

Комунальний заклад «Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського»

## **Продуктивне навчання математики: з досвіду роботи педагогів Кіровоградщини**

*Друкується за рішенням вченої ради комунального закладу  
«Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти  
імені Василя Сухомлинського»  
(протокол від 10.11.2020 р. №4)*

Кропивницький

2021

Продуктивне навчання математики: з досвіду роботи педагогів Кіровоградщини: метод. посіб. / Упоряд. Любов ТКАЧЕНКО. – Кропивницький: комунальний заклад «Кіровоградський обласний інститут післядипломної педагогічної освіти імені Василя Сухомлинського», 2021. – 84 с.

У посібнику висвітлені питання, що стосуються особливостей організації навчально-пізнавальної діяльності учнів у процесі навчання математики, роботи з обдарованими та здібними до вивчення математики дітьми. Також запропоновані матеріали щодо підвищення зацікавленості предметом, розширення загальної культури і світогляду школярів.

Посібником можуть скористатися педагоги для удосконалення предметно-методичної компетентності та організації освітнього процесу урочної та позаурочної роботи з математики.

Рецензенти:

- |                    |                                                                                                                                                                                  |
|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ганна СКРИПКА –    | старший викладач кафедри теорії і методики середньої освіти КЗ «КОІППО імені Василя Сухомлинського», кандидат педагогічних наук;                                                 |
| Людмила ЯРЕМЕНКО – | доцент кафедри математики, статистики та економіки Центральноукраїнського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка, кандидат педагогічних наук, доцент. |

Відповідальна за випуск – Людмила КОРЕЦЬКА

## ЗМІСТ

|                                                                                                                                                                        |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <b>ВСТУП</b> .....                                                                                                                                                     | 4  |
| <b>РОЗДІЛ І. НАВЧАЛЬНО-ПІЗНАВАЛЬНА ДІЯЛЬНІСТЬ УЧНІВ:<br/>МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ОРГАНІЗАЦІЇ</b> .....                                                                       | 5  |
| <i>Лариса ГОЛОДЮК</i><br>Удосконалення організаційно-адаптаційних та соціально-інтерактивних<br>умінь учнів у процесі колективного виконання завдань з математики..... | 5  |
| <i>Валентина РУДЕНКО</i><br>Формування та розвиток підприємницьких компетентностей школярів<br>шляхом практичної та прикладної спрямованості уроків математики.....    | 10 |
| <i>Олена СВИРИДЕНКО</i><br>Методичні особливості навчання в класах<br>математичного профілю.....                                                                       | 18 |
| <i>Оксана КУРЛОВА</i><br>Організація пізнавальної діяльності учнів як засіб<br>формування математичної компетентності.....                                             | 26 |
| <i>Світлана БАРАНОВА</i><br>В рік математики про яскравих творців цариці наук.....                                                                                     | 31 |
| <b>РОЗДІЛ ІІ. МЕТОДИЧНІ АКЦЕНТИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ<br/>СЕРТИФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ ЗНО</b> .....                                                                             | 40 |
| <i>Юлія БОТУЗОВА</i><br>Метод оцінки при розв'язуванні задач<br>зовнішнього незалежного оцінювання з математики.....                                                   | 40 |
| <b>РОЗДІЛ ІІІ. МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДНІ ЗАВДАННЯ:<br/>РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО РОЗВ'ЯЗАННЯ</b> .....                                                                            | 57 |
| <i>Микола ГАЄВСЬКИЙ</i><br>Застосування методів диференціального та інтегрального числення<br>при розв'язуванні олімпіадних задач.....                                 | 57 |
| <i>Людмила ІЗЮМЧЕНКО</i><br>Олімпіадні задачі в геометрії: задачна серія на метричні співвідношення<br>у чотирикутнику.....                                            | 61 |
| <i>Інна КЛЮЧНИК</i><br>Використання блок-схем для розв'язування задач з параметрами.....                                                                               | 69 |
| <i>Олег МАКАРЧУК</i><br>Вектори в олімпіадних задачах з математики.....                                                                                                | 76 |

## ВСТУП

*Математика, що є найдавнішою з усіх наук, разом з тим лишається завжди молодого наукою, яка бурхливо розвивається, яка весь час розширює галузі свого пізнання, яка все ширше розвиває свої зв'язки не тільки з природничими науками, а й з найрізноманітнішими галузями людської діяльності.*

*Й. Кеплер*

XXI століття є періодом стрімкого зростання значущості науки і освіти в житті людства та особистості в цілому. Освіту розглядають як потужний чинник ефективного вирішення людством та окремою людиною важливих життєвих завдань. Концепція реалізації державної політики у сфері реформування загальної середньої освіти «Нова українська школа» передбачає оновлення змісту освіти, пов'язане з упровадженням компетентнісного підходу до організації процесу навчання. У статті 12 Закону України «Про освіту» зазначається, що метою повної загальної середньої освіти є всебічний розвиток, виховання і соціалізація особистості, яка здатна до життя в суспільстві та цивілізованій взаємодії з природою, має прагнення до самовдосконалення та навчання впродовж життя, готова до свідомого життєвого вибору та самореалізації, відповідальності, трудової діяльності, громадянської активності. Результат освіти передбачає сформованість ключових компетентностей, що дозволяють легко адаптуватися до соціального середовища і гармонійно його розвивати.

Компетентність особистості – мета сучасної школи. На даному етапі різко зростає значення математики у розвитку суспільства та становленні особистості. Математика – універсальна мова, яка широко використовується у всіх сферах людської діяльності. Без математичних обчислень не можна побудувати не тільки космічного корабля, електростанції, підводного човна, а й звичайного будинку.

Основним завданням шкільного курсу математики в закладах загальної середньої освіти є забезпечення міцного і свідомого оволодіння здобувачами освіти системою математичних знань, умінь та навичок, які потрібні для їх загального розвитку, практичної діяльності в умовах сучасного виробництва, вивчення на достатньо високому рівні споріднених шкільних предметів і для продовження освіти. Необхідно закріпити думку про те, що математика потрібна, бо вона – про наше щоденне успішне і заможне життя в сучасному світі. Для загальної освіти дуже важливо ознайомити учнів з науковими методами дослідження, такими, як аналіз, синтез, індукція, дедукція, аналогія.

У посібнику подано методичні рекомендації щодо реалізації наскрізних ліній навчання математики, що допоможе вчителям вибудувати власну стратегію і тактику проведення уроків математики на засадах компетентнісного підходу.

# **РОЗДІЛ І.**

## **НАВЧАЛЬНО-ПІЗНАВАЛЬНА ДІЯЛЬНІСТЬ УЧНІВ: МЕТОДИЧНІ АСПЕКТИ ОРГАНІЗАЦІЇ**

**Лариса ГОЛОДЮК,**  
*заступник директора з науково-  
методичної діяльності комунального  
закладу «Кіровоградський обласний  
інститут післядипломної педагогічної  
освіти імені Василя Сухомлинського»*

### **УДОСКОНАЛЕННЯ ОРГАНІЗАЦІЙНО-АДАПТАЦІЙНИХ ТА СОЦІАЛЬНО-ІНТЕРАКТИВНИХ УМІНЬ УЧНІВ У ПРОЦЕСІ КОЛЕКТИВНОГО ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ З МАТЕМАТИКИ**

Проблема взаємодії освіти та соціалізації є актуальною для вітчизняної науки. Так, у соціологічній і педагогічній літературі розглядаються методи соціалізації у навчальному закладі, аналізуються зміни в освіті та культурі та їх вплив на процес соціалізації. В останні роки відбувається значне розширення сфери дослідження проблеми соціалізації. Незважаючи на наявність різноманітних, багатоаспектних досліджень, вчені вважають, що процес соціалізації не можна розглядати у відриві від впливу і взаємодії із середовищем, у якому навчається дитина.

У сучасній літературі актуальними є комплексні дослідження проблем суспільства, освіти та соціалізації. Один з напрямків такого дослідження полягає в пошуці нових технологій соціалізації, адекватних суті мінливого світу. Саме тому, соціалізація виступає спеціальним предметом нашого дослідження у площині формування соціально-інтерактивних умінь школярів.

Проблема соціалізації молодого покоління ґрунтовно досліджується в зарубіжній та вітчизняній літературі. Теоретико-методологічні засади соціалізації розкривали у своїх роботах Н. Андрєєнкова, С. Батенін, О. Безпалько, М. Вебер, Ф. Гіддінгс, Е. Еріксон, І. Кон, М. Лукашевич, В. Москаленко, Ю. Поліщук, З. Фрейд.

Особливості процесу соціалізації в сучасних умовах інформаційного суспільства досліджували Ш. Амонашвілі, Н. Гавриш, Н. Лавриченко. Соціалізаційна тематика продовжує свій розвиток у дисертаційних роботах Ю. Богінської, В. Іванова, Н. Ковальчук, О. Панагушиної.

Разом з тим, питання формування способів розвитку соціально-інтерактивних та організаційно-адаптаційних умінь учнів у процесі спільного виконання завдань з математики залишається не розкритим.

Зміст поняття «соціалізація» є нестабільним, неоднозначним і має двосторонній характер. Так, у своїх роботах Т. Парсонс і Р. Мертон розкривають

поняття «соціалізації» як процес повної інтеграції особистості в соціальну систему, у ході якого відбувається її пристосування, адаптація. Отже, з одного боку соціалізацію можна трактувати як процес входження дитини у соціальне середовище і її пристосування до різних факторів. Разом з тим, з іншого – Г. Олпорт та К. Роджерс під соціалізацією розуміють процес самоактуалізації «Я – концепції», самореалізації особистістю своїх здібностей, як процес подолання негативних впливів середовища, які заважають її саморозвитку і самоствердженню. Ці підходи не суперечать один одному, а визначають двосторонній характер соціалізації.

Таким чином, соціалізацію розглядаємо як процес і результат засвоєння та подальшого активного відтворення дитиною соціального досвіду шляхом формування соціальних умінь.

Розглядаючи дану тему, звертаємо увагу на інтерактивні уміння учнів, що включають аналітичні вміння, вміння орієнтуватися в новій ситуації, оцінювати її, ефективно взаємодіяти для вирішення проблемних завдань, оперувати правилами й умовностями спілкування, встановлювати контакт (в усній та писемній формах), вміння інтерпретувати комунікативні стратегії партнера і адекватно будувати власну стратегію. Отже, у процесі спільної діяльності і спілкування формуються соціально-інтерактивні уміння, які сприяють формуванню і розвитку культури мислення, культури почуттів, культури поведінки.

