстань між центрами цих кіл?



Мал. 7.50

Перевірте свою компетентність

Завдання № 7

1. Укажіть кут між бісектрисами суміжних кутів.

А	Б	В	Г	Д
60°	90°	120°	150°	неможливо визначити

2. Дві сторони трикутника дорівнюють 3,6 см і 4,5 см, а довжина третьої є цілим числом сантиметрів. Яку найбільшу довжину може мати третя сторона трикутника?

А	Б	В	Г	Д
5 см	6 см	7 см	8 см	9 см

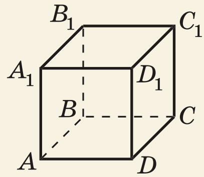
3. Укажіть кількість діагоналей опуклого восьмикутника.

А	Б	В	Г	Д
8	16	20	24	28

4. Одна із сторін трикутника дорівнює 7 см, а дві інші утворюють кут 120°. Знайдіть більшу з невідомих сторін трикутника, якщо його периметр дорівнює 15 см.

А	Б	В	Г	Д
3 см	4 см	5 см	5,5 см	6 см

5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Установіть відповідність між парою прямих (1–4) та їх взаємним розміщенням (А–Д).



Пара прямих		*Взаємне розміщення*	
1	AB_1 і AB	**А**	прямі паралельні
2	A_1D і DC_1	**Б**	прямі мимобіжні
3	A_1B і D_1C	**В**	прямі перетинаються й утворюють кут 45°
4	A_1B і DC_1	**Г**	прямі перетинаються й утворюють кут 60°
		Д	прямі перетинаються під прямим кутом

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Основа рівнобедреного трикутника відноситься до бічної сторони як 4 : 3, а радіус вписаного у трикутник кола дорівнює 8 см. Знайдіть (у см) висоту трикутника, проведену до основи.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 3

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

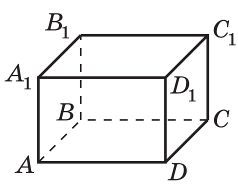
1

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 7.51). Яка із площин паралельна площині AA_1D_1?

А. ABB_1 **Б.** $A_1B_1C_1$ **В.** ADC **Г.** BCC_1

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 7.51). Площини AA_1B_1 і $B_1C_1D_1$...

А. Не перетинаються
Б. Мають дві спільні точки
В. Перетинаються по прямій A_1B_1
Г. Перетинаються по прямій B_1C_1

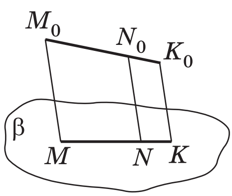


Мал. 7.51

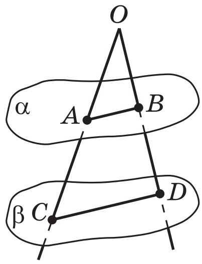
3. Точки M_0, N_0 і K_0 лежать на одній прямій (мал. 7.52); точки M, N, K –

є відповідно їх паралельними проекціями на площину β, $M_0N_0 = 12$ см, $N_0K_0 = 6$ см. Знайдіть відношення $KN : NM$.

А. 2 : 3 **Б.** 1 : 3 **В.** 2 : 1 **Г.** 1 : 2



Мал. 7.52



Мал. 7.53

2 **4.** Сторони кута O перетинають паралельні площини α і β у точках A, B, C і D (мал. 7.53), $BD = 4$ см, $OD = 8$ см, $CD = 5$ см. Знайдіть AB.

А. 2 см **Б.** 2,5 см **В.** 3 см **Г.** 4 см

5. Площини α і β паралельні. Паралельні прямі a і b перетинають площину α у точках C і D, а площину β – у точках M і N відповідно. Знайдіть градусну міру кута CMN, якщо $\angle CDN = 100°$.

А. 70° **Б.** 80° **В.** 90° **Г.** 100°

6. Паралельною проекцією трапеції з основами 18 см і 6 см може бути трапеція з основами…

А. 12 см і 4 см **Б.** 9 см і 5 см
В. 10 см і 5 см **Г.** 8 см і 2 см

3 **7.** Площини α і β паралельні. Через точку M, яка лежить між ними, проведено прямі a і b, які перетинають площину α в точках A_1 і B_1, а площину β – у точках A_2 і B_2 відповідно. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $MB_1 = 6$ см, $MB_2 = 4$ см, $A_2B_2 = 8$ см.

А. 10 см **Б.** 12 см **В.** 16 см **Г.** 18 см

8. При паралельному проекціюванні квадрата $A_0B_0C_0D_0$ отримали чотирикутник $ABCD$, у якого $\angle A = 70°$. Тоді…

А. $\angle B = 70°$ **Б.** $\angle C = 70°$ **В.** $\angle C = 110°$ **Г.** $\angle D = 70°$

9. Усі ребра тетраедра $QABC$ по 15 см. На ребрі QA взято точку M так, що $AM = 7$ см. Через точки B і M паралельно ребру AC проведено переріз. Знайдіть периметр цього перерізу.

А. 30 см **Б.** 32 см **В.** 34 см **Г.** 36 см

4

10. Площина трикутника CDF зі сторонами 3 см, 4 см і 5 см паралельна площині β. Світло, що виходить з точки S, відкидає на площину β тінь $C_1D_1F_1$ від трикутника CDF. Відомо, що $SC : SC_1 = 1 : 3$. Знайдіть площу трикутника $C_1D_1F_1$.

А. 12 см^2 **Б.** 18 см^2 **В.** 54 см^2 **Г.** 24 см^2

11. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M належить ребру A_1B_1, $B_1M : MA_1 = 2 : 1$. Через точку M паралельно площині AB_1D_1 проведено переріз. Знайдіть периметр цього перерізу, якщо ребро куба дорівнює 12 см.

А. $9\sqrt{2}$ см **Б.** $6\sqrt{2}$ см **В.** 9 см **Г.** $12\sqrt{2}$ см

12. Точки K, L і M – середини ребер AD, B_1C_1, і A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ відповідно. Знайдіть периметр перерізa куба площиною KLM, якщо $A_1B_1 = 2\sqrt{2}$ см.

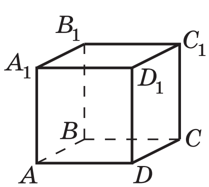
А. $12\sqrt{2}$ см **Б.** 24 см **В.** 8 см **Г.** 12 см

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 5–7

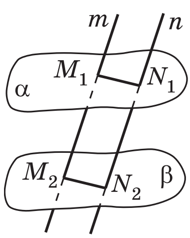
1

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 7.54). Чи паралельні площини:

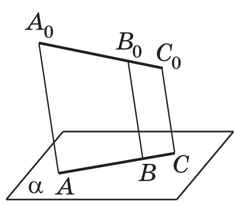
1) AA_1B_1 і CC_1D_1; 2) ABC і AA_1B?



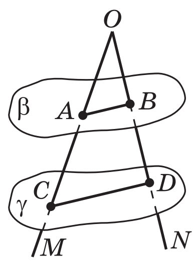
Мал. 7.54



Мал. 7.55



Мал. 7.56



Мал. 7.57

2. Площини α і β паралельні. Паралельні між собою прямі m і n перетинають ці площини відповідно в точках M_1 і M_2 та N_1 і N_2 (мал. 7.55). Знайдіть M_1M_2 і M_1N_1, якщо $M_2N_2 = 4$ см, $N_1N_2 = 7$ см.

3. Точки A_0, B_0, C_0 лежать на одній прямій (мал. 7.56), точки A, B, C – паралельні проекції точок A_0, B_0, C_0 на площину α. $AB = 6$ см, $BC = 2$ см. Знайдіть відношення $A_0B_0 : B_0C_0$.

2

4. Сторони кута MON перетинають паралельні площини β і γ у точках A, B, C і D (мал. 7.57), $OA = 5$ см, $OC = 10$ см, $AB = 3$ см. Знайдіть CD.

5. Чи може паралельною проекцією трапеції з основами 5 см і 10 см бути трапеція з основами:

1) 4 см і 7 см; 2) 3 см і 6 см?

6. Трикутник ABC – паралельна проекція рівностороннього трикутника. Побудуйте проекцію точки перетину висот рівностороннього трикутника.

3

7. Трикутник ABC – паралельна проекція трикутника $A_0B_0C_0$, у якого $A_0B_0 : A_0C_0 = 2 : 3$. Побудуйте зображення бісектриси кута A_0 трикутника $A_0B_0C_0$.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, K – середина AA_1, L – середина A_1B_1. Побудуйте переріз куба площиною KLM.

4

9. Площина трикутника KLM зі сторонами 5 см, 5 см і 6 см паралельна площині α. З точки O, що лежить поза площиною трикутника KLM, проведено промені через точки K, L і M, які перетинають площину α відповідно в точках K_1, L_1 і M_1. Обчисліть:

1) сторони трикутника $K_1L_1M_1$, якщо $OK : KK_1 = 1 : 3$;
2) площу трикутника $K_1L_1M_1$.

Додаткові завдання

3

10. Площини α і β паралельні. Через точку P, яка лежить між ними, проведено прямі a і b, які перетинають площину α у точках A_1 і B_1, а площину β – у точках A_2 і B_2 відповідно. Знайдіть довжину відрізка A_1B_1, якщо $A_2B_2 = 12$ см, $PA_1 = 8$ см, $PA_2 = 16$ см.

4

11. $ABCD$ – тетраедр, усі ребра якого між собою рівні, MN – середня лінія трикутника ABD, AK – висота трикутника ABC. Побудуйте два паралельних між собою перерізи тетраедра, один з яких проходить через пряму AK, а другий – через пряму MN.

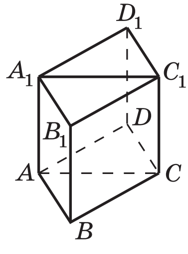
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 2

До § 3

1

1. На малюнку 7.58 зображено прямокутний паралелепіпед. Яким є взаємне розміщення прямих:

1) AB і BC;
2) AB і A_1B_1;
3) AB і B_1C_1;
4) AA_1 і CC_1?



Мал. 7.58

2. Які з тверджень правильні:

1) через дві мимобіжні прямі можна провести площину, і до того ж тільки одну;
2) якщо дві прямі не мають спільних точок, то вони мимобіжні;
3) через будь-які дві паралельні прямі можна провести площину, і до того ж тільки одну;
4) дві прямі, які паралельні третій, є мимобіжними?

2

3. Пряма PF, яка не лежить у площині прямокутника $ABCD$, паралельна його стороні CD. З'ясуйте взаємне розміщення прямих:

1) AB і PF; 2) PD і AB.
Відповідь обґрунтуйте.

4. Прямі c і d паралельні, а пряма m не перетинає пряму c. Чи можна стверджувати, що пряма m не перетинає пряму d:

1) на площині; 2) у просторі?

5. Через точки C, D і середину N відрізка CD проведено паралельні прямі, які перетинають деяку площину α в точках C_1, D_1 і N_1 відповідно. Знайдіть довжину відрізка CC_1, якщо $DD_1 = 8$ см, $NN_1 = 5$ см і відрізок CD не перетинає площину α.

6. Пряма l не лежить у площині трикутника ABC та перетинає цю площину в точці M перетину його медіан.

1) Чи може пряма l перетинати сторону AC? Відповідь обґрунтуйте.
2) Яким є взаємне розміщення прямих l і AB?

7. Точки A і B належать прямій m, а точки C і D – прямій n, причому прямі m і n – мимобіжні. Доведіть, що прямі AD і BC – мимобіжні.

8. Чи правильне твердження: «Якщо прямі лежать у різних площинах і не перетинаються, то вони мимобіжні»?

3

9. Прямі a і b мимобіжні. Як можуть бути розміщені прямі b і c, якщо прямі a і c:

1) паралельні; 2) перетинаються; 3) мимобіжні?
До кожного можливого розміщення виконайте відповідний малюнок. Якщо розміщення неможливе, доведіть це.

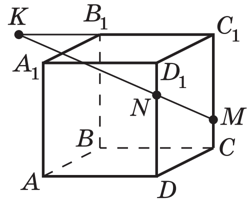
10. Прямі a і b перетинаються, $c \parallel a$, $d \parallel b$. Чи правильно, що c і d перетинаються?

11. Через кінець A відрізка AB проведено площину γ. Через кінець B і точку P цього відрізка проведено паралельні прямі, які перетинають площину γ в точках B_1 і P_1 відповідно. $BB_1 = 15$ см, $PP_1 = 12$ см. Знайдіть відношення $AP : PB$.

12. На малюнку 7.59 зображено куб і прямі MN і B_1C_1, які перетинаються в точці K. Чи правильно виконано малюнок? Відповідь обґрунтуйте.

4 **13.** Прямі m і n не лежать в одній площині. Кожна з прямих a_1, a_2, a_3, ... перетинає і m, і n. Чи є серед цих прямих:

1) дві прямі, паралельні між собою;
2) дві прямі, які перетинаються?



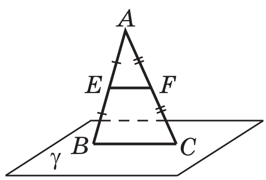
Мал. 7.59

14. Дано паралелограм і площину, що не перетинає його. Через вершини паралелограма проведено паралельні відрізки, які кінцями впираються у площину. Довжини трьох відрізків дорівнюють 4 см, 5 см і 7 см. Знайдіть довжину четвертого відрізка. Розгляньте всі можливі випадки.

15. Точки K, L, M і N не лежать в одній площині. A, B, C і D – середини відрізків KN, NL, LM і KM відповідно. Доведіть, що відрізки AC і BD перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.

До § 4

1 **16.** Сторона BC трикутника ABC належить площині γ (мал. 7.60). Як розміщена пряма EF, що містить середню лінію трикутника, відносно площини γ?



Мал. 7.60

17. Пряма m паралельна площині α, а пряма n належить площині α. Яким може бути взаємне розміщення прямих m і n?

18. Пряма a паралельна площині γ. Чи існує у площині γ пряма, не паралельна прямій a? Зробіть малюнок.

2 **19.** Прямі a і b мимобіжні. Як можуть бути розміщені пряма b і площина α, якщо:

1) a і α паралельні;
2) a і α перетинаються;
3) пряма a лежить у площині α?

Виконайте відповідні малюнки.

20. Пряма m паралельна площині α. Як можуть бути розташовані прямі m і n, якщо:

1) α і n паралельні;
2) α і n перетинаються;
3) n належить α?

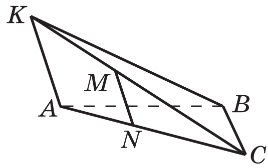
21. Чи правильне твердження:

1) дві прямі, паралельні одній і тій самій площині, паралельні між собою;

2) якщо відрізок AB не перетинає площину α, то пряма AB паралельна площині α?

Виконайте відповідні малюнки.

22. Точка K не лежить у площині трикутника ABC (мал. 7.61), MN – середня лінія трикутника AKC. Знайдіть на малюнку пряму і площину, паралельні між собою.



Мал. 7.61

23. Площина γ паралельна стороні AC трикутника ABC та перетинає сторони AB і BC відповідно в точках E і F.

1) Яким є взаємне розміщення прямих EF і AC?

2) Доведіть, що $\triangle ABC \backsim \triangle EBF$.

3) Знайдіть EB, якщо $AB = 15$ см, $EF : AC = 3 : 5$.

3

24. Прямі a і b паралельні. Через пряму a проведено площину α, а через пряму b – площину β. Площини α і β перетинаються по прямій c. Доведіть, що $c \parallel a$ і $c \parallel b$.

25. Площина α паралельна стороні AC трикутника ABC та перетинає сторони BA і BC у точках K і L відповідно. Знайдіть BC, якщо $LC = 4$ см, $KL : AC = 1 : 3$.

26. Трикутник ADM і трапеція $ABCD$ з основами AD і BC мають спільну сторону AD. Через сторону BC трапеції і точку K – середину AM – проведено площину, яка перетинає MD у точці L, $AD = 18$ см, $BC = 9$ см.

1) Доведіть, що прямі KL і AD паралельні.

2) Знайдіть довжину відрізка KL.

3) Визначте вид чотирикутника $KLCB$.

27. Точка P міститься поза площиною трикутника ABC. Чи є серед прямих, які містять середні лінії трикутника ABP, пряма, паралельна:

1) площині ABC;

2) площині PBC?

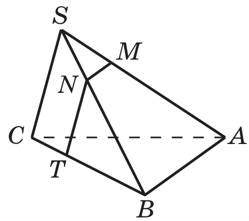
28. Прямі a і b – мимобіжні. Чи можна побудувати площину β, паралельну прямій a, так, щоб пряма b належала площині β? Якщо відповідь позитивна, виконайте цю побудову та укажіть кількість таких площин.

4

29. Дано мимобіжні прямі a і b. Чи можна побудувати площину γ, яка містить пряму a і паралельна прямій b? Якщо відповідь позитивна, то укажіть, скільки таких площин можна побудувати.

30. Точка S не лежить у площині трикутника ABC (мал. 7.62). На відрізках SA, SB і CB узято точки M, N і T відповідно так, що $CT : TB = SN : NB = SM : MA = 2 : 3$.

1) Доведіть, що пряма AB паралельна площині TNM.
2) Яким є взаємне розміщення прямої SC і площини TNM?
3) Побудуйте точку Q – точку перетину площини TNM і прямої AC.
4) Знайдіть периметр чотирикутника $TNMQ$, якщо $SC = 10$ см, $AB = 15$ см.



Мал. 7.62

31. Точка M лежить поза площиною трикутника ABC. Доведіть, що пряма, яка проходить через точки перетину медіан трикутників MAB і MAC, паралельна площині ABC.

32. $ABCDE$ – правильний п'ятикутник. Через діагональ AC проведено площину α, яка не збігається з площиною п'ятикутника. Яким є взаємне розташування прямої ED і площини α?

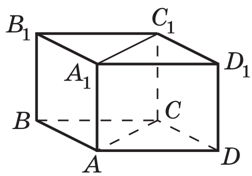
До § 5

1

33. Площини α і β паралельні. Пряма b належить площині β. Чи може пряма b з площиною α мати спільну точку P?

34. На малюнку 7.63 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Чи паралельні площини:

1) ABB_1 і AA_1C; 2) ABC і $A_1B_1C_1$;
3) ACC_1 і BB_1C_1; 4) ABB_1 і CC_1D_1?



Мал. 7.63

35. Площина α перетинає паралельні площини β і γ по прямих m і n. Скільки спільних точок мають прямі m і n?

36. Через точку M, яка не належить площині α, проведено площину β, паралельну α. Скільки площин, відмінних від площини β, можна провести через точку M паралельно площині α?

2

37. Площини α і β паралельні, A – точка площини α. Доведіть, що будь-яка пряма, яка проходить через точку A і паралельна площині β, лежить у площині α.

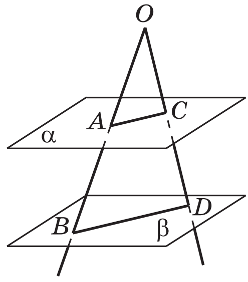
38. Пряма m паралельна одній із двох паралельних площин. Доведіть, що вона паралельна другій площині або належить їй.

39. Пряма a належить площині α. Яким може бути взаємне розміщення площин α і β, якщо:

1) пряма a належить площині β;
2) пряма a перетинає площину β;
3) пряма a паралельна площині β?

До кожного випадку зробіть відповідний малюнок.

40. Через точку O проведено промені, які перетинають паралельні площини α і β відповідно в точках A, B, C і D (мал. 7.64). Знайдіть AC, якщо $OA = AB$ і $BD = 12$ см.



Мал. 7.64

41. Площини α і γ паралельні. Паралельні прямі a і b перетинають площину α у точках P і L, а площину γ – у точках K і M відповідно. Доведіть, що діагоналі чотирикутника $PLMK$ перетинаються і точкою перетину діляться навпіл.

42. Дві сторони прямокутника паралельні площині α. Чи можна стверджувати, що площина прямокутника паралельна площині α, якщо згадані сторони є:

1) протилежними; 2) сусідніми?

3

43. Точка N не належить площині трикутника CDE. Точки P, L і M належать відрізкам NC, ND і NE відповідно. $\angle PCD + \angle CPL = 180°$, $\angle NLM = \angle NDE$. Чи є площини PLM і CDE паралельними? Відповідь обґрунтуйте.

44. Площини β і γ паралельні. Через точку A, яка лежить між площинами, проведено прямі c і d, які перетинають площину β у точках C_1 і D_1, а площину γ – у точках C_2 і D_2. Знайдіть довжину відрізка AD_1, якщо $AD_2 = 12$ см і $C_1D_1 : C_2D_2 = 2 : 3$.

45. Точки K, L, M належать площині α, яка паралельна площині β. Через ці точки проведено прямі KK_1, LL_1 і MM_1, які попарно паралельні та перетинають площину β у точках K_1, L_1, M_1. Знайдіть площу трикутника $K_1L_1M_1$, якщо $KL = 13$ см, $LM = 14$ см, $MK = 15$ см.

4

46. Прямі MM_1, NN_1, KK_1 попарно паралельні та не лежать в одній площині. $MN \parallel M_1N_1$, $MK \parallel M_1K_1$. Доведіть, що $NK \parallel N_1K_1$.

47. Через вершини A, B_1 і точку K – середину ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – проведено площину.

1) Знайдіть точку P – точку перетину площини AB_1K з ребром DC.

2) Знайдіть периметр чотирикутника AB_1KP, якщо $AB = 2$ см.

48. Три відрізки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 не лежать в одній площині і мають спільну середину. Доведіть, що площини $A_1B_1C_1$ і $A_2B_2C_2$ паралельні.

49. Три площини паралельні. Мимобіжні прямі a і b перетинають ці площини в точках A_1, A_2, A_3 і B_1, B_2, B_3. Відомо, що $B_1B_2 = 20$ см, $A_2A_3 = 24$ см, $A_1A_2 : B_2B_3 = 8 : 15$. Знайдіть довжини відрізків A_1A_3 і B_1B_3.

50. Рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ лежать у паралельних площинах. Відомо, що $AB \parallel A_1B_1$, $AC \parallel A_1C_1$. Чи можна стверджувати, що $BC \parallel B_1C_1$?

51. Дві площини проходять через точку P і перетинають площину α по прямих a і b. Побудуйте лінію перетину цих площин. Розгляньте всі можливі випадки.

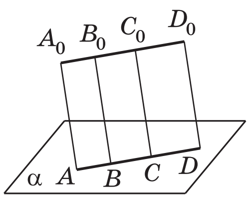
До § 6

1

52. Точки B_0 і C_0 належать відрізку A_0D_0 (мал. 7.65). Точки A, B, C, D – паралельні проекції точок A_0, B_0, C_0, D_0 на площину α. Знайдіть:

1) відношення $AB : CD$, якщо $A_0B_0 = 2$ см, $C_0D_0 = 4$ см;

2) відношення $A_0B_0 : C_0D_0$, якщо $CD : AB = 5 : 3$.



Мал. 7.65

53. Чи може паралельною проекцією квадрата бути:

1) прямокутник; 2) трапеція;
3) квадрат; 4) паралелограм?

2

54. Які геометричні фігури можуть бути паралельними проекціями:

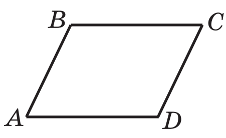
1) трикутника; 2) кола?

55. Відрізок A_0B_0 паралельно проектується на площину α у відрізок AB. Відомо, що $A_0B_0 = AB$. Як розміщені пряма A_0B_0 і площина α?

56. Паралелограм $ABCD$ – паралельна проекція квадрата $A_0B_0C_0D_0$ (мал. 7.66). Побудуйте проекцію:

1) центра Q_0 кола, описаного навколо квадрата $A_0B_0C_0D_0$;

2) перпендикуляра Q_0K_0, проведеного з точки Q_0 до сторони A_0D_0.

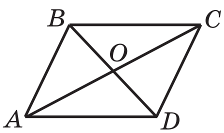


Мал. 7.66

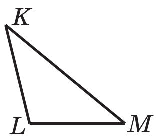
57. Проекціями прямих a_0 і b_0 на площину α є паралельні прямі a і b. Чи можна стверджувати, що прямі a_0 і b_0 – паралельні?

3 **58.** Паралелограм $ABCD$ є зображенням квадрата (мал. 7.67). Побудуйте зображення перпендикулярів, проведених з точки O до сторін квадрата.

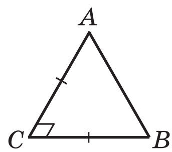
59. Трикутник KLM – паралельна проекція рівнобедреного трикутника, LM – проекція основи (мал. 7.68). Побудуйте проекцію перпендикулярів, проведених із середин бічних сторін до основи рівнобедреного трикутника.



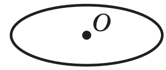
Мал. 7.67



Мал. 7.68



Мал. 7.69



Мал. 7.70

60. Зобразіть проекцію ромба та проекції перпендикулярів, проведених із середини однієї зі сторін ромба до його діагоналей.

4 **61.** ABC – зображення прямокутного рівнобедреного трикутника $A_0B_0C_0$ (мал. 7.69). Побудуйте зображення квадрата, що лежить у площині трикутника $A_0B_0C_0$, для якого гіпотенуза A_0B_0 є стороною (квадрат лежить поза трикутником).

62. Дано паралельну проекцію кола із центром O (мал. 7.70).
1) Побудуйте проекцію рівнобедреного прямокутного трикутника, вписаного в коло.
2) Побудуйте проекцію правильного трикутника, вписаного в коло.

63. Дано зображення ромба, у якого одна з діагоналей дорівнює стороні. Побудуйте висоти ромба, що проходять через його центр.

64. Дано зображення кола, його центра та хорди, що не є діаметром. Побудуйте зображення дотичних до кола, паралельних даній хорді.

До § 7

2 **65.** Побудуйте переріз куба площиною так, щоб у перерізі отримати:
1) прямокутник; 2) трикутник;
3) правильний трикутник.

3 **66.** Побудуйте переріз куба площиною так, щоб у перерізі отримати:

1) п’ятикутник; 2) шестикутник.

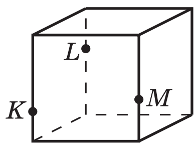
67. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 2, K – середина ребра AA_1, L – середина ребра CC_1.

1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точки K, L і B_1.

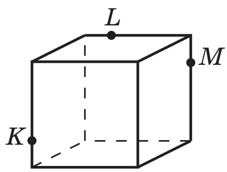
2) Якою фігурою є цей переріз?

3) Знайдіть периметр отриманого перерізу.

68. На малюнках 7.71 і 7.72 точки K, L і M належать ребрам куба. Використовуючи властивості паралельних прямих і площин, побудуйте переріз куба площиною KLM для кожного з положень точок K, L і M.



Мал. 7.71



Мал. 7.72

69. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, K – середина BB_1, L – середина CC_1, точка M належить ребру DD_1. Побудуйте переріз паралелепіпеда площиною KLM, якщо: 1) M – середина DD_1; 2) M – не є серединою DD_1.

70. У тетраедрі $QABC$ точка K – середина AQ, точка M – середина AB, точка N належить ребру QC. Побудуйте переріз тетраедра площиною KLM, якщо:

1) пряма KN паралельна прямій AC;

2) пряма KN не є паралельною прямій AC.

71. Усі ребра тетраедра $QABC$ по 15 см, точка K належить ребру QC, $AK = 13$ см.

1) Побудуйте переріз, що проходить через точки A і K паралельно прямій BC.

2) Знайдіть периметр отриманого перерізу. Скільки розв’язків має задача?

72. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром завдовжки a см.

1) Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через точку A паралельно площині BDC_1.

2) Знайдіть площу отриманого перерізу.

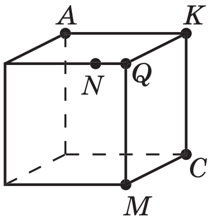
73. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $K \in AB_1$, $M \in AA_1$, $N \in CC_1$. Побудуйте переріз куба площиною KMN двома способами (методом слідів і методом внутрішнього проекціювання).

74. $KLMN$ – тетраедр, точка A – середина KN, $B \in KL$, $BK \neq KL$, $C \in (MNL)$. Побудуйте переріз тетраедра площиною ABC двома способами (методом слідів і методом внутрішнього проекціювання).

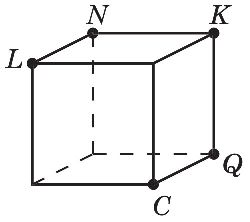
4 **75.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Побудуйте переріз цього паралелепіпеда площиною KMN, якщо:

1) $K \in (ABC)$, $M \in (ABC)$, $N \in (ADD_1)$;
2) $K \in (AA_1D)$, $M \in (AA_1D)$, $N \in (BB_1C)$.

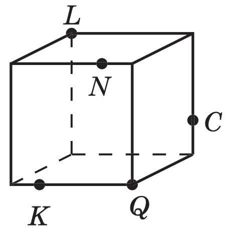
76. Побудуйте лінію перетину двох січних площин CKN і AQM (мал. 7.73), які задано точками, що належать ребрам куба або є його вершинами.



Мал. 7.73



Мал. 7.74



Мал. 7.75

77. На малюнках 7.74 і 7.75 точки C, K, L, N і Q лежать або у вершинах куба, або на його ребрах. Побудуйте точку перетину січної площини NKC із прямою LQ.

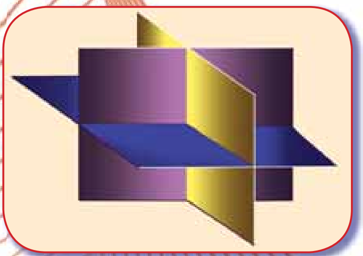
78. $QABC$ – тетраедр, усі ребра якого рівні між собою, M – середина AQ, N – середина KC, L – середина BC. Побудуйте два паралельних між собою перерізи тетраедра, один з яких проходить через пряму MN, а другий – через пряму QL.

79. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка O_1 – центр грані AA_1B_1B, точка O_2 – центр грані $A_1B_1C_1D_1$. Побудуйте два паралельних між собою перерізи куба, один з яких проходить через пряму AC, а другий – через пряму O_1O_2.

80. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, O – точка перетину діагоналей грані $A_1B_1C_1D_1$, точка N – середина DC, точка M належить променю BB_1, $B_1M = 2BB_1$. Побудуйте переріз куба площиною OMN і визначте вид отриманого многокутника.

РОЗДІЛ 3

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ



У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ:

- ***дізнаємося*** про перпендикулярність прямих і площин, двогранний кут і його вимірювання; кут між площинами та його вимірювання; ортогональне проекціювання, перпендикуляр і похилу до площини, теорему про три перпендикуляри;
- ***навчимося*** встановлювати перпендикулярність прямих і площин; застосовувати зв'язок між паралельністю та перпендикулярністю прямих і площин під час розв'язування задач; вимірювати відстані та кути у просторі.

§ 8. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ

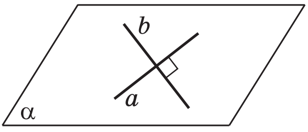
1. Перпендикулярність прямих у просторі

Як і на площині, у просторі

дві прямі, які перетинаються під прямим кутом, називають *перпендикулярними* (або ***взаємно перпендикулярними***) **(мал. 8.1).**

Для позначення перпендикулярності у просторі використовують той самий символ, що й на площині. Наприклад, якщо прямі a і b взаємно перпендикулярні, то це записують так:

$$a \perp b.$$

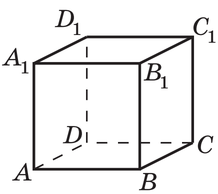


Мал. 8.1

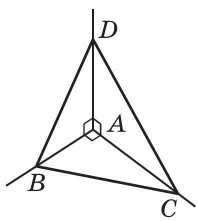
У цьому параграфі розглянемо питання про перпендикулярність прямих, що перетинаються, а в одному з наступних – питання про перпендикулярність мимобіжних прямих.

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 8.2). Знайти всі прямі, що перетинають пряму AA_1 і перпендикулярні до неї.

В і д п о в і д ь. AB, AD, A_1D_1, A_1B_1.



Мал. 8.2



Мал. 8.3

На площині пряма може бути перпендикулярною до кожної з двох прямих лише тоді, коли ці дві прямі між собою паралельні; у просторі ж пряма може бути перпендикулярною до кожної з двох прямих, які перетинаються.

Задача 2. Прямі AB, AC і AD попарно перпендикулярні (мал. 8.3). Знайти довжину відрізка BC, якщо $DB = \sqrt{281}$ см, $DC = 20$ см, $DA = 16$ см.

Р о з в ' я з а н н я. 1) У $\triangle DAB$ ($\angle A = 90°$):

$$AB = \sqrt{DB^2 - DA^2} = \sqrt{(\sqrt{281})^2 - 16^2} = \sqrt{281 - 256} = \sqrt{25} = 5 \text{ (см)}.$$

2) У $\triangle DAC$ ($\angle A = 90°$):

$AC = \sqrt{DC^2 - DA^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ (см).

3) У $\triangle ABC$ ($\angle A = 90°$):

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ (см).

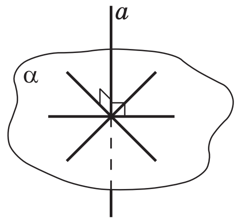
Відповідь. 13 см.

2. Пряма, перпендикулярна до площини

Якщо пряма не лежить у площині і не паралельна їй, то вона перетинає площину. У цьому параграфі розглянемо випадок, коли пряма перпендикулярна до площини.

Пряма, яка перетинає площину, називається *перпендикулярною* до цієї площини, якщо вона перпендикулярна до кожної прямої, яка лежить у площині і проходить через точку перетину (мал. 8.4).

Ще кажуть, що *площина перпендикулярна до прямої*, або *пряма і площина взаємно перпендикулярні*. Записати це можна так: $\alpha \perp a$, або $a \perp \alpha$.



Мал. 8.4

У повсякденному житті ми постійно стикаємося із взаємно перпендикулярними прямою і площиною: телеграфний стовп перпендикулярний до поверхні землі, шнур, на якому висить лампа, перпендикулярний до площини стелі; лінія перетину стін перпендикулярна як до площини підлоги, так і до площини стелі, ніжка стола перпендикулярна до його поверхні тощо.

3. Ознаки перпендикулярності прямої і площини

Вищезазначене означення перпендикулярності прямої і площини не завжди зручно використовувати для розв'язування задач. Адже, щоб перевірити, чи є пряма перпендикулярною до площини, необов'язково перевіряти перпендикулярність прямої до усіх прямих даної площини, які проходять через точку перетину прямої і площини.

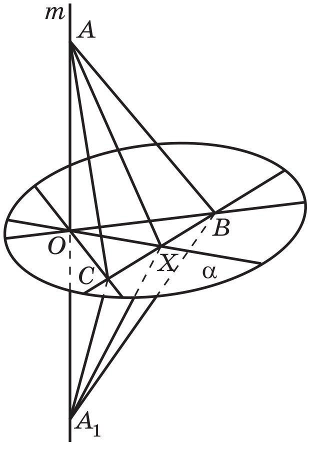
На малюнку 8.5 лінія перетину стін b перпендикулярна до площини підлоги α. Також лінія перетину стін b перпендикулярна до прямих a_1 і a_2, які лежать у площині α і перетинаються з прямою b. Цей малюнок є наочною ілюстрацією *ознаки перпендикулярності прямої і площини*.

Мал. 8.5

Теорема (ознака перпендикулярності прямої і площини). **Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, які проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна і до площини.**

Доведення. Нехай пряма m перетинає площину α у точці O і є перпендикулярною до двох прямих OB і OC, що лежать у цій площині (мал. 8.6). Доведемо, що пряма m перпендикулярна до будь-якої прямої OX, що належить площині α.

1) Проведемо довільну пряму, яка перетинає прямі OB, OX і OC у точках B, X і C відповідно.



Мал. 8.6

2) На прямій m по різні боки від точки O відкладемо рівні між собою відрізки OA і OA_1.

3) Розглянемо трикутник ABA_1. Оскільки BO – його медіана і висота, то трикутник ABA_1 – рівнобедрений, $BA = BA_1$.

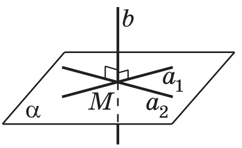
4) Аналогічно, $CA = CA_1$.

5) $\triangle ABC = \triangle A_1BC$ (за трьома сторонами), тому $\angle ABC = \angle A_1BC$.

6) $\triangle ABX = \triangle A_1BX$ (за двома сторонами і кутом між ними), тому $AX = A_1X$.

7) Оскільки трикутник AXA_1 – рівнобедрений з основою AA_1, то його медіана XO є також і висотою. Отже, $m \perp OX$.

8) Оскільки OX – довільна пряма, що проходить через точку O і лежить у площині α, то доходимо висновку, що пряма m перпендикулярна до будь-якої такої прямої, отже, за означенням перпендикулярності прямої і площини, $m \perp \alpha$. ■



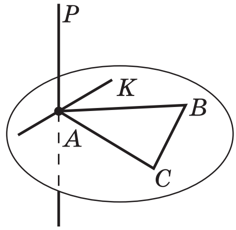
Мал. 8.7

На малюнку 8.7 пряма b перетинається з площиною α у точці M. Прямі a_1 і a_2 проходять через точку M, $a_1 \perp b$, $a_2 \perp b$. За ознакою перпендикулярності прямої і площини отримаємо, що $b \perp \alpha$.

Наслідок. Пряма, перпендикулярна до двох прямих, що перетинаються, перпендикулярна до площини, що проходить через ці прямі.

Ознака перпендикулярності прямої і площини застосовується на практиці. Так, наприклад, щоб перевірити, чи перпендикулярна лінія перетину стін кімнати до підлоги, достатньо перевірити, чи утворює ця лінія прямі кути з деякими двома прямими, які лежать у площині підлоги і проходять через точку перетину лінії перетину стін з підлогою.

Задача 3. Через точку P, що лежить поза площиною трикутника ABC, проведено пряму AP, перпендикулярну до прямих AB і AC. Пряма AK лежить у площині трикутника ABC (мал. 8.8). Довести, що прямі AP і AK перпендикулярні.



Мал. 8.8

Д о в е д е н н я. 1) За умовою $AP \perp AB$ і $AP \perp AC$. Тому за ознакою перпендикулярності прямої і площини $AP \perp (ABC)$.

2) Оскільки $AP \perp (ABC)$, то пряма AP перпендикулярна до будь-якої прямої, яка лежить у площині трикутника ABC і проходить через точку A, зокрема, і до прямої AK, що й треба було довести.

4. Побудова взаємно перпендикулярних прямої і площини

Задача 4. Довести, що через будь-яку точку простору можна провести площину, перпендикулярну до даної прямої.

Д о в е д е н н я. Нехай дано пряму a і точку K, що їй не належить (мал. 8.9). Доведемо, що існує площина, яка проходить через точку K перпендикулярно до прямої a.

1) Через пряму a і точку K, що їй не належить, проведемо площину α.

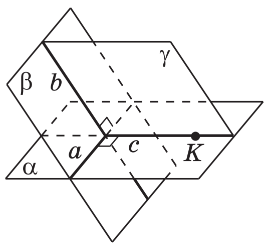
2) Через пряму a проведемо площину β, відмінну від α.

3) У площині α через точку K проведемо пряму c, перпендикулярну до прямої a.

4) У площині β через точку перетину прямих a і c проведемо пряму b, перпендикулярну до a.

5) Через прямі b і c проведемо площину γ. Ця площина проходить через точку K і перпендикулярна до прямої a за ознакою перпендикулярності прямої і площини.

Аналогічно доводиться і випадок, коли $K \in a$.



Мал. 8.9

Зауважимо, можна також довести, що побудована площина γ – єдина.

5. Властивості взаємно перпендикулярних прямих і площин

У прямокутному паралелепіпеді $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 8.2) прямі AA_1 і BB_1 паралельні між собою і кожна з них перпендикулярна до площини ABC. Узагальнимо цей факт.

1. Якщо площина перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої.

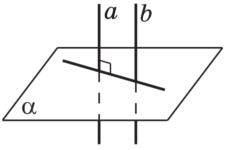
На малюнку 8.10 $a \parallel b$ і $a \perp \alpha$, тому за властивістю 1 матимемо, що $b \perp \alpha$.

На малюнку 8.2 кожна з прямих BB_1 і CC_1 перпендикулярна до площини ABC, а між собою ці прямі паралельні. Узагальнимо цей факт.

2. Дві прямі, перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, паралельні між собою.

На малюнку 8.10 $a \perp \alpha$, $b \perp \alpha$, тому за властивістю 2 матимемо, що $a \parallel b$.

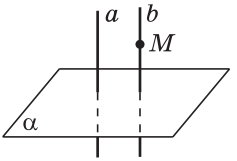
Найраціональніше доведення цих властивостей ґрунтується на понятті кута між мимобіжними прямими, яке ми розглянемо в § 12.



Мал. 8.10

Задача 5. Пряма a перпендикулярна до площини α. Через точку M, яка не лежить на прямій a, провести пряму, перпендикулярну до площини α.

Розв'язання. За теоремою про існування прямої, паралельної даній, через точку M проведемо пряму b таку, що $b \parallel a$ (мал. 8.11). Оскільки $a \perp \alpha$, $a \parallel b$, то і $b \perp \alpha$ (за властивістю 1). Пряма b – шукана.



Мал. 8.11

А ще раніше...

Три (з XI по XIII) книги «Начал» Евкліда містять майже виняткові стереометричний матеріал. Зокрема, в XI-й книзі викладаються загальні основи стереометрії, питання взаємного розташування, включно з паралельністю і перпендикулярністю прямих і площин.

XI-та книга «Начал» починається з 32 означень, серед яких є і означення прямої, перпендикулярної до площини: «Пряма є перпендикулярною до площини, якщо вона є перпендикулярною до всіх прямих, які проведено у площині в точці, у якій вона цю площину зустрічає».

Це означення не дає практичного критерію, щоб установити, чи є дана пряма перпендикулярною до площини, чи ні. Тому далі у цій самій книзі Евклід формулює і доводить теорему: «Якщо пряма з двома прямими, що перетинаються, у точці їх перетину утворює прямі кути, то вона перпендикулярна до площини, яка містить ці дві прямі».

Згадана теорема, яка в Евкліда, фактично, була ознакою перпендикулярності прямої до площини, у більш компактному і зручному для застосування вигляді наведена в цьому параграфі.

• Які прямі називають перпендикулярними? • Яку пряму називають перпендикулярною до площини? • Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини та наслідок з неї. • Сформулюйте властивості взаємно перпендикулярних прямих і площин.

Графічна робота № 5

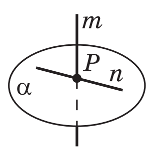
Виконайте малюнки до тверджень і підпишіть прямі та площини на отриманих малюнках.

1. Прямі a і b належать площині γ і є взаємно перпендикулярними.
2. Пряма c належить площині α, а пряма b їй не належить, при цьому прямі b і c взаємно перпендикулярні.
3. Прямі OK, OL і ON попарно взаємно перпендикулярні.
4. Пряма CK перпендикулярна до площини трикутника ABC.
5. Пряма OL проходить через точку O перетину діагоналей прямокутника $ABCD$ і перпендикулярна до його площини.
6. Вершина C трикутника ABC належить площині γ, а пряма AB паралельна площині γ. Прямі AA_1 і BB_1 перпендикулярні до площини γ і перетинають цю площину в точках A_1 і B_1.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

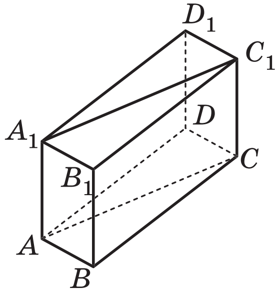
8.1. Пряма m перпендикулярна до площини α (мал. 8.12), а пряма n лежить у площині α і проходить через точку P – точку перетину прямої m і площини α. Яким є кут між прямими m і n?



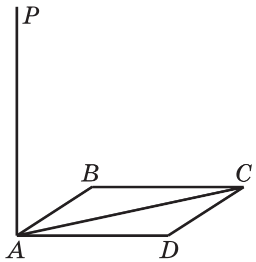
Мал. 8.12

8.2. $CC_1 \perp (ABC)$ (мал. 8.13). Яким є кут між прямими: 1) CC_1 і CB; 2) CC_1 і AC?

8.3. Пряма AA_1 проходить через вершину A прямокутника $ABCD$ (мал. 8.13), $AA_1 \perp AC$, $AA_1 \perp AB$. Яким є розміщення прямої AA_1 відносно площини ABC?



Мал. 8.13



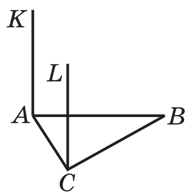
Мал. 8.14

8.4. Пряма AP проходить через вершину A паралелограма $ABCD$ (мал. 8.14), $AP \perp AB$, $AP \perp AD$. Як розміщена пряма AP відносно площини паралелограма $ABCD$?

8.5. (*Усно.*) Чи правильне твердження: «Через точку, яка лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, перпендикулярну до даної прямої»?

8.6. (*Усно.*) Укажіть з повсякденного життя приклади:
1) взаємно перпендикулярних прямих;
2) взаємно перпендикулярних прямої і площини.

8.7. $AK \perp ABC$, $AK \parallel CL$ (мал. 8.15). Чи перпендикулярна пряма CL до площини ABC? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 8.15

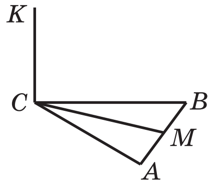
8.8. $AK \perp ABC$, $CL \perp ABC$ (мал. 8.15). Чи паралельні прямі AK і CL? Відповідь обґрунтуйте.

2 **8.9.** Прямі a і b взаємно перпендикулярні. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і c, якщо прямі b і c:
1) перпендикулярні; 2) паралельні; 3) мимобіжні; 4) перетинаються, але не перпендикулярні?
До кожного випадку виконайте малюнок.

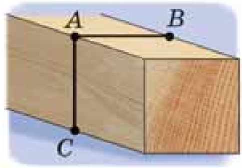
8.10. Прямі a і b перпендикулярні до прямої m. Чи можуть прямі a і b:
1) перетинатися; 2) бути перпендикулярними; 3) бути мимобіжними?
До кожного випадку виконайте малюнок.

8.11. Пряма AP проходить через вершину A паралелограма $ABCD$, $AP \perp AB$, $AP \perp AD$ (мал. 8.14). Доведіть, що $AP \perp AC$.

8.12. Пряма CK проходить через вершину C трикутника ABC, $CK \perp CB$, $CK \perp CA$ (мал. 8.16). Доведіть, що $CK \perp CM$, де M – довільна точка, що належить стороні AB.



Мал. 8.16



Мал. 8.17

8.13. Торець дерев'яного бруска має форму прямокутника. Щоб розпил цього бруска був перпендикулярним до його ребра, роблять так: через точку A, що належить ребру, перпендикулярно до нього проводять прямі AB і AC. Далі розпил здійснюють уздовж цих прямих (мал. 8.17). Чи буде в такий спосіб досягнуто мети?

8.14. Доведіть, що у прямокутному паралелепіпеді кожне ребро перпендикулярне до двох його граней.

8.15. Через дві точки простору A і B, які не лежать у площині α, проведено прямі AK і BL перпендикулярно до α. Доведіть, що прямі AK і BL лежать в одній площині.

8.16. На малюнку 8.15 $AK \perp AB$, $AK \perp AC$, $LC \perp AC$, $LC \perp CB$. Доведіть, що $AK \parallel LC$.

8.17. На малюнку 8.15 $AK \perp AB$, $AK \perp AC$, $AK \parallel LC$. Доведіть, що $LC \perp CB$.

8.18. Пряма a перпендикулярна до площини α. Як можуть бути розміщені пряма b і площина α, якщо прямі a і b:
1) мимобіжні;
2) перпендикулярні;
3) перетинаються, але не перпендикулярні;
4) паралельні?
Виконайте відповідні малюнки.

8.19. Пряма a перпендикулярна до площини α. Як можуть бути розміщені прямі a і b, якщо пряма b:
1) належить площині α;
2) паралельна площині α;
3) перпендикулярна до площини α;
4) перетинає площину α, але не є перпендикулярною до цієї площини?
Виконайте відповідні малюнки.

8.20. Як розміщена відносно площини круга пряма, перпендикулярна до двох його діаметрів?

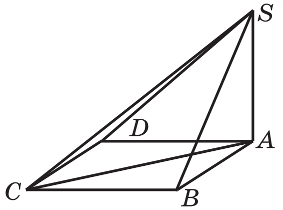
8.21. Як розміщена відносно площини круга пряма, перпендикулярна до двох його хорд, що перетинаються?

8.22. Пряма AS перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ (мал. 8.18). Знайдіть SC, якщо $AB = 3$ см, $SA = 4$ см.

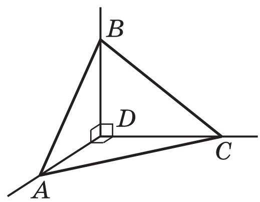
8.23. Пряма AS перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$ (мал. 8.18). Знайдіть AB, якщо $SC = 10$ см, $SA = 6$ см.

8.24. Через вершину C прямого кута трикутника ABC проведено пряму CP, перпендикулярну до площини трикутника. Доведіть, що пряма BC перпендикулярна до площини ACP.

8.25. Через точку O – точку перетину діагоналей ромба $ABCD$ – проведено пряму OK, перпендикулярну до площини ромба. Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини AKC.



Мал. 8.18



Мал. 8.19

8.26. Прямі DA, DB і DC попарно взаємно перпендикулярні (мал. 8.19). Знайдіть довжину відрізка AB, якщо:
1) $CD = 6$ см, $BC = 14$ см, $AD = 3$ см;
2) $AC = a$, $BC = b$, $AD = c$.

8.27. Прямі DA, DB і DC попарно взаємно перпендикулярні (мал. 8.19). Знайдіть довжину відрізка AC, якщо:
1) $AB = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см;
2) $BD = a$, $BC = b$, $AD = c$.

8.28. Пряма SO перпендикулярна до площини кола із центром O. Точка M лежить на колі. Знайдіть радіус кола, якщо $SM = 12$ см, $\angle SMO = 45°$.

8.29. Пряма MQ перпендикулярна до площини кола із центром Q. Точка P лежить на колі. Знайдіть відстань від точки M до точки P, якщо $PQ = 8$ см, $\angle MPQ = 60°$.

3 **8.30.** Діагональ AC паралелограма $ABCD$ перпендикулярна до площини α, а вершини B і D належать цій площині. Знайдіть периметр паралелограма, якщо $AB = a$ см.

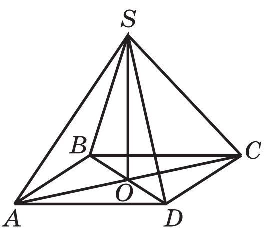
8.31. Сторона BC паралелограма $ABCD$ належить площині γ, а сторона AB перпендикулярна до цієї площини. Знайдіть AC, якщо $BD = b$ см.

8.32. З вершини A правильного трикутника ABC до площини трикутника проведено перпендикуляр AS. Знайдіть відстані від точки S до вершин трикутника, якщо $AC = 2\sqrt{3}$ см, $\angle SCA = 30°$.

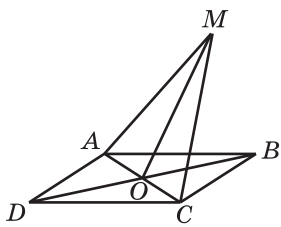
8.33. Через центр O кола, описаного навколо трикутника ABC, проведено перпендикулярну до площини трикутника пряму. Точка M – деяка точка цієї прямої. Доведіть, що $MA = MB = MC$.

8.34. Точка O – центр правильного трикутника ABC. Через точку O до площини трикутника проведено перпендикуляр OM. Знайдіть відстані від точки M до вершин трикутника, якщо $OM = 1$ см, $AB = 3$ см.

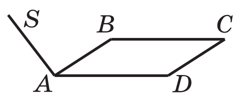
8.35. $ABCD$ – паралелограм, S – точка поза площиною паралелограма, $SA = SC$, $SB = SD$ (мал. 8.20). Доведіть, що пряма SO перпендикулярна до площини паралелограма.



Мал. 8.20



Мал. 8.21



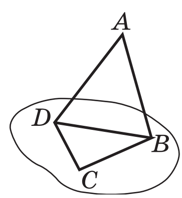
Мал. 8.22

8.36. $ABCD$ – ромб, M – точка поза площиною ромба, $MA = MC$ (мал. 8.21). Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини MOB.

8.37. $ABCD$ – прямокутник, точка S не належить його площині і $SA \perp AB$ (мал. 8.22). Знайдіть взаємно перпендикулярні пряму і площину.

8.38. Точка A не належить площині трикутника BCD, $\angle ABC = 90°$, $\angle DBC = 90°$ (мал. 8.23). Знайдіть взаємно перпендикулярні пряму і площину.

8.39. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, O – центр грані $ABCD$, O_1 – центр грані $A_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $OO_1 \perp (ABC)$.



Мал. 8.23

8.40. Через точку B прямої a проведено прямі, перпендикулярні до прямої a. Доведіть, що всі ці прямі лежать в одній площині.

8.41. Точка S лежить поза площиною трикутника ABC і рівновіддалена від усіх його вершин. Пряма SO перпендикулярна до площини трикутника, O – точка перетину прямої SO і площини трикутника ABC. Доведіть, що точка O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC.

8.42. Точка M лежить поза площиною прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) і рівновіддалена від усіх його вершин. Точка O – точка перетину прямої MO і площини ABC, $MO \perp (ABC)$.

1) Визначте положення точки O.
2) Знайдіть MO, якщо $MA = 13$ см, $AC = 3$ см, $BC = 4$ см.

8.43. Точка S лежить поза площиною правильного трикутника ABC і рівновіддалена від усіх його вершин. $SO \perp (ABC)$, де O – точка перетину прямої SO і площини ABC.

1) Визначте положення точки O.
2) Знайдіть SO, якщо $AB = 6$ см, $SA = 4$ см.

8.44. Відрізок AB завдовжки 20 см не має спільних точок з площиною α. Прямі AK і BM, які перпендикулярні до площини α, перетинають цю площину в точках K і M, $KM = 16$ см. Знайдіть BM, якщо $AK = 15$ см. Розгляньте два випадки:

1) $AK > BM$; 2) $AK < BM$.

8.45. Відрізок CD завдовжки 15 см не має спільних точок із площиною β. Прямі CA і DB, які перпендикулярні до площини β, перетинають цю площину в точках A і B. Знайдіть AB, якщо $BD = 10$ см, $AC = 22$ см.

8.46. Пряма a перетинає площину α в точці B, причому пряма a не перпендикулярна до площини α. Доведіть, що у площині α існує пряма, що проходить через точку B перпендикулярно до прямої a, і до того ж тільки одна.

4

8.47. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено пряму AS, перпендикулярну до його площини, $SD = 6$ см, $SC = 9$ см, $SB = 7$ см. Знайдіть:

1) SA; 2) площу прямокутника $ABCD$.

8.48. Пряма AK перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$. Знайдіть AK, якщо $KD = 20$ см, $KC = 24$ см, $KB = 15$ см.

8.49. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) основа і висота, проведена до неї, мають довжину 4 см. Точка O лежить у площині трикутника ABC, OK – перпендикуляр до площини трикутника. Відомо, що $AK = BK = CK$. Знайдіть довжину відрізка CK, якщо $OK = 6$ см.

8.50. У трикутнику ABC $AB = 8$ см, $BC = CA = 5$ см. Точка O лежить у площині трикутника ABC, OM – перпендикуляр до площини трикутника ABC. Знайдіть довжину відрізка OM, якщо $MA = MB = MC = 5$ см.

8.51. Прямі AC і BD перпендикулярні до площини α і перетинають її у точках A і B. Знайдіть відстань між точками C і D, якщо $AB = 24$ см, $BD = 21$ см, $AC = 11$ см. Скільки розв'язків має задача?

8.52. Через вершину A ромба $ABCD$ проведено пряму AM, перпендикулярну до прямих AD і AC. Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини AMC.

8.53. Через вершину D квадрата $ABCD$ проведено пряму DN, перпендикулярну до його площини. Доведіть, що пряма AC перпендикулярна до площини DBN.

8.54. $QABC$ – правильний тетраедр з ребром завдовжки 2 см. Точка A_1 – середина ребра AQ.
1) Побудуйте переріз тетраедра площиною CBA_1.
2) Доведіть, що $AQ \perp (CBA_1)$.
3) Знайдіть площу трикутника CBA_1.

8.55. $ABCD$ – паралелограм, O – точка перетину його діагоналей, M – точка перетину його медіан. Паралелограм $ABCD$ і площина α не мають спільних точок. З точок A, B, C, D, O і M до площини α проведено перпендикулярні прямі, які перетинають α у точках A_1, B_1, C_1, D_1, O_1 і M_1 відповідно. $BB_1 = 10$ см, $CC_1 = 30$ см, $DD_1 = 34$ см. Знайдіть:
1) OO_1; 2) AA_1; 3) MM_1.

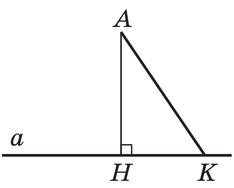
8.56. $QABC$ – правильний тетраедр, M – точка перетину медіан грані ABC.
1) Доведіть, що $QM \perp AM$.
2) Доведіть, що $QM \perp (ABC)$.
3) Точка N – середина AQ. Побудуйте пряму, що проходить через точку N перпендикулярно до площини ABC.
4) Точка T – середина QC, а точка F – середина AT. Побудуйте пряму, що проходить через точку F перпендикулярно до площини ABC.

8.57. $ABCD$ – правильний тетраедр, H – точка перетину висот грані BCD.
1) Доведіть, що $AH \perp BH$.
2) Доведіть, що $AH \perp (BCD)$.
3) Точка M – середина AD. Побудуйте пряму, що проходить через точку M перпендикулярно до площини BCD.
4) Точка K – середина медіани BL трикутника ABC. Побудуйте пряму, що проходить через точку K перпендикулярно до площини BCD.

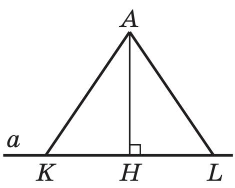
8.58. У двох кімнатах мають пофарбувати стелю. Одна з кімнат має форму квадрата зі стороною 4 м, а друга – прямокутника зі сторонами 5 м і 4 м. Щоб пофарбувати 1 кв. м стелі, треба 240 г фарби. Фарбу розфасовано в банки по 2,5 кг. Яку найменшу кількість таких банок можна придбати, щоб виконати цю роботу?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

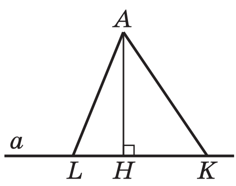
8.59. На малюнку 8.24 $AH \perp a$. Як можна назвати:
1) відрізок AH; 2) відрізок AK;
3) точку H; 4) точку K?
Порівняйте між собою довжини відрізків AH і AK.



Мал. 8.24



Мал. 8.25



Мал. 8.26

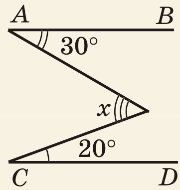
8.60. На малюнку 8.25 $AH \perp a$. Порівняйте:
1) KH і HL, якщо $AK = AL$;
2) AK і AL, якщо $KH = HL$.

8.61. На малюнку 8.26 $AH \perp a$. Порівняйте:
1) AK і AL, якщо $HK > HL$;
2) HK і HL, якщо $AK > AL$.

8.62. (*Міжнародна математична олімпіада, 1968 р.*) На сторонах AB, BC і CA трикутника ABC узято точки M, K і L, які не збігаються з вершинами трикутника. Доведіть, що площа хоча б одного з трикутників MAL, KBM, LCK не перевищує $\frac{1}{4}$ площі трикутника ABC.

Перевірте свою компетентність

Завдання № 8



1. Прямі AB і CD паралельні. Знайдіть кут x.

А	Б	В	Г	Д
10°	20°	30°	40°	50°

2. Знайдіть невідому сторону паралелограма, якщо одна з його сторін дорівнює 5 см, один з кутів – 60°, а площа паралелограма дорівнює $10\sqrt{3}$ см^2.

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{3}$ см	4 см	$2\sqrt{3}$ см	8 см	знайти неможливо

3. Знайдіть площу круга, описаного навколо прямокутного трикутника з катетами 6 см і 8 см.

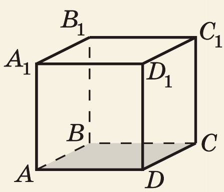
А	Б	В	Г	Д
100π см^2	50π см^2	25π см^2	25 см^2	$12{,}5\pi$ см^2

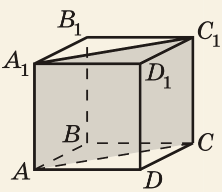
4. Укажіть вектор, колінеарний вектору $\vec{a}(-2; 1)$.

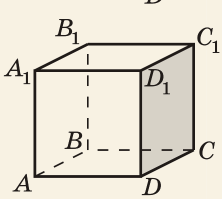
А	Б	В	Г	Д
$\vec{m}(-4; -2)$	$\vec{p}(4; 2)$	$\vec{n}(2; 1)$	$\vec{l}(4; -2)$	$\vec{t}(-2; -1)$

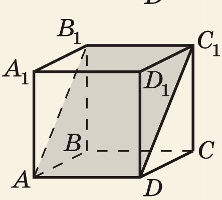
5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Кожній зафарбованій площині (1–4) поставте у відповідність перпендикулярну їй пряму (А–Д).

Площина

1


3


2


4


Пряма

А B_1D_1
Б AB_1
В CD_1
Г BB_1
Д AD_1

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Основи трапеції дорівнюють 9 см і 15 см, а одна з діагоналей – 24 см. Знайдіть менший з відрізків (у см), на які ця діагональ ділиться другою діагоналлю трапеції.

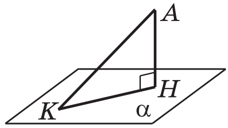
§ 9. ПЕРПЕНДИКУЛЯР І ПОХИЛА. ТЕОРЕМА ПРО ТРИ ПЕРПЕНДИКУЛЯРИ

1. Перпендикуляр і похила

Розглянемо площину α і точку A, що їй не належить (мал. 9.1).

***Перпендикуляром*, проведеним з даної точки до даної площини, називають відрізок, що сполучає дану точку з точкою площини і лежить на прямій, перпендикулярній до площини.**

На малюнку 9.1 AH – перпендикуляр, проведений з точки A до площини α. Кінець цього перпендикуляра, що лежить у площині α, – точку H – називають *основою перпендикуляра*.



Мал. 9.1

***Відстанню від точки до площини* називають довжину перпендикуляра, проведеного із цієї точки до цієї площини.**

На малюнку 9.1 довжина відрізка AH – відстань від точки A до площини α.

***Похилою*, проведеною з даної точки до даної площини, називають будь-який відрізок, який сполучає цю точку з точкою площини і не є перпендикуляром.**

На малюнку 9.1 AK – похила, проведена з точки A до площини α. Кінець цієї похилої, що лежить у площині α, – точку K – називають *основою похилої*. Відрізок HK, який сполучає основи перпендикуляра та похилої, називають *проекцією похилої AK* на площину α.

Розглянемо *властивості перпендикуляра, похилих та їх проекцій у просторі*. Зауважимо, що ці властивості аналогічні до відповідних властивостей перпендикуляра, похилих та їх проекцій на площині.

1. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки до площини, менша за довжину будь-якої похилої, проведеної із цієї самої точки до цієї площини.

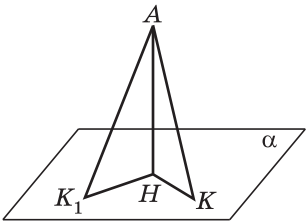
Справді, у прямокутному трикутнику AHK ($\angle H = 90°$) відрізок AH є катетом, а відрізок AK – гіпотенузою (мал. 9.1), тому $AH < AK$.

2. Якщо дві похилі, проведені з точки до площини, рівні, то рівні і їх проекції.

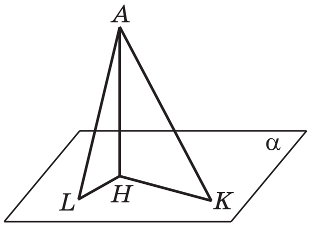
Нехай з точки A до площини α проведено похилі AK і AK_1, $AK = AK_1$, та перпендикуляр AH (мал. 9.2). Тоді $\triangle AHK = \triangle AHK_1$ (за катетом і гіпотенузою), а тому $HK = HK_1$.

Правильним є й обернене твердження.

3. Якщо проекції двох похилих, проведених з точки до площини, рівні, то рівні і їх похилі.



Мал. 9.2



Мал. 9.3

На малюнку 9.2 $\triangle AHK = \triangle AHK_1$ (за двома катетами), тому $AK = AK_1$.

4. Якщо з точки до площини проведено дві похилі, то більшою з них є та, що має більшу проекцію на цю площину.

Нехай $AH \perp \alpha$, AK і AL – похилі до α, HK і HL – їх проекції (мал. 9.3). Нехай $HK > HL$.

Тоді у $\triangle AHK$: $AK = \sqrt{AH^2 + HK^2}$,

у $\triangle AHL$: $AL = \sqrt{AH^2 + HL^2}$.

Оскільки $HK > HL$, то $AH^2 + HK^2 > AH^2 + HL^2$, тому $AK > AL$.

Правильним є й обернене твердження.

5. Якщо з точки до площини проведено дві похилі, то більша похила має більшу проекцію на цю площину.

Нехай $AH \perp \alpha$, AK і AL – похилі до α, HK і HL – їх проекції (мал. 9.3). Нехай $AK > AL$.

Тоді у $\triangle AHK$: $HK = \sqrt{AK^2 - AH^2}$,

у $\triangle AHL$: $HL = \sqrt{AL^2 - AH^2}$.

Оскільки $AK > AL$, то $AK^2 - AH^2 > AL^2 - AH^2$, тому $HK > HL$.

Задача 1. З точки до площини проведено дві похилі завдовжки 41 см і 50 см. Знайти відстань від точки до площини та довжини проекцій похилих, якщо їх відношення дорівнює 3 : 10.

Розв'язання. Нехай $AL = 41$ см, $AK = 50$ см (мал. 9.3). За властивістю 5 маємо: $HL < HK$. Нехай $HL = 3x$ (см), $HK = 10x$ (см), AH – відстань від точки A до площини α.

1) Із $\triangle AHL$ ($\angle H = 90°$): $AH^2 = AL^2 - LH^2 = 41^2 - (3x)^2$.

2) Із $\triangle AHK$ ($\angle H = 90°$):
$AH^2 = AK^2 - HK^2 = 50^2 - (10x)^2$.

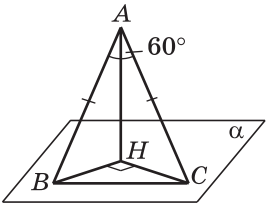
3) Прирівнюючи отримані вирази, маємо рівняння: $41^2 - 9x^2 = 50^2 - 100x^2$, звідки $x^2 = 9$, тобто $x = 3$, враховуючи, що $x > 0$.

Отже, $HL = 3 \cdot 3 = 9$ (см), $HK = 10 \cdot 3 = 30$ (см).

4) Тоді $AH = \sqrt{41^2 - 9^2} = \sqrt{1600} = 40$ (см).

Відповідь. Проекції похилих дорівнюють 9 см і 30 см; відстань від точки до площини дорівнює 40 см.

Задача 2. З точки до площини проведено дві похилі, завдовжки 2 см кожна. Кут між похилими дорівнює 60°, а кут між їх проекціями – прямий. Знайти відстань від точки до площини.



Мал. 9.4

Розв'язання. $AC = AB = 2$ см, $\angle BAC = 60°$, $\angle BHC = 90°$ (мал. 9.4). Знайдемо AH.

1) У $\triangle ABC$ $\angle B = \angle C = \dfrac{180° - 60°}{2} = 60°$, тому $\triangle ABC$ – рівносторонній, $BC = 2$ см.

2) Оскільки $AB = AC$, то $HB = HC$.
Нехай $HB = HC = x$ (см).
Із $\triangle BHC$: $HB^2 + HC^2 = BC^2$. Маємо рівняння:
$x^2 + x^2 = 2^2$;
$2x^2 = 4$;
$x = \sqrt{2}$ (см).

3) У $\triangle ABH$: $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \sqrt{2^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2}$ (см).

Відповідь. $\sqrt{2}$ см.

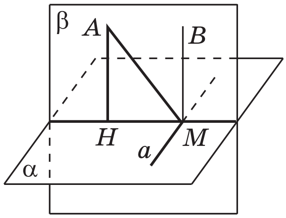
Зауважимо, що *похилою до площини* називають також і будь-яку пряму, яка перетинає площину і не є до неї перпендикулярною. У такому разі проекцією похилої на площину є пряма.

2. Теорема про три перпендикуляри

Розглянемо одну з найважливіших теорем стереометрії, яку називають *теоремою про три перпендикуляри*.

Т Теорема (про три перпендикуляри). **Якщо пряма, проведена на площині через основу похилої, перпендикулярна до проекції похилої на цю площину, то вона перпендикулярна і до похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої на цю площину.**

Доведення. Нехай AH – перпендикуляр, AM – похила до площини α, пряму a проведено у площині α через точку M (мал. 9.5).



Мал. 9.5

I. Доведемо першу частину теореми. Нехай $a \perp HM$. Доведемо, що $a \perp AM$.

1) Проведемо пряму BM паралельно прямій AH. За властивістю взаємно перпендикулярних прямої і площини $BM \perp \alpha$. Тому $BM \perp a$.

2) Проведемо через прямі BM і HM площину β.

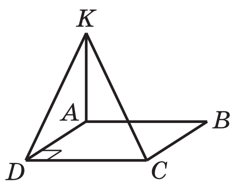
3) Оскільки $a \perp BM$ і $a \perp HM$, то за ознакою перпендикулярності прямої і площини $a \perp \beta$. Тому пряма a перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині β і проходить через точку M, зокрема до прямої AM.

Першу частину теореми доведено.

II. Доведемо другу частину теореми. Оскільки $a \perp AM$ і $a \perp BM$, то $a \perp \beta$ (за ознакою перпендикулярності прямої і площини), а тому $a \perp HM$. ■

Задача 3. З вершини A квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр AK до площини квадрата. Знайти площу квадрата, якщо $KD = 6$ см, $KC = 10$ см.

Розв'язання. Нехай $ABCD$ – квадрат, $AK \perp (ABC)$, тоді KD – похила, AD – її проекція (мал. 9.6).



Мал. 9.6

1) Оскільки $AD \perp DC$, то за теоремою про три перпендикуляри $KD \perp DC$.

2) Із $\triangle KDC$ ($\angle D = 90^\circ$)

$DC = \sqrt{KC^2 - KD^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

3) Тоді $S_{ABCD} = 8^2 = 64$ (см^2).