Досліджуючи організаційно-адаптаційні вміння, які забезпечують продуктивне входження дитини в інформаційно-освітнє середовище, визначили, що вони формуються за допомогою дій планування самостійної діяльності відповідно до її мети, вибору способів досягнення мети і необхідних для цього засобів, визначення послідовності дій у структурі діяльності. Особливо виділяємо планування самостійної діяльності. Планування – це мисленнєва діяльність, що передбачає усвідомлення змісту та послідовності розумових і практичних дій, потрібних для виконання певної мети. Планування конкретної діяльності починається з формулювання мети, завдань, вибору форм, методів, прийомів, засобів діяльності, його нормування, вибору форм і методів контролю та обліку. Саме тому є нагальною потребою розглянути завдання на моделювання, наприклад «Моделью за комп'ютером», мета якого полягає у виявленні особливостей, ознак, властивостей математичного поняття. Конструктивний аспект завдання – побудова на основі зроблених висновків малюнка або моделі на комп'ютері.

Добираючи сервіси для організації колективної роботи щодо виконання завдань з математики, звернемо увагу на Документи Google сервісу Диск Google. Вивчення курсу інформатики з 2-го класу спрощує виконання вказаного завдання в базовій школі, оскільки учні створюють облікові записи у початковій школі. Вчителям радимо задавати учням завдання щодо моделювання за комп'ютером як домашнє (учні повинні виконувати його у парі або в групі з однокласниками).

Програми, що входять до складу служб Документи Google сервісу Диск Google, надають користувачеві можливість створювати та редагувати текстові

документи, електронні таблиці, презентації, малюнки, форми, переглядати і зберігати документи у форматах PDF та Microsoft Office.

Доступ до служби здійснюється за допомогою браузера з комп'ютерів і мобільних пристроїв. Для того, щоб отримати можливість користуватися службою Документи Google, слід створити обліковий запис.

У службі *Документи Google* передбачена можливість спільної роботи з документами. Користувач служби залежно від своєї ролі може бути власником файлу або одним із учасників колективної роботи. Користувачам, які не є учасниками колективної роботи, можна надати право перегляду (але не редагування) документа або коментування.

Звертаємо увагу, що формування навичок використання графічного редактора онлайнової служби *Документи Google* дозволять учням: створювати, спільно використовувати і змінювати малюнки в Інтернеті; публікувати малюнки в Інтернеті як зображення або завантажувати їх у стандартних форматах; вставляти текст, вставляти малюнки в інші документи, таблиці або презентації Google за допомогою веб-буфера обміну і потім змінювати їх безпосередньо в документі.

*Поради щодо створення малюнків:*

1. Відкрити обліковий запис та перейти до служби *Документи Google* сервісу *Диск Google*.
2. Відкрити *Список документів*, натиснути кнопку *Створити* і вибрати пункт *Малюнок*.
3. За допомогою команд меню і кнопок на панелі інструментів можна створювати блок-схеми і графіки, а також інші типи малюнків.
4. Вказати ім'я документа. *Примітка.* Клікнути на записі *Малюнок без назви*. У вікні, що з'явиться, вписати назву в поле *Введіть назву нового документа*.
5. Встановити права доступу до документа.

Для організації спільного доступу до документів або визначення прав доступу слід:

1. Клікнути на кнопці *Спільний доступ*.
2. У вікні, що буде виведене на екран, клікнути на посиланні *Змінити* у рядку *Приватний – доступ мають тільки вказані нижче користувачі*.
3. Налаштувати доступ до змісту файлу. Встановити перемикачі у відповідних полях.

*Примітка.*

Для всіх у мережі (усі користувачі Інтернету можуть знаходити елемент і отримувати до нього доступ).

Усі користувачі, які отримали посилання (мають доступ користувачі, які отримали посилання).

Приватно (доступ тільки для співавторів).

4. Вказати міру доступу: може переглядати; може коментувати; може редагувати (натискаємо на кнопку *Зберегти*).

5. Якщо обрали доступ: Усі користувачі, які отримали посилання або Приватно, то необхідно клікнути на кнопці *Зберегти*.

6. У вікні, що з'явилося, у рядку *Запросити користувачів* вказати адресу електронної пошти Google учасників спільної роботи.

7. Клікнути на кнопці *Надати доступ і зберегти*.

Можна проглядати історію правок, які внесли співавтори до малюнка. Інструмент не призначений для точного відстежування змін. Проте з його допомогою можна проглянути попередні версії документу, повернутися до будь-якої версії, а також дізнатися, хто вніс ту чи іншу правку.

Правки за певний період часу групуються. Таким чином, пошук незначних відмінностей між версіями документа Google спрощується. Якщо ви хочете подивитися зміни в структурованому вигляді, натисніть кнопку *Детальніше* в правому нижньому куті документа.

Старі записи в історії змін Google іноді видаляються для економії місця. Якщо ви працюєте в Google Документах з великим файлом або файлом, який був створений давно, історія змін може бути скорочена.

*Приклад роботи над спільним документом.*

Учень створив документ Сніговик і запросив до виконання завдання (пофантазуйте разом та створіть малюнок, елементами якого були круг і сектор) однокласницю.

Кожен із співавторів малюнка будував свої елементи.

Звертаємо увагу, що під час онлайн роботи кожному учню встановлюється автоматично колір. Це дає можливість учителю визначити елементи, які будував кожен учасник.

Для виконання цього завдання учню був відведений, наприклад, зелений колір, а учениці – наприклад, оранжевий.

У результаті виконання цього завдання був створений малюнок, який складався із кругів, секторів і додатково відрізків.

Виконавши завдання, перший учень, який позиціонується системою як власник, відкриває доступ для перевірки вчителю. Учитель може редагувати малюнок. Усі кроки редагування учні можуть переглянути в історії змін. Колір, який відведений вчителю – наприклад, рожевий.

Таким чином, учитель може перевірити виконання завдання і «внесок» кожного учня у виконання даного завдання.

Прикладами завдань для колективного виконання можуть бути наступні завдання.

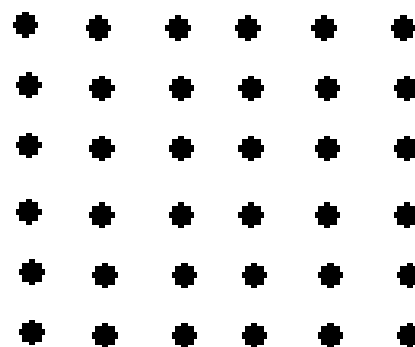
| <i>Предмет дослідження.<br/>Точка, відрізок, промінь,<br/>пряма, площа</i>                                    | <i>Предмет дослідження.<br/>Шкала. Координатний<br/>промінь</i>              | <i>Предмет дослідження.<br/>Кут</i>                                      |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Пофантазуйте разом та створіть малюнок, елементами якого склалися б тільки з найпростіших геометричних фігур. | Пофантазуйте разом та створіть малюнок, одним із елементів якого була шкала. | Пофантазуйте разом та створіть малюнок, який складався б тільки з кутів. |

|                                                                                  |                                                                                              |                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Предмет дослідження.<br/>Многокутники. Рівні<br/>фігури</i>                   | <i>Предмет дослідження.<br/>Прямокутник, квадрат</i>                                         | <i>Предмет дослідження.<br/>Трикутник</i>                                      |
| Пофантазуйте разом та створіть малюнок, який складався б тільки з многокутників. | Пофантазуйте разом та створіть малюнок, який складався б тільки з прямокутників і квадратів. | Пофантазуйте разом та створіть малюнок, який складався б тільки з трикутників. |

**Завдання.** Прямокутний паралелепіпед складено з чотирьох частин, кожна з яких складається з 4 кубів. Запропонуйте модель паралелепіпеда.

**Завдання.** У чотирикутнику ABCN, кут B дорівнює  $75^{\circ}$ , кут ACB –  $30^{\circ}$ , кут CАН –  $50^{\circ}$ . Знайти кут АНС, якщо BC=АН та накресли рисунок.

**Завдання.** У даній решітчастій фігурі відстань між двома сусідніми точками по горизонталі чи по вертикалі дорівнює 1 см. З'єднайте дві точки так, щоб утворити відрізок довжиною 5 см. Скільки таких відрізків можна накреслити на цій решітці?



**Завдання.** Від прямокутника відрізали два трикутники. Трапеція, яка залишилася, має площу  $30 \text{ см}^2$  і одна з її основ вдвічі довша за іншу. Яка сумарна площа двох відрізаних трикутників?

Усі вказані завдання учні можуть виконувати у парі чи групі, використовуючи службу Документи Google

Виконання колективних завдань сприяє удосконаленню організаційно-адаптаційних та соціально-інтерактивних умінь школярів. Це, у свою чергу, дозволяє користуватися організаційними, логікомовленнєвими, пізнавальними і контрольно-оцінними вміннями й навичками для виконання поставлених завдань через особистий досвід культури поведінки в соціальному та природному оточенні, співпраці у різних видах діяльності.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Голодюк Л. Методичні рекомендації щодо формування навчально-дослідницьких умінь учнів 5-6 класів на уроках математики : науково-методичний посібник / Л. Голодюк. – К. : ТОВ «СІТПРІНТ», 2013. – 160 с.
2. Голодюк Л.С. Проектування інформаційно-комунікаційного супроводу уроку. Комп'ютер у школі та сім'ї. 2011. №4. С. 18–20.
3. Голодюк Л. С. Організація навчально-пізнавальної діяльності учнів основної школи у навчанні математики в урочний та позаурочний час: теоретичний аспект: монографія. Кропивницький: ФО-П Александрова М. В., 2017. 404 с.

**Валентина РУДЕНКО,**

*учитель математики*

*Мар'янівської загальноосвітньої школи*

*I-III ступенів Маловисківської районної*

*ради Кіровоградської області,*

*заслужений вчитель України*

## **ФОРМУВАННЯ ТА РОЗВИТОК ПІДПРИЄМНИЦЬКИХ КОМПЕТЕНТНОСТЕЙ ШКОЛЯРІВ ШЛЯХОМ ПРАКТИЧНОЇ ТА ПРИКЛАДНОЇ СПРЯМОВАНOSTІ УРОКІВ МАТЕМАТИКИ**

У наш час в освіті відбувається становлення нової системи навчання. До тепер завданням педагога було навчити дитину, дати їй певний об'єм знань, вкласти в голову учня науковий багаж, яким до цього часу володіло людство. Та за останні роки інформації, законів, знань накопичилось багато, вони швидко змінюються. Школа не встигає вивчити інформацію, а вона стає вже застарілою. Учень в такому разі поглинає знання і коли виходить за межі школи виявляється, що те, чого його навчили, вже непотрібно, бо є багато прогресивніших знань, тож зрозумілим стає обурення молоді людини стосовно марної трати часу на шкільну програму, що не забезпечує його старання бажаним результатом.

У пояснювальній записці до навчальної програми з математики зазначено [4]: «Випускник основної школи – це патріот України, який знає її історію; носій української культури, який поважає культуру інших народів; компетентний мовець, що вільно спілкується державною мовою, володіє також рідною (у разі відмінності) й однією чи кількома іноземними мовами, має бажання і здатність до самоосвіти, виявляє активність і відповідальність у громадському й особистому житті, здатний до підприємливості та ініціативності, має уявлення про світобудову, бережно ставиться до природи, безпечно й доцільно використовує досягнення науки і техніки, дотримується здорового способу життя». Що із переліченого тісно пов'язано з математикою? Який внесок має зробити наука математика у формування ключових компетентностей? Поясню свою позицію з цього питання та шляхи вирішення проблеми.

На жаль, здобувачі освіти сучасних закладів загальної середньої освіти у більшості своїй не зацікавлені у одержанні математичних знань, і цей факт загальновідомий. Особливо це стосується старшокласників, які в силу своїх, часто далеко не блискучих, знань орієнтуються на професії виробничого характеру – токаря, столяра, тракториста, перукаря, теслі, агронома тощо. Часто ми чуємо: « Навіщо мені ваші інтеграли, похідні, вектори чи нерівності, якщо я буду простим роботягою або маю нахил до гуманітарних наук?». Учителі, зазвичай, знають, що математичні знання потрібні людям усіх професій, і не у останню чергу, щоб долучитися до загальнолюдської культури. Правда, варто визнати, що хоч і висловлюють здобувачі освіти подібний абсурд, часто вони прекрасно розуміють, що математика – це не тільки загальні знання формул,

теорем та правил, а і матеріал, який знадобиться їм у практичній діяльності. В принципі, вони не були б так проти, якби вивчення математики не супроводжувалося цілим рядом труднощів, які постійно доводиться долати, особливо при розв'язуванні багатьох нецікавих та нудних вправ. Звідси, якщо у школяра не сформовані дієві мотиви, то навчання перетворюється на суцільну муку. Усунути цю причину можна лише одним шляхом – своєчасно сформувати дієві мотиви. Мотивування учнів передбачає відхід від принципу трьох «Зе»: зазубрив, здав, забув. І одним із способів - є практично-орієнтовані задачі, на яких вчитель має постійно акцентувати увагу, розглядаючи будь-яку тему. Особливе місце займають уроки, на яких здобувачі освіти самі підтверджують, що без математичних знань життєві ситуації не вирішуються, а той, хто ними озброєний отримує перевагу і успіх серед громадян суспільства, навіть якщо і не збирається пов'язувати своє життя із математикою. Це так звані уроки із підприємницьким тлом, на яких учні мають усвідомити, що матеріал, який вивчається, знадобиться не тільки для їх загального розвитку, але і безпосередньо у практичній діяльності.

Прикро, що наші науковці, які створюють сучасні підручники та посібники, цим питанням приділяють мало уваги. Зазвичай учитель, готуючись до уроку, має перебрати цілий ряд посібників, аби підібрати задачу, яка існує у реальному житті і допоможе дитині у конкретній ситуації, а так як час величина змінна, то і виходить, що діти не умотивовані. У навчальних підручниках задач практичного змісту обмаль, об'єм навчального матеріалу з кожним роком збільшується, а час на його вивчення зменшується, як результат – учитель залишається сам на сам із великою купою проблем, серед яких, скажемо відверто, тяжко визначити першочергові. «Навіщо тема потрібна сучасному школяреві?» – відповідь на це питання дадуть уроки, які чітко описують ту чи іншу виробничу ситуацію, або ще кажуть мають яскраво виражене підприємницьке тло. Хай одна на кожному уроці така задача, але вона краплина за краплиною дасть учневі розуміння, що матеріал, який вивчає математика, дійсно згодиться їм у житті, а вчитель, що приділяє увагу даній проблемі забезпечить досягнення складової мети базової середньої освіти – виховання громадянина, що «здатний до підприємливості». Маю певний досвід з даної проблеми.

**Мета.** Щоб підготувати учнів до життя, вміти компетентно вирішувати проблеми, школа повинна особливу увагу звертати на ті питання, з якими можуть зустрічатися її вихованці в сучасному світі. В цьому і полягають практичні цілі навчання математики. Кожному учневі доведеться в майбутньому не раз рахувати, вимірювати, обчислювати площі, об'єми, визначати та оцінювати центральні тенденції певної вибірки, проводити соціологічне опитування або брати у ньому участь та прикидати його похибку, тощо. Тому вчитель має подбати, щоб його учні виконували математичні операції впевнено і швидко, мали уяву та знали підходи до розв'язання кожної такої проблеми.

Робимо акцент на уроках, що формують у школярів позитивно-зацікавлене ставлення до предмету математика, мають **підприємницьке тло**. Вчитель, готуючись до такого уроку, пише не конспект, а готує сценарій, скажемо,

моделює ситуацію, згідно якої здобувач освіти потрапляє в **умови**, де здатність вирішувати життєві проблеми, ухвалювати оптимальні рішення є головними рисами майбутнього члена сучасного техногенного суспільства.

Наведу приклад розробленого проєкту ділової гри, що у своїй основі містить підприємницьку мету, тобто виокремлює ті знання, які доведеться застосовувати у реальному житті. Вивчення теми «Перпендикулярність у просторі» завершилось проведенням уроку з підприємницьким тлом «Геометричні фігури у нашому житті». Підготовка до уроку організована методом проєктів, утворені пари та групи працювали над підготовкою до звітності та виконували певну діяльність.

**Діяльність учителя.** Формулює тему проєкту «Геометричні фігури у нашому житті», ключові, тематичні та змістові питання. Готує презентацію ідей проєкту <https://mathblogadress.blogspot.com/2020/03/blog-post.html> та їх публікацію (оприлюднює своє бачення уроку). Розробляє критерії оцінювання робіт учнів. Допомагає зробити добірку необхідних матеріалів та інтернет-ресурсів. Перевіряє наявність необхідних програмних і апаратних засобів для реалізації проєкту. Готує бланк перевірки знань учнів, показує їм стартову презентацію, знайомить з темами досліджень в рамках цього проєкту. Роздає критерії оцінювання робіт, об'єднує учнів у групи, у даному випадку різнорівневі. Учитель ставить перед кожною групою єдине завдання: «архітектори» повинні розробити план будинку та його дизайн, «будівельники» виготовити макет житла «**Будинок моєї мрії**», «економісти» – розрахувати кількість та якість матеріалів, дізнатися ринкові їх ціни, порахувати вартість житла.

**Діяльність учнів.** Знайомляться з темою проєкту, обговорюють з учителем ключові і тематичні питання. Об'єднавшись у групи, виконують завдання відповідно до обраної ролі. «Архітектори» вивчають технічну документацію, знайомляться з думкою фахівців відповідно до проєкту з різних джерел (інтернет, особиста бесіда, консультація по телефону). «Будівельники» – моделюють будинок з геометричних фігур. Макет будинку представляють в ході захисту проєкту. «Економісти» складають кошторис витратних матеріалів. Результат роботи представляють у вигляді шаблону житла та презентації, відобразивши в ній модель будинку та його складові геометричні фігури. У кожній групі обдаровані учні допомагають тим, у кого є проблеми в навчанні. Оцінюють свої роботи згідно з виданими критеріями, здають роботи та листи самооцінки вчителю. На захисті проєкту представляють результати роботи всіх груп. Кожна група обирає та висвітлює одне із питань, яке впритул пов'язує науку та життєву ситуацію.

#### Запитання до проєкту «Будинок моєї мрії»

1. Що потрібно знати про масштаб при побудові моделі будинку у мініатюрі? Назвіть розміри вашого реального будинку та його макету. Розрахуйте масштаб.
2. Що таке площа, об'єм? У яких випадках при виконанні ремонтних та будівельних робіт слід користуватися поняттям «площа», а коли поняттям «об'єм»?

3. Що потрібно для побудови моделі геометричних тіл, зокрема макету будинку?
4. Які геометричні фігури вивчаються в загальноосвітній школі? Які властивості важливі для кожної геометричної фігури, що складатиме базу вашого житла?
5. Чи існує єдина схема побудови житлового будинку? Наведіть приклад масштабу, який вами використаний при створенні макету.
6. Які фігури використовуються найчастіше при конструюванні архітектурних споруд? Які геометричні фігури використали ви при створенні макету?
7. Як впливає науково-технічний прогрес на використання геометричних тіл в повсякденному житті? Дайте назву «Будинку своєї мрії» та обґрунтуйте чому ви віддаєте перевагу саме такому житлу.
8. Наведіть приклади ринкових цін будівельних матеріалів, які можуть бути використані при створенні будинку вашої мрії? Якими джерелами ви користувалися та хто надавав вам консультацію.

Назва макетів красномовно говорить про пріоритети школярів у виборі «будинку своєї мрії»: «Фортеця-House», «Реаліті-Home», «Дачний котедж», «Казковий світ» тощо. Переможців визначаємо у кількох номінаціях: «дизайн», «екосистема», «ретро», «економ-клас», «євро-стиль», на блозі вчителя «Математика прикладна» можна у деталях познайомитися з цим проєктом <https://mathblogadress.blogspot.com/2020/03/blog-post.html>.

Варто відзначити, що доречною методичною знахідкою при підбитті підсумку уроку стала техніка «Діамантова діаграма». Коротко про її суть. Кожна група отримує набір карток, на яких записано назви цінностей, які повинні знайти своє місце на схемі (додаток 1). Воно залежатиме від рівня важливості цінності для кожного члена команди. Найвищий прямокутник – найважливіша цінність, кожен наступний рівень свідчить про зменшення ваги даного питання у ієрархічній побудові схеми. Під час роботи у групі учні по черзі беруть картки і ведуть дискусію, на яке місце, на їх думку, варто помістити дану цінність. Рішення приймається спільно, але можуть бути випадки, коли цінність переміщується на уже заповнений прямокутник, тоді учасник має обґрунтувати таку зміну позиції. Така технологія впорядковує дискусію та дає можливість вчитись аргументувати власні уподобання та встановити пріоритети.