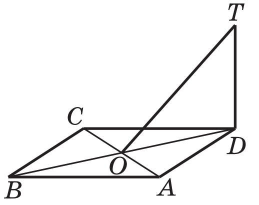
Відповідь. 64 см^2.

Задача 4. Через вершину D ромба $ABCD$ проведено перпендикуляр DT до його площини. Побудувати перпендикуляр з точки T до прямої AC.

Розв'язання (мал. 9.7). 1) Проведемо діагоналі ромба AC і BD, які перетинаються в точці O.

2) За властивістю діагоналей ромба $BD \perp AC$, тому $DO \perp AC$.

3) $DT \perp (ADC)$, TO – похила до (ADC), DO – її проекція, $DO \perp AC$ тоді за теоремою про три перпендикуляри $TO \perp AC$.



Мал. 9.7

Отже, TO і є шуканим перпендикуляром.

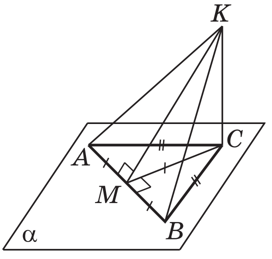
Теорему про три перпендикуляри часто використовують для знаходження відстані від точки до прямої. Як і у планіметрії,

відстанню від точки до прямої **будемо називати довжину перпендикуляра, проведеного із цієї точки до цієї прямої.**

Задача 5. Через вершину прямого кута рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$), катет якого дорівнює 2 см, проведено перпендикулярну до площини трикутника пряму CK. Знайти відстань від точки K до прямої AB, якщо $CK = \sqrt{7}$ см.

Розв'язання. 1) Нехай точка M – середина гіпотенузи AB трикутника ABC (мал. 9.8). Оскільки $AC = BC$, то CM також і висота трикутника.

2) $CK \perp (ABC)$, KM – похила, CM – її проекція, $CM \perp AB$, тоді за теоремою про три перпендикуляри $KM \perp AB$. Це означає, що KM є відстанню від точки K до прямої AB.



Мал. 9.8

3) $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ (см).

4) $CM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$ (см) за властивістю медіани, проведеної до гіпотенузи.

5) Оскільки $KC \perp (ABC)$, то $\angle KCM = 90°$. Тоді у $\triangle KCM$: $KM = \sqrt{KC^2 + CM^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + (\sqrt{2})^2} = 3$ см.

Відповідь. 3 см.

А ще раніше...

Теореми про три перпендикуляри, без якої сьогодні неможливо уявити курс стереометрії, у «Началах» Евкліда немає. Доведена вона була пізніше математиками Близького і Середнього Сходу. Зокрема, доведення цієї теореми є у «Трактаті про повний чотиристоронник» Насир ад-Діна ат-Тусі та у тригонометричному трактаті його анонімного попередника.

У Європі теорему про три перпендикуляри вперше сформулював швейцарський математик Луї Бертран (1731–1812), учень і друг Леонарда Ейлера, а довів її французький математик Адріан Марі Лежандр (1752–1833). Доведення міститься у його підручнику «Початки геометрії» (1794 р.), який вважався найкращим тогочасним підручником з геометрії. Підтвердженням цього є те, що він неодноразово перевидавався, у тому числі ще за життя Лежандра, і перекладався, а наведене в ньому доведення теореми про три перпендикуляри часто використовували інші математики, зокрема А.П. Кисельов, автор класичного підручника «Елементарна геометрія для середніх навчальних закладів», за яким навчалися майже ціле століття (перше видання датується 1892 р., а останнє – 1980 р.).

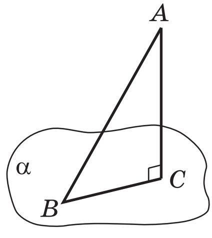
• Що називають перпендикуляром, проведеним з даної точки до даної площини? • Що називають основою перпендикуляра? • Що називають похилою, проведеною з даної точки до даної площини? • Що називають основою похилої і що називають проекцією похилої? • Сформулюйте властивості перпендикуляра і похилої. • Сформулюйте й доведіть теорему про три перпендикуляри.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

9.1. AC – перпендикуляр, проведений з точки A до площини α, а AB – похила (мал. 9.9). Порівняйте:
1) AB і AC; 2) AB і BC.

9.2. До площини α з точки A проведено перпендикуляр AC та похилу AB (мал. 9.9). Знайдіть:
1) AB, якщо $BC = 5$ см, $AC = 12$ см;
2) AC, якщо $AB = 10$ см, $BC = 6$ см;
3) BC, якщо $AB = 20$ см, $\angle BAC = 30°$;
4) AC, якщо $BC = 6$ см, $\angle ABC = 45°$.

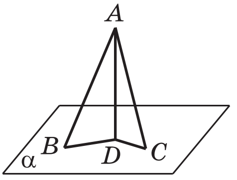


Мал. 9.9

9.3. З точки A до площини α проведено перпендикуляр AC і похилу AB (мал. 9.9). Знайдіть:
1) AC, якщо $AB = 15$ см, $BC = 9$ см;
2) AB, якщо $AC = BC = 2$ см;
3) BC, якщо $AC = 8$ см, $\angle BAC = 45°$;
4) AB, якщо $AC = 6$ см, $\angle ABC = 30°$.

9.4. З точки A до площини α проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AD (мал. 9.10). Порівняйте BD і DC, якщо $AB > AC$.

9.5. З точки A до площини α проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AD (мал. 9.10). Порівняйте AB і AC, якщо $BD > DC$.



Мал. 9.10

9.6. З точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, які утворюють між собою кут 60°. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо проекція похилої дорівнює 4 см.

9.7. З точки до площини проведено похилу, довжина якої 10 см. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо похила утворює зі своєю проекцією кут 45°.

2 **9.8.** З точки A до площини α проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AD (мал. 9.10). Знайдіть відстань від точки A до площини α та довжину похилої AC, якщо $AB = 10$ см, $BD = 6$ см, $DC = 15$ см.

9.9. З точки A до площини α проведено похилі AB і AC та перпендикуляр AD (мал. 9.10). Знайдіть відстань від точки A до площини α та довжину відрізка CD, якщо $AB = 25$ см, $BD = 20$ см, $AC = 17$ см.

9.10. BM – перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Доведіть, що $\angle MAD = 90°$.

9.11. CK – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Доведіть, що $\angle KDA$ – прямий.

9.12. З точки A до площини проведено перпендикуляр AK і похилу AP, яка на 3 см довша за свою проекцію. Знайдіть довжину похилої, якщо $AK = 9$ см.

9.13. З точки B до площини проведено перпендикуляр BL і похилу BM, що дорівнює 26 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо він на 14 см коротший за проекцію похилої.

9.14. Пряма CK перпендикулярна до площини паралелограма $ABCD$, причому $KD \perp DA$. Доведіть, що $ABCD$ – прямокутник.

9.15. Пряма AK перпендикулярна до площини ромба $ABCD$, причому $KD \perp DC$. Доведіть, що $ABCD$ – квадрат.

9.16. У трикутнику ABC $AC = BC = 10$ см, $AB = 12$ см, CH – висота трикутника, CM – перпендикуляр до площини трикутника, $CM = 6$ см.
1) Знайдіть відстань від точки M до вершин трикутника ABC.
2) Доведіть, що $MH \perp AB$.
3) Знайдіть довжину відрізка MH.

9.17. У правильному трикутнику ABC AM – медіана, AP – перпендикуляр до площини трикутника, $AB = 2$ см, $AP = 2\sqrt{3}$ см.
1) Знайдіть відстань від точки P до вершин трикутника ABC.
2) Доведіть, що $PM \perp BC$.
3) Знайдіть довжину відрізка PM.

9.18. З вершини D квадрата $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр DK. Площа квадрата дорівнює 25 см^2. Знайдіть відстань від точки K до вершин A і B квадрата, якщо $KC = 12$ см.

9.19. З вершини C квадрата $ABCD$ до його площини проведено перпендикуляр CM. Периметр квадрата дорівнює 32 см. Знайдіть відстані від точки M до вершин B і D квадрата, якщо $MA = 17$ см.

9.20. Сторона MN трикутника MNL є діаметром кола, описаного навколо цього трикутника, $NQ \perp (MNL)$. Доведіть, що $\angle MLQ = 90°$.

9.21. З деякої точки до площини проведено перпендикуляр і похилу, кут між якими дорівнює α. Знайдіть:
1) довжину похилої та її проекції на цю площину, якщо довжина перпендикуляра дорівнює h;
2) довжину перпендикуляра і похилої, якщо довжина проекції похилої дорівнює a;
3) довжину перпендикуляра і проекції похилої, якщо довжина похилої дорівнює c.

9.22. Основа AB рівнобедреного трикутника ABC належить площині α, $AC = BC = 13$ см, $AB = 24$ см. З точки C до площини α проведено перпендикуляр CO, а з точки O до прямої AB – перпендикуляр OM. Знайдіть CM.

9.23. Сторона BC правильного трикутника ABC належить площині β, $AB = 6$ см. З точки A до площини β проведено перпендикуляр AK, а з точки K до прямої BC – перпендикуляр KN. Знайдіть AN.

9.24. BK – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$. Проведіть перпендикуляр з точки K до прямої AC.

9.25. AP – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Проведіть перпендикуляр з точки P до прямої BD.

3 **9.26.** Точка S рівновіддалена від усіх вершин паралелограма $ABCD$. Доведіть, що $ABCD$ – прямокутник.

9.27. Точка P рівновіддалена від усіх вершин ромба $ABCD$. Доведіть, що $ABCD$ – квадрат.

9.28. Точка M не лежить у площині α. Із цієї точки до площини α проведено три рівні між собою похилі MA, MB і MC та перпендикуляр MO, де кожна з точок A, B, C і O лежить у площині α. Доведіть, що точка O є центром кола, описаного навколо трикутника ABC.

9.29. Точка M віддалена від площини правильного трикутника на 8 см і рівновіддалена від усіх його вершин. Знайдіть відстань від точки M до вершин трикутника, якщо периметр трикутника дорівнює $18\sqrt{3}$ см.

9.30. Точка K віддалена від кожної з вершин квадрата $ABCD$ на 26 см. Знайдіть відстань від точки K до площини квадрата, якщо його площа дорівнює 1152 см^2.

9.31. З точки до площини проведено дві похилі завдовжки 5 см і 7 см, а різниця їх проекцій – 4 см. Знайдіть проекції похилих і відстань від точки до площини.

9.32. З точки до площини проведено дві похилі, різниця довжин яких дорівнює 4 см. Знайдіть довжини похилих і відстань від точки до площини, якщо проекції похилих дорівнюють 10 см і 2 см.

9.33. З вершини A ромба $ABCD$ проведено перпендикуляр AM до його площини, $AM = 1$ см, $AB = BD = 3$ см. Знайдіть довжину похилої MC та довжину її проекції на площину ромба.

9.34. У трикутнику ABC $\angle BAC = 31°$, $\angle ACB = 59°$. Пряма AD перпендикулярна до площини трикутника ABC. Визначте вид трикутника BCD.

9.35. У трикутнику ABC $\angle ABC = 40°$, $\angle BAC = 50°$. Пряма BK перпендикулярна до площини трикутника ABC. Доведіть, що $KC \perp CA$.

9.36. З точки A до площини α проведено дві похилі, кут між якими 60°, а кут між їх проекціями – 90°. Довжина кожної проекції 2 см. Знайдіть довжину кожної з похилих і відстань від точки A до площини α.

9.37. З точки M до площини проведено дві похилі, кожна з яких завдовжки $\sqrt{6}$ см. Кут між похилими – $90°$, а кут між їх проекціями – $120°$. Знайдіть довжину кожної з проекцій похилих і відстань від точки до площини.

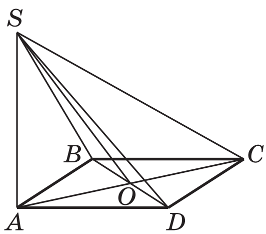
9.38. Площа прямокутного трикутника дорівнює 6 см^2, а різниця його катетів – 1 см. Точка M віддалена від площини трикутника на 6 см і рівновіддалена від усіх його вершин. Знайдіть відстань від точки M до вершин трикутника.

9.39. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 6 см, а інший – на 2 см менший за гіпотенузу. Точка, що не лежить у площині трикутника, віддалена від кожної з його вершин на 13 см. Знайдіть відстань від даної точки до площини трикутника.

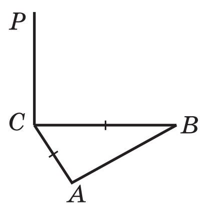
9.40. AK – перпендикуляр до площини ромба $ABCD$, точка O – точка перетину його діагоналей. Доведіть, що пряма BD перпендикулярна до площини AKO.

9.41. BL – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, точка Q – точка перетину його діагоналей. Доведіть, що $AC \perp (LBQ)$.

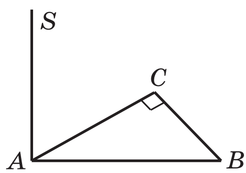
9.42. AS – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$ (мал. 9.11). Знайдіть усі прямокутні трикутники з вершиною в точці S.



Мал. 9.11



Мал. 9.12



Мал. 9.13

9.43. $\triangle ABC$ – рівнобедрений, $AC = BC$, пряма CP перпендикулярна до площини ABC (мал. 9.12) Проведіть перпендикуляр з точки P до прямої AB.

9.44. Пряма AS перпендикулярна до площини прямокутного трикутника ABC, $\angle C = 90°$ (мал. 9.13). Проведіть перпендикуляр з точки S до прямої BC.

9.45. Два прямокутних трикутники ABC і ADC з прямим кутом C кожний мають спільний катет AC. Прямі AC і BD – мимобіжні. Доведіть, що:
1) CD – проекція похилої CB на площину ACD;
2) CB – проекція похилої CD на площину ABC.

9.46. Пряма BD перпендикулярна до площини трикутника ADC. Точка K – середина AC, пряма BK перпендикулярна до прямої AC. Доведіть, що $\triangle ADC$ – рівнобедрений, і визначте, які його кути між собою рівні.

9.47. Пряма BD перпендикулярна до площини трикутника ADC, а пряма BC перпендикулярна до прямої AC, $\angle A = 37°$. Знайдіть $\angle ADC$.

9.48. 1) Точка O – центр кола, вписаного у трикутник ABC, $OM \perp (ABC)$. Доведіть, що точка M рівновіддалена від усіх сторін трикутника ABC.
2) Точка O – центр кола, вписаного у многокутник $A_1A_2...A_n$, пряма OM перпендикулярна до площини цього многокутника. Доведіть, що M рівновіддалена від усіх сторін многокутника $A_1A_2...A_n$.

9.49. Сторона правильного шестикутника дорівнює 4 см. З його центра до площини трикутника проведено перпендикуляр також завдовжки 4 см. Знайдіть відстань від кінця перпендикуляра, що не лежить у площині шестикутника, до його сторін.

9.50. Пряма BD перпендикулярна до площини трикутника ADC, а пряма BK перпендикулярна до прямої AC. Точка C належить відрізку AK. Доведіть, що трикутник ADC тупокутний, і визначте, який саме з його кутів – тупий.

9.51. Навколо кола, радіус якого дорівнює 7 см, описано ромб зі стороною a см. Точка K, що лежить на відстані 24 см від площини ромба, рівновіддалена від його сторін.
1) Знайдіть відстань від точки K до сторін ромба.
2) Чи залежить ця відстань від довжини сторони ромба?

9.52. Відстань від точки M до кожної з вершин правильного трикутника дорівнює 2 дм, а довжина сторони трикутника – 3 дм. Знайдіть:
1) відстань від точки M до площини трикутника;
2) відстань від точки M до кожної зі сторін трикутника.

9.53. Сторона квадрата дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Відстань від точки K до кожної з вершин квадрата – 5 см. Знайдіть:
1) відстань від точки K до площини квадрата;
2) відстань від точки K до кожної зі сторін квадрата.

9.54. Катет AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) належить площині α, а катет BC – не є перпендикулярним до цієї площини. Знайдіть проекцію гіпотенузи AB на площину α, якщо $BC = a$, а відстань від точки B до площини α дорівнює h. При якому співвідношенні між a і h задача має розв'язки?

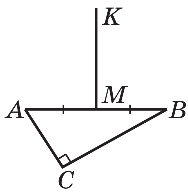
9.55. Сторона AB правильного трикутника ABC дорівнює 4 см і належить площині β, а проекції двох інших сторін на цю площину дорівнюють $\sqrt{7}$ см. Знайдіть:
1) відстань від точки C до площини β;
2) довжину проекції медіани CK трикутника ABC на площину β.

9.56. Відрізок BN перпендикулярний до площини чотирикутника $ABCD$. На прямій AD узято точку K так, що $NK \perp AD$. Знайдіть AK, якщо:
1) $ABCD$ – прямокутник;
2) $ABCD$ – ромб зі стороною a і гострим кутом α;
3) $ABCD$ – ромб зі стороною b і тупим кутом β;
4) $ABCD$ – рівнобічна трапеція, $AD \parallel BC$, $AD = a$, $BC = b$, $a > b$.

4 **9.57.** На малюнку 9.14 зображено прямокутний трикутник ABC ($\angle C = 90°$). $AM = MB$, $MK \perp (ABC)$.

1) Проведіть перпендикуляри з точки K до катетів AC і BC.

2) Знайдіть довжину кожного із цих перпендикулярів, якщо $AC = 8$ см, $BC = 6$ см, $MK = 5$ см.



Мал. 9.14

9.58. З точки A до площини α проведено дві рівні і взаємно перпендикулярні похилі, кут між проекціями яких – $120°$. Знайдіть косинус кута, який утворює кожна з похилих зі своєю проекцією.

9.59. З точки K до площини β проведено дві рівні похилі, кут між якими дорівнює $60°$. Знайдіть кут, який утворює одна з похилих зі своєю проекцією на площину β, якщо проекції похилих взаємно перпендикулярні.

9.60. З точки до площини проведено дві похилі. Довжина однієї з них – 8 см, а її проекції – $2\sqrt{15}$ см. Кут між похилими дорівнює $60°$, а відстань між основами похилих – 7 см. Знайдіть довжину проекції другої похилої. Скільки розв'язків має задача?

9.61. З точки до площини проведено дві похилі. Довжина однієї з них – $5\sqrt{5}$ см, а її проекції – 11 см. Кут між проекціями похилих дорівнює 60°, а відстань між основами похилих – $\sqrt{97}$ см. Знайдіть довжину другої похилої. Скільки розв'язків має задача?

9.62. Сторони трикутника дорівнюють 4 см, 13 см і 15 см. Через вершину його найменшого кута до площини трикутника проведено перпендикуляр, і з його кінця, що не належить трикутнику, проведено перпендикуляр завдовжки 13 см до прямої, що містить протилежну цьому куту сторону. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного до площини трикутника.

9.63. Сторони трикутника дорівнюють 11 см, 25 см і 30 см. Через вершину його найбільшого кута до площини трикутника проведено перпендикуляр, і з його кінця, що не належить трикутнику, проведено перпендикуляр завдовжки 11 см до протилежної цьому куту сторони. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного до площини трикутника.

9.64. 1) Точка M не лежить у площині трикутника ABC і рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони трикутника. Доведіть, що основою перпендикуляра, проведеного з точки M до площини ABC, є центр кола, вписаного у цей трикутник, або один із центрів зовні вписаного у цей трикутник кола.

2) Точка M не належить площині многокутника $A_1A_2...A_n$ і рівновіддалена від усіх його сторін. Доведіть, що основою перпендикуляра, проведеного з точки M до площини многокутника, є центр кола, вписаного у многокутник.

9.65. Точка K віддалена від площини трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см на відстань 3 см і рівновіддалена від усіх його сторін. Знайдіть відстань від точки K до сторін трикутника.

9.66. Точка L рівновіддалена від усіх сторін рівнобедреного трикутника з основою і бічною стороною завдовжки 12 см і 10 см відповідно. Знайдіть відстань від точки L до площини трикутника, якщо відстань від цієї точки до сторін трикутника дорівнює 5 см.

9.67. Діагоналі ромба дорівнюють 30 см і 40 см і перетинаються у точці O. Довжина перпендикуляра OK до площини ромба дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від точки K до сторін ромба.

9.68. До площини правильного шестикутника $ABCDEF$ проведено перпендикуляр CK. Чи будуть взаємно перпендикулярними прямі: 1) KA і AF; 2) KE і EF?

9.69. Точка M лежить на відстані 30 см від площини рівнобічної трапеції та рівновіддалена від усіх її вершин. Висота трапеції дорівнює 12 см, а діагональ трапеції, що дорівнює 15 см, перпендикулярна до бічної сторони. Знайдіть відстань від точки M до вершин трапеції.

9.70. Точка A віддалена від кожної з вершин рівнобічної трапеції на 65 см. Бічна сторона трапеції перпендикулярна до її діагоналі. Знайдіть відстань від точки A до площини трапеції, якщо висота і діагональ трапеції відповідно дорівнюють 24 см і 40 см.

9.71. Точка O – центр кола, вписаного в рівнобічну трапецію, периметр якої 48 см, а гострий кут – $30°$. Через точку O до площини трапеції проведено перпендикуляр OM завдовжки 4 см. З точки M проведено перпендикуляри до основ трапеції. Знайдіть їх довжини.

9.72. AK – висота рівнобедреного трикутника ABC з основою BC. Точка M належить цій висоті. Через точку M перпендикулярно до площини трикутника проведено перпендикуляр MF. Точка L – деяка точка, що належить відрізку AF. Доведіть, що $BC \perp LK$.

9.73. Діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O. Ромб перегнули по діагоналі так, що точка B опинилася поза площиною ADC. Доведіть, що:
1) проекцією похилої BO на площину ADC є пряма DO;
2) перпендикуляр, проведений з точки D до площини ABC, перетинає пряму BO.

9.74. $QABC$ – тетраедр, усі ребра якого між собою рівні. Точка K – середина ребра AQ, точка O – центр трикутника ABC. Побудуйте переріз тетраедра площиною, що проходить через:
1) точку O перпендикулярно до прямої AC;
2) точку K перпендикулярно до прямої AQ;
3) точку K перпендикулярно до прямої BC;
4) точку K перпендикулярно до прямої OQ.

9.75. Відрізок BK перпендикулярний до площини трикутника ABC. Доведіть, що:
1) висоти трикутників ABC і AKC, проведені відповідно з вершин B і K, перетинаються в одній точці, що належить прямій AC;
2) $\angle ACB$ і $\angle ACK$ або обидва гострі, або обидва прямі, або обидва тупі.

9.76. Точка O – точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$, точка M – середина його сторони BC. Пряма OF перпендикулярна до площини квадрата. Доведіть, що:

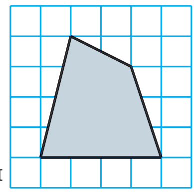
1) перпендикуляр, проведений з точки O до площини BCF, перетинає пряму FM;

2) пряма FM є проекцією похилої OM на площину BCF.

9.77. Усі ребра тетраедра $QABC$ по 18 дм, точка M – центр трикутника ABC. Знайдіть відстань від точки M до площини AQB.

9.78. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точки K, L і M – середини його ребер A_1B_1, B_1C_1 і BB_1 відповідно. Доведіть, що $BD \perp (KLM)$.

9.79. Знайдіть площу лісового масиву (у гектарах), зображеного на плані з квадратною сіткою 1 см × 1 см, масштаб якого 1 : 20 000 (мал. 9.15).



1 см

1 см

Мал. 9.15

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

9.80. Прямі a і b перетинаються під кутом 60°. Точка M належить прямій a та лежить на відстані $4\sqrt{3}$ см від прямої b. Знайдіть відстань від точки M до точки перетину прямих a і b.

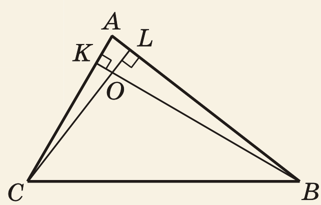
9.81. Висота CD трикутника ABC перетинає бісектрису BK цього трикутника в точці M, а висоту KL трикутника BKC – у точці N. Коло, описане навколо трикутника BKN, перетинає пряму AB у точках B і F. Доведіть, що $\triangle KFM$ – рівнобедрений.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 9

1. У трикутнику ABC $\angle B = 40°$, $\angle C = 60°$, BK і CL – висоти. Знайдіть міру кута COB.

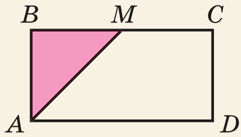
А	Б	В	Г	Д
60°	70°	80°	90°	100°



2. Укажіть кількість сторін правильного многокутника, внутрішній кут якого дорівнює 144°.

А	Б	В	Г	Д
9	10	11	12	13

3. $ABCD$ – прямокутник, точка M – середина BC (див. мал.). Площа трикутника ABM дорівнює 10 см². Знайдіть площу прямокутника $ABCD$.



А	Б	В	Г	Д
20 см²	40 см²	60 см²	1000 см²	знайти неможливо

4. У трикутнику ABC радіус описаного кола дорівнює стороні AB. Укажіть можливе значення міри кута C.

А	Б	В	Г	Д
150°	120°	90°	60°	45°

5. Установіть відповідність між характеристикою геометричного об'єкта (1–4) та його числовим значенням (А–Д).

Характеристика геометричного об'єкта

1 Довжина кола, вписаного у правильний шестикутник зі стороною $8\sqrt{3}$

2 Довжина дуги кола, радіус якого 9, що відповідає центральному куту 240°

3 Площа круга, вписаного у квадрат зі стороною 12

4 Площа кругового сектора, радіус якого дорівнює 5, що відповідає центральному куту 144°

Числове значення

А 10π

Б 12π

В 16π

Г 24π

Д 36π

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) точка O – точка перетину діагоналей, $BO : OD = 3 : 5$, $AD - BC = 6$ см. Знайдіть меншу основу трапеції (у см).

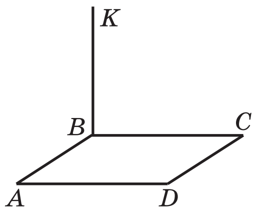
ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 4

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

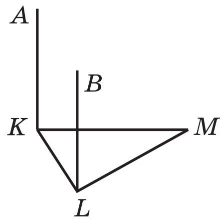
1

1. Пряма BK проходить через вершину B квадрата $ABCD$ (мал. 9.16), $BK \perp AB$, $BK \perp BC$. Яким є взаємне розташування прямої BK і площини ACD?

А. $BK \subset (ACD)$ **Б.** $BK \perp (ACD)$
В. $BK \parallel (ACD)$ **Г.** Неможливо визначити



Мал. 9.16



Мал. 9.17

2. На малюнку 9.17 кожна з прямих AK і BL перпендикулярна до площини трикутника KLM. Яким є взаємне розташування прямих AK і BL?

А. Паралельні **Б.** Мимобіжні
В. Перетинаються **Г.** Неможливо визначити

3. З точки A до площини β проведено перпендикуляр AB і похилу AF. Укажіть правильне співвідношення.

А. $AB > AF$ **Б.** $AB = AF$ **В.** $AB < AF$ **Г.** $BF > AF$

2

4. BK – перпендикуляр до площини рівностороннього трикутника ABC зі стороною 4 см, $BK = 2$ см, BL – медіана трикутника ABC. Знайдіть KL.

А. 3 см **Б.** $4\sqrt{3}$ см **В.** $2\sqrt{3}$ см **Г.** 4 см

5. З точки A до площини γ проведено перпендикуляр AC та похилі AB і AD, $AB = 13$ см, $AD = 20$ см, $CD = 16$ см. Знайдіть BC.

А. 5 см **Б.** 12 см **В.** $\sqrt{313}$ см **Г.** 13 см

6. DM – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Тоді $\angle MAB = ...$

А. $30°$ **Б.** $60°$ **В.** $45°$ **Г.** $90°$

3

7. Сторона MN паралелограма $KLMN$ належить площині α, а сторона KN перпендикулярна до площини α. Знайдіть LN, якщо $MK = 12$ см.

А. 6 см **Б.** 12 см **В.** 15 см **Г.** Знайти неможливо

8. Відрізок CD не має спільних точок із площиною γ. Прямі CA і DB перпендикулярні до площини γ і перетинають її у точках A і B. Знайдіть AB, якщо $CD = AC = 10$ см, $BD = 2$ см.

А. 6 см **Б.** 7 см **В.** 8 см **Г.** 9 см

9. З точки до площини проведено дві похилі завдовжки 25 см і 30 см, різниця довжин їх проекцій – 11 см. Знайдіть відстань від точки до площини.

А. 22 см **Б.** 7 см **В.** 24 см **Г.** 12 см

4

10. CK – перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Знайдіть CK, якщо $KB = 4$ см, $KD = 5$ см, $KA = 6$ см.

А. 3 см **Б.** $\sqrt{5}$ см **В.** $\sqrt{7}$ см **Г.** 2 см

11. З точки M до площини α проведено дві рівні між собою похилі, кут між якими – $60°$, а кут між їх проекціями – $120°$. Знайдіть косинус кута, який утворює кожна з похилих зі своєю проекцією на площину α.

А. $\frac{1}{3}$ **Б.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **В.** $\frac{1}{2}$ **Г.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

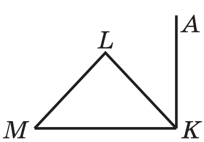
12. Через вершину A трикутника ABC до його площини проведено перпендикуляр AK завдовжки 3,6 см. З точки K проведено перпендикуляр до прямої, що містить сторону BC. Знайдіть його довжину, якщо $AB = 6$ см, $BC = 25$ см, $AC = 29$ см.

А. 6 см **Б.** 6,2 см **В.** 6,4 см **Г.** 5 см

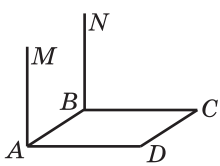
ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 8–9

1

1. Пряма KA проходить через вершину K трикутника KLM (мал. 9.18), $KA \perp KL$, $KA \perp KM$. Як розміщена пряма KA відносно площини KLM?



Мал. 9.18



Мал. 9.19

2. На малюнку 9.19 кожна з прямих AM і BN перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$. Чи паралельні прямі AM і BN? Відповідь обґрунтуйте.

3. З точки P до площини α проведено перпендикуляр PK і похилу PM. Порівняйте: 1) PK і PM; 2) PM і MK.

2 **4.** Пряма MA перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$. Знайдіть MC, якщо $AD = 4$ см, $AM = 7$ см.

5. З точки A до площини β проведено похилі AM і AN та перпендикуляр AK. Знайдіть довжину похилої AM, якщо $AN = 15$ см, $KN = 9$ см, $MK = 16$ см.

6. KB – перпендикуляр до площини прямокутника $ABCD$. Доведіть, що $\angle MCD$ – прямий.

3 **7.** Відрізок AB, що дорівнює 5 см, не має спільних точок із площиною α. Прямі AC і BD перпендикулярні до площини α та перетинають її у точках C і D. Знайдіть CD, якщо $AC = 9$ см, $BD = 6$ см.

8. З точки до площини проведено дві похилі, різниця довжин яких дорівнює 2 см. Знайдіть довжини похилих, якщо довжини їх проекцій – 5 см і 1 см.

4 **9.** Сторони трикутника дорівнюють 6 см, 8 см і 10 см. З вершини найбільшого кута трикутника до його площини проведено перпендикуляр, а з його іншого кінця проведено перпендикуляр завдовжки 6 см до сторони, протилежної цьому куту. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного до площини трикутника.

Додаткові завдання

3 **10.** Діагональ квадрата дорівнює 8 см. Точка M віддалена від площини квадрата на 3 см і рівновіддалена від його вершин. Знайдіть відстань від точки M до:

1) вершин квадрата;   2) сторін квадрата.

4 **11.** Пряма DM перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$. Знайдіть DM, якщо $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$.

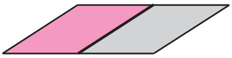
§ 10. ДВОГРАННИЙ КУТ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІСТЬ ПЛОЩИН

1. Двогранний кут

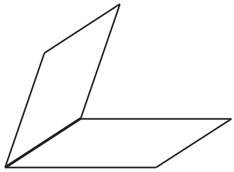
У стереометрії, крім плоских кутів, розглядають ще й *двогранні кути*.

Щоб увести поняття двогранного кута, зауважимо, що кожна пряма, проведена у площині, ділить її на дві *півплощини* (мал. 10.1).

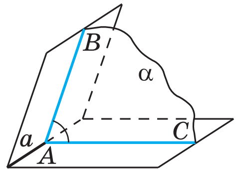
! ***Двогранним кутом*** **називають фігуру, яка утворена двома півплощинами зі спільною прямою, що їх обмежує.**



Мал. 10.1



Мал. 10.2



Мал. 10.3

На малюнку 10.2 зображено двогранний кут. Півплощини, що утворюють двогранний кут, називають *гранями*, а пряму, що їх обмежує, – *ребром двогранного кута*.

У повсякденному житті нам часто трапляються предмети, що мають форму двогранного кута. Наприклад, напіврозгорнута книжка, дві суміжні стіни кімнати, двоскатні дахи будівель тощо.

Площина α, яка перпендикулярна до ребра a двогранного кута, перетинає грані двогранного кута по променях AB і AC (мал. 10.3). Кут BAC називають *лінійним кутом двогранного кута*. Двогранний кут має безліч лінійних кутів. Усі вони є рівними між собою.

Градусною мірою двогранного кута **називають градусну міру його лінійного кута.**

Зазвичай, замість «градусна міра двогранного кута дорівнює...» говорять «двогранний кут дорівнює...».

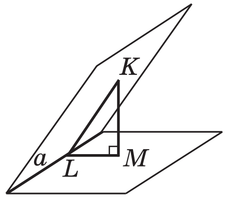
Двогранний кут називають *гострим*, *прямим* або *тупим*, якщо його лінійний кут відповідно є гострим, прямим або тупим. Зауважимо, що, виходячи з означення, двогранний кут змінюється в межах від $0°$ до $180°$.

Два двогранних кути називають *рівними*, якщо їх міри однакові. Можна показати, що рівні двогранні кути можна повністю сумістити накладанням.

Наведемо два способи побудови двогранного кута.

Спосіб 1. Нехай точка A належить ребру a двогранного кута (мал. 10.3). Побудуємо у гранях двогранного кута прямі AB і AC, перпендикулярні до a. Тоді кут BAC буде лінійним кутом двогранного кута. Справді, за ознакою перпендикулярності прямої і площини, $a \perp (ABC)$, а тому кут BAC дійсно є лінійним кутом двогранного кута.

Спосіб 2. Нехай точка K лежить в одній з граней двогранного кута з ребром a (мал. 10.4). Проведемо перпендикуляр KM до його другої грані. Проведемо $ML \perp a$. За теоремою про три перпендикуляри $KL \perp a$. Тому $a \perp (KLM)$ за ознакою перпендикулярності прямої і площини. Отже, кут KLM – лінійний кут двогранного кута.

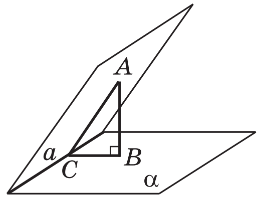


Мал. 10.4

Задача 1. Двогранний кут дорівнює $30°$. На одній із його граней вибрано точку на відстані 6 см від ребра двогранного кута. Знайти відстань від цієї точки до другої грані.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай точка A належить одній з граней двогранного кута з ребром a, $AC \perp a$, $AC = 6$ см (мал. 10.5).

1) Позначимо другу грань кута через α і проведемо до неї перпендикуляр AB. Сполучимо точки B і C.



Мал. 10.5

2) $AB \perp \alpha$, AC – похила до α, BC – її проекція, $AC \perp a$. Тоді $BC \perp a$ (за теоремою про три перпендикуляри).

3) $AC \perp a$ і $BC \perp a$, тому $a \perp (ABC)$ (за ознакою перпендикулярності прямої і площини). Отже, $\angle ACB$ – лінійний кут двогранного кута, тоді $\angle ACB = 30°$ (за умовою).

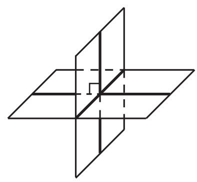
4) Із $\triangle ABC$ ($\angle B = 90°$) за властивістю катета, що лежить проти кута $30°$, маємо: $AB = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$ (см).

В і д п о в і д ь. 3 см.

2. Перпендикулярність площин

Дві площини, що перетинаються, утворюють чотири двогранні кути. Якщо один з них дорівнює $90°$, то інші, цілком очевидно, теж дорівнюють по $90°$ (мал. 10.6).

Дві площини називають *перпендикулярними (взаємно перпендикулярними)*, якщо, перетинаючись, вони утворюють прямі двогранні кути.


Мал. 10.6

Якщо площини α і β перпендикулярні, то це записують так: $\alpha \perp \beta$.

Можна дати інше означення перпендикулярності площин, не використовуючи поняття двогранного кута.

Дві площини, які перетинаються, називають *перпендикулярними*, якщо третя площина, перпендикулярна до лінії перетину цих площин, перетинає їх по перпендикулярних прямих.

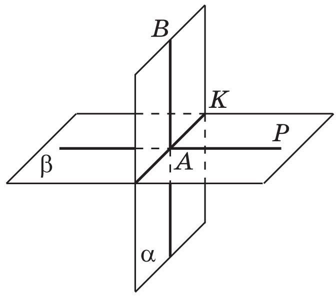
Т е о р е м а (ознака перпендикулярності площин). **Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.**

Д о в е д е н н я. Нехай площина α проходить через пряму AB, яка перпендикулярна до площини β і перетинає її у точці A (мал. 10.7). Доведемо, що $\alpha \perp \beta$.

1) Нехай $\alpha \cap \beta = AK$. Оскільки $AB \perp \beta$, то AB перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині β і проходить через точку A, зокрема, $AB \perp AK$.

2) Проведемо у площині β пряму AP таку, що $AP \perp AK$. Тоді $\angle BAP$ – лінійний кут двогранного кута, грані якого належать площинам α і β.

3) Оскільки $\angle BAP = 90°$, то площини $\alpha \perp \beta$. ■



Мал. 10.7

Н Н а с л і д о к 1. **Якщо у площині є хоча б одна пряма, перпендикулярна до другої площини, то ці площини взаємно перпендикулярні.**

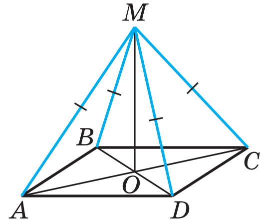
Н Н а с л і д о к 2. **Якщо площина перпендикулярна до прямої, по якій перетинаються дві інші площини, то ця площина перпендикулярна до кожної із цих двох площин.**

Задача 2. Точка M рівновіддалена від усіх вершин прямокутника $ABCD$. Довести, що площини ABC і MAC взаємно перпендикулярні.

Д о в е д е н н я. 1) Нехай O – точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$ (мал. 10.8), тоді $AO = OC$.

2) Оскільки $AM = MC$, то MO – медіана і висота трикутника AMC. Отже, $MO \perp AC$.

3) Аналогічно доводимо, що $MO \perp BD$.



Мал. 10.8

4) Оскільки $MO \perp AC$ і $MO \perp BD$, то $MO \perp (ABC)$ (за ознакою перпендикулярності прямої і площини).

5) Тоді, за ознакою перпендикулярності площин: $(MAC) \perp (ABC)$. ■

Задача 3. Два рівнобедрених трикутники мають спільну основу $AB = 16$ см. Площини трикутників перпендикулярні. Знайти відстань між точками C і C_1, якщо $AC = 10$ см, $AC_1 = 17$ см.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Нехай K – середина AB, тоді CK – медіана і висота рівнобедреного трикутника ABC, а C_1K – медіана і висота рівнобедреного трикутника ABC_1 (мал. 10.9).

2) Оскільки $CK \perp AB$ і $C_1K \perp AB$, то $\angle CKC_1$ – лінійний кут двогранного кута з ребром AB, тому $\angle CKC_1 = 90°$.

3) $AK = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{16}{2} = 8$ (см).

4) Із $\triangle ACK$ ($\angle K = 90°$):

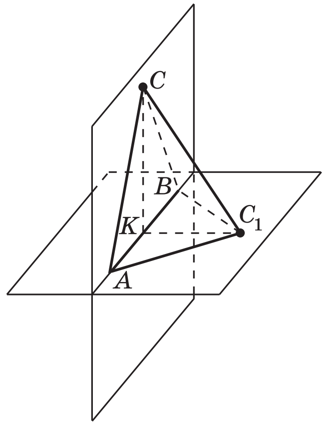
$KC = \sqrt{AC^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} =$

$= 6$ (см).

5) Із $\triangle AC_1K$ ($\angle K = 90°$):

$KC_1 = \sqrt{AC_1{}^2 - AK^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} =$

$= 15$ (см).



Мал. 10.9

6) Із $\triangle CKC_1$ ($\angle K = 90°$):

$CC_1 = \sqrt{CK^2 + KC_1{}^2} = \sqrt{6^2 + 15^2} = \sqrt{261} = 3\sqrt{29}$ (см).

В і д п о в і д ь. $3\sqrt{29}$ см.

• Яку фігуру називають двогранним кутом? • Що називають гранями, ребром двогранного кута? • Що таке лінійний кут двогранного кута? • Що є градусною мірою двогранного кута? • Які площини називають взаємно перпендикулярними? • Сформулюйте і доведіть ознаку перпендикулярності площин.

Графічна робота № 6

Виконайте малюнки за даними твердженнями, використовуючи дані в них позначення.

1. Точки M і N належать одній з граней гострого двогранного кута.
2. Точка A належить одній з граней тупого двогранного кута, а точка B – іншій.
3. Площини рівносторонніх трикутників ABC і ABM перпендикулярні.
4. Площини квадрата $ABCD$ і прямокутника $CDKL$ перпендикулярні.
5. Площина ABC перпендикулярна площинам ABK і BCM.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

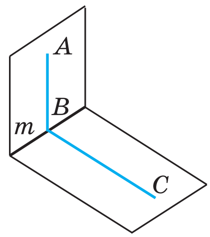
10.1. (*Усно.*) Наведіть приклади взаємно перпендикулярних площин серед предметів, що нас оточують.

10.2. (*Усно.*) Кут ABC – лінійний кут двогранного кута з ребром m (мал. 10.10). Які з тверджень правильні:

1) $AB \parallel BC$;
2) $BC \perp m$;
3) $(ABC) \perp m$;
4) $\angle ACB$ – також лінійний кут двогранного кута?

10.3. На малюнку 10.10 $\angle ABC$ – лінійний кут двогранного кута. Яким є взаємне розміщення:

1) прямої AB і прямої m;
2) прямої m і площини ABC?



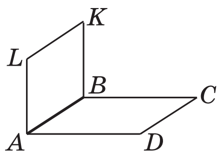
Мал. 10.10

10.4. Лінійний кут двогранного кута дорівнює половині прямого кута. Чому дорівнює двогранний кут?

10.5. Двогранний кут дорівнює третині розгорнутого кута. Чому дорівнює лінійний кут цього двогранного кута?

10.6. Площини прямокутників $ABCD$ і $ABKL$ перпендикулярні (мал. 10.11). Яке взаємне розміщення:

1) прямої AL і площини ABC;
2) прямої DC і площини ALK?



Мал. 10.11

10.7. Площини квадратів $ABCD$ і $ABKL$ перпендикулярні (мал. 10.11). Яке взаємне розміщення:

1) прямої BC і площини ABK;
2) прямої LK і площини ABC?

10.8. (*Усно.*) Скільки пар взаємно перпендикулярних площин можна провести через дану пряму?

2

10.9. Площини квадратів $ABCD$ і $ABKL$ взаємно перпендикулярні (мал. 10.11). Знайдіть відстані від точки L до точок D і C, якщо $AB = 4$ см.

10.10. Площини прямокутника $ABCD$ і квадрата $ABKL$ взаємно перпендикулярні (мал. 10.11), $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Знайдіть відстань від точки K до точок C і D.

10.11. Двогранний кут дорівнює $60°$. На одній з його граней на відстані $2\sqrt{3}$ см від іншої грані позначено точку. Знайдіть відстань від цієї точки до ребра двогранного кута.

10.12. Двогранний кут дорівнює 45°. На одній з його граней на відстані $6\sqrt{2}$ см від ребра двогранного кута позначено точку. Знайдіть відстань від цієї точки до другої грані двогранного кута.

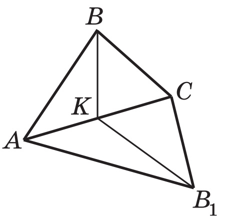
10.13. Площини α і β взаємно перпендикулярні, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і b? Для кожного випадку виконайте малюнок.

10.14. Площини α і β взаємно перпендикулярні, $a \subset \alpha$, $a \cap \beta = M$, $b \subset \beta$. Яким може бути взаємне розміщення прямих a і b? До кожного випадку виконайте малюнок.

10.15. Площини α і β взаємно перпендикулярні та перетинаються по прямій m. Чи можна стверджувати, що будь-яка пряма, яка лежить у площині α:
1) паралельна прямій m;
2) перетинає пряму m;
3) перпендикулярна до прямої m;
4) паралельна площині β;
5) перетинає площину β;
6) перпендикулярна до площини β?

10.16. Площини α і β взаємно перпендикулярні та перетинаються по прямій c. Чи існує пряма, що лежить у площині α та:
1) паралельна прямій c;
2) перетинає пряму c;
3) перпендикулярна до прямої c;
4) мимобіжна із прямою c;
5) паралельна площині β;
6) перетинає площину β;
7) перпендикулярна до площини β?
У разі позитивної відповіді виконайте відповідні малюнки.

10.17. Площини рівних між собою рівнобедрених трикутників ABC і AB_1C взаємно перпендикулярні (мал. 10.12). Медіана BK, проведена до основи трикутника ABC, дорівнює $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань між точками B і B_1.



Мал. 10.12

10.18. Площини рівних між собою рівносторонніх трикутників ABC і AB_1C взаємно перпендикулярні (мал. 10.12). Знайдіть висоту B_1K трикутника AB_1C, якщо $BB_1 = 5\sqrt{2}$ см.

10.19. Які з тверджень правильні:

1) через точку, узяту поза площиною, можна провести площину, перпендикулярну до цієї площини, і причому тільки одну;
2) якщо площина α перпендикулярна до площини β, то у площині α існує пряма a, перпендикулярна до площини β;
3) якщо пряма і площина перпендикулярні до однієї і тієї самої площини, то вони паралельні між собою;
4) якщо площини α і β взаємно перпендикулярні, то площина α перпендикулярна до будь-якої прямої, що лежить у площині β?

10.20. Точка, що належить одній із граней двогранного кута, лежить на відстані $4\sqrt{2}$ см від другої грані та на відстані 8 см від ребра цього кута. Знайдіть міру двогранного кута.

10.21. Точка, що належить одній із граней двогранного кута, знаходиться на відстані 10 см від ребра двогранного кута та на відстані 5 см від другої грані. Знайдіть міру двогранного кута.

10.22. Доведіть, що всі прямі простору, які перпендикулярні до площини α і перетинають пряму a, що належить цій площині, лежать в одній площині, перпендикулярній до площини α. Виконайте малюнок.

10.23. Чи можна через дану точку провести три попарно перпендикулярні площини? Виконайте малюнок.

10.24. Доведіть, що грані куба, які мають спільне ребро, взаємно перпендикулярні.

10.25. Квадрати $ABCD$ і $ABMK$ лежать у взаємно перпендикулярних площинах. Чи правильно, що:

1) $AC \perp AK$;
2) $AM \perp AD$;
3) $AC \perp AM$?

10.26. Площини α і β взаємно перпендикулярні. Яким може бути взаємне розташування прямої a і площини β, якщо пряма a:

1) паралельна площині α;
2) належить площині α;
3) перпендикулярна до площини α;
4) і площина α перетинаються, але не є перпендикулярними?

Виконайте відповідні малюнки.

10.27. Площини α і β взаємно перпендикулярні. Яким може бути взаємне розташування площин β і γ, якщо площини α і γ:
1) перпендикулярні;
2) паралельні;
3) перетинаються, але не під прямим кутом?
Виконайте відповідні малюнки.

10.28. Рівнобедрені трикутники ABC і ABC_1 лежать у різних гранях двогранного кута з ребром AB, який дорівнює $120°$. Знайдіть CC_1, якщо $CK = 3$ см, $C_1K = 5$ см, де CK і C_1K – висоти трикутників.

10.29. Рівнобедрені трикутники KLM і KLM_1 лежать у різних гранях двогранного кута з ребром KL, який дорівнює $60°$. Знайдіть MM_1, якщо $MP = 3$ см, $M_1P = 8$ см, де MP і M_1P – висоти трикутників.

10.30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть міру двогранного кута між площинами ABC_1 і ABC.

3 **10.31.** Щоб побудувати лінійний кут двогранного кута, проводять площину, перпендикулярну до ребра цього кута. Чи буде ця площина перпендикулярна до граней двогранного кута?

10.32. Дві прямі перпендикулярні до двох граней двогранного кута й перетинаються. Знайдіть кут між прямими, якщо двогранний кут дорівнює $70°$.

10.33. Дві прямі перетинаються під прямим кутом і перпендикулярні до граней двогранного кута. Знайдіть градусну міру двогранного кута.

10.34. Площини α і β перпендикулярні. Точка M віддалена від площини α на 8 см, а від лінії перетину площин – на 10 см. Знайдіть відстань від точки M до площини β.

10.35. Точка P віддалена від двох взаємно перпендикулярних площин на 8 см і 15 см. Знайдіть відстань від точки P до лінії перетину площин.

10.36. DS – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$. Доведіть, що: 1) $(SAD) \perp (SCD)$; 2) $(SBC) \perp (SCD)$.

10.37. Точка O – центр квадрата $ABCD$, OS – перпендикуляр до його площини. Доведіть, що:
1) $(SAC) \perp (ABD)$; 2) $(SAC) \perp (SBD)$.

10.38. З точок A і B, які належать двом перпендикулярним площинам α і β, проведено перпендикуляри AC і BD до прямої перетину площин. Знайдіть AC, якщо $AB = 7$ см, $CD = 3$ см, $BD = 2$ см.

10.39. З точок M і N, які лежать у двох перпендикулярних площинах β і γ, проведено перпендикуляри MK і NL до прямої перетину площин. Знайдіть MN, якщо $ML = 8$ см, $KN = 14$ см, $KL = 2$ см.

10.40. Площини рівнобедрених трикутників KLM і KLM_1 зі спільною основою KL взаємно перпендикулярні. Знайдіть MM_1, якщо $\angle M_1 = 60°$, $KL = 8$ см, $MK = 5$ см.

10.41. Площини рівнобедрених трикутників ABC і ABC_1 зі спільною основою AB взаємно перпендикулярні, $\angle ACB = 90°$, $AB = 10$ см, $AC_1 = 13$ см. Знайдіть CC_1.

10.42. Площини правильного трикутника ABC і квадрата $ABDE$ взаємно перпендикулярні, $AB = 2a$ см. Знайдіть:
1) довжини відрізків CD і CE; 2) косинус кута ECD.

10.43. Два рівносторонніх трикутники ABC і ABC_1 лежать у взаємно перпендикулярних площинах, $AB = 2b$ см. Знайдіть:
1) довжину відрізка CC_1; 2) косинус кута CAC_1.

10.44. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $(BB_1D) \perp (BA_1C_1)$.

10.45. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Доведіть, що $(ACC_1) \perp (BDD_1)$.

10.46. Усі ребра тетраедра $QABC$ між собою рівні. Точка K – середина ребра BC, точка D – середина ребра QA. Доведіть, що: 1) $(AQK) \perp (BCQ)$; 2) $(AQK) \perp (BCD)$.

10.47. У тетраедрі $QABC$ усі ребра по 4 см. Через вершину C площиною, перпендикулярною до ребра QA, проведено переріз тетраедра. Знайдіть периметр і площу цього перерізу.

10.48. Площини квадрата $ABCD$ і рівнобедреного трикутника ABF взаємно перпендикулярні. Точка O – центр квадрата, $AF = BF = 20$ см, $AC = 32\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань:
1) від точки F до прямої CD;
2) від точки F до центра кола, описаного навколо трикутника ABO.

10.49. Доведіть, що коли пряма лежить в одній з двох взаємно перпендикулярних площин і перпендикулярна до лінії їх перетину, то ця пряма перпендикулярна до другої площини.

10.50. Доведіть, що коли пряма, проведена через точку, що належить одній з двох взаємно перпендикулярних площин, перпендикулярна до другої площини, то ця пряма лежить у першій із цих площин.

10.51. Доведіть, що коли кожна з двох площин, які перетинаються, перпендикулярна площині α, то лінія їх перетину перпендикулярна до площини α.

10.52. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить:

1) через пряму BB_1 перпендикулярно до площини ACC_1;
2) через пряму BC_1 перпендикулярно до площини AB_1C_1.

10.53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через пряму AB перпендикулярно до площини AB_1C_1.

4 **10.54.** Точки C і D лежать на одній з граней двогранного кута й віддалені від його ребра відповідно на $2\sqrt{2}$ см і $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть міру цього вогранного кута, якщо точка C віддалена від другої грані кута на 1 см менше, ніж точка D.

10.55. Точки M і N лежать на одній з граней двогранного кута й віддалені від другої грані на 3 см і 4 см. Знайдіть міру двогранного кута, якщо сума відстаней від точок M і N до ребра двогранного кута дорівнює 14 см.

10.56. Чотирикутник $ABCD$, у якого $AB = AD$ і $BC = CD$, зігнули по діагоналі під кутом $90°$. Площі трикутників ABD і BDC, що при цьому утворилися, дорівнюють відповідно 28 см^2 і 96 см^2. Знайдіть відстань між точками A і C після згинання, якщо $BD = 8$ см.

10.57. Квадрат, площа якого дорівнює S, зігнули по діагоналі так, що отримані його частини стали взаємно перпендикулярними. Знайдіть відстань між кінцями другої діагоналі після згинання.

10.58. Відрізок завдовжки m спирається кінцями на дві взаємно перпендикулярні площини. Відстані від кінців відрізка до лінії перетину площин дорівнюють a і b. Знайдіть відстань між основами перпендикулярів, проведених з кінців відрізка до лінії перетину площин. При яких обмеженнях на значення a, b і m задача має розв’язки?

10.59. Скільки коробок, що мають форму прямокутного паралелепіпеда з розмірами 20 см, 30 см і 50 см, можна помістити в кузов вантажного автомобіля, якщо виміри кузова дорівнюють 2 м, 3 м і 1,5 м?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

10.60. Проведіть пряму a і позначте точки M і K, що віддалені від прямої a на відстань 2 см і 3 см відповідно.

10.61. Накресліть паралельні між собою прямі a і b, відстань між якими дорівнює 2,5 см.

10.62. Доведіть, що коли середини сторін двох опуклих чотирикутників збігаються, то площі цих чотирикутників між собою рівні.

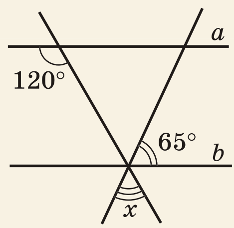
ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 10

1. У коло, діаметр якого 4 см, вписано чотирикутник $ABCD$. Знайдіть діагональ AC цього чотирикутника, якщо $\angle ABC = 60^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
2 см	$2\sqrt{3}$ см	4 см	$4\sqrt{3}$ см	знайти неможливо

2. Прямі a і b паралельні. Знайдіть градусну міру кута x.

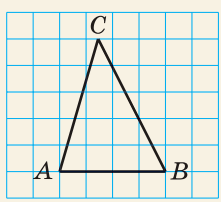


А	Б	В	Г	Д
55°	60°	65°	70°	75°

3. Знайдіть на осі абсцис точку, рівновіддалену від точок $B(-1;\ 4)$ і $C(6;\ 3)$.

А	Б	В	Г	Д
(−2; 0)	(0; 2)	(0,5; 0)	(−0,5; 0)	(2; 0)

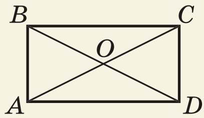
4. На папері у клітинку зображено трикутник ABC. Кожна клітинка – квадрат зі стороною 1 см. Укажіть площу трикутника ABC.



А	Б	В	Г	Д
5 см^2	10 см^2	15 см^2	20 см^2	25 см^2

5. O – точка перетину діагоналей прямокутника $ABCD$, $\angle BAO - \angle OAD = 26°$. Установіть відповідність між кутом (1–4) та його градусною мірою (А–Д).

Кут		*Градусна міра кута*	
1	$\angle BAO$	А	32°
2	$\angle OAD$	Б	58°
3	$\angle COD$	В	64°
4	$\angle AOD$	Г	112°
		Д	116°



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Точка дотику кола, вписаного у трапецію, ділить одну з бічних сторін на відрізки завдовжки 4 см і 9 см. Знайдіть радіус кола (у см).

§ 11. ВІДСТАНІ У ПРОСТОРІ

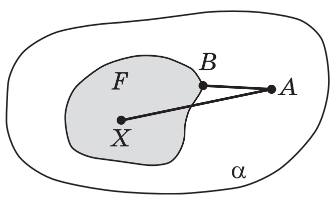
Нагадаємо, що відстань між двома точками A і B – це довжина відрізка AB (мал. 11.1). Розглянемо поняття *відстаней у просторі*.

1. Відстань від точки до фігури

Якщо точка A належить фігурі F, то відстань від неї до фігури F дорівнює нулю.

Наприклад, відстань будь-якої точки відрізка до цього відрізка дорівнює нулю.

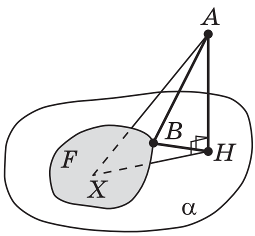
Мал. 11.1



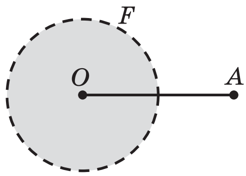
Мал. 11.2

Якщо точка A не належить фігурі F, то розглядають усі можливі відстані від даної точки до кожної точки фігури F (мал. 11.2).

Якщо точка A не належить фігурі F і існує точка B, яка належить фігурі F, така, що $AB \leqslant AX$ для будь-якої точки X фігури F, то довжину відрізка AB називають *відстанню від точки A до фігури F*, а точку B – *найближчою до точки A точкою фігури F* (мал. 11.2).



Мал. 11.3



Мал. 11.4

Зауважимо, що це означення відстані від точки до фігури може застосовуватися як на площині, так і у просторі. Якщо точка A належить площині фігури F, тобто F – плоска фігура, то відстані від точки A до фігури F на площині та у просторі будуть між собою рівними.

Якщо точка A не належить площині фігури F (площині α), то знайти відстань від точки A до фігури F можна в такий спосіб. Провести перпендикуляр AH до площини α (мал. 11.3). Якщо існує найближча до точки H точка B фігури F, то AB і буде відстанню від точки A до фігури F.

Справді, $AB = \sqrt{AH^2 + HB^2}$. Оскільки перпендикуляр, проведений з точки до площини менший за будь-яку похилу, а $HB \leqslant HX$, де X – довільна точка фігури F, то вираз $AH^2 + HB^2$, а тому і вираз $\sqrt{AH^2 + HB^2}$ набуває найменшого з усіх можливих значень відстані AX.

Зауважимо, що не завжди можна знайти відстань від точки до фігури, оскільки не завжди у фігури F існує точка, найближча до точки A. Розглянемо круг радіуса 1 із центром у точці O без точок кола, що обмежують цей круг, і точку A таку, що $OA = 2$ (мал. 11.4). Тоді, очевидно, на відрізку OA не існує точки, що належить кругу і є найближчою до точки A.

Далі розглянемо відстань від точки до найпростіших геометричних фігур.

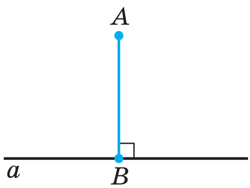
2. Відстань від точки до прямої

Якщо точка A належить прямій a, то відстань від цієї точки до цієї прямої дорівнює нулю.

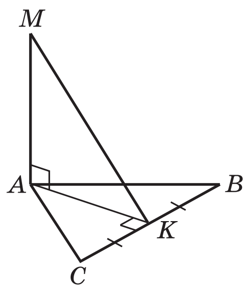
Якщо ж точка A не належить прямій a, то з курсу геометрії 7-го класу ви вже знаєте, що відстанню від точки A до прямої a називають довжину перпендикуляра AB, проведеного з даної точки до даної прямої (мал. 11.5). Це означення не суперечить загальному означенню відстані від точки до фігури, сформульованому в попередньому пункті. Справді, оскільки довжина перпендикуляра менша за довжину будь-якої похилої, то

! ***відстанню від точки до прямої*, що не проходить через цю точку, є довжина перпендикуляра, проведеного із цієї точки до цієї прямої.**

На малюнку 11.5 довжина відрізка AB – відстань від точки A до прямої a.



Мал. 11.5



Мал. 11.6

Задача 1. Пряма AM перпендикулярна до площини рівностороннього трикутника ABC. Знайти відстань від точки M до прямої BC, якщо $AM = 4$ см, $AB = 2\sqrt{3}$ см.

Розв'язання. 1) Нехай точка K – середина BC (мал. 11.6). Тоді AK – медіана і висота рівностороннього трикутника ABC.

2) $MK \perp BC$ (за теоремою про три перпендикуляри), тому MK – шукана відстань.

3) $CK = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ (см).

4) Із $\triangle AKC$ ($\angle K = 90°$):

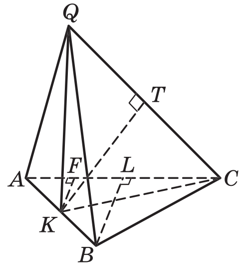
$AK = \sqrt{AC^2 - CK^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = 3$ (см).

5) Із $\triangle AMK$ ($\angle A = 90°$):

$MK = \sqrt{AM^2 + AK^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ (см).

Відповідь. 5 см.

Задача 2. $QABC$ – правильний тетраедр з ребром завдовжки a. Точка K – середина AB (мал. 11.7). Знайти відстань від точки K до прямої: 1) AB; 2) AC; 3) CQ.



Мал. 11.7

Розв'язання. 1) Оскільки $K \in AB$, то відстань від K до AB дорівнює нулю.

2) $KF \perp AC$, $BL = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (як висота рівностороннього трикутника ABC), $KF = \frac{1}{2}BL = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ (як середня лінія трикутника ABL).

3) $KQ = KC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (як висоти рівних між собою рівносторонніх трикутників). Відстанню від точки K до прямої QC буде довжина перпендикуляра KT, що є висотою і медіаною рівнобедреного трикутника KQC.

Маємо: $QT = \frac{QC}{2} = \frac{a}{2}$.

Із $\triangle KTQ$ ($\angle T = 90°$):

$$KT = \sqrt{KQ^2 - QT^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Відповідь. 1) 0; 2) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; 3) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

3. Відстань від точки до відрізка

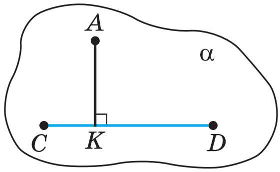
Якщо точка A належить відрізку CD, то, зрозуміло, що відстань від точки A до відрізка CD дорівнює нулю.

Якщо точка A належить прямій CD і не належить відрізку CD, то відстанню від точки A до відрізка CD є відстань від точки A до найближчого до неї кінця відрізка CD. На малюнку 11.8 такою відстанню є довжина відрізка AC.

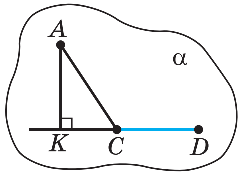
Мал. 11.8

Нехай точка A не належить прямій CD. Через точку A та пряму CD проведемо площину α, а з точки A до прямої CD проведемо перпендикуляр AK (мал. 11.9 і мал. 11.10).

Якщо точка K належить відрізку CD, то довжина перпендикуляра AK є відстанню від точки A до відрізка CD (мал. 11.9).



Мал. 11.9



Мал. 11.10

Якщо точка K не належить відрізку CD, то відстанню від точки A до відрізка CD є відстань від точки A до найближчого до неї кінця відрізка CD. На малюнку 11.10 такою відстанню є довжина відрізка AC.

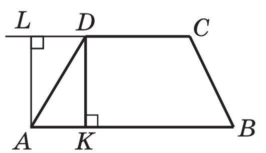
Задача 3. $ABCD$ – рівнобічна трапеція, $AB \parallel CD$, $AB = 11$ см, $CD = 3$ см, $AD = 5$ см. Знайдіть відстань:
1) від точки D до відрізка AB;
2) від точки A до відрізка CD.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Нехай DK – висота трапеції, точка K належить відрізку AB (мал. 11.11). Тому DK – відстань від точки D до відрізка AB. $AK = \dfrac{AB - DC}{2} = \dfrac{11 - 3}{2} = 4$ (см), тоді у $\triangle ADK$:

$$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3 (\text{см}).$$

2) AL – висота трапеції, точка L не належить відрізку CD. Тому відстанню від точки A до відрізка CD є довжина відрізка AD. Ця відстань дорівнює 5 см.

В і д п о в і д ь. 1) 3 см; 2) 5 см.



Мал. 11.11

4. Відстань від точки до променя

Якщо точка A належить променю CD, то відстань від точки A до променя CD дорівнює нулю.

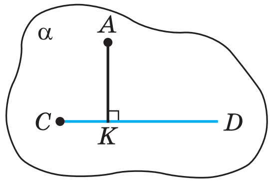
Якщо точка A належить прямій CD і не належить променю CD (мал. 11.12), то, очевидно, відстанню від точки A до променя CD буде довжина відрізка AC.

Розглянемо випадок, коли точка A не належить прямій CD. Через точку A і пряму CD проведемо площину α, а з точки A до прямої CD проведемо перпендикуляр AK.

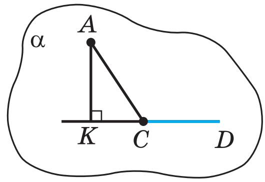
Якщо точка K належить променю CD (мал. 11.13), то довжина цього перпендикуляра і є відстанню від точки A до променя CD.

Якщо точка K не належить променю CD, то відстанню від точки A до променя CD є відстань від точки A до початку променя – точки C (мал. 11.14).

Мал. 11.12



Мал. 11.13



Мал. 11.14

Задача 4. $ABCD$ – рівнобічна трапеція, $AB \parallel CD$, $AB = 11$ см, $CD = 3$ см, $AD = 5$ см (мал. 11.11). Знайдіть відстань від точки A до променя:
1) KB; 2) BK; 3) LD; 4) DC.

Розв'язання. Розв'язуючи задачу 3, ми знайшли $AK = 4$ см, $DK = AL = 3$ см.

1) Відстань від точки A до променя KB – довжина відрізка AK, $AK = 4$ см.

2) Оскільки точка A належить променю BK, то відстань від точки A до променя BK дорівнює нулю.

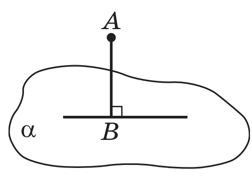
3) Відстань від точки A до променя LD – довжина відрізка AL, $AL = 3$ см.

4) Відстань від точки A до променя DC – довжина відрізка AD, $AD = 5$ см.

Відповідь. 1) 4 см; 2) 0 см; 3) 3 см; 4) 5 см.

5. Відстань від точки до площини

Якщо точка A належить площині α, то відстань від цієї точки до цієї площини дорівнює нулю. Якщо ж точка A не належить площині α, то відстанню від точки A до площини α називають довжину перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини. На малюнку 11.15 це відрізок AB. Наведене означення не суперечить загальному означенню відстані від точки до фігури, сформульованому у цьому параграфі. Справді, оскільки довжина перпендикуляра менша за довжину будь-якої похилої, то



Мал. 11.15

***відстанню від точки до площини*, що не проходить через цю точку, є довжина перпендикуляра, проведеного з даної точки до даної площини.**

Задача 5. У прямокутнику $ABCD$ зі сторонами $AB = 6$ см і $BC = 8$ см через точку O перетину його діагоналей проведено перпендикуляр OK до його площини. Знайти відстань від точки K до площини прямокутника, якщо $AK = 13$ см.

Р о з в ' я з а н н я (мал. 11.16). OK – шукана відстань.

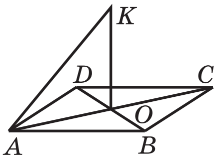
1) $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ (см).

2) $AO = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$ (см).

3) Із $\triangle AOK$ ($\angle O = 90°$):

$OK = \sqrt{AK^2 - AO^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (см).

В і д п о в і д ь. 12 см.

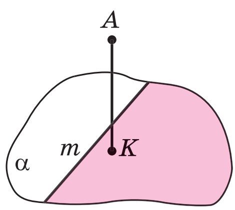


Мал. 11.16

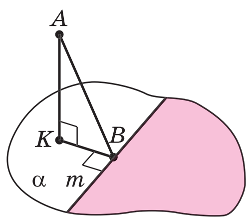
6. Відстань від точки до півплощини

Якщо точка A належить півплощині, то, очевидно, відстань від цієї точки до півплощини дорівнює нулю.

Нехай точка A не належить півплощині. Проведемо перпендикуляр AK до площини α, що містить цю півплощину. Якщо точка K належить півплощині (мал. 11.17), то довжина перпендикуляра AK є відстанню від точки A до півплощини.



Мал. 11.17



Мал. 11.18

Якщо точка K не належить півплощині (мал. 11.18), а $KB \perp m$, де $B \in m$, m – пряма, що обмежує півплощину, тоді відстанню від точки A до півплощини є довжина відрізка AB.

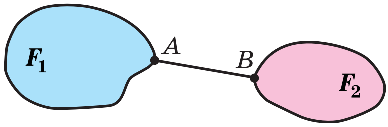
7. Відстань між двома фігурами

Розглянемо дві фігури F_1 і F_2.

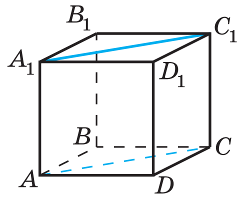
Якщо фігури F_1 і F_2 мають хоч одну спільну точку, то відстань між ними дорівнює нулю.

Якщо фігури F_1 і F_2 не мають спільних точок, то розглядають усі можливі відстані між кожною точкою A фігури F_1 і кожною точкою B фігури F_2. Найменшу із цих відстаней і вважають відстанню між фігурами F_1 і F_2 (мал. 11.19).

Якщо точка A належить фігурі F_1, а точка B – фігурі F_2, причому $AB \leqslant XY$, де X – будь-яка точка фігури F_1, а Y – будь-яка точка фігури F_2, то довжину відрізка AB називають *відстанню між фігурами* F_1 і F_2.



Мал. 11.19



Мал. 11.20

На малюнку 11.19 AB – відстань між фігурами F_1 і F_2. На малюнку 11.20 $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Відстанню між квадратами ABB_1A_1 і DD_1C_1C є, наприклад, відрізок AD, а між трикутниками $A_1B_1C_1$ і ACD, наприклад, відрізок AA_1.