#### ***Критерії ранжування***

|                                                                      |                                                       |
|----------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| Будівництво всього будинку здійснюється фірмою «під ключ»            | Доставку матеріалів та закупку здійснює фірма         |
| Господарі запрошують будівельників тільки для окремих робіт          | Доставку матеріалів та закупку здійснює власник       |
| Будівництво здійснює власник                                         | Матеріали закуплені у одному гіпермаркеті             |
| Дизайнер виготовляє проєктні креслення з візуалізацією на комп'ютері | Матеріали закупляються у різних будівельних магазинах |

|                                                            |                           |
|------------------------------------------------------------|---------------------------|
| Власник самостійно проектує будинок та вибирає матеріали   | Стіни штукатурять         |
| Прибирання після будівництва здійснює фірма                | Стіни обклеюють шпалерами |
| Власник самостійно прибирає та вивозить залишки матеріалів | Стелі натяжні             |
| Підлога покрита матеріалами з дерева                       | Стелі штукатурені         |
| Підлога із синтетичних матеріалів                          | Вид опалювальної системи  |

Протягом уроку, що проходив у вигляді ділової гри, школярі постійно залучалися до дискусії, яка виникала у результаті різного бачення просторових об'єктів та змагалися у найбільш вдалому застосуванні вивчених теорем, максимально наблизилися до розуміння доцільності вивчення таких математичних та економічних понять як прямокутний паралелепіпед, трикутна призма, циліндр, площа, об'єм, масштаб, ціна, собівартість, кредит та інше. Варто відзначити, що пасивних на проєкті не було. Всі здобувачі освіти взяли участь у звіті груп, виконуючи свою частку навчальної діяльності. Цей практикум став черговим гімном Геометрії, яка змінює світ, оздоблюючи його красою та гармонією, допомагає людині удосконалювати своє життя. Повчальним був і етап завершення проєкту, під час якого школярі написали на стенді відповідь на ключове питання «Для чого ми вивчаємо геометрію?» та розмістили його на чільному місці у кабінеті математики. Серед записів були і такі: «Вивчення геометрії – це вивчення світу, що нас оточує, якщо ми зуміємо пізнати цю науку, то ми зуміємо пізнати світ»; «Геометрія є тією істиною, що живить практику і забезпечує удосконалення сучасного життя»; «Необхідність у геометрії підтверджує кожна архітектурна чи інженерна споруда, численні гаджети та винаходи»; «Хочеш жити у цьому світі – бери геометрію у супутники». Девізом уроку обрані слова Куранта Р.: «Теорія без практики мертва чи безплідна, практика без теорії неможлива чи згубна. Для теорії потрібні головним чином знання, для практики, крім того, і вміння». Десятикласникам вдалося оживити теорію, демонструючи свої цікаві макети, обґрунтовуючи доцільність вибору дизайну будинку, опираючись на певні пріоритети, що уже склалися у їх уяві та світобаченні. Здобувачі освіти закріпили навички працювати у команді, отримали досвід дослідницької роботи, моделювання об'єктів та геометричних фігур.

Прикладом навчального проєкту, що розкриває перед учнями прикладний характер тригонометрії і мотивує до її вивчення, є організований вебквест для 10 класу «Тригонометричний серпантин» (<https://trigserpantin.blogspot.com/>), ключовим питанням якого є розв'язання проблеми **«Що спільного між гойдалкою, музикою і світлом?»**. Не останню роль у зацікавленості школярів проєктом стала мотивація у вигляді рекламного проспекту, який отримав кожен учень «Не один раз ви переймалися запитаннями «Де у житті я застосую ці синуси чи косинуси?». Прийшов час дати відповідь на це та інші питаннями такого ж плану. Квест-гра «Тригонометричний серпантин» стартує 15 січня. Приєднуйтеся, завдання вебквесту знайдете за

адресою <https://trigserpantin.blogspot.com/>» Завдяки поширенню інформації у інтернет-мережі до участі у цікавій пізнавальній грі долучилися учні із інших шкіл. Організовано розподіл ролей – експериментатори, графологи, дослідники. Школярі працювали із інтернет-джерелами:

- Тригонометрія у науці і техніці;
- Функції синус і косинус у природі;
- Коливальні процеси у природі і техніці;
- Дослідження звукових коливань.

Як видно із назв інформаційних блоків метою даного пошуку є інтеграція знань з математики, фізики, інформатики, географії та інших наук. Учні вивчали систему динамічної математики GeoGebra, що сприяє удосконаленню вмінь будувати графіки тригонометричних функцій з допомогою програмних засобів. Як результат на веб-блозі «Тригонометричний серпантин» створений віртуальний графічний альбом, що став набутком та результатом даного пошуку. Також на останньому його етапі очікуваними наслідками стали відповіді від учасників на ключове питання у вигляді відео-роликів, відео-презентацій, веб-публікацій, інших Інтернет повідомлень. Активність школярів свідчить про зацікавленість у такій діяльності, сприяє вищому рівню освоєння навчального матеріалу. Очікувані результати: оволодіння програмними засобами GeoGebra, користування електронною адресою E-mail, створення електронного альбому із графіками, освоєння Інтернет-сервісів.

Учителі середніх класів можуть зробити свій внесок у розвиток підприємницьких компетентностей школярів, замінивши відірвані від життя задачі на ті, які дали б змогу учневі уявити себе у ролі підприємця чи, з рештою, творця родинного бюджету. Так можна організувати справжній квест у п'ятому класі, вивчаючи тему «Відрізок. Вимірювання відрізків». Вчителі добре знають стандартну для підручника задачу: «На відрізок завдовжки 10 см поставили точки на відстані 1 см одна від одної. На скільки частин поділився відрізок? Скільки виявилось точок?» Організовуємо ділову гру. Формулюємо задачу.

**Задача:** Ваша родина вирішила поставити дерев'яний паркан завдовжки 20м. Допоможіть виконати обчислення та знайдіть відповіді на питання:

1. Скільки стовпців для паркану потрібно придбати, якщо ставити їх на відстані 2 м один від одного (розмірами стовпців знехтуйте).
2. Скільки грошей витратить сім'я на придбання матеріалів для паркану, якщо вартість одного стовпа – 280 грн., а секції між стовпами 360 грн.?
3. Будівельники повідомили, що мають семигодинний робочий день з перервою на обід з 11.00 до 12.00. Якщо робота розпочнеться о 8.00, то о котрій годині робітники завершать будівництво паркану?
4. Скільки грошей слід заплатити будівельникам, якщо установка одного стовпчика коштує 80 грн., а секції 50 грн.?

У програмі з математики для 6 класу [4] у темі «Раціональні числа та дії з ними» вказано, що учень/учениця «Розв'язує сюжетні задачі на: .розрахунок власних та родинних фінансів, комунальних платежів, уміння розпоряджатися власними коштами, в простих ситуаціях оцінювати очікувані та реальні витрати тощо». Готуючи учнів 5-6 класів до проєктної діяльності, можна запропонувати

їм порівняти витрати та дохід сім'ї за місяць, що минув. Цікавими для здобувачів освіти середніх класів будуть задачі на дії з десятковими дробами, що пов'язані з обміном валют.

**Дидактична гра «У банку»** [5]. Двом учням пропонуються однакові картки з діалогом, у якому вони мають заповнити пропуски. Працюють окремо один від одного, а після заповнення карток – у парі (один грає роль працівника банку, а інший – клієнт). Озвучують діалог та додається курс валют, що існує на даний момент. Варіанти карток:

**№1** Банкір: Вітаю Вас у нашому банку. Чим я можу допомогти?

Клієнт: Я хочу обміняти іноземну валюту у гривні.

Банкір: Яка у Вас валюта?

Клієнт: 40 \$

Банкір: Загальна сума, яку Ви отримаєте \_\_\_\_\_ грн.

Клієнт: Я з Вами \_\_\_\_\_ (згоден, не згоден).

**№2** Клієнт: Добрий день. Я хочу здійснити обмін валют. Маю 800 грн. і бажаю отримати євро.

Банкір: Ви отримаєте \_\_\_\_\_ євро.

Клієнт: Скільки Ви сказали? А за моїми підрахунками я отримаю \_\_\_\_\_ євро. Чому?

За допомогою таких рольових ігор можна організувати роботу в парах, привчати учнів перевіряти один одного, а надалі варто очікувати, що і самі здобувачі освіти будуть складати аналогічні діалоги. Цікавими для школярів середніх класів можуть стати теми, присвячені закупівлі товарів у розстрочку, за знижками та по акціях.

Підприємницьку компетентність можна розвивати також і через форми роботи на уроці, застосовуючи методи, які спонукають школяра бути ініціативним, активним, комунікабельним, передбачливим, відважним, впевненим у своїх можливостях, якщо ми прагнемо формувати компетентності, а не простого відтворення знань. У одному із юридичних документів Юнеско сформульовано важливий тезис: *вчитися, щоб бути, щоб знати, щоб діяти, щоб жити спільно*. Вчитися, щоб діяти – це основний принцип Євросоюзу, визначник якості сучасної школи, а отже і сучасного вчителя. Школа повинна озброїти здобувачів освіти знаннями, щоб вони могли практично в конкретних ситуаціях аналізувати різні твердження, явища, проблеми, виділяти з них важливіші, систематизувати та класифікувати. Пропагування і поширення підприємницької тематики і формування підприємницьких позицій та підприємливого способу мислення – важливий крок до успішної України.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Васильєва Д. В. Розвиток фінансової грамотності учнів на уроках математики / Д. В. Васильєва, Н. І. Василюк // Математика в рідній школі. – 2017. – №9. – с. 2-7.

2. Васильєва Д. В. Збірник задач з математики. 5-9 класи: Наскрізнi лiнii компетентностей та їх реалiзацiя / Д. В. Васильєва, Н. І. Василюк. – К.: Видавничий дiм Освiта», 2017. – 112 с.

3. Гельбак А.М. Формування підприємливості учня як ключової компетентності для життя: [методичні рекомендації] / А.М. Гельбак. – Кропивницький: КЗ «КОІППО імені Василя Сухомлинського», 2017. – 24 с.