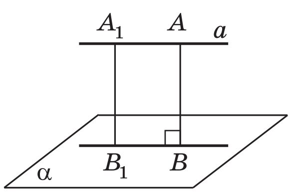
8. Відстань від прямої до площини

Якщо пряма належить площині або перетинає площину, то відстань від прямої до площини дорівнює нулю. Якщо пряма a паралельна до площини α, то візьмемо деяку точку A, що належить цій прямій, і проведемо перпендикуляр AB до площини α (мал. 11.21). Очевидно, що

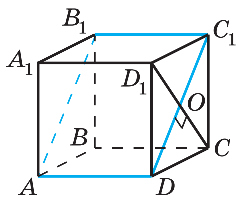
***відстанню від прямої до паралельної їй площини* є довжина перпендикуляра, проведеного з деякої точки прямої до площини.**

На малюнку 11.21 довжина відрізка AB – відстань від прямої a до паралельної їй площини α.

Можна довести, що відстань від прямої до паралельної їй площини не залежить від вибору точки A. Дійсно, $A_1B_1 = AB$ (як протилежні сторони прямокутника).



Мал. 11.21



Мал. 11.22

Задача 6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Знайти відстань від прямої BC до площини AB_1C_1.

Р о з в ' я з а н н я (мал. 11.22). 1) Оскільки $BC \parallel B_1C_1$, то пряма BC паралельна площині AB_1C_1.

2) $CD_1 \perp C_1D$, точка O – точка перетину діагоналей бічної грані CD_1C_1D.

3) $CO \perp (AB_1C_1)$, тому CO – шукана відстань.

4) $CD_1 = \sqrt{DD_1^2 + DC^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(4\sqrt{2}\right)^2} = 8$ (см).

5) $CO = \dfrac{CD_1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$ (см).

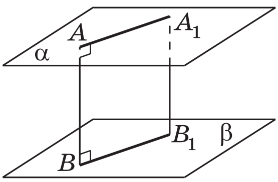
Відповідь. 4 см.

9. Відстань між площинами

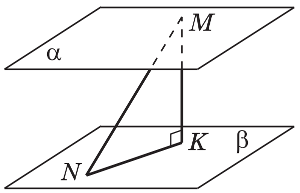
Якщо площини перетинаються, то відстань між ними дорівнює нулю. Якщо площини α і β паралельні, то з деякої точки A площини α проведемо перпендикуляр AB до площини β (мал. 11.23). Очевидно, що

! ***відстанню між двома паралельними площинами*** **є довжина перпендикуляра, проведеного з деякої точки однієї площини до іншої.**

На малюнку 11.23 довжина відрізка AB – відстань між площинами α і β. Відстань між паралельними площинами не залежить від вибору точки A.



Мал. 11.23



Мал. 11.24

Задача 7. Кінці відрізка MN завдовжки 17 см належать паралельним площинам α і β. Проекція відрізка на одну з площин дорівнює 8 см. Знайти відстань між площинами α і β.

Розв'язання. 1) MK – перпендикуляр, проведений з точки M на площину β; MK – шукана відстань (мал. 11.24).

2) Тоді NK – проекція MN на площину β. За умовою $NK = 8$ см.

3) У $\triangle MNK$ ($\angle K = 90°$):

$MK = \sqrt{MN^2 - NK^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$ (см).

Відповідь. 15 см.

10. Відстань між прямими

Якщо дві прямі перетинаються, то відстань між ними дорівнює нулю. Як відомо з попередніх класів, відстань між паралельними прямими – це довжина їх спільного перпендикуляра. Це означення не суперечить загальному означенню відстані між фігурами, даному в цьому параграфі.

Покажемо, що до мимобіжних прямих також можна побудувати спільний перпендикуляр.

1) Нехай a і b – мимобіжні прямі (мал. 11.25). Візьмемо на прямій b довільну точку M і проведемо через неї пряму a_1, паралельну a.

2) Проведемо через прямі a_1 і b, які перетинаються, площину α.

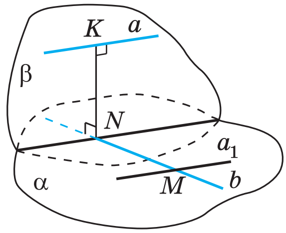
3) Через пряму a проведемо площину β, перпендикулярну до площини α.

4) Оскільки прямі a і b мимобіжні, то площина β перетинає пряму b. Позначимо точку перетину N.

5) Через точку N у площині β побудуємо перпендикуляр NK до прямої a.

6) Оскільки $NK \perp \alpha$, то $NK \perp b$.

7) Отже, NK – спільний перпендикуляр мимобіжних прямих a і b.



Мал. 11.25

Відстанню між мимобіжними прямими **є довжина їх спільного перпендикуляра.**

Можна довести, що такий спільний перпендикуляр єдиний (доведення цього факту не наводимо).

Задача 8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a см. Знайти відстань між мимобіжними прямими A_1D_1 і DC.

Розв'язання (мал. 11.26). DD_1 – спільний перпендикуляр для прямих A_1D_1 і DC. Отже, шукана відстань – це довжина відрізка DD_1, $DD_1 = a$ см.

Відповідь. a см.

Повернемося до малюнка 11.25. На цьому малюнку $a \parallel \alpha$, а KN – відстань від прямої a до паралельної їй площини α, що проходить через мимобіжну з a пряму b. Звідси можна зробити висновок, що

відстань між мимобіжними прямими **дорівнює відстані від однієї із цих прямих до паралельної їй площини, що проходить через другу пряму.**

Задача 9. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром b см. Знайти відстань між мимобіжними прямими AB_1 і D_1C.

Розв'язання. 1) $AB_1 \parallel DC_1$, $DC_1 \subset (DD_1C_1)$ (мал. 11.26), тому за ознакою паралельності прямої і площини $AB_1 \parallel (DD_1C_1)$.

2) $BA \perp AD$ і BA – проекція B_1A на площину ABC. Тоді за теоремою про три перпендикуляри $AB_1 \perp AD$.

3) Оскільки $AD \perp DD_1$ і $AD \perp DC$, то за ознакою перпендикулярності прямої і площини $AD \perp (DD_1C_1)$.

4) Отже, AD – відстань від прямої AB_1 до паралельної їй площини DD_1C_1, що проходить через пряму D_1C. Тому $AD = b$ (см) є також відстанню між мимобіжними прямими AB_1 і D_1C.

Відповідь. b см.

• Що називають відстанню від точки A до фігури F? • Що є відстанню від точки до прямої; від точки до відрізка; від точки до променя; від точки до площини; від точки до півплощини? • Що називають відстанню між двома фігурами? • Чому дорівнює відстань від прямої до площини, якщо пряма перетинає площину або належить площині? • Що є відстанню від прямої до паралельної їй площини? • Чому дорівнює відстань між площинами, що перетинаються? • Що є відстанню між паралельними площинами? • Що є відстанню між мимобіжними прямими? • Як можна знайти відстань між мимобіжними прямими?

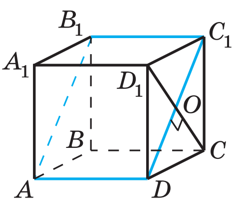
Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

11.1. На малюнку 11.26 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть відрізок, довжина якого є відстанню від:
1) точки D_1 до прямої DC;
2) точки A до площини $A_1B_1C_1$;
3) точки C до променя C_1D_1;
4) точки A_1 до відрізка B_1B.

11.2. На малюнку 11.26 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Назвіть відрізок, довжина якого є відстанню від:
1) точки B до прямої DC;
2) точки B_1 до площини ABC;
3) точки C_1 до променя B_1A_1;
4) точки A до відрізка BC.

11.3. На малюнку 11.26 зображено куб з ребром a. Чому дорівнює відстань:
1) від точки A_1 до площини DD_1C_1;
2) від точки D до прямої BC;
3) від точки D_1 до променя B_1A_1;
4) від точки O до відрізка CD_1;
5) від прямої CC_1 до площини ABD;
6) від прямої DC до площини ABB_1;
7) між площинами ABD і DCC_1;
8) між площинами ABC і $A_1B_1C_1$?

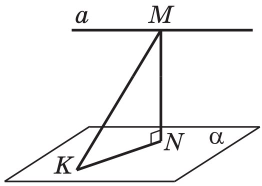


Мал. 11.26

11.4. На малюнку 11.26 зображено куб з ребром b. Чому дорівнює відстань:

1) від точки D до площини $A_1B_1C_1$;
2) від точки B_1 до прямої A_1D_1;
3) від точки C_1 до променя B_1C_1;
4) від точки A до відрізка CD;
5) від прямої A_1D_1 до площини ABC;
6) від прямої AB до площини B_1C_1C;
7) між площинами ABB_1 і DCC_1;
8) між площинами ADD_1 і $A_1B_1C_1$?

11.5. Пряма a паралельна площині α (мал. 11.27). З деякої точки M прямої a до площини α проведено похилу завдовжки 5 см, проекція якої KN дорівнює 4 см. Знайдіть відстань від прямої a до площини α.



Мал. 11.27

11.6. Площини α і β паралельні (мал. 11.24). З точки M, яка належить площині α, до площини β проведено перпендикуляр MK і похилу MN завдовжки 10 см. Знайдіть відстань між площинами α і β, якщо проекція похилої MN на площину β дорівнює 6 см.

11.7. Відстань від точки до кожної із двох паралельних площин дорівнює 6 см. Знайдіть відстань між площинами.

11.8. Відстань між двома паралельними площинами 5 см. Чому дорівнює відстань від точки, що належить одній із площин, до іншої площини.

11.9. Площини α і β паралельні, відстань між цими площинами дорівнює 10 см. $A \in \alpha$, $B \in \beta$. Чи може відстань між точками A і B бути:

1) 5 см; 2) 9 см; 3) 10 см;
4) 20 см; 5) $14\frac{1}{7}$ см; 6) 2019 см?

11.10. Площини β і γ паралельні, відстань між цими площинами дорівнює 8 см. $B \in \beta$, $C \in \gamma$. Чи може відстань між точками B і C бути:

1) 1 см; 2) 6,5 см; 3) 8 см;
4) 9 см; 5) 129 см; 6) 2020 см?

11.11. Кінці відрізка MN, що не перетинає площину α, знаходяться на відстанях 6 см і 10 см відповідно від цієї площини. На якій відстані від площини знаходиться середина відрізка MN?

11.12. Кінці відрізка AB, що не перетинає площину β, знаходяться на відстанях 8 см і 4 см відповідно від цієї площини. На якій відстані від площини знаходиться середина відрізка AB?

11.13. З точки A до площини β проведено похилу завдовжки $8\sqrt{3}$ см і перпендикуляр, які утворюють між собою кут $30°$. Знайдіть відстань від точки A до площини β.

11.14. З точки B до площини α проведено перпендикуляр і похилу. Знайдіть відстань від точки B до площини α, якщо проекція похилої дорівнює $3\sqrt{2}$ см і утворює з похилою кут $45°$.

2 **11.15.** Один з кінців даного відрізка лежить у площині α, а його середина знаходиться на відстані 3 см від площини. На якій відстані від площини знаходиться інший кінець відрізка?

11.16. Один з кінців відрізка належить площині α, а інший знаходиться на відстані 10 см від цієї площини. На якій відстані від площини знаходиться середина цього відрізка?

11.17. Пряма AB перетинає площину α у точці O. Відстань від точки A до площини α дорівнює 4 см. Знайдіть відстань від точки B до площини α, якщо:
1) O – середина AB; 2) B – середина OA;
3) A – середина OB.

11.18. Пряма CD перетинає площину β у точці O. Відстань від точки D до площини β дорівнює 6 см. Знайдіть відстань від точки C до площини β, якщо:
1) O – середина CD; 2) C – середина OD;
3) D – середина OC.

11.19. Точки C і D лежать по різні сторони від площини α. Відстані від точок C і D до площини α відповідно дорівнюють 10 см і 20 см. У якому відношенні (починаючи від точки C) площина α ділить відрізок CD?

11.20. Точки A і B лежать по різні сторони від площини γ. Відстані від точок A і B до площини γ відповідно дорівнюють 15 см і 5 см. У якому відношенні (починаючи від точки A) площина γ ділить відрізок AB?

11.21. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює 10 см. Точка віддалена від однієї з площин на 3 см. На яку відстань від іншої площини віддалена точка? Скільки випадків слід розглянути?

11.22. Відстань між двома паралельними площинами дорівнює 6 см. Точка віддалена від однієї з площин на 10 см.

На яку відстань від іншої площини віддалена точка? Скільки випадків слід розглянути?

11.23. Відстані від точки до двох паралельних площин дорівнюють 1 см і 9 см. Знайдіть відстань між площинами. Скільки випадків слід розглянути?

11.24. Відстані від точки до двох паралельних площин дорівнюють 3 см і 4 см. Знайдіть відстань між площинами. Скільки випадків слід розглянути?

11.25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка K належить ребру AB, $AK = 2$ см, $KB = 3$ см. Знайдіть відстань від точки K до площини: 1) AA_1D; 2) DCC_1; 3) BCC_1; 4) $A_1B_1C_1$.

11.26. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка M належить ребру CD, $CM = 5$ см, $MD = 2$ см. Знайдіть відстань від точки M до площини: 1) $A_1B_1C_1$; 2) BCC_1; 3) ABB_1; 4) AA_1D_1.

11.27. Через вершину A прямокутника $ABCD$ проведено перпендикуляр AK завдовжки 9 см. Знайдіть відстань від точки K до прямої CD, якщо $AC = 20$ см, $CD = 16$ см.

11.28. Через вершину B квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр BM завдовжки 3 см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AD, якщо $BD = 4\sqrt{2}$ см.

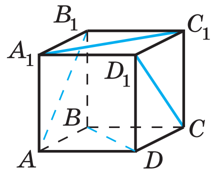
11.29. У трикутнику ABC $AC = BC = 5$ см, $AB = 6$ см. CM – перпендикуляр до площини трикутника, $CM = 3$ см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB.

11.30. У рівносторонньому трикутнику ABC сторона $AB = 6\sqrt{3}$ см. BK – перпендикуляр до площини трикутника, $BK = 12$ см. Знайдіть відстань від точки K до прямої AB.

11.31. Пряма AK перпендикулярна до площини α та перетинає її у точці A. Доведіть, що відстань між прямою AK і будь-якою прямою b, що належить площині α, дорівнює відстані від точки A до прямої b.

3 **11.32.** Пряма b не належить площині α, $b \parallel a$, $a \subset \alpha$. Доведіть, що відстань від прямої b до будь-якої прямої c, що належить площині α і перетинає пряму a, дорівнює відстані від прямої b до площини α.

11.33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 11.28), $AD = 5$ см, $DC = 3$ см, $AA_1 = 4$ см. Чому дорівнює відстань:

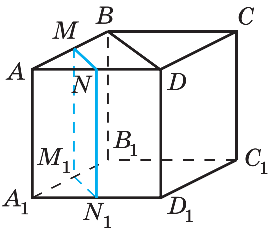


Мал. 11.28

1) між прямими AD і CC_1;
2) від точки D_1 до прямокутника $ABCD$;
3) від прямокутника AA_1B_1B до трикутника DD_1C;
4) між прямими AB_1 і CD_1?

11.34. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 11.28), $BC = 6$ см, $AB = 3$ см, $BB_1 = 5$ см. Чому дорівнює відстань:
1) між прямими A_1B_1 і DD_1;
2) від прямокутника $A_1B_1C_1D_1$ до трикутника ABD;
3) від точки A до прямокутника BB_1C_1C;
4) між прямими BD і A_1C_1?

11.35. На малюнку 11.29 зображено куб з ребром завдовжки b. MN – середня лінія трикутника ABD, площина MNN_1 паралельна ребру AA_1. Знайдіть відстань від прямої CC_1 до площини MNN_1.



Мал. 11.29

11.36. На малюнку 11.29 зображено куб з ребром завдовжки a. MN – середня лінія трикутника ABD, площина MNN_1 паралельна до ребра BB_1. Знайдіть відстань між площинами BB_1D і MNN_1.

11.37. Через вершину A квадрата $ABCD$ зі стороною 8 см проведено перпендикуляр AT, довжина якого дорівнює 7 см. Знайдіть відстань від точки T до прямих, що містять діагоналі квадрата.

11.38. Катети прямокутного трикутника дорівнюють 5 см і 9 см. Через середину гіпотенузи до площини трикутника проведено перпендикуляр завдовжки 6 см. Знайдіть відстань від кінця перпендикуляра, що не лежить у площині трикутника, до прямих, що містять катети трикутника.

11.39. Точки A і B належать ребру двогранного кута, CAM і DBN – два лінійних кути даного двогранного кута. Промені AC і BD належать одній грані кута, а AM і BN – іншій. Якщо $AB = a$, чому може дорівнювати відстань між прямими:
1) AC і BD; 2) AM і BN; 3) CM і DN?

11.40. $ABCD$ – квадрат, точка M належить стороні CD, $MK \perp (ABC)$, $CM = 1$ см, $MD = 3$ см. Знайдіть відстань між прямою MK і прямою:
1) AD; 2) BC; 3) AC; 4) BD.

11.41. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром a, M – середина ребра B_1C_1. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими:
1) BB_1 і CD; 2) BB_1 і C_1D;
3) AB_1 і D_1C; 4) CD і A_1M.

11.42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром b, N – середина ребра C_1D_1. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими:
1) AA_1 і CD; 2) AA_1 і D_1C;
3) A_1B і DC_1; 4) AD і B_1N.

11.43. Пряма AB перетинає площину α в точці O. Точка A знаходиться на відстані 4 см від площини α, $OA = 8$ см, $AB = 6$ см. Знайдіть відстань від точки B до площини α. Скільки випадків слід розглянути?

11.44. Пряма MN перетинає площину β в точці O. Точка M знаходиться на відстані 3 см від площини β, $OM = 9$ см, $MN = 6$ см. Знайдіть відстань від точки N до площини β. Скільки випадків слід розглянути?

11.45. 1) Точки A і B лежать по одну сторону від площини β. Відстані від точок A і B до площини β відповідно дорівнюють 6 см і 10 см. Площина β перетинає пряму AB у точці O. Знайдіть довжини відрізків OA і OB, якщо $AB = 32$ см.

2) Точки A і B лежать по різні сторони від площини β. Відстані від точок A і B до площини β відповідно дорівнюють 6 см і 10 см. Площина β перетинає відрізок AB у точці O. Знайдіть довжини відрізків OA і OB, якщо $AB = 32$ см.

11.46. 1) Точки M і N лежать по одну сторону від площини α. Відстані від точок M і N до площини α відповідно дорівнюють 6 см і 9 см. Площина α перетинає пряму MN у точці O. Знайдіть довжини відрізків OM і ON, якщо $MN = 30$ см.

2) Точки M і N лежать по різні сторони від площини α. Відстані від точок M і N до площини α відповідно дорівнюють 6 см і 9 см. Площина α перетинає відрізок MN у точці O. Знайдіть довжини відрізків OM і ON, якщо $MN = 30$ см.

11.47. Точки K і L належать відповідно двом паралельним площинам α і β, відстань між якими 5 см, $KL = 10$ см. Точка M належить відрізку KL і віддалена від площини α на 1 см. Знайдіть довжини відрізків MK і ML.

11.48. Точки A і B належать відповідно двом паралельним площинам α і β, відстань між якими 4 см, $AB = 12$ см. Точка C належить відрізку AB і віддалена від площини α на 1 см. Знайдіть довжини відрізків AC і BC.

11.49. Розв'яжіть задачу 11.47 за умови, що точка M належить не відрізку KL, а прямій KL. Скільки випадків у цьому разі треба розглянути?

11.50. Розв'яжіть задачу 11.48 за умови, що точка C належить не відрізку AB, а прямій AB. Скільки випадків у цьому разі треба розглянути?

11.51. Вершини A і B трикутника ABC належать площині α, точка K – середина сторони BC – віддалена від площини α на 6 см. Знайдіть відстань до площини α від:
1) точки C;
2) середини сторони AC;
3) середини середньої лінії трикутника, що паралельна стороні AC;
4) точки перетину медіан трикутника ABC.

11.52. Сторона CD паралелограма $ABCD$ належить площині γ, K – середина AD. Точка перетину діагоналей паралелограма знаходиться на відстані d см від площини γ. Прямі CK і AB перетинаються в точці M. Знайдіть відстань від точки M до площини γ.

11.53. Точка M належить бісектрисі кута ABC. З точки M до площини, що містить кут, проведено перпендикуляр MS. Доведіть, що точка S рівновіддалена від прямих, що містять сторони кута.

11.54. Доведіть, що коли точка M рівновіддалена від усіх вершин многокутника і не лежить у його площині, то її проекцією на площину многокутника є центр кола, описаного навколо многокутника.

11.55. Точка S рівновіддалена від усіх вершин прямокутника $ABCD$ і знаходиться на відстані 3 см від його площини. Знайдіть відстань від точки S до точки A, якщо $CD = 4$ см, $\angle CAD = 30°$.

11.56. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 24 см. Точка Q, що не лежить у площині трикутника, віддалена від кожної з його вершин на 20 см. Знайдіть відстань від точки Q до площини трикутника.

11.57. Точка віддалена від кожної із прямих, що містять сторони рівностороннього трикутника, на 15 см, а від площини трикутника – на 12 см. Знайдіть площу трикутника.

11.58. Площа правильного трикутника дорівнює $27\sqrt{3}$ см^2. Відстань від точки M, що лежить поза площиною трикутника, до прямих, що містять сторони трикутника, дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

11.59. $QABC$ – правильний тетраедр з ребром завдовжки a. Точка M – центр грані ABC. Знайдіть відстань між прямими QM і AC.

11.60. Точка K рівновіддалена від вершин прямокутника, який не є квадратом. Чи рівновіддалена точка K від сторін прямокутника?

11.61. Точка K рівновіддалена від вершин квадрата. Чи рівновіддалена вона від сторін квадрата?

11.62. Точка M віддалена від двох даних паралельних прямих на 13 см і 15 см, відстань між паралельними прямими – 14 см. Знайдіть відстань від точки M до площини, у якій лежать паралельні прямі.

11.63. З вершини більшого кута трикутника, сторони якого дорівнюють 21 см, 13 см і 20 см, до площини трикутника проведено перпендикуляр завдовжки 35 см. Знайдіть відстані від кінців перпендикуляра до прямої, що містить протилежну до цього кута сторону трикутника.

11.64. З вершини середнього за величиною кута трикутника, сторони якого дорівнюють 9 см, 10 см і 11 см, до площини трикутника проведено перпендикуляр, довжина якого 7 см. Знайдіть відстані від кінців перпендикуляра до прямої, що містить протилежну до цього кута сторону трикутника.

11.65. Прямі a і b – мимобіжні. Пряма a належить площині α, а пряма b перпендикулярна до площини α. Точка B, що належить прямій b, знаходиться на відстані 3 см від площини α і на відстані 5 см від прямої a. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими a і b.

11.66. Прямі m і n – мимобіжні. Пряма m належить площині β, а пряма n перпендикулярна до площини β. Точка A, що належить прямій n, знаходиться на відстані 12 см від площини β. Знайдіть відстань від точки A до прямої m, якщо відстань між прямими m і n дорівнює 5 см.

11.67. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром 2 см. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими AA_1 і BD_1.

11.68. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром 4 см. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими A_1C і AD.

11.69. Проекцією точки S на площину многокутника є точка O, що лежить усередині многокутника. Доведіть, що коли точка S рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони многокутника, то точка O – центр кола, вписаного у многокутник.

11.70. Точка P рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони паралелограма. Доведіть, що паралелограм є ромбом.

11.71. Точка K рівновіддалена від усіх вершин правильного многокутника. Чи рівновіддалена вона від сторін цього многокутника?

11.72. Точка M рівновіддалена від усіх сторін правильного многокутника. Чи рівновіддалена вона від вершин цього многокутника?

11.73. Точка N знаходиться на однакових відстанях від усіх прямих, що містять сторони ромба $ABCD$, і рівновіддалена від кожної вершини ромба. Знайдіть кути ромба.

11.74. Точка F знаходиться на однакових відстанях від усіх вершин прямокутника $ABCD$ і рівновіддалена від усіх прямих, що містять сторони прямокутника. Знайдіть кути, які утворює діагональ прямокутника з його сторонами.

11.75. Точка K рівновіддалена від прямих, що містять сторони ромба, і знаходиться на відстані 1 см від його площини. Знайдіть відстань від точки K до сторін ромба, якщо його діагоналі дорівнюють 6 см і 8 см.

11.76. Точка M віддалена на 5 см від усіх прямих, що містять сторони прямокутного трикутника. Проекція цієї точки на площину трикутника знаходиться всередині трикутника. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника, якщо катет трикутника дорівнює 12 см, а гіпотенуза – 15 см.

11.77. Кінці двох відрізків, довжини яких 40 см і 30 см, належать двом паралельним площинам, а проекції цих відрізків на одну з них відносяться як 16 : 9. Знайдіть відстань між площинами.

11.78. Кінці двох відрізків, довжини яких відносяться як 26 : 25, належать двом паралельним площинам, а проекції відрізків на одну з них дорівнюють 40 см і 28 см. Знайдіть відстань між площинами.

11.79. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено переріз площиною A_1C_1B. Відстань від точки B_1 до цієї площини дорівнює d. Знайдіть відстань до площини цього перерізу від точок:

1) A; 2) C; 3) D_1; 4) D.

11.80. У кубі $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведено переріз площиною A_1B_1C. Відстань від точки B до цієї площини дорівнює d. Знайдіть відстань до площини цього перерізу від точки:

1) A; 2) C_1; 3) D_1; 4) K – середини відрізка B_1C_1.

11.81. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = 6$ см, $AD = 8$ см. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими AA_1 і BD_1.

11.82. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = 7$ см, $BC = 24$ см. Знайдіть відстань між мимобіжними прямими BB_1 і A_1C.

11.83. $AD = 5$ см і $BC = 4$ см – основи трапеції $ABCD$, AD належить площині α, а вершина C віддалена від площини α на 9 см. Знайдіть відстань до площини α від:

1) точки B;
2) точки перетину середньої лінії трапеції з діагоналлю BD;
3) точки M перетину діагоналей трапеції.

4 **11.84.** Вершини A і D паралелограма $ABCD$ лежать у площині α, а дві інші – поза цією площиною, $AB = 15$ см, $BC = 19$ см. Проекції діагоналей на площину дорівнюють 20 см і 22 см. Знайдіть відстань від прямої BC до площини α.

11.85. $QABC$ – тетраедр. Точка Q віддалена від площини ABC на 36 см. На яку відстань від цієї площини віддалена:

1) точка F – середина AQ;
2) точка M – точка перетину медіан трикутника AQB;
3) точка N – точка перетину медіан трикутника AMB;
4) середина відрізка FM;
5) точка перетину медіан трикутника CMF?

11.86. Вершини A і D квадрата $ABCD$ належить площині α, а точка B віддалена від цієї площини на 12 см. Знайдіть відстань до площини α від:

1) точки C;
2) точки O – перетину діагоналей квадрата;
3) точки N – середини BO;
4) точки K – перетину медіан трикутника AOB;
5) точки L – перетину медіан трикутника BOC.

11.87. Сторона AC трикутника ABC належить площині α, а точка B віддалена від цієї площини на 8 см, $AC = 8$ см, $AB = 12$ см, $BC = 16$ см. Знайдіть відстань до площини α від:

1) точки K – середини бісектриси BB_1 трикутника ABC;
2) точки A_1, де AA_1 – бісектриса трикутника ABC;
3) точки C_1, де CC_1 – бісектриса трикутника ABC;
4) центра вписаного у трикутник ABC кола.

11.88. Квадрат $ABCD$ зі стороною 8 см перетнули по прямій MN (де M – середина BC, N – середина AD) так, що утворився двогранний кут 120°. Знайдіть відстань між прямими:

1) MC і AN; 2) AB і CD; 3) MN і BD;
4) AC і BD; 5) AB і NC.

11.89. Квадрат $ABCD$ зі стороною 4 см перетнули по прямій KL (де K – середина AD, L – середина BC) так, що утворився двогранний кут $60°$. Знайдіть відстань між прямими:
1) AK і LC; 2) AB і CD; 3) KL і AC;
4) AC і BD; 5) CD і AL.

11.90. Площини ромба $ABCD$ і квадрата $ABMN$ перпендикулярні, $AB = 6$ см, $\angle A = 60°$. Знайдіть відстань між прямими:
1) MN і CD; 2) AN і BC.

11.91. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром 6 см, K – середина B_1C_1. Знайдіть відстань між прямими:
1) DD_1 і A_1K; 2) A_1C і BD;
3) BC і AK; 4) B_1C і C_1D.

11.92. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб з ребром 30 см, M – середина A_1B_1. Знайдіть відстань між прямими:
1) CC_1 і D_1M; 2) AC_1 і B_1D_1;
3) DM і AB; 4) D_1C і C_1B.

11.93. $QABC$ – правильний тетраедр з ребром завдовжки 12 см, O – центр трикутника ABC, K – середина ребра QB, F – середина AC. Знайдіть відстань між прямими:
1) AQ і BC; 2) FQ і OK.

11.94. Площини трикутників рівностороннього ABC і рівнобедреного ABD взаємно перпендикулярні, $AB = 6$ см, $AD = BD = 9$ см, точка L – центр кола, вписаного у трикутник ABC. Знайдіть:
1) DL; 2) відстань між прямими AB і CD.

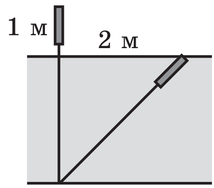
11.95. $ABCD$ – квадрат, сторона якого дорівнює 4 см, точка K належить стороні CD, $DK = 3$ см, $KF \perp (ABC)$, $KF = 4$ см. Знайдіть відстань між прямими:
1) DF і AB; 2) DF і BC;
3) CF і AD; 4) BF і CD.

11.96. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро якого дорівнює a, точка N – середина B_1C_1. Знайдіть відстань між прямими:
1) BD і AN; 2) DN і AC_1.

11.97. $QABC$ – тетраедр, усі ребра якого дорівнюють по 6 см, точка O – центр кола, описаного навколо трикутника ABC, K – середина ребра BQ. Знайдіть відстань між прямими:
1) OQ і KC; 2) BO і AQ.

11.98. $QABC$ – правильний тетраедр з ребром завдовжки 12 см, M – середина QB, K – середина QC, точка N – центр кола, вписаного у трикутник ABC. Знайдіть відстань між прямими:
1) MK і NQ; 2) AQ і BC; 3) AB і MK.

11.99. Очеретина виступає на 1 м над поверхнею озера. Її верхівку зрівняли з поверхнею води, відхиливши від вертикального положення на 2 м у бік (мал. 11.30). Знайдіть глибину озера в місці, де росте очерет.



Мал. 11.30

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

11.100. Побудуйте прямі a і b, які перетинаються під кутом:
1) 30°; 2) 45°; 3) 60°; 4) 90°.

11.101. (*Національна олімпіада Бельгії, 1979 р.*) Чи будь-який правильний $2n$-кутник можна розбити на ромби?

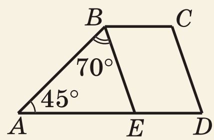
ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 11

1. Укажіть більший з кутів рівнобічної трапеції, якщо один з кутів трапеції у 8 разів більший за інший.

А	Б	В	Г	Д
20°	60°	90°	120°	160°

2. $ABCD$ – трапеція, $BE \parallel CD$. Знайдіть градусну міру кута D.



А	Б	В	Г	Д
60°	65°	70°	75°	80°

3. У колі, радіус якого 17 см, на відстані 8 см від центра проведено хорду. Знайдіть її довжину.

А	Б	В	Г	Д
15 см	17 см	30 см	35 см	знайти неможливо

4. Дві сторони трикутника – 12 см і 15 см, а третя дорівнює цілому числу сантиметрів. Якого найбільшого значення може набувати третя сторона трикутника?

А	Б	В	Г	Д
20 см	25 см	26 см	27 см	28 см

5. Установіть відповідність між рівнянням прямої (1–4) та точками перетину прямої з осями координат (А–Д).

Рівняння прямої		*Точки перетину з осями координат*	
1	$2x+3y-6=0$	А	$(0;\ 2),\ (-3;\ 0)$
2	$3x-2y-6=0$	Б	$(0;\ 3),\ (2;\ 0)$
3	$2x-3y+6=0$	В	$(0;\ 2),\ (3;\ 0)$
4	$3x-2y+6=0$	Г	$(0;\ 3),\ (-2;\ 0)$
		Д	$(0;\ -3),\ (2;\ 0)$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Дано: $\vec{a}(3;3)$, $\vec{b}(3;5)$, $\vec{c}(-1;-5)$. Знайдіть градусну міру кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}+\vec{c}$.

§ 12. ВИМІРЮВАННЯ КУТІВ У ПРОСТОРІ. ОРТОГОНАЛЬНЕ ПРОЕКЦІЮВАННЯ

1. Кут між прямими

У просторі, як і на площині,

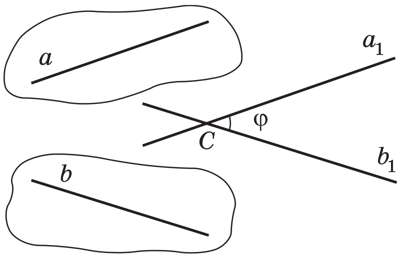
***кутом між прямими, що перетинаються,* називають менший з кутів, що утворилися при перетині цих прямих.**

Якщо прямі паралельні, то кут між ними вважають рівним нулю.

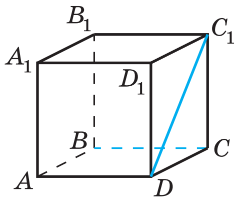
Уведемо поняття кута між мимобіжними прямими.

***Кутом між мимобіжними прямими* називають кут між прямими, які паралельні даним мимобіжними прямим і перетинаються.**

Нехай a_1 і b_1 – прямі, які перетинаються в точці C і паралельні мимобіжним прямим a і b, а кут між прямими a_1 і b_1 дорівнює φ (мал. 12.1). Тоді кут між прямими a і b також дорівнює φ. Можна довести, що кут між мимобіжними прямими a і b не залежить від вибору точки C. У задачах точку C зручно вибирати на одній із прямих, наприклад на прямій a, і проводити через цю точку пряму, паралельну прямій b. При цьому обирати треба ту з двох мимобіжних прямих, а також таку точку на іншій прямій, щоб отримане зображення було наочним, а його побудова відносно простою.



Мал. 12.1



Мал. 12.2

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайти кут між мимобіжними прямими BC і DC_1.

Розв'язання (мал. 12.2). 1) Пряма AD паралельна прямій BC, тому шуканий кут дорівнює куту між прямими AD і DC_1.

2) Оскільки DC – проекція похилої DC_1 на (ABC) і $DC \perp AD$, то за теоремою про три перпендикуляри $DC_1 \perp AD$.

3) Отже, кут між прямими BC і DC_1 дорівнює $90°$.

Відповідь. $90°$.

Таким чином, можна говорити про кут φ між будь-якими двома прямими простору. Очевидно, що цей кут φ задовольняє умову $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$. Перпендикулярними можуть бути як прямі, що перетинаються, так і мимобіжні прямі.

Дві прямі називають *перпендикулярними*, якщо кут між ними дорівнює $90°$.

У задачі 1 прямі BC і DC_1 – перпендикулярні.

Тепер, маючи означення перпендикулярних прямих (як прямих, що перетинаються, так і мимобіжних), можна узагальнити відому нам раніше теорему про три перпендикуляри.

Теорема (про три перпендикуляри). **Якщо пряма на площині перпендикулярна до проекції похилої на цю площину, то вона перпендикулярна і до похилої. І навпаки, якщо пряма на площині перпендикулярна до похилої, то вона перпендикулярна і до проекції похилої на цю площину.**

Доведення цієї теореми легко отримати, маючи доведення теореми з § 9, п. 2 та означення кута між мимобіжними прямими.

Також важливим є для розв'язування задач і узагальнене формулювання ознаки перпендикулярності прямої і площини.

Т е о р е м а (ознака перпендикулярності прямої і площини). **Якщо пряма перпендикулярна до двох прямих площини, які перетинаються, то вона перпендикулярна до цієї площини.**

Доведення цієї теореми легко отримати, маючи доведення відповідної теореми з § 8, п. 3 та означення кута між мимобіжними прямими.

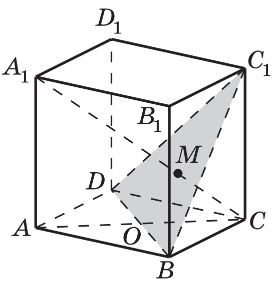
Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Довести, що $A_1C \perp (BDC_1)$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Пряма A_1C – похила до площини ABC, а пряма AC – її проекція на цю площину (мал. 12.3).

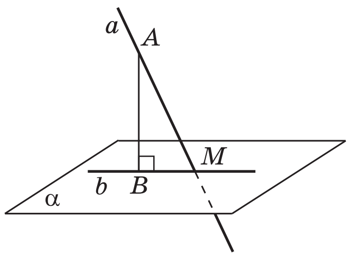
2) Оскільки $ABCD$ – квадрат, то $BD \perp AC$, а тому за теоремою про три перпендикуляри $BD \perp A_1C$.

3) Аналогічно доводимо, що $BC_1 \perp A_1C$ (розглядаємо площину BCB_1).

4) Отже, $A_1C \perp BD$ і $A_1C \perp BC_1$, тому за ознакою перпендикулярності прямої і площини $A_1C \perp (BDC_1)$, що й треба було довести.



Мал. 12.3



Мал. 12.4

2. Кут між прямою і площиною

Якщо пряма паралельна площині або їй належить, то кут між ними вважають рівним 0°. Якщо пряма перпендикулярна до площини, то кут між ними вважають рівним 90°.

Нехай дано пряму a, що перетинає площину α в точці M і не є перпендикулярною до цієї площини (мал. 12.4). Основи перпендикулярів, проведених з точок прямої a до площини α, належать прямій b. Ця пряма b є *проекцією прямої a на площину* α.

Якщо пряма перетинає площину і не є перпендикулярною до неї, то *кутом між прямою і площиною* називають кут між прямою і її проекцією на цю площину.

Так само визначають і кут між похилою і площиною.

Очевидно, що кут φ між прямою і площиною задовольняє умову $0^\circ \leqslant \varphi \leqslant 90^\circ$.

Задача 3. З точки до площини проведено похилу завдовжки 18 см. Знайти кут, який утворює похила з площиною, якщо проекція похилої на цю площину дорівнює 9 см.

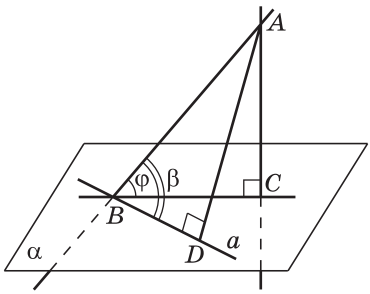
Розв'язання. 1) AM – похила, $AM = 18$ см, BM – її проекція, $BM = 9$ см (мал. 12.4). Тоді кут AMB – шуканий.

2) У $\triangle AMB$ ($\angle B = 90^\circ$) $\cos\angle M = \dfrac{BM}{AM} = \dfrac{9}{18} = \dfrac{1}{2}$, тому $\angle M = 60^\circ$.

Відповідь. 60°.

Задача 4. Довести, що кут між похилою і площиною не більший, ніж кут між цією похилою і будь-якою прямою, що лежить у цій площині.

Доведення. 1) Нехай AC – перпендикуляр, проведений з точки A до площини α, а AB – похила, $\varphi = \angle ABC$ – кут, що утворює похила AB із площиною α, $\beta = \angle ABD$ – кут, що утворює похила AB з будь-якою прямою a, що належить площині α (мал. 12.5), точку D обрано так, що $AD \perp a$.



Мал. 12.5

2) Оскільки AC – перпендикуляр до площини α, а AD – похила, то $AC < AD$.

3) У $\triangle ABC$: $\sin\varphi = \dfrac{AC}{AB}$, у $\triangle ABD$: $\sin\beta = \dfrac{AD}{AB}$.

4) Оскільки $AC < AD$, то $\dfrac{AC}{AB} < \dfrac{AD}{AB}$ і $\sin\varphi < \sin\beta$.

5) Оскільки φ і β – гострі кути, то $\varphi < \beta$.

6) Зауважимо, що кут між похилою AB і прямою BC, що належить площині α, дорівнює φ, а тому зробимо висновок, що $\varphi \leqslant \beta$ (рівність досягається, коли пряма a збігається із прямою BC). ■

3. Кут між площинами

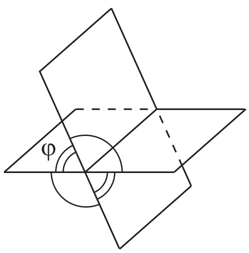
Якщо дві площини паралельні, то кут між ними вважають рівним 0°. Якщо дві площини перетинаються, то вони утворюють чотири двогранних кути зі спільним ребром (мал. 12.6).

Величину меншого з двогранних кутів, що утворилися при перетині двох площин, називають *кутом між площинами.*

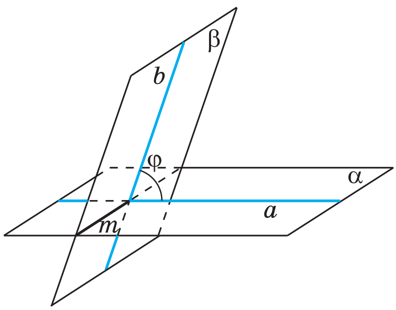
Зрозуміло, що кут між площинами φ задовольняє умову $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$. У випадку $\varphi = 90°$ площини взаємно перпендикулярні.

Якщо пригадати означення лінійного кута двогранного кута, то означення кута між площинами можна сформулювати по-іншому.

***Кутом між площинами, що перетинаються,* називають кут між прямими, проведеними в цих площинах перпендикулярно до їх лінії перетину.**



Мал. 12.6



Мал. 12.7

На малюнку 12.7 площини α і β перетинаються по прямій m. У площині α проведено пряму a таку, що $a \perp m$, а у площині β – пряму b таку, що $b \perp m$, прямі a і b перетинаються. Якщо кут між прямими a і b дорівнює φ, то кут між площинами α і β також дорівнює φ.

Задача 5. Квадрат $ABCD$, площа якого дорівнює 9 см^2, і прямокутник ABC_1D_1, площа якого дорівнює 24 см^2, мають спільну сторону, а кут між їх площинами дорівнює 60°. Знайти відстань між точками D і D_1. Скільки розв'язків має задача?

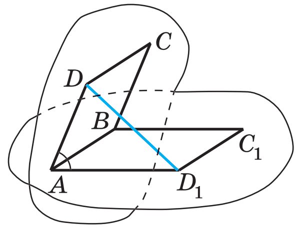
Р о з в ' я з а н н я. 1) Оскільки $AD \perp AB$ і $AD_1 \perp AB$, то за кут між площинами можна взяти менший з кутів, утворених при перетині прямих AD і AD_1 (мал. 12.8). Менший з них за умовою дорівнює 60°. Тому кут DAD_1 може дорівнювати 60° або 120°. Отже, задача має два розв'язки.

2) $S_{ABCD} = 9$ см^2, тому $AB = AD = 3$ (см); $S_{ABC_1D_1} = 24$ см^2, тому

$$AD_1 = \frac{24}{3} = 8 \text{ (см)}.$$

3) Якщо $\angle DAD_1 = 60°$, то із $\triangle ADD_1$ за теоремою косинусів:

$DD_1 = \sqrt{3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 60°} = \sqrt{49} = 7$ (см).



Мал. 12.8

Якщо $\angle DAD_1 = 120°$, то

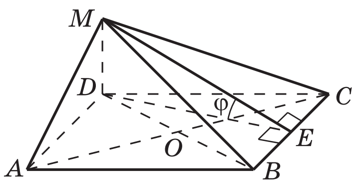
$DD_1 = \sqrt{3^2 + 8^2 - 2 \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cos 120°} = \sqrt{97}$ (см).

Відповідь. 7 см або $\sqrt{97}$ см.

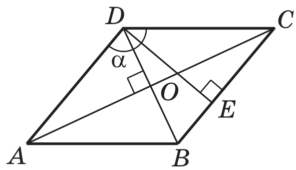
Задача 6. $ABCD$ – ромб, $AC = 16$ см, $BD = 12$ см, $DM \perp (ABC)$, $DM = 9{,}6$ см (мал. 12.9). Знайти кут між площинами: 1) AMD і CMD; 2) ABC і MBC.

Розв'язання. 1. 1) Оскільки $DM \perp (ABC)$, то $DM \perp AD$, $DM \perp CD$. Тому $\angle ADC = \alpha$ лінійний кут двогранного кута, утвореного півплощинами ADM і CDM з ребром DM.

2) Проте кут ABC – тупий, тому кутом між площинами AMD і CMD є кут, суміжний з кутом α, тобто кут $\beta = 180° - \alpha$. Зауважимо, що $\angle DAB = 180° - \alpha$ (мал. 12.10).



Мал. 12.9



Мал. 12.10

3) У $\triangle AOD$: $DO = \frac{BD}{2} = \frac{12}{2} = 6$ (см),

$AO = \frac{AC}{2} = \frac{16}{2} = 8$ (см).

Тоді $AD = \sqrt{AO^2 + OD^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$ (см).

4) У $\triangle ADB$:

$$\cos \angle DAB = \frac{AD^2 + AB^2 - BD^2}{2AD \cdot AB} = \frac{10^2 + 10^2 - 12^2}{2 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{7}{25},$$

$\angle DAB = \arccos \frac{7}{25}$.

5) Кут між площинами AMD і CMD дорівнює $\arccos \frac{7}{25}$.

2. 1) Нехай $DE \perp BC$, DE – висота ромба (мал. 12.9). Тоді за теоремою про три перпендикуляри $ME \perp BC$, а тому $\varphi = \angle DEM$ – лінійний кут двогранного кута, утвореного півплощинами ABC і MBC зі спільним ребром BC. Оскільки цей кут гострий, то він і є кутом між площинами ABC і MBC.

2) Площа ромба $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD = BC \cdot DE$.

Тому $\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 10 \cdot DE$, $DE = 9{,}6$.

3) У $\triangle MDE$: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{DM}{DE} = \frac{9{,}6}{9{,}6} = 1$, тому $\varphi = 45°$.

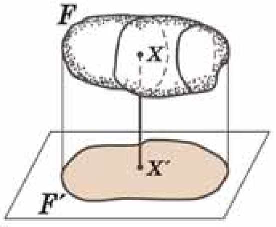
В і д п о в і д ь. 1) $\arccos\frac{7}{25}$; 2) $45°$.

4. Ортогональне проекціювання

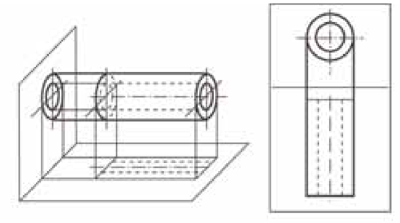
Окремим випадком паралельного проекціювання є *ортогональне проекціювання*.

Паралельне проекціювання, напрям якого перпендикулярний до площини проекції, називають *ортогональним проекціюванням*. Паралельну проекцію фігури, що утворюється при ортогональному проекціюванні, називають *ортогональною проекцією фігури*.

На малюнку 12.11 фігура F' є ортогональною проекцією фігури (тіла) F.



Мал. 12.11



Мал. 12.12

У кресленні часто використовують ортогональне проекціювання. Деяка деталь проектується на дві (або три) площини, і потім дві (або три) проекції зображують на площині креслення. На малюнку 12.12 зображено дві ортогональні проекції деякої деталі циліндричної форми.

Ортогональне проекціювання є практичним застосуванням властивостей паралельних та перпендикулярних прямих і площин.

Розглянемо ортогональне проекціювання многокутника.

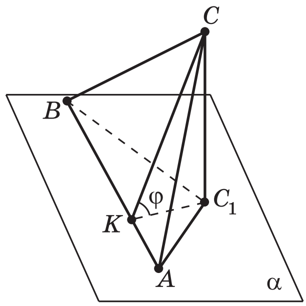
Т Т е о р е м а (про площу ортогональної проекції многокутника). **Площа ортогональної проекції многокутника на площину дорівнює добутку його площі на косинус кута між площиною многокутника і площиною проекції.**

Д о в е д е н н я. Доведемо спочатку теорему для трикутника у випадку, коли площина проекції проходить через одну з його сторін.

1) Проекцією трикутника ABC на площину α є трикутник ABC_1 (мал. 12.13).

2) Проведемо висоту CK трикутника ABC. За теоремою про три перпендикуляри маємо $C_1K \perp AB$. Отже, C_1K – висота трикутника ABC_1.

3) Оскільки $CK \perp AB$ і $C_1K \perp AB$, то $\varphi = \angle CKC_1$ – кут між площиною трикутника ABC і площиною проекції α.



Мал. 12.13

4) $C_1K = CK \cdot \cos\varphi$.

5) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot CK$,

$S_{ABC_1} = \dfrac{1}{2} AB \cdot C_1K = \dfrac{1}{2} AB \cdot CK \cdot \cos\varphi$.

Тому $S_{ABC_1} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$.

Для розглядуваного випадку твердження теореми правильне.

Якщо замість площини α візьмемо будь-яку іншу паралельну їй площину, твердження теореми також буде правильним, оскільки проекції трикутника на паралельні площини будуть між собою рівними.

У загальному випадку для доведення теореми многокутник розбивають (наприклад, діагоналями) на скінченну кількість трикутників. Тоді ортогональна проекція многокутника складатиметься з ортогональних проекцій трикутників, що утворилися, і теорему також можна буде довести. Строге математичне доведення теореми в цьому випадку не наводимо. ■

Задача 7. Ортогональною проекцією трикутника ABC на площину α є прямокутний трикутник $A_1B_1C_1$ з катетами 4 см і 6 см. Знайти площу трикутника ABC, якщо кут між площинами ABC і $A_1B_1C_1$ дорівнює 30°.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $S_{A_1B_1C_1} = \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$ (см²).

2) Нехай $\varphi = 30°$ – кут між площинами ABC і $A_1B_1C_1$. Оскільки $S_{A_1B_1C_1} = S_{ABC} \cdot \cos\varphi$, то

$$S_{ABC} = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{\cos 30°} = \frac{12}{\cos 30°} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}\ (\text{см}^2).$$

Відповідь. $8\sqrt{3}$ см^2.

• Що називають кутом між прямими, що перетинаються? • Чому дорівнює кут між паралельними прямими? • Що називають кутом між мимобіжними прямими? • Дайте означення перпендикулярних прямих. • Сформулюйте теорему про три перпендикуляри. • Сформулюйте ознаку перпендикулярності прямої і площини. • Чому дорівнює кут між прямою і площиною, якщо пряма паралельна площині або належить площині? • Сформулюйте означення кута між прямою і площиною. • Чому дорівнює кут між паралельними площинами? • Сформулюйте означення кута між площинами, що перетинаються. • Що називають ортогональним проекціюванням? • Що називають ортогональною проекцією фігури? • Сформулюйте теорему про площу ортогональної проекції.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

12.1. (*Усно.*) Чи може кут між мимобіжними прямими дорівнювати:

1) 0°; 2) 20°; 3) 90°; 4) 100°?

12.2. (*Усно.*) Чи може кут між прямою і площиною дорівнювати:

1) 0°; 2) 30°; 3) 90°; 4) 120°?

12.3. Чи може кут між площинами, що перетинаються, дорівнювати:

1) 0°; 2) 40°; 3) 90°; 4) 150°?

12.4. Чому дорівнює кут між:

1) суміжними гранями куба;
2) протилежними гранями куба?

12.5. Похила AM утворює з площиною α кут 45° (мал. 12.4). Знайдіть довжину похилої, якщо довжина її проекції дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

12.6. Похила AM дорівнює 10 см і утворює з площиною α кут 60° (мал. 12.4). Знайдіть довжину проекції похилої.

12.7. (*Усно.*) Укажіть в оточенні мимобіжні перпендикулярні прямі.

2 **12.8.** З точки до площини проведено похилу завдовжки 12 см. Знайдіть кут, який утворює похила з площиною, якщо проекція похилої дорівнює $6\sqrt{3}$ см.

12.9. З точки до площини проведено похилу завдовжки 8 см. Знайдіть кут, який утворює похила з площиною, якщо перпендикуляр, проведений з точки до площини, дорівнює $4\sqrt{2}$ см.

12.10. Дві площини перетинаються під кутом 60°. Точка P лежить в одній із цих площин і віддалена від другої площини на $6\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань від точки P до лінії перетину площин.

12.11. Дві площини перетинаються під кутом 30°. Точка M лежить в одній із площин і знаходиться на відстані 10 см від лінії перетину площин. Знайдіть відстань від точки M до другої площини.

12.12. (*Усно.*) Чи може площа ортогональної проекції многокутника:

1) дорівнювати площі многокутника;
2) бути більшою за площу многокутника;
3) бути меншою за площу многокутника?

12.13. Перемалюйте таблицю в зошит і заповніть порожні графи.

Площа многокутника	Кут між площинами многокутника і його ортогональною проекцією	Площа проекції
40 $см^2$	30°	
	45°	$10\sqrt{2}$ $см^2$
60 $см^2$		30 $см^2$

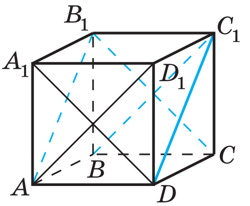
12.14. Перемалюйте таблицю в зошит і заповніть порожні графи.

Площа многокутника	Кут між площинами многокутника і його ортогональною проекцією	Площа проекції
$4\sqrt{2}$ $см^2$	45°	
	60°	30 $см^2$
32 $см^2$		$16\sqrt{3}$ $см^2$

12.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 12.14). Знайдіть кути, які утворює:

1) пряма AA_1 з прямими CC_1, BC, BC_1, DC_1;

2) пряма CB_1 з прямими BC, BC_1, DA_1.



Мал. 12.14

12.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 12.14). Знайдіть кути, які утворює:

1) пряма A_1B_1 з прямими BC, CC_1, DC_1;

2) пряма AD_1 з прямими A_1D, BC_1.

12.17. Пряма a перпендикулярна до трьох прямих, що лежать у площині α. Чи можна стверджувати, що пряма a перпендикулярна до площини α?

12.18. Пряма перпендикулярна до двох сторін паралелограма. Чи можна стверджувати, що пряма перпендикулярна до площини паралелограма?

12.19. Пряма MA перпендикулярна до прямих AB і AD, що містять сторони паралелограма $ABCD$. Знайдіть кут між прямими MA і CD.

12.20. Пряма CK перпендикулярна до прямих CA і CB, що містять сторони трикутника ABC. Знайдіть кут між прямими CK і AB.

12.21. Ребро куба дорівнює 1 см (мал. 12.14). Знайдіть площу чотирикутника AB_1C_1D, використовуючи формулу для знаходження площі ортогональної проекції.

12.22. Пряма AN перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$. Доведіть, що $NC \perp BD$.

12.23. Пряма BK перпендикулярна до площини ромба $ABCD$. Доведіть, що $KD \perp AC$.

12.24. Пряма CM перпендикулярна до площини паралелограма $ABCD$. Виявилося, що $MA \perp BD$. Доведіть, що $ABCD$ – ромб.

12.25. Пряма DL перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$. Виявилося, що $LB \perp AC$. Доведіть, що $ABCD$ – квадрат.

12.26. Пряма OB перпендикулярна до площини α, а коло із центром у точці O належить цій площині. Пряма a дотикається цього кола в точці M, а пряма b паралельна до прямої a. Доведіть, що $BM \perp b$.

12.27. $ABCD$ – ромб. Точка C – середина відрізка AM, $MN \perp (ABC)$. Які з прямих BC, CO, BD перпендикулярні до прямої AN?

12.28. Під яким кутом до площини α треба провести відрізок CD, щоб він був удвічі довший за свою проекцію на цю площину?

12.29. Гіпотенуза AB рівнобедреного прямокутного трикутника належить площині α, а точка C не належить цій площині. Чи може кут між прямою AC і площиною α дорівнювати:
1) 1°; 2) 5°; 3) 44°; 4) 45°; 5) 47°; 6) 60°?

12.30. Сторона BC рівностороннього трикутника ABC належить площині β, а точка A не належить цій площині. Чи може кут між прямою AB і площиною β дорівнювати:
1) 2°; 2) 17°; 3) 57°; 4) 60°; 5) 61°; 6) 88°?

12.31. З точки до площини проведено дві похилі. Одна з них, завдовжки 8 см, утворює з площиною кут 30°. Знайдіть довжину другої похилої, якщо вона утворює з площиною кут 60°.

12.32. З точки до площини проведено дві похилі. Одна з них утворює з площиною кут 45°, а друга – 30°. Проекція першої похилої на площину дорівнює $2\sqrt{2}$ см. Знайдіть довжину другої похилої.

12.33. Точка O – центр квадрата $ABCD$, OK – перпендикуляр до площини квадрата, $AB = 4$ см. Пряма AK нахилена до площини квадрата під кутом 60°. Знайдіть довжину відрізка AK.

12.34. AS – перпендикуляр до площини квадрата $ABCD$, $AB = 6$ см. Пряма SC нахилена до площини квадрата під кутом 30°. Знайдіть довжину відрізка SC.

12.35. $ABCD$ – паралелограм. Знайдіть кут, що утворює пряма BC із площиною γ, якщо пряма AD утворює із площиною γ кут φ.

12.36. $ABCD$ – ромб. Знайдіть кут, що утворює пряма AB із площиною α, якщо пряма CD утворює з площиною α кут φ.

12.37. Кут ABC дорівнює 110°. Знайдіть кут між прямою AB і площиною BKL, якщо пряма BL перпендикулярна до цієї площини.

12.38. Пряма a перпендикулярна до площини α, а пряма b перетинає α. Кут між прямими a і b дорівнює 50°. Знайдіть кут, що утворює пряма b із площиною α.

12.39. Пряма CK перпендикулярна до площини трикутника ABC, $BC = CM = a$, $CA = a\sqrt{3}$. Який кут із площиною ABC утворює пряма: 1) MB; 2) MA?

12.40. Пряма AM перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$, $AM = 3$ см, $AB = 3$ см, $AD = \sqrt{3}$ см. Який кут із площиною прямокутника утворює пряма:
1) MD; 2) MB?

12.41. У прямокутнику $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 8$ см. Через вершину A проведено перпендикуляр AM до площини прямокутника. Кут між площинами ABC і MBC дорівнює $60°$. Знайдіть площу трикутника MBC.

12.42. Через вершину C квадрата $ABCD$ проведено перпендикуляр CK завдовжки 6 см до його площини. Площини ABC і KBA утворюють між собою кут $45°$. Знайдіть площу трикутника AKB.

12.43. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, K – середина ребра B_1C_1, L – середина ребра C_1D_1. Знайдіть кут, що утворюють між собою:
1) пряма AB_1 і площина ABC;
2) пряма KL і площина DD_1C_1;
3) пряма KL і площина BDD_1;
4) площини A_1D_1C і B_1C_1A;
5) площини ABD_1 і ABC;
6) площини A_1BA і D_1CD;
7) площини KLC_1 і DD_1C;
8) площини A_1BD і B_1D_1C.

12.44. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, M – середина ребра CC_1, N – середина ребра C_1D_1. Знайдіть кут, що утворюють між собою:
1) пряма AC і площина AA_1B;
2) пряма MN і площина ABC;
3) пряма MN і площина D_1CB;
4) площини ACC_1 і BDD_1;
5) площини DCA_1 і ABD;
6) площини C_1MN і ABB_1;
7) площини ABC і C_1D_1C;
8) площини ACB_1 і A_1C_1D.

3 **12.45.** Дано прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, AM – перпендикуляр до площини прямокутника. Пряма MC нахилена до площини прямокутника під кутом $30°$. Знайдіть:
1) довжину перпендикуляра MA;
2) тангенс кута нахилу прямої MB до площини прямокутника;
3) тангенс кута, який утворює площина MDC з площиною прямокутника.

12.46. У рівнобедреному трикутнику ABC $AB = AC = 10$ см, $BC = 12$ см, AM – перпендикуляр до площини трикутника. Площина MBC утворює із площиною трикутника кут 45°. Знайдіть:

1) довжину перпендикуляра AM;

2) тангенс кута нахилу прямої MC до площини трикутника;

3) площу трикутника MBC.

12.47. (*Усно.*) До скількох ребер куба перпендикулярна пряма DC_1 (мал. 12.14)?

12.48. Через гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC проведено площину α. Відстань від точки C до площини α дорівнює 6 см. Який кут утворює пряма BC із площиною α, якщо $AB = 14$ см, $AC = 5$ см?

12.49. Через гіпотенузу AB прямокутного трикутника ABC проведено площину β. Катет AC утворює із площиною β кут 60°. Знайдіть відстань від точки C до площини β, якщо $AB = 10$ см, $BC = 8$ см.

12.50. Ортогональною проекцією ромба зі стороною 5 см і діагоналлю 8 см є паралелограм. Кут між площинами ромба і паралелограма дорівнює 45°. Знайдіть площу паралелограма.

12.51. Ортогональною проекцією паралелограма є ромб, сторона якого дорівнює 13 см, а одна з діагоналей – 10 см. Знайдіть площу паралелограма, якщо кут між площинами паралелограма і ромба дорівнює 30°.

12.52. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка M – середина B_1C_1, точка L – середина D_1C_1, точка O – точка перетину діагоналей. Знайдіть кут між прямими:

1) A_1M і CC_1; 2) DC_1 і A_1D; 3) BD і A_1C_1;
4) ML і AC; 5) A_1C і AC; 6) A_1C і BB_1;
7) A_1D і AC; 8) A_1M і BC; 9) C_1O і AB_1;
10) B_1D і A_1B.

12.53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Прямі AC і BD перетинаються в точці O. Знайдіть кут між прямими:

1) AD_1 і A_1C_1; 2) AB і DC_1; 3) OD_1 і AD_1;
4) AA_1 і OD_1; 5) A_1B і AC; 6) A_1B і DC_1.

12.54. До площини прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено перпендикуляр BL. На похилих LA і LC позначено відповідно точки F і K так, що $FK \parallel AC$. Визначте вид трикутника BKF відносно кутів.

12.55. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка E – середина AB, точка F – середина AD. Проведіть перпендикуляр з точки A_1 на прямі:

1) AD_1; 2) BD; 3) EF; 4) C_1D.

12.56. Точка K – середина ребра QB тетраедра $QABC$. Усі ребра тетраедра дорівнюють a. Знайдіть довжини перпендикулярів, проведених з точки K до прямих:

1) QA; 2) AC.

12.57. $QABC$ – тетраедр, усі ребра якого рівні між собою. Точка L – середина ребра QB, точка M – середина BC. Проведіть перпендикуляри з точки L до прямих:

1) QC; 2) AC; 3) AM.

12.58. У тетраедрі $QABC$ усі ребра рівні між собою. Точка K – середина AC, L – середина BQ. Доведіть, що:

1) $AC \perp (QKB)$; 2) $AC \perp QB$;
3) KL – спільний перпендикуляр до прямих AC і QB.

12.59. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Доведіть, що:

1) $AC_1 \perp BD$; 2) $AC_1 \perp DA_1$.

12.60. Основа AD трапеції $ABCD$ є діаметром кола, описаного навколо цієї трапеції, а її діагоналі перетинаються в точці K. Пряма KL перпендикулярна до прямих KD і BC. Доведіть, що $LC \perp CD$.

12.61. Через сторону рівностороннього трикутника проведено площину, яка утворює із площиною трикутника кут $60°$. Знайдіть кути, які утворюють дві інші сторони трикутника із цією площиною.

12.62. Через гіпотенузу рівнобедреного прямокутного трикутника проведено площину, яка утворює із площиною трикутника кут $30°$. Знайдіть кути, які утворюють катети трикутника із цією площиною.

12.63. У ромбі $ABCD$ $AB = 8$ см, $\angle BAD = 45°$. З вершини B до площини ромба проведено перпендикуляр BK. Площина AKD утворює із площиною ромба кут $60°$. Знайдіть:

1) відстань від точки K до площини ромба;
2) площу трикутника AKD.

12.64. У паралелограмі $ABCD$ $AB = 6$ см, $AD = 8$ см, $\angle BAP = 30°$. З вершини B до площини паралелограма проведено перпендикуляр BM. Площина MAD утворює із площиною паралелограма кут $45°$. Знайдіть:

1) відстань від точки M до площини паралелограма;
2) площу трикутника AMD.

12.65. Пряма DN перпендикулярна до площини квадрата $ABCD$, $DN = AD$. Точка O – точка перетину діагоналей квадрата, K – середина сторони CD. Знайдіть кут між:

1) прямою NA і площиною ABC;
2) прямою NB і площиною ABC;
3) прямою NO і площиною ABC;
4) прямою AC і площиною NDC;
5) прямою AD і площиною NDC;
6) прямою AB і площиною NDC;
7) прямою OK і площиною NDC;
8) прямою ON і площиною NDC.

12.66. Пряма BN перпендикулярна до площини правильного трикутника ABC, $BN = AB$, точка M – середина AC. Знайдіть кут між:

1) прямою NA і площиною ABC;
2) прямою NM і площиною ABC;
3) прямою AC і площиною NBM;
4) прямою AB і площиною NBM;
5) прямою AC і площиною NBA;
6) прямою BM і площиною NBA;
7) прямою AK і площиною NBM;
8) прямою BN і площиною ACN.

12.67. Точка O – центр правильного трикутника ABC, $OM \perp (ABC)$, $MA = AB$, K – середина BC, F – точка перетину медіан трикутника MBC. Знайдіть кут між:

1) прямою BC і площиною MBK;
2) прямою AC і площиною AMK;
3) прямою OC і площиною AMK;
4) прямою MC і площиною AMK;
5) прямою FB і площиною AMK;
6) прямою AF і площиною AMK;
7) прямою MA і площиною ABC;
8) прямою MK і площиною ABC.

12.68. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка M – середина BC, точка L – середина DC, точка K – середина DC. Знайдіть кут між:

1) прямою AC і площиною MLK;
2) прямою AM і площиною ABC;
3) прямою AK і площиною MLK;
4) прямою AC_1 і площиною BCC_1;
5) прямою C_1D і площиною ACC_1;
6) прямою B_1D і площиною ACC_1.

12.69. Через центр O правильного трикутника ABC проведено до його площини перпендикуляр OL. Кут між прямою LB і площиною ABC дорівнює 45°. Знайдіть кут між площинами: 1) LOB і AOB; 2) ABC і ACL.

12.70. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть кут між площинами:
1) BDC_1 і ABC; 2) ABC_1 і BDC_1.

12.71. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка M – середина C_1D_1. Знайдіть кут між площинами:
1) ACB_1 і ACD; 2) A_1BD і C_1BD;
3) A_1C_1B і ACD_1; 4) AA_1M і B_1C_1C.

4 **12.72.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка E – середина ребра CC_1, точка L – середина ребра B_1C_1, точка N – середина ребра C_1D_1, точка T – середина ребра DD_1, точка K – точка перетину діагоналей грані ABB_1A_1. Знайдіть кут між прямими:
1) A_1B і B_1E; 2) B_1N і KT;
3) TN і AC; 4) KD_1 і LN.

12.73. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка M – середина ребра B_1C_1, точка K – середина ребра CD, точка O – точка перетину діагоналей квадрата $ABCD$. Знайдіть кут між прямими:
1) A_1M і BK; 2) AB_1 і C_1O.

12.74. Два рівнобедрених трикутники мають спільну основу завдовжки 10 см. Кут між площинами трикутників дорівнює 60°, а їх площі – 25 см^2 і 40 см^2. Знайдіть відстань між вершинами трикутників. Скільки розв’язків має задача?

12.75. Два рівнобедрених трикутники, кут між площинами яких дорівнює 60°, мають спільну основу завдовжки 20 см. Площа одного з трикутників дорівнює 30 см^2, а висота другого, яка проведена до основи, дорівнює 5 см. Знайдіть відстань між вершинами трикутників. Скільки розв’язків має задача?

12.76. Трикутник $A_1B_1C_1$ є ортогональною проекцією трикутника ABC зі сторонами 36 см, 34 см і 14 см. Знайдіть кут між площинами трикутників, якщо трикутник $A_1B_1C_1$ – прямокутний з катетами 12 см і 28 см.

12.77. Прямокутний трикутник $K_1L_1M_1$ з катетами 3 см і 8 см є ортогональною проекцією трикутника KLM зі сторонами 4 см, 13 см і 15 см. Знайдіть кут між площинами трикутників.

12.78. Через сторону AB рівностороннього трикутника ABC проведено площину α. Проекції сторін BC і AC на цю площину взаємно перпендикулярні. Які кути утворюють прямі BC і AC із площиною α?

12.79. Пряма утворює зі сторонами прямого кута кути по 60°. Знайдіть міру кута, який утворює ця пряма з площиною прямого кута.

12.80. Похила AB утворює з площиною γ кут 45°. Через основу похилої – точку A, у площині γ проведено пряму AC під кутом 45° до проекції похилої на площину. Знайдіть кут, що утворюють прямі AC і AB.

12.81. Катет BC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC належить площині β, а катет AC утворює з площиною β кут 45°. Який кут із площиною β утворює гіпотенуза цього прямокутного трикутника?

12.82. Катет AC рівнобедреного прямокутного трикутника ABC належить площині α, $AB = 6$ см. Вершина B знаходиться на відстані 3 см від площини α. Знайдіть кут, що утворює із площиною α пряма:
1) BC; 2) AB;
3) що містить медіану CM трикутника ABC;
4) що містить медіану BK трикутника ABC;
5) що містить медіану AL трикутника ABC.

12.83. $ABCD$ – прямокутник, $BL \perp (ABC)$, $BL = AD = 1$, $AB = \sqrt{2}$. Знайдіть кут між прямими: 1) DL і AB; 2) CL і AD.

12.84. ABC – правильний трикутник, точка O – його центр, $OM \perp ABC$, $MA = AB$, AK – медіана трикутника ABC, точка F – точка перетину медіан трикутника MBC. Знайдіть кут між:
1) прямою OM і площиною MBC;
2) площиною MBC і прямою AK;
3) прямою MB і площиною ACF;
4) площиною ACF і прямою BC.

12.85. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка M – середина B_1C_1, L – середина D_1C_1. Знайдіть кут між:
1) прямою AA_1 і площиною AML;
2) площиною AML і прямою BB_1.

12.86. ABC – правильний трикутник, точка O – його центр, $OL \perp (ABC)$. Через сторону AB проведено переріз піраміди, що перетинає ребро LC у точці K. Площина цього перерізу перпендикулярна до ребра CL і утворює із площиною ABC кут 30°. Знайдіть площу перерізу, якщо $AB = 4$ см.

12.87. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка N – середина ребра D_1C_1. Знайдіть кут між площинами NA_1D і CA_1D.