4. Костюк С.А. Збірник прикладних задач (електронний ресурс) <https://vseosvita.ua/library/zbirnik-prikladnih-zadac-51690.html>

5. Математика. 5-11 класи: навчальні програми, методичні рекомендації про викладання навчальних предметів у закладах загальної середньої освіти у 2019/2020 навчальному році, орієнтовні вимоги до оцінювання навчальних досягнень учнів / Укладач Р. В. Гладковський. – Харків: Вид-во «Ранок», 2019. – 160 с.

6. Голодюк Л. С. Організація навчально-пізнавальної діяльності учнів основної школи у навчанні математики в урочний та позаурочний час: теоретичний аспект: монографія. – Кропивницький: ФО-П Александрова М. В., 2017. – 404 с.

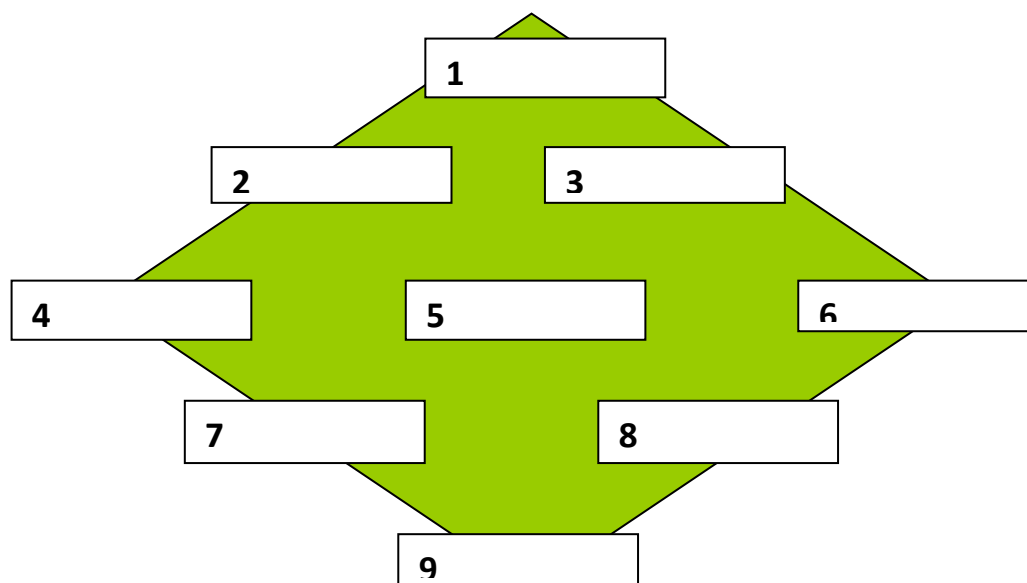
7. Голодюк Л.С. Завдання дослідницького характеру з математики // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. Випуск 20 (353). – Черкаси: ред-вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. – С. 88–96.

8. Сидорова О.П. Використання задач прикладного змісту. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://ternivka-mo.edukit.dp.ua>

9. Корнієнко Т. Л., Фіготіна В. І. Матеріали за курсами «Алгебра і початки аналізу» та «Геометрія» (рівень стандарту). ТОВ Видавництво «Ранок», 2013.

10. Уроки з підприємницьким тлом. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://sae-ukraine.org.ua/ua/resource/uroki\\_z\\_pidpriemnytskim\\_tlom](http://sae-ukraine.org.ua/ua/resource/uroki_z_pidpriemnytskim_tlom)

## Додаток 1



**Олена СВИРИДЕНКО,**  
*вчитель математики*  
*Центральноукраїнського наукового*  
*ліцею-інтернату*  
*Кіровоградської обласної ради,*  
*заслужений вчитель України*

## **МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ НАВЧАННЯ В КЛАСАХ МАТЕМАТИЧНОГО ПРОФІЛЮ**

В умовах інтеграції національної системи освіти України у світовий освітній простір першочерговим завданням вітчизняної школи є створення середовища для розвитку й саморозвитку молоді на основі реалізації її внутрішнього потенціалу. Відомо, що успішне навчання можливе тільки при повноцінному насиченому житті вчителя та його учнів, створенні креативного освітнього простору в навчальному закладі. В цьому сенсі я можу сказати, що працюю в навчальному закладі, де створений саме такий творчий простір. Він є вагомим чинником інтегративного впливу на процес розвитку та самореалізації компетентної особистості, де учень, з часом, стає джерелом такого простору, де б він не жив, щоб він не робив. Навчання в 10-11 класах ліцею здійснюється за двома профілями: математичним та історичним. Протягом дворічного навчання здійснюється, по-перше, якісна довузівська підготовка учнів з різним рівнем загальноосвітньої підготовки, по-друге, створюються умови для здобуття освіти понад державний мінімум (науково-дослідницька робота в МАН, підготовка до предметних олімпіад та конкурсів).

Потужна матеріально-технічна база, креативний освітній простір, який впливає на процес розвитку та самореалізації компетентної особистості кожного учня ліцею, ґрунтовна підготовка учителів до кожного уроку та збільшення часу активної самостійної роботи учнів протягом повного дня – це складові успішного та результативного навчання ліцеїстів, серед яких багато переможців предметних олімпіад та конкурсів різних рівнів.

Профільне навчання – це система, яка дозволяє за рахунок змін в структурі, змісті та організації освітнього процесу більш загально враховувати інтереси, нахили та здібності учнів, створювати умови для навчання старшокласників у відповідності з їх професійними інтересами та намірами у відношенні продовження освіти [1].

Профільне навчання в старшій школі – один із найважливіших компонентів модернізації загальної середньої освіти, спрямований на забезпечення індивідуальних потреб школярів, які виявляють підвищений інтерес до окремих предметів, для професійного самовизначення, успішної соціалізації, полегшення адаптації до самостійного життя, виховання відповідальності за прийняття рішень та на формування єдиної життєвої світоглядної, наукової, культурної та професійної компетентності учнів, що забезпечить їх подальше самовдосконалення та самореалізацію [2].

На наше переконання, пріоритетним напрямом діяльності вчителя при викладанні в профільних математичних класах є розвиток здібностей учнів при розв'язуванні завдань контрольних робіт МАН, математичних турнірів, олімпіад, вивчення нових галузей математики, читання науково-популярних мінілекцій для однолітків.

Досвід роботи, над проблемою «Формування математичної компетентності учнів шляхом організації їх самостійної роботи у процесі вивчення математики» є логічним продовженням роботи всього педагогічного колективу над формуванням діяльнісно-творчої компетентної особистості здобувачів освіти. Основна ідея досвіду – збільшення частки активної самостійної роботи кожного учня в умовах високої концентрації уваги й активності.

Практична реалізація ідеї здійснюється шляхом дотримання певних правил навчання, серед яких найважливіші такі: ширше використовувати у навчанні практичні ситуації, вимагати від учнів самостійного бачення, розуміння і осмислення розходження між фактами, що спостерігаються в житті, та їх науковим поясненням; необхідність привчати учнів думати і діяти самостійно.

Як краще сформувати у школяра вміння вчитись? Як не тільки надати учневі необхідний об'єм знань, а й навчити ними користуватись у повсякденному житті? Ці питання спонукали мене, як педагога, шукати прості шляхи практичної реалізації принципу свідомості й активності навчання. Людина, яка сама здатна прийняти рішення, завжди буде трудитися краще і продуктивніше, завжди зможе пристосовуватись до нових потреб життя, активно діяти, оперувати й управляти інформацією. В цьому сенсі дуже близький вислів Сократа «Учитель і мудрець нічому не вчать, а тільки вказують шлях до істини».

Той факт, що потяг молоді до вивчення природничо-математичних дисциплін знизився останнім часом, пов'язаний з соціальними проблемами сучасного суспільства. Тобто на сьогодні дуже сумнівно, що рівень знань з цих дисциплін, а також вміння і практичні навички з відповідних предметів, будуть необхідні для найближчої майбутньої діяльності молоді в Україні.

Раніше, набуття глибоких знань і навичок у галузях фізики, математики, біології, хімії гарантували робоче місце у провідних науково-дослідних інститутах і передових наукоємних виробництвах – тобто престижну добре оплачувану роботу. Сьогодні ці науки – заклик повернення до природи від нещадного використання природних багатств та різноманіття явищ заради споживчої користі людини. Науці слід розробляти і пропонувати державі нові, екологічно чисті технології, а для цього необхідно орієнтуватись у вже існуючих. Все це можливо тільки на основі глибоких знань природничо-математичних наук, база яких закладається у школі.

Як вчитель математики, свою роботу спрямовую на розвиток інтелектуальних здібностей учнів. Це можна реалізувати:

- на різних етапах уроку;
- в позакласній роботі (предметні тижні, КВК, математичні турніри);
- в проведенні факультативних занять;
- у впровадженні спецкурсів;

- написанні творчих робіт;
- в підготовці до участі в олімпіадах.

Основне спілкування з обдарованими учнями відбувається на уроці. Організація роботи з такими здобувачами освіти проходить під девізом «Навчання загострює розум і тренує пам'ять». Цю систему можна викласти за такими основними положеннями:

- **Подання теоретичного матеріалу.** Чим більше інформації повідомляється вчителем і опрацьовується в класі, тим більше її відтворюється дітьми. Високий інтелект реагує дуже швидко на подання інформації, тому постійно треба експериментувати з формами: науковий рівень, окремими порціями, кількість повторень, використання сучасних проблем життя, моделювання окремих фактів.

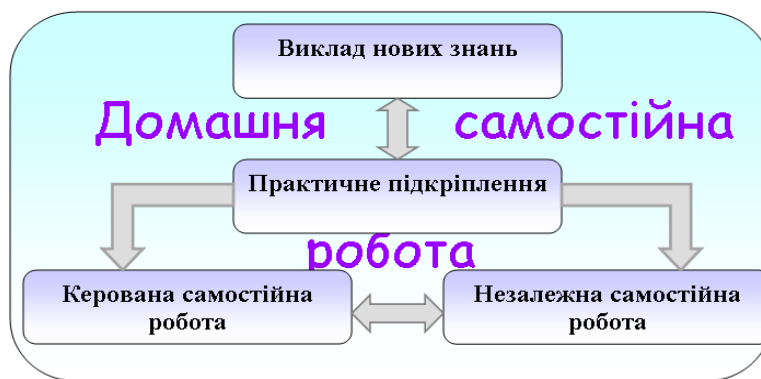
- **Організація самостійної роботи учнів на уроці.** Рівень навчання, глибина знань і навиків мають бути різними для різних категорій учнів відповідно до їх можливостей і нахилів. Організація самостійної роботи здобувачів освіти вимагає від учителя вмілого керування процесом їх розвитку, усвідомлення змін не тільки в учнях, а й у собі, та більш активного навчання порівняно з навчанням тих, кого він навчає. Вважаю, що інтенсивне спостереження за роботою кожного здобувача освіти на початковій стадії вивчення математики, збільшення тривалості виконання практичних завдань та зменшення тривалості проміжків між самостійною роботою учня – є вагомим чинником успішного навчання.

- **Математична задача.** Навчання бажано проводити у формі повторного відкриття, а не простою передачею ідей. Організація навчально-дослідницької роботи учнів при роботі над математичною задачею приводить до суттєвих результатів.

- **Геометрія – необмежений простір для розвитку логічного мислення.** Розв'язування геометричних задач зводиться до логічного та послідовного викладу розв'язку задачі, розвитку просторового уявлення здобувачів освіти, уміння застосовувати знання на практиці. Незручність при викладанні геометрії є витрачання часу на виконання малюнку до задачі (образотворчі можливості у всіх різні), і, найчастіше, обчислювальна частина є дуже трудомісткою. Тому здобувачі освіти «не встигають» отримати навички розв'язування задач на уроці. Тут на допомогу приходять сучасні технічні засоби (мультимедійна інтерактивна дошка).

Викладання в класах математичного профілю вимагає від вчителя великої підготовчої роботи. В цих умовах ефективною є лекційно-практична система навчання. Працюючи за цією системою, маємо змогу реалізувати загально визнані незмінні дидактичні принципи: свідомість і активність, наочність, систематичність та послідовність, науковість, міцність знань, доступність, зв'язок теорії з практикою.

У своїй праці використовуємо схему організації ефективної самостійної роботи учнів.



На першому етапі освітнього процесу встановлюємо рівень залишкових знань та умінь. Це найчастіше бліц-опитування, тест на швидкість, короткочасна самостійна робота з елементами домашнього завдання, що дозволяє встановити рівень готовності учнів до успішного продовження навчання. Способи перевірки – швидкі (опорні картки, демонстрація відповідей, комп’ютерна перевірка тощо). Самостійність максимальна, забороняється користуватись допоміжними матеріалами. (Використовуємо систему усних вправ та тестових завдань до кожної теми).

На етапі викладу нових знань пропонуємо мінілекції, намагаючись максимально прояснити інформацію за допомогою наочних засобів (опорні схеми, ілюстрації, комп’ютерні демонстрації). Кожен крок обов’язково ілюструється прикладами. В процесі підготовки до лекції перед вчителем постають завдання: який теоретичний матеріал освітити, яким чином це зробити, який матеріал піднести самому, який залишити учням для самостійного вивчення, на чому загострити увагу тощо. При цьому важливо врахувати принципи розвиваючого навчання:

- викладання на високому рівні складності;
- провідна роль теоретичних знань;
- вивчення матеріалу швидким темпом;
- усвідомлення учнями самого процесу навчання;
- систематична робота над розвитком усіх здобувачів освіти.

Ступінь самостійності учнів досягається раціональним співвідношенням усного викладу («готових» знань) та роботи з підручником і довідковою літературою (самостійних «відкриттів»). Мотивація здійснюється створенням проблемної ситуації протягом всього заняття. Етап завершується перевіркою розуміння опрацьованого навчального матеріалу, тобто відбувається згортання інформації. Здобувачі освіти самостійно, але користуючись певними алгоритмами, переліком питань, опорними схемами, пригадують всі поняття, терміни, доведення, логічні зв’язки.

*(Використовуємо авторські мультимедійні презентації та педагогічні програмні засоби, рекомендовані МОН України).*

Практичні заняття умовно розділяю на:

- Уроки розв'язування і розбору базисних задач (керована самостійна робота).

Ці задачі (їх 8-10 по темі) ретельно відбираються, визначаючи вміння, якими повинні володіти учні. При цьому приділяється увага в першу чергу ідеям і методам розв'язування, а в другу – оформленню. Практичні завдання виконуються спочатку всім класом, потім в підгрупах і парах. Зворотній зв'язок з учнями підтримую за допомогою складання алгоритмів, схем, таблиць, класифікації методів, знаходження оптимальних шляхів розв'язання. Під час таких занять використовую інтерактивну вправу «Мозковий штурм», де виступаю в ролі індивідуального помічника (використовуємо систему опорних задач до кожної теми).

- Уроки-практикуми набуття навичок розв'язування вправ по темі (незалежна самостійна робота), на яких збільшується частка самостійної роботи учнів, використовуються збірники завдань для вступників до вищих навчальних закладів, матеріали олімпіад різного рівня.

Мета цих занять – закріпити нові знання, забезпечити запам'ятовування на тривалий період часу. На цьому етапі застосовую відтворюючі самостійні роботи за зразком. У процесі виконання такої роботи пізнавальна діяльність здобувачів освіти спрямована на оволодіння основними уміннями і навичками. Подібні роботи містять різні вправи за зразками або типовими алгоритмами з метою удосконалення техніки обчислень, розв'язування типових задач. Міра самостійності визначається індивідуально для кожного учня. Здобувачі освіти мають можливість використання допоміжної літератури, довідників, конспектів лекцій. Свою роль на даному етапі визначаємо як контролера рівня точності виконання завдань.

*(Використовуємо систему самостійних і контрольних робіт до кожної теми).*

Цілком самостійна практика розпочинається в класі і продовжується вдома. Обсяг оптимальної тренувальної роботи, необхідної для набування міцних навичок визначаю в залежності від складності теми та індивідуального попиту здобувачів освіти, тобто не збільшенням обсягу вправ, а системою – основою подальшого підвищення міцності знань. На протязі вивчення всієї теми застосовую індивідуальні домашні роботи. Ці завдання довгострокові і виконуються на заліковий урок. Вони дають змогу учневі усвідомити процес навчання, самоудосконалювати вміння і навички відповідно до теми. Під час складання таких робіт використовуються збірники завдань для зовнішнього тестування випускників та завдання ВНЗ для тестування абітурієнтів.

Найвищий ступінь самостійності здобувачів освіти досягається у процесі підготовки до олімпіад, написанні наукових робіт та участі у проєктній діяльності. Здобувач освіти проходить ряд етапів, протягом яких змінюється ступінь його самостійності при роботі з інформацією: її пошуком, усвідомленням, засвоєнням, перетворенням та творчим використанням. На різних етапах виявляються учні, які мають нахил до дослідницької діяльності, тобто здатні до самостійних спостережень, критичного аналізу та отримання

власних висновків. В результаті їх наукові роботи мають самостійно створені системи задач, де всі зусилля спрямовуються на пошук помилкових тверджень та узагальнення методів розв'язання чи знаходження ефективних шляхів; або розв'язування однієї задачі, де обов'язкове критичне мислення і, де зусилля автора спрямовуються на знаходження оптимального способу розв'язування.

У процесі самостійного виконання різних вправ та завдань відбувається закріплення математичних понять, формуються і вдосконалюються обчислювальні навички та навички логічного і послідовного викладу розв'язання задачі, набуваються уміння виконання геометричних побудов, розвивається просторове уявлення учнів, уміння застосовувати знання на практиці, використовувати свій досвід під час розв'язування задач тощо. Водночас, виховуються такі якості характеру, як вміння ставити перед собою проблемну задачу, а потім і проміжну мету для покрокового її розв'язування; цілеспрямованість в досягненні мети; віра в свої можливості, впевненість в своїх розумових здібностях; самостійність у виборі мети та засобів досягнення цієї мети; відсутність дискомфорту та рішучість у ситуації «вибору»; бажання, а потім і звичку брати на себе вирішення «проблеми вибору» [9].

Згадаємо слова відомого педагога-математика Д. Пойа: «Математична задача іноді настільки ж захоплююча, як кросворд, а напружена розумова робота може бути настільки ж бажаною вправою як і стрімчастий теніс. Людина, яка отримала задоволення від занять математикою, не швидко його забуває, і ось тоді, ймовірно, математика займе визначне місце в її житті: як предмет, любительського захоплення або як інструмент в його професійній роботі, як професія або як шлях до особистого успіху» [3, с. 16]. Цими словами ми розпочинаємо семінар для старшокласників з підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання навчальних досягнень з математики «Як розв'язати задачу?!». Здобувачі освіти знайомляться з раціональною технологією розв'язування математичних задач, розробленою американським вченим Д. Пойа. Головна мета цієї технології – розвинути здібності учня, щоб він у майбутньому зміг розв'язувати задачі самостійно.

На кожному етапі розв'язування задачі виділяємо питання, які, можливо, ставить учитель (якщо робота учня керована) або учень подумки (якщо робота учня над задачею повністю самостійна). Майстерно підібрані прислів'я є вагомим стимулом для досягнення успіху. В процесі розв'язування задачі вчитель, намагаючись надати дієву, обережну допомогу, повинен зрозуміти, що відбувається в голові здобувача освіти та поставити влучні питання чи вказати певні кроки, до яких він зміг би додуматись самостійно.

Прикладом таких підходів може бути робота над задачею, взятою із збірника завдань для підготовки до ЗНО під редакцією Ю. О. Захарійченка.

**Задача.** Два надзвичайно пунктуальних джентльмени Джон та Ендрю домовились зустрітись протягом п'яти хвилин біля Біг Бена. За королівським етикетом кожен із них чекає іншого тільки 3 хвилини, після чого йде. Знайдіть ймовірність того, що Джон та Ендрю зустрінуться, якщо кожен із них час свого приходу обирає навмання [5, с 432].

Продemonструємо, як можна скерувати розумову діяльність учня в процесі розв'язування цієї задачі.

*I. Розуміння постановки задачі* (задачна ситуація, що важко формалізуються).

Що невідомо? Що дано? В чому полягає умова? Чи можливо задовольнити умові? Чи достатньо або недостатньо даних умови для визначення невідомого? Або суперечливе? Або надмірне?

*II. Складання плану розв'язання* (побудова математичної моделі).

Скільки невідомих можна ввести? В яких межах знаходяться невідомі? А які межі для них установлені в разі зустрічі джентльменів? Чи можна знайти математичну модель для одночасної зміни двох величин? Чи можлива графічна інтерпретація задачі?