12.88. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точки E, F і K – середини відповідно ребер AA_1, AB і CC_1. Знайдіть кут між площинами DEF і A_1D_1K.

12.89. Площини правильних трикутників ABC і ABK взаємно перпендикулярні. Знайдіть кут між площинами ACK і BCK.

12.90. Кінці відрізка CD, довжина якого дорівнює $4\sqrt{2}$ см, належать двом взаємно перпендикулярним площинам α і β. Кути, які утворює пряма CD із площинами α і β, дорівнюють відповідно $30°$ і $45°$. Знайдіть:
1) відстані від кінців відрізка CD до лінії перетину площин α і β;
2) довжини проекцій відрізка CD на площини α і β.

12.91. Площини α і β взаємно перпендикулярні. Пряма AB перетинає площини α і β відповідно в точках A і B, утворюючи з кожною з них кути, що дорівнюють $30°$. Знайдіть довжину відрізка, кінцями якого є проекції точок A і B на лінію перетину площин α і β, якщо $AB = 8$ см.

12.92. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ дорівнює 12 см. Через середини ребер BC і BA проведено переріз, який перетинає ребра AA_1, CC_1 і DD_1 та утворює з кожним з них кут $60°$. Знайдіть площу перерізу.

12.93. $ABCDA_1B_1C_1D_1$– куб. Площина α перпендикулярна до прямої BD, а площина β паралельна прямій A_1D. Якого найменшого значення може досягати значення кута φ між цими площинами?

12.94. $ABCD$ – ромб, гострий кут якого дорівнює $60°$, $AK \perp (ABC)$, $AK = AB$. Знайдіть кут між площинами:
1) AKB і AKD;
2) CDK і ABC;
3) ADK і BCK;
4) CDK і BCK.
Скільки випадків слід розглянути для кожної пари площин?

12.95. Трикутник – ABC прямокутний із прямим кутом B, а трикутник ABC – прямокутний із прямим кутом A. $AB = 5$ см, $AK = 3$ см, $BC = \sqrt{2}$ см. Площини трикутників ABC і ABK утворюють кут $45°$. Знайдіть:
1) CK;
2) кут між прямою CK і площиною ABC.

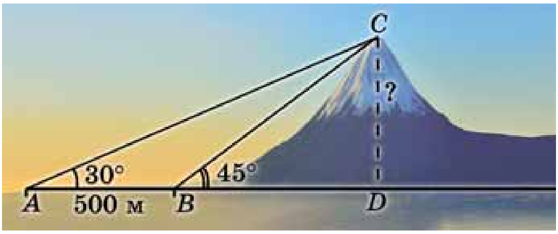
12.96. З точок A і B до площини α проведено відповідно перпендикуляри AA_1 і BB_1 та похилі AM і BN, кожна з яких перпендикулярна до прямої A_1B_1. Знайдіть відстань між прямими AM і BN, якщо $A_1M = 1$, $B_1N = 7$, $MN = 10$. Скільки випадків слід розглянути?

12.97. AC – перпендикуляр до площини BCD. Проекція похилої AB на цю площину перпендикулярна до площини ACD. Знайдіть відстань між прямими AB і CD, якщо $AC = 4$ см, $BC = 3$ см.

12.98. До площини трикутника ABC по одну сторону від неї проведено перпендикуляри AN і BM, $AB = BC = CA = AN = a$, $BM = 2a$. Знайдіть кут між площинами ABC і CMN.

12.99. Точка N віддалена від кожної з вершин правильного трикутника на відстань $3\sqrt{7}$ см, а від кожної із сторін – на відстань 6 см. Знайдіть кут між площинами BCN і ABC.

12.100. З деякою точки вершину гори видно під кутом 30°. Коли спостерігачі наблизилися до гори на 500 м, вершину стало видно під кутом 45° (мал. 12.15). Знайдіть наближену висоту гори (з точністю до десятих метра).



Мал. 12.15

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

12.101. Серед точок $A(-2; 0)$, $B(1; -1)$, $C(0; 4)$, $D(14; 0)$, $M(-4; -4)$, $N(0; -7)$ виберіть ті, що належать:

1) осі абсцис;
2) осі ординат;
3) додатній півосі x;
4) від'ємній півосі x;
5) додатній півосі y;
6) від'ємній півосі y.

12.102. Знайдіть відстань від кожної з точок $M(-2; 3)$, $N(-5; -1)$, $T(7; 11)$, $L(4; 0)$ до осей координат.

12.103. Знайдіть AB, якщо:

1) $A(-2; 7)$, $B(2; 4)$;
2) $A(-1; 1)$, $B(2; 3)$.

12.104. Знайдіть координати точки M – середини відрізка AB, якщо $A(-2; 4)$, $B(8; 16)$.

12.105. Один з кутів трикутника, що не є рівностороннім, дорівнює 60°. Чи можуть довжини сторін трикутника утворювати арифметичну прогресію?

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 12

1. У трикутнику ABC $\angle A = 52°$, $\angle B = 48°$. З вершин кутів A і C проведено бісектриси трикутника, які перетинаються в точці O. Знайдіть градусну міру кута AOC.

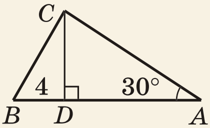
А	Б	В	Г	Д
100°	66°	90°	114°	132°

2. Укажіть вектор, колінеарний вектору $\vec{p}(-2; 3)$.

А	Б	В	Г	Д
$\vec{a}(-1;\ 6)$	$\vec{b}(4;\ -6)$	$\vec{c}(8;\ 12)$	$\vec{d}(-0{,}2;\ -0{,}3)$	$\vec{m}(0;\ 4)$

3. $\triangle ABC$ – прямокутний, CD – висота, $\angle A = 30°$, $BD = 4$ см. Знайдіть довжину гіпотенузи AB.

А	Б	В	Г	Д
8 см	$8\sqrt{3}$ см	12 см	$12\sqrt{3}$ см	16 см



4. Сторони трикутника, одна з яких утричі більша за другу, утворюють кут 120°, а довжина третьої сторони дорівнює $2\sqrt{13}$ см. Знайдіть найменшу сторону трикутника.

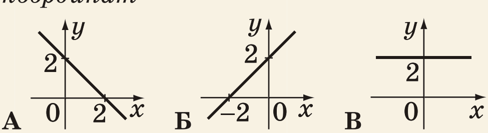
А	Б	В	Г	Д
1 см	2 см	3 см	4 см	6 см

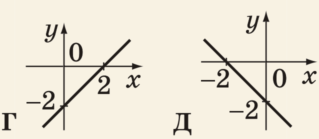
5. Установіть відповідність між рівнянням прямої (1–4) та її зображенням у декартовій системі координат (А–Д).

Рівняння прямої

1 $x - y - 2 = 0$
2 $x + y + 2 = 0$
3 $x - y + 2 = 0$
4 $x + y - 2 = 0$

Зображення у декартовій системі координат





	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. З точки до площини проведено дві похилі, одна з яких на 5 см більша за іншу. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо проекції похилих дорівнюють 16 см і 9 см.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 5

Кожне завдання має чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

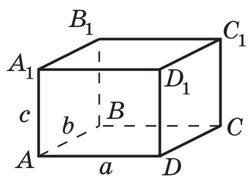
1

1. Лінійний кут двогранного кута дорівнює шостій частині розгорнутого кута. Чому дорівнює двогранний кут?

А. 30° **Б.** 15° **В.** 60° **Г.** 45°

2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AD = a$, $AB = b$, $AA_1 = c$ (мал. 12.16). Чому дорівнює відстань між площинами ABB_1 і DDC_1?

А. $a + b + c$ **Б.** b **В.** c **Г.** a



Мал. 12.16

3. Похила завдовжки 10 см утворює з площиною кут 45°. Знайдіть проекцію похилої.

А. $10\sqrt{2}$ см **Б.** $5\sqrt{2}$ см **В.** 5 см **Г.** $5\sqrt{3}$ см

2

4. Двогранний кут дорівнює 60°. На одній з його граней дано точку, яка знаходиться на відстані $4\sqrt{3}$ см від другої грані. Знайдіть відстань від даної точки до ребра двогранного кута.

А. $8\sqrt{3}$ см **Б.** 16 см **В.** 8 см **Г.** 12 см

5. Точка M – середина відрізка AB, який не перетинає площину α. Точка A знаходиться на відстані 10 см від площини α, а точка M – на відстані 7 см від площини α. На якій відстані від площини α знаходиться точка B?

А. 8,5 см **Б.** 4 см **В.** 5 см **Г.** 6 см

6. Пряма CK перпендикулярна до прямих CD і CB, що містять сторони паралелограма $ABCD$. Знайдіть кут між прямими CK і BD.

А. 0° **Б.** 30° **В.** 45° **Г.** 90°

3

7. З точок A і B, які лежать відповідно у двох перпендикулярних площинах α і β, проведено перпендикуляри AC і BD до прямої перетину площин. Знайдіть CD, якщо $AC = 2$ см, $BD = 6$ см, $AB = 7$см.

А. 2 см **Б.** 3 см **В.** 4 см **Г.** 5 см

8. Точка M віддалена від кожної з прямих, що містять сторони квадрата, на 13 см. Площа квадрата дорівнює 100 см^2. Знайдіть відстань від точки M до площини квадрата.

А. $\sqrt{69}$ см **Б.** 10 см **В.** 8 см **Г.** 12 см

9. Дано прямокутник $ABCD$, $AD = 3$ см, $AB = 4$ см, $DK \perp (ABC)$. Пряма KB утворює з площиною ABC кут 45°. Знайдіть тангенс кута нахилу прямої KC до площини прямокутника.

А. 1 **Б.** 0,8 **В.** 1,25 **Г.** 0,6

4

10. Точки M і N лежать на одній із граней двогранного кута і віддалені на 4 см і 5 см відповідно від другої грані. Знайдіть міру двогранного кута, якщо відстань від точки M до ребра двогранного кута на 2 см менша, ніж відстань від точки N до ребра двогранного кута.

А. 30° **Б.** 45° **В.** 60° **Г.** 90°

11. Кінці двох відрізків, довжини яких дорівнюють 13 см і 20 см, належать двом паралельним площинам, а сума проекцій цих відрізків на одну з площин дорівнює 21 см. Знайдіть відстань між площинами.

А. 8 см **Б.** 10 см **В.** 11 см **Г.** 12 см

12. Два рівнобедрених трикутники мають спільну основу завдовжки 10 см. Кут між площинами трикутників дорівнює 60°, а їх площі – 15 см^2 і 25 см^2. Знайдіть відстань між вершинами трикутників.

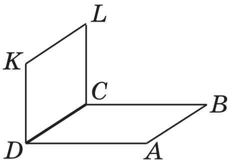
А. 7 см **Б.** $\sqrt{19}$ см **В.** 7 см або $\sqrt{19}$ см **Г.** 8 см

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 10–12

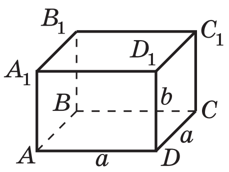
1

1. Площини прямокутників $ABCD$ і $CDKL$ перпендикулярні (мал. 12.17). Яке взаємне розміщення:

1) прямої DK і площини BCD;
2) прямої AB і площини CDK?



Мал. 12.17

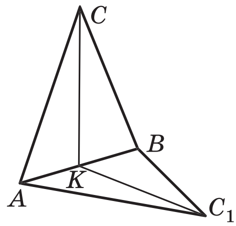


Мал. 12.18

2. На малюнку 12.18 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого $AD = DC = a$, $CC_1 = b$. Знайдіть відстань:

1) від прямої AA_1 до площини DCC_1;
2) між площинами ABC і $A_1B_1C_1$.

3. Похила утворює з площиною кут 60°. Знайдіть довжину похилої, якщо її проекція на площину дорівнює 4 см.



Мал. 12.19

2 **4.** Площини рівних рівнобедрених трикутників ABC і ABC_1 перпендикулярні (мал. 12.19). CK – медіана, проведена до основи трикутника ABC, – дорівнює $5\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань між точками C і C_1.

5. Кінці відрізка CD, що не перетинає площину γ, віддалені від неї на 8 см і 14 см. На якій відстані від площини знаходиться середина відрізка CD?

6. Пряма BM перпендикулярна до прямих BA і BC, що містять сторони ромба $ABCD$. Знайдіть кут між прямими BM і AD.

3 **7.** Точка віддалена від кожної з прямих, що містять сторони квадрата, на 10 см, а від площини квадрата – на 6 см. Знайдіть площу квадрата.

8. З точок C і D, які лежать відповідно у двох перпендикулярних площинах α і β, проведено перпендикуляри CM і DN до прямої перетину площин. Знайдіть CD, якщо $CM = 4$ см, $ND = 6$ см, $MN = 12$ см.

4 **9.** Два рівнобедрених трикутники мають спільну основу завдовжки 6 см. Кут між площинами трикутників дорівнює 60°, а площі трикутників – 24 см² і 45 см². Знайдіть відстань між вершинами трикутників. Скільки розв'язків має задача?

Додаткові завдання

3 **10.** $ABCD$ – прямокутник, $AD = 6$ см, $DC = 2\sqrt{3}$ см, $AM \perp (ABC)$. Пряма MC утворює з площиною ABC кут 30°. Знайдіть тангенс кута нахилу прямої MD до площини ABC.

4 **11.** Кінці двох відрізків, довжини яких дорівнюють 17 см і 10 см, належать двом паралельним площинам, а різниця проекцій цих відрізків на одну із площин дорівнює 9 см. Знайдіть відстань між площинами.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 3

До § 8

1

1. Пряма a перпендикулярна до площини α і перетинає цю площину в точці M. Скільки прямих, перпендикулярних до прямої a, можна провести через точку M?

2. Пряма проходить через точку кола перпендикулярно до радіуса, проведеного в цю точку. Чи можна зробити висновок, що пряма є дотичною до кола?

3. Одна з двох даних прямих перпендикулярна до деякої площини, а друга – ні. Чи можуть прямі бути паралельними?

4. Чи може площина бути перпендикулярною лише до однієї з двох даних паралельних прямих і не бути перпендикулярною до іншої?

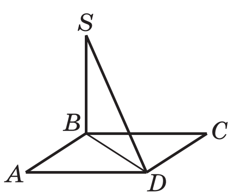
2

5. Чи правильне твердження:
1) якщо пряма не перпендикулярна до площини, то вона не перпендикулярна до жодної прямої цієї площини;
2) пряма, перпендикулярна до деякої прямої площини, перпендикулярна і до самої площини;
3) якщо пряма перпендикулярна до площини, то в цій площині існує безліч прямих, перпендикулярних до даної?

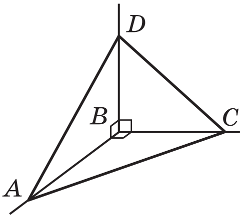
6. Пряма перпендикулярна до двох радіусів круга. Чи можна стверджувати, що пряма перпендикулярна до площини круга?

7. Пряма BS перпендикулярна до площини прямокутника $ABCD$ (мал. 12.20), $AB = 5$ см, $AD = 12$ см, $SD = \sqrt{218}$ см. Знайдіть SB.

8. Пряма SB перпендикулярна до площини ромба $ABCD$ (мал. 12.20), $AB = 6$ см, $\angle BAD = 60°$, $SB = 8$ см. Знайдіть SD.



Мал. 12.20



Мал. 12.21

9. Прямі BA, BC і BD попарно перпендикулярні (мал. 12.21). Знайдіть DC, якщо $AB = 12$ см, $AC = 15$ см, $AD = 20$ см.

3 **10.** Площина α містить сторону AB чотирикутника $ABCD$, причому $BC \perp \alpha$, $AD \perp \alpha$ і $BC = AD$. Доведіть, що $ABCD$ – прямокутник.

11. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, $AB = 12$ см, точка N – середина AB. Пряма CP перпендикулярна до площини трикутника, $CP = 8$ см. Знайдіть PN.

12. $ABCD$ – квадрат, сторона якого дорівнює $a\sqrt{2}$ см, точка O – точка перетину його діагоналей. OE – перпендикуляр до площини квадрата, $OE = a\sqrt{3}$. Знайдіть відстані від точки E до вершин квадрата.

13. Пряма AB перпендикулярна до площини α. K – довільна точка площини α, точка C – точка перетину прямої AB і площини α, $BC = CA$. Визначте вид трикутника ABK.

14. Точка S знаходиться поза площиною прямокутника $ABCD$ і рівновіддалена від його вершин. Пряма SO перпендикулярна до площини прямокутника, точка O – точка перетину прямої SO і площини прямокутника.

1) Доведіть, що точка O – точка перетину діагоналей прямокутника.

2) Знайдіть площу прямокутника $ABCD$, якщо $SA = 13$ см, $SO = 12$ см, $CD = 6$ см.

15. Пряма AP перпендикулярна до площини ромба $ABCD$. Знайдіть PC, якщо $AB = a$ см, $\angle ABC = 120°$, $PB = b$ см, $b > a$.

16. Відрізок AB не перетинає площину γ. Прямі AC і BD перпендикулярні до цієї площини і перетинають її в точках C і D. $CD = 6$ см, $AC = 12$ см, $BD = 4$ см. Пряма AB перетинає площину γ у точці E. Знайдіть довжину відрізка CE.

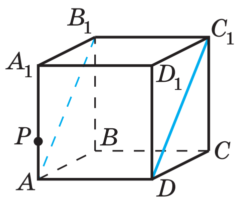
4 **17.** Через сторону BC трикутника ABC проведено площину α таку, що $AC \perp \alpha$. У площині α побудовано трикутник BCK такий, що $\angle KCB = 90°$. Знайдіть усі пари перпендикулярних прямих і площин.

18. Точка P належить ребру AA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (мал. 12.22). Проведіть у грані AA_1B_1B пряму PK, перпендикулярну до прямої AB_1.

19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 12.22).

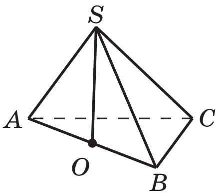
1) Визначте вид чотирикутника AB_1C_1D.

2) Знайдіть площу чотирикутника AB_1C_1D, якщо $AD = a$.



Мал. 12.22

20. На малюнку 12.23 пряма SO перпендикулярна до площини трикутника ABC, $SA = SB = SC$, $O \in AB$. Знайдіть:
1) $\angle ACB$;
2) площу $\triangle ABC$, якщо $AB = 17$ см, $BC = 8$ см.



Мал. 12.23

21. З точки O, яка належить висоті CD трикутника ABC, проведено перпендикуляр ON до його площини. Доведіть, що площина α, яка проходить через CD і ON, перпендикулярна до AB.

До § 9

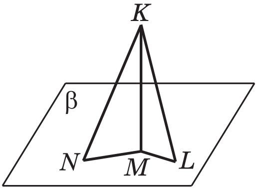
1 **22.** З точки до площини проведено похилу, довжина якої дорівнює 5 см. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо проекція похилої дорівнює 3 см.

23. Довжина перпендикуляра, проведеного з точки до площини, дорівнює 12 см. Із цієї самої точки до площини проведено похилу, довжина якої 13 см. Знайдіть проекцію похилої на площину.

24. З однієї точки до площини проведено дві рівні похилі. Проекція однієї з них на площину дорівнює 4 см. Знайдіть проекцію другої похилої на площину.

2 **25.** З точки до площини проведено похилу, довжина якої $3\sqrt{2}$ см. Знайдіть відстань від точки до площини, якщо вона дорівнює проекції похилої на площину.

26. З точки K до площини β проведено похилі KL і KN та перпендикуляр KM (мал. 12.24), $KN = 16$ см, $\angle KNM = 30°$. Знайдіть відстань від точки K до площини β та довжину похилої KL.



Мал. 12.24

27. З точки до площини проведено дві похилі, довжини яких 20 см і 13 см. Проекція першої з них на площину дорівнює 16 см. Знайдіть проекцію другої похилої на площину.

28. Трикутник ABC – прямокутний, $\angle C = 90°$, $AP \perp ABC$. Доведіть, що $\angle PCB = 90°$.

29. NA – перпендикуляр до площини трикутника ABC. На стороні BC обрано точку H таку, що $HN \perp BC$. Доведіть, що AH – висота $\triangle ABC$.

30. CT – перпендикуляр до площини рівнобедреного трикутника ABC, $AC = BC$. Побудуйте перпендикуляр, проведений з точки T до прямої AB.

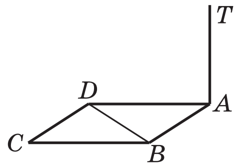
3 **31.** Точка K знаходиться на відстані 5 см від кожної вершини рівнобедреного трикутника ABC ($AB = BC$) і на відстані 3 см від його площини. Знайдіть сторони трикутника ABC, якщо $\angle ABC = 120°$.

32. З точки до площини проведено дві похилі, довжини яких 26 см і 30 см. Довжини проекцій відносяться як 5 : 9. Знайдіть довжини проекцій і відстань від точки до площини.

33. З точки P до площини проведено дві похилі, проекції яких дорівнюють по 4 см кожна. Кут між похилими дорівнює 60°, а між їх проекціями – 120°. Знайдіть довжини похилих і відстань від точки до площини.

34. SA – перпендикуляр до площини трикутника ABC, D – точка на стороні BC цього трикутника така, що $CD = DB$, $SD \perp BC$. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений.

35. На малюнку 12.25 до площини ромба $ABCD$ проведено перпендикуляр AT. Проведіть перпендикуляр з точки T до прямої BD.



Мал. 12.25

4 **36.** З точки A до площини α проведено дві рівні похилі AB і AC та перпендикуляр AK; $\angle BAC = 60°$, $\angle BKC = 90°$. Знайдіть довжини похилих, якщо відстань від точки A до площини α дорівнює a см.

37. З точки A, яка не лежить у площині α, проведено до цієї площини дві похилі, сума довжин яких 26 см. Знайдіть ці похилі, якщо одна з них на 1 см більша за свою проекцію, а інша – на 3 см більша за свою проекцію.

38. З точки M, що не належить площині α, до цієї площини проведено три похилі MA, MB і MC, кожна довжиною 2 дм, і перпендикуляр MO завдовжки 1 дм. Знайдіть відстань AB, якщо $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA$.

39. Через сторону AB ромба $ABCD$, площа якого дорівнює 96 см^2, а діагоналі відносяться як 3 : 4, проведено площину α. З вершини D до площини α проведено перпендикуляр DO завдовжки 8 см. Знайдіть проекцію сторони BC ромба на площину α.

40. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 18 см і 24 см, а її висота – 3 см. Точка M віддалена від кожної з вершин трапеції на 17 см. Знайдіть відстань від точки M до площини трапеції.

41. Точка M віддалена від кожної сторони правильного трикутника на 30 см. Площа круга, описаного навколо трикутника, дорівнює 2404π см^2. Знайдіть відстань від точки M до площини трикутника.

42. Точка K знаходиться на відстані $\sqrt{3}$ см від площини прямокутного трикутника з катетами 3 см і 4 см та рівновіддалена від його сторін. Знайдіть відстань від точки K до кожної сторони трикутника.

43. У трикутник ABC вписано коло із центром у точці O, що дотикається сторін AB, AC і BC відповідно в точках C_1, B_1 і A_1. Доведіть, що:
1) $MA_1 \perp BC$;
2) OC_1 – проекція похилої MC_1 на площину ABC;
3) MB_1 – проекція похилої OB_1 на площину ACM;
4) висота OH трикутника MOC_1 є відстанню від точки O до площини AMB.

44. До площини ромба $ABCD$ проведено перпендикуляр CK. Знайдіть відстань від точки K до прямих, що містять сторони ромба, якщо $CK = 3$ см, $AB = 2$ см, $\angle BCD = 60°$.

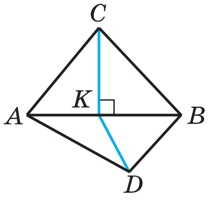
45. Точка L знаходиться на відстані 4 см від площини прямокутної трапеції з гострим кутом 60° і більшою бічною стороною, що дорівнює $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть відстань від точки L до сторін трапеції, якщо всі ці відстані рівні між собою.

До § 10

1

46. Лінійний кут двогранного кута дорівнює п'ятій частині розгорнутого кута. Чому дорівнює двогранний кут?

47. Рівносторонні трикутники ABC і ABD лежать у перпендикулярних площинах (мал. 12.26). CK і KD – висоти трикутників. Яке взаємне розміщення:
1) прямої CK і площини ABD;
2) прямої KD і площини ABC?



Мал. 12.26

2

48. Рівносторонні трикутники ABC і ABD лежать у перпендикулярних площинах (мал. 12.26). Знайдіть відстань CD, якщо $AB = 2$ см.

49. Двогранний кут дорівнює 30°. Точка A належить одній із граней цього кута і знаходиться на відстані 4 см від другої грані. Знайдіть відстань від точки A до ребра двогранного кута.

50. Точка M належить одній із граней двогранного кута. Відстань від точки M до ребра двогранного кута дорівнює 8 см, а до іншої грані – $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть міру двогранного кута.

51. Рівносторонні трикутники ABC і ABC_1 лежать у різних гранях двогранного кута з ребром AB, який дорівнює 60°. Знайдіть відстань між точками C і C_1, якщо висота трикутника ABC дорівнює 4 см.

3

52. Дві прямі перпендикулярні двом граням двогранного кута, рівного 120°. Знайдіть кут між прямими.

53. Точка B знаходиться на відстані $4\sqrt{2}$ см від лінії перетину перпендикулярних площин і на однаковій відстані від цих площин. Знайдіть цю відстань.

54. У трикутнику ABC $\angle C = 90°$, PB – перпендикуляр до площини трикутника ABC. Доведіть перпендикулярність площин PAC і PBC.

55. Два рівних трикутники ABC і BAD розташовані так, що їх площини перпендикулярні. $\angle BAD = \angle ABC = 90°$, $AD = BC = 3$ см, $AB = 4$ см. Знайдіть:

1) довжину відрізка CD; 2) косинус кута ADC.

4

56. Дві прямі, що перетинаються під кутом 50°, перпендикулярні до граней двогранного кута. Знайдіть міру двогранного кута. Скільки розв'язків має задача?

57. Квадрат $ABCD$ і рівносторонній трикутник CDM лежать у різних гранях двогранного кута з ребром CD. Знайдіть міру двогранного кута, якщо $CD = \sqrt{2}$ см, $MB = 1$ см.

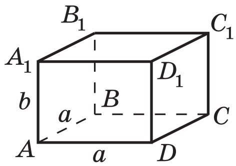
58. На гранях двогранного кута взято дві точки, віддалені від його ребра на 48 см і 60 см. Одна з них віддалена від другої грані на 50 см. Знайдіть відстань від другої точки до протилежної грані.

До § 11

1

59. На малюнку 12.27 зображено прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у якого основою є квадрат $ABCD$ зі стороною a, а $AA_1 = b$. Чому дорівнює відстань:

1) від точки B_1 до прямої C_1D_1;
2) від точки D_1 до прямої CD;
3) від точки D до площини ABB_1;
4) від точки C_1 до площини ABC;
5) від прямої DD_1 до площини AA_1B_1;
6) від прямої A_1D_1 до площини ABC;
7) між площинами ABB_1 і DCC_1;
8) між площинами $A_1B_1C_1$ і ADC?



Мал. 12.27

60. З точки P до площини α проведено перпендикуляр і похилу завдовжки 13 см. Знайдіть відстань від точки P до площини α, якщо проекція похилої дорівнює 12 см.

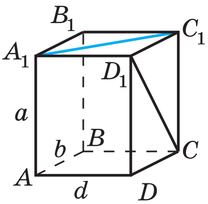
2 **61.** Катет AC прямокутного трикутника ABC належить площині α, а вершина B віддалена від площини α на 6 см. На якій відстані від площини α знаходиться центр кола, описаного навколо трикутника ABC?

62. Відрізок CD не перетинає площину γ. Точка C знаходиться на відстані 8 см від площини γ. На якій відстані від площини γ знаходиться точка D, якщо середина відрізка CD знаходиться на відстані 7 см від площини γ?

63. Через вершину B прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) проведено перпендикуляр BM завдовжки 8 см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AC, якщо $\angle BAC = 30°$, $AB = 12$ см.

64. У прямокутнику $ABCD$ зі сторонами $AB = 32$ см, $BC = 18$ см діагоналі перетинаються в точці O. OK – перпендикуляр до площини прямокутника, $OK = 12$ см. Знайдіть відстані від точки K до двох суміжних сторін прямокутника.

65. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 12.28), $AA_1 = a$, $AB = b$, $AD = d$. Чому дорівнює відстань:
1) між прямими AB і CC_1;
2) між прямими A_1C_1 і AD;
3) від точки A до прямокутника BB_1C_1C;
4) від точки B до трикутника DD_1C;
5) між трикутником D_1CC_1 і прямокутником ABB_1A_1;
6) між відрізком A_1C_1 і прямокутником $ABCD$?



Мал. 12.28

3 **66.** У прямокутному рівнобедреному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) гіпотенуза дорівнює 18 см. Через точку C до площини трикутника проведено перпендикуляр CM завдовжки 12 см. Знайдіть відстань від точки M до прямої AB.

67. Точка S віддалена від кожної з вершин квадрата на 10 см. Сторона квадрата дорівнює 8 см. Знайдіть відстань від точки S до площини квадрата.

68. Із центра Q кола, вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною 2 см, до площини трикутника проведено перпендикуляр QK завдовжки 1 см. Знайдіть відстань від точки K до прямих, що містять сторони трикутника.

69. З вершини меншого кута трикутника, сторони якого дорівнюють 16 см, 25 см і 39 см, до площини трикутника побудовано перпендикуляр, довжина якого 36 см. Знайдіть відстані від кінців перпендикуляра до прямої, що містить протилежну сторону трикутника.

70. Точка S віддалена на 29 см від усіх сторін рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 20 см, а кут при основі – 30°. Знайдіть відстань від цієї точки до площини трикутника.

71. Через точку O – центр кола, вписаного у прямокутний трикутник з катетами 5 см і 12 см, проведено пряму m, перпендикулярну до площини трикутника. Знайдіть відстань між прямою m і прямою, що містить гіпотенузу трикутника.

4 **72.** Точка P віддалена на 5 см від усіх прямих, що містять сторони ромба, гострий кут якого дорівнює 45°, а площа – $36\sqrt{2}$ см^2. Знайдіть відстань від точки P до площини ромба.

73. Точка Q віддалена на 11 см від усіх прямих, що містять сторони рівнобічної трапеції з основами 30 см і 16 см. Знайдіть відстань від точки Q до площини трапеції.

74. Кінці двох відрізків, довжини яких 13 см і 15 см, належать двом паралельним площинам. Знайдіть відстань між площинами, якщо сума проекцій відрізків на одну із площин дорівнює 14 см.

До § 12

1 **75.** З точки P під кутом 30° проведено похилу до площини α завдовжки 8 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, проведеного з точки P до площини α.

76. З точки K до площини β проведено дві рівні похилі KA і KB. Чи можна стверджувати, що похилі утворюють з площиною β рівні кути?

2 **77.** Дві площини перетинаються під кутом 45°. Точка B лежить в одній із площин і знаходиться на відстані $4\sqrt{2}$ см від другої площини. Знайдіть відстань від точки B до лінії перетину площин.

78. Перемалюйте таблицю в зошит і заповніть порожні графи.

Площа многокутника	Кут між площинами многокутника і його ортогональною проекцією	Площа проекції
20 см^2	60°	
	30°	$8\sqrt{3}$ см^2
40 см^2		$20\sqrt{2}$ см^2

79. Прямі a і b паралельні площині γ. Чи можуть прямі a і b бути: 1) паралельними; 2) перпендикулярними?

80. Пряма BL перпендикулярна до прямих BA і BC, що містять сторони ромба $ABCD$. Знайдіть кут між прямими BL і CD.

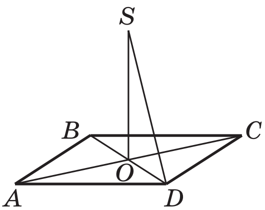
81. З точки до площини проведено дві похилі. Одна з них завдовжки $8\sqrt{2}$ і утворює з площиною кут 45°. Знайдіть проекцію другої похилої на площину, якщо похила утворює з площиною кут 60°.

82. Площини трикутників ABC і MBC утворюють кут 60°, $AM \perp (BCM)$. Знайдіть відношення площі трикутника ABC до площі трикутника MBC.

83. Квадрат $ABCD$ перегнули по його діагоналі BD так, що утворився гострий двогранний кут α. Знайдіть відношення площі ортогональної проекції трикутника ABD на площину BDC до площі трикутника BCD.

3

84. На малюнку 12.29 $ABCD$ – ромб, пряма OS перпендикулярна до його площини. Доведіть, що прямі SD і AC перпендикулярні.



Мал. 12.29

85. У ромбі $ABCD$ $AB = 10$ см, $AC = 16$ см (мал. 12.29), точка O – точка перетину діагоналей, $SO \perp (ABC)$. Який кут утворює пряма SD з площиною ромба, якщо $SO = 6\sqrt{3}$ см?

86. Площа чотирикутника дорівнює 240 см². Його ортогональною проекцією є прямокутник, діагональ якого дорівнює 17 см, а одна зі сторін – 15 см. Знайдіть кут між площинами чотирикутника і прямокутника.

87. Один з кутів рівнобедреного прямокутного трикутника лежить у площині α, а інший – нахилений до цієї площини під кутом 45°. Знайдіть кут, що утворює пряма, яка містить гіпотенузу трикутника, з площиною α.

88. Через сторону AB ромба $ABCD$ проведено площину α, що утворює кут 60° із площиною ромба; висота ромба дорівнює 10 см. Знайдіть відстань від прямої, що містить сторону DC ромба, до площини α.

4

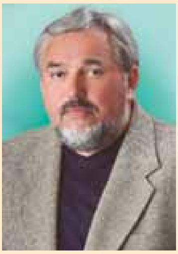
89. Ортогональною проекцією трикутника ABC зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см є трикутник $A_1B_1C_1$ зі сторонами 5 см, 5 см і 8 см. Знайдіть кут між площинами трикутників.

90. Трикутник ABC – прямокутний ($\angle C = 90°$), $\angle A = 30°$, CM – медіана трикутника, $CM = 15$ см. Точка K знаходиться на відстані 25 см від кожної вершини трикутника. Знайдіть кут, який утворюють площини CBK і CAB.

91. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка M – середина ребра C_1D_1. Знайдіть кут між площинами AA_1M і BDD_1.

Українці у світі

*Серед тих імен, які навіки закарбуються в історії математичного олімпіадного руху, буде й ім'я **В'ячеслава Ясінського**.*



(1957–2015)

Народився В'ячеслав Андрійович у 1957 році в с. Чернівці Могилів-Подільського району Вінницької області. Навчаючись у Чернівецькій середній школі №1, неодноразово брав участь у математичних олімпіадах, а у 1974 році став переможцем Республіканської математичної олімпіади школярів (тодішній аналог 4-го етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків). Вищу освіту здобув у Вінницькому державному педагогічному інституті.

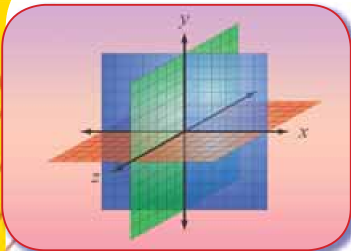
Саме завдяки В.А. Ясінському на сторінках журналу «Математика в школе», що виходив друком у Москві, прославилось м. Вінниця, адже журнал постійно проводив конкурси із розв'язування задач і В'ячеслав Андрійович майже завжди ставав їх переможцем. Працюючи на педагогічній ниві і як шкільний учитель, і як викладач вишу, В.А. Ясінський став одним з учасників творення нового явища – олімпіадної математики. Його книга «Задачі міжнародних олімпіад із математики та методи їх розв'язування» здобула визнання не тільки в Україні, а й в Європі, зокрема, її було перевидано у Польщі, де польські колеги з величезною цікавістю сприйняли зміст цієї праці.

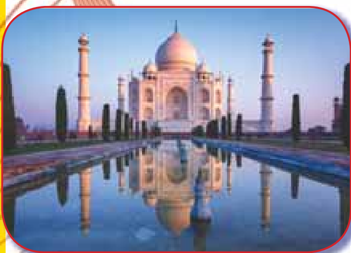
В.А. Ясінський багато зробив для підтримки і розвитку олімпіадного руху та інших математичних змагань в Україні та світі. У 1991 році він став членом журі Всеукраїнської олімпіади юних математиків. Також очолював журі та оргкомітет Математичного Турніру Міст, що проходив у Вінниці. Цей турнір, що по суті є математичною олімпіадою, проводився щорічно з 1980 року, а участь в ньому брали більше 100 міст з 25 держав Європи, Азії, Південної і Північної Америки, Австралії. Також В.А. Ясінський був членом методичної комісії Міжнародної олімпіади з геометрії, що створювала базу авторських олімпіадних задач з геометрії. Він і сам протягом багатьох років складав задачі для Міжнародної математичної олімпіади, за що у липні 2005 року на 46-й Міжнародній математичній олімпіаді його було нагороджено відповідним сертифікатом.

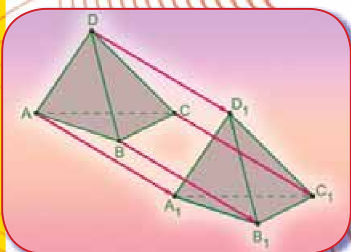
Саме на таких постатях тримається і розвивається рух математичних змагань в Україні та у світі. Пам'ятатимемо...

РОЗДІЛ 4

КООРДИНАТИ, ВЕКТОРИ, ГЕОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ У ПРОСТОРІ







У ЦЬОМУ РОЗДІЛІ МИ:

- ***пригадаємо*** поняття вектора і його модуля, дії над векторами; переміщення фігур;
- ***ознайомимося*** з прямокутною системою координат, координатами вектора у просторі, рівняннями площини і сфери; симетрією і паралельним перенесенням у просторі;
- ***навчимося*** у просторі знаходити відстань між точками, координати середини відрізка, кут між векторами; додавати і віднімати вектори, множити вектор на число, знаходити скалярний добуток векторів; зображувати фігури, симетричні даним.

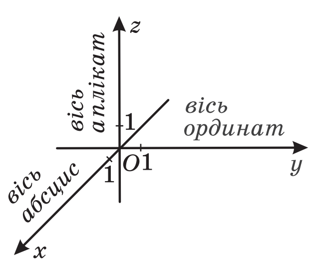
§ 13. ПРЯМОКУТНІ КООРДИНАТИ У ПРОСТОРІ

З прямокутною системою координат на площині ви вже ознайомилися в курсі геометрії 9-го класу. Нагадаємо, що кожній точці площини ми ставили у відповідність єдину пару чисел (x; y) і, навпаки, кожній парі чисел (x; y) ми ставили у відповідність єдину точку координатної площини. Таким чином, була введена взаємно однозначна відповідність між точками координатної площини та їх координатами (x; y).

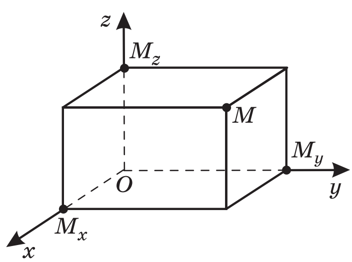
Аналогічно прямокутні координати можна ввести й у просторі: утворивши взаємнооднозначну відповідність між точками простору та їх координатами. Це надасть можливість у просторі (як і на площині) розв'язувати деякі задачі *координатним методом*, тобто подавати геометричні співвідношення розташування точок і фігур через алгебраїчні співвідношення між їх координатами.

1. Прямокутна система координат у просторі

Через довільну точку O простору проведемо три попарно перпендикулярні прямі x, y, z (мал. 13.1). На кожній з них виберемо *напрям*, позначивши його стрілкою, та *одиничний відрізок*. У такий спосіб задають *прямокутну систему координат у просторі*. Простір, у якому задано прямокутну систему координат, називають *координатним простором*. Точку O називають *початком координат*, а прямі з вибраними напрямами – *осями координат* (або *координатними осями*). Вісь x називають *віссю абсцис*, вісь y – *віссю ординат*, вісь z – *віссю аплікат*. Початок координат розбиває кожну з осей на дві півосі – додатну (яка містить стрілку напряму) й від'ємну. Площини, які проходять відповідно через осі координат x і y, y і z та x і z, називають *координатними площинами* xy, yz і xz.



Мал. 13.1



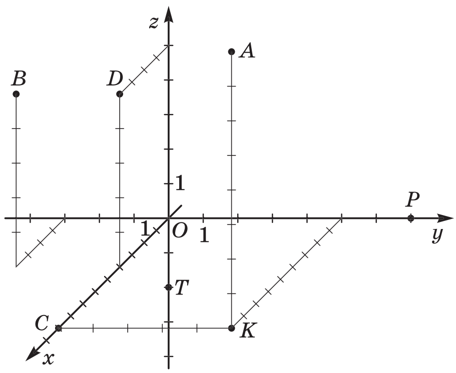
Мал. 13.2

У прямокутній системі координат кожній точці M простору відповідає єдина впорядкована трійка чисел, а кожній впорядкованій трійці чисел – єдина точка простору. Цю трійку чисел називають *координатами точки* й визначають так само, як координати точки на площині.

Проведемо через точку M площину, перпендикулярну до осі x (мал. 13.2). Вона перетинає вісь x у точці M_x. *Координатою x* (*абсцисою*) *точки M* називають число, що відповідає точці M_x на осі x. Якщо точка M_x збігається з точкою O, то вважатимемо, що абсциса точки M дорівнює нулю.

Проведемо площини, перпендикулярні до осей y і z, які перетинають ці осі в точках M_y і M_z відповідно. Координатою y (*ординатою*) точки M називають число, що відповідає точці M_y на осі y, а координатою z (*аплікатою*) точки M називають число, що відповідає точці M_z на осі z. Точку M з її координатами записують, як і в прямокутній системі координат на площині, а саме: $M(x; y; z)$. Якщо точку не позначено літерою, її записують лише її координатами: $(x; y; z)$.

Приклад 1. На малюнку 13.3 позначено точки $A(9; 5; 8)$, $B(4; -3; 5)$, $C(9; 0; 0)$, $D(4; 0; 5)$, $P(0; 7; 0)$, $T(0; 0; -2)$, $K(9; 5; 0)$.



Мал. 13.3

Якщо точка лежить на осі координат або на координатній площині, то певні її координати дорівнюватимуть нулю. Точка C з прикладу 1 належить осі x, її координати y і z дорівнюють нулю; точка P належить осі y, її координати x і z дорівнюють нулю; точка T належить осі z, її координати x і y дорівнюють нулю. І навпаки: точка $(x; 0; 0)$ належить осі абсцис, точка $(0; y; 0)$ – осі ординат, точка $(0; 0; z)$ – осі аплікат.

Точка K з прикладу 1 належить площині xy, її координата z дорівнює нулю, у точки, яка належить площині xz, координата y дорівнює нулю, у точки, яка належить площині yz, нулю дорівнює координата x. І навпаки: точка $(x; y; 0)$ належить площині xy, точка $(x; 0; z)$ – площині xz, точка $(0; y; z)$ – площині yz.

Для початку координат – точки O – маємо: $O(0; 0; 0)$.

Задача 1. Знайти: 1) координати точки K, що є проекцією точки $A(9; 5; 8)$ на площину xy.
2) відстань від точки $A(9; 5; 8)$ до площини xy.

Розв'язання. 1) Проекцією точки $A(9; 5; 8)$ на площину xy є точка $K(9; 5; 0)$ (мал. 13.3).

2) Відстань від точки $A(9; 5; 8)$ до площини xy дорівнює 8.

Відповідь. 1) $K(9; 5; 0)$; 2) 8.

Із задачі 1 можемо дійти висновків, що:

1) проекцією точки $(x; y; z)$ на площину xy є точка $(x; y; 0)$, на площину xz – точка $(x; 0; z)$, на площину yz – точка $(0; y; z)$;

2) відстань від точки $(x; y; z)$ до площини xy дорівнює $|z|$, до площини xz дорівнює $|y|$, а до площини yz дорівнює $|x|$.

2. Відстань між двома точками

Як відомо, відстань між точками $A(x_1; y_1)$ і $B(x_2; y_2)$ площини знаходять за формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Аналогічно,

відстань між точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ простору знаходять за формулою

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Задача 2. Точки $M(-1; 2; 4)$ і $N(1; 0; 3)$ – відповідно середини сторін AB і BC трикутника ABC. Знайти довжину сторони AC цього трикутника.

Розв'язання. 1) Оскільки M – середина AB, N – середина BC, то MN – середня лінія $\triangle ABC$. Тому $MN = \frac{1}{2}AC$, отже, $AC = 2MN$.

2) $MN = \sqrt{(1+1)^2 + (0-2)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3.$

3) Тоді $AC = 2 \cdot 3 = 6$.

Відповідь. 6.

Задача 3. Відстань між точками $A(x; 4; 5)$ і $B(2; 6; 2)$ дорівнює 7. Знайти x.

Розв'язання. 1) $AB^2 = (2-x)^2 + (6-4)^2 + (2-5)^2 =$
$= (2-x)^2 + 13.$

2) Оскільки $AB = 7$, то $AB^2 = 49$. Маємо рівняння:

$$(2 - x)^2 + 13 = 49,$$

коренями якого є числа −4 і 8.

Відповідь. −4 або 8.

3. Координати середини відрізка

Нагадаємо, як знайти координати середини відрізка на площині. Якщо точка $M(x_M;\ y_M)$ – середина відрізка AB, де $A(x_1;\ y_1)$, $B(x_2;\ y_2)$, то $x_M = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y_M = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

Аналогічно,

координати точки $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$, яка є серединою відрізка з кінцями $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, знаходять за формулами:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}; \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Задача 4. Довести, що середина відрізка з кінцями в точках $A(2;\ -4;\ 6)$ і $B(-6;\ 4;\ 12)$ належить площині xz.

Розв'язання. Нехай $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ – середина відрізка AB.

$$x_M = \frac{2 + (-6)}{2} = -2; \; y_M = \frac{-4 + 4}{2} = 0; \; z_M = \frac{6 + 12}{2} = 9.$$

Отже, $M(-2;\ 0;\ 9)$.

Оскільки ордината точки M дорівнює нулю, то точка M належить площині xz. ■

Задача 5. $ABCD$ – паралелограм, $A(-2;\ 4;\ 5)$, $B(2;\ -1;\ 4)$, $C(0;\ 12;\ 7)$.

1) Знайти координати точки O перетину діагоналей паралелограма $ABCD$.

2) Знайти координати вершини D паралелограма.

3) З'ясувати, чи є паралелограм $ABCD$ ромбом.

Розв'язання. 1) Точка O ділить навпіл кожну з діагоналей, тому $O(x_O;\ y_O;\ z_O)$ – середина AC. Маємо:

$$x_O = \frac{-2 + 0}{2} = -1; \; y_O = \frac{4 + 12}{2} = 8; \; z_O = \frac{5 + 7}{2} = 6.$$

Отже, $O(-1;\ 8;\ 6)$.

2) Точка O також є серединою діагоналі BD. Тому

$$-1 = \frac{2 + x_D}{2}; \; 8 = \frac{-1 + y_D}{2}; \; 6 = \frac{4 + z_D}{2}.$$

Розв'язавши ці рівняння, маємо:

$x_D = -4;\ y_D = 17;\ z_D = 8$.

Отже, $D(-4;\ 17;\ 8)$.

3) Знайдемо довжини сусідніх сторін паралелограма:

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (-1-4)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{42};$$

$$BC = \sqrt{(0-2)^2 + (12+1)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{182}.$$

Оскільки $AB \neq BC$, то $ABCD$ не є ромбом.

Відповідь. 1) $O(-1;\ 8;\ 6)$; 2) $D(-4;\ 17;\ 8)$; 3) ні.

4. Координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні

За допомогою координатного методу можна знаходити не лише координати середини відрізка, а й координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні.

Т Теорема (про координати точки, яка ділить відрізок у заданому відношенні). **Якщо точка M ділить відрізок AB з кінцями $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$ у відношенні $\frac{AM}{MB} = \lambda$, то координати точки $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$ знаходять за формулами:**

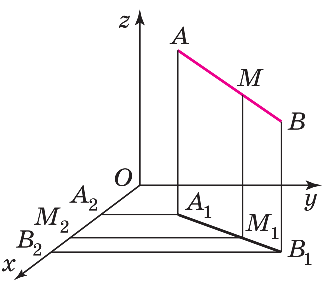
$$x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda};\quad y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda};\quad z_M = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Доведення. 1) Припустимо, що $x_1 \neq x_2$. Спроектуємо точки A, M і B на площину xy у напрямі, паралельному осі z, та отримаємо точки A_1, M_1 і B_1 (мал. 13.4). Маємо: $A_1(x_1;\ y_1;\ 0)$, $M_1(x_M;\ y_M;\ 0)$ і $B_1(x_2;\ y_2;\ 0)$.

2) Оскільки $AA_1 \parallel MM_1 \parallel BB_1$, то за узагальненою теоремою Фалеса:

$$\frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \frac{AM}{MB} = \lambda.$$

3) Спроектуємо точки A_1, M_1 і B_1 на вісь x у напрямі, паралельному осі y (мал. 13.4). Матимемо: $A_2(x_1;\ 0;\ 0)$, $M_2(x_M;\ 0;\ 0)$ і $B_2(x_2;\ 0;\ 0)$.



Мал. 13.4

4) Оскільки $A_1A_2 \parallel M_1M_2 \parallel B_1B_2$, то за узагальненою теоремою Фалеса:

$$\frac{A_2M_2}{M_2B_2} = \frac{A_1M_1}{M_1B_1} = \lambda.$$

5) Припустимо, що $x_1 < x_2$. Тоді $\frac{x_M - x_1}{x_2 - x_M} = \lambda$, тобто:

$$x_M - x_1 = \lambda(x_2 - x_M).$$

З отриманої рівності маємо: $x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$.

6) Якщо $x_1 = x_2$, то, очевидно, $x_M = x_1 = x_2$ і формула $x_M = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$ справджується. Адже тоді

$$\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{x_1 + \lambda x_1}{1 + \lambda} = \frac{x_1(1 + \lambda)}{1 + \lambda} = x_1 = x_M.$$

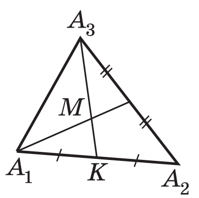
7) Аналогічно можна довести, що

$$y_M = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}; \; z_M = \frac{1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \; \blacksquare$$

Задача 6. Нехай $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $A_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ – вершини трикутника $A_1A_2A_3$, M – точка перетину його медіан. Знайти координати точки M.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Нехай $K(x_K;\ y_K;\ z_K)$ – середина A_1A_2 (мал. 13.5). Тоді

$$x_K = \frac{x_1 + x_2}{2}; \; y_K = \frac{y_1 + y_2}{2}; \; z_K = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$



Мал. 13.5

2) Оскільки M – точка перетину медіан трикутника $A_1A_2A_3$, то $\frac{A_3M}{MK} = \frac{2}{1} = 2$.

Тому $x_M = \dfrac{x_3 + 2 \cdot \frac{x_1 + x_2}{2}}{3} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$.

Аналогічно, $y_M = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$; $z_M = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

В і д п о в і д ь. $M\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}; \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}\right)$.

Задача 7. Дано трикутник з вершинами у точках $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(6;\ 5;\ 3)$, $C(5;\ 3;\ 1)$, CL – його бісектриса (мал. 13.6). Знайти:

1) координати точки L; 2) довжину бісектриси CL.

Р о з в ' я з а н н я.

1. 1) $AC = \sqrt{4^2 + 3^2 + 0^2} = 5$, $BC = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$.

2) CL – бісектриса трикутника ABC, тому

$$\frac{BL}{LA} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

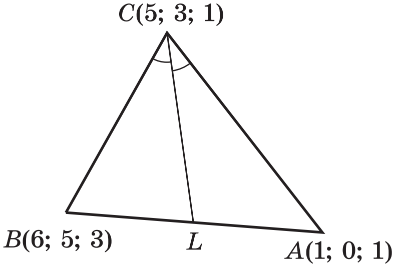
3) Маємо:

$$x_L = \frac{6 + 0,6 \cdot 1}{1 + 0,6} = \frac{33}{8};$$

$$y_L = \frac{5 + 0,6 \cdot 0}{1 + 0,6} = \frac{25}{8};$$

$$z_L = \frac{3 + 0,6 \cdot 1}{1 + 0,6} = \frac{9}{4}.$$

Отже, $L\left(\frac{33}{8}; \frac{25}{8}; \frac{9}{4}\right)$.



Мал. 13.6

2. $CL = \sqrt{\left(5 - \frac{33}{8}\right)^2 + \left(3 - \frac{25}{8}\right)^2 + \left(1 - \frac{9}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{32}} = \frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{8}.$

Відповідь. 1) $L\left(\frac{33}{8}; \frac{25}{8}; \frac{9}{4}\right)$; 2) $CL = \frac{5\sqrt{6}}{8}$.

А ще раніше...

Ви вже знаєте, що прямокутну систему координат на площині запропонували П'єр Ферма та Рене Декарт у XVII ст. Вони допускали можливість запровадження координат і у просторі, але далі припущень цю ідею так і не розвинули.

У 1715 р. Йоганн Бернуллі в одному зі своїх листів до Лейбніца означив просторові координати x, y, z як перпендикуляри на три взаємно перпендикулярні площини. Приблизно у той самий час інші математики починають записувати рівняння деяких поверхонь через просторові координати. Першим, хто постійно й широко використовував координати у просторі, став французький математик Алексіс Клод Клеро. У своїй праці «Дослідження ліній двоякої кривизни» (1731 р.) Клеро додав у систему координат третю координату та проілюстрував цю ідею рівняннями деяких поверхонь.


Алексіс Клод Клеро (1713–1765)

Ідея координат у тривимірному просторі знайшла своє продовження у праці Ейлера «Уведення в аналіз» (1748 р.). Друга частина цієї праці, що називалася «Додатки про поверхні», *стала першим системним викладом аналітичної геометрії тривимірного простору.*

Подальшому розвитку просторової аналітичної геометрії сприяли праці математиків Г. Монжа, Ж. Лагранжа та С. Лакруа.

• Поясніть, як задають прямокутну систему координат у просторі. • Що називають початком координат, осями координат, координатними площинами? • Поясніть, як визначають координати точки у просторі. • Що можна сказати про координати точки, яка належить осі x; осі y; осі z? • Що можна сказати про координати точки, яка належить площині xy; площині xz; площині yz? • За якою формулою знаходять відстань між точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$? • За якими формулами знаходять координати точки M – середини відрізка з кінцями $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$? • Сформулюйте та доведіть теорему про координати точки, що ділить відрізок у заданому відношенні.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

13.1. Які з точок $A(2; 0; -3)$, $B(0; 0; -5)$, $C(4; 0; 0)$, $D(0; 2; -1)$, $E(3; -1; 2)$, $F(0; -1; 0)$ належать координатним осям? Укажіть, яким саме.

13.2. Які з точок $K(0; 0; 7)$, $L(2; 2; 2)$, $M(4; 9; 0)$, $N(0; 19; 0)$, $P(-1; 0; 14)$, $T(-9; 0; 0)$ лежать на координатних осях? Укажіть, на яких саме.

13.3. Які з наведених точок належать координатним площинам $K(0; 2; -3)$, $P(1; 2; -3)$, $M(2; 0; -4)$, $N(7; -1; -1)$, $Q(1; -4; 0)$, $S(1; 1; 1)$? Укажіть, яким саме.

13.4. Які з точок $A(2; 0; -9)$, $B(-4; 1; -4)$, $C(0; 11; -11)$, $D(-1; 1; 0)$ належать координатним площинам? Укажіть, яким саме.

13.5. Точка M розміщена на від'ємній півосі аплікат на відстані 7 від початку координат. Які координати точки M?

13.6. Точка T розміщена на додатній півосі абсцис на відстані 3 від початку координат. Які координати точки T?

13.7. Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо:
1) $A(2; -11; 0)$, $B(4; -7; 6)$; 2) $A(-2; 5; 4)$, $B(2; 0; 7)$.

13.8. Знайдіть координати середини відрізка CD, якщо:
1) $C(0; 2; -7)$, $D(6; -4; -9)$; 2) $C(2; -4; 9)$, $D(7; 4; 0)$.

13.9. Знайдіть довжину відрізка CD, якщо:

1) $C(4;\ 0;\ -1)$, $D(2;\ 3;\ 5)$; 2) $C(0;\ -2;\ 1)$, $D(2;\ -2;\ 3)$.

13.10. Знайдіть довжину відрізка AB, якщо:

1) $A(4;\ -1;\ 0)$, $B(6;\ 1;\ 1)$; 2) $A(4;\ -1;\ 2)$, $B(5;\ -1;\ 5)$.

2 **13.11.** У точок $M(2;\ -1;\ 4)$ і $N(2;\ -1;\ 7)$ дві перші координати попарно однакові. Чи паралельна пряма MN деякій осі координат? Якщо відповідь позитивна, то якій саме?

13.12. Які з наведених точок лежать на одній прямій, паралельній осі абсцис: $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(2;\ 1;\ -3)$, $C(-2;\ 1;\ -3)$, $D(-2;\ -1;\ -3)$?

13.13. Які з наведених точок лежать на одній прямій, паралельній осі ординат: $M(3;\ -1;\ 5)$, $N(3;\ -1;\ -5)$, $K(3;\ 1;\ 5)$, $L(-3;\ -1;\ 5)$?

13.14. Знайдіть координати проекцій точки $A(-1;\ 2;\ -4)$ на координатні площини.

13.15. Знайдіть координати проекцій точки $P(2;\ -3;\ 7)$ на координатні площини.

13.16. На яких відстанях від координатних площин лежить точка $M(4;\ -7;\ 11)$?

13.17. На яких відстанях від координатних площин лежить точка $K(-2;\ 4;\ -9)$?

13.18. Чи належить деякій координатній осі середина відрізка AB, якщо $A(4;\ -2;\ 7)$, $B(-4;\ 2;\ -9)$? Якщо відповідь позитивна, то якій саме?

13.19. Доведіть, що середина відрізка з кінцями в точках $M(9;\ -11;\ 7)$ і $N(-9;\ 5;\ -7)$ належить осі ординат.

13.20. Точка P – середина відрізка MN. Знайдіть координати точки N, якщо $P(-1;\ 2;\ 7)$, $M(2;\ 1;\ 3)$.

13.21. Точка C – середина відрізка AB. Знайдіть координати точки A, якщо $C(0;\ 2;\ -3)$, $B(1;\ 4;\ -8)$.

13.22. Яка з точок $A(1;\ 2;\ -3)$ або $B(4;\ 0;\ 1)$ ближче до початку координат?

13.23. Порівняйте AC і BC, якщо $A(2;\ -1;\ -3)$, $B(6;\ 5;\ 9)$, $C(4;\ 2;\ 3)$.

13.24. У трикутнику ABC $A(4;\ -1;\ 2)$, $B(8;\ 1;\ 6)$, $C(10;\ 3;\ 14)$, K – середина AC, L – середина BC. Знайдіть довжину відрізка KL.

13.25. Дано вершини $A(3;\ 0;\ 5)$, $B(4;\ 3;\ -5)$, $C(-4;\ 1;\ 3)$ трикутника ABC. Знайдіть довжину медіани трикутника, проведеної з вершини A.

13.26. Доведіть, що трикутник з вершинами $A(-4; 2; 0)$, $B(2; 1; -3)$, $C(-1; 2; 3)$ є рівнобедреним.

13.27. Середина відрізка AB належить осі аплікат. Знайдіть m і n, якщо $A(2; n; 8)$, $B(m; -3; 11)$.

13.28. Середина відрізка MN належить осі абсцис. Знайдіть a і b, якщо $M(-8; a; 4)$, $N(7; -2; b)$.

13.29. Кінці відрізка MN мають координати $M(-2; 1; 5)$, $N(8; -4; 0)$. Знайдіть координати точки K, яка належить відрізку MN, такої, що:

1) $\frac{MK}{KN} = \frac{1}{4}$; 2) $\frac{MK}{KN} = \frac{3}{2}$.

13.30. Кінці відрізка AB мають координати $A(0; -2; 1)$, $B(6; 10; 7)$. Знайдіть координати точки M, яка належить відрізку AB, такої, що:

1) $\frac{AM}{MB} = \frac{1}{5}$; 2) $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{1}$.

13.31. Серед координат точки $L(x; y; z)$ дві від'ємні й одна додатна. Точка L знаходиться на відстані 2 від кожної координатної площини. Знайдіть координати точки L. Скільки випадків слід розглянути?

13.32. Серед координат точки $C(x; y; z)$ дві додатні й одна від'ємна. Точка C лежить на відстані 3 від кожної координатної площини. Знайдіть координати точки C. Скільки випадків слід розглянути?

3 **13.33.** На осі абсцис знайдіть точку, відстань від якої до точки $A(1; 4; 8)$ дорівнює 12.

13.34. На осі аплікат знайдіть точку, відстань від якої до точки $P(2; -3; 0)$ дорівнює 7.

13.35. На осі ординат знайдіть точку, рівновіддалену від точок $M(1; -3; 7)$ і $N(5; 7; -5)$.

13.36. На осі x знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(1; 3; 3)$ і $B(2; 1; 4)$.

13.37. Знайдіть координати вершини A паралелограма $ABCD$, якщо $B(2; -1; 1)$, $C(1; 2; 5)$, $D(-4; 5; 7)$.

13.38. Дано дві вершини $A(2; -1; 3)$ і $B(3; -4; 5)$ паралелограма $ABCD$ і точку перетину його діагоналей $O(4; -5; 0)$. Знайдіть координати точок C і D.

13.39. Знайдіть відстань від точки A – вершини трикутника ABC – до точки перетину медіан цього трикутника, якщо $A(-2; 3; 1)$, $B(1; 2; 4)$, $C(1; -5; -20)$.

13.40. Знайдіть відстань від точки C – вершини трикутника ABC – до точки перетину медіан цього трикутника, якщо $A(-1; 3; 5)$, $B(3; -4; -3)$, $C(4; 1; -2)$.

13.41. Кінці відрізка MN мають координати $M(-11; 3; 4)$, $N(-2; 6; 10)$. Знайдіть координати двох точок, що поділяють цей відрізок на 3 рівних відрізки.

13.42. Кінці відрізка AB мають координати $A(0; 9; 4)$, $B(10; -6; -1)$. Знайдіть координати чотирьох точок, що поділяють цей відрізок на 5 рівних відрізків.

13.43. На осі ординат знайдіть таку точку, відстань від якої до точки $M(-2; -3; 7)$ є найменшою з усіх можливих. Знайдіть цю відстань.

13.44. На осі аплікат знайдіть таку точку, відстань від якої до точки $N(4; -3; 9)$ є найменшою з усіх можливих. Знайдіть цю відстань.

13.45. Дано точки $A(1; 2; \sqrt{2})$, $B(2; 1; \sqrt{2})$, $C(2; 1; 0)$ і $D(1; 2; 0)$. Доведіть, що $ABCD$ – квадрат.

13.46. Дано точки $A(-1; 5; 1)$, $B(3; 4; 5)$, $C(5; -1; 3)$ і $D(1; 0; -1)$. Доведіть, що $ABCD$ – ромб.

4 **13.47.** 1) Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(4; 0; 7)$, $B(0; 8; -1)$, $C(2; -2; 3)$ прямокутний.
2) Знайдіть площу трикутника ABC.

13.48. Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(5; 0; 7)$, $B(0; 3; -1)$ і $C(7; 3; 1)$ гострокутний.

13.49. Чи є серед кутів трикутника ABC з вершинами в точках $A(1; 8; -3)$, $B(4; 2; -1)$ і $C(5; 0; 5)$ тупий кут?

13.50. Визначте вид трикутника ABC, якщо:
1) $A(3; 11; -4)$, $B(3; 4; 3)$ і $C(10; 4; -4)$;
2) $A(6; -2; 3)$, $B(2; 4; -9)$ і $C(4; 8; -3)$.

13.51. Одна з граней куба належить площині xy. Чотири вершини куба, що належать цій грані, мають координати $(1; 2; 0)$, $(2; 3; 0)$, $(3; 2; 0)$, $(2; 1; 0)$. Знайдіть координати чотирьох інших вершин куба.

13.52. Точки $(1; 1; 7)$, $(2; 1; 7)$, $(2; 2; 7)$, $(1; 2; 7)$ є чотирма вершинами куба, що належать одній його грані. Знайдіть координати чотирьох інших вершин.

13.53. Визначте координати кінців відрізка, який точками $M(3; 0; 3)$ і $N(6; -2; 1)$ ділиться на три рівні частини.

13.54. Чи лежать точки $A(-1; -5; 6)$, $B(4; 5; 1)$ і $C(-2; -7; 7)$ на одній прямій? Якщо відповідь ствердна, укажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

13.55. Доведіть, що точки $M(6; 3; -5)$, $N(4; -3; 2)$ та $K(10; 15; -19)$ лежать на одній прямій. Яка з трьох точок лежить між двома іншими?

13.56. 1) Знайдіть координати проекції точки $M(-9; 12; 16)$ на кожну з осей координат.
2) Знайдіть відстань від точки M до осей координат.

13.57. Дано точку $M(-2; 7; 6)$.
1) Знайдіть координати проекції даної точки на координатні площини.
2) Знайдіть координати проекції даної точки на координатні осі.
3) Вершинами якого многогранника є проекції точки M, вказані в попередніх двох пунктах, разом з точкою M і початком координат точкою O.
4) Знайдіть об'єм цього многогранника.

13.58. Вершини трикутника ABC мають координати $A(0; -2; 2)$, $B(2; -2; 0)$, $C(-2; 0; 2)$.
1) Визначте вид трикутника відносно його кутів і сторін.
2) Знайдіть кути трикутника.
3) Знайдіть периметр трикутника.
4) Знайдіть площу трикутника.

13.59. Дано трикутник з вершинами $A(3; 0; 4)$, $B(-3; 8; 6)$, $C(2; 3; 0)$. Знайдіть довжину бісектриси трикутника, проведеної з вершини A.

13.60. Дано трикутник з вершинами $A(3; 2; -1)$, $B(-4; 3; -5)$, $C(2; 0; -2)$. Знайдіть довжину бісектриси трикутника, проведеної з вершини C.

13.61. Дано точки $A(-2; 2; 5)$ і $B(3; 1; 6)$. На осі аплікат знайдіть усі такі точки C, щоб трикутник ABC був рівнобедреним.

13.62. Дано точки $A(-1; 3; 8)$ і $B(-1; 4; 7)$. Знайдіть у площині yz усі такі точки C, щоб трикутник ABC був рівностороннім.

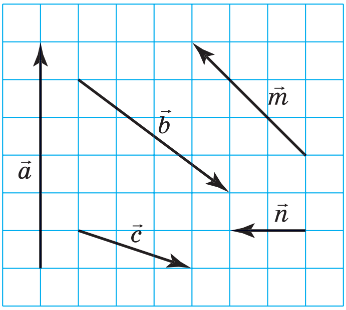
13.63. $QABC$ – правильний тетраедр, довжина ребра якого дорівнює 2. Трикутник ABC належить площині xy. Знайдіть координати вершин C і Q, якщо $A(-1; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$.

13.64. Усі ребра тетраедра $DABC$ рівні між собою. Знайдіть координати вершини D, якщо $A(6; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(6; 0; 0)$.

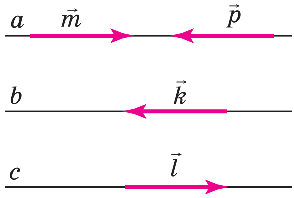
13.65. Товарний потяг рухається зі швидкістю 54 км/год. Діаметр його колеса дорівнює 1,2 м. Скільки обертів за хвилину робить це колесо? (Для спрощення обчислень прийміть $\pi \approx 3$.)

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

13.66. Знайдіть модулі векторів, зображених на малюнку 13.7.



Мал. 13.7

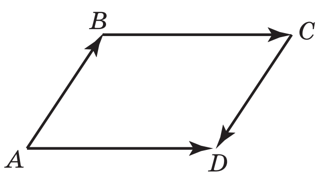


Мал. 13.8

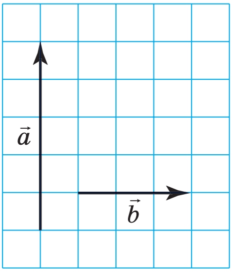
13.67. Прямі a, b і c паралельні між собою (мал. 13.8). Серед векторів, заданих на малюнку, знайдіть усі пари:

1) колінеарних векторів;
2) співнапрямлених векторів;
3) протилежно напрямлених векторів.

13.68. $ABCD$ – паралелограм (мал. 13.9). Чи рівні між собою вектори: 1) $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$; 2) $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{BC}$?



Мал. 13.9



Мал. 13.10

13.69. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 13.10). Побудуйте вектор:

1) $\vec{c}$, якщо $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{d}$, якщо $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

13.70. Один з кутів трикутника дорівнює 120°. Чи можуть довжини сторін трикутника утворювати арифметичну прогресію? У разі позитивної відповіді знайдіть відношення сторін трикутника.

Перевірте свою компетентність

Завдання № 13

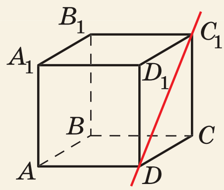
1. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник зі стороною 12 см.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{3}$ см	$2\sqrt{3}$ см	$4\sqrt{3}$ см	$6\sqrt{3}$ см	інша відповідь

2. У $\triangle ABC$ $BC = 16$ см, $\sin A = 0{,}8$, $\angle C = 30^\circ$. Знайдіть довжину сторони AB.

А	Б	В	Г	Д
10 см	20 см	25 см	40 см	неможливо визначити

3. На малюнку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Чому дорівнює кут між прямою C_1D і площиною BCD?

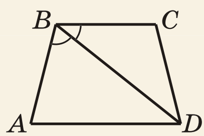


А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	90°

4. На малюнку $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Чому дорівнює кут між площинами AA_1B і B_1C_1C?

А	Б	В	Г	Д
0°	30°	45°	60°	90°

5. Одна з основ рівнобічної трапеції на 10 см більша за іншу, а периметр трапеції дорівнює 42 см. Діагональ трапеції ділить тупий кут навпіл. Установіть відповідність між відрізком (1–4) та його довжиною (А–Д).



Відрізок

1 менша основа трапеції
2 більша основа трапеції
3 висота трапеції
4 середня лінія трапеції

Довжина відрізка

А 3 см
Б 5 см
В 8 см
Г 12 см
Д 13 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. У рівнобедрений трикутник вписано коло, радіус якого дорівнює 15 см. Точка дотику цього кола ділить бічну сторону у відношенні 5 : 8, рахуючи від вершини основи. Знайдіть периметр трикутника (у см).