1. Складання математичної моделі (нерівність  $|x - y| \leq 3$ )

Якщо ми отримаємо графічну модель задачі, як можна застосувати знання про геометричне визначення ймовірності події.

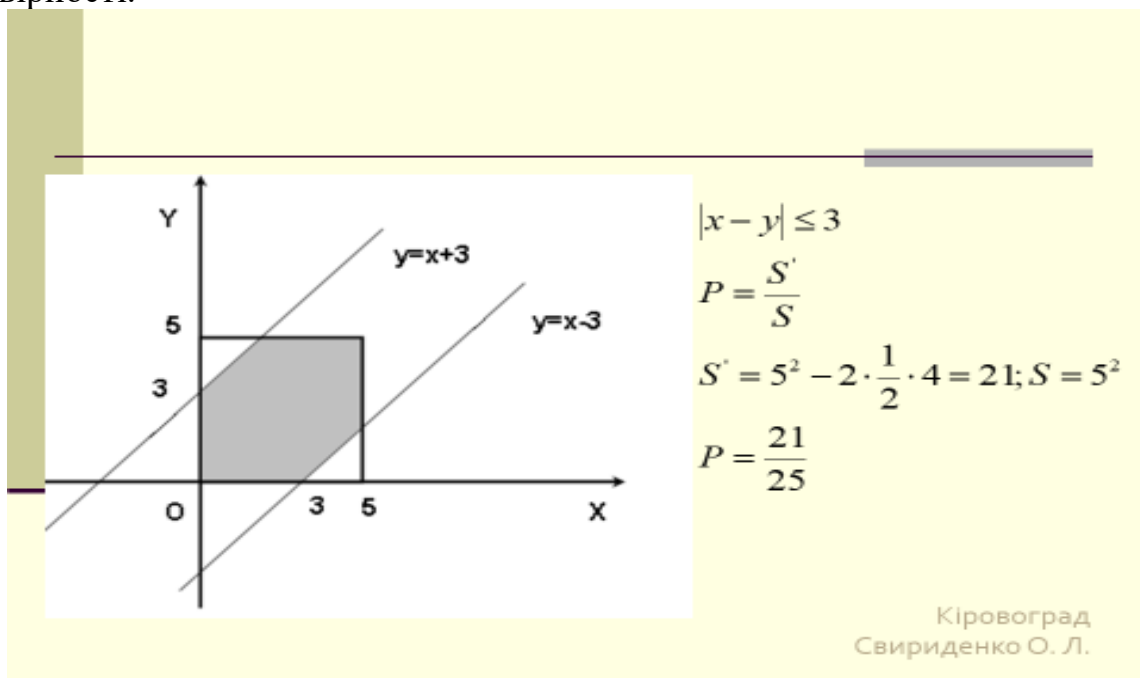
2. Множина подій, які сприяють даній події, розуміють як належність точки даній фігурі  $F$  всередині множини відомої міри. Ймовірність події  $A$  обчислюється за формулою  $P(A) = \frac{\mu_A}{\mu}$ , де  $\mu_A$  – міра множини  $A$ ,  $\mu$  – міра множини  $F$ .

3. Графічний спосіб розв'язання нерівності  $|x - y| \leq 3$

4. Інтерпретація відповіді.

*III. Реалізація плану*

На цьому етапі відбувається композиція знань з різних розділів математики: розв'язування нерівності  $|x - y| \leq 3$  графічним способом; знаходження площ многокутників; застосування геометричного означення ймовірності.



#### *IV. Погляд назад*

Як можна перевірити хід розв'язання? Чи можна отримати відповідь з першого погляду? Як можна використати результати цієї задачі для розв'язування інших задач?

Підсумком до цього заняття стають слова Д. Пойа: «Розв'язування задач – практичне мистецтво, подібне до плавання, катання на лижах чи гри на фортепіано; навчитись його можна, тільки беручи приклад з кращих зразків та постійно практикуючись... Пам'ятайте: якщо ви хочете навчитись плавати, то сміливо входьте в воду, а якщо хочете навчитись розв'язувати задачі, то розв'яжуйте їх».

Нині наше суспільство потребує спеціалістів з чітким логічним мисленням, глибокими математичними знаннями та вміннями бачити й реалізовувати можливості застосування математики в різних конкретних ситуаціях. Тому ґрунтовна математична освіта в сучасних умовах відіграє базову роль у підготовці майбутніх фахівців у галузі математики, техніки, комп'ютерних та інформаційних технологій (ІТ), виробництва, економіки, управління [4].

Якість математичної підготовки молодого покоління є індикатором готовності суспільства до соціально-економічного розвитку, мобільності особистості в освоєнні та впровадженні нових технологій, розумінні принципів будови і правильного використання сучасної техніки, сприйманні наукових і технічних ідей. Якісна математична підготовка є важливою складовою професійної компетентності сучасного фахівця, який повинен володіти методами математичного моделювання, оптимізації, прогнозування, кількісного та якісного аналізу, збору і обробки інформації. Особливо гостро проблема математичної підготовки постає для ІТ-фахівців, оскільки основу програмування складає не тільки знання певної мови програмування, а й уміння побудувати математичну модель, знання ефективних алгоритмів, процесу створення алгоритмів для розв'язання поставленого завдання [6, с.8].

Як підготуватись до зовнішнього незалежного оцінювання знань з математики? В сучасному світі ми всі проходимо через якісь випробування, іспити, стреси, щоб зайняти своє місце в суспільстві. Треба зазначити, що людина хвилюється тоді, коли виникає ситуація, до якої вона не готова. І тому будь-який «експромт» повинен бути добре підготовлений.

Схема підготовки до ЗНО містить три основні етапи:

1) перевірка та корегування рівня теоретичної підготовки учня з теми (усні та письмові заліки, складання здобувачем освіти власних та використання готових узагальнюючих схем, алгоритмів і таблиць);

2) розв'язування тренувальних тестів, які містять різні вправи за зразками або типовими алгоритмами (комп'ютерне тестування, індивідуальна та групова робота над системою тестів);

3) розв'язування задач з повним обґрунтуванням.

Найбільшу увагу приділяємо саме третьому етапу, на якому діємо за відпрацьованою схемою:

- Знайомство здобувачів освіти з технологією розв'язування нестандартних математичних задач, розробленою американським вченим Д. Пойа (семінар «Як розв'язувати задачу?!», пам'ятка).

- Об'єднання геометричних задач за методом ключової задачі (система ключових задач).

- Використання комп'ютерного моделювання при розв'язуванні множини стереометричних задач за одним малюнком (система комп'ютерних моделей на перерізи многогранників та комбінації многогранників і фігур обертання).

- Пошук розв'язування задач різними способами (довгострокові завдання «Знайди прості та красиві розв'язання!»).

В ідеалі процес відбувається поступово за сценарієм: здобувач освіти протягом усього періоду навчання шкільному курсу математики за принципом «поспішай повільно» вивчає кожну тему окремо, тобто поступово створюючи загальну систему знань. Глибше узагальнення та повторення відбувається в період умовно названий «підготовка до ЗНО» (глядач, який прийшов до музею, щоб помилуватись картинами, створеними художниками і дуже близько підійшов до витвору мистецтва мало що розуміє. Але як тільки він відходить на певну відстань, його сприйняття стає осмисленим).

На моє переконання, пріоритетним напрямом діяльності вчителя при викладанні в профільних математичних класах є розвиток здібностей здобувачів освіти при розв'язуванні завдань контрольних робіт МАН, математичних турнірів, олімпіад, вивчення нових галузей математики, читання науково-популярних мінілекцій для однолітків.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Голодюк Л. С. Організація навчально-пізнавальної діяльності учнів основної школи у навчанні математики в урочний та позаурочний час: теоретичний аспект: монографія. Кропивницький: ФО-П Александрова М. В., 2017. 404 с.

2. Нова українська школа: концептуальні засади реформування середньої школи / редкол. – К. : МОН, 2016. – 38 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://base.kristti.com.ua/?p=1129>.

3. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание / Д. Пойа; под ред. И. М. Яглома; пер. с англ. – М. : Наука, 1976. – 448 с. <https://imzo.gov.ua/stem-osvita/>

4. Повний курс математики в тестах : У 2 ч. Ч. 1 : Різноміснє завдання / Ю. О. Захарійченко, О. В. Шкільний, Л. І. Захарійченко, О. В. Шкільна. – Харків : Вид-во «Ранок», 2018. – 496 с.

5. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ: Монографія. – Х.: Факт, 2005. – 360 с.

6. Барановська О.В. Інформаційна компетенція – ключова компетенція випускника профільної школи / О.В. Барановська [Електронний ресурс]. – Режим доступу:

<http://www.cippe.edu.ua/forum/viewtopic.php?p=140&sid=9cd92158283eb260bf0aa64b6bc49bea>.

7. Інтернет для освіти [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [http://www.library.kherson.ua/teach/stady\\_teach.html](http://www.library.kherson.ua/teach/stady_teach.html).

8. Підласий І.П. Продуктивний педагог. Настільна книга вчителя. Харків: Основа, 2010. — 360 с. — (Настільна книга).

9. Голодюк Л.С. Завдання дослідницького характеру з математики. Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. Випуск 20 (353). – Черкаси: ред-вид. від. ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2015. – С. 88–96.

**Оксана КУРЛОВА,**

*директор комунального закладу  
«Первозванівське навчально-виховне  
об'єднання «Загальноосвітня школа  
I-III ступенів дошкільний навчальний  
заклад» Первозванівської сільської ради  
Кіровоградського району Кіровоградської  
області, вчитель математики*

## **ОРГАНІЗАЦІЯ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ УЧНІВ ЯК ЗАСІБ ФОРМУВАННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КОМПЕТЕНТНОСТІ**

У педагогіці проблема пізнавального навчання на сьогодні залишається досить актуальною. Головне завдання полягає в пошуку методик, які спонукають потребу учнів до подальшого пізнання і бажання до самостійної діяльності. Психологи під пізнавальною діяльністю розуміють процес відображення в мозку людини предметів та явищ дійсності. Вона складається із серії пізнавальних психічних процесів: відчуття, сприймання, уваги, пам'яті, уяви, мислення і мовлення. Важливу роль у пізнавальній діяльності людини відіграє пам'ять, яка своєрідно відображає, фіксує й відтворює те, що залишається в свідомості в процесі пізнання. Складовою пізнавальної діяльності є емоційні та вольові процеси, які спонукають особистість до активних дій, вольових актів. Абстрактне пізнання є вищою формою людського пізнання, формування якого безпосередньо залежить від мислення та уяви. Від пізнавальних здібностей людини: уваги, пам'яті, сприйняття, мислення, уяви залежить рівень і результат творчого розвитку особистості [6].

З розвитком інформаційного суспільства процес здобуття знань потребує постійного оновлення, уміння інтегрувати їх у будь-які сфери людської діяльності, що вимагає від людини пізнавальної активності та самостійності. Під пізнавальною самостійністю прийнято розуміти прагнення і вміння самостійно мислити, застосовувати знання в нових ситуаціях, бажання шукати і розуміти нову навчальну інформацію, мати незалежність власних суджень і критичний підхід до різноманітної інформації.

Аналіз праць відомих педагогів демонструє, що в психолого-педагогічній науці відсутній єдиний підхід до визначення поняття «пізнавальна активність». Але спільним є розуміння, що активність навчання формується в процесі пізнавальної діяльності, характеризується прагненням до пізнання, розумовим напруженням та інтересами дитини.

Ядром пізнавальної діяльності є пізнавальний інтерес. Успішне формування пізнавальних інтересів учнів залежить від доцільної організації їх пізнавальної діяльності, яка активізує психічні процеси особистості, стимулюючи появу пізнавального інтересу як важливого мотиву учнівської діяльності. Тому процес викладання необхідно спрямовувати на розвиток пізнавальних інтересів, які тісно пов'язані з розвитком навчальних умінь і навичок, необхідних для вирішення пізнавальних завдань. Бо без опанування школярем пізнавальних умінь його інтерес не буде глибоким. Сформованість подібних умінь збагачує

процес накопичення знань, дає можливість учню самотійно виконати пізнавальну роботу, значно підвищує можливості пізнання, додає віри в інтелектуальні сили, створює умови для розвитку пізнавального інтересу та самоствердження особистості [1].

Психологічні дослідження доводять, що потенційна творчість притаманна кожній дитині. Цілком слушною є думка, що творчості, як і будь-якій іншій діяльності, можна навчитися. Такий підхід передбачає з боку вчителя врахування індивідуальних особливостей учнів, моделювання навчального процесу, його прогнозування, чітке планування, активне керування навчанням і розвитком творчого потенціалу дитини.

Розглянемо підходи до організації пізнавальної діяльності для розвитку математичної компетентності. Виклад матеріалу на уроці не повинен бути пасивним, коли основна увага приділяється формам передачі нової інформації, а процес надбання знань для учнів залишається стихійним. Навчання, яке спрямоване на взаємодію учасників освітнього процесу та активізацію пізнавальної діяльності, є запорукою здобуття міцних знань. Для успішного керівництва пізнавальною діяльністю вчителю необхідно спостерігати за основною діяльністю учнів, цікавитися їх захопленнями, простежувати етапи пізнання, визначати рівні інтелектуального і творчого розвитку, проводити діагностику діяльності учнів і пробуджувати їх зацікавленість.

Від організованості та сумлінності вчителя залежить усе подальше навчання учнів не тільки під час вивчення предмета, а в будь-якій діяльності. Для розвитку мислення та підвищення пізнавального інтересу необхідно використовувати словесні, наочні та практичні методи навчання. Існує думка, що практичні методи більшою мірою розкривають творчу грань учня [5].

На уроках математики до практичних методів можна віднести різноманітні задачі та вправи. Зокрема, усні вправи, що сприяють розвитку логічного мислення, пам'яті, уваги. Такі вправи не повинні обмежуватись усним рахунком, вони повинні дати можливість без великих затрат часу багаторазово «програвати» типові ситуації та прийоми міркувань, систематично підвищувати рівень просторових уявлень учнів, проводити роботу з формування їх логічної і мовної культури. Доцільно застосовувати, зокрема, такі прийоми: усне повідомлення змісту вправи, проєктування умови задачі за допомогою екрану, використання завдання на картках або таблицях, постановка задачі на моделях або предметах навколишнього оточення, математичний диктант та ін. Для усних вправ на уроці варто відводити в середньому 6-8 хвилин.

Письмові вправи використовуються для закріплення знань умінь і навичок, контролю і самоконтролю. Якщо задача буде подана в зрозумілій цікавій формі з відображенням практичного значення, то вона допоможе учням не лише вивчити програмовий матеріал, а й сформувані певні якості особистості. Автори підручників з математики для учнів 5 класу, крім рефлексивних завдань, пропонують завдання пошукового пізнавального характеру. Старшокласників можуть зацікавити методи розв'язання економічних та фінансових задач, які розвивають загальну культуру мислення, мовленнєву та комунікативну компетентність, створюють необхідний емоційний настрій та розкривають роль

математики у житті конкретної людини. Такі задачі можна використовувати на різних етапах уроку (створення проблемної ситуації на початку уроку або під час закріплення). Вони можуть бути предметом дослідження в процесі роботи над проектом.

Графічні вправи допомагають учням краще сприймати, осмислювати і запам'ятовувати навчальний матеріал, сприяють розвитку просторової уяви, підвищують творчий потенціал школярів. Завдяки таким вправам учитель економить час на уроці, а учні вдало поєднують теоретичні та практичні знання. Ефективна активізація пізнавальної діяльності учнів під час вивчення тем: «Координатна площина», «Графіки» у 6 класі є запорукою швидкого засвоєння теми «Функції» у наступних класах. Уміння побудувати графіки за таблиці, таблиць за діаграмами і т.п. буде потрібним та корисним на уроках природознавства, фізики, економіки, а також стане в нагоді в життєвих ситуаціях.

У підручнику для 11 класу [2] після кожного параграфа з геометрії є графічні вправи, які сприяють розвитку просторової уяви, формуванню вмінь будувати геометричні тіла та практично застосовувати метод подібності та відповідності.

Робота вчителя буде ефективною, якщо учні будуть не лише засвоювати нову інформацію або алгоритми виконання дій, а й виявлятимуть власний творчий підхід до осмислення, узагальнення, аналізу, що є основою життєвих установок. Наприклад, значний інтерес в учнів викликають творчі самостійні роботи. Це завдання, що передбачають пошук другого, третього способу розв'язування задач. Завдяки впровадженню в освітній процес інформаційно-комунікативних технологій використання словесних і наочних методів стало більш ефективним. Власну розповідь учитель може супроводжувати відеоматеріалами, презентаціями, застосовуючи наочність в електронному вигляді. Крім того, учитель отримує можливість залучити учнів до інтерактивної взаємодії, активізуючи таким чином їх розумову діяльність, а це, безумовно, позитивно впливає на розвиток їх емоційної сфери, допитливість, унаслідок чого результативність уроку стає більш високою.

Власний досвід демонструє, що найбільш ефективними є наступні методи активізації пізнавальної діяльності. Метод конкретної ситуації (учні вчаться обмірковувати, узагальнювати, аналізувати, розглядати різні варіанти розв'язання задач, складати власні задачі). Наприклад, інтерес учнів викликає вміння вчителя швидко обчислити вирази виду:  $199 \cdot 201$ ;  $25^2 + 2 \cdot 25 \cdot 5 + 5^2$ ;  $(17+3)(17^2 - 17 \cdot 3 + 3^2)$ . У семикласників виникає бажання навчитися виконувати подібні дії, що спонукає інтерес до вивчення формул скороченого множення.

Метод «занурення» (створюються ситуації, де учні «з головою поринають» у поставлені завдання, ефективно розв'язують їх). Найяскравішим прикладом такого методу є урок однієї задачі. Метод інциденту (залучення учнів до участі в олімпіадах, конкурсах та ін.). Метод проектів найбільше стимулює учнів до пізнавальної діяльності: учні набувають навичок роботи з інформацією, вчаться вирішувати пізнавальні творчі завдання у співробітництві, розвивають лідерські здібності.

На увагу заслуговують такі методи, як «мозковий штурм», кооперативний, дослідницький, метод проєктів. Кожен з вищезазначених методів сприяє активізації пізнавальної діяльності учнів на різних етапах та дозволяє учням: використовуючи набуті знання, аргументувати свою думку; з'ясовувати незрозуміле, заглиблюватися з допомогою учителя, товариша, підручника, додаткових джерел у процес пізнання; рецензувати відповіді, творчі роботи однокласників, вносити корективи, давати поради; – знаходити декілька рішень однієї проблеми, використовувати раціональний спосіб розв'язання; практикувати вільний вибір завдань, переважно пошукових, творчих; створювати ситуації самоперевірки, аналізу власних пізнавальних і практичних дій; урізноманітнити діяльність, включати в пізнання елементи праці, гри, суспільної відповідальності тощо [3].

Отже, ефективна організація пізнавальної діяльності впливає на розвиток пізнавального інтересу, який є важливим чинником навчання та засобом формування основних компетентностей (у тому числі й математичної), а також є ефективним інструментом, що дозволяє педагогу зробити процес навчання привабливим. Розглянемо складові математичної компетентності (мотиваційна, змістовна, діяльнісна, емоційно-ціннісна), які формуються під час вивчення математики. Для розвитку мотиваційного компонента доцільно пропонувати логіко-розвивальні завдання, цікаві факти з життя знаменитих людей, різноманітні історичні матеріали, ігрові ситуації, розв'язання ситуативних задач. Крім того, це дозволить застосувати принцип міжпредметних зв'язків та привернути увагу до математики з боку учнів, які більше цікавляться іншими дисциплінами. Розвиток змістовного компонента здійснюється на основі індивідуально диференційованого підходу та за допомогою самостійної навчальної роботи. Самостійній діяльності відводиться важлива роль у структурі сучасного уроку, тому що учень набуває знань тільки в процесі особистої самостійної діяльності. Формуючи діяльнісний компонент, слід, перш за все, створити оптимальні умови для поступового переходу від дій під керівництвом учителя до самостійних, пропонуючи учням пошук шляхів розв'язання пізнавальних та практичних завдань. Розвиток емоційно-ціннісного компонента забезпечить: підвищення інтересу до вивчення предмета; пробудження ініціативності та самостійності; формування загальної культури учнів шляхом усного і письмового мовлення; формування поведінки лідерів та членів колективу, усвідомлене прагнення до суспільних дій.

Отже, активізація пізнавальної діяльності вимагає системної роботи на різних етапах оволодіння матеріалом. Відсутність одного з них порушує цілісність системи, що, у свою чергу призводить до низької результативності навчально-пізнавальної діяльності