§ 14. ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ

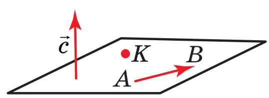
У курсі планіметрії ви вже ознайомилися з векторами на площині. Зауважимо, що основні поняття для векторів у просторі означують так само, як і для векторів на площині.

1. Поняття вектора у просторі

Як і в планіметрії:

відрізок, для якого визначено напрям, називають *вектором*.

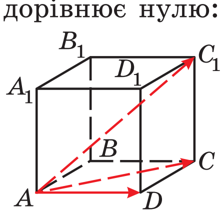
Вектор зображують відрізком зі стрілкою, що вказує напрям вектора. На малюнку 14.1 зображено вектор $\overrightarrow{AB}$, точка A – його початок, точка B – кінець вектора. Вектор також можна позначати однією малою латинською літерою. На малюнку 14.1 зображено вектор $\vec{c}$. Нагадаємо, що вектор, у якого початок збігається з кінцем, називають *нульовим вектором*. Якщо, наприклад, точку, що зображує нульовий вектор, позначити літерою K, то нульовий вектор можна записати як $\overrightarrow{KK}$ (мал. 14.1). Нульовий вектор також позначають символом $\vec{0}$. Нульовий вектор, на відміну від ненульового, напряму не має.



Мал. 14.1

Модулем **(або *довжиною*, або *абсолютною величиною*) вектора $\overrightarrow{AB}$ називають довжину відрізка AB.**

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ позначають через $|\overrightarrow{AB}|$, а модуль вектора $\vec{p}$ – через $|\vec{p}|$. Модуль нульового вектора дорівнює нулю: $|\vec{0}| = 0$; модуль вектора, відмінного від нульового, більший за нуль.



Мал. 14.2

Задача 1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро якого дорівнює 1 (мал. 14.2). Знайти модулі векторів $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AC_1}$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $AD = 1$, тому $|\overrightarrow{AD}| = 1$.

2) У $\triangle ADC$: $AC^2 = AD^2 + DC^2$; $AC = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Тому $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$.

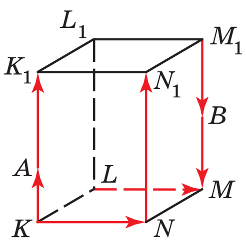
3) У $\triangle ACC_1$: $AC_1^2 = AC^2 + CC_1^2$; $AC_1 = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Отже, $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{3}$.

Відповідь. $|\overrightarrow{AD}| = 1$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC_1}| = \sqrt{3}$.

Нагадаємо, що

колінеарними **називають два ненульових вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.**

На малюнку 14.3 зображено прямокутний паралелепіпед. Колінеарними є пари векторів: $\overrightarrow{KA}$ і $\overrightarrow{AK_1}$; $\overrightarrow{KA}$ і $\overrightarrow{M_1B}$; $\overrightarrow{AK_1}$ і $\overrightarrow{M_1B}$; $\overrightarrow{KA}$ і $\overrightarrow{NN_1}$ тощо.



Мал. 14.3

Колінеарні вектори можуть бути *співнапрямленими*, тобто однаково напрямленими (такими є, наприклад, вектори $\overrightarrow{KA}$ і $\overrightarrow{NN_1}$ на малюнку 14.3; записують це так: $\overrightarrow{KA} \uparrow\uparrow \overrightarrow{NN_1}$), або *протилежно напрямленими* (такими є, наприклад, вектори $\overrightarrow{NN_1}$ і $\overrightarrow{M_1B}$ на малюнку 14.3; записують це так: $\overrightarrow{NN_1} \uparrow\downarrow \overrightarrow{M_1B}$).

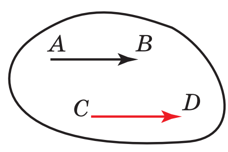
Пари векторів $\overrightarrow{KN}$ і $\overrightarrow{KA}$; $\overrightarrow{LM}$ і $\overrightarrow{M_1B}$ (мал. 14.3) не є колінеарними, тому вони не є ні співнапрямленими, ні протилежно напрямленими.

Як і в планіметрії,

два вектори називають *рівними*, якщо вони співнапрямлені та їх модулі рівні між собою.

На малюнку 14.3 рівними є, наприклад, вектори $\overrightarrow{KN}$ і $\overrightarrow{LM}$. Це записують так: $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{LM}$.

Вектори $\overrightarrow{KA}$ і $\overrightarrow{NN_1}$ на малюнку 14.3 не є рівними, оскільки в них різні модулі. Також не рівні між собою вектори $\overrightarrow{NN_1}$ і $\overrightarrow{M_1M}$, оскільки вони протилежно напрямлені.



Мал. 14.4

Як і в планіметрії, від будь-якої точки C можна відкласти вектор $\overrightarrow{CD}$, який дорівнює вектору $\overrightarrow{AB}$, і до того ж тільки один (мал. 14.4).

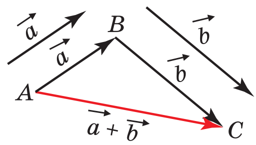
2. Додавання векторів

Як і в планіметрії, суму векторів можна знаходити за *правилом трикутника* чи *правилом паралелограма*. Нагадаємо ці правила.

Щоб додати вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ за правилом трикутника, треба:

1) від кінця вектора $\vec{a}$ відкласти вектор, що дорівнює вектору $\vec{b}$ (мал. 14.5);

2) вектор, початок якого збігається з початком вектора $\vec{a}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{b}$, є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Мал. 14.5

З правила трикутника можна зробити висновок, що

для будь-яких трьох точок A, B і C має місце рівність: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (мал. 14.5).

Щоб додати неколінеарні вектори за правилом паралелограма, треба:

1) відкласти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від спільного початку – точки K (мал. 14.6);

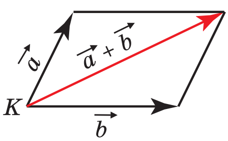
2) побудувати на цих векторах паралелограм;

3) вектор, що зображується діагоналлю паралелограма, яка виходить з точки K, є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

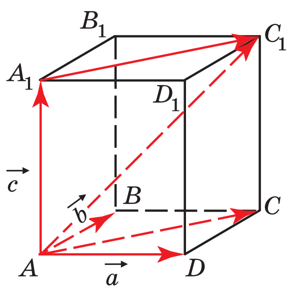
Як і в планіметрії, для додавання векторів справджується:

- *переставна властивість:* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- *сполучна властивість:* $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

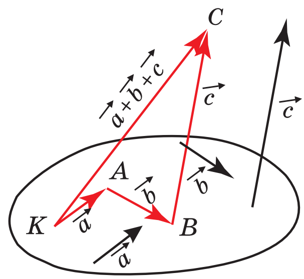
Додати кілька векторів у просторі можна так: додати два з них, потім до їх суми додати третій вектор, і так далі.



Мал. 14.6



Мал. 14.7



Мал. 14.8

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 14.7). Побудувати вектор, що дорівнює сумі векторів $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) За правилом паралелограма

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.$$

2) Відкладемо від точки A_1 вектор $\overrightarrow{A_1C_1}$, що дорівнює вектору $\overrightarrow{AC}$. Тоді $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AC_1}$.

3) Отже, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}$.

Для додавання кількох векторів у просторі можна використовувати *правило многокутника*, яке подібне до правила трикутника: щоб знайти суму векторів $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + ...$, від кінця вектора $\vec{a}$ відкладають вектор, що дорівнює вектору $\vec{b}$, потім від кінця вектора $\vec{b}$ – вектор, що дорівнює вектору $\vec{c}$, і так далі. Сумою векторів буде вектор, початком якого є початок першого доданка, а кінцем – кінець останнього доданка.

Нехай на малюнку 14.8 від точки K відкладено вектор $\overrightarrow{KA} = \vec{a}$, далі від точки A – вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, потім від точки B – вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Тоді $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{KC}$. Отже,

для будь-яких точок $A_1, A_2, ..., A_n$ справджується рівність:

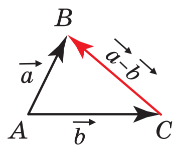
$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_3A_4} + ... + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

3. Віднімання векторів

Нагадаємо відоме з планіметрії *правило побудови різниці двох векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$, яке справджується і в стереометрії:

1) відкладаємо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ від однієї точки (мал. 14.9);

2) будуємо вектор, початок якого збігається з кінцем вектора $\vec{b}$, а кінець – з кінцем вектора $\vec{a}$. Цей вектор і є різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Мал. 14.9

Справді, оскільки $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

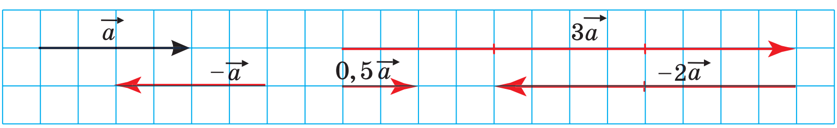
Наприклад, на малюнку 14.7 $\overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{A_1C_1}$.

4. Множення вектора на число

Нагадаємо, що *добутком ненульового вектора $\vec{a}$ на число λ називають такий вектор $\vec{b}$, що $|\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}|$, причому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ співнапрямлені, якщо $\lambda > 0$, і протилежно напрямлені, якщо $\lambda < 0$.*

Добутком $\vec{0}$ на будь-яке число є $\vec{0}$: $\vec{0} \cdot \lambda = \vec{0}$.

На малюнку 14.10 зображено вектор $\vec{a}$ та побудовано вектори $3\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{a}$, $-\vec{a}$, $-2\vec{a}$.



Мал. 14.10

Два протилежно напрямлених вектори, модулі яких рівні між собою, називають *протилежними векторами*.

На малюнку 14.10 вектори $\vec{a}$ і $-\vec{a}$ – протилежні. Взагалі кажучи, пари векторів вигляду $\vec{p}$ і $-\vec{p}$, $-\vec{m}$ і $\vec{m}$ завжди є протилежними.

Властивості множення вектора на число, які ви знаєте з планіметрії, справджуються також і в стереометрії. Нагадаємо їх:

для будь-яких чисел α і β та векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$0\vec{a} = \vec{0};\ (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a});$$

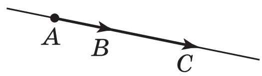
$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a};\ \alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}.$$

Так само, як і в планіметрії, можна довести, що

вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$, можна подати у вигляді $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, $\lambda \neq 0$; і навпаки, якщо $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, де $\lambda \neq 0$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні.

Зауважимо, що це твердження можна сприймати як *ознаку колінеарності векторів*.

Геометричний зміст колінеарності двох ненульових векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, які відкладено від однієї точки, полягає у тому, що ці вектори лежать на одній прямій і один з них можна отримати з іншого за допомогою розтягування або стискання. З цього випливає, що точка C лежить на прямій AB тоді і тільки тоді, коли справджується умова $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB}$ (мал. 14.11).



Мал. 14.11

Так, наприклад, якщо $\overrightarrow{AC} = 2{,}5\overrightarrow{AB}$ (мал. 14.11), то це означає, що точка C належить прямій AB, точка B лежить між точками A і C, при цьому $AB : BC = 1 : 1{,}5 = 2 : 3$.

Зазначені властивості векторів дають змогу спрощувати вирази з векторами подібно до того, як спрощують алгебраїчні вирази.

Задача 3. Спростити вираз: $4(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - 2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(5\vec{a} - 4\vec{c})$.

Розв'язання. $4(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) - 2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(5\vec{a} - 4\vec{c}) =$

$= 4\vec{a} - 4\vec{b} + 4\vec{c} - 2\vec{a} + 4\vec{b} + 15\vec{a} - 12\vec{c} = 17\vec{a} - 8\vec{c}$.

Відповідь. $17\vec{a} - 8\vec{c}$.

5. Компланарні вектори

Вектори називають *компланарними*, якщо при відкладанні їх від однієї і тієї самої точки вони будуть лежати в одній площині.

Зрозуміло, що будь-які два вектори є компланарними. Також компланарними є три вектори, з яких деякі два – колінеарні. Три вектори, з яких жодні два не є колінеарними, можуть бути як компланарними, так і некомпланарними.

Наприклад, вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD}$, зображені на малюнку 14.7, є компланарними, а вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$ на тому самому малюнку не є компланарними.

Справедливим є таке твердження, яке приймемо без доведення:

три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, серед яких немає жодної пари колінеарних, є компланарними тоді і тільки тоді, коли існують числа α і β такі, що справджується рівність $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Рівність вигляду $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ називають *розкладанням вектора $\vec{c}$ за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$*. Можна також довести, що коефіцієнти α і β у цьому розкладанні (за умови, що жодні два вектори з трьох не є колінеарними) визначаються єдиним чином.

Для додавання трьох некомпланарних векторів можна використовувати *правило паралелепіпеда*, подібне до правила паралелограма для додавання двох неколінеарних векторів. У задачі 2 цього параграфа було доведено, що $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AC_1}$. Узагальнюючи, отримаємо правило паралелепіпеда:

1) відкладаємо некомпланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ від спільного початку – точки A (див. мал. 14.7);

2) будуємо на даних векторах паралелепіпед;

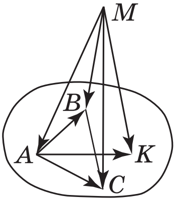
3) будуємо вектор, що є діагоналлю паралелепіпеда, яка виходить з точки A, він і буде сумою векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Розглянемо важливу задачу, що дасть змогу встановлювати належність точки площині векторним способом.

Задача 4. Нехай дано трикутник ABC і точку M, що не належить площині трикутника. Довести, що точка K буде належати площині ABC тоді і тільки тоді, коли виконуватиметься рівність $\overrightarrow{MK} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC}$, за умови, що $x + y + z = 1$.

Д о в е д е н н я. 1. 1) Нехай точка $K \in (ABC)$. Тоді вектор $\overrightarrow{AK}$ можна розкласти за векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. Маємо $\overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$.

2) Нехай M – довільна точка простору, $M \notin (ABC)$ (мал. 14.12).



Мал. 14.12

Тоді $\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AK} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC} =$
$= \alpha(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) + \beta(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) =$

$= -(\alpha + \beta)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} + \beta\overrightarrow{MC}$. Звідси маємо:

$\overrightarrow{MK} = (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{MA} + \alpha\overrightarrow{MB} + \beta\overrightarrow{MC}$.

3) Якщо позначити $1 - \alpha - \beta = x$, $\alpha = y$, $\beta = z$, то матимемо $\overrightarrow{MK} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC}$ за умови, що $x + y + z = 1$.

2. 1) Нехай маємо $\overrightarrow{MK} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC}$ за умови, що $x + y + z = 1$. Доведемо, що $K \in (ABC)$.

2) З умови $\overrightarrow{MK} = x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC}$ отримаємо, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{MA} + y(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) + z(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$.

Тоді $\overrightarrow{AK} = (x + y + z - 1)\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{MA} + {}$ $+ y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}$, тобто вектори $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ – компланарні. Тому точка K належить площині ABC.

Зауважимо, що коли в умовах попередньої задачі $x + y + z > 1$, то точки M і K лежать по різні боки від площини ABC, а коли $x + y + z < 1$, то – по один бік.

6. Розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами

Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – некомпланарні вектори. Якщо вектор $\vec{m}$ подано у вигляді $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, то кажуть, що вектор $\vec{m}$ *розклали за векторами* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *і* $\vec{c}$. Числа α, β і γ називають *коефіцієнтами розкладу*.

Т Теорема (про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами). **Будь-який вектор можна розкласти за трьома некомпланарними векторами, причому коефіцієнти цього розкладання визначаються єдиним чином.**

Приймемо цю теорему без доведення, яке є досить громіздким.

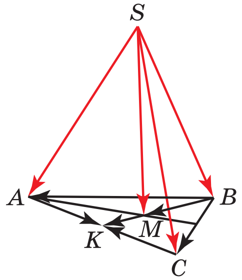
Задача 5. Точка S лежить поза площиною трикутника ABC (мал. 14.13), M – точка перетину його медіан. Розкласти вектор $\overrightarrow{SM}$ за векторами $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ і $\overrightarrow{SC}$.

Р о з в ' я з а н н я.

1) $\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{SB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$; (*)

2) $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK}$.

Додавши ці рівності почленно, матимемо: $2\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CK}$.



Мал. 14.13

3) Оскільки $\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{CK}$, то $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{CK} = \vec{0}$. Отже,

$2\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$, звідки $\overrightarrow{BK} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$.

4) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SA} = -\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB}$;

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{SC} = -\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}$.

Тоді $\overrightarrow{BK} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}}{2} = \dfrac{\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}}{2} - \overrightarrow{SB}$.

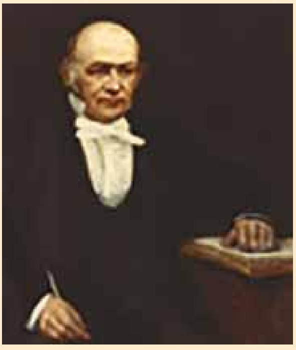
5) Підставивши отриманий для $\overrightarrow{BK}$ вираз у (*), отримаємо:

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SB} + \frac{2}{3}\left(\frac{\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC}}{2} - \overrightarrow{SB}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{SC}.$$

Відповідь. $\overrightarrow{SM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

А ще раніше...

Оперувати векторами у просторі вперше почав ірландський математик Уільям Роуен Гамільтон. Основи векторної алгебри та векторного аналізу він виклав у своїй праці «Лекція про кватерніони», перша публікація якої датується 1843 роком. Саме в цій праці вперше було вжито терміни «скаляр» і «вектор».



Уільям Роуен Гамільтон (1805–1865)

Герман Гюнтер Грассман (1809–1887)

Приблизно в той самий час до поняття вектора прийшов і німецький фізик, математик і філолог Г. Грассман. Саме у своїй праці «Вчення про видовженість» (1840 р.) він першим серед математиків розглянув n-вимірний евклідів простір, частковим випадком якого й вважав вектори на площині й у тривимірному просторі.

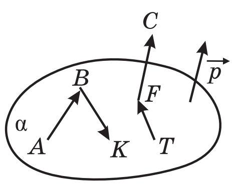
• Що називають вектором? Нульовим вектором? • Що таке модуль вектора? • Які вектори називають колінеарними? • Які вектори називають співнапрямленими, а які – протилежно напрямленими? • Які вектори називають рівними? • Як додати вектори за правилом трикутника? • Як додати вектори за правилом паралелограма? • Які властивості справджуються для додавання векторів? • Як розуміти правило многокутника для додавання векторів? • За яким правилом віднімають вектори? • Що називають добутком нульового вектора $\vec{a}$ на число λ? • Які властивості справджуються при множенні вектора на число? • Сформулюйте ознаку колінеарності векторів. • Які вектори називають компланарними? • У якому випадку три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, серед яких немає жодної пари колінеарних, є компланарними? • Що називають розкладанням вектора $\vec{m}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$? • Сформулюйте теорему про розкладання вектора за трьома некомпланарними векторами.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

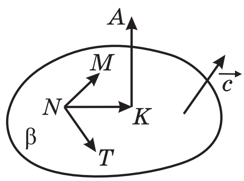
1

14.1. Запишіть усі вектори, зображені на малюнку 14.14.

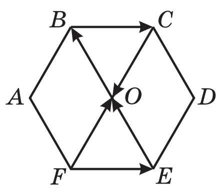
14.2. Запишіть усі вектори, зображені на малюнку 14.15.



Мал. 14.14



Мал. 14.15



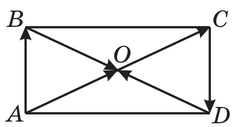
Мал. 14.16

14.3. Позначте точки A, B і C, що лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{CB}$.

14.4. Позначте точки P, Q і R, що не лежать на одній прямій. Накресліть вектори $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ і $\overrightarrow{PR}$.

14.5. $ABCDEF$ – правильний шестикутник (мал. 14.16). Запишіть:
1) усі пари рівних векторів;
2) усі пари векторів, рівних за модулем, але протилежно напрямлених.

14.6. $ABCD$ – прямокутник (мал. 14.17). Запишіть усі пари:
1) рівних векторів;
2) векторів, рівних за модулем, але протилежно напрямлених.



Мал. 14.17

14.7. Точки N, M, K і T належать площині β, а точка A не належить цій площині (мал. 14.15). Назвіть:
1) трійку компланарних векторів;
2) деяку трійку некомпланарних векторів.

14.8. Точки A, B, K, T і F належать площині α, а точка C не належить цій площині (мал. 14.14). Укажіть:
1) трійку компланарних векторів;
2) деяку трійку некомпланарних векторів.

14.9. Накресліть вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, їх суму та різницю.

14.10. Накресліть вектори $\overrightarrow{MK}$ і $\overrightarrow{MP}$, їх суму та різницю.

14.11. Накресліть вектор $\vec{p}$, довжина якого 6 см, і вектори: $-\vec{p}$; $\frac{1}{2}\vec{p}$; $2\vec{p}$; $-1{,}5\vec{p}$.

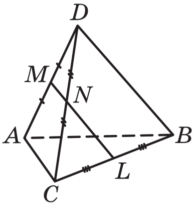
14.12. Накресліть вектор $\vec{a}$, довжина якого дорівнює 4 см, і вектори: $-\frac{1}{2}\vec{a}$; $3\vec{a}$; $-2\vec{a}$; $2{,}5\vec{a}$.

2 **14.13.** $ABCD$ – прямокутник. Укажіть усі пари рівних векторів і векторів, що мають рівні модулі, початком і кінцем яких є вершини прямокутника.

14.14. $KLMN$ – ромб. Укажіть усі пари рівних векторів і векторів, що мають рівні модулі, початком і кінцем яких є вершини ромба.

14.15. $ABCD$ – трикутна піраміда (мал. 14.18), M, N і L – середини ребер AD, DC і BC відповідно; $AC = 4$ см, $BC = 6$ см, $NL = 5$ см. Знайдіть:

1) $|\overrightarrow{CA}|$; 2) $|\overrightarrow{MN}|$; 3) $|\overrightarrow{BD}|$; 4) $|\overrightarrow{CL}|$.

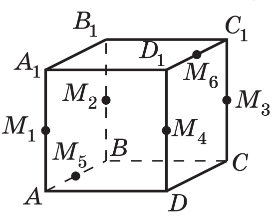


Мал. 14.18

14.16. $ABCD$ – трикутна піраміда (мал. 14.18), M, N і L – середини AD, DC і BC відповідно; $AD = 6$ см, $MN = 2$ см, $BD = 8$ см. Знайдіть:

1) $|\overrightarrow{DA}|$; 2) $|\overrightarrow{AM}|$; 3) $|\overrightarrow{AC}|$; 4) $|\overrightarrow{NL}|$.

14.17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 14.19). Точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 – середини ребер відповідно AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, AB, C_1D_1. Укажіть усі вектори, що:
1) дорівнюють вектору $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$, $\overrightarrow{M_1M_5}$, $\overrightarrow{M_3B}$, $\overrightarrow{AM_3}$;
2) протилежні вектору $\overrightarrow{C_1M_6}$, $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{M_4M_6}$, $\overrightarrow{M_2C}$, $\overrightarrow{M_1C_1}$.



Мал. 14.19

14.18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 14.19). Точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6 – середини ребер AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, AB, C_1D_1 відповідно. Укажіть усі вектори, що:

1) дорівнюють вектору $\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{M_2M_5}$, $\overrightarrow{C_1M_2}$, $\overrightarrow{C_1M_1}$;

2) протилежні вектору $\overrightarrow{CM_3}$, $\overrightarrow{B_1C}$, $\overrightarrow{M_5M_2}$, $\overrightarrow{M_4A}$, $\overrightarrow{B_1M_4}$.

14.19. $QABC$ – тетраедр (мал. 14.20). Точки N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 – середини ребер відповідно QA, QB, QC, AB, AC, BC. Укажіть усі вектори, що:

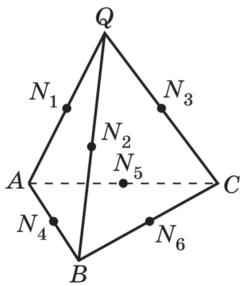
1) дорівнюють вектору $\overrightarrow{N_2N_3}$, $\overrightarrow{N_3N_6}$, $\overrightarrow{N_1N_4}$;

2) протилежні вектору $\overrightarrow{N_1N_2}$, $\overrightarrow{N_2N_6}$, $\overrightarrow{N_3N_5}$.

14.20. $QABC$ – тетраедр (мал. 14.20). Точки N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6 – середини ребер відповідно QA, QB, QC, AB, AC, BC. Укажіть усі вектори, що:

1) дорівнюють вектору $\overrightarrow{N_1N_3}$, $\overrightarrow{N_4N_6}$, $\overrightarrow{N_5N_3}$;

2) протилежні вектору $\overrightarrow{N_5N_6}$, $\overrightarrow{N_4N_1}$, $\overrightarrow{N_3N_2}$.



Мал. 14.20

14.21. Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ і відкладіть:

1) від точки C вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{BC}$;

2) від точки A_1 вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{BB_1}$;

3) від точки D вектор, що дорівнює вектору $3\overrightarrow{BC}$;

4) від точки C_1 вектор, що дорівнює вектору $0{,}5\overrightarrow{CC_1}$.

14.22. Накресліть прямокутний паралелепіпед $KLMNK_1L_1M_1N_1$ і відкладіть:

1) від точки K_1 вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{KK_1}$;

2) від точки N вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{LM}$;

3) від точки M_1 вектор, що дорівнює вектору $2\overrightarrow{LM}$;

4) від точки L вектор, що дорівнює вектору $\frac{1}{3}\overrightarrow{L_1L}$.

14.23. Доведіть, що $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

14.24. Спростіть вираз:

1) $\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{TB}$; 2) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}$;

3) $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{MK}$; 4) $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{TM}$.

14.25. Спростіть вираз:

1) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DK}$; 2) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PF}$;

3) $\overrightarrow{AT}+\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{TL}$; 4) $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{KD}$.

14.26. $KLMNK_1L_1M_1N_1$ – прямокутний паралелепіпед. Чи компланарні такі трійки векторів:

1) $\overrightarrow{KK_1}$, $\overrightarrow{LL_1}$ і $\overrightarrow{MM_1}$; 2) $\overrightarrow{KK_1}$, $\overrightarrow{KL}$ і $\overrightarrow{KN}$;

3) $\overrightarrow{KK_1}$, $\overrightarrow{LL_1}$ і $\overrightarrow{KN}$; 4) $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{MM_1}$ і $\overrightarrow{K_1L_1}$?

14.27. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Чи компланарні такі трійки векторів:

1) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{A_1B_1}$; 2) $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{BB_1}$;

3) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{AA_1}$; 4) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DD_1}$ і $\overrightarrow{D_1C_1}$?

14.28. Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте вектор, який дорівнює:

1) сумі $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$;

2) різниці $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AB_1}$;

3) добутку $2\overrightarrow{AB}$, $0{,}5\overrightarrow{B_1C_1}$.

14.29. Накресліть прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте вектор, який дорівнює:

1) сумі $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_1D_1}$;

2) різниці $\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DC_1}$;

3) добутку $2\overrightarrow{BC}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1D_1}$.

14.30. $QABC$ – тетраедр. Побудуйте вектор, який дорівнює:

1) сумі $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}$;

2) різниці $\overrightarrow{QA}-\overrightarrow{QB}$, $\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{CB}$;

3) добутку $3\overrightarrow{AQ}$, $\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

14.31. $MABC$ – тетраедр. Побудуйте вектор, який дорівнює:

1) сумі $\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$;

2) різниці $\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{AB}$;

3) добутку $4\overrightarrow{BC}$, $\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$.

14.32. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1}=\vec{c}$. На прикладі цього паралелепіпеда впевніться у правильності векторних рівностей:

1) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}+(\vec{a}+\vec{c})$;

2) $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}=\vec{a}+(\vec{c}-\vec{b})$;

3) $\vec{c}-(\vec{a}+\vec{b})=(\vec{c}-\vec{a})-\vec{b}=(\vec{c}-\vec{b})-\vec{a}$.

3 **14.33.** Відомо, що $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$. Чи можливо, що:

1) $|\vec{c}|=|\vec{a}|$, $|\vec{c}|=|\vec{b}|$; 2) $|\vec{c}|=|\vec{a}+\vec{b}|$; 3) $|\vec{c}|>|\vec{a}+\vec{b}|$?

14.34. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{DC}=\vec{c}$. Побудуйте вектори:

1) $\vec{a}-\vec{b}$; 2) $\vec{b}-\vec{c}$; 3) $\vec{c}-\vec{b}$;

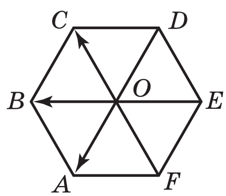
4) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 5) $\vec{a}-(\vec{b}+\vec{c})$; 6) $-\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$.

14.35. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\overrightarrow{CD}=\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1D_1}=\vec{b}$, $\overrightarrow{BC_1}=\vec{c}$. Побудуйте вектори:

1) $\vec{a}-\vec{c}$; 2) $\vec{c}-\vec{a}$; 3) $\vec{c}-\vec{b}$;

4) $\vec{b}-\vec{c}-\vec{a}$; 5) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$; 6) $-\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}$.

14.36. $ABCDEF$ – правильний шестикутник, точка O – його центр (мал. 14.21). До точки O прикладено три сили $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ і $\overrightarrow{OC}$, значення кожної з яких 4 Н. Знайдіть напрям і модуль рівнодійної.



Мал. 14.21

14.37. $KLMN$ – трикутна піраміда. Накресліть вектор:

1) $\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{KM}+2\overrightarrow{LN}$; 2) $\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{NL}-\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$.

14.38. $ABCD$ – трикутна піраміда. Накресліть вектор:

1) $\overrightarrow{DK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{AC}$.

14.39. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Укажіть вектор, початком і кінцем якого є вершини куба, що дорівнює сумі векторів:

1) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{A_1D_1}$; 2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD_1}$.

14.40. $KLMNK_1L_1M_1N_1$ – куб. Укажіть вектор, початком і кінцем якого є вершини куба, що дорівнює сумі векторів:

1) $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{K_1N_1}$; 2) $\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{N_1N}$.

14.41. Дано трикутну піраміду $KLMN$. Доведіть, що:

1) $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LN}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{KM}$; 2) $\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{LK}=\overrightarrow{ML}-\overrightarrow{NK}$.

14.42. Дано трикутну піраміду $ABCD$. Доведіть, що:

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}$.

14.43. Вектори $\vec{a} - 7\vec{b}$ і $\vec{a} + 3\vec{b}$ колінеарні. Доведіть, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні.

14.44. Вектори $\vec{c} + \vec{d}$ і $\vec{c} - \vec{d}$ колінеарні. Доведіть, що вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$ колінеарні.

14.45. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$ також колінеарні. Доведіть, що колінеарними є вектори:

1) $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{c}$; 2) $7\vec{b} - 3\vec{a}$ і $\vec{c}$.

14.46. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – колінеарні, вектори $\vec{b}$ і $\vec{c}$ також колінеарні. Доведіть, що колінеарними є вектори:

1) $\vec{b} - \vec{c}$ і $\vec{a}$; 2) $3\vec{b} + 2\vec{c}$ і $\vec{a}$.

14.47. Точка O – точка перетину діагоналей BD_1 і DB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть таке число λ, що:

1) $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{OB_1} = \lambda\overrightarrow{DB_1}$;

3) $\overrightarrow{OB_1} = \lambda\overrightarrow{B_1D}$; 4) $\overrightarrow{BD_1} = \lambda\overrightarrow{OB}$.

14.48. Точка O – точка перетину діагоналей AC_1 і CA_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть таке число λ, що:

1) $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{C_1A_1}$; 2) $\overrightarrow{OA_1} = \lambda\overrightarrow{OC}$;

3) $\overrightarrow{OA_1} = \lambda\overrightarrow{CA_1}$; 4) $\overrightarrow{A_1C} = \lambda\overrightarrow{OA_1}$.

14.49. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – некомпланарні. Доведіть, що некомпланарними є вектори:

1) $x\vec{a}$, $y\vec{b}$, $z\vec{c}$, де x, y, z – відмінні від нуля числа;

2) $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{a}$.

14.50. Точка K не лежить у площині трикутника ABC, M – середина AB, N – середина BC, $\overrightarrow{KM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{KN} = \vec{n}$. Виразіть вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$.

14.51. Точка M не лежить у площині квадрата $ABCD$, $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{MC} = \vec{c}$, K – середина AD, L – середина CD. Виразіть вектор $\overrightarrow{KL}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$.

14.52. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{c}$. Розкладіть за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ вектор:

1) $\overrightarrow{D_1D}$; 2) $\overrightarrow{BA_1}$; 3) $\overrightarrow{A_1C_1}$; 4) $\overrightarrow{BD_1}$.

14.53. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Розкладіть за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ вектор:

1) $\overrightarrow{CB}$; 2) $\overrightarrow{AB_1}$; 3) $\overrightarrow{BD}$; 4) $\overrightarrow{AC_1}$.

14.54. Нехай K – середина відрізка AB, O – довільна точка простору. Доведіть, що $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.

14.55. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, O – довільна точка простору. Доведіть, що:

1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC_1}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_1}$; 2) $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OD_1}$.

14.56. $ABCD$ – паралелограм, O – довільна точка простору. Доведіть, що $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$.

14.57. $ABCD$ – паралелограм. Точки K і L ділять сторони AB і AD на частини у відношенні $AK : KB = AL : LD = 1 : 2$, $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Виразіть вектор $\overrightarrow{KL}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

14.58. $ABCD$ – ромб. Точки M і N ділять сторони AB і BC на частини у відношенні $BM : MA = BN : NC = 1 : 3$, $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}$. Виразіть вектор $\overrightarrow{NM}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$.

14.59. Точка M – точка перетину медіан трикутника ABC, O – довільна точка простору. Доведіть, що $3\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

14.60. $ABCDEF$ – правильний шестикутник, $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{b}$. Виразіть через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори:

1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{CD}$; 3) $\overrightarrow{AB}$; 4) $\overrightarrow{BC}$; 5) $\overrightarrow{OE}$; 6) $\overrightarrow{EF}$.

14.61. $ABCD$ – паралелограм, діагоналі якого перетинаються у точці O, точка M не належить площині паралелограма, $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{c}$, точка E – середина MC. Розкладіть за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор:

1) $\overrightarrow{MD}$; 2) $\overrightarrow{AE}$; 3) $\overrightarrow{MO}$; 4) $\overrightarrow{EO}$.

14.62. $QABC$ – правильний тетраедр, точка K – середина QC, точка M – середина BC, H – точка перетину медіан трикутника ABC, $\overrightarrow{QA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{QB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{QC}=\vec{c}$. Розкладіть за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор:

1) $\overrightarrow{BK}$; 2) $\overrightarrow{QM}$; 3) $\overrightarrow{QH}$; 4) $\overrightarrow{KH}$.

14.63. $QABC$ – тетраедр. Побудуйте таку точку K, що $\overrightarrow{QK}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}$.

4

14.64. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Укажіть вектор, що дорівнює сумі $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BC}$.

14.65. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Укажіть вектор, що дорівнює сумі $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{C_1B_1}$.

14.66. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ попарно перпендикулярні, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=6$, $|\vec{c}|=3$. Знайдіть модуль вектора $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

14.67. Вектори $\vec{m}$, $\vec{n}$ і $\vec{k}$ попарно перпендикулярні, $|\vec{m}|=|\vec{n}|=2$, $|\vec{k}|=1$. Знайдіть модуль вектора $\vec{a}=\vec{m}+\vec{n}+\vec{k}$.

14.68. Модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відмінні від нуля, до того ж ці вектори неколінеарні. Знайдіть значення m і n, якщо $4\vec{a}+n\vec{b}=m\vec{a}+3\vec{b}$.

14.69. Модулі векторів $\vec{m}$ і $\vec{n}$ відмінні від нуля, до того ж ці вектори неколінеарні. Знайдіть значення a і b, якщо $a\vec{m}+5\vec{n}=7\vec{m}+b\vec{n}$.

14.70. $SABC$ – трикутна піраміда, $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, M – точка перетину медіан трикутника SAC. Розкладіть вектор $\overrightarrow{BM}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

14.71. $KABC$ – трикутна піраміда, $\overrightarrow{KA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{KB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{KC}=\vec{c}$, M – середина AB, N – середина KM. Розкладіть вектор $\overrightarrow{CN}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

14.72. Вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ і $\overrightarrow{MC}$ – некомпланарні, а точка L належить площині трикутника ABC. Знайдіть значення t, якщо:

1) $\overrightarrow{ML}=0,2\overrightarrow{MA}+t\overrightarrow{MB}+0,7\overrightarrow{MC}$;

2) $\overrightarrow{ML}=t\overrightarrow{MA}+3t\overrightarrow{MB}-0,6\overrightarrow{MC}$.

14.73. Вектори $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB}$ і $\overrightarrow{KC}$ – некомпланарні, а точка N належить площині трикутника ABC. Знайдіть значення t, якщо:

1) $\overrightarrow{KN}=0,3\overrightarrow{KA}+t\overrightarrow{KB}-0,2\overrightarrow{KC}$;

2) $\overrightarrow{KN}=-0,2\overrightarrow{KA}+5t\overrightarrow{KB}+t\overrightarrow{KC}$.

14.74. Вектори $\overrightarrow{KA}$, $\overrightarrow{KB}$ і $\overrightarrow{KC}$ – некомпланарні. Чи перетинає відрізок KL площину ABC, якщо:

1) $\overrightarrow{KL}=0,2\overrightarrow{KA}+0,8\overrightarrow{KB}-0,1\overrightarrow{KC}$;

2) $\overrightarrow{KL}=-0,2\overrightarrow{KA}+1,5\overrightarrow{KB}-0,1\overrightarrow{KC}$?

14.75. Вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ і $\overrightarrow{MC}$ – некомпланарні. Чи перетинає відрізок MN площину ABC, якщо:

1) $\overrightarrow{MN}=1,5\overrightarrow{MA}+1,2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$;

2) $\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}-6,5\overrightarrow{MC}$?

14.76. $QABC$ – правильний тетраедр. На продовженні ребер QA, QB і QC тетраедра вибрано точки A_1, B_1, C_1 так, що $MA=AA_1$, $MB_1=3MB$, $MC_1=1,5MC$, $\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{MC}=\vec{c}$.

1) Розкладіть за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор $\overrightarrow{MK}$, де K – точка перетину медіан трикутника $A_1B_1C_1$.

2) У якому відношенні (рахуючи від точки M) площина ABC ділить відрізок MK?

14.77. Нехай M – точка перетину медіан трикутника ABC. Доведіть, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

14.78. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ не лежать в одній площині. Доведіть, що $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1}$.

14.79. Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ не лежать в одній площині. Точка M – точка перетину медіан трикутника ABC, а точка M_1 – точка перетину медіан трикутника $A_1B_1C_1$. Доведіть, що $\overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$.

14.80. Вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ і $\overrightarrow{MC}$ не є компланарними. Відомо, що $\overrightarrow{MK} = 3\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$. У якому відношенні площина ABC ділить відрізок MK, рахуючи від точки M?

14.81. Вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ і $\overrightarrow{MC}$ не є компланарними. Відомо, що $\overrightarrow{MK} = -\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$. У якому відношенні площина ABC ділить відрізок MK, рахуючи від точки M?

14.82. Вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ і $\overrightarrow{MC}$ не є компланарними. Відомо, що $\overrightarrow{MK} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 8\overrightarrow{MC}$. У якому відношенні площина ABC ділить відрізок MK, рахуючи від точки M?

14.83. Кут підйому дороги дорівнює 5°. Використовуючи калькулятор, знайдіть висоту, на яку підніметься пішохід, пройшовши 200 м (мал. 14.22).

Мал. 14.22

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

14.84. Знайдіть координати вектора AB, якщо:

1) $A(-2; 3)$, $B(0; 8)$; 2) $A(4; 15)$, $B(-1; -2)$.

14.85. $\vec{a} = \vec{b}$, $\vec{a}(-2; y)$, $\vec{b}(x; 4)$. Знайдіть x і y.

14.86. Знайдіть модуль вектора $\vec{a}$, якщо:

1) $\vec{a}(-3; 4)$; 2) $\vec{a}(-2; -1)$;

3) $\vec{a}(0; 17)$; 4) $\vec{a}(\sqrt{2}; \sqrt{7})$.

14.87. Дано: $\vec{a}(-2; 5)$, $\vec{b}(4; 7)$. Знайдіть координати вектора:

1) $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

14.88. Дано: $\vec{a}(4; -8)$, $\vec{b}(5; 1)$. Знайдіть координати вектора:

1) $\vec{m} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$; 2) $\vec{n} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$;

3) $\vec{k} = 5\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$; 4) $\vec{l} = 3\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$.

14.89. Чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(-2; 1)$, $\vec{b}(-8; 4)$; 2) $\vec{a}(1; 5)$, $\vec{b}(-2; 10)$?

14.90. Доведіть *теорему Ейлера*: в будь-якому чотирикутнику сума квадратів сторін дорівнює сумі квадратів його діагоналей, доданій до збільшеного в 4 рази квадрата відрізка, що сполучає середини діагоналей.

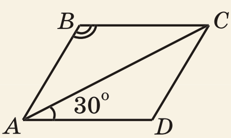
ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 14

1. Знайдіть площу прямокутного трикутника, гіпотенуза якого дорівнює 10 см, а один з катетів – 6 см.

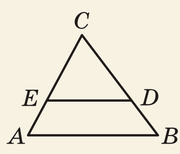
А	Б	В	Г	Д
24 см^2	30 см^2	40 см^2	60 см^2	інша відповідь

2. На малюнку зображено ромб $ABCD$, $\angle CAD = 30°$. Знайдіть градусну міру кута ABC.



А	Б	В	Г	Д
30°	60°	90°	120°	150°

3. Дано трикутник ABC, $ED \parallel AB$, $CE : EA = 2 : 1$. Знайдіть відношення площ трикутників CED і CAB.

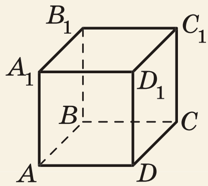


А	Б	В	Г	Д
1 : 2	2 : 3	3 : 4	4 : 9	5 : 9

4. Дві сторони трикутника дорівнюють 15 см і 20 см. Яким найбільшим цілим числом (у см) може бути довжина третьої сторони?

А	Б	В	Г	Д
33 см	34 см	35 см	36 см	37 см

5. На малюнку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між площиною (1–4) та двома прямими, що належать цій площині (А–Д).



Площина		*Дві прямі*	
1	(ABC)	**А**	A_1C, D_1B
2	(ABB_1)	**Б**	AB, C_1D_1
3	(A_1BC)	**В**	B_1D, BD_1
4	(B_1BD)	**Г**	AB, CD
		Д	AA_1, BA_1

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

6. Дві сторони трикутника відносяться як $7 : 3\sqrt{2}$, а третя дорівнює 60 см. Знайдіть більшу з невідомих сторін трикутника (у см), якщо кут між невідомими сторонами трикутника дорівнює половині прямого кута.

§ 15. КООРДИНАТИ ВЕКТОРА. ДІЇ НАД ВЕКТОРАМИ, ЩО ЗАДАНІ КООРДИНАТАМИ

1. Координати і модуль вектора. Рівність векторів

На площині вектор визначається двома своїми координатами, а в просторі – трьома. У просторі арифметичні дії над векторами виконують за тими самими правилами, що й на площині.

У просторовій системі координат кожний вектор можна задати трійкою чисел – *координатами вектора у просторі*.

Координатами вектора $\overrightarrow{AB}(x; y; z)$ з початком $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем $B(x_2; y_2; z_2)$ називають числа $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$ і $z = z_2 - z_1$.

Записують вектор $\overrightarrow{AB}$, указуючи його координати, так: $\overrightarrow{AB}(x; y; z)$. Наприклад, $\overrightarrow{CD}(-2; 4; 0)$, $\vec{p}(-4; -2; 11)$.

Задача 1. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

1) $A(-7; 2; 1)$, $B(5; 0; 8)$; 2) $A(3; 4; 2)$, $B(3; 4; -2)$.

Р о з в ' я з а н н я. Нехай $\overrightarrow{AB}(x; y; z)$. Тоді:

1) $x = 5 - (-7)$; $y = 0 - 2$; $z = 8 - 1$. Отже, $\overrightarrow{AB}(12; -2; 7)$.

2) $x = 3 - 3$; $y = 4 - 4$; $z = -2 - 2$. Тому $\overrightarrow{AB}(0; 0; -4)$.

В і д п о в і д ь. 1) $\overrightarrow{AB}(12; -2; 7)$; 2) $\overrightarrow{AB}(0; 0; -4)$.

Координатами вектора можуть бути будь-які дійсні числа. Усі координати нульового вектора дорівнюють нулю: $\vec{0}(0; 0; 0)$.

Як і на площині,

рівні вектори мають відповідно рівні координати, і навпаки, якщо у векторів відповідно рівні координати, то вектори рівні.

Задача 2. Дано точки $A(2; -3; 4)$, $B(3; -3; 7)$, $C(-4; 1; 0)$, $D(x; y; z)$. Знайти x, y і z, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Р о з в ’ я з а н н я.

1) $\overrightarrow{AB}(3 - 2; -3 - (-3); 7 - 4)$, тобто $\overrightarrow{AB}(1; 0; 3)$.

2) $\overrightarrow{CD}(x - (-4); y - 1; z - 0)$, тобто $\overrightarrow{CD}(x + 4; y - 1; z)$.

3) Оскільки $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $x + 4 = 1$; $y - 1 = 0$; $z = 3$.
Отже, маємо: $x = -3$; $y = 1$; $z = 3$.

В і д п о в і д ь. $x = -3$; $y = 1$; $z = 3$.

Відомо, що відстань між точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ знаходять за формулою $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Оскільки $x = x_2 - x_1$, $y = y_2 - y_1$, $z = z_2 - z_1$ – координати вектора $\overrightarrow{AB}$, то

модуль вектора $\overrightarrow{AB}(x; y; z)$ дорівнює $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Задача 3. Знайти модуль вектора:

1) $\overrightarrow{DK}(-1; 2; -2)$; 2) $\overrightarrow{MN}(4; 0; 5)$.

Р о з в ’ я з а н н я. 1) $\left|\overrightarrow{DK}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$.

2) $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{41}$.

В і д п о в і д ь. 1) $\left|\overrightarrow{DK}\right| = 3$; 2) $\left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{41}$.

Задача 4. Дано: $\vec{m}(4; \sqrt{5}; z)$, $|\vec{m}| = 5$. Знайти z.

Р о з в ’ я з а н н я. Оскільки $|\vec{m}| = \sqrt{4^2 + (\sqrt{5})^2 + z^2} = \sqrt{21 + z^2}$, то $\sqrt{21 + z^2} = 5$. Маємо рівняння:

$21 + z^2 = 25$; $z^2 = 4$; $z = 2$ або $z = -2$.

В і д п о в і д ь. 2 або -2.

2. Дії над векторами, що задані координатами

У просторі арифметичні дії над векторами (додавання, віднімання, множення на число) виконують так само, як і на площині.

Сумою векторів $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ **і** $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ **називають вектор** $\vec{c}(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$**.**

Так само як і на площині, на основі цього означення легко довести векторну рівність $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Тому означення суми векторів, які задано координатами, не суперечать правилам трикутника і паралелограма, які ми розглянули в попередньому параграфі.

Різницею векторів $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ **і** $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ **називають вектор** $\vec{d}(x_3;\ y_3;\ z_3)$**, який у сумі з вектором** $\vec{b}$ **дає вектор** $\vec{a}$**:**

$$\vec{d} + \vec{b} = \vec{a}.$$

Оскільки $x_3 + x_2 = x_1$; $y_3 + y_2 = y_1$; $z_3 + z_2 = z_1$, то $x_3 = x_1 - x_2$; $y_3 = y_1 - y_2$; $z_3 = z_1 - z_2$, тому

різницею векторів $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ **і** $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ **є вектор** $\vec{d}(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$**.**

Задача 5. Знайти координати векторів $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a}(-2;\ -3;\ 8)$, $\vec{b}(2;\ 4;\ 11)$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $\vec{c}(-2 + 2;\ -3 + 4;\ 8 + 11)$, тобто $\vec{c}(0;\ 1;\ 19)$.

2) $\vec{d}(-2 - 2;\ -3 - 4;\ 8 - 11)$, тобто $\vec{d}(-4;\ -7;\ -3)$.

В і д п о в і д ь. $\vec{c}(0;\ 1;\ 19)$, $\vec{d}(-4;\ -7;\ -3)$.

Добутком вектора $\vec{a}(x;\ y;\ z)$ **на число** λ **називають вектор** $\vec{b}(\lambda x;\ \lambda y;\ \lambda z)$**.**

Це означення не суперечить означенню добутку вектора на число з попереднього параграфа.

Зазначені дії дають змогу знаходити координати будь-якого вектора, який записано у вигляді алгебраїчної суми векторів, координати яких відомо.

Задача 6. Дано вектори $\vec{m}(-2;\ 8;\ 12)$ і $\vec{n}(4;\ 0;\ 1)$. Знайти координати вектора $\vec{c} = 0{,}5\vec{m} - 3\vec{n}$.

Р о з в ' я з а н н я. Розв'язання задачі зручно записати так:

$$-\begin{array}{r} \frac{1}{2}\vec{m}(-1;4;6) \\ 3\vec{n}(12;0;3) \\ \hline \vec{c}(-13;4;3) \end{array}$$

В і д п о в і д ь. $\vec{c}(-13;\ 4;\ 3)$.

3. Ознака колінеарності векторів

Нехай дано вектори $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Якщо вони колінеарні, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$; $x_2 = \lambda x_1$; $y_2 = \lambda y_1$; $z_2 = \lambda z_1$. Тоді (якщо $x_1 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $z_1 \neq 0$) матимемо: $\lambda = \frac{x_2}{x_1}$; $\lambda = \frac{y_2}{y_1}$; $\lambda = \frac{z_2}{z_1}$, тобто $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}$ – *координати колінеарних векторів пропорційні*.

Маємо *ознаку колінеарності векторів*.

Нехай дано вектори $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

1) Якщо координати обох векторів відмінні від нуля і $\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \lambda$, то вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, причому, якщо $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а якщо $\lambda < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

2) Якщо ж у кожного з двох векторів одна й та сама координата дорівнює нулю, а інші утворюють пропорцію, то вектори колінеарні.

Задача 7. Визначити, колінеарні чи ні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Якщо відповідь ствердна, то вказати, однаково чи протилежно вони напрямлені.

1) $\vec{a}(-1;\ 3;\ -4)$, $\vec{b}(2;\ -6;\ 8)$; 2) $\vec{a}(7;\ 1;\ -2)$, $\vec{b}(14;\ 2;\ -3)$;
3) $\vec{a}(2;\ 0;\ 3)$, $\vec{b}(4;\ 0;\ 6)$; 4) $\vec{a}(0;\ 2;\ 7)$, $\vec{b}(1;\ -4;\ -14)$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $\frac{2}{-1} = \frac{-6}{3} = \frac{8}{-4} = -2 < 0$, тому $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

2) $\frac{14}{7} = \frac{2}{1} \neq \frac{-3}{-2}$, тому $\vec{a}$ і $\vec{b}$ неколінеарні.

3) Ординати обох векторів дорівнюють нулю, перевіримо пропорційність двох інших координат: $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2 > 0$, отже, $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

4) Абсциса вектора $\vec{a}$ дорівнює нулю, а абсциса вектора $\vec{b}$ не дорівнює нулю. Тому вектори неколінеарні.

В і д п о в і д ь. 1) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$; 2) вектори неколінеарні;
3) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$; 4) вектори неколінеарні.

Задача 8. При яких значеннях x і y вектори $\vec{a}(-3;\ y;\ 6)$ і $\vec{b}(x;\ 10;\ -3)$ колінеарні?

Р о з в ' я з а н н я. За ознакою колінеарності: $\frac{x}{-3} = \frac{10}{y} = \frac{-3}{6}$.

Тоді з пропорції отримаємо: $x = 1{,}5$; $y = -20$.

Відповідь. $x = 1{,}5$; $y = -20$.

Задача 9. Чи компланарні вектори $\vec{a}(-1;\ 0;\ 2)$, $\vec{b}(2;\ 3;\ 4)$ і $\vec{c}(0;\ 3;\ 8)$?

Розв'язання. 1) $\dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{0}{3}$, тому $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неколінеарні.

2) Якщо вектор $\vec{c}$ можна розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – компланарні, у протилежному випадку вони не є компланарними.

3) Припустимо, що існують такі числа x і y, при яких справджується векторна рівність $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Звідси маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0 = -x + 2y, \\ 3 = 0x + 3y, \\ 8 = 2x + 4y, \end{cases}$$

з якої отримаємо, що $x = 2$, $y = 1$.

4) Отже, $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, тобто вектор $\vec{c}$ можна розкласти за векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а тому трійка векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ є компланарною.

Відповідь. Так.

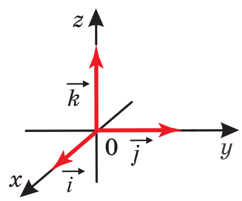
4. Розкладання вектора за трьома координатними векторами

У просторовій прямокутній системі координат можемо на кожній додатній півосі від початку координат відкласти *одиничний вектор*, тобто вектор, довжина якого дорівнює одиниці (мал. 15.1). Позначимо через $\vec{i}$ – одиничний вектор осі абсцис, через $\vec{j}$ – одиничний вектор осі ординат, через $\vec{k}$ – одиничний вектор осі аплікат. Вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$ називають *координатними векторами* (або *ортами*).

Легко здогадатися, які координати одиничних векторів: $\vec{i}(1;\ 0;\ 0)$; $\vec{j}(0;\ 1;\ 0)$; $\vec{k}(0;\ 0;\ 1)$. Оскільки вони є некомпланарними, то будь-який вектор $\vec{p}(x;\ y;\ z)$ можна розкласти за векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$. Легко помітити, що

$$\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Справді:
$$\begin{array}{r} x\vec{i}(x;\ 0;\ 0) \\ +\ y\vec{j}(0;\ y;\ 0) \\ +\ z\vec{k}(0;\ 0;\ z) \\ \hline \vec{p}(x;\ y;\ z) \end{array}.$$



Мал. 15.1

Отже,

будь-який вектор $\vec{p}(x; y; z)$ можна розкласти за трьома одиничними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$ і $\vec{k}$: $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, причому коефіцієнти розкладу x, y, z визначаються єдиним чином.

З попереднього параграфа вам відомо, що вектор $\vec{m}$ можна розкласти за будь-якими некомпланарними векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто подати у вигляді $\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$. Якщо координати векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і $\vec{m}$ відомо, то для знаходження коефіцієнтів розкладу α, β, γ треба розв'язати систему з трьох лінійних рівнянь, кожне з яких може містити до трьох невідомих (α, β і γ). Такі системи ви розглядали в курсі алгебри.

• Що таке координати вектора? • Який зв'язок між рівністю векторів і їх координатами? • Як знайти модуль вектора $\overrightarrow{AB}(x; y; z)$? • Який вектор називають сумою векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$? • Що називають різницею векторів? Як знайти різницю векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$? • Який вектор називають добутком вектора $\vec{a}(x; y; z)$ на число λ? • Сформулюйте ознаку колінеарності векторів. • Які вектори називають одиничними векторами? • Як будь-який вектор $\vec{p}(x; y; z)$ розкласти за векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

15.1. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{CD}$, якщо:
1) $C(2; -3; 4)$, $D(0; 4; 4)$; 2) $C(5; -1; 2)$, $D(2; -3; -2)$.

15.2. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:
1) $A(3; -5; 4)$, $B(3; 2; 0)$; 2) $A(-8; 2; 5)$, $B(-3; 4; -5)$.

15.3. Знайдіть модуль вектора:
1) $\vec{a}(0; -3; 4)$; 2) $\vec{b}(2; -3; 6)$.

15.4. Знайдіть модуль вектора:
1) $\vec{m}(6; 0; -8)$; 2) $\vec{n}(-1; -2; 2)$.

15.5. Дано: $\vec{m}(x; y; -2)$ і $\vec{n}(0; -1; z)$, $\vec{m} = \vec{n}$. Знайдіть x, y і z.

15.6. Дано: $\vec{a}(x; -3; z)$ і $\vec{b}(4; y; 0)$, $\vec{a} = \vec{b}$. Знайдіть x, y і z.

15.7. Знайдіть суму $\vec{a} + \vec{b}$, якщо:
1) $\vec{a}(5; -1; 2)$, $\vec{b}(0; 1; 0)$; 2) $\vec{a}(-4; -2; 8)$, $\vec{b}(4; -2; 4)$.

15.8. Знайдіть суму $\vec{c} + \vec{d}$, якщо:
1) $\vec{c}(4; 2; -5)$, $\vec{d}(0; 0; 5)$; 2) $\vec{c}(2; -3; 4)$, $\vec{d}(-3; -3; 5)$.

15.9. Знайдіть різницю $\vec{c} - \vec{d}$, якщо:

1) $\vec{c}(4; -3; -7)$, $\vec{d}(0; 3; 2)$; 2) $\vec{c}(2; 0; -5)$, $\vec{d}(2; -8; -1)$.

15.10. Знайдіть різницю $\vec{m} - \vec{n}$, якщо:

1) $\vec{m}(2; -5; 4)$, $\vec{n}(-1; 0; 4)$; 2) $\vec{m}(-3; 0; -7)$, $\vec{n}(-3; -1; -2)$.

15.11. Дано вектор $\vec{a}(-2; 0; 8)$. Знайдіть координати вектора:

1) $4\vec{a}$; 2) $-\frac{1}{2}\vec{a}$; 3) $10\vec{a}$; 4) $-3\vec{a}$.

15.12. Дано вектор $\vec{b}(3; -6; 0)$. Знайдіть координати вектора:

1) $2\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{b}$; 3) $8\vec{b}$; 4) $-2\vec{b}$.

15.13. Співнапрямлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$, якщо: 1) $\vec{m} = -0,5\vec{n}$; 2) $\vec{n} = 4\vec{m}$?

15.14. Співнапрямлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо: 1) $\vec{c} = \frac{1}{3}\vec{d}$; 2) $\vec{d} = -3\vec{c}$?

2 **15.15.** Знайдіть модуль вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо:

1) $M(-1; 2; 3)$, $N(1; 8; 0)$; 2) $M(2; -1; 3)$, $N(2; 4; 9)$.

15.16. Знайдіть модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо:

1) $A(0; 2; 5)$, $B(6; 5; 7)$; 2) $A(3; -2; 7)$, $B(5; -2; 11)$.

15.17. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$, якщо $A(2; -1; 4)$, $B(5; -3; 7)$, $C(1; 1; 2)$, $D(4; -1; 4)$?

15.18. Чи рівні вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{KL}$, якщо $M(0; -1; 2)$, $N(4; -3; 5)$, $K(-1; 1; 3)$, $L(3; -1; 6)$?

15.19. Дано точки $K(-2; 3; 4)$, $M(0; y; -3)$, $N(x; 3; -5)$, $L(2; 2; z)$. Знайдіть x, y і z, якщо $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{NL}$.

15.20. Дано точки $A(0; 2; -3)$, $B(3; -2; 5)$, $C(x; y; 5)$, $D(-2; 3; z)$. Знайдіть x, y і z, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

15.21. Дано: $\vec{a}(3; -4; 5)$, $\vec{b}(x; y; z)$, $\vec{c}(-4; 0; 8)$, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$. Знайдіть x, y і z.

15.22. Дано: $\vec{a}(4; -8; 9)$, $\vec{b}(x; y; z)$, $\vec{c}(0; 2; -10)$, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$. Знайдіть x, y і z.

15.23. Дано вектори $\vec{m}(-2; 1; 0)$ і $\vec{n}(2; -1; 2)$. Знайдіть координати вектора:

1) $2\vec{m} + \vec{n}$; 2) $\vec{m} - 3\vec{n}$; 3) $3\vec{m} + 4\vec{n}$; 4) $5\vec{m} - 2\vec{n}$.

15.24. Дано вектори $\vec{a}(0; -1; 4)$ і $\vec{b}(1; -2; 3)$. Знайдіть координати вектора:

1) $3\vec{a} + \vec{b}$; 2) $\vec{a} - 2\vec{b}$; 3) $2\vec{a} + 4\vec{b}$; 4) $5\vec{a} - 3\vec{b}$.

15.25. Чи колінеарні вектори:

1) $\vec{a}(2; -1; 3)$ і $\vec{b}(4; -2; 6)$; 2) $\vec{m}(0; 2; 6)$ і $\vec{n}(0; -4; 12)$?

15.26. Чи колінеарні вектори:

1) $\vec{c}(1; 2; -4)$ і $\vec{b}(2; 4; 8)$; 2) $\vec{a}(1; -2; 0)$ і $\vec{b}(2; -4; 0)$?

15.27. Дано вектор $\vec{a}(0; -5; 12)$. Знайдіть модуль вектора:

1) $-\vec{a}$; 2) $2\vec{a}$.

15.28. Дано вектор $\vec{b}(-6; 0; 8)$. Знайдіть модуль вектора:

1) $-\vec{b}$; 2) $3\vec{b}$.

15.29. Серед векторів $\vec{a}(1; -2; 3)$, $\vec{b}(-2; 4; -6)$, $\vec{c}(2; -4; -6)$, $\vec{d}(-0,1; 0,2; -0,3)$ знайдіть усі пари співнапрямлених і протилежно напрямлених векторів.

15.30. Серед векторів $\vec{m}(-1; 1; -2)$, $\vec{n}(3; -3; 6)$, $\vec{k}(-0,1; 0,1; -0,2)$, $\vec{j}(2; -2; -4)$ знайдіть усі пари співнапрямлених і протилежно напрямлених векторів.

15.31. Дано вектори $\vec{a}(-1; 2; -2)$ і $\vec{b}(4; 0; 3)$. Знайдіть:

1) $|\vec{a}| + |\vec{b}|$; 2) $|\vec{a} + \vec{b}|$;

3) $|\vec{a}| - |\vec{b}|$; 4) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

15.32. Дано вектори $\vec{m}(-2; 3; -6)$ і $\vec{n}(-6; 0; 8)$. Знайдіть:

1) $|\vec{m}| + |\vec{n}|$; 2) $|\vec{m} + \vec{n}|$;

3) $|\vec{m}| - |\vec{n}|$; 4) $|\vec{m} - \vec{n}|$.

15.33. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб (мал. 15.2), ребро якого дорівнює 1. Знайдіть координати вектора:

1) $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB_1}$;

3) $\overrightarrow{A_1C_1}$; 4) $\overrightarrow{A_1C}$;

5) $\overrightarrow{DB_1}$; 6) $\overrightarrow{DC_1}$;

7) $\overrightarrow{BC_1}$; 8) $\overrightarrow{DA_1}$.

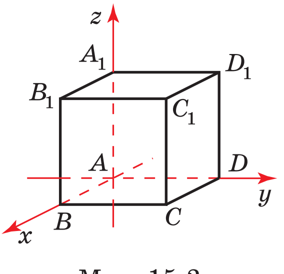
15.34. На малюнку 15.2 зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро якого дорівнює 1. Знайдіть координати вектора:

1) $\overrightarrow{AD}$; 2) $\overrightarrow{AC_1}$;

3) $\overrightarrow{A_1B_1}$; 4) $\overrightarrow{B_1D}$;

5) $\overrightarrow{CA_1}$; 6) $\overrightarrow{AB_1}$;

7) $\overrightarrow{B_1A}$; 8) $\overrightarrow{B_1C}$.



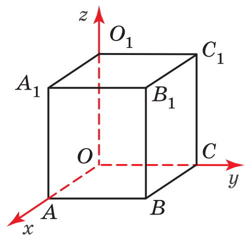
Мал. 15.2

3 **15.35.** $OABCO_1A_1B_1C_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 15.3), $OA = 3$, $OC = 4$, $OO_1 = 5$. Знайдіть координати вектора:

1) $\overrightarrow{AO}$; 2) $\overrightarrow{OA_1}$; 3) $\overrightarrow{BO}$;
4) $\overrightarrow{O_1B}$; 5) $\overrightarrow{C_1A}$; 6) $\overrightarrow{B_1C}$.

15.36. $OABCO_1A_1B_1C_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 15.3), $OA = 2$, $OC = 4$, $OO_1 = 7$. Знайдіть координати вектора:

1) $\overrightarrow{CO}$; 2) $\overrightarrow{OB_1}$; 3) $\overrightarrow{A_1O}$;
4) $\overrightarrow{O_1C_1}$; 5) $\overrightarrow{A_1C}$; 6) $\overrightarrow{BC_1}$.



Мал. 15.3

15.37. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник з вершинами в точках $A(3;\ 1;\ 4)$, $B(1;\ 4;\ 7)$, $C(3;\ -1;\ 5)$, $D(5;\ -4;\ 2)$ є паралелограмом.

15.38. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник з вершинами в точках $K(1;\ -1;\ 0)$, $L(4;\ 1;\ 4)$, $M(8;\ 3;\ -1)$, $N(5;\ 1;\ -5)$ є паралелограмом.

15.39. Модуль вектора $\vec{p}(-1;\ 2;\ z)$ дорівнює 3. Знайдіть z.

15.40. Модуль вектора $\vec{t}(-2;\ y;\ 6)$ дорівнює 7. Знайдіть y.

15.41. Дано точки $A(0;\ 2;\ -6)$ і $B(4;\ 10;\ -12)$. Знайдіть координати точки D такої, що $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} = \vec{0}$.

15.42. Дано точки $C(-2;\ 0;\ 4)$ і $D(6;\ 8;\ -2)$. Знайдіть координати точки K такої, що $\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{DK} = \vec{0}$.

15.43. Дано: $\vec{a}(-2;\ 3;\ -1)$, $\vec{b}(4;\ 0;\ 8)$. Знайдіть модуль вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

15.44. Дано: $\vec{c}(-1;\ 0;\ 6)$, $\vec{d}(-2;\ 4;\ -28)$. Знайдіть модуль вектора $\vec{a} = 3\vec{c} + 0{,}5\vec{d}$.

15.45. При яких значеннях m і n колінеарні вектори:
1) $\vec{p}(4;\ m;\ -2)$ і $\vec{t}(6;\ 9;\ n)$; 2) $\vec{c}(0;\ 2;\ -4)$ і $\vec{d}(m;\ -1;\ n)$?
Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

15.46. При яких значеннях m і n колінеарні вектори:
1) $\vec{a}(2;\ 4;\ m)$ і $\vec{b}(-1;\ n;\ 2)$; 2) $\vec{k}(6;\ 0;\ m)$ і $\vec{e}(2;\ n;\ 1)$?
Співнапрямлені чи протилежно напрямлені ці вектори?

15.47. Знайдіть усі значення m, при яких вектори $\vec{a}(m;\ 5 - m;\ 3)$ і $\vec{b}(2;\ 7m + 1;\ 5 + m)$ колінеарні.

15.48. Знайдіть усі значення n, при яких вектори $\vec{c}(n;\ 3 - n;\ 4)$ і $\vec{d}(4;\ 3n - 4;\ 10 - n)$ колінеарні.

15.49. Відомо, що $\vec{n} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, $\vec{n}(1; -11; 6)$, $\vec{a}(-1; 2; 3)$. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$.

15.50. Відомо, що $\vec{m} = 4\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{m}(2; -9; 4)$, $\vec{b}(2; 1; -4)$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$.

4 **15.51.** Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(3; -2; 2)$, $B(0; 1; 5)$, $C(5; 2; 6)$, $D(8; -1; 3)$ є ромбом.

15.52. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник $ABCD$ з вершинами $A(0; 5; 3)$, $B(0; 1; 3)$, $C(5; 1; 7)$, $D(5; 5; 7)$ є прямокутником.

15.53. Модуль вектора $\vec{a}(x; y; z)$ дорівнює $\sqrt{14}$. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, якщо його ордината в 3 рази більша за його аплікату, а апліката у 2 рази менша за абсцису цього вектора.

15.54. Модуль вектора $\vec{b}(x; y; z)$ дорівнює $\sqrt{33}$. Знайдіть координати цього вектора, якщо значення x і y рівні між собою, а координата z на 3 більша за кожну з них.

15.55. Дано вектори $\vec{a}(1; y; -2)$, $\vec{b}(x; 4; 3)$ і $\vec{c}(3; -2; 4)$. При яких значеннях x і y модуль вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ буде найменшим?

15.56. Дано вектори $\vec{p}(x; -3; 4)$, $\vec{m}(1; 0; -2)$ і $\vec{n}(-3; 5; z)$. При яких значеннях x і z модуль вектора $\vec{p} + \vec{m} + \vec{n}$ буде найменшим?

15.57. Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник з вершинами в точках $A(0; 5; -4)$, $B(6; 8; -1)$, $C(6; 3; 4)$, $D(-2; -1; 0)$ є трапецією.

15.58. Доведіть за допомогою векторів, що точки $M(3; 4; 5)$, $N(-3; -3; -6)$ і $P(9; 11; 16)$ лежать на одній прямій.

15.59. Чи компланарні вектори:

1) $\vec{a}(-2; 4; 1)$, $\vec{b}(3; 0; -1)$, $\vec{c}(-9; 12; 4)$;

2) $\vec{a}(0; 1; 2)$, $\vec{b}(-1; 4; 5)$, $\vec{c}(-1; 5; 9)$?

15.60. Чи компланарні вектори:

1) $\vec{a}(-2; 3; 4)$, $\vec{b}(1; 0; 5)$, $\vec{c}(-3; 2; 0)$;

2) $\vec{a}(1; 0; 3)$, $\vec{b}(2; -1; 4)$, $\vec{c}(5; -1; 13)$?

15.61. Ширина хокейних воріт дорівнює 6 футів, висота – 4 фути. Знайдіть наближену площу воріт в квадратних метрах з точністю до двох знаків після коми.

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

15.62. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(-2;\ 3)$, $\vec{b}(0;\ 5)$; 2) $\vec{a}(12;\ 5)$, $\vec{b}(-1;\ 1)$.

15.63. Знайдіть скалярний квадрат вектора $\vec{a}$, якщо:

1) $\vec{a}(-2;\ 1)$; 2) $\vec{a}(4;\ 3)$.

15.64. Дано $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \varphi$. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 0°$; 2) $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 4$, $\varphi = 30°$;

3) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 7$, $\varphi = 90°$; 4) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 10$, $\varphi = 120°$.

15.65. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $\vec{a}(1;\ 1)$, $\vec{b}(3;\ 0)$.

15.66. Чи перпендикулярні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

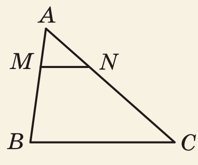
1) $\vec{a}(-2;\ 6)$, $\vec{b}(12;\ 4)$; 2) $\vec{a}(4;\ 1)$, $\vec{b}(-2;\ 7)$?

15.67. (*Задача Я. Штейнера.*) Доведіть, що коли з'єднати точку E перетину діагоналей трапеції з точкою F перетину її непаралельних сторін, то пряма EF поділить більшу основу трапеції навпіл.

Перевірте свою компетентність

Завдання № 15

1. У трикутнику ABC $MN \parallel BC$, $AM = \frac{1}{3}AB$. Знайдіть MN, якщо $BC = 12$ см.



А	Б	В	Г	Д
3 см	4 см	5 см	6 см	неможливо знайти

2. Кути трикутника відносяться як 2 : 3 : 4. Знайдіть різницю між більшим і меншим кутами трикутника.

А	Б	В	Г	Д
10°	20°	30°	40°	60°

3. У квадрат, площа якого дорівнює 64 см^2, вписано коло. Знайдіть його довжину.

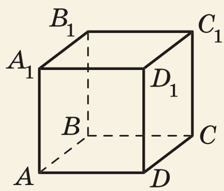
А	Б	В	Г	Д
2π см	4π см	8π см	16π см	інша відповідь

4. Укажіть довжину відрізка AB, якщо $A(0; -2; 4)$, $B(4; -2; 7)$.

А	Б	В	Г	Д
2	3	4	5	6

5. На малюнку зображено куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення	*Закінчення речення*
1 Пряма AC	**А** перпендикулярна до площини ABC.
2 Пряма BB_1	**Б** паралельна площині ABC.
3 Пряма DC_1	**В** належить площині ABC.
4 Пряма B_1D_1	**Г** має з площиною ABC лише дві спільні точки.
	Д утворює з площиною ABC кут 45°.



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Медіани трикутника взаємно перпендикулярні та дорівнюють 12 см і 15 см. Знайдіть площу трикутника (у см^2).

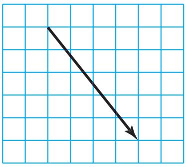
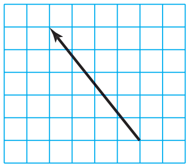
ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 6

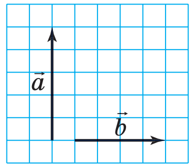
Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1 **1.** Знайдіть довжину відрізка MN, якщо $M(-3; 4; 0)$, $N(-1; -2; 9)$.

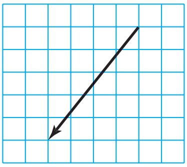
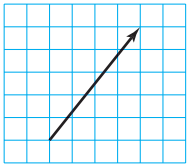
А. 9 **Б.** 11 **В.** 12 **Г.** 13

2. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (мал. 15.4). На якому з малюнків зображено суму цих векторів?

А.  **Б.** 



Мал. 15.4

В.  **Г.** 

3. Укажіть модуль вектора $\vec{m}(6; -3; 2)$.

А. 5 **Б.** 6 **В.** 7 **Г.** 8

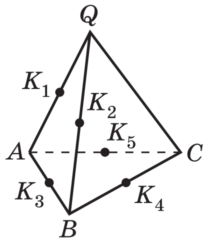
2

4. Точка A – середина відрізка KL, $A(-2; 1; 2)$, $K(4; 3; -8)$. Знайдіть координати точки L.

А. $(-8; -1; 12)$ **Б.** $(0; -1; 12)$
В. $(2; 4; -6)$ **Г.** $(1; 2; -3)$

5. $QABC$ – тетраедр (мал. 15.5). Точки K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 – середини ребер QA, QB, AB, BC і AC відповідно. Укажіть вектор, протилежний вектору $\overrightarrow{K_1K_2}$.

А. $\overrightarrow{AK_3}$ **Б.** $\overrightarrow{K_5K_4}$
В. $\overrightarrow{BA}$ **Г.** $\overrightarrow{BK_3}$



Мал. 15.5

6. Дано вектори $\vec{a}(-1; 0; 2)$ і $\vec{b}(4; -2; 6)$. Знайдіть координати вектора $\vec{m} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

А. $\vec{m}(-1; -1; 9)$ **Б.** $\vec{m}(-5; 2; 3)$
В. $\vec{m}(-5; 1; 3)$ **Г.** $\vec{m}(-5; 2; -4)$

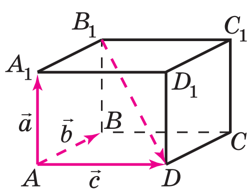
3

7. На осі ординат знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(-2; 1; 4)$ і $B(1; 3; 5)$.

А. $(0; 3{,}5; 0)$ **Б.** $(0; 3; 0)$ **В.** $(0; 1{,}75; 0)$ **Г.** $(0; 4; 0)$

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 15.6), $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Розкладіть за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор $\overrightarrow{B_1D}$.

А. $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ **Б.** $-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$
В. $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ **Г.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



Мал. 15.6

9. Дано точки $M(-6;\ 0;\ 2)$ і $N(4;\ 12;\ -8)$. Знайдіть координати точки A такої, що $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{NA} = \vec{0}$.

А. $(5;\ 6;\ -3)$ **Б.** $(-2;\ 12;\ -6)$
В. $(-1;\ 6;\ -3)$ **Г.** $(-10;\ -12;\ 10)$

4 **10.** Чи лежать точки $C(-3;\ 4;\ -1)$, $D(-9;\ -14;\ 20)$ і $E(-5;\ -2;\ 6)$ на одній прямій? Якщо відповідь позитивна, укажіть, яка з точок лежить між двома іншими.

А. Точки не лежать на одній прямій
Б. Точка C лежить між точками D і E
В. Точка D лежить між точками C і E
Г. Точка E лежить між точками C і D

11. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – попарно перпендикулярні, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$. Знайдіть $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$.

А. 3 **Б.** 4 **В.** 5 **Г.** Знайти неможливо

12. Визначте за допомогою векторів вид чотирикутника $ABCD$, якщо $A(3;\ 0;\ 1)$, $B(-5;\ -4;\ -3)$, $C(-3;\ 2;\ -7)$, $D(3;\ 5;\ -4)$.

А. Ромб, що не є квадратом **Б.** Трапеція
В. Прямокутник, що не є квадратом **Г.** Квадрат

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 13–15

1 **1.** Знайдіть довжину відрізка AB, якщо $A(6;\ -2;\ 1)$, $B(4;\ 4;\ -2)$.

2. Накресліть вектори $\overrightarrow{MB}$ і $\overrightarrow{MC}$. Побудуйте їх суму та різницю.

3. Знайдіть модуль вектора: 1) $\vec{a}(-2;\ 3;\ -6)$; 2) $\vec{b}(-1;\ 0;\ 3)$.

2 **4.** Точка P – середина відрізка CD. Знайдіть координати точки C, якщо $P(-1;\ 8;\ 7)$, $D(3;\ 1;\ 9)$.

5. $QABC$ – тетраедр (мал. 15.5). Точки K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 – середини ребер QA, QB, AB, BC і AC відповідно. Укажіть усі вектори, що:

1) дорівнюють вектору $\overrightarrow{K_4K_5}$;

2) протилежні вектору $\overrightarrow{K_3A}$.

6. Дано вектори $\vec{a}(4;\ -2;\ 8)$ і $\vec{b}(3;\ 0;\ -2)$. Знайдіть координати вектора:

1) $\vec{a} - 2\vec{b}$; 2) $\dfrac{1}{2}\vec{a} + 3\vec{b}$.

3 **7.** На осі аплікат знайдіть точку, рівновіддалену від точок $A(5;\ 5;\ 3)$ і $B(6;\ 3;\ 4)$.

8. Дано прямокутний паралелепіпед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{d}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Розкладіть за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ вектор:

1) $\overrightarrow{DB}$; 2) $\overrightarrow{DB_1}$; 3) $\overrightarrow{D_1C}$; 4) $\overrightarrow{B_1D_1}$.

4 **9.** Доведіть за допомогою векторів, що чотирикутник з вершинами в точках $A(4; 6; -3)$, $B(4; 1; 2)$, $C(-4; -3; -2)$, $D(-2; 3; -6)$ є трапецією.

Додаткові завдання

3 **10.** Дано точки $A(0; -8; 9)$ і $B(4; 12; -3)$. Знайдіть координати точки K такої, що $\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{KB} = \vec{0}$.

4 **11.** Визначте вид трикутника ABC відносно його кутів і сторін, якщо $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 3; 6)$, $C(4; 2; 3)$. Знайдіть площу трикутника ABC.

Українці у світі

*У 1611 році німецький філософ і вчений Йоганн Кеплер поставив одне із найскладніших питань у математиці — задачу про найщільніше пакування куль. Задачу було розв'язано для просторів, що не перевищують тривимірний, причому розв'язання для тривимірного простору (гіпотеза Кеплера) займало 300 сторінок тексту з використанням 50 000 рядків програмного коду. Знадобилося понад чотири століття, аби розв'язати цю задачу для деяких інших просторів. І зробила це українка **Марина В'язовська**. Вона зуміла запакувати кулі у 8-ми та 24-вимірному просторах і 15 березня 2016 року опублікувала своє розв'язання, яке було визнано математиками дуже елегантним і лаконічним, адже для 8-вимірного випадку зайняло всього 23 сторінки. За це досягнення Марину В'язовську було відзначено Премією Салема, однією з найпрестижніших премій, яку вважають аналогом Нобелівської премії, але для молодих математиків.*

Трохи пізніше Марина разом із своїми колегами Генрі Коном, Абхінавом Кумаром, Стівеном Ді Міллером та Данилом Радченком застосувала цей підхід до 24-вимірного випадку. Це розв'язання було опубліковано в 2017 році. Після цього стало відомо, що за розв'язання обох випадків нашу співвітчизницю нагороджено ще однією престижною премією – SASTRA Ramanujan Prize. Цю премію було започатковано 2005 року в індійському інституті SASTRA. Щорічно нею нагороджують молодих математиків віком до 32 років за видатний внесок у тих галузях математики, якими цікавився індийський вченый Срініваса Рамануджан.

§ 16. СКАЛЯРНИЙ ДОБУТОК ВЕКТОРІВ

1. Скалярний добуток векторів

Під час вивчення планіметрії ви вже розглядали скалярний добуток векторів. Так само розглядають скалярний добуток векторів і у стереометрії.

Скалярним добутком векторів $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ і $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ називають число

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Як і в планіметрії, скалярний добуток векторів записують, використовуючи знак множення, так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ або $\vec{a}\vec{b}$.

Задача 1. Знайти скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-2; 1; 4)$ і $\vec{b}(1; 8; -3)$; 2) $\vec{c}(2; 0; -1)$ і $\vec{d}(4; -3; -2)$.

Розв'язання. 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -2 \cdot 1 + 1 \cdot 8 + 4 \cdot (-3) = -6$.

2) $\vec{c} \cdot \vec{d} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot (-2) = 10$.

Відповідь. 1) -6; 2) 10.

Знайдемо скалярний добуток рівних векторів.

Нехай дано вектор $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$. Тоді:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1x_1 + y_1y_1 + z_1z_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 =$$

$$= \left(\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\right)^2 = |\vec{a}|^2.$$

Скалярний добуток $\vec{a} \cdot \vec{a}$ позначають через $\vec{a}^2$ і називають *скалярним квадратом вектора*.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля:

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

Оскільки $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, то $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

З означення скалярного добутку маємо його *властивості*.

Для будь-яких векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і будь-якого числа λ справджуються такі властивості:

1) $\vec{a}^2 \geqslant 0$, до того ж $\vec{a}^2 > 0$, якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$.

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ – _переставна властивість_.

3) $(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$ – _сполучна властивість_.

4) $(\vec{a} + \vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ – _розподільна властивість_.

Задача 2. Обчислити, яку роботу виконує сила $\vec{F}(4; -1; 3)$, коли її точка прикладання переміщується з початку в кінець вектора $\vec{s}(5; -2; -1)$.

Розв'язання. Якщо вектор $\vec{F}$ зображує силу, точка прикладання якої переміщується з початку в кінець вектора $\vec{s}$, то роботу цієї сили ω знаходять за формулою: $\omega = \vec{F}\vec{s}$.

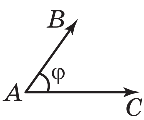
Маємо: $\omega = \vec{F}\vec{s} = 4 \cdot 5 + (-1) \cdot (-2) + 3 \cdot (-1) = 19.$

Відповідь. 19.

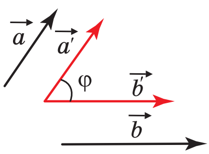
2. Кут між векторами. Теорема про скалярний добуток векторів

Як і в планіметрії,

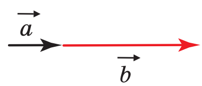
кутом між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ називають кут BAC (мал. 16.1). **Кутом між двома ненульовими векторами, що не мають спільного початку, називають кут між векторами, що дорівнюють даним і мають спільний початок** (мал. 16.2).



Мал. 16.1



Мал. 16.2



Мал. 16.3

Кут між співнапрямленими векторами дорівнює нулю (мал. 16.3), кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180° (мал. 16.4).

Мал. 16.4

Як і в планіметрії, справджується теорема.

Теорема (про скалярний добуток векторів). **Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх модулів на косинус кута між ними:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi, \text{ де } \varphi = (\widehat{\vec{a}; \vec{b}}).$$

Теорему можна довести так само, як і в курсі планіметрії. Вона має ті самі наслідки, що й у планіметрії.

Наслідок **1. Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.**

Наслідок 2. Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вони перпендикулярні.

Задача 3. Чи перпендикулярні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(-1;\ 2;\ 0)$, $\vec{b}(8;\ 4;\ 7)$; 2) $\vec{a}(1;\ 4;\ -3)$, $\vec{b}(2;\ 1;\ 3)$?

Розв'язання. 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 7 = 0$, тому $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 3 = -3$, тому $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – неперпендикулярні.

Відповідь. 1) Так; 2) ні.

Задача 4. При якому значенні z вектори $\vec{c}(4;\ -1;\ 5)$ і $\vec{d}(5;\ 0;\ z)$ перпендикулярні?

Розв'язання. Щоб вектори були перпендикулярними, їх скалярний добуток має дорівнювати нулю:

$4 \cdot 5 + (-1) \cdot 0 + 5z = 0$, $5z = -20$, $z = -4$.

Відповідь. $z = -4$.

За скалярним добутком векторів $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ можна знайти косинус кута між ними.

Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, то

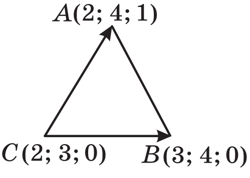
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Ураховуючи, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$; $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$, маємо:

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

За значенням косинуса кута можна знайти міру цього кута (за допомогою таблиць чи калькулятора).

Задача 5. Знайти градусну міру кута C трикутника з вершинами в точках $A(2;\ 4;\ 1)$, $B(3;\ 4;\ 0)$, $C(2;\ 3;\ 0)$.



Мал. 16.5

Розв'язання. Кут C трикутника ABC (мал. 16.5) збігається з кутом між векторами $\overrightarrow{CA}$ і $\overrightarrow{CB}$. Маємо:

$\overrightarrow{CA}(2-2;\ 4-3;\ 1-0)$, тобто $\overrightarrow{CA}(0;\ 1;\ 1)$;

$\overrightarrow{CB}(3-2;\ 4-3;\ 0-0)$, тобто $\overrightarrow{CB}(1;\ 1;\ 0)$.

Тоді

$$\cos C = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{\left|\overrightarrow{CA}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB}\right|} = \frac{0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

звідки $\angle C = 60°$.

Відповідь. 60°.

Задача 6. Дано вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, $|\vec{c}| = 1$, $|\vec{d}| = 2$, $(\widehat{\vec{c}; \vec{d}}) = 120°$. Знайти $|3\vec{c} + 4\vec{d}|$.

Розв'язання. Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$, то

$$|3\vec{c} + 4\vec{d}| = \sqrt{(3\vec{c} + 4\vec{d})^2} = \sqrt{9\vec{c}^2 + 2 \cdot 3\vec{c} \cdot 4\vec{d} + 16\vec{d}^2} =$$

$$= \sqrt{9|\vec{c}|^2 + 24|\vec{c}||\vec{d}|\cos 120° + 16|\vec{d}|^2} =$$

$$= \sqrt{9 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 16 \cdot 2^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Відповідь. 7.

• Сформулюйте означення скалярного добутку векторів. • Що називають скалярним квадратом вектора $\vec{a}$? • Що називають кутом між векторами? • Сформулюйте теорему про скалярний добуток векторів і наслідки з неї. • Як знайти косинус кута між векторами?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

16.1. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-4; 3; 2)$ і $\vec{b}(0; 1; -8)$; 2) $\vec{c}(1; -2; -3)$ і $\vec{d}(2; 1; -1)$.

16.2. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{c}(0; 1; -2)$ і $\vec{d}(5; 6; -1)$; 2) $\vec{m}(1; -1; 2)$ і $\vec{n}(5; 4; 1)$.

16.3. Знайдіть $\vec{p}^2$, якщо: 1) $\vec{p}(0; -3; 2)$; 2) $\vec{p}(-1; 1; 2)$.

16.4. Знайдіть $\vec{m}^2$, якщо: 1) $\vec{m}(1; 0; -2)$; 2) $\vec{m}(-1; 2; -3)$.

16.5. Дано вектори $\vec{m}(-1; 2; z)$ і $\vec{n}(3; 4; -2)$. При якому значенні z справджується рівність $\vec{m} \cdot \vec{n} = 7$?

16.6. Дано вектори $\vec{a}(x; -1; 3)$ і $\vec{b}(3; 2; -2)$. При якому значенні x справджується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1$?

16.7. $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = \varphi$. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо:

1) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = 30°$; 2) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 10$, $\varphi = 60°$;

3) $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 2$, $\varphi = 135°$; 4) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = 180°$.

16.8. $(\widehat{\vec{c}; \vec{d}}) = \varphi$. Знайдіть $\vec{c} \cdot \vec{d}$, якщо:

1) $|\vec{c}| = 5$, $|\vec{d}| = 1$, $\varphi = 0°$; 2) $|\vec{c}| = 4$, $|\vec{d}| = 7$, $\varphi = 45°$;

3) $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 1$, $\varphi = 120°$; 4) $|\vec{c}| = 7$, $|\vec{d}| = 6$, $\varphi = 150°$.

2 **16.9.** Доведіть, що вектори $\vec{m}(-1;\ 4;\ 8)$ і $\vec{n}\ (8;\ 10;\ -4)$ перпендикулярні.

16.10. Доведіть, що вектори $\vec{p}\ (-1;\ 2;\ 5)$ і $\vec{q}(4;\ -3;\ 2)$ перпендикулярні.

16.11. Чи перпендикулярні вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:

1) $\vec{c}(2;\ -1;\ 3)$, $\vec{d}(2;\ -4;\ -2)$; 2) $\vec{c}(3;\ -2;\ 1)$, $\vec{d}(4;\ 6;\ 0)$?

16.12. Чи перпендикулярні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(-1;\ 2;\ 3)$, $\vec{b}(4;\ -1;\ 2)$; 2) $\vec{a}(2;\ -3;\ 0)$, $\vec{b}(6;\ -4;\ 5)$?

16.13. При якому значенні m вектори $\vec{a}(-1;\ m;\ 2)$ і $\vec{b}(m;\ 3;\ 7)$ перпендикулярні?

16.14. При якому значенні n вектори $\vec{c}(n;\ 4;\ -1)$ і $\vec{d}(3;\ -2;\ n)$ перпендикулярні?

16.15. Гострий, прямий чи тупий кут утворює вектор $\vec{a}(-2;\ 1;\ 0)$ з координатними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$?

16.16. Гострий, прямий чи тупий кут утворює вектор $\vec{b}(0;\ -2;\ 6)$ з координатними векторами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$?

16.17. Дано вектори $\vec{b}(1;\ 0;\ -5)$, $\vec{c}(-2;\ 1;\ -1)$, $\vec{d}(-1;\ 1;\ 3)$. З'ясуйте, який кут (гострий, прямий чи тупий) утворюють між собою вектори:

1) $\vec{b}$ і $\vec{c}$; 2) $\vec{b}$ і $\vec{d}$; 3) $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

16.18. Дано вектори $\vec{a}(-1;\ 2;\ 1)$, $\vec{c}(3;\ 1;\ 0)$, $\vec{d}(0;\ 1;\ -2)$. З'ясуйте, який кут (гострий, прямий чи тупий) утворюють між собою вектори:

1) $\vec{a}$ і $\vec{c}$; 2) $\vec{a}$ і $\vec{d}$; 3) $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

3 **16.19.** Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a}(0;\ 2;\ -2)$, $\vec{b}(1;\ 0;\ -1)$; 2) $\vec{a}(0;\ 1;\ 0)$, $\vec{b}(0;\ -\sqrt{3};\ 1)$.

16.20. Знайдіть кут між векторами $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо:

1) $\vec{p}(3;\ 0;\ -3)$, $\vec{q}(0;\ 2;\ 2)$; 2) $\vec{p}(\sqrt{3};\ 0;\ 1)$, $\vec{q}(1;\ 0;\ 0)$.

16.21. Знайдіть косинуси внутрішніх кутів трикутника ABC, якщо $A(2;\ 3;\ 2)$, $B(4;\ 0;\ 8)$, $C(8;\ 5;\ -1)$, та впевніться в тому, що він рівнобедрений.

16.22. Знайдіть внутрішній кут при вершині B трикутника ABC, якщо $A(0;\ -1;\ 5)$, $B(-3;\ -1;\ 1)$, $C(4;\ -1;\ 2)$.

16.23. $\vec{c}$ і $\vec{d}$ – ненульові вектори. Знайдіть кут між векторами $\vec{c}$ і $\vec{d}$, якщо:

1) $\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}||\vec{d}|$; 2) $\vec{c}\cdot\vec{d}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\vec{c}||\vec{d}|$;

3) $\vec{c}\cdot\vec{d} = -|\vec{c}||\vec{d}|$; 4) $\vec{c}\cdot\vec{d} = -\dfrac{|\vec{c}||\vec{d}|}{2}$.

16.24. $(\widehat{\vec{a};\, \vec{b}}) = 120°$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Знайдіть:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{a}$; 3) $\vec{b}(\vec{a}-\vec{b})$; 4) $\vec{a}(2\vec{a}-3\vec{b})$.

16.25. $(\widehat{\vec{c};\, \vec{d}}) = 60°$, $|\vec{c}| = 1$, $|\vec{d}| = 2$. Знайдіть:

1) $\vec{c}\cdot\vec{d}$; 2) $\vec{c}(\vec{c}-\vec{d})$; 3) $\vec{d}(\vec{c}+\vec{d})$; 4) $\vec{d}(2\vec{c}-3\vec{d})$.

16.26. Дано: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$. Чи може значення $\vec{a}\cdot\vec{b}$ дорівнювати:

1) -4; 2) $-4{,}2$; 3) $-0{,}01$;

4) 0; 5) $4\dfrac{1}{3}$; 6) $3{,}9$?

16.27. Дано: $|\vec{c}| = 1$, $|\vec{d}| = 2$. Чи може значення $\vec{c}\cdot\vec{d}$ дорівнювати:

1) 2; 2) $2{,}1$; 3) 0;

4) $0{,}73$; 5) $-1{,}95$; 6) $-2\dfrac{1}{11}$?

16.28. Доведіть, що $-|\vec{a}||\vec{b}| \leqslant \vec{a}\vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$. У якому випадку матимемо рівність?

16.29. Доведіть істинність векторної тотожності

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2 = 2(\vec{a}^2+\vec{b}^2).$$

16.30. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні. Доведіть, що

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2.$$

16.31. Дано: $\vec{a}(-1;\ 2;\ 1)$, $\vec{b}(2;\ 0;\ 2)$, $\vec{m} = 2\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{n} = 2\vec{a}-3\vec{b}$. Знайдіть: 1) $\vec{m}\cdot\vec{n}$; 2) $(\widehat{\vec{m};\, \vec{n}})$.

16.32. Відомо, що $\vec{a}(1;\ 1;\ 0)$, $\vec{b}(2;\ -2;\ 4)$, $\vec{c} = 6\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{d} = 6\vec{a}-\vec{b}$. Знайдіть: 1) $\vec{c}\cdot\vec{d}$; 2) $(\widehat{\vec{c};\, \vec{d}})$.

16.33. Відомо, що $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{b}\perp\vec{c}$, $(\widehat{\vec{a};\, \vec{c}}) = 60°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Знайдіть скалярний добуток:

1) $2\vec{c}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$; 2) $(\vec{b}-\vec{c})(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$.

16.34. Відомо, що $\vec{a}\perp\vec{b}$, $\vec{a}\perp\vec{c}$, $(\widehat{\vec{b};\, \vec{c}}) = 120°$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Знайдіть скалярний добуток:

1) $2\vec{c}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$; 2) $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$.

4 **16.35.** Дано вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, $|\vec{c}| = 1$, $|\vec{d}| = \sqrt{3}$, $(\widehat{\vec{c};\, \vec{d}}) = 150°$. Знайдіть: 1) $|\vec{c}+\vec{d}|$; 2) $|2\vec{c}-3\vec{d}|$.

16.36. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, $(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}) = 30°$. Знайдіть:

1) $|\vec{a} - \vec{b}|$; 2) $|3\vec{a} + 2\vec{b}|$.

16.37. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(6; -2; 3)$, $B(10; 0; 4)$, $C(13; -4; 0)$, $D(9; -6; -1)$ є прямокутником.

16.38. Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $K(7; -3; 3)$, $L(4; 3; 4)$, $M(1; 2; 1)$, $N(4; -4; 0)$ є прямокутником.

16.39. Дано точки $K(1; 1; 0)$, $L(2; 4; 3)$, $M(-2; -11; -15)$, $N(-5; 5; -2)$. Доведіть, що пряма KN перпендикулярна до площини KLM.

16.40. Знайдіть $\vec{a} \cdot \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 3$.

16.41. Знайдіть $\vec{c} \cdot \vec{d}$, якщо $|\vec{c}| = 2$, $|\vec{d}| = 5$, $|\vec{c} + \vec{d}| = 4$.

16.42. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 1$. Обчисліть значення суми $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

16.43. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$. Обчисліть значення суми $\vec{a}\vec{b} + \vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a}$.

16.44. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. При якому значенні λ вектори $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ і $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

16.45. Відомо, що $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 10$. При якому значенні λ вектори $\lambda\vec{a} - \vec{b}$ і $\lambda\vec{a} + \vec{b}$ взаємно перпендикулярні?

16.46. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, щоб вектор $2\vec{c} - \vec{d}$ був перпендикулярний до вектора $2\vec{c} + \vec{d}$?

16.47. Яку умову мають задовольняти вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, щоб вектор $\vec{c} + 3\vec{d}$ був перпендикулярний до вектора $\vec{c} - 3\vec{d}$?

16.48. Доведіть, що $\vec{a} \perp \vec{m}$, де $\vec{m} = \vec{b} - \dfrac{\vec{a}(\vec{a}\vec{b})}{\vec{a}^2}$.

16.49. Доведіть, що $\vec{a} \perp \vec{n}$, де $\vec{n} = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$.

16.50. Дано точки $A(3; -7; -1)$, $B(-1; 5; 2)$, $C(1; 5; 0)$. Знайдіть:

1) добуток $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB})(2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$;

2) координати вектора $\vec{m} = (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})\overrightarrow{BC}$.

16.51. Задано вектори $\vec{a}(-1; -2; 2)$ і $\vec{b}(-3; 2; 6)$. Знайдіть:

1) добуток $(4\vec{a} - 3\vec{b})(2\vec{a} + 2\vec{b})$;

2) координати вектора $\vec{m} = (2\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{a}$.

16.52. $(\widehat{\vec{a};\,\vec{b}}) = 30°$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$. Знайдіть кут між векторами $\vec{m} = \vec{b} - \vec{a}$ і $\vec{n} = \vec{b} + \vec{a}$.

16.53. $(\widehat{\vec{a};\,\vec{b}}) = 45°$, $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{b}| = 1$. Знайдіть кут між векторами $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

16.54. Відомо, що $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, $(\widehat{\vec{a};\,\vec{c}}) = 120°$. Знайдіть $|\vec{m}|$, де $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

16.55. Відомо, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 6$, а вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ попарно утворюють один з одним кути, що дорівнюють $60°$. Знайдіть $|\vec{p}|$, де $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

16.56. Вектор $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}(12;\,-16;\,-15)$ і утворює з віссю аплікат гострий кут. Знайдіть координати вектора $\vec{b}$, якщо $|\vec{b}| = 50$.

16.57. Вектор $\vec{c}$ колінеарний вектору $\vec{a}(2;\,1;\,-1)$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо $\vec{a}\vec{c} = 3$.

16.58. Кожний з векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ відмінний від нуля. Установіть, при якому їх взаємному розміщенні виконується рівність $(\vec{a}\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\vec{c})$.

16.59. Дано трикутник ABC, BK – його висота, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Розкладіть вектор $\overrightarrow{BK}$ за векторами $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

16.60. Обчисліть, скільки кубічних метрів повітря очистять від автомобільних вихлопних газів 100 каштанів, посаджених уздовж дороги, якщо одне дерево очищає зону довжиною 100 м, шириною 12 м, висотою 10 м?

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

16.61. Які з рівнянь задають рівняння прямої, а які – рівняння кола:

1) $4x + 2y - 7 = 0$;
2) $4x^2 + 2y - 7 = 0$;
3) $x^2 + y^2 = 9$;
4) $(x - 1)^3 + y^2 = 16$;
5) $3x - 9 = 0$;
6) $(x + 1)^2 + y^2 = 25$?

16.62. Чи належить прямій $2x + 3y - 5 = 0$ точка:

1) $M(1;\,1)$;
2) $A(0;\,2)$;
3) $B(10;\,-5)$;
4) $N(-1;\,-1)$?

16.63. Укажіть центр кола та його радіус за рівнянням кола:

1) $x^2 + (y - 1)^2 = 25$; 2) $(x + 1)^2 + (y + 7)^2 = 7$;

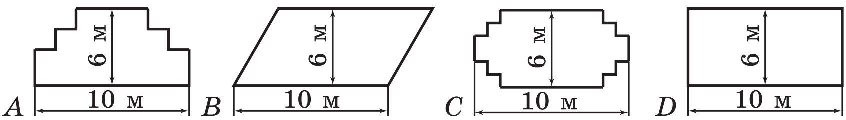
3) $x^2 + y^2 = 36$; 4) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$.

16.64. Запишіть рівняння кола, центром якого є точка Q, а радіус дорівнює z, якщо:

1) $Q(-1;\ 2)$, $z = 3$; 2) $Q(10;\ 0)$, $z = 5$;

3) $Q(0;\ -5)$, $z = \sqrt{2}$; 4) $Q(0;\ 0)$, $z = 4\sqrt{7}$.

16.65. (*Програма міжнародного оцінювання учнів – PISA.*) Садівник має 32 м дерев'яної огорожі й хоче обнести нею клумбу. Він обирає форму клумби із таких варіантів:



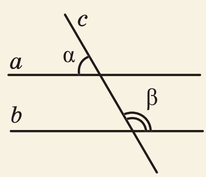
Дайте відповідь «Так» або «Ні» для кожної форми клумби залежно від того, чи вистачить для неї 32 м огорожі.

Форма клумби	*Відповідь*	
Форма A	Так	Ні
Форма B	Так	Ні
Форма C	Так	Ні
Форма D	Так	Ні

Перевірте свою компетентність

Завдання № 16

1. На малюнку $a \parallel b$. Укажіть суму кутів α і β.



А	Б	В	Г	Д
90°	120°	180°	240°	360°

2. Знайдіть менший кут паралелограма, якщо сума двох його деяких кутів дорівнює 200°.

А	Б	В	Г	Д
70°	80°	90°	100°	120°

3. Площа квадрата $ABCD$ дорівнює 16 см^2. До площини квадрата проведено перпендикуляр AK. Знайдіть довжину проекції похилої KC на площину квадрата.

А	Б	В	Г	Д
2 см	4 см	$4\sqrt{2}$ см	$16\sqrt{2}$ см	інша відповідь

4. Яка з фігур не може бути паралельною проекцією паралелограма?

А	Б	В	Г	Д
трапеція	відрізок	паралелограм	квадрат	ромб

5. Градусна міра кута A трикутника ABC удвічі більша за градусну міру кута C і на 70° більша за градусну міру кута B, AK – висота трикутника ABC. Установіть відповідність між кутом (1–4) та його градусною мірою (А–Д).

Кут

1 $\angle ABC$

2 $\angle ACB$

3 $\angle BAC$

4 $\angle KAC$

Градусна міра кута

А 30°

Б 40°

В 50°

Г 60°

Д 100°

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. Площа круга, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює 25π см^2. Знайдіть довжину медіани трикутника (у см), проведеної до гіпотенузи.

§ 17. НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК У ПРОСТОРІ. РІВНЯННЯ ПЛОЩИНИ І СФЕРИ

1. Геометричне місце точок

Розглянемо задачі, пов'язані з геометричним місцем точок, у яких залежно від умови задачі треба або знайти, чи побудувати геометричне місце точок, або використати його для розв'язування задач.

Геометричним місцем точок (ГМТ) називають фігуру, що складається з усіх точок, що мають певну властивість.

Пригадаємо основні ГМТ площини з курсу планіметрії:

• *ГМТ, які рівновіддалені від даної точки на дану відстань,* – коло, радіус якого дорівнює даній відстані;

• *ГМТ, відстань від яких до даної точки не перевищує даної відстані,* – круг, радіус якого дорівнює даній відстані;

• *ГМТ, які рівновіддалені від сторін кута та належать його внутрішній області,* – бісектриса даного кута;

• *ГМТ, які рівновіддалені від кінців відрізка,* – серединний перпендикуляр до даного відрізка;

• *ГМТ, які рівновіддалені від даної прямої на задану відстань,* – дві прямі, паралельні даній прямій, кожна точка яких знаходиться на заданій відстані від даної прямої.

Щоб довести, що деяка множина точок M (фігура F) є шуканим ГМТ, треба довести:

1) будь-яка точка, що задовольняє властивість цього ГМТ, належить множині M (фігурі F);

2) будь-яка точка, що належить множині M (фігурі F), задовольняє властивість цього ГМТ.

2. Найпростіші геометричні місця точок у просторі

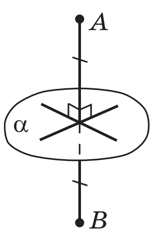
Розглянемо найпростіші геометричні місця точок у просторі. Пропонуємо читачеві самостійно довести ці нескладні факти, ґрунтуючись на раніше вивчених властивостях точок, прямих і площин.

• *ГМТ простору, рівновіддалених від двох заданих точок A і B,* – площина, яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину (мал. 17.1).

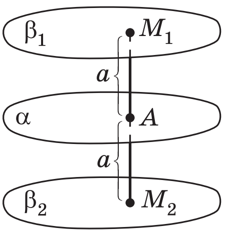
• *ГМТ простору, віддалених від даної площини на дану відстань,* – дві площини, паралельні даній, кожна точка яких лежить на даній відстані від площини (мал. 17.2).

• *ГМТ простору, рівновіддалених від двох паралельних площин,* – площина, паралельна кожній з двох заданих, що проходить через середину їх спільного перпендикуляра.

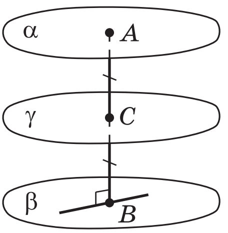
На малюнку 17.3 $\alpha \parallel \beta$, AB – їх спільний перпендикуляр, точка C – його середина. Площина γ, що проходить через точку C паралельно α і β, є ГМТ простору, рівновіддалених від двох паралельних площин α і β.



Мал. 17.1



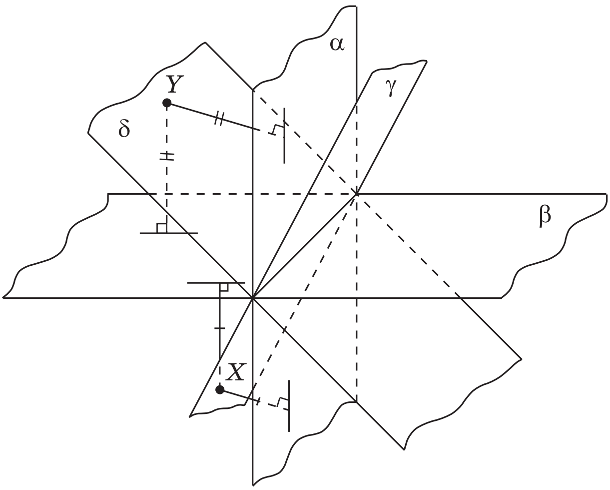
Мал. 17.2



Мал. 17.3

• *ГМТ простору, рівновіддалених від двох площин, що перетинаються,* – пара взаємно перпендикулярних площин, кожна з яких ділить навпіл двогранні кути, утворені даними площинами (такі площини називають *бісекторними*).

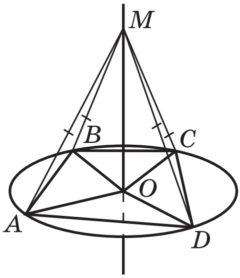
На малюнку 17.4 площини α і β перетинаються, δ і γ – бісекторні площини. Кожна точка X, що належить площині γ, та кожна точка Y, що належить площині δ, рівновіддалені від площини α і β.



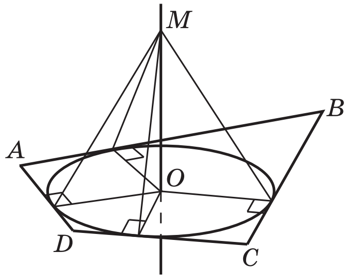
Мал. 17.4

• *ГМТ простору, рівновіддалених від усіх вершин плоского, вписаного в коло, многокутника,* – пряма, перпендикулярна до площини цього многокутника, що проходить через центр описаного навколо нього кола (мал. 17.5).

• *ГМТ простору, рівновіддалених від усіх сторін плоского, описаного навколо кола, многокутника,* – пряма, перпендикулярна до площини многокутника, що проходить через центр вписаного в нього кола (мал. 17.6).



Мал. 17.5



Мал. 17.6

Ще одне важливе геометричне місце точок простору ми розглянемо у п. 5 цього параграфа.

Під час розв'язування більш складних задач, пов'язаних із ГМТ, використовують ***метод геометричних місць***. Розглянемо суть цього методу. Нехай потрібно побудувати точку A, що задовольняє дві умови. Будуємо ГМТ, що задовольняють першу умову, – фігуру F_1 і ГМТ, що задовольняють другу умову, – фігуру F_2. Шукана точка A належить як F_1, так і F_2, а тому є точкою їх перетину. Одну із задач, що розв'язуються методом геометричних місць, розглянемо у п. 5 цього параграфа.

3. Рівняння фігури у просторі

Нагадаємо, що *рівнянням фігури на координатній площині* називають рівняння з двома змінними x і y, для яких справджуються дві умови:

1) координати будь-якої точки фігури задовольняють це рівняння;

2) будь-яка пара чисел вигляду $(x; y)$, що задовольняє це рівняння, є координатами деякої точки фігури.

Також з попередніх класів відомо, що *рівняння кола* із центром у точці $Q(a; b)$ і радіусом r має вигляд $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$, а *рівняння прямої* має вигляд $ax + by + c = 0$, де a, b, c – числа, причому a і b одночасно не дорівнюють нулю.

У просторі також можна розглядати рівняння фігури (поверхні).

Нехай дано прямокутну систему координат у просторі.

Рівняння з трьома змінними x, y, z називають рівнянням фігури, якщо справджуються дві умови:

1) координати будь-якої точки фігури задовольняють це рівняння;

2) будь-яка трійка чисел виду $(x; y; z)$, що задовольняє рівняння, є координатами деякої точки фігури.

У геометрії розглядають такі два види задач:

1) для заданої фігури (геометричного тіла, поверхні) знайти її рівняння;

2) за даним рівнянням розпізнати (встановити) вид фігури (тіла, поверхні).

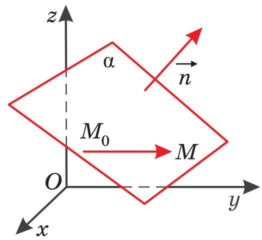
Більшість рівнянь геометричних фігур розглядають у курсі аналітичної геометрії вищих навчальних закладів. Ми ж розглянемо лише *рівняння площини* і *рівняння сфери*.

4. Рівняння площини

Перш ніж розглянути рівняння площини, уведемо поняття *вектора нормалі*.

Вектором нормалі до даної площини називають будь-який ненульовий вектор, що перпендикулярний до даної площини.

На малюнку 17.7 вектор $\vec{n}$ є вектором нормалі до площини α.



Мал. 17.7

Нехай вектор $\vec{n}$ має координати $(A;\ B;\ C)$, $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ – деяка фіксована точка площини α, а $M(x;\ y;\ z)$ – довільна точка простору. Маємо вектор $\overrightarrow{M_0M}(x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0)$.

Точка M належить площині α тоді і тільки тоді, коли вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярний до вектора $\vec{n}$, тобто коли $\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$.

Отже, маємо: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$;

тобто $Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$.

Позначимо число $-(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$ через D, матимемо, що

площину у просторі задають рівнянням вигляду

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

де A, B, C, D – числа, причому A, B і C одночасно не дорівнюють нулю.

Рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$ називають *загальним рівнянням площини*.

З наведених міркувань випливає низка важливих *властивостей*, пов'язаних з рівнянням площини.

1. *Рівняння площини, що проходить через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}(A;\ B;\ C)$, задають рівнянням*

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Задача 1. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M(2;\ -1;\ 0)$ і має вектор нормалі $\vec{n}(-3;\ 4;\ 2)$.

Р о з в ' я з а н н я. Запишемо рівняння площини:

$-3(x - 2) + 4(y - (-1)) + 2(z - 0) = 0$, звідки отримаємо:

$3x - 4y - 2z - 10 = 0$.

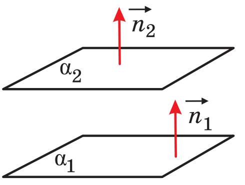
В і д п о в і д ь. $3x - 4y - 2z - 10 = 0$.

2. *Якщо площину задано рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, то вектор $\vec{n}(A;\ B;\ C)$ є вектором нормалі цієї площини.*

3. *Площина* α_1, *рівняння якої* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, *і площина* α_2, *рівняння якої* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, *паралельні тоді і тільки тоді, коли вектори* $\vec{n}_1(A_1; B_1; C_1)$ *і* $\vec{n}_2(A_2; B_2; C_2)$ *– колінеарні* (мал. 17.8).

Тобто *необхідна і достатня умова паралельності площин* є такою:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \qquad (*)$$



Мал. 17.8

(якщо одна з координат одного з векторів нормалей дорівнює нулю, то відповідна координата другого вектора теж дорівнює нулю).

Зауважимо, що у випадку виконання умови $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ площини збігаються.

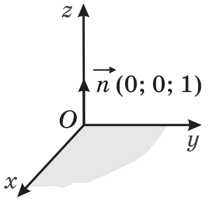
Приклад 1. Площини $3x - 2y + 7z - 11 = 0$ і $-6x + 4y - 14z + 7 = 0$ паралельні, оскільки $\frac{3}{-6} = \frac{-2}{4} = \frac{7}{-14} \neq \frac{-11}{7}$.

Приклад 2. Площини $2x + y - 3z + 1 = 0$ і $4x + 2y - 6z + 2 = 0$ збігаються, оскільки $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$. Це можна також пояснити інакше: якщо ліву і праву частини рівняння $4x + 2y - 6z + 2 = 0$ поділити на 2, то отримаємо $2x + y - 3z + 1 = 0$ – рівняння першої площини. Тому ці площини збігаються.

Приклад 3. Площини $2x - 3y + 7z = 0$ і $4x + 9y - 5z + 1 = 0$ перетинаються, оскільки $\frac{2}{4} \neq \frac{-3}{9}$.

Важливим є питання рівнянь координатних площин. Розглянемо площину xy (мал. 17.9) як площину, що проходить через точку (0; 0; 0) та має вектор нормалі $\vec{n}(0; 0; 1)$, тобто рівняння

$$0(x - 0) + 0(y - 0) + 1(z - 0) = 0.$$



Мал. 17.9

Звідси $z = 0$ – рівняння площини xy. Аналогічно визначають рівняння площин xz і yz.

4. *Рівняння* $z = 0$ *задає площину* xy; *рівняння* $y = 0$ *задає площину* xz; *рівняння* $x = 0$ *задає площину* yz.

5. Рівняння сфери

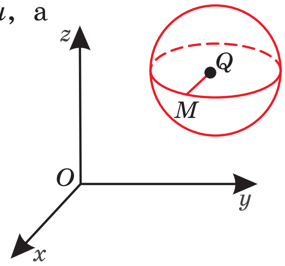
Поняття *сфери* нам добре відомо з повсякденного життя.

Сформулюємо означення сфери через поняття ГМТ.

***Сферою* називають геометричне місце точок простору, що лежать на даній відстані від даної точки.**

Цю точку називають *центром сфери*, а відстань – *радіусом сфери*. Два радіуси, що лежать на одній прямій, називають *діаметром сфери*.

Нехай $Q(a;\ b;\ c)$ – центр сфери, $M(x;\ y;\ z)$ – довільна точка простору (мал. 17.10). Ця точка M належить сфері із центром у точці Q і радіусом r тоді і тільки тоді, коли $QM = r$, тобто



Мал. 17.10

$$QM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = r,$$

або $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$.

Отже,

сферу із центром $Q(a;\ b;\ c)$ і радіусом r задають рівнянням

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

Рівняння $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$ називають *рівнянням сфери*.

Приклад 4. Розглянемо рівняння $x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 4 = 0$. Доповнимо вирази $x^2 - 2x$ і $y^2 + 4y$ до повних квадратів:

$(x^2 - 2x + 1^2) + (y^2 + 4y + 2^2) + z^2 - 4 = 1^2 + 2^2$;

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9$.

Отже, $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 3^2$ – рівняння сфери із центром у точці $Q(1;\ -2;\ 0)$ і радіусом $r = 3$.

Задача 2. Скласти рівняння сфери з діаметром AB, якщо $A(-2;\ 3;\ -4)$, $B(-8;\ 7;\ 8)$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Точка Q – центр сфери – є серединою AB. Тоді $x_Q = \dfrac{-2-8}{2} = -5$; $y_Q = \dfrac{3+7}{2} = 5$; $z_Q = \dfrac{-4+8}{2} = 2$.

Отже, $Q(-5;\ 5;\ 2)$.

2) $r = AQ = \sqrt{(-5+2)^2 + (5-3)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2} = 7$.

3) Маємо рівняння сфери: $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 7^2$.

В і д п о в і д ь. $(x + 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 2)^2 = 49$.

Задача 3. По якій кривій сфера $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=25$ перетинає площину xy?

Розв'язання. Рівнянням площини xy є рівняння $z = 0$. Підставивши це значення z в рівняння сфери, матимемо:

$(x-2)^2+(y+3)^2+(0-3)^2=25;$

$(x-2)^2+(y+3)^2=25-9;$

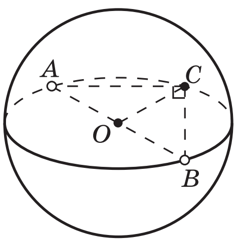
тобто $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ або $(x-2)^2+(y+3)^2=4^2$.

Отже, шуканою кривою є коло з центром $(2; -3; 0)$ і радіусом 4, що лежить у площині xy.

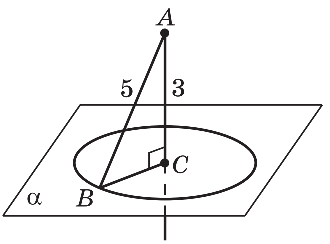
Відповідь. По колу із центром $(2; -3; 0)$ і радіусом 4, що лежить у площині xy.

Задача 4. Знайти ГМТ простору, з яких даний відрізок AB видно під прямим кутом.

Розв'язання. Шукане ГМТ – це вершини прямих кутів прямокутних трикутників, гіпотенуза яких – відрізок AB. Це рівносильно тому, що точки шуканого ГМТ знаходяться на відстані $\frac{AB}{2}$ від середини відрізка AB точки O. Отже, шукана ГМТ є сфера із центром у середині відрізка AB і радіусом $\frac{AB}{2}$ без точок A і B (мал. 17.11).



Мал. 17.11



Мал. 17.12

Задача 5. Точка A віддалена від площини α на 3 см. Знайти ГМТ, які належать площині α та віддалені від точки A на 5 см.

Розв'язання. Точки шуканого ГМТ належать як площині α, так і сфері із центром A та радіусом 5 см. Тоді шукане ГМТ – це спільні точки площини і сфери, тобто це коло із центром C і радіусом CB (мал. 17.12), причому $CB = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (см).

Відповідь. Коло радіуса 4 см.

А ще раніше...

У «Дослідженнях ліній двоякої кривизни» Клеро першим з математиків навів рівняння між координатами, що описують деяку поверхню. Клеро вивів рівняння площини, зазначивши, що це завжди рівняння першого степеня. Також Клеро розглянув рівняння кулі, центром якої є початок координат, і записував його у вигляді:

$$xx + yy + zz = aa.$$

• Що називають геометричним місцем точок? • Назвіть найпростіші ГМТ площини. • Назвіть найпростіші ГМТ простору. • У чому полягає суть методу геометричних місць? • Що називають рівнянням фігури у просторі? • Що називають вектором нормалі до площини? • Яке рівняння називають загальним рівнянням площини? • Сформулюйте властивості, пов'язані з рівнянням площини. • Що називають сферою? • Який вигляд має рівняння сфери? • Що є центром і радіусом сфери?

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1

17.1. Укажіть, які з рівнянь є рівняннями площини, та назвіть для них координати вектора нормалі:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 2$; 2) $4x - y - 2z + 5 = 0$;
3) $4x - 2y + z^2 - 7 = 0$; 4) $4x - 2y + 1 = 0$;
5) $2x - 3y^3 + 1 = 0$; 6) $7x - 5 = 0$.

17.2. Укажіть, які з рівнянь є рівняннями площини, та назвіть для них координати вектора нормалі:

1) $x - y + 2z - 3 = 0$; 2) $2x^2 + 3y - z - 3 = 0$;
3) $x^2 + (y - 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$; 4) $y - 2z + 7 = 0$;
5) $3z - 2 = 0$; 6) $x + \frac{1}{y} + z - 3 = 0$.

17.3. Укажіть, які з рівнянь є рівняннями сфери, та назвіть для них координати центра і радіус:

1) $x^2 + 2y + z^2 = 5$; 2) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 9$;
3) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$; 4) $x^2 + \frac{1}{y^2} + z^2 = 16$.

17.4. Укажіть, які з рівнянь є рівняннями сфери, та назвіть для них координати центра і радіус:

1) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; 2) $(x - 2)^2 + \frac{1}{(y-3)^2} + z^2 = 0$;
3) $x^2 + y + z^2 = 1$; 4) $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 = 100$.

17.5. Чи належить площині $x + y - z - 7 = 0$ точка:
1) $A(2; 3; -1)$; 2) $B(0; 3; -4)$;
3) $C(7; 0; 0)$; 4) $D(5; 1; 1)$?

17.6. Чи належить площині $x + y + z - 5 = 0$ точка:
1) $M(4; 1; 0)$; 2) $N(-2; 7; 1)$;
3) $K(-1; 3; 3)$; 4) $L(0; 0; 6)$?

17.7. Складіть рівняння сфери із центром Q і радіусом r:
1) $Q(0; 0; 1)$, $r = 3$; 2) $Q(-1; 2; -3)$, $r = 2$;
3) $Q(-1; 0; 1)$, $r = 10$; 4) $Q(0; 0; 0)$, $r = \sqrt{3}$.

17.8. Складіть рівняння сфери із центром Q і радіусом r:
1) $Q(0; 0; 0)$, $r = 7$; 2) $Q(-1; 4; 0)$, $r = 1$;
3) $Q(0; 3; 0)$, $r = 4$; 4) $Q(2; -1; 7)$, $r = 5$.

2 **17.9.** Дано сферу $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 9$. Чи належить їй точка:
1) $A(2; -2; 1)$; 2) $B(-2; 2; 0)$;
3) $C(3; 0; 1)$; 4) $D(1; -2; 4)$?

17.10. Дано сферу $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 49$. Чи належить їй точка:
1) $M(7; 2; 0)$; 2) $N(3; 4; 5)$;
3) $K(-3; 0; 6)$; 4) $L(2; 1; 6)$?

17.11. Визначте взаємне розміщення двох площин (паралельні, перетинаються чи збігаються):
1) $2x + y - 3z + 5 = 0$ та $4x + 2y - 6z - 7 = 0$;
2) $3x - y + 2z - 7 = 0$ та $-6x + 2y - 4z + 14 = 0$;
3) $x + 2y - 3z - 5 = 0$ та $2x + 5y - 4z + 9 = 0$.

17.12. Визначте взаємне розміщення двох площин (паралельні, перетинаються чи збігаються):
1) $x - y + 2z - 3 = 0$ та $-x + y - 2z + 3 = 0$;
2) $3x + 2y - z + 5 = 0$ та $6x + 2y - 3z - 7 = 0$;
3) $x + 2y - z + 5 = 0$ та $3x + 6y - 3z + 11 = 0$.

17.13. Знайдіть координати точок перетину з осями координат площини $2x - 3y + 6z - 12 = 0$.

17.14. Знайдіть координати точок перетину з осями координат площини $3x - 2y + 12z + 24 = 0$.

17.15. Напишіть рівняння площини, рівновіддаленої від площин:
1) $x = 3$ і $x = 7$; 2) $y = 0$ і $y = -4$;
3) $z = -1$ і $z = -9$; 4) $x = 9$ і $x = -2$.

17.16. Напишіть рівняння площини, рівновіддаленої від площин:
1) $x = -1$ і $x = -3$; 2) $y = 4$ і $y = 8$;
3) $z = 0$ і $z = 6$; 4) $y = -1$ і $y = 7$.

17.17. Напишіть рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до вектора:

1) $\vec{a}(-1;\ 3;\ 0)$; 2) $\vec{b}(2;\ 1;\ -4)$.

17.18. Напишіть рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до вектора:

1) $\vec{c}(0;\ 1;\ -2)$; 2) $\vec{d}(-1;\ 1;\ 5)$.

17.19. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(0;\ -1;\ 2)$ і вектор нормалі якої $\vec{n}(4;\ 2;\ -1)$.

17.20. Запишіть рівняння площини, яка проходить через точку $A(2;\ 0;\ -3)$ і вектор нормалі якої $\vec{n}(3;\ -1;\ 2)$.

17.21. Складіть рівняння сфери із центром Q і діаметром d:

1) $Q(2;\ -3;\ 4)$, $d = 8$; 2) $Q(0;\ -5;\ 7)$, $d = \sqrt{24}$.

17.22. Складіть рівняння сфери із центром Q і діаметром d:

1) $Q(2;\ 0;\ -3)$, $d = 6$; 2) $Q(-1;\ 2;\ 3)$, $d = \sqrt{8}$.

17.23. Складіть рівняння сфери із центром $Q(5;\ 0;\ -1)$, що проходить через точку $B(-1;\ 4;\ 11)$.

17.24. Складіть рівняння сфери із центром $Q(0;\ 1;\ -2)$, що проходить через точку $A(2;\ -1;\ -1)$.

17.25. Складіть рівняння сфери з діаметром CD, якщо $C(4;\ -1;\ 0)$, $D(8;\ -3;\ 4)$.

17.26. Складіть рівняння сфери з діаметром MN, якщо $M(0;\ 0;\ 2)$, $N(4;\ -6;\ 14)$.

17.27. Напишіть рівняння сфери із центром у точці $Q(-2;\ 2;\ 2)$, що дотикається усіх координатних площин.

17.28. Напишіть рівняння сфери із центром у точці $Q(4;\ -4;\ -4)$, що дотикається усіх координатних площин.

17.29. Дано площини α і β, що перетинаються. Знайдіть ГМТ простору, що належать площині α і віддалені на 3 см від площини β.

17.30. Дано площини β і γ, що перетинаються. Знайдіть ГМТ простору, що належать площині γ і віддалені на 4 см від площини β.

17.31. Точка K віддалена від площини α на 8 см. У площині α знайдіть ГМТ, віддалених від точки K на 10 см.

17.32. Точка C віддалена від площини β на 12 см. У площині β знайдіть ГМТ, віддалених від точки C на 13 см.

17.33. Доведіть, що площини, рівняння яких $Ax + By + Cz + D = 0$ і $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, де $D \neq D_1$, паралельні.

3 **17.34.** Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $P(-1; 2; 1)$ паралельно площині $2x - y + 3z - 7 = 0$.

17.35. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $N(2; 0; -1)$ паралельно площині $x + 3y - 2z + 3 = 0$.

17.36. Точка $C(-2; 1; 3)$ є основою перпендикуляра, проведеного з початку координат до площини α. Складіть рівняння площини α.

17.37. Точка $D(1; -3; 4)$ є основою перпендикуляра, проведеного з початку координат до площини β. Складіть рівняння площини β.

17.38. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $A(-1; 2; 3)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{BC}$, якщо $B(2; -1; 3)$, $C(1; 0; 2)$.

17.39. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $A(-1; 2; 3)$ перпендикулярно до прямої KL, якщо $K(1; 2; 0)$, $L(-2; 5; 3)$.

17.40. Складіть рівняння площини, що проходить через середину відрізка AB, для якої вектор $\overrightarrow{AB}$ є вектором нормалі, якщо $A(2; 0; -1)$, $B(-4; 2; 1)$.

17.41. Складіть рівняння площини, для якої вектор $\overrightarrow{MN}$ є вектором нормалі, якщо $M(1; 2; -3)$, $N(2; 5; 0)$ і яка проходить через точку: 1) M; 2) N.

17.42. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $M(-2; 3; 4)$ перпендикулярно до осі:
1) абсцис; 2) ординат; 3) аплікат.

17.43. Складіть рівняння площини, яка проходить через точку $N(1; -2; 3)$ перпендикулярно до осі:
1) абсцис; 2) ординат; 3) аплікат.

17.44. При яких значеннях l і m площини $2x + ly - 3z - 5 = 0$ і $mx - 6y - 9z - 7 = 0$ паралельні?

17.45. При яких значеннях m і t площини $mx + 3y - 4z - 7 = 0$ і $2x - ty - 8z + 11 = 0$ паралельні?

17.46. Обчисліть площу трикутника, який відтинає площина $2x - 7y + 3z - 42 = 0$ від координатного кута площини yz.

17.47. Обчисліть площу трикутника, який відтинає площина $3x - 4y + 20z + 60 = 0$ від координатного кута площини xy.

17.48. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $P(-2; -3; -8)$ паралельно площині yz.

17.49. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $M(3; -1; 7)$ паралельно площині xz.

17.50. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ є рівнянням сфери. Знайдіть центр сфери та її радіус.

17.51. Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6z - 6 = 0$ є рівнянням сфери. Знайдіть центр сфери та її радіус.

17.52. Складіть рівняння сфери, радіус якої дорівнює 3, що проходить через точку $A(1; -2; -1)$ і центр якої лежить на додатній півосі абсцис.

17.53. Складіть рівняння сфери, радіус якої дорівнює 7, що проходить через точку $B(2; 2; 6)$ і центр якої лежить на додатній півосі ординат.

17.54. Знайдіть рівняння сфери із центром $Q(2; -3; -4)$, яка дотикається до площини xz (тобто має з площиною xz одну спільну точку).

17.55. Знайдіть рівняння сфери із центром у точці $Q(-1; 2; -5)$, яка дотикається до площини xy.

17.56. Напишіть рівняння всіх сфер, для яких відрізок AB є радіусом, якщо $A(-2; 3; 1)$, $B(0; 1; 2)$.

17.57. Напишіть рівняння всіх сфер, для яких відрізок CD є радіусом, якщо $C(0; -1; 2)$, $D(6; 1; -1)$.

17.58. Що являє собою ГМТ простору, рівняння якого має вигляд:

1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2z + 2 = 0$;

2) $x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 7 = 0$;

3) $x^2 - 10x + y^2 + z^2 - 2z + 26 = 0$?

17.59. Що являє собою ГМТ простору, рівняння якого має вигляд:

1) $x^2 + y^2 - 6y + z^2 + 9 = 0$;

2) $x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 6z + 14 = 0$;

3) $x^2 - 8x + y^2 + 6y + z^2 = 0$?

17.60. Дано площину α і точки A і B, що їй не належать. Знайдіть у площині α геометричне місце точок, рівновіддалених від точок A і B.

17.61. Три прямі попарно паралельні та не лежать в одній площині. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від цих прямих.

17.62. Площини α і β перетинаються по прямій m. Знайдіть геометричне місце точок простору, що лежать на відстані 5 см від прямої m і на 2 см від площини α.

17.63. Площини α і β перетинаються. Знайдіть геометричне місце точок простору, що лежать на відстані 3 см від площини α і на 5 см від площини β.

17.64. Сума протилежних кутів плоского чотирикутника дорівнює 180°. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від вершин цього чотирикутника.

17.65. Суми протилежних сторін плоского чотирикутника рівні між собою. Знайдіть геометричне місце точок простору, рівновіддалених від прямих, що містять сторони цього чотирикутника.

4 **17.66.** Доведіть, що косинус кута φ між площинами, заданими рівняннями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, можна знайти за формулою:

$$\cos\varphi = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

17.67. Використовуючи результат задачі 17.66, знайдіть кут між площинами:

1) $6x + 3y - 2z + 1 = 0$ та $x + 2y + 6z - 8 = 0$;

2) $x + \sqrt{2}y - z + 8 = 0$ та $x - \sqrt{2}y + z + 4 = 0$.

17.68. Використовуючи результат задачі 17.66, знайдіть кут між площинами $3y - z + 6 = 0$ і $2y + z - 2 = 0$.

17.69. Запишіть рівняння сфери, центр якої лежить на осі абсцис і яка проходить через точки $M(-2; 4; 1)$ і $N(1; 1; 2)$.

17.70. Сфера проходить через точки $K(0; 2; 3)$ і $L(-1; 0; 2)$ та має центр на осі ординат. Запишіть рівняння цієї сфери.

17.71. 1) По якій кривій сфера $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 100$ перетинає площину yz?

2) Чи належить цій кривій точка $A(0; 5; 3)$; точка $B(0; 2; 5)$?

17.72. 1) По якій кривій сфера $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 12)^2 = 169$ перетинає площину xy?

2) Чи належать цій кривій точки $M(2; 0; 0)$, $N(1; 4; 0)$?

17.73. При якому значенні m площини $2x - my + 3z + 9 = 0$ і $7x + 2y - z - 11 = 0$ взаємно перпендикулярні?

17.74. При якому значенні l площини $lx + 2y - 3z - 7 = 0$ і $2x - y + 10z - 1 = 0$ взаємно перпендикулярні?

17.75. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від початку координат і точки $A(-2; 3; -8)$.

17.76. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від точок $B(1; 2; -3)$ і $C(-2; -1; -5)$.

17.77. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від точок $K(2; -1; 1)$ і $L(-4; 1; -3)$.

17.78. Знайдіть усі точки площини $2x + 3y - z + 6 = 0$, рівновіддалені від координатних площин.

17.79. Знайдіть геометричне місце точок, відстань від яких до сфери $(x-2)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 25$ дорівнює 2.

17.80. Знайдіть геометричне місце точок, відстань від яких до сфери $(x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 36$ дорівнює 1.

17.81. Дано точки $A(-1;\ 0;\ 1)$ і $B(-5;\ 4;\ 3)$. Знайдіть множину всіх точок M, для яких кут AMB:

1) прямий; 2) гострий; 3) тупий.

17.82. Дано точки $C(-1;\ 3;\ 1)$ і $D(-1;\ -3;\ 9)$. Знайдіть множину всіх таких точок N, для яких кут CND:

1) прямий; 2) тупий; 3) гострий.

17.83. Напишіть рівняння площини, яка дотикається до сфери $x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 + 4z = 0$ у початку координат.

17.84. Напишіть рівняння площини, яка дотикається до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 49$ у точці $A(-6;\ 3;\ 2)$.

17.85. Напишіть рівняння площини, яка дотикається до сфери $(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 24$ у точці $M(-1;\ 3;\ 0)$.

17.86. Напишіть рівняння сфери із центром у точці $D(-5;\ -1;\ -1)$, що дотикається до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (тобто дві сфери мають лише одну спільну точку).

17.87. Напишіть рівняння сфери із центром у точці $Q(-1;\ 2;\ 2)$, що дотикається до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

17.88. Для кожного невід'ємного значення параметра a визначте, що являє собою ГМТ, задане рівнянням $x^2 + 2ax + y^2 - 4y + z^2 + 8 = 0$.

17.89. Точка A не належить площині α, а точка B належить цій площині та не є основою перпендикуляра, проведеного із точки A до площини α. Знайдіть ГМТ основ усіх перпендикулярів, проведених із точки A до всіх прямих площини α, які проходять через точку B.

17.90. Знайдіть ГМТ точок, рівновіддалених від чотирьох даних точок простору A, B, C, D, що не лежать в одній площині.

17.91. На площині $2x + 3y - 5z + 1 = 0$ знайдіть таку точку A, що відрізок AB перпендикулярний до цієї площини, якщо $B(-1;\ -2;\ 1)$.

17.92. Складіть рівняння сфери, радіус якої дорівнює 3, що дотикається до площини $x + 2y + 2z - 8 = 0$ в точці $A(-1;\ -1;\ 3)$.

17.93. Знайдіть довжину лінії, по якій перетинаються дві сфери
$(x+1)^2+(y-3)^2+(z+5)^2=196$ та
$(x-3)^2+(y-6)^2+(z-7)^2=225$.

17.94. Запишіть рівняння площини, якій належать усі спільні точки сфер

$$x^2+y^2+z^2=4 \text{ та } (x+1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=4.$$

17.95. Дві труби, діаметри яких дорівнюють 16 см і 12 см, треба замінити однією, не змінюючи їх пропускної здатності. Яким повинен бути діаметр нової труби?

17.96. (*Олімпіада Великої Британії, 1982 р.*) Доведіть, що, коли для точки O, яка лежить у внутрішній області чотирикутника $ABCD$, площа якого дорівнює S, виконується рівність $2S=OA^2+OB^2+OC^2+OD^2$, то $ABCD$ – квадрат, а точка O – його центр.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 17

1. Периметр ромба $ABCD$ дорівнює 24 см. Знайдіть площу ромба, якщо $\angle ACD=30°$.

А	Б	В	Г	Д
18 см^2	36 см^2	$18\sqrt{3}$ см^2	$36\sqrt{3}$ см^2	інша відповідь

2. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить її на відрізки 16 см і 9 см. Знайдіть радіус кола, вписаного у цей трикутник.

А	Б	В	Г	Д
5 см	10 см	12,5 см	15 см	20 см

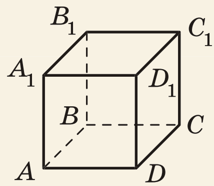
3. Скільки існує площин, які проходять через пряму й точку простору?

А	Б	В	Г	Д
одна	дві	безліч	жодної	одна або безліч

4. Знайдіть модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо $A(-3;\ 0;\ 5)$, $B(0;\ 6;\ 3)$.

А	Б	В	Г	Д
3	4	5	6	7

5. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Установіть відповідність між заданим кутом (1–4) та його градусною мірою (А–Д).



Кут	*Градусна міра кута*
1 між прямими A_1B_1 і DD_1	**А** $0°$
2 між прямими A_1C_1 і C_1D	**Б** $30°$
3 між прямою A_1D і площиною ABC	**В** $45°$
4 між площинами ABA_1 і CDD_1	**Г** $60°$
	Д $90°$

	А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
1					
2					
3					
4					

6. З точки, що лежить на відстані 12 см від площини, проведено до неї дві взаємно перпендикулярні похилі. Проекції цих похилих дорівнюють 9 см і 16 см. Знайдіть (у см) відстань між основами похилих.

§ 18. КООРДИНАТНИЙ І ВЕКТОРНИЙ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ

У стереометрії існує два основних методи розв'язування задач. Перший з них ґрунтується на аксіомах, теоремах і наслідках з них, властивостях геометричних фігур. Другий метод – координатний або координатно-векторний.

1. Координатний метод розв'язування стереометричних задач

Ви вже знаєте, що кожній точці координатного простору відповідає єдина впорядкована трійка чисел $(x;\ y;\ z)$, і навпаки, кожній впорядкованій трійці чисел $(x;\ y;\ z)$ відповідає єдина точка координатного простору. Така взаємно однозначна відповідність між точками та їх координатами дає можливість розв'язувати деякі геометричні задачі алгебраїчними засобами. Цей метод, як ви знаєте з 9-го класу, називають ***координатним методом***. Він є об'єктом вивчення розділу геометрії, який має назву ***аналітична геометрія***.

Метод координат є досить універсальним методом, оскільки забезпечує тісний зв'язок між алгеброю та геометрією. Поєднуючись, ці дві науки дають можливість, застосовуючи координатний метод, будувати доведення та розв'язувати багато задач більш раціонально, більш стисло, ніж геометрично.

Перевагою цього методу є і те, що він спрощує та скорочує розв'язування задач, а під час його використання немає потреби в побудові складних малюнків. У той самий час у координатного методу є й недолік – іноді великий обсяг обчислень.

Координатним методом можна розв'язувати як задачі, у яких точки або вектори задано своїми координатами, а основні геометричні фігури (прямі, площини, кола, сфери тощо) – своїми рівняннями, так і задачі, у яких координатний метод є зручною інтерпретацією умови. Із задачами першого типу ви вже знайомі. Розглянемо ще одну важливу задачу цього типу на застосування координатного методу – знаходження рівняння площини, заданої трьома точками. Нижче наведено один із способів розв'язування такої задачі. Інші способи (більш зручні) розглядатимуться під час вивчення курсу аналітичної геометрії у вищих навчальних закладах.

Задача 1. Скласти рівняння площини, що проходить через точки $K(1; 2; -1)$, $L(0; 1; -4)$, $M(4; 0; -2)$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Запишемо загальне рівняння площини: $Ax + By + Cz + D = 0$. Оскільки точки K, L, M задовольняють це рівняння, матимемо систему

$$\begin{cases} A + 2B - C + D = 0, & (1) \\ 0A + B - 4C + D = 0, & (2) \\ 4A + 0B - 2C + D = 0. & (3) \end{cases}$$

2) Маємо систему з трьох лінійних рівнянь з чотирма невідомими. Розв'язуючи подібні задачі на знаходження рівняння площини, поставимо собі за мету виразити деякі три невідомі, наприклад A, B і C, через четверту (в даному випадку D) так, як під час розв'язування систем рівнянь в курсі алгебри.

3) Із рівнянь (2) і (3) відповідно маємо: $B = 4C - D$ і $A = \frac{1}{2}C - \frac{1}{4}D$. Підставимо отримані вирази в рівняння (1) замість A і B:

$$\begin{cases} B = 4C - D, \\ A = \frac{1}{2}C - \frac{1}{4}D, \\ \frac{1}{2}C - \frac{1}{4}D + 2(4C - D) - C + D = 0. \end{cases}$$

З останнього рівняння системи отримаємо, що $C = \frac{1}{6}D$, тоді $B = 4 \cdot \frac{1}{6}D - D$, $B = -\frac{1}{3}D$, $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}D - \frac{1}{4}D$, $A = -\frac{1}{6}D$.

4) Маємо: $-\frac{1}{6}Dx - \frac{1}{3}Dy + \frac{1}{6}Dz + D = 0$. Помножимо обидві частини цього рівняння на $-\frac{6}{D}$ і отримаємо:

$x + 2y - z - 6 = 0$.

Відповідь. $x + 2y - z - 6 = 0$.

Зауважимо, що розв'язування задачі можна було закінчити інакше: поклавши $D = -6$. Тоді $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$ та отримуємо рівняння площини: $x + 2y - z - 6 = 0$.

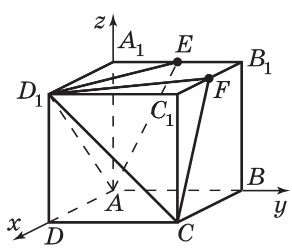
Установимо послідовність дій для розв'язування задач координатним методом.

Для розв'язування геометричної задачі координатним методом:
1) уводимо просторову систему координат;
2) знаходимо координати необхідних точок або рівняння фігур;
3) розв'язуємо задачу, використовуючи відомі формули та факти;
4) аналізуємо отримані значення та даємо відповідь на запитання задачі.

Розглянемо цей алгоритм на прикладі наступної задачі.

Задача 2. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка E – середина A_1B_1, точка F – середина B_1C_1. Знайти кут між площинами AD_1E і D_1FC.

Розв'язання. 1) Уведемо систему координат із початком у точці $A(0; 0; 0)$ так, щоб грані куба належали координатним площинам (мал. 18.1).



Мал. 18.1

2) Тоді маємо координати необхідних нам точок: $A(0; 0; 0)$, $D_1(1; 0; 1)$, $E(0; 0,5; 1)$, $F(0,5; 1; 1)$, $C(1; 1; 0)$.

3) Складаємо рівняння площини A_1DE (зробіть це самостійно, застосовуючи задачу 1 цього параграфа):

$x + 2y - z = 0$.

Складемо рівняння площини D_1FC (зробіть це самостійно): $2x + y + z - 3 = 0$.

4) Позначимо через φ кут між площинами A_1DE і D_1FC. За формулою кута між площинами (задача 17.66) маємо:

$$\cos\varphi = \frac{|1\cdot 2 + 2\cdot 1 - 1\cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}\cdot\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

5) Отже, $\varphi = 60°$.

Відповідь. 60°.

2. Векторний метод розв'язування стереометричних задач

Векторним методом можна розв'язувати як задачі, безпосередньо пов'язані з векторами, так і задачі, у яких уведення векторів є зручною інтерпретацією умови. Чимало задач першого типу ви вже розглянули як у 9-му класі, так і в цьому підручнику. Розглянемо далі задачі другого типу.

Для розв'язування задачі векторним методом:
1) уводимо необхідні для розв'язування задачі вектори;
2) розв'язуємо задачу, спираючись на відомі факти та правила дій над векторами;
3) аналізуємо отримані значення та даємо відповідь на запитання задачі.

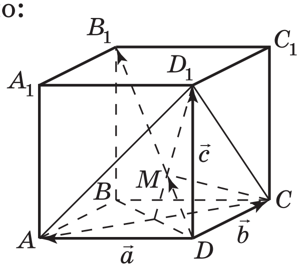
Задача 3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка M – точка перетину медіан трикутника ACD_1. Довести, що точка M належить діагоналі B_1D та ділить її у відношенні 1:2, рахуючи від вершини D.

Розв'язання. 1) Позначимо $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DD_1} = \vec{c}$ (мал. 18.2). За задачею 5 з § 14 маємо:

$$\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

2) За правилом паралелепіпеда: $\overrightarrow{DB_1} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

3) Отже, $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DB_1}$. Це означає, що вектори $\overrightarrow{DM}$ і $\overrightarrow{DB_1}$ колі-



Мал. 18.2

неарні та співнапрямлені, тобто точка M належить діагоналі DB_1 і $DM : DB_1 = 1 : 3$, а тому $DM : MB_1 = 1 : 2$, що й треба було довести.

Задача 4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Точка M належить діагоналі AC грані $ABCD$, $AM : MC = 1 : 4$. Точка N належить відрізку AC_1, $AN : NC_1 = 1 : 5$. Довести, що точки M, N і A_1 лежать на одній прямій. Знайти відношення, у якому точка N ділить відрізок MA_1.

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки $AM : MC = 1 : 4$ і $AN : NC_1 = 1 : 5$, то $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC_1}$ відповідно (мал. 18.3).

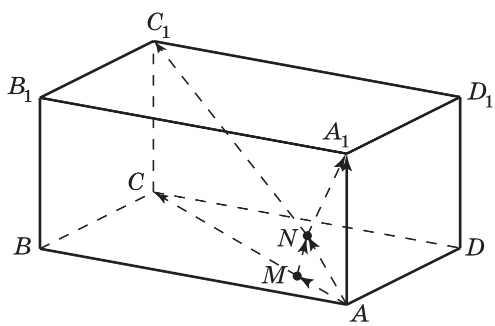
2) Маємо: $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC_1} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC})$.

Тоді

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AC}) - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{30}(5\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC}).$$

3) $\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA_1} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{5}(5\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC})$.

4) Тому $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}(5\overrightarrow{AA_1} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{6}\overrightarrow{MA_1}$.



Мал. 18.3

Це означає, що вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{MA_1}$ колінеарні та співнапрямлені, тобто точки M, N і A_1 лежать на одній прямій.

5) Крім того, $6\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA_1}$, а тому $MN : NA_1 = 1 : 5$.

В і д п о в і д ь. $MN : NA_1 = 1 : 5$.

3. Координатно-векторний метод розв'язування задач

Поєднуючи координатний і векторний методи, можна розв'язувати різні види задач, зокрема пов'язані із знаходженням кутів.

Задача 5. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка E – середина A_1B_1, точка F – середина B_1C_1. Знайти кут між прямими AE і CF.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Уведемо систему координат як у задачі 2 (мал. 18.1).

2) Маємо $A(0; 0; 0)$, $E(0; 0,5; 1)$, $C(1; 1; 0)$, $F(0,5; 1; 1)$, $\overrightarrow{AE}(0; 0,5; 1)$, $\overrightarrow{CF}(-0,5; 0; 1)$.

3) Нехай φ – кут між прямими AE і CF. Тоді

$$\cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CF}\right|}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CF}\right|} = \frac{\left|0\cdot(-0,5)+0\cdot 0,5+1\cdot 1\right|}{\sqrt{0^2+0,5^2+1^2}\cdot\sqrt{(-0,5)^2+0^2+1^2}} =$$

$$= \frac{1}{1,25} = 0,8.$$

Отже, $\varphi = \arccos 0,8$.

В і д п о в і д ь. $\arccos 0,8$.

Задача 6. Дано точки $A(-1; 1; 1)$ і $B(4; 1; 3)$. На осі абсцис знайти таку точку C, щоб в трикутнику ABC кут C був прямим.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Нехай $C(x; 0; 0)$ – шукана точка.

2) Оскільки в трикутнику ABC кут C – прямий, то $\overrightarrow{CA}\perp\overrightarrow{CB}$, а тому $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$.

3) Маємо: $\overrightarrow{CA}(-1-x; 1; 1)$, $\overrightarrow{CB}(4-x; 1; 3)$, тоді

$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = (4-x)(-1-x)+1+3 = x^2-3x$.

4) Маємо рівняння: $x^2-3x=0$, корені якого $x_1=0$, $x_2=3$.

Отже, шукані точки $C_1(0; 0; 0)$ або $C_2(3; 0; 0)$.

В і д п о в і д ь. $C_1(0; 0; 0)$, $C_2(3; 0; 0)$.

4. Векторний метод в алгебрі

Вектори можна застосовувати й до розв'язування алгебраїчних задач, тобто розглянемо *векторний метод в алгебрі*.

Задача 7. Для чисел x, y, z справджується рівність $4x^2+9y^2+36z^2=49$. Знайти найбільше значення виразу $4x-3y+12z$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) Розглянемо два вектори $\vec{a}(2x; 3y; 6z)$ і $\vec{b}(2; -1; 2)$. Тоді $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{4x^2+9y^2+36z^2} = \sqrt{49} = 7$ (за умовою), $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{2^2+(-1)^2+2^2} = 3$.

2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 4x-3y+12z$.

3) За задачею 16.28 маємо, що $\vec{a} \cdot \vec{b} \leqslant |\vec{a}||\vec{b}|$, причому рівність досягається, коли $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – співнапрямлені.

Отже, $4x - 3y + 12z \leqslant 7 \cdot 3$, $4x - 3y + 12z \leqslant 21$.

Рівність $4x - 3y + 12z = 21$ справджується, коли $\frac{2x}{4} = \frac{3y}{-1} = \frac{6z}{2} = \lambda > 0$. Неважко підібрати відповідні значення x, y, z для цієї рівності, наприклад $x = 2$, $y = -\frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{3}$.

Відповідь. 21.

5. Застосування координатного методу до знаходження ГМТ

Наведемо приклад розв'язування координатним методом задачі на знаходження ГМТ.

Задача 8. Дано точки A і B. Знайти геометричне місце точок простору M, для яких $AM : BM = \sqrt{2}$.

Розв'язання. 1) Уведемо просторову систему координат так, що $A(-a; 0; 0)$, $B(a; 0; 0)$.

2) Нехай $M(x; y; z)$ – точка шуканого ГМТ. Маємо:
$AM = \sqrt{(x+a)^2 + y^2 + z^2}$, $BM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2}$.

3) Оскільки $\frac{AM}{BM} = \sqrt{2}$, маємо рівняння:

$$\frac{(x+a)^2 + y^2 + z^2}{(x-a)^2 + y^2 + z^2} = 2.$$

Після спрощення отримаємо:

$x^2 - 6xa + a^2 + y^2 + z^2 = 0$, $(x - 3a)^2 + y^2 + z^2 = 8a^2$,

$(x - 3a)^2 + y^2 + z^2 = (2\sqrt{2}a)^2$.

Це рівняння сфери із центром у точці $Q(3a; 0; 0)$ радіуса $2\sqrt{2}a$.

4) Тепер подамо отриманий результат, не використовуючи координат. Нехай $AB = 2a$. Тоді шукане ГМТ – сфера із центром Q, що належить прямій AB, причому B – середина відрізка AQ, і радіусом $R = 2\sqrt{2}a$.

• Поясніть за задачею 1, як можна знайти рівняння площини, знаючи координати трьох точок, що належать цій площині. • Назвіть послідовність дій для розв'язування задач координатним методом. • Назвіть послідовність дій для розв'язування задач векторним методом.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

2 **18.1.** Складіть рівняння площини, що проходить через точки:

1) $A(-2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 3;\ 0)$ і $C(0;\ 0;\ -1)$;
2) $M(0;\ 1;\ 0)$, $K(4;\ -2;\ 0)$ і $N(1;\ 0;\ -3)$.

18.2. Складіть рівняння площини, що проходить через точки:

1) $K(1;\ 0;\ 0)$, $L(0;\ -4;\ 0)$ і $N(0;\ 0;\ 3)$;
2) $A(0;\ 0;\ -2)$, $B(3;\ 0;\ 0)$ і $C(0;\ -1;\ 4)$.

18.3. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро якого дорівнює 1. Точка K – середина B_1C_1, точка N – середина BB_1. Знайдіть:

1) AK; 2) DN; 3) DK; 4) D_1N.

18.4. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро якого дорівнює 2. Точка M – середина C_1D_1, точка L – середина CC_1. Знайдіть:

1) BM; 2) AM; 3) AL; 4) A_1L.

18.5. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між векторами:

1) $\overrightarrow{B_1B}$ і $\overrightarrow{C_1D}$; 2) $\overrightarrow{A_1C_1}$ і $\overrightarrow{A_1B}$;
3) $\overrightarrow{BB_1}$ і $\overrightarrow{AC}$; 4) $\overrightarrow{A_1B}$ і $\overrightarrow{DC_1}$.

18.6. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між векторами:

1) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{B_1C}$; 2) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AD_1}$;
3) $\overrightarrow{DD_1}$ і $\overrightarrow{C_1A_1}$; 4) $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{B_1D_1}$.

3 **18.7.** Чи лежать точки A, B і C на одній прямій, якщо:

1) $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(4;\ 12;\ 13)$, $C(2;\ 8;\ 9)$;
2) $A(-2;\ 0;\ 1)$, $B(-8;\ 0;\ -2)$, $C(-6;\ 0;\ 0)$?

18.8. Чи лежать точки K, L і M на одній прямій, якщо:

1) $K(2;\ 0;\ 0)$, $L(4;\ 6;\ 0)$, $M(3;\ 2;\ 0)$;
2) $K(-1;\ 1;\ 2)$, $L(2;\ 4;\ 8)$, $M(3;\ 5;\ 10)$?

18.9. Дано точки $A(3;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 3;\ 0)$, $C(1;\ 4;\ 1)$. Чи належить площині ABC точка: 1) $K(1;\ 1;\ 1)$; 2) $L(1;\ 0;\ -1)$?

18.10. Дано точки $K(1;\ 0;\ 0)$, $L(0;\ 0;\ 1)$, $M(1;\ -1;\ -2)$. Чи належить площині KLM точка: 1) $A(1;\ 1;\ 2)$; 2) $B(0;\ 1;\ 1)$?

18.11. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка K належить ребру BB_1, точка L належить ребру AA_1, $B_1K : KB = 1 : 3$, $AL : LA_1 = 1 : 4$. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{CL}$ і $\overrightarrow{KD_1}$.

18.12. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка K належить ребру BB_1. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{CD_1}$ і $\overrightarrow{KD}$, якщо $KB_1 : KB = 1 : 2$.

18.13. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = 3$, $AD = 4$, $AA_1 = 12$. Знайдіть кут між $\overrightarrow{AC_1}$ і $\overrightarrow{BD}$.

18.14. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $BA = BC = 2$, $BB_1 = 1$. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{A_1C_1}$.

18.15. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Доведіть, що $AC_1 \perp (A_1BD)$.

18.16. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, K – середина ребра AD. Знайдіть кут між площинами A_1BK і C_1CK.

18.17. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, L – середина ребра BC. Знайдіть кут між площинами A_1BL і C_1D_1L.

18.18. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, N – середина ребра CD. Знайдіть кут між прямими: 1) BN і B_1A; 2) A_1N і B_1D_1.

18.19. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, M – середина ребра AB. Знайдіть кут між прямими: 1) CM і D_1M; 2) DM і B_1D.

18.20. Дано точки $A(-1;\ 2;\ 6)$ і $A(0;\ 3;\ -1)$. На осі ординат знайдіть таку точку C, щоб трикутник ABC був прямокутним із прямим кутом C.

18.21. Дано точки $M(-1;\ 2;\ 3)$ і $L(0;\ 1;\ 2)$. На осі аплікат знайдіть таку точку K, щоб трикутник MKL був прямокутним із прямим кутом K.

18.22. Дано прямокутник $ABCD$, точка K – довільна точка простору. Доведіть, що $KA^2 + KC^2 = KB^2 + KD^2$.

18.23. Доведіть, використовуючи вектори, що діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

18.24. Знайдіть геометричне місце точок $M(x;\ y;\ z)$, для яких сума квадратів відстаней до точок $A(-1;\ 2;\ 0)$ і $B(0;\ 1;\ 0)$ дорівнює сумі квадратів відстаней до точок $C(1;\ -2;\ 3)$ і $D(4;\ 0;\ 0)$. Укажіть деякі дві точки, що належать цьому геометричному місцю точок.

18.25. Дано точки $A(3;\ 0;\ 0)$, $B(-1;\ 2;\ 1)$, $C(0;\ 2;\ 0)$ і $D(1;\ 3;\ 1)$. Знайдіть геометричне місце точок $M(x;\ y;\ z)$, для яких справджується рівність $MA^2 - MB^2 = MC^2 - MD^2$.

4 **18.26.** Знайдіть точку перетину площини $2x - y + 3z - 6 = 0$ з прямою, що проходить через точки $A(-1;\ -1;\ 1)$ і $B(2;\ 0;\ 4)$.

18.27. Дано площину $2x - 2y - z + 4 = 0$ та пряму l, що проходить через точки $A(2;\ 1;\ 1)$ і $B(-3;\ 4;\ 0)$. Знайдіть точку перетину прямої l і даної площини.

18.28. Дано точки $M(3;\ -8;\ 7)$ і $N(-1;\ 2;\ -7)$. У якій точці пряма MN перетинає площину xy?

18.29. Дано точки $B(2; 3; 4)$ і $C(-1; -3; 1)$. У якій точці пряма BC перетинає площину yz?

18.30. Дано точки $A(-1; 3; 5)$ і $B(2; 2; 8)$. Чи перетинає пряма AB координатну вісь z?

18.31. Дано точки $C(-2; 4; 2)$ і $D(4; -2; -1)$. Чи перетинає пряма CD координатну вісь x?

18.32. Чи лежать точки $K(-1; 0; 5)$, $M(7; 1; -2)$, $N(-15; -17; 12)$, $T(1; -2; 1)$ в одній площині?

18.33. Чи лежать точки $A(1; 0; 0)$, $B(4; -1; 3)$, $C(-3; 0; -2)$ і $D(0; 3; 2)$ в одній площині?

18.34. Дано точки $A(1; 1; -1)$, $B(3; 2; 0)$, $C(-1; 0; -2)$. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $K(2; -1; 3)$ паралельно площині ABC.

18.35. Дано точки $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 1; 6)$, $C(0; -2; -1)$. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $L(1; -3; 4)$ паралельно площині ABC.

18.36. Дано точки $A(0; 3; 2)$ і $B(1; 1; 0)$ та площину α, яку задано рівнянням $2x - y + z + 5 = 0$. Знайдіть кут між прямою AB і площиною α.

18.37. Дано точки $A(1; 2; 3)$ і $B(4; 6; 3)$ та площина $2x - y - 2z + 1 = 0$. Знайдіть кут, який утворює пряма AB з даною площиною.

18.38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, K – довільна точка простору. Доведіть, що $KA_1^2 + KC^2 = KB_1^2 + KD^2$.

18.39. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Визначте, у якому відношенні площини A_1BC_1 і ACD_1 ділять відрізок B_1D.

18.40. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка O – точка перетину діагоналей грані CC_1D_1D. У якому відношенні площина ABD ділить відрізок AO?

18.41. У правильному тетраедрі $QABC$ точки M і N – середини ребер AQ і BC відповідно. Доведіть, що відрізок MN перпендикулярний до кожного з відрізків AQ і BC.

18.42. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точки K, L і M належать відповідно ребрам куба AA_1, BC і C_1D_1. При якому розміщенні точок K, L і M значення виразу $KL^2 + LM^2 + KM^2$ буде найменшим?

18.43. При якому значенні z точки $A(1; 1; 0)$, $B(2; 3; z)$, $C(0; -1; -5)$ і $D(3; -1; -2)$ належать одній площині?

18.44. При якому значенні x точки $A(0; 1; 5)$, $B(1; -2; -8)$, $C(2; 0; -1)$ і $D(x; 2; 10)$ належать одній площині?

18.45. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AC_1 \perp (A_1BD)$. Доведіть, що $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб.

18.46. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$.

1) Знайдіть кут між прямими BD_1 і A_1D.

2) За якої умови прямі BD_1 і A_1D перпендикулярні?

18.47. Числа x, y, z такі, що $4x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Знайдіть найменше значення виразу $6x + 4y - 12z$.

18.48. Числа x, y, z такі, що $x^2 + 9y^2 + z^2 = 16$. Знайдіть найбільше значення виразу $x - 6y - 2z$.

18.49. Доведіть за допомогою векторів ознаку перпендикулярності прямої та площини.

18.50. Доведіть за допомогою векторів теорему про три перпендикуляри.

18.51. У тетраедрі $QABC$ точки M_1 і M – точки перетину медіан трикутників QAB і QBC відповідно. Доведіть, що

$$M_1M_2 \parallel AC \text{ і } M_1M_2 = \frac{1}{3}AC.$$

18.52. У тетраедрі $QABC$ усі пари мимобіжних ребер попарно перпендикулярні. Доведіть, що

$$AB^2 + CQ^2 = AC^2 + BQ^2 = AQ^2 + BC^2.$$

18.53. Дано два паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Точки M, N, K і L – середини відрізків AA_1, BB_1, CC_1 і DD_1 відповідно. Доведіть, що відрізки MK і NL перетинаються у деякій точці та діляться нею навпіл.

18.54. Дано два паралелограми $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$. Точки K, M і N – середини відрізків AB, A_1D і C_1C відповідно, відрізки BD_1 і DB_1 перетинаються у точці O. Доведіть, що точка O належить площині KMN.

18.55. Дано точки $M(3; 5; 1)$ і $K(1; -7; 2)$. Знайдіть на осі аплікат усі такі точки N, щоб трикутник MKN був прямокутним (розглянути всі можливі випадки).

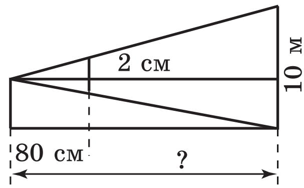
18.56. Доведіть, що площу трикутника ABC можна знайти за формулою $S_{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{(|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|)^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2}$.

18.57. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Через пряму B_1C проведено площину, що перетинає ребро AB і утворює кут $60°$ з прямою A_1B. У якому відношенні ця площина ділить ребро AB?

18.58. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, K – середина ребра AA_1, L – середина ребра AD, M – центр грані CC_1D_1D. Доведіть, що $KM \perp B_1L$.

18.59. Доведіть нерівність $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \leqslant 1$.

18.60. Якщо тримати монету діаметром 2 см на відстані 80 см від очей, то стовп заввишки 10 м повністю нею закриється (мал. 18.4). Знайдіть відстань від спостерігача до стовпа.



Мал. 18.4

Підготуйтеся до вивчення нового матеріалу

18.61. Які координати має точка O, відносно якої симетричні точки $A(-1; 3)$ і $A'(4; 9)$?

18.62. Знайдіть точку, симетричну точці $M(-2; 1)$ відносно:
1) початку координат; 2) точки $O(4; -2)$?

18.63. Знайдіть точку, симетричну точці $B(4; -1)$ відносно:
1) осі абсцис; 2) осі ординат?

18.64. Дано формули паралельного перенесення: $x' = x - 2$, $y' = y + 3$. З'ясуйте:

1) у яку точку при цьому паралельному перенесенні переходять точки $A(-3; 7)$, $B(2; -7)$;

2) яка точка при цьому паралельному перенесенні переходить у точку $C'(4; -1)$; у точку $D'(-2; 3)$?

18.65. Доведіть, що нерівність
$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x-3} + \sqrt{50-3x} \leqslant 12$$
справджується для всіх значень x, при яких має зміст його ліва частина.

Перевірте свою компетентність

Завдання № 18

1. Два з чотирьох кутів, що утворилися при перетині двох прямих, відносяться як 4 : 5. Знайдіть кут між прямими.

А	Б	В	Г	Д
20°	40°	60°	80°	100°

Продовження

2. Катет прямокутного трикутника дорівнює 4 см, а гіпотенуза 8 см. Знайдіть проекцію другого катета на гіпотенузу.

А	Б	В	Г	Д
6 см	5 см	4 см	3 см	2 см

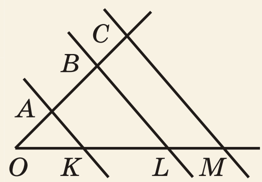
3. З вершини тупого кута паралелограма проведено дві висоти, кут між якими 20°. Знайдіть тупий кут паралелограма.

А	Б	В	Г	Д
110°	160°	140°	120°	150°

4. Яка з даних точок належить площині xz?

А	Б	В	Г	Д
(3; –1; 2)	(0; –2; 0)	(–1; 0; 13)	(4; –2; 0)	(0; 3; –1)

5. На малюнку прямі AK, BL і CM – паралельні, OK = 6 см, KL = 7,5 см, AB = 5 см, BC = 3 см. Установіть відповідність між відрізком (1–4) та його довжиною (А–Д).



Відрізок		*Довжина*	
1	*OA*	**А**	4 см
2	*LM*	**Б**	4,5 см
3	*KM*	**В**	6 см
4	*OB*	**Г**	9 см
		Д	12 см

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. З точки A до площини проведено дві похилі, кожна з яких дорівнює $4\sqrt{2}$ см. Кут між похилими дорівнює 60°, а кут між їх проекціями – прямий. Знайдіть (у см) відстань від точки до площини.

§ 19. ПЕРЕТВОРЕННЯ У ПРОСТОРІ

Перетворення геометричних фігур можна розглядати не лише на площині, а й у просторі. У цьому параграфі розглянемо переміщення у просторі та його види.

1. Рух у просторі, його властивості

Переміщення (рух) у просторі означують так само, як і на площині.

Перетворення однієї фігури в іншу називають *переміщенням (рухом)*, якщо воно зберігає відстань між точками.

Як і на площині, справджуються такі *властивості переміщення (руху) у просторі*:

1) під час переміщення точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розташування;
2) під час переміщення прямі переходять у прямі, промені — у промені, відрізки — у відрізки;
3) під час переміщення кут переходить у рівний йому кут.

Новою властивістю переміщення в просторі є така:

4) під час переміщення площина переходить у площину.

Приймаємо цю властивість без доведення, яке є досить громіздке.

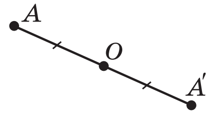
Далі розглянемо основні види переміщень.

2. Симетрія відносно точки

Як і на площині, у просторі:

дві точки A і A' називають *симетричними відносно точки* O, якщо O — середина відрізка AA' (мал. 19.1).

Симетрію відносно точки називають ще *центральною симетрією*, а точку O — *центром симетрії*.



Мал. 19.1

Задача 1. Довести, що точкою, яка симетрична точці $A(x; y; z)$ відносно початку координат є точка $A'(-x; -y; -z)$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\frac{x+(-x)}{2} = 0$; $\frac{y+(-y)}{2} = 0$ і $\frac{z+(-z)}{2} = 0$, то точки $A(x; y; z)$ і $A'(-x; -y; -z)$ симетричні відносно точки (0; 0; 0), тобто відносно початку координат.

Задача 2. Точки $B(-5; 7; z)$ і $B'(x; y; 0)$ симетричні відносно точки $O(1; -2; 3)$. Знайти x, y і z.

Р о з в ’ я з а н н я. Точка O – середина відрізка BB'. Тому за формулами середини відрізка маємо:

$$1 = \frac{-5+x}{2}; \; -2 = \frac{7+y}{2} \text{ і } 3 = \frac{z+0}{2}.$$

Отже, $x = 7$, $y = -11$, $z = 6$.

В і д п о в і д ь. $x = 7$, $y = -11$, $z = 6$.

Т е о р е м а 1 (про перетворення симетрії відносно точки). **Перетворення симетрії відносно точки є переміщенням.**

Д о в е д е н н я. 1) Доведемо теорему координатним методом. Виберемо прямокутну систему координат у просторі так, щоб точка, відносно якої маємо перетворення симетрії, збігалася з початком координат.

2) Розглянемо тепер будь-які дві точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ та точки, їм симетричні відносно початку координат відповідно: $A'(-x_1; -y_1; -z_1)$ і $B'(-x_2; -y_2; -z_2)$.

3) Оскільки $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$;

$A'B' = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$,

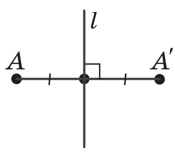
то $AB = A'B'$.

Отже, симетрія відносно точки є переміщенням. ■

3. Симетрія відносно прямої

Дві точки A і A' називають *симетричними відносно прямої l*, якщо ця пряма – серединний перпендикуляр до відрізка AA' (мал. 19.2).

Симетрію відносно прямої називають ще *осьовою симетрією*, а пряму l – *віссю симетрії*.



Мал. 19.2

Задача 3. Довести, що точкою, яка симетрична точці $A(x; y; z)$ відносно осі Oz, є точка $A'(-x; -y; z)$.

Д о в е д е н н я. 1) Якщо точка A належить осі Oz, то її абсциса й ордината дорівнюють нулю, тоді точка $A(0; 0; z)$ симетрична сама собі відносно осі Oz. Оскільки $A'(0; 0; z)$, то у цьому випадку твердження задачі доведено.

2) Якщо точка A не належить осі Oz, то точка M – середина відрізка AA' має координати $\frac{x + (-x)}{2} = 0$; $\frac{y + (-y)}{2} = 0$ і $\frac{z + z}{2} = z$. Точка $M(0; 0; z)$ належить осі аплікат. Оскільки

аплікати точок A і A' рівні, то відрізок AA' перпендикулярний до осі Oz. Таким чином, вісь аплікат є серединним перпендикуляром до відрізка AA', а отже, точки A і A' – симетричні відносно цієї осі.

Міркуючи аналогічно, можна довести, що для точки $A(x; y; z)$ симетричною відносно осі Ox є точка $A''(x; -y; -z)$, а відносно осі Oy – точка $A'''(-x; y; -z)$.

Т Теорема 2 (про перетворення симетрії відносно прямої). **Симетрія відносно прямої є переміщенням.**

Доведення. 1) Використаємо координатний метод. Виберемо прямокутну систему координат у просторі так, щоб віссю симетрії була вісь аплікат.

2) Розглянемо тепер дві довільні точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$. Точки, які їм симетричні відносно осі аплікат, це точки $A'(-x_1; -y_1; z_1)$ і $B'(-x_2; -y_2; z_2)$.

3) Оскільки $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ та

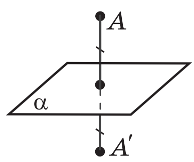
$A'B' = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$, то $AB = A'B'$, тобто перетворення симетрії відносно прямої є переміщенням. ■

4. Симетрія відносно площини

У просторі розглядають ще один вид симетрії – *симетрію відносно площини*.

! **Дві точки A і A' називають *симетричними відносно площини* α, якщо площина α проходить через середину відрізка AA' і перпендикулярна до цього відрізка** (мал. 19.3).

Симетрію відносно площини називають ще *дзеркальною симетрією*, площину α – *площиною симетрії*.



Мал. 19.3

Задача 4. Довести, що точкою, симетричною точці $A(x; y; z)$ відносно площини xy, є точка $A'(x; y; -z)$.

Доведення. 1) Якщо точка A належить площині xy, то її апліката дорівнює нулю, тоді точка $A(x; y; 0)$ симетрична сама собі відносно площини xy. Оскільки при $z = 0$ маємо $A'(x; y; 0)$, то у випадку, коли точка A належить площині xy, твердження задачі доведено.

2) Якщо точка A не належить площині xy, то точка M – середина відрізка AA' має координати: $\frac{x + x}{2} = x$; $\frac{y + y}{2} = y$;

$\frac{z + (-z)}{2} = 0$. Точка $M(x;\ y;\ 0)$ належить площині xy. Оскільки відповідні абсциси й ординати точок A і A' між собою рівні, то відрізок AA' перпендикулярний до площини xy. Таким чином, площина xy проходить через середину відрізка AA' і перпендикулярна до нього, а отже, точки A і A' симетричні відносно площини xy.

Міркуючи аналогічно, можна довести, що *точкою, симетричною точці $A(x;\ y;\ z)$ відносно площини xy, є точка $A''(x;\ y;\ -z)$, а відносно площини yz – точка $A'''(-x;\ y;\ z)$.*

Т е о р е м а 3 (про перетворення симетрії відносно площини). **Перетворення симетрії відносно площини є переміщенням.**

Д о в е д е н н я. 1) Для доведення використаємо координатний метод. Уведемо прямокутну систему координат у просторі так, щоб площиною симетрії була площина xy.

2) Розглянемо дві довільні точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Точки, які їм симетричні відносно площини xy, це точки $A'(x_1;\ y_1;\ -z_1)$ і $B'(x_2;\ y_2;\ -z_2)$.

3) Оскільки $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ і

$A'B' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$, то $AB = A'B'$.

Отже, перетворення симетрії відносно площини є переміщенням. ■

5. Паралельне перенесення

У просторі, як і на площині, можна виконувати паралельне перенесення.

Паралельним перенесенням **у просторі називають таке перетворення фігури, при якому її довільна точка $A(x;\ y;\ z)$ переходить у точку $A'(x + a;\ y + b;\ z + c)$, де a, b і c – одні й ті самі числа для всіх точок фігури.**

Якщо точка A' має координати $(x';\ y';\ z')$, то отримаємо *формули паралельного перенесення*:

$$x' = x + a; \qquad y' = y + b; \qquad z' = z + c.$$

Задача 5. Паралельне перенесення задано формулами

$$x' = x - 3;\ y' = y + 5;\ z' = z.$$

1) У яку точку при такому паралельному перенесенні переходить точка $A(5;\ -2;\ 3)$?

2) Яка точка при цьому паралельному перенесенні переходить у точку $B'(-3;\ 2;\ -7)$?

Р о з в ' я з а н н я. 1) Нехай це буде точка $A'(x'; y'; z')$; $x' = 5 - 3 = 2$; $y' = -2 + 5 = 3$; $z' = 3$. Отже, $A'(2; 3; 3)$.

2) Нехай це буде точка $B(x; y; z)$; $-3 = x - 3$, $x = 0$; $2 = y + 5$, $y = -3$; $-7 = z$. Отже, $B(0; -3; -7)$.

В і д п о в і д ь. 1) $A'(2; 3; 3)$; 2) $B(0; -3; -7)$.

Задача 6. Записати формули паралельного перенесення, при якому точка $C(-3; 7; 11)$ переходить у точку $C'(0; 2; -1)$.

Р о з в ' я з а н н я.

$x' = x + a$;	$y' = y + b$;	$z' = z + c$;
$0 = -3 + a$;	$2 = 7 + b$;	$-1 = 11 + c$;
$a = 3$.	$b = -5$.	$c = -12$.

Отже, $x' = x + 3$; $y' = y - 5$; $z' = z - 12$.

В і д п о в і д ь. $x' = x + 3$; $y' = y - 5$; $z' = z - 12$.

Т е о р е м а 4 (про паралельне перенесення). **Паралельне перенесення є переміщенням.**

Д о в е д е н н я. 1) Нехай при деякому паралельному перенесенні точки $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ переходять у точки $A'(x_1 + a; y_1 + b; z_1 + c)$ і $B'(x_2 + a; y_2 + b; z_2 + c)$.

2) Маємо: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$;

$$A'B' = \sqrt{(x_2 + a - (x_1 + a))^2 + (y_2 + b - (y_1 + b))^2 + (z_2 + c - (z_1 + c))^2} =$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}, \text{ тобто } AB = A'B'.$$

Отже, паралельне перенесення є переміщенням. ■

• Що називають переміщенням? • Сформулюйте властивості переміщення. • Що називають симетрією відносно точки? • Сформулюйте й доведіть теорему про перетворення симетрії відносно точки. • Що називають симетрією відносно прямої? • Сформулюйте й доведіть теорему про перетворення симетрії відносно прямої. • Що називають симетрією відносно площини? • Сформулюйте й доведіть теорему про перетворення симетрії відносно площини. • Що називають паралельним перенесенням у просторі? • Сформулюйте й доведіть теорему про паралельне перенесення.

Розв'яжіть задачі та виконайте вправи

1 **19.1.** Запишіть координати точки, яка симетрична відносно початку координат точці:

1) $A(-3; 2; 0)$; 2) $M(-4; 2; -3)$.

19.2. Запишіть координати точки, яка симетрична відносно початку координат точці:

1) $B(4; 0; -2)$; 2) $N(1; -3; -5)$.

19.3. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 2$; $y' = y + 2$; $z' = z - 3$. У яку точку при цьому паралельному перенесенні перейде точка:

1) $O(0; 0; 0)$; 2) $C(4; -1; 11)$?

19.4. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x + 1$; $y' = y - 5$; $z' = z + 2$. У яку точку при цьому паралельному перенесенні перейде точка:

1) $O(0; 0; 0)$; 2) $D(-3; 1; 10)$?

2 **19.5.** Які координати має точка O, відносно якої симетричні точки $A(2; -7; 8)$ і $A'(0; 1; -10)$?

19.6. Чи симетричні точки $P(-1; 2; 9)$ і $P'(3; 0; -1)$ відносно точки $O(1; 1; 5)$?

19.7. Точки $B(x; 2; -7)$ і $B'(2; y; z)$ симетричні відносно точки $O(1; 0; -1)$. Знайдіть x, y і z.

19.8. Точки $C(-1; y; 2)$ і $C'(x; 4; z)$ симетричні відносно точки $O(-2; 1; 0)$. Знайдіть x, y і z.

19.9. Запишіть координати точок, симетричних точці $P(-1; 2; 7)$ відносно осі: 1) абсцис; 2) аплікат.

19.10. Запишіть координати точок, симетричних точці $N(2; -3; 5)$ відносно осі: 1) абсцис; 2) ординат.

19.11. Запишіть координати точок, симетричних точці $B(4; -2; 1)$ відносно площини: 1) xy; 2) yz.

19.12. Запишіть координати точок, симетричних точці $C(-1; 3; -5)$ відносно площини: 1) yz; 2) xz.

19.13. Паралельне перенесення задано формулами $x' = x + 2$; $y' = y - 3$; $z' = z + 5$. Які точки при цьому паралельному перенесенні переходять у точки:

1) $A'(2; -3; 5)$; 2) $B'(-1; 10; 4)$?

19.14. Паралельне перенесення задано формулами $x' = x - 2$; $y' = y + 1$; $z' = z - 4$. Які точки при цьому паралельному перенесенні переходять у точки:

1) $C'(4; -2; 11)$; 2) $D'(-2; 1; -4)$?

19.15. Запишіть формули паралельного перенесення, при якому точка $M(-1; 2; 5)$ переходить у точку $M'(0; -2; 11)$.

19.16. Запишіть формули паралельного перенесення, при якому точка $N(2; -3; 1)$ переходить у точку $N'(9; 0; -2)$.

19.17. Дано площину α. Побудуйте фігури та фігури, їм симетричні, відносно площини α:
1) точку, що не належить площині α;
2) відрізок, паралельний площині α;
3) пряму, перпендикулярну до площини α;
4) трикутник, що належить площині, яка паралельна площині α;
5) квадрат, що належить площині, яка не паралельна площині α;
6) площини, що утворює кут φ ($\varphi \neq 90°$) із площиною α.

19.18. Дано площину β. Побудуйте фігури та фігури, їм симетричні, відносно площини β:
1) точку, що належить площині β;
2) відрізок, перпендикулярний до площини β;
3) пряму, паралельну площині β;
4) квадрат, що належить площині, яка паралельна площині β;
5) трикутник, що належить площині, яка не паралельна площині β;
6) пряму, що утворює кут φ ($\varphi \neq 90°$) із площиною β.

19.19. Відомо, що $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$. Доведіть, що точки A і B симетричні відносно точки M.

3 **19.20.** Укажіть усі площини симетрії для:
1) відрізка; 2) променя;
3) правильного трикутника; 4) ромба;
5) прямокутника; 6) сфери.

19.21. Укажіть усі площини симетрії для:
1) прямої; 2) рівнобедреного трикутника;
3) квадрата; 4) паралелограма;
5) кола; 6) куба.

19.22. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте точку, симетричну точці A відносно:
1) точки B; 2) точки D_1;
3) точки C_1; 4) прямої BC;
5) прямої BD; 6) прямої B_1D_1;
7) прямої C_1D_1; 8) площини BB_1C;
9) площини BB_1D.

19.23. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте точку, симетричну точці D відносно:
1) точки C; 2) точки A_1;
3) точки B_1; 4) прямої BC;

5) прямої AC; 6) прямої A_1C_1;
7) прямої A_1B_1; 8) площини AA_1B_1;
9) площини ACC_1.

19.24. Два кола дзеркально-симетричні. Чи можуть вони лежати:
1) в одній площині; 2) в різних площинах;
3) на одній сфері?
Якщо відповідь позитивна, виконайте відповідні малюнки та побудуйте на них площину симетрії.

19.25. Два квадрата дзеркально-симетричні. Чи можуть вони лежати:
1) в одній площині; 2) у різних площинах;
3) на одному кубі?
Якщо відповідь позитивна, виконайте відповідні малюнки та побудуйте на них площину симетрії.

19.26. Точки $A(2; y; -3)$ і $A'(x; 5; z)$ симетричні відносно осі ординат. Знайдіть x; y; z.

19.27. Точки $P(-3; 5; z)$ і $P'(x; y; -2)$ симетричні відносно осі аплікат. Знайдіть x; y; z.

19.28. Точки $B(2; y; z)$ і $B'(x; -3; 8)$ симетричні відносно площини xz. Знайдіть x; y; z.

19.29. Точки $C(x; y; -2)$ і $C'(2; 4; z)$ симетричні відносно площини xy. Знайдіть x; y; z.

19.30. Дано точки $C(2; -7; 4)$ і $D(0; 1; -8)$. Знайдіть координати точки, яка симетрична середині відрізка CD відносно:
1) осі ординат; 2) площини xz.

19.31. Дано точки $A(4; 0; -5)$ і $B(2; -6; 1)$. Запишіть координати точки, яка симетрична середині відрізка AB відносно:
1) осі аплікат; 2) площини xy.

19.32. При паралельному перенесенні точка $A(-2; 3; 7)$ перейшла в точку $A'(0; -1; 4)$. У яку точку при такому паралельному перенесенні переходить точка $B(0; 4; -2)$?

19.33. При паралельному перенесенні точка $B(2; -1; 3)$ перейшла в точку $B'(2; 0; -7)$. У яку точку при такому паралельному перенесенні переходить точка $C(4; -2; 0)$?

19.34. Точки A і B не належать площині α, а точки A_1 і B_1 симетричні відповідно точкам A і B відносно площини α. Як розташований відносно площини α вектор:
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1B_1}$; 2) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A_1B_1}$?

19.35. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть фігури, симетричні відносно площини AA_1C_1:

1) точці B_1;
2) точці D;
3) відрізку CB_1;
4) відрізку B_1D;
5) трикутнику A_1BC;
6) прямокутнику B_1BDD_1;
7) тетраедру DD_1AC;
8) даному кубу.

19.36. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Знайдіть фігури, симетричні відносно площини BB_1D_1:

1) точці C;
2) відрізку A_1D;
3) відрізку A_1C;
4) трикутнику B_1A_1D;
5) прямокутнику AA_1C_1C;
6) тетраедру $ABDA_1$.

19.37. $QABC$ – правильний тетраедр. Точки F, N, K, M – середини ребер QA, QB, QC, AB відповідно. На які фігури при симетрії відносно площини QMC відображаються фігури:

1) точка F;
2) точка K;
3) відрізок BN;
4) трикутник AFK;
5) трикутник FNK;
6) трапеція $AFKC$.

19.38. $QABC$ – правильний тетраедр. Точки K, L, M, N – середини ребер QB, QC, QA, BC відповідно. На які фігури при симетрії відносно площини QNA відображаються фігури:

1) точка K;
2) точка M;
3) відрізок CK;
4) трикутник BKM;
5) трикутник KNL;
6) трапеція $CLMA$.

19.39. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте точку, симетричну точці A відносно площини: 1) A_1BD; 2) CB_1D_1.

19.40. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Побудуйте точку, симетричну точці B_1 відносно площини: 1) BA_1C_1; 2) ACD_1.

4 **19.41.** Точки $A(2;\ -1;\ 7)$ і $A'(2;\ 3;\ 7)$ симетричні відносно площини α. Яким є взаємне розташування площини α і осі:

1) абсцис; 2) ординат; 3) аплікат?

19.42. Точки $K(-3;\ 2;\ 4)$ і $K'(-3;\ 2;\ 8)$ симетричні відносно площини γ. Яким є взаємне розміщення площини γ і осі:

1) абсцис; 2) ординат; 3) аплікат?

19.43. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ розташовано відносно системи координат так, що $A(1;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ 1;\ 0)$, $C(2;\ 2;\ 0)$.

1) Скільки таких кубів можна побудувати?

2) Для кожного з випадків знайдіть координати всіх вершин куба, симетричних даному відносно кожної з координатних площин.

19.44. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ розташовано відносно системи координат так, що $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ 1;\ 0)$, $C(1;\ 1;\ 0)$.

1) Скільки таких кубів можна побудувати?

2) Для кожного з випадків знайдіть координати всіх вершин куба, симетричних даному відносно кожної з координатних площин.

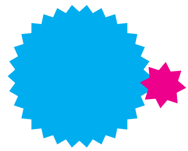
19.45. Знайдіть рівняння площини, відносно якої симетричні точки $A(-1;\ 2;\ 3)$ і $B(5;\ 0;\ -3)$.

19.46. Знайдіть рівняння площини, відносно якої симетричні точки $M(4;\ -1;\ 2)$ і $N(-4;\ 3;\ 4)$.

19.47. Запишіть рівняння площини, що симетрична площині $x+2y-z+5=0$ відносно початку координат.

19.48. Запишіть рівняння площини, що симетрична площині $x-y+2z-3=0$ відносно початку координат.

19.49. Скільки обертів за хвилину робить зубчате колесо з 32 зубцями, якщо зчеплене з ним зубчате колесо з 8 зубцями робить 20 обертів за хвилину?



19.50. (*Українська математична Олімпіада, 1972 р.*) У трикутнику ABC проведено медіани AD і CE, при цьому $\angle BAD = \angle BCE = 30^\circ$. Доведіть, що трикутник ABC – рівносторонній.

ПЕРЕВІРТЕ СВОЮ КОМПЕТЕНТНІСТЬ

Завдання № 19

1. Сторони трикутника дорівнюють 3 см і $\sqrt{2}$ см, а кут між ними 135°. Знайдіть третю сторону трикутника.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{5}$ см	5 см	$\sqrt{17}$ см	17 см	інша відповідь

2. Якому значенню не може дорівнювати менший з кутів трапеції?

А	Б	В	Г	Д
30°	63°	88°	89°	91°

3. Площа правильного трикутника зі стороною $\sqrt[4]{27}$ см дорівнює площі квадрата. Знайдіть периметр квадрата.

А	Б	В	Г	Д
1,5 см	4 см	6 см	12 см	$4\sqrt[4]{27}$ см

4. Укажіть усі правильні твердження:

I. Дві прямі, паралельні третій, паралельні між собою.

II. Дві прямі, перпендикулярні до третьої, перпендикулярні між собою.

III. Дві площини, перпендикулярні до третьої, перпендикулярні між собою.

А	Б	В	Г	Д
I	II	I, III	II, III	I, II, III

5. Дано вектори $\vec{a}(2; -1; 2)$, $\vec{b}(4; 4; 0)$, $\vec{k}(-1; 8; n)$. Установіть відповідність між характеристикою векторів або результатом дій над ними (1–4) та їхнім числовим значенням (А–Д).

Характеристика векторів або результат дій над ними	*Числові значення*
1 Модуль вектора $\vec{a}$	**А** 3
2 Модуль вектора $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$	**Б** 4
3 Скалярний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$	**В** 5
4 Значення n, при якому вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні	**Г** 6
	Д 7

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

6. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AB бісектриса кута A перетинає сторону BC в точці N. Знайдіть (у градусах) кут C, якщо $\angle ANC = 66°$.

ДОМАШНЯ САМОСТІЙНА РОБОТА № 7

Кожне завдання має по чотири варіанти відповіді (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть правильний варіант відповіді.

1

1. Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{c}(3; -1; 1)$ і $\vec{d}(0; 4; 7)$.

А. 2 **Б.** 3 **В.** 4 **Г.** 0

2. Укажіть точку, що належить площині $x + y - 2z - 7 = 0$.
А. (0; 1; −3) **Б.** (1; 0; −5)
В. (3; 4; 1) **Г.** (2; 2; −1)

3. Які координати має точка O, відносно якої симетричні точки $A(-2; 3; 5)$ і $A'(4; -7; 11)$?
А. (−6; 10; −6) **Б.** (2; −4; 16)
В. (1; −2; 8) **Г.** (6; −10; 6)

2

4. Укажіть значення x, при якому вектори $\vec{a}(x; -2; 5)$ і $\vec{b}(2; 3; -4)$ перпендикулярні.
А. 0 **Б.** 7 **В.** −13 **Г.** 13

5. Запишіть рівняння площини, що проходить через точки $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ і $C(0; 0; 3)$.
А. $3x + 6y - 2z + 6 = 0$ **Б.** $3x - 6y + 2z + 6 = 0$
В. $3x - 6y - 2z + 6 = 0$ **Г.** $3x - 6y - 2z - 6 = 0$

6. Знайдіть координати точки, симетричної точці $M(2; -1; 5)$ відносно площини xz.
А. (−2; −1; −5) **Б.** (−2; 1; −5)
В. (2; −1; −5) **Г.** (2; 1; 5)

3

7. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(-1; 1; 0)$ і $\vec{b}(0; -2; 2)$.
А. 45° **Б.** 135° **В.** 120° **Г.** 60°

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка K – середина ребра BB_1, точка L належить ребру AB, $AL : LB = 3 : 1$. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{CL}$ і $\overrightarrow{KA}$.

А. $-\arccos\dfrac{2\sqrt{85}}{85}$ **Б.** $\arccos\dfrac{1}{5}$

В. $\arccos\dfrac{2\sqrt{85}}{85}$ **Г.** 45°

9. При паралельному перенесенні точка $B(-1; 2; 3)$ перейшла в точку $B'(4; -1; 3)$. У яку точку при такому паралельному перенесенні перейде точка $C(2; -3; 0)$?
А. $C'(7; 0; 0)$ **Б.** $C'(7; -6; 6)$
В. $C'(-3; -6; 0)$ **Г.** $C'(7; -6; 0)$

4

10. Дано вектори $\vec{c}$ і $\vec{d}$, причому $|\vec{c}| = 5$, $|\vec{d}| = 3$, $(\widehat{\vec{c}; \vec{d}}) = 120°$. Знайдіть $|\vec{c} - \vec{d}|$.
А. 7 **Б.** 8 **В.** $\sqrt{19}$ **Г.** 6

11. Напишіть рівняння сфери, центр якої лежить на осі ординат, що проходить через точки $A(2; -3; 2)$ і $B(1; 0; -2)$.
А. $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 9$ **Б.** $x^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 9$
В. $x^2 + (y + 2)^2 + z^2 = 3$ **Г.** $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

12. Дано точки $A(-2; -5; -8)$ і $B(4; 1; 4)$. У якій точці пряма AB перетинає площину xy?

А. Такої точки не існує **Б.** $(2; 2; 0)$
В. $(2; -1; 0)$ **Г.** $(-1; 2; 0)$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §§ 16–19

1 **1.** Знайдіть скалярний добуток векторів $\vec{a}(5; -2; 1)$ і $\vec{b}(0; 3; 4)$.

2. Чи належить площині $3x + y - z - 5 = 0$ точка:
1) $A(2; 1; 0)$; 2) $B(-1; 5; -3)$?

3. Які координати точки O, відносно якої симетричні точки $K(-1; 2; 5)$ і $K'(13; -4; 7)$?

2 **4.** При якому значенні y вектори $\vec{a}(-2; y; 7)$ і $\vec{b}(4; 2; 0)$ перпендикулярні?

5. Складіть рівняння площини, що проходить через точки $A(3; 0; 0)$, $B(0; -2; 0)$ і $C(0; 0; 6)$.

6. Запишіть координати точок, симетричних точці $P(-1; 4; 8)$ відносно: 1) осі ординат; 2) площини xz.

3 **7.** Знайдіть кут між векторами $\vec{a}(3; 0; -3)$ і $\vec{b}(2; -2; 0)$.

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка K – середина ребра AA_1, точка M – середина ребра CD. Знайдіть кут між прямими KD і B_1M.

4 **9.** Напишіть рівняння сфери, центр якої належить осі аплікат, що проходить через точки $A(2; 1; -3)$ і $B(-1; -2; 1)$.

Додаткові завдання

3 **10.** При паралельному перенесенні точка $A(-4; 1; 0)$ перейшла у точку $A'(4; 3; -1)$. У яку точку при цьому паралельному перенесенні перейде точка $B(-4; -2; 7)$?

4 **11.** Відомо, що $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60°$. Знайдіть:
1) $|\vec{a} + \vec{b}|$; 2) $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

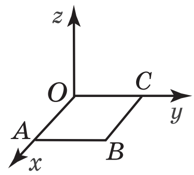
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ РОЗДІЛУ 4

До § 13

1 **1.** Дано точки $A(1; -1; 0)$, $B(4; 0; 0)$, $C(-1; 2; 5)$, $D(0; 0; -11)$, $E(0; -5; 11)$, $F(6; 6; -6)$, $G(-1; 0; 11)$, $H(0; -3; 0)$. Які з них належать:

1) осі x; 2) осі y; 3) осі z;
4) площині xy; 5) площині xz; 6) площині yz?

2. Сторона квадрата $ABCO$, що лежить у площині xy, дорівнює 2 (мал. 19.4). Знайдіть координати точок A, B і C.



Мал. 19.4

3. Дві перші координати точки дорівнюють нулю, а третя – від'ємна. Як розташована ця точка у просторовій системі координат?

4. Точка S простору належить площині yz, але не належить жодній з осей координат. Чи може точка S мати координати:

1) $(-2; 0; 0)$; 2) $(0; -2; -2)$; 3) $(0; -2; 0)$;
4) $(0; 2; -2)$; 5) $(0; 0; -2)$; 6) $(-2; -2; -2)$?

5. Знайдіть середину відрізка з кінцями в точках $A(4; -1; 0)$ і $B(10; 2; 2)$ та його довжину.

2

6. Точки $A(x; 4; -7)$ і $B(2; y; 9)$ лежать на прямій, яка паралельна осі аплікат. Знайдіть x і y.

7. Знайдіть координати проекцій точки $B(-2; 0; 7)$ на координатній площині та відстані від цієї точки до координатних площин.

8. Чи належить деякій координатній площині середина відрізка з кінцями в точках $A(-2; 5; 17)$ і $B(4; -5; 21)$? Якщо відповідь позитивна, то якій саме?

9. Яка з точок $A(2; -1; 7)$, $B(1; 0; 9)$, $C(4; -1; 5)$ найвіддаленіша від початку координат?

10. Точка C ділить відрізок AB у відношенні $1 : 4$, рахуючи від точки A. Знайдіть координати точки C, якщо $A(0; 9; 4)$, $B(10; -6; -1)$.

3

11. Знайдіть довжини середніх ліній трикутника з вершинами в точках $A(-1; 2; 7)$, $B(1; 0; 6)$, $C(4; 2; 0)$.

12. Відстань між точками $A(0; -2; 3)$ і $B(4; 0; z)$ дорівнює $\sqrt{69}$. Знайдіть z.

13. Знайдіть точку, рівновіддалену від точок $M(-2; 3; 5)$ і $N(3; 2; -3)$, якщо вона лежить на:

1) осі x; 2) осі y; 3) осі z.

14. 1) Доведіть, що чотирикутник з вершинами в точках $A(3; 1; 8)$, $B(4; 7; 1)$, $C(3; 5; -8)$, $D(2; -1; -1)$ є паралелограмом.

2) Перевірте, чи є $ABCD$ ромбом.

3) Знайдіть периметр чотирикутника $ABCD$.

15. Точки M і N ділять відрізок з кінцями в точках $A(-2;\ 3;\ 4)$ і $B(4;\ -6;\ 16)$ на три рівні частини. Знайдіть координати точок M і N.

16. 1) Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $M(5;\ 0;\ 5)$, $N(1;\ 8;\ -3)$, $K(4;\ 2;\ -1)$ тупокутний.
2) Знайдіть периметр трикутника MNK.

17. 1) Доведіть, що трикутник з вершинами в точках $A(4;\ 0;\ 3)$, $B(1;\ -3;\ 3)$, $C(-2;\ 3;\ 2)$ рівнобедрений.
2) Знайдіть довжину висоти CH трикутника ABC.
3) Знайдіть площу трикутника ABC.

18. Знайдіть довжину частин, на які площина xy ділить відрізок, кінцями якого є точки $A(2;\ 3;\ 6)$ і $B(8;\ 12;\ -12)$.

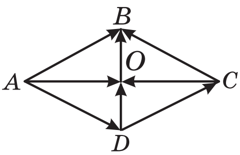
19. Знайдіть у площині xy точку, рівновіддалену від точок $A(7;\ 6;\ 4)$, $B(6;\ 3;\ 8)$ і $C(4;\ 0;\ 9)$.

До § 14

20. Укажіть початок і кінець вектора:
1) $\overrightarrow{CC}$; 2) $\overrightarrow{AN}$; 3) $\overrightarrow{CC}$.

21. Позначте на площині γ три точки P, T і M, які не лежать на одній прямій. Накресліть усі ненульові вектори, початок і кінець яких збігається з якими-небудь двома з цих точок. Запишіть усі утворені вектори.

22. $ABCD$ – ромб (мал. 19.5). Запишіть усі пари:
1) рівних векторів;
2) векторів, рівних за модулем, але протилежно напрямлених.



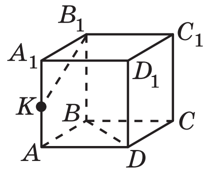
Мал. 19.5

23. $ABCD$ – ромб (мал. 19.5). Укажіть вектор, початок і кінець якого є вершинами ромба, який дорівнює сумі або різниці векторів:
1) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$; 2) $\overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OB}$;
3) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{CO}$.

24. Накресліть довільний вектор $\overrightarrow{AB}$, вектор $\overrightarrow{CD}$, співнапрямлений з вектором $\overrightarrow{AB}$, і вектор $\overrightarrow{KL}$, протилежно напрямлений з вектором $\overrightarrow{AB}$.
1) Виконайте відповідні записи, використовуючи символи $\uparrow\uparrow$ і $\uparrow\downarrow$.
2) Чи є колінеарними вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{KL}$?
3) Співнапрямленими чи протилежно напрямленими є вектори $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{KL}$?

25. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед (мал. 19.6), $AB = 6$, $AD = 8$, $AA_1 = 10$, K – середина AA_1. Знайдіть довжини векторів:

1) $\overrightarrow{A_1A}$; 2) $\overrightarrow{KA}$; 3) $\overrightarrow{BD}$; 4) $\overrightarrow{B_1K}$.



Мал. 19.6

26. Накресліть трикутну піраміду $ABCD$ та відкладіть:

1) від точки B вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{CB}$;

2) від точки A вектор, що дорівнює вектору $\overrightarrow{BC}$;

3) від точки D вектор, що дорівнює вектору $2\overrightarrow{CB}$;

4) від точки C вектор, що дорівнює вектору $0,5\overrightarrow{DA}$.

27. Спростіть вираз:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$; 2) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MK} - \overrightarrow{CK}$.

28. $DABC$ – трикутна піраміда, K – середина AC, M – середина BC. Компланарні чи ні трійки векторів:

1) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ і $\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AC}$;

3) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KM}$ і $\overrightarrow{AD}$; 4) $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DC}$ і $\overrightarrow{KM}$?

3

29. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Накресліть вектор:

1) $\overrightarrow{DK} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC_1}$; 2) $\overrightarrow{CM} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{AC}$.

30. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед. Укажіть вектор, початком і кінцем якого є вершина паралелепіпеда, що дорівнює сумі векторів:

1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BC}$; 2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{CD}$.

31. Нехай $\vec{p} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{C_1A_1}$, $\vec{m} = \overrightarrow{A_1A} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB}$. Доведіть, що $\vec{p} = -\vec{m}$.

32. $ABCD$ – прямокутник. Точка T не належить площині прямокутника, $\overrightarrow{TB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{TD} = \vec{d}$, M – середина AB, N – середина AD. При якому значенні k справджується рівність: $\vec{b} - \vec{d} = k\overrightarrow{MN}$?

33. $ABCA_1B_1C_1$ – трикутна призма, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Розкладіть за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ вектори:

1) $\overrightarrow{C_1A_1}$; 2) $\overrightarrow{BC}$; 3) $\overrightarrow{C_1B_1}$; 4) $\overrightarrow{AK}$, де K – середина CC_1.

34. Відомо, що $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$, $\vec{q} = 3\vec{a} + b - 2\vec{c}$, $\vec{m} = 2\vec{p} + \vec{q}$. Розкладіть вектор $\vec{m}$ за векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

4

35. Два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ довільним чином розташовані у просторі. Доведіть, що $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1}$.

36. Основою піраміди $KABCD$ є прямокутник $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 4$, $\vec{p} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{KA}$. Знайдіть $|\vec{p}|$.

37. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відмінні від нульового вектора й неколінеарні. Знайдіть x і y, якщо $(x - y + 1)\vec{a} + (2x - y)\vec{b} = \vec{0}$.

38. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, точка K – точка перетину діагоналей грані CDD_1C_1. Розкладіть вектор $\overrightarrow{AK}$ за векторами $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ і $\vec{c} = \overrightarrow{AA_1}$.

До § 15

1

39. Знайдіть координати вектора $\overrightarrow{MN}$, якщо:
1) $M(-2; -3; 4)$, $N(-2; -3; 0)$;
2) $M(0; 0; 6)$, $N(-2; 4; 12)$.

40. Знайдіть модуль вектора: 1) $\vec{a}(0; -8; 0)$; 2) $\vec{b}(-5; 0; 12)$.

41. Знайдіть координати векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, якщо:
1) $\vec{a}(4; 0; -9)$, $\vec{b}(0; 7; 0)$; 2) $\vec{a}(7; -1; 2)$, $\vec{b}(-10; 2; -3)$.

42. Дано $\vec{c}(4; -8; 12)$. Знайдіть координати вектора:
1) $\frac{1}{4}\vec{c}$; 2) $-\vec{c}$; 3) $2\vec{c}$;
4) $-0,5\vec{c}$; 5) $8\vec{c}$; 6) $-3\vec{c}$.

2

43. Порівняйте модулі векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:
1) $\vec{a}(4; -1; 2)$, $|\vec{b}| = 5$; 2) $\vec{a}(0; -6; 8)$, $\vec{b}(-5; 6; -6)$.

44. Чи рівні вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\vec{m}$, якщо:
1) $A(3; -2; 1)$, $B(0; 5; 7)$, $\vec{m}(-3; 3; 6)$;
2) $A(4; -4; 1)$, $B(7; -4; 2)$, $\vec{m}(3; 0; 1)$?

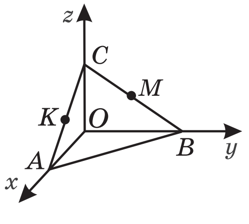
45. Дано точки $B(-2; 4; 11)$, $C(-3; 0; 9)$, $D(4; 7; 11)$. Знайдіть координати точки A такої, що $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

46. Дано: $\vec{a}(x; y; -3)$, $\vec{b}(2; 0; z)$, $\vec{c}(-1; 4; 5)$, $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$. Знайдіть x, y і z.

47. Дано вектори $\vec{c}(-1; 2; -4)$, $\vec{d}(0; -3; 1)$. Знайдіть координати вектора:
1) $\vec{c} + 5\vec{d}$; 2) $4\vec{c} - \vec{d}$;
3) $7\vec{c} + 2\vec{d}$; 4) $3\vec{c} - 4\vec{d}$.

3

48. На малюнку 19.7 $OABC$ – трикутна піраміда, $OA = 4$, $OB = 6$, $OC = 2$, K – середина AC, M – середина BC. Знайдіть координати вектора:
1) $\overrightarrow{AC}$; 2) $\overrightarrow{CB}$; 3) $\overrightarrow{BA}$;
4) $\overrightarrow{BK}$; 5) $\overrightarrow{AM}$; 6) $\overrightarrow{KM}$.



Мал. 19.7

49. Дано точки $A(-1;\ 2;\ 3)$, $B(4;\ 0;\ -2)$. Знайдіть координати точки C такої, що:

1) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC}$.

50. Дано паралелограм $ABCD$, $A(-1;\ 2;\ 4)$, $B(0;\ 0;\ -2)$, $C(4;\ -1;\ 8)$. Знайдіть за допомогою векторів координати точки D.

51. Модуль вектора $\vec{p}(x;\ x;\ x)$ дорівнює $4\sqrt{3}$. Знайдіть x.

52. При яких значеннях m і n вектори $\vec{a}(m;\ 2;\ 3)$ і $\vec{b}(8;\ m;\ n)$ протилежно напрямлені?

53. Дано ненульові вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, причому $3\vec{a} - 4\vec{b} = 2\vec{a} - 7\vec{b}$. Доведіть, що $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні. Співнапрямлені чи протилежно напрямлені вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$?

4

54. Модуль вектора $\vec{c}(x;\ y;\ z)$ дорівнює $2\sqrt{6}$. Знайдіть координати вектора $\vec{c}$, якщо x і y – протилежні числа, а $z = x - y$.

55. Знайдіть координати вектора $\vec{a}$, колінеарного вектору $\vec{m}(-3;\ -6;\ 6)$, якщо $|\vec{a}| = 3$.

56. Дано: $\vec{a}(-8;\ 8;\ 18)$, $\vec{b}(2;\ 4;\ 12)$, $\vec{a} = 4\vec{c} - \vec{d}$, $\vec{b} = 2\vec{c} + \vec{d}$. Знайдіть координати векторів $\vec{c}$ і $\vec{d}$.

57. При яких значеннях x і y точки $A(-2;\ -6;\ 5)$, $B(3;\ 4;\ 0)$ і $C(x;\ y;\ 6)$ лежать на одній прямій?

До § 16

1

58. Знайдіть скалярний добуток векторів:

1) $\vec{a}(-2;\ 3;\ 0)$ і $\vec{b}(6;\ 4;\ 5)$; 2) $\vec{p}(-1;\ 2;\ 7)$ і $\vec{m}(1;\ -2;\ 1)$.

У якій з пар вектори перпендикулярні?

59. Знайдіть $\vec{n}^2$, якщо: 1) $\vec{n}(2;\ -3;\ 4)$; 2) $\vec{n}(1;\ 7;\ -5)$.

2

60. Дано вектори $\vec{a}(2;\ p;\ -1)$ і $\vec{b}(p;\ -5;\ 4)$. При якому значенні p справджується рівність $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$?

61. φ – кут між векторами $\vec{m}$ і $\vec{n}$. Знайдіть $\vec{m} \cdot \vec{n}$, якщо:

1) $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 5$, $\varphi = 60°$; 2) $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = \sqrt{2}$, $\varphi = 135°$.

62. Доведіть, що вектори $\vec{a}(mn;\ -n;\ 1)$ і $\vec{b}(1;\ m;\ 0)$ перпендикулярні.

63. Знайдіть косинус кута між векторами $\vec{a}(-2;\ 1;\ -2)$ і $\vec{b}(3;\ -2;\ -6)$.

3

64. Дано вектори $\vec{a}(2;\ -m;\ 4)$ і $\vec{b}(m;\ 3;\ 1)$. При яких значеннях m кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

1) гострий; 2) прямий; 3) тупий?

65. Знайдіть найбільший кут трикутника ABC, якщо $A(7; -3; 3)$, $B(4; 3; 4)$, $C(4; -4; 0)$.

66. $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 20°$. Яким є кут між векторами:

1) $3\vec{a}$ і $4\vec{b}$; 2) $-2\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) $-\frac{1}{2}\vec{a}$ і $-\frac{1}{5}\vec{b}$; 4) $\vec{a}$ і $-2011\vec{b}$?

67. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Знайдіть кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$; 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$; 3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;
4) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3\sqrt{3}$; 5) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$; 6) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$.

4

68. Дано: $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 60°$.
Знайдіть $(3\vec{a} - 2\vec{b})(2\vec{a} + 3\vec{b})$.

69. Дано: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$. Визначте, при якому значенні λ вектори $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ і $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ взаємно перпендикулярні.

70. $\angle(\vec{a}; \vec{b}) = 30°$, $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$. Обчисліть косинус кута між векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

До § 17

1

71. Назвіть вектор нормалі до площини:

1) $2x - y + 3z - 5 = 0$; 2) $2x - z + 7 = 0$;
3) $4x - 2y - 7z - 9 = 0$; 4) $4y - 3 = 0$.

72. Знайдіть координати центра сфери та її радіус:

1) $x^2 + (y - 2)^2 + z^2 = 121$; 2) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;
3) $(x - 1)^2 + (y + 7)^2 + z^2 = 9$; 4) $x^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 49$.

73. Які з площин проходять через точку $A(1; 2; 0)$:

1) $x + y - z - 4 = 0$; 2) $x - y + 3z + 1 = 0$;
3) $2x + y + z - 5 = 0$; 4) $3x - 2y + 5z + 1 = 0$?

2

74. Наведіть приклад площини, яка паралельна площині:

1) $2x - y + 3z - 5 = 0$; 2) $2x + y - 3 = 0$.

75. Наведіть приклад площини, яка перетинає площину:

1) $4x + 2y - 3z - 7 = 0$; 2) $y - 7z + 2 = 0$.

76. Знайдіть довжини відрізків, які відтинає площина $x + 2y - 3z - 6 = 0$ від осей координат.

77. Укажіть будь-які дві точки, що належать сфері $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 9$.

78. Точка Q – центр сфери, а QA – її радіус. Складіть рівняння сфери, якщо $Q(0; 0; 2)$, $A(3; -2; -4)$.

79. Складіть рівняння сфери, що має центр у точці $(-2; -2; 1)$ і проходить через початок координат.

80. Складіть рівняння сфери, що має центр у початку координат і проходить через точку $P(-4; 6; 12)$.

81. Складіть рівняння площини, що проходить через початок координат паралельно площині $3x - 2y + 4z - 7 = 0$.

82. Напишіть рівняння площини, рівновіддаленої від точок:
1) $(3; 0; 0)$ і $(-3; 0; 0)$; 2) $(0; 3; 0)$ і $(0; 5; 0)$.

3

83. Знайдіть коефіцієнти A і B у рівнянні площини $Ax + By - 2z + 7 = 0$, якщо вона проходить через точки $(1; 1; 3)$ і $(-1; 1; 1)$.

84. Складіть рівняння площини, що проходить через середину відрізка MN, перпендикулярно до нього, якщо $M(1; 0; -1)$, $N(3; -4; 7)$.

85. Укажіть деякі дві точки, що належать площині, яка проходить через початок координат перпендикулярно до вектора $\vec{a}(-3; 4; -2)$.

86. Площини α і β перпендикулярні. Точка M належить площині α і віддалена від площини β на 8 см. У площині β знайдіть геометричне місце точок, віддалених від точки M на 17 см.

87. Знайдіть відстань між центрами сфер, що задані рівняннями $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ і $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0$.

88. Знайдіть рівняння сфери із центром у точці $Q(-2; 3; -4)$, що дотикається до площини yz.

89. Сферу задано рівнянням $x^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 36$. Які з точок $A(3; -1; 7)$, $B(1; 1; -3)$, $C(4; 5; 0)$, $D(2; 1; -6)$ лежать:
1) всередині кулі, обмеженої цією сферою;
2) на сфері;
3) поза кулею, обмеженою цією сферою?

90. У яких точках сфера $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 25$ перетинає вісь абсцис?

4

91. Складіть рівняння площини, що проходить через точку $C(2; -3; -5)$ паралельно площині xy.

92. При якому значенні C площини $3x - 5y + Cz - 2 = 0$ і $x + 3y + 2z + 11 = 0$ перпендикулярні?

93. $P(x; 2; z)$ – точка, що належить прямій перетину площин $3x + 3y - 2z + 5 = 0$ і $10x - 5y + 20z - 60 = 0$. Знайдіть x і z.

94. Складіть рівняння сфери, центр якої лежить на осі аплікат і яка проходить через точки $A(-2; 1; 4)$ і $B(0; 3; 2)$.

95. Чи має сфера $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$ спільні точки з площиною: 1) $x + 2 = 0$; 2) $y + 5 = 0$?

96. Напишіть рівняння сфери із центром $(1; 1; -2)$, що дотикаються до сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 24$.

До § 18

2

97. Складіть рівняння площини, що проходить через точки:
1) $A(-1; 1; 0)$, $B(0; 0; 3)$ і $C(0; 2; 0)$;
2) $M(0; -1; 2)$, $N(1; 0; -1)$ і $K(1; 3; 0)$.

98. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, ребро якого дорівнює 4. Точка E – середина A_1D_1, точка F – середина DD_1. Знайдіть:
1) CE; 2) BE; 3) BF; 4) B_1F.

99. Дано куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Знайдіть кут між векторами:
1) $\overrightarrow{DD_1}$ і $\overrightarrow{A_1B}$; 2) $\overrightarrow{DB}$ і $\overrightarrow{DC_1}$;
3) $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{B_1D_1}$; 4) $\overrightarrow{DA_1}$ і $\overrightarrow{B_1C}$.

3

100. Чи лежать точки C, D і N на одній прямій, якщо:
1) $C(0; 0; 0)$, $D(0; 1; 9)$, $N(0; 3; 27)$;
2) $C(-1; 1; 1)$, $D(0; 4; 4)$, $N(1; 7; 6)$?

101. Дано точки $C(-1; 0; 0)$, $D(1; 2; 0)$, $M(2; 4; 4)$. Чи належить площині CDM точка:
1) $F(0; 1; 1)$; 2) $K(2; 1; -2)$?

102. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб. Точка M належить ребру M, $AM : MA_1 = 1 : 2$. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{DM}$ і $\overrightarrow{B_1D_1}$.

103. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – прямокутний паралелепіпед, $DA = 2$, $DC = 3$, $DD_1 = 6$. Знайдіть кут між векторами $\overrightarrow{DB_1}$ і $\overrightarrow{AC}$.

104. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка N – середина ребра CD. Знайдіть кут між площинами C_1BN і A_1B_1N.

105. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, точка K – середина ребра AD. Знайдіть кут між прямими: 1) BK і C_1D; 2) A_1K і B_1D.

106. Дано точки $A(1; 1; 0)$, $B(3; 1; 5)$. На осі абсцис знайдіть таку точку M, щоб трикутник ABM був прямокутним із прямим кутом M.

4

107. Дано площину $x + y - z - 3 = 0$ і точки $A(-2; 3; 5)$ та $B(4; 1; -5)$. У якій точці пряма AB перетинає задану площину?

108. Дано точки $K(0; -2; -3)$ і $L(3; 4; 0)$. У якій точці пряма KL перетинає площину xz?

109. Дано точки $C(1; 0; 2)$ і $F(-2; -3; -4)$. Чи перетинає пряма CF координатну вісь y?

110. Чи лежать точки $A(-13; 3; -2)$, $B(4; 1; 1)$, $C(-1; -4; -1)$ і $D(0; 0; 0)$ в одній площині?

111. Дано точки $A(0; 2; -3)$, $B(1; -1; -4)$, $C(2; 0; -1)$. Запишіть рівняння площини, що проходить через точку $M(2; -1; 1)$ паралельно площині ABC.

112. Дано площину $x - y + 2z - 1 = 0$ та пряму, що проходить через точки $M(2; 3; 0)$ і $N(0; 1; 1)$. Знайдіть синус кута між прямою MN і даною площиною.

113. При якому значенні y точки $A(1; 0; 0)$, $B(4; -1; -7)$, $C(0; 2; 4)$ і $D(-1; y; 7)$ належать одній площині?

114. Числа x, y, z такі, що $x^2 + y^2 + 25z^2 = 4$. Знайдіть найменше і найбільше значення виразу $2x + 3y - 30z$.

115. У тетраедрі $QABC$ точки M і N – середини ребер QA і BC відповідно. Доведіть, що прямі AB, MN і QC паралельні деякій одній площині.

116. У правильному тетраедрі $QABC$ відрізок MN сполучає середину ребра AQ із центром грані QBC, а відрізок KL – середину ребра CQ з центром грані ABC. Знайдіть кут між прямими MN і KL.

117. Доведіть, що коли три ребра куба, які виходять з однієї вершини, перетнути площиною, то у перерізі отримаємо гострокутний трикутник.

До § 19

1

118. Запишіть координати точок, які симетричні даним відносно початку координат:

1) $C(0; -1; 7)$; 2) $P(-2; -11; 3)$.

119. Паралельне перенесення задано формулами: $x' = x - 3$; $y' = y - 1$; $z' = z + 1$. У які точки при цьому паралельному перенесенні переходять точки:

1) $A(3; 1; -1)$; 2) $B(-2; 4; -3)$?

2

120. Знайдіть координати точки D', яка симетрична точці $D(2; -1; 4)$ відносно точки $O(-1; 3; 1)$.

121. Точки $D(x; -2; 7)$ і $D'(5; y; z)$ симетричні відносно початку координат. Знайдіть x, y і z.

122. Запишіть координати точок, симетричних точці $M(2; -1; -3)$ відносно осі: 1) ординат; 2) аплікат.

123. Запишіть координати точок, симетричних точці $A(2; -3; -4)$ відносно площини: 1) xy; 2) xz.

124. Паралельне перенесення задано формулами $x' = x + 3$; $y' = y + 1$; $z' = z - 5$. Які точки при цьому паралельному перенесенні переходять у точки:

1) $B'(5; -2; 1)$; 2) $K'(2; 1; -11)$?

125. Запишіть формули паралельного перенесення, при якому точка $C(4; -2; 3)$ переходить у точку $C'(-1; 2; 0)$.

126. Чи може центр симетрії фігури не належати цій фігурі? Поясніть відповідь на малюнку.

3

127. Два рівних круги із центрами в точках A і B лежать в одній площині. Знайдіть площину, відносно якої круги симетричні.

128. Точки $M(x; -2; z)$ і $M'(4; y; 3)$ симетричні відносно осі аплікат. Знайдіть x, y і z.

129. Точки $D(7; y; -2)$ і $D'(x; 1; z)$ симетричні відносно площини xy. Знайдіть x, y і z.

130. Дано точки $K(4; -3; 0)$ і $L(-2; 7; 4)$. Запишіть координати точки, яка симетрична середині відрізка KL відносно:

1) осі абсцис; 2) площини yz.

131. Чи існує таке паралельне перенесення, при якому:

1) точка $M(-1; 0; 2)$ переходить у точку $N(2; 5; -1)$, а точка $K(4; -1; 0)$ – у точку $L(7; 4; -3)$;

2) точка $A(0; -2; 7)$ переходить у точку $B(4; -5; 0)$, а точка $C(1; 3; -2)$ – у точку $D(5; 0; 5)$?

4

132. Точки $M(2; -1; 7)$ і $M'(8; -1; 7)$ симетричні відносно площини β. Яким є взаємне розташування площини β і:

1) осі абсцис; 2) осі ординат; 3) осі аплікат?

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ І ВПРАВ

Розділ 1

§ 1

1.24. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так. **1.25.** 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) так. **1.26.** Ні. **1.27.** Ні. **1.28.** Ні. **1.31.** Так. **1.32.** Прямі a, b і c проходять через одну точку. **1.33.** Вказівка. Прямі a і LM не лежать в одній площині. **1.34.** Вказівка. Проведіть пряму, що перетинає прямі a, b і c. **1.39.** Ні. **1.43.** 2) Одну. **1.44.** Безліч. **1.45.** Одну або три. **1.46.** Так. **1.47.** Так. **1.48.** Ні. **1.51.** Ні. **1.52.** Так. **1.54.** 4. **1.55.** 12. **1.58.** ≈88,6 см. **1.59.** Кравчук.

§ 2

2.11. 2) 9 см. **2.12.** 2) 3 см. **2.15.** 1) $TE \subset ABD$, $TE \subset EDC$, $MN \subset BDC$, $DB \subset ABD$, $DB \subset DBC$, $AB \subset ABC$, $AB \subset ABD$, $EC \subset DEC$, $EC \subset ABC$; 2) $DN \cap ABC = C$, $EC \cap ABD = E$; 3) A, B, E; 4) EC. **2.16.** 1) C_1, M, C; 2) ADC і DCC_1; 3) $KM \cap ABC = L$, $BN \cap A_1B_1C_1 = T$; 4) BC. **2.17.** 1) Вказівка. $KL \cap ABC = P$, де точка P – точка перетину прямих AD і KL; 2) якщо $KL \parallel AD$. **2.18.** 1) Вказівка. $MN \cap ABC = P$, де точка P – точка перетину прямих MN і BC; 2) якщо $MN \parallel BC$. **2.23.** $3\sqrt{2}$ дм; $\frac{\sqrt{3}}{2}$ дм². **2.24.** $6\sqrt{2}$ см; $2\sqrt{3}$ см². **2.29.** Вказівка. Нехай P – точка перетину прямих BC і MN, AP – шукана пряма. **2.30.** Вказівка. Нехай F – точка перетину прямих AD і KL, CF – шукана пряма. **2.31.** 2) $2\sqrt{34}$ см². **2.32.** 2) $\sqrt{6}$ см². **2.36.** $\sqrt{3}$ см, $4\sqrt{3}$ см, $4\sqrt{3}$ см. **2.37.** $5\sqrt{2}$ см. **2.38.** 3) $4\sqrt{17}$ см; 5) 1:1; 6) BM. **2.39.** 3) 2 см; 4) K_2; 5) K_2N; 6) 1:3. **2.40.** 3) 2 см; 4) L_1; 5) KL_2; 6) 1:1. **2.41.** 24 м і 42 м. **2.44.** $\frac{1}{2}(p-b)^2 \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

Вправи для повторення розділу 1

8. Ні. **11.** 1), 2), 3) Ні; 4) так. **13.** 1) Безліч; 2) одну. **14.** Одна або три. **19.** $3\sqrt{2}$ дм. **23.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **28.** $18\sqrt{2}$ см.

Розділ 2

§ 3

3.17. $MM_1 = 6$ см. **3.18.** $BB_1 = 14$ см. **3.24.** 2) $KL = 4$ см. **3.25.** 2) $MN = 7$ см. **3.36.** Ні. **3.37.** Так. **3.38.** 9 см. **3.39.** 25 см.

3.42. Паралелограм. *Вказівка.* Скористайтеся властивістю середньої лінії трикутника. **3.45.** Ні. **3.46.** Ні. **3.48.** 20 см. **3.49.** 6 см. **3.50.** 1) Безліч; 2) жодної; 3) безліч. **3.51.** *Вказівка.* Розгляньте площину α, що проходить через пряму a і точку M, та точку перетину площини α із прямою b. **3.52.** *Вказівка.* Розгляньте площину α, що проходить через прямі a і c. Тоді будь-яка пряма c_1, паралельна c і така, що перетинає a, належить площині α. **3.53.** 1), 6) Мимобіжні; 2), 4) перетинаються; 3), 5) паралельні. **3.54.** 1), 2), 3), 5), 7) Мимобіжні; 4) паралельні; 6), 8) перетинаються. **3.55.** 7 см. **3.56.** 4 см. **3.57.** 5 см. **3.58.** 6 см. **3.59.** 1) Паралелограм; 2) $a+b$ (см). **3.60.** 4 см. **3.61.** 1) Ні; 3) 3:1. **3.62.** 1) Перетинаються; 2) 3:1. **3.63.** $KK_1 = 5$ см; $CC_1 = 3$ см. **3.64.** $KK_1 = 5$ см; $CC_1 = 1$ см. **3.65.** Усі ребра по $\frac{a}{3}$ см. **3.66.** 38 см. **3.67.** 6 м. **3.70.** *Вказівка.* Використайте формулу медіани.

§ 4

4.20. Ні. **4.31.** $a \parallel \alpha$. **4.32.** $a \parallel c$. **4.33.** 14 см. **4.34.** 18 см. **4.35.** 2) $AB = 10$ см; 3) $DMNC$ − трапеція. **4.36.** 2) $TP = 6$ см; 3) $BTPC$ − трапеція. **4.40.** 4) 0,5 дм. **4.41.** 1), 2), 3), 4), 5) паралельні; 6) перетинаються. **4.42.** 1), 2), 3), 4), 6) паралельні; 5) перетинаються. **4.43.** Пряма m перетинає площину α. **4.44.** Пряма d може належати площині β, а може її перетинати. **4.45.** 2) Паралельні; 3) $N \in AB$, $BN : NA = 1 : 3$; 4) 22 см. **4.46.** 2) Паралельні; 3) $H \in AL$, $LH : HA = 1 : 2$; 4) 26 см. **4.49.** Паралельні. **4.50.** 1) Пряма, що проходить через точку L паралельно прямій AB; 2) паралельні. **4.51.** 1) Пряма, що проходить через точку M паралельно прямій AB; 2) паралельні. **4.55.** $2+2\sqrt{3} \leqslant P < 2+2\sqrt{7}$; $\sqrt{2} \leqslant S < \sqrt{6}$. **4.56.** 1) Безліч; 2) рівнобедрений трикутник; 3) $4\sqrt{11}$ см^2. **4.57.** 11 рулонів. **4.59.** Якщо точка збігається із центром правильного шестикутника, то будь-яка пряма, що проведена через цю точку, розбиває шестикутник на дві рівновеликі частини; якщо ж точка відмінна від центра шестикутника, то шукана пряма проходить через цей центр.

§ 5

5.42. $A_2B_2 = 5$ см. **5.43.** 16 см. **5.44.** 12 см. **5.47.** 2) Прямокутник; 3) 60 см^2. **5.48.** 2) Паралелограм; 3) $\angle ADC = 50°$. **5.53.** 1), 6) Перетинаються; 2), 4) збігаються; 3), 5) паралельні. **5.54.** 1), 3), 6) Паралельні; 2), 4) перетинаються; 5) збігаються. **5.55.** $18\sqrt{3}$ см^2. **5.56.** $30\sqrt{2}$ см. **5.57.** 1) *Вка-*

з і в к а. $ML \parallel CB_1$; 2) $5\sqrt{2}$ см. **5.58.** В к а з і в к а. Доведіть, що $AB : AC : BC = A_1B_1 : A_1C_1 : B_1C_1$. **5.59.** 1) 15 см; 15 см; 24 см; 2) 108 см^2; 3) так; $S_{\Delta ABC} : S_{\Delta A_1B_1C_1} = 1 : 9$. **5.60.** 1) 8 см; 10 см; 6 см; 2) 24 см^2. **5.61.** Паралельні. **5.62.** 9 см. **5.63.** $4\sqrt{3}$ см^2. **5.65.** 2 дм або 1 дм. **5.66.** 5 дм або 3 дм. **5.67.** 90 см^2. **5.68.** 3,375 км. **5.70.** 30° і 60°.

§ 6

6.11. 1) Площина або пряма; 2) відрізок або точка; 3) дві паралельні прямі, або одна пряма, або дві точки. **6.12.** 1) Пряма або точка; 2) промінь або точка; 3) два паралельних відрізки, або два відрізки однієї прямої, або один відрізок, або дві точки. **6.15.** 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. **6.16.** 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так. **6.18.** Так. **6.19.** 6,4 см. **6.20.** 7,5 см. **6.21.** Ні. **6.22.** Так. **6.36.** Ні. **6.37.** Так; 89° і 91°. **6.50.** Так. **6.65.** 30 м.

§ 7

7.1. 1), 2), 3) Так; 4) ні. **7.2.** 1), 2), 3) Так; 4) ні. **7.3.** Трикутник, чотирикутник, п'ятикутник, шестикутник. **7.4.** Ні (для обох малюнків). **7.5.** Правильний трикутник, квадрат, правильний шестикутник. В к а з і в к а. Використайте той факт, що в куба шість граней, які попарно паралельні. **7.6.** 2) Ромб; 3) $4\sqrt{5}$. **7.7.** 3) $8\sqrt{5}$. **7.14.** 2) $\frac{15\sqrt{19}}{4}$ см^2. **7.15.** 2) 17 см. **7.16.** 2) $18\sqrt{2}$ см. **7.17.** $32\sqrt{3}$ см^2. **7.29.** Не може. В к а з і в к а. Скористайтеся теоремою Піфагора і теоремою косинусів. **7.38.** 1:1. **7.40.** 3. **7.41.** В к а з і в к а. Нехай точка M належить ребру AB тетраедра $QABC$. Площина, що проходить через точку M паралельно ребрам AC і QB, задовольняє умову. **7.42.** Якщо у тетраедрі $QABC$ маємо $AQ = a$, $BC = b$, а $MNFK$ – ромб ($M \in AB$, $N \in QB$, $F \in QC$, $K \in AC$), то $AM : MB = AK : KC = QF : FC = QN : NB = a : b$. **7.43.** 1) Правильний шестикутник; 2) $3\sqrt{3}$ см^2. **7.44.** 2) $2+\sqrt{5}$; 3) 2:1, рахуючи від точки A. **7.45.** $\frac{13\sqrt{3}}{2}$ см^2. **7.46.** 2:1 або 1:2, рахуючи від точки A. **7.47.** 1:1. **7.48.** 5:1, рахуючи від вершини B. **7.49.** $7\sqrt{6}$ см^2. **7.50.** ≈2,8 м. **7.52.** $2\sqrt{2}$ см.

Вправи для повторення розділу 2

5. $CC_1 = 2$ см. **10.** Ні. **11.** 4:1. **13.** 1) Ні; 2) ні. **14.** 2 см, або 6 см, або 8 см. **25.** 6 см. **26.** 2) $KL = 9$ см; 3) паралелограм. **44.** 8 см. **45.** 84 см^2. **47.** 1) В к а з і в к а. P – середина CD; 2) $2\sqrt{5}+3\sqrt{2}$ (см). **49.** 40 см; 50 см. **50.** Ні.**51.** В к а з і в к а. Шукана пряма проходить через точку P. Якщо a і b перетинаються в точці M, то PM – шукана пряма; якщо $a \parallel b$, шукана пряма паралельна прямій a. **67.** 2) Ромб; 3) $4\sqrt{5}$. **71.** 34 см або 33 см. **72.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ см^2. **80.** Трапеція.

Розділ 3

§ 8

8.22. $\sqrt{34}$ см. **8.23.** $4\sqrt{2}$ см. **8.26.** 1) 13 см; 2) $\sqrt{a^2+b^2-2c^2}$. **8.27.** 1) 15 см; 2) $\sqrt{b^2-a^2+c^2}$. **8.28.** $6\sqrt{2}$ см. **8.29.** 16 см. **8.30.** $4a$ см. **8.31.** b см. **8.32.** 2 см; 4 см; 4 см. **8.34.** Усі відстані по 2 см. **8.37.** $AB \perp (SAD)$. **8.38.** $BC \perp (ABD)$. **8.42.** 1) Точка O – середина гіпотенузи AB; 2) 12 см. **8.43.** 1) Точка O – центр трикутника; 2) 2 см. **8.44.** 1) 3 см; 2) 27 см. **8.45.** 9 см. **8.47.** 1) $SA = 2$ см; 2) $3\sqrt{170}$ см^2. **8.48.** 7 см. **8.49.** 6,5 см. **8.50.** $\frac{5\sqrt{11}}{6}$ см. **8.51.** 40 см або 26 см. **8.54.** 3) $\sqrt{2}$ см^2. **8.55.** 1) 22 см; 2) 14 см; 3) 18 см. **8.56.** 1) Вказівка. Розгляньте трикутник AQK, де K – середина BC і доведіть, що QM – його висота. **8.58.** 4 банки.

§ 9

9.12. 15 см. **9.13.** 10 см. **9.16.** 1) 6 см; $2\sqrt{34}$ см; $2\sqrt{34}$ см; 3) 10 см. **9.17.** 1) $2\sqrt{3}$ см; 4 см; 4 см; 3) $\sqrt{15}$ см. **9.18.** $KA = 12$ см; $KB = 13$ см. **9.19.** $MB = MD = 15$ см. **9.22.** 5 см. **9.23.** $3\sqrt{3}$ см. **9.29.** 10 см. **9.30.** 10 см. **9.31.** 1 см; 5 см; $2\sqrt{6}$ см. **9.32.** 10 см; 14 см; $4\sqrt{6}$ см. **9.33.** $AC = 3\sqrt{3}$ см; $MC = 2\sqrt{7}$ см. **9.34.** Прямокутний; $\angle B = 90°$. **9.36.** Похилі по $2\sqrt{2}$ см; відстань від точки до площини – 2 см. **9.37.** Проекції похилих – по 2 см; відстань від точки до площини – $\sqrt{2}$ см. **9.38.** 6,5 см. **9.39.** 12 см. **9.46.** $\angle A = \angle C$. **9.47.** 53°. **9.49.** $2\sqrt{7}$ см. **9.50.** $\angle ACD$ – тупий. **9.51.** 1) Усі відстані по 25 см; 2) ні. **9.52.** 1) 1 дм; 2) по $\frac{\sqrt{7}}{2}$ дм. **9.53.** 1) 4 см; 2) по $\frac{\sqrt{82}}{2}$ см. **9.54.** $\sqrt{2a^2-h^2}$, якщо $h < \sqrt{2}a$. **9.55.** 1) 3 см; 2) $\sqrt{3}$ см. **9.56.** 1) 0; 2) $a\cos\alpha$; 3) $-b\cos\beta$; 4) $\frac{a-b}{2}$. **9.57.** $\sqrt{34}$ см; $\sqrt{41}$ см. **9.58.** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **9.59.** 1) 45°. **9.60.** $\sqrt{5}$ см або $\sqrt{21}$ см. **9.61.** $\sqrt{13}$ см або $2\sqrt{17}$ см.

9.62. 5 см. **9.63.** 6,6 см. **9.65.** 5 см. **9.66.** 4 см. **9.67.** 13 см. **9.68.** 1), 2) Так. **9.69.** 32,5 см. **9.70.** 60 см. **9.71.** По 5 см. **9.73.** Вказівка. Доведіть, що $AC \perp (BOD)$. **9.77.** $2\sqrt{6}$ дм. **9.78.** Вказівка. Скористайтеся теоремою про три перпендикуляри. **9.79.** 42 га. **9.80.** Вказівка. Використайте рівність вписаних кутів FBK і FNK, що спираються на дугу кола FK.

§ 10

10.9. $LD = 4\sqrt{2}$ см; $LC = 4\sqrt{3}$ см. **10.10.** $KC = 5$ см; $KD = \sqrt{34}$ см. **10.11.** 4 см. **10.12.** 6 см. **10.13.** Прямі a і b можуть бути паралельними, мимобіжними, перпендикулярними та перетинатися не під прямим кутом. **10.14.** Прямі a і b можуть бути мимобіжними, перпендикулярними та перетинатися не під прямим кутом. **10.15.** 1), 2), 3), 4), 5), 6) Ні. **10.16.** 1), 2), 3), 5), 6), 7) Так; 4) ні. **10.17.** 6 см. **10.18.** 5 см. **10.20.** 45°. **10.21.** 30°. **10.23.** Так. **10.25.** 1), 2) Так; 3) ні. **10.28.** 7 см. **10.29.** 7 см. **10.30.** 45°. **10.32.** 70°. Вказівка. Кут між прямими не більший за 90°. **10.33.** 90°. **10.34.** 6 см. **10.35.** 17 см. **10.38.** 6 см. **10.39.** 16 см. **10.40.** $\sqrt{57}$ см. **10.41.** 13 см. **10.42.** 1) По $2a\sqrt{2}$ см; 2) $\frac{3}{4}$. **10.43.** 1) $b\sqrt{6}$ см; 2) $\frac{1}{4}$. **10.47.** 1) $4(\sqrt{3}+1)$ см; 2) $4\sqrt{2}$ см. **10.48.** 1) $4\sqrt{73}$ см; 2) 12 см. **10.54.** 45°. **10.55.** 30°. **10.56.** 25 см. **10.57.** $\sqrt{S}$. **10.58.** $\sqrt{m^2 - a^2 - b^2}$, якщо $m^2 > a^2 + b^2$. **10.59.** 300.

§ 11

11.17. 1) 4 см; 2) 2 см; 3) 8 см. **11.18.** 1) 6 см; 2) 12 см; 3) 3 см. **11.19.** 1:2. **11.20.** 3:1. **11.21.** 7 см або 13 см. **11.22.** 16 см або 4 см. **11.23.** 10 см або 8 см. **11.24.** 7 см або 1 см. **11.25.** 1) 2 см; 2) 5 см; 3) 3 см; 4) 5 см. **11.26.** 1) 7 см; 3) 5 см; 3) 7 см; 4) 2 см. **11.27.** 15 см. **11.28.** 5 см. **11.29.** 5 см. **11.30.** 15 см. **11.33.** 1) 3 см; 2) 4 см; 3) 5 см; 4) 5 см. **11.34.** 1) 6 см; 2) 5 см; 3) 3 см; 4) 5 см. **11.35.** $\frac{3b\sqrt{2}}{4}$. **11.36.** $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. **11.37.** 7 см і 9 см. **11.38.** 6,5 см і 7,5 см. **1.39.** 1) a; 2) a; 3) не менше ніж a. **11.40.** 1) 3 см; 2) 1 см; 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ см; 4) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ см. **11.41.** 1), 2), 3), 4) a. **11.42.** 1), 2), 3), 4) b. **11.43.** 1 см або 7 см. **11.44.** 1 см або 5 см. **11.45.** 1) $OA = 48$ см, $OB = 80$ см; 2) $OA = 12$ см, $OB = 20$ см. **11.46.** 1) $OM = 60$ см, $ON = 90$ см; 2) $OM = 12$ см, $ON = 18$ см. **11.47.** $MK = 2$ см, $ML = 8$ см. **11.48.** $AC = 3$ см, $BC = 9$ см. **11.49.** $MK = 2$ см, $ML = 8$ см або $MK = 2$ см,

$ML = 12$ см. **11.50.** $AC = 3$ см, $BC = 9$ см або $AC = 3$ см, $BC = 15$ см. **11.51.** 1) 12 см; 2) 6 см; 3) 3 см; 4) 4 см. **11.52.** $2d$ см. **11.55.** 5 см. **11.56.** 16 см. **11.57.** $243\sqrt{3}$ см². **11.58.** 4 см. **11.59.** $\frac{a\sqrt{3}}{6}$. **11.60.** Ні. **11.61.** Так. **11.62.** 12 см. **11.63.** 12 см і 37 см. **11.64.** $10\sqrt{2}$ см; 11 см. **11.65.** 4 см. **11.66.** 13 см. **11.67.** $\sqrt{2}$ см. **11.68.** $2\sqrt{2}$ см. **11.71.** Так. **11.72.** Так. **11.73.** Усі кути по 90°. **11.74.** Усі кути по 45°. **11.75.** 2,6 см. **11.76.** 4 см. **11.77.** 24 см. **11.78.** 96 см. **11.79.** 1), 2), 3) d; 4) $2d$. **11.80.** 1), 2), 3) d; 4) $\frac{d}{2}$. **11.81.** 4,8 см. **11.82.** 6,72 см. **11.83.** 1) 9 см; 2) 4,5 см; 3) 5 см. **11.84.** 12 см. Вказівка. Нехай d_1 і d_2 – діагоналі паралелограма, тоді $d_1^2 + d_2^2 = 2(15^2 + 19^2)$; $d_1^2 - 20^2 = d_2^2 - 22^2$. **11.85.** 1) 18 см; 2) 12 см; 3) 4 см; 4) 15 см; 5) 10 см. **11.86.** 1) 12 см; 2) 6 см; 3) 9 см; 4) 6 см; 5) 10 см. **11.87.** 1) 4 см; 2) 3,2 см; 3) $2\frac{2}{3}$ см; 4) $2\frac{2}{7}$ см. **11.88.** 1) 8 см; 2) $4\sqrt{3}$ см; 3) 2 см; 4) 0; 5) $2\sqrt{3}$ см. **11.89.** 1) 4 см; 2) 2 см; 3) $\sqrt{3}$ см; 4) 0; 5) $\sqrt{3}$ см. **11.90.** 1) $3\sqrt{7}$ см; 2) $3\sqrt{3}$ см. **11.91.** 1) $2{,}4\sqrt{5}$ см; 2) $\sqrt{6}$ см; 3) $3\sqrt{2}$ см; 4) $2\sqrt{3}$ см. **11.92.** 1) $12\sqrt{5}$ см; 2) $5\sqrt{6}$ см; 3) $15\sqrt{2}$ см; 4) $10\sqrt{3}$ см. **11.93.** 1) $6\sqrt{2}$ см; 2) 0. **11.94.** 1) $5\sqrt{3}$ см; 2) $\frac{6\sqrt{66}}{11}$ см. **11.95.** 1) 4 см; 2) 3,2 см; 3) $\frac{16\sqrt{17}}{17}$ см; 4) $2\sqrt{2}$ см. **11.96.** 1) $\frac{2a\sqrt{17}}{17}$; 2) 0. **11.97.** 1) $\frac{3\sqrt{7}}{7}$ см; 2) $\frac{6\sqrt{22}}{11}$ см. **11.98.** 1) $\sqrt{3}$ см; 2) $6\sqrt{2}$ см; 3) $2\sqrt{6}$ см. **11.99.** 1,5 см. **11.101.** Так.

§ 12

12.27. Тільки BD. **12.28.** 60°. **12.29.** 1), 2), 3) Так; 4), 5), 6) ні. **12.30.** 1), 2), 3) Так; 4), 5), 6) ні. **12.33.** $4\sqrt{2}$ см. **12.34.** $4\sqrt{6}$ см. **12.35.** φ. **12.36.** ψ. **12.37.** 20°. **12.38.** 40°. **12.39.** 1) 45°; 2) 30°. **12.40.** 1) 60°; 2) 45°. **12.41.** 24 см². **12.42.** $18\sqrt{2}$ см². **12.43.** 1) 45°; 2) 45°; 3) 0°; 4) 90°; 5) 45°; 6) 0°; 7) 90°. **12.44.** 1) 45°; 2) 45°; 3) 0°; 4) 90°; 5) 45°; 6) 0°; 7) 90°; 8) 0°. **12.45.** 1) $5\sqrt{3}$ см; 2) $\frac{5\sqrt{3}}{9}$; 3) $\frac{5\sqrt{3}}{12}$. **12.46.** 1) 8 см; 2) 0,8; 3) $48\sqrt{2}$ см². **12.47.** До 4. **12.48.** 30°. **12.49.** $3\sqrt{3}$ см.

12.50. $12\sqrt{2}$ см². **12.51.** $80\sqrt{3}$ см². **12.52.** 1) 90°; 2) 60°; 3) 90°; 4) 90°; 5) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; 6) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; 7) 60°; 8) $\operatorname{arctg}2$; 9) 30°; 10) 90°. **12.53.** 1) 60°; 2) 45°; 3) 30°; 4) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 60°; 6) 90°. **12.54.** Прямокутний. **12.56.** 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$; 2) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **12.61.** $\arcsin\frac{3}{4}$. **12.62.** $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$. **12.63.** 1) $4\sqrt{6}$ см; 2) $32\sqrt{2}$ см². **12.64.** 1) 3 см; 2) $12\sqrt{2}$ см². **12.65.** 1) 45°; 2) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; 4) 45°; 5) 90°; 6) 0°; 7) 90°; 8) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{5}$. **12.66.** 1) 45°; 2) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{3}$; 3) 90°; 4) 30°; 5) 60°; 6) 30°; 7) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}$; 8) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. **12.67.** 1) 90°; 2) 30°; 3) 60°; 4) 30°; 5) 60°; 6) 90°; 7) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$; 8) $\arccos\frac{1}{3}$. **12.68.** 1) 90°; 2) $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{5}}{5}$; 3) $\operatorname{arctg}3$; 4) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; 5) 30°; 6) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **12.69.** 1) 90°; 2) $\operatorname{arctg}2$. **12.71.** 1) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$; 2) $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 0°; 4) $\operatorname{arctg}0,5$. **12.72.** 1) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$; 2) 0°; 3) 60°; 4) 30°. **12.73.** 1) 90°; 2) 30°. **12.74.** 7 см або $\sqrt{129}$ см. **12.75.** $\sqrt{19}$ см або 7 см. **12.76.** 45°. **12.77.** 60°. **12.78.** По 45°. **12.79.** 45°. **12.80.** 60°. **12.81.** 30°. **12.82.** 1) 45°; 2) 30°; 3) 30°; 4) $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$; 5) $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$. **12.83.** 1), 2) 45°. **12.84.** 1) $\arcsin\frac{1}{3}$; 2) $\arccos\frac{1}{3}$; 3) 90°; 4) 30°. **12.85.** 1), 2) $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **12.86.** 6 см². **12.87.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. **12.88.** $\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}$. **12.89.** $\arccos\frac{1}{5}$. **12.90.** 1) $2\sqrt{2}$ см і 4 см; 2) $2\sqrt{6}$ см і 4 см. **12.91.** $4\sqrt{2}$ см. **12.92.** $84\sqrt{3}$ см². Вказівка. Використайте формули для знаходження площі ортогональної проекції. **12.93.** 30°. Вказівка. Найменше можливе значення кута між прямою B_1D_1 і прямими, що лежать у площині та перпендикулярні до прямої A_1D, – це міра кута між прямою B_1D_1 і її проекцією на цю площину. **12.94.** 1) 60°; 2) 30°; 3) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4) $\arcsin\frac{\sqrt{42}}{7}$ або $\arcsin\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **12.95.** 1) $\sqrt{30}$; 2) $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{10}$. **12.96.** 3 або 4. **12.97.** 2,4 см. **12.98.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **12.99.** 60°. **12.100.** 690,5 м. **12.105.** Ні.

Вправи для повторення розділу 3

7. 7 см. **8.** 10 см. **9.** $\sqrt{337}$ см. **11.** 10 см. **12.** Усі по $2a$ см. **13.** Рівнобедрений. **14.** 2) 48 см^2. **15.** $\sqrt{2a^2+b^2}$. **16.** 9 см. **17.** $KC \perp (ABC)$; $BC \perp (AKC)$. **18.** Вказівка. $PK \parallel A_1B$. **19.** 1) Прямокутник; 2) $a^2\sqrt{2}$. **20.** 1) 90°; 2) 60 см^2. **31.** 4 см; 4 см; $4\sqrt{3}$ см. **32.** 10 см; 18 см; 24 см. **33.** Похилі по $4\sqrt{3}$ см; відстань від точки до площини – $4\sqrt{2}$ см. **36.** $a\sqrt{2}$ см. **37.** 18,5 см; 7,5 см. **38.** 3 дм. **39.** 6 см. **40.** 8 см. **41.** 18 см. **42.** 2 см. **44.** 3 см; 3 см; $2\sqrt{3}$ см; $2\sqrt{3}$ см. **45.** 5 см. **48.** $\sqrt{6}$ см. **49.** 8 см. **50.** 60°. **51.** 4 см. **52.** 60°. **53.** 4 см. **55.** 1) $\sqrt{34}$ см; 2) $\frac{3\sqrt{34}}{34}$. **56.** 50° або 130°. **57.** 30°. **58.** 40 см. **63.** 10 см. **64.** 15 см і 20 см. **66.** 15 см. **67.** $2\sqrt{17}$ см. **68.** $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ см. **69.** 15 см і 39 см. **70.** 21 см. **71.** 2 см. **72.** 4 см. **73.** 1 см. **74.** 12 см. **82.** 2:1. **83.** $\cos\alpha$. **85.** 60°. **86.** 60°. **87.** 30°. **88.** 5 см. **89.** $\arccos\frac{1}{7}$. **90.** $\operatorname{arctg}\frac{8\sqrt{3}}{9}$. **91.** $135° - \operatorname{arctg} 2$.

Розділ 4

§ 13

13.11. Осі z. **13.12.** B і C. **13.13.** M і K. **13.22.** A. **13.23.** $AC = BC$. **13.24.** 3. **13.25.** 7. **13.27.** $m = -2$; $n = 3$. **13.28.** $a = 2$; $b = -4$. **13.31.** $(-2; -2; 2)$, або $(-2; 2; -2)$, або $(2; -2; -2)$. **13.32.** $(3; 3; -3)$, або $(3; -3; 3)$, або $(-3; 3; 3)$. **13.33.** $(9; 0; 0)$ або $(-7; 0; 0)$. **13.34.** $(0; 0; 6)$ або $(0; 0; -6)$. **13.35.** $(0; 2; 0)$. **13.36.** $(1; 0; 0)$. **13.37.** $A(-3; 2; 3)$. **13.38.** $C(6; -9; -3)$, $D(5; -6; -5)$. **13.39.** Вказівка. Використайте задачу 7 з § 13. **13.40.** 3. **13.41.** $(-8; 4; 0)$, $(-5; 5; 8)$.

13.42. (2; 6; 3), (4; 3; 2), (6; 0; 1), (8; −3; 0). **13.43.** (0; −3; 0); $\sqrt{53}$. **13.44.** (0; 0; 9); 5. **13.47.** 2) $12\sqrt{5}$. **13.49.** Так, кут ABC – тупий. **13.50.** 1) Правильний; 2) прямокутний. **13.51.** $(1;\ 2;\ \sqrt{2})$, $(2;\ 3;\ \sqrt{2})$, $(3;\ 2;\ \sqrt{2})$, $(2;\ 1;\ \sqrt{2})$ або $(1;\ 2;\ -\sqrt{2})$, $(2;\ 3;\ -\sqrt{2})$, $(3;\ 2;\ -\sqrt{2})$, $(2;\ 1;\ -\sqrt{2})$. **13.52.** (1; 1; 6), (2; 1; 6), (2; 2; 6), (1; 2; 6) або (1; 1; 8), (2; 1; 8), (2; 2; 8), (1; 2; 8). **13.53.** (0; 2; 5); (9; −4; −1). **13.54.** Так, A лежить між B і C. **13.55.** M між N і K. **13.56.** 1) (−9; 0; 0); (0; 12; 0); (0; 0; 16); 2) 20; $\sqrt{337}$; 15. **13.57.** 1) (−2; 7; 0), (−2; 0; 6), (0; 7; 6); 2) (−2; 0; 0), (0; 7; 0), (0; 0; 6); 3) прямокутного паралелепіпеда; 4) 84. **13.58.** 1) Рівнобедрений трикутник; 2) 120°, 30°, 30°; 3) $2\sqrt{2}(2+\sqrt{3})$; 4) $2\sqrt{3}$. **13.59.** $\frac{2\sqrt{74}}{3}$. **13.60.** $\frac{3\sqrt{10}}{2}$. **13.61.** (0; 0; 6,5), $(0;\ 0;\ 6-\sqrt{17})$, $(0;\ 0;\ 6+\sqrt{17})$, $(0;\ 0;\ 5-\sqrt{19})$, $(0;\ 0;\ 5+\sqrt{19})$. **13.62.** (0; 3; 7), (0; 4; 8). **13.63.** $C(0;\ \sqrt{3};\ 0)$, $Q\left(0;\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, або $C(0;\ \sqrt{3};\ 0)$, $Q\left(0;\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, або $C(0;\ -\sqrt{3};\ 0)$, $Q\left(0;\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, або $C(0;\ -\sqrt{3};\ 0)$, $Q\left(0;\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$. **13.64.** (6; 6; 6) або (−2; −2; −2). **13.65.** 250 обертів. **13.70.** Так; 3 : 5 : 7.

§ 14

14.33. 1), 2) Так; 3) ні. **14.36.** 6 Н. **14.39.** 1) $\overrightarrow{A_1C_1}$; 2) $\overrightarrow{AC_1}$. **14.40.** 1) $\overrightarrow{K_1M_1}$; 2) $\overrightarrow{M_1N}$. **14.43.** Вказівка. Оскільки вектори $\vec{a}-7\vec{b}$ і $\vec{a}+3\vec{b}$ колінеарні, то існує таке число k, що $\vec{a}-7\vec{b}=k(\vec{a}+3\vec{b})$. **14.47.** 1) −1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) −2. **14.48.** 1) −1; 2) −1; 3) $\frac{1}{2}$; 4) −2. **14.50.** $2\vec{n}-2\vec{m}$. **14.51.** $\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$. **14.52.** 1) $\overrightarrow{D_1D}=0\vec{a}+0\vec{b}-\vec{c}$; 2) $\overrightarrow{BA}=\vec{a}+0\vec{b}+\vec{c}$; 3) $\overrightarrow{A_1C_1}=-\vec{a}+\vec{b}+0\vec{c}$; 4) $\overrightarrow{BD_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **14.53.** 1) $\overrightarrow{CB}=0\vec{a}+0\vec{b}-\vec{c}$; 2) $\overrightarrow{AB_1}=\vec{a}+\vec{b}+0\vec{c}$; 3) $\overrightarrow{BD}=-\vec{a}+0\vec{b}+\vec{c}$; 4) $\overrightarrow{AC_1}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **14.57.** $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{a}$. **14.58.** $\overrightarrow{NM}=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{c}$. **14.60.** 1) $\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$; 2) $-\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$; 3) $\frac{2}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$; 4) $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$; 5) $-\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$;

6) $-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}$. **14.61.** 1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; 2) $-\vec{a}+0\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{a}+0\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; 4) $\frac{1}{2}\vec{a}+0\vec{b}+0\vec{c}$. **14.62.** 1) $0\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; 2) $0\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; 3) $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$; 4) $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{c}$. **14.64.** $\overrightarrow{AC_1}$. **14.65.** $\overrightarrow{DC}$. **14.66.** $|\vec{m}|=7$. **14.67.** $|\vec{a}|=3$. **14.68.** $m=4$; $n=3$. **14.69.** $a=7$; $b=5$. **14.70.** $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{3}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$. **14.71.** $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}-\vec{c}$. **14.72.** 1) 0,1; 2) 0,4. Вказівка. Використайте результати задачі 6 § 14. **14.73.** 1) 0,9; 2) 0,2. **14.74.** 1) Ні; 2) так. **14.75.** 1) Так; 2) ні. **14.76.** 1) $\overrightarrow{MK}=\frac{2}{3}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$; 2) 6:7. **14.80.** 1:8. Вказівка. Розгляньте вектор $\overrightarrow{ML}=\frac{1}{9}\overrightarrow{MK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{MC}$, тоді $L\in(ABC)$. **14.81.** 1:1. **14.82.** 1:12. **14.83.** ≈17,4 м.

§ 15

15.37. Вказівка. Доведіть, що $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. **15.38.** Вказівка. Доведіть, що $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{NM}$. **15.39.** $z=r$ або $z=-r$. **15.40.** $y=3$ або $y=-3$. **15.41.** $D(2;\ 6;\ -9)$. **15.42.** $K(2;\ 4;\ 1)$. **15.43.** $|\vec{c}|=6\sqrt{3}$. **15.44.** $|\vec{a}|=6$. **15.45.** 1) $m=6$; $n=-3$; $\vec{p}\uparrow\uparrow\vec{t}$; 2) $m=0$; $n=2$; $\vec{c}\uparrow\downarrow\vec{d}$. **15.46.** 1) $m=-4$; $n=-2$; $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$; 2) $m=3$; $n=0$; $\vec{k}\uparrow\downarrow\vec{l}$. **15.47.** 1. **15.48.** 2. **15.49.** $\vec{b}(1;\ -5;\ 0)$. **15.50.** $\vec{a}(1;\ -2;\ 0)$. **15.53.** $\vec{a}(2;\ 3;\ 1)$. **15.54.** $\vec{b}(2;\ 2;\ 5)$ або $\vec{b}(-4;\ -4;\ -1)$. **15.55.** $x=4$; $y=6$. **15.56.** $x=2$; $z=-2$. **15.57.** Вказівка. Розгляньте вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{DC}$. **15.58.** Вказівка. Розгляньте вектори $\overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{NP}$. **15.59.** 1) Так; 2) ні. **15.60.** 1) Ні; 2) так. **15.61.** 2,23 м^2. **15.67.** Вказівка. Нехай пряма EF перетинає більшу основу трапеції AB у точці M, а меншу основу CD – у точці N. Розгляньте подібність трикутників MFA і NFD, MFB і NFB.

§ 16

16.13. $m=-7$. **16.14.** $n=4$. **16.15.** Тупий кут з $\vec{i}$, гострий – з $\vec{j}$, прямий – з $\vec{k}$. **16.16.** Прямий кут з $\vec{i}$, тупий – з $\vec{j}$, гострий – з $\vec{k}$. **16.17.** 1) Гострий; 2) тупий; 3) прямий. **16.18.** 1) Тупий; 2) прямий; 3) гострий. **16.19.** 1) 60°; 2) 150°. **16.20.** 1) 120°; 2) 30°. **16.21.** $\cos A=-\frac{12}{49}$; $\cos B=\cos C=\frac{1}{14}$. **16.22.** 45°.

16.23. 1) 0°; 2) 45°; 3) 180°; 4) 120°. **16.24.** 1) −3; 2) 1; 3) −12; 4) 17. **16.25.** 1) 1; 2) 0; 3) 5; 4) −10. **16.26.** 1), 3), 4), 6) Так; 2), 5) ні. **16.27.** 1), 3), 4), 5) Так; 2), 6) ні. **16.31.** 1) −48; 2) 120°. **16.32.** 1) 48; 2) 60°. **16.33.** 1) 3; 2) −0,5. **16.34.** 1) −3; 2) −0,5. **16.35.** 1) 1; 2) 7. **16.36.** 1) 1; 2) $\sqrt{79}$. **16.40.** −0,5. **16.41.** −6,5. **16.42.** −13. **16.43.** −1,5. **16.44.** $\pm\frac{2}{3}$. **16.45.** ±2. **16.46.** $\left|\vec{d}\right| = 2\left|\vec{c}\right|$. **16.47.** $\left|\vec{c}\right| = 3\left|\vec{d}\right|$. **16.50.** 1) −524; 2) $\vec{m}(70;\ -350;\ -70)$. **16.51.** 1) −200; 2) $\vec{m}(-22;\ -44;\ 44)$. **16.52.** $\arccos\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **16.53.** $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$. **16.54.** $\sqrt{2}$. **16.55.** 10. **16.56.** $\vec{b}(-24;\ 32;\ 30)$. **16.57.** $\vec{c}(1;\ 0{,}5;\ -0{,}5)$. **16.58.** $\vec{b} \perp \vec{a}$ і $\vec{b} \perp \vec{c}$ або $\vec{a}$ і $\vec{c}$ – колінеарні. **16.59.** $\overrightarrow{BK} = -\vec{b} + \frac{\vec{b}\vec{c}}{\vec{c}^{\,2}}\vec{c}$. Вказівка. $\overrightarrow{BK} = -\vec{b} + x\vec{c}$, коефіцієнт x визначається з умови $\overrightarrow{BK} \cdot \vec{c} = 0$. **16.60.** 1 200 000 м³. **16.65.** *A*, *C*, *D* – так; *B* – ні.

§ 17

17.27. $(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 4$. **17.28.** $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z+4)^2 = 16$. **17.29.** Дві прямі перетину площини α і двох площин, паралельних площині β, що знаходяться від цієї площини на відстані 3 см. **17.30.** Вказівка. Див. задачу 17.29. **17.31.** Коло, радіус якого 6 см, а центр є ортогональною проекцією точки *K* на площину α. **17.32.** Коло, радіус якого 5 см, а центр є ортогональною проекцією точки *C* на площину β. **17.34.** $2x - y + 3z + 1 = 0$. **17.35.** $x + 3y - 2z - 4 = 0$. **17.36.** $2x - y - 3z + 14 = 0$. **17.37.** $x - 3y + 4z - 26 = 0$. **17.38.** $x - y + z = 0$. **17.39.** $x - y - z = 0$. **17.40.** $3x - y - z + 4 = 0$. **17.41.** 1) $x + 3y + 3z + 2 = 0$; 2) $x + 3y + 3z - 17 = 0$. **17.42.** 1) $x + 2 = 0$; 2) $y - 3 = 0$; 3) $z - 4 = 0$. **17.43.** 1) $x - 1 = 0$; 2) $y + 2 = 0$; 3) $z - 3 = 0$. **17.44.** $m = 6$; $l = -2$. **17.45.** $m = 1$; $t = -6$. **17.46.** 42. **17.47.** 150. **17.48.** $x + 2 = 0$. **17.49.** $y + 1 = 0$. **17.50.** $Q(2;\ -1;\ 0)$; $r = 3$. **17.51.** $Q(-1;\ 0;\ 3)$; $r = 4$. **17.52.** $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 9$. **17.53.** $x^2 + (y-5)^2 + z^2 = 49$. **17.54.** $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+4)^2 = 9$. **17.55.** $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+5)^2 = 25$. **17.56.** $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$ і $x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$. **17.57.** $x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 49$ і $(x-6)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 49$. **17.58.** 1) Порожня множина точок; 2) куля; 3) точка. **17.59.** 1) Точка; 2) порожня множина точок; 3) куля. **17.60.** Пряма перетину площини α і площини, що перпендикулярна до відрізка AB та проходить через його середину, або сама площина α, або порожня множина точок. **17.61.** Пряма, що паралельна даним. **17.62.** Чотири прямі, паралельні m. **17.63.** Чотири прямі, паралельні прямій перетину площин α і β. **17.64.** Пряма, що проведена перпендикулярно до площини чотирикутника через центр описаного навколо нього кола. **17.65.** Пряма, що проведена перпендикулярно до площини чотирикутника через центр вписаного в нього кола. **17.67.** 1) 90°; 2) 60°. **17.68.** 45°. **17.69.** $(x+3,5)^2+y^2+z^2=17,25$. **17.70.** $x^2+(y-2)^2+z^2=9$. **17.71.** 1) По колу із центром у точці (0; 2; −3) і радіусом 8; 2) точка A не належить колу, точка B – належить. **17.72.** 1) Коло із центром у точці (−2; 3; 0) і радіусом 5; 2) точка M належить, точка N – не належить. **17.73.** 5,5. **17.74.** 16. **17.75.** $x-6y+16z+77=0$. **17.76.** $3x+3y+2z+8=0$. **17.77.** $3x-y+2z+5=0$. **17.78.** (−1,5; −1,5; −1,5), (−1; −1; 1), (3; −3; 3). **17.79.** Дві сфери: $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=9$ і $(x-2)^2+y^2+(z-1)^2=49$. **17.80.** Дві сфери: $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=25$ і $(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=49$. **17.81.** 1) Сфера $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$ без точок A і B; 2) точки, що лежать поза сферою $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$, крім точок, що належать прямій AB; 3) точки, що лежать всередині сфери $(x+3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=9$, крім точок діаметра AB. **17.82.** 1) Сфера $(x+1)^2+y^2+(z-5)^2=25$ без точок C і D; 2) точки, що лежать усередині сфери $(x+1)^2+y^2+(z-5)^2=25$, крім точок діаметра CD; 3) точки, що лежать поза сферою $(x+1)^2+y^2+(z-5)^2=25$, крім точок, що належать прямій CD. **17.83.** $x+y-2z=0$. **17.84.** $6x-3y-2z+49=0$. **17.85.** $2x-y-z+5=0$. **17.86.** $(x+5)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=12$ або $(x+5)^2+(y+1)^2+(z+1)^2=48$. **17.87.** $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=1$ або $(x+1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2=25$. **17.88.** Якщо $0\leqslant a<2$, то порожня множина точок, якщо $a=2$, то точка (−2; 2; 0), якщо $a>2$, то сфера із центром у точці ($-a$; 2; 0) і радіусом $\sqrt{a^2-4}$. **17.89.** Коло, діаметр якого – відрізок BC, де C – основа перпендикуляра, проведеного із точки A до площини α. **17.90.** Шукана ГМТ – точка, яка є перетином прямої l і площини α, де пряма l – пряма, що перпендикулярна до площини ABC і проходить через центр кола, описаного навколо ΔABC, а площина α – площина, що проходить через середину відрізка AD перпендикулярно до нього. **17.91.** $\left(-\frac{7}{19};-\frac{20}{19};-\frac{11}{19}\right)$. **17.92.** $(x+2)^2+(y+3)^2+(z-1)^2=9$ і

$x^2+(y-1)^2+(z-5)^2=9$. **17.93.** $\frac{336}{13}\pi$. **17.94.** $2x+4y+4z+9=0$. **17.95.** 20 см.

§ 18

18.7. 1) Так; 2) ні. Вказівка. Дослідіть колінеарність векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$. **18.8.** 1) Ні; 2) так. **18.9.** 1) Ні; 2) так. **18.10.** 1) Так; 2) ні. **18.20.** $C_1(0;\ 0;\ 0)$, $C_2(0;\ 5;\ 0)$. **18.21.** $K_1(0;\ 0;\ 1)$, $K_2(0;\ 0;\ 4)$. **18.24.** $6x-5y+3z-10=0$. **18.25.** $5x-y-5=0$. **18.26.** $\left(-\frac{1}{7};-\frac{5}{7};\frac{13}{7}\right)$. Вказівка. Нехай $M(x;\ y;\ z)$ – шукана точка, тоді $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AB}$. **18.27.** $\left(\frac{1}{3};2;\frac{2}{3}\right)$. **18.28.** $(1;\ -3;\ 0)$. **18.29.** $(0;\ -1;\ 2)$. **18.30.** Ні. **18.31.** Так, у точці $(2;\ 0;\ 0)$. **18.32.** Так. **18.33.** Ні. **18.34.** $x+y-3z+8=0$. **18.35.** $x-2y+z-11=0$. **18.36.** $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$. Вказівка. Знайдіть кут між вектором нормалі до площини і вектором $\overrightarrow{AB}$ та врахуйте, що $\arccos a+\arcsin a=\frac{\pi}{2}$. **18.37.** $\arcsin\frac{2}{15}$. **18.39.** 1 : 1 : 1. **18.40.** 1 : 1. **18.42.** Коли точки K, L і M – середини відповідних ребер. **18.43.** $z=5$. **18.44.** $x=-1$. **18.45.** Вказівка. Розгляньте скалярні добутки $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1D}$ і $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}$. **18.46.** 1) $\arccos\frac{|b^2-c^2|}{\sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; 2) $b=c$. **18.47.** -39. **18.48.** 12. **18.55.** $(0;\ 0;\ -65)$, $(0;\ 0;\ 84)$, $\left(0;0;\frac{3-\sqrt{129}}{0}\right)$, $\left(0;0;\frac{3+\sqrt{129}}{0}\right)$. **18.57.** 1 : 1. **18.59.** Вказівка. Розгляньте вектори $\vec{a}(\sin x\sin y;\ \cos x\cos y)$ і $\vec{b}(\sin z;\ \cos z)$. **18.60.** 400 м. **18.65.** Розгляньте вектори $\vec{a}(1;1;1)$ і $\vec{b}(\sqrt{x+1};\ \sqrt{2x-3};\ \sqrt{50-3x})$.

§ 19

19.30. 1) $(-1;\ -3;\ 2)$; 2) $(1;\ 3;\ -2)$. **19.31.** 1) $(-3;\ 3;\ -2)$; 2) $(3;\ -3;\ 2)$. **19.34.** 1) Паралельний площині α; 2) перпендикулярний до площини α. **19.35.** 1) Точка D_1; 2) точка B; 3) відрізок CD_1; 4) відрізок D_1B; 5) трикутник A_1DC; 6) прямокутник D_1DBB_1; 7) тетраедр BB_1AC; 8) куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

19.36. 1) Точка A; 2) відрізок C_1D; 3) відрізок C_1A; 4) трикутник B_1C_1D; 5) прямокутник CC_1A_1A; 6) тетраедр $CBDC_1$. **19.37.** 1) Точка N; 2) точка K; 3) відрізок AF; 4) трикутник BNK; 5) трикутник NFK; 6) трапеція $BNKC$. **19.38.** 1) Точка L; 2) точка M; 3) відрізок BL; 4) трикутник CLM; 5) трикутник LNK; 6) трапеція $BKMA$. **19.41.** 1), 3) Паралельні; 2) перетинаються. **19.42.** 1), 3) Перетинаються; 2) паралельні. **19.45.** $3x - y - 3z - 5 = 0$. **19.46.** $4x - 2y - z + 5 = 0$. **19.47.** $x + 2y - z - 5 = 0$. Вказівка. Врахуйте, що дві центрально-симетричні площини паралельні між собою. **19.48.** $x - y + 2z + 3 = 0$. **19.49.** 5 обертів.

Вправи для повторення розділу 4

9. B. **10.** $C(2;\ 6;\ 3)$. **12.** $z = 10$ або $z = -4$. **13.** 1) $(-1{,}6;\ 0;\ 0)$; 2) $(0;\ 8;\ 0)$; 3) $(0;\ 0;\ 1)$. **14.** 2) Так; 3) $4\sqrt{86}$. **15.** $M(0;\ 0;\ 8)$, $N(2;\ -3;\ 12)$. **16.** 2) $19 + \sqrt{41}$. **17.** 2) $\frac{\sqrt{166}}{2}$; 3) $\frac{3\sqrt{83}}{2}$. **18.** 7 і 14. **19.** $(4;\ 0;\ 2)$. **30.** 1) $\overrightarrow{AC_1}$; 2) $\overrightarrow{AD_1}$. **32.** $k = -2$. **33.** 1) $\overrightarrow{C_1A_1} = 0\vec{a} + 0\vec{b} - \vec{c}$; 2) $\overrightarrow{BC} = 0\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; 3) $\overrightarrow{C_1B_1} = 0\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; 4) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + 0\vec{b} + \vec{c}$. **34.** $\vec{m} = 7\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}$. **35.** Вказівка. Розгляньте різницю лівої і правої частин та доведіть, що вона дорівнює $\vec{0}$. **36.** $|\vec{p}| = 5$. **37.** $x = 1$; $y = 2$. **38.** $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **49.** 1) $C(-6;\ 4;\ 8)$; 2) $C(1{,}5;\ 1;\ 0{,}5)$. **51.** $x = 4$ або $x = -4$. **52.** $m = -4$; $n = -6$. **53.** Протилежно напрямлені. **54.** $\vec{c}(2;\ -2;\ 4)$ або $\vec{c}(-2;\ 2;\ -4)$. **55.** $\vec{a}(-1;\ -2;\ 2)$ або $\vec{a}(1;\ 2;\ -2)$. **56.** $\vec{c}(-1;\ 2;\ 5)$; $\vec{d}(4;\ 0;\ 2)$. **57.** $x = -3$; $y = -8$. **63.** $\frac{4}{21}$. **64.** 1) $m < 4$; 2) $m = 4$; 3) $m > 4$. **65.** $90°$. **66.** 1), 3) $20°$; 2), 4) $160°$. **67.** 1) $0°$; 2) $60°$; 3) $90°$; 4) $150°$; 5) $180°$; 6) $120°$. **68.** 100. **69.** $\frac{3}{5}$ або $-\frac{3}{5}$. **70.** $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. **81.** $3x - 2y + 4z = 0$. **82.** 1) $x = 0$; 2) $y = 4$. **83.** $A = 2$; $B = -3$. **84.** $x - 2y + 4z - 18 = 0$. **86.** Коло, радіус якого дорівнює 15 см, а центром є ортогональна проекція точки M на площину β. **87.** $\sqrt{5}$. **88.** $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 4)^2 = 4$. **89.** 1) B; 2) C; 3) A. **90.** $(5;\ 0;\ 0)$ і $(-3;\ 0;\ 0)$. **91.** $z + 5 = 0$. **92.** $c = 6$. **93.** $x = -1$; $z = 4$. **94.** $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 9$. **95.** 1) Так; 2) ні. **96.** $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z + 2)^2 = 6$ або $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 +$

$+ (z + 2)^2 = 54$. **100.** 1) Так; 2) ні. **101.** 1) Ні; 2) так. **106.** $M(2; 0; 0)$. **107.** (1; 2; 0). **108.** (1; 0; −2). **109.** Так, у точці (0; −1; 0). **110.** Так. **111.** $2x + y - z - 2 = 0$. **112.** $\frac{\sqrt{6}}{9}$. **113.** $y = 3$. **114.** −14; 14. **116.** $\arccos\frac{1}{18}$. **130.** 1) (1; −2; −2); 2) (−1; 2; 2). **131.** 1) Так; 2) ні. **132.** 1) Перетинаються; 2) паралельні; 3) паралельні.

Відповіді до завдань «Домашня самостійна робота»

№ завдания / № роботи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Б	Г	Б	В	А	Г	Б	Г	В	Б	Г	А
2	В	Г	Б	Б	В	А	В	Б	В	В	В	А
3	Г	В	Г	Б	Г	А	Б	Б	В	В	А	Г
4	Б	А	В	Г	А	Г	Б	А	В	Б	Б	А
5	А	Г	Б	В	Б	Г	Б	Г	В	А	Г	В
6	Б	Г	В	А	Г	В	А	Б	В	Г	А	Б
7	Б	А	В	Г	В	Г	В	В	Г	А	Б	В

Відповіді до завдань «Перевірте свою компетентність»

1	Б	В	В	Д	1-Б; 2-А; 3-Г; 4-В	96
2	Б	В	В	Д	1-А; 2-Д; 3-Б; 4-В	4
3	Б	Г	А	В	1-Д; 2-Г; 3-В; 4-А	60
4	Г	Б	А	В	1-Г; 2-Д; 3-А; 4-Б	168
5	Б	В	Г	А	1-В; 2-Г; 3-А; 4-Д	6,25
6	Б	В	Г	А	1-Б; 2-А; 3-В; 4-Д	3
7	Б	Г	В	В	1-В; 2-Г; 3-А; 4-Б	20
8	Д	Б	В	Г	1-Г; 2-Д; 3-А; 4-В	9
9	Д	Б	Б	А	1-Г; 2-Б; 3-Д; 4-А	9
10	Б	А	Д	Б	1-Б; 2-А; 3-В; 4-Д	6
11	Д	Б	В	В	1-В; 2-Д; 3-А; 4-Г	45
12	Г	Б	Д	Б	1-Г; 2-Д; 3-Б; 4-А	12
13	Б	А	В	Д	1-А; 2-Д; 3-Г; 4-В	162
14	А	Г	Г	Б	1-Г; 2-Д; 3-А; 4-В	84
15	Б	Г	В	Г	1-В; 2-А; 3-Д; 4-Б	120
16	В	Б	В	А	1-А; 2-В; 3-Д; 4-Б	5
17	В	А	Д	Д	1-Д; 2-Г; 3-В; 4-А	25
18	Г	А	Б	В	1-А; 2-Б; 3-Д; 4-Г	4
19	В	Д	В	А	1-А; 2-Д; 3-Б; 4-В	92

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

ЗМІСТ

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович
ЄРГІНА Оксана Володимирівна

ГЕОМЕТРІЯ
(профільний рівень)

Підручник для 10 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Головний редактор *Наталія Заблоцька*

Редактори *Наталія Дашко, Оксана Єргіна*
Обкладинка *Тетяна Кущ*
Художнє оформлення, ілюстрації *Юрія Лебедєва*
Технічний редактор *Цезарина Федосіхіна*
Комп'ютерна верстка *Юрія Лебедєва*
Коректори *Лариса Леуська, Любов Федоренко*

Формат 60×90/16.
Ум. друк. арк. 23. Обл.-вид. арк. 21,27.
Тираж 19 245 пр. Вид. № 1264.
Зам. №

Видавництво «Генеза»,
вул. Тимошенка, 2-л, м. Київ, 04212.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 5088 від 27.04.2016.

Віддруковано у ТОВ «ПЕТ»,
вул. Ольмінського, 17, м. Харків, 61024.
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
серія ДК № 4526 від 18.04.2013.

№	ПІП	Клас	Рік навчання

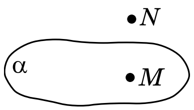
АКСІОМИ СТЕРЕОМЕТРІЇ

C_I Яка б не була площина, існують точки, які їй належать, і точки, які їй не належать (мал. 1).

C_{II} Якщо дві точки прямої належать площині, то всі точки прямої належать цій площині (мал. 2).

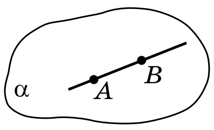
C_{III} Якщо дві площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку (мал. 3).

C_{IV} Через будь-які три точки, що не лежать на одній прямій, можна провести площину, і до того ж тільки одну (мал. 4).



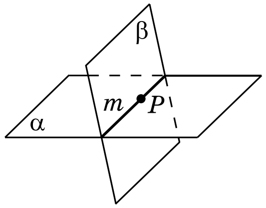
$M \in \alpha$, $N \notin \alpha$

Мал. 1



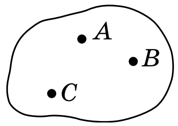
$A \in \alpha$, $B \in \alpha$, тоді $AB \subset \alpha$

Мал. 2



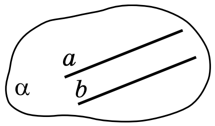
$P \in \alpha$, $P \in \beta$, тоді $\alpha \cap \beta = m$, причому $P \in m$

Мал. 3

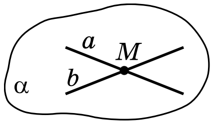


Мал. 4

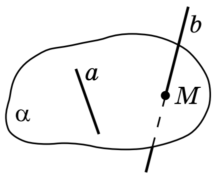
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ У ПРОСТОРІ



Прямі паралельні
$a \parallel b$



Прямі перетинаються
$a \cap b = M$

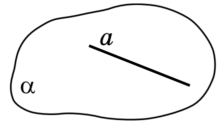


Прямі мимобіжні

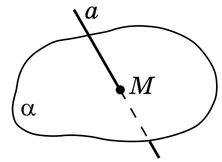
Ознака мимобіжності прямих. Якщо одна з двох прямих лежить у деякій площині, а друга пряма перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то ці дві прямі – мимобіжні.

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \cap \alpha = M \\ M \notin a \end{array}\right\} a \text{ і } b \text{ – мимобіжні}$$

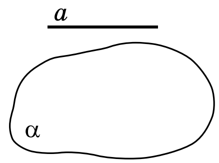
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМОЇ І ПЛОЩИНИ



Пряма належить площині
$a \subset \alpha$

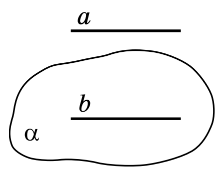


Пряма перетинає площину
$a \cap \alpha = M$



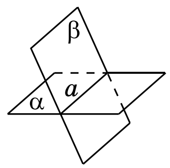
Пряма паралельна площині
$a \parallel \alpha$

Ознака паралельності прямої і площини. Якщо пряма, яка не лежить у площині, паралельна якій-небудь прямій цієї площини, то вона паралельна і самій площині.

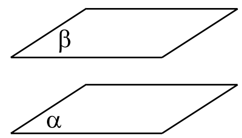


$$\left.\begin{array}{l} a \parallel b \\ b \subset \alpha \\ a \not\subset \alpha \end{array}\right\} a \parallel \alpha$$

ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ ПЛОЩИН

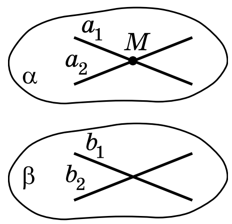


Площини перетинаються по прямій
$\alpha \cap \beta = a$



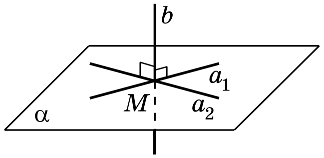
Площини паралельні
$\alpha \parallel \beta$

Ознака паралельності площин. Якщо дві прямі, які перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.



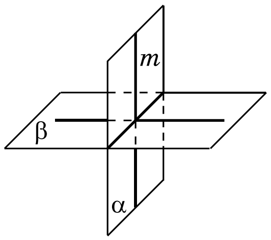
$$\left.\begin{array}{l} a_1 \subset \alpha;\ a_2 \subset \alpha \\ a_1 \cap a_2 = M \\ b_1 \subset \beta;\ b_2 \subset \beta \\ a_1 \parallel b_1 \\ a_2 \parallel b_2 \end{array}\right\} \alpha \parallel \beta$$

Ознака перпендикулярності прямої і площини. Якщо пряма, яка перетинає площину, перпендикулярна до двох прямих цієї площини, які проходять через точку перетину, то вона перпендикулярна і до площини.



$$\left.\begin{array}{l} b \cap \alpha = M \\ a_1 \subset \alpha;\ M \in a_1;\ b \perp a_1 \\ a_2 \subset \alpha;\ M \in a_2;\ b \perp a_2 \end{array}\right\}\ b \perp \alpha$$

Ознака перпендикулярності площин. Якщо площина проходить через пряму, перпендикулярну до другої площини, то ці площини перпендикулярні.



$$\left.\begin{array}{l} m \subset \alpha \\ m \perp \beta \end{array}\right\}\ \alpha \perp \beta$$

ЗНАЧЕННЯ СИНУСА, КОСИНУСА І ТАНГЕНСА ДЕЯКИХ КУТІВ

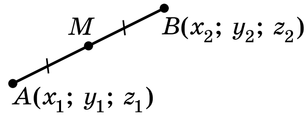
α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не існує	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

ПРЯМОКУТНІ КООРДИНАТИ У ПРОСТОРІ

Координати точки $M(x_M;\ y_M;\ z_M)$, яка є серединою відрізка AB:

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2};\quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

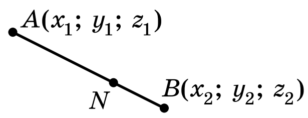
$$z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$



Координати точки $N(x_N;\ y_N;\ z_N)$, яка ділить відрізок AB у відношенні $\frac{AN}{NB} = \lambda$:

$$x_N = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\quad y_N = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};$$

$$z_N = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}$$



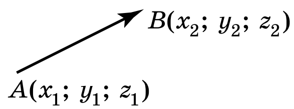
Відстань між точками $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

ВЕКТОРИ У ПРОСТОРІ

Координати вектора:

$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$$



Модуль вектора $\vec{a}(x;\ y;\ z)$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Додавання, віднімання векторів $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $\vec{b}(x_2;\ y_2;\ z_2)$ та множення вектора $\vec{a}(x_1;\ y_1;\ z_1)$ на число λ:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b};\qquad \vec{c}(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b};\qquad \vec{d}(x_1 - x_2;\ y_1 - y_2;\ z_1 - z_2)$$

$$\vec{m} = \lambda\vec{a};\qquad \vec{m}(\lambda x_1;\ \lambda y_1;\ \lambda z_1)$$

Скалярний добуток векторів:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$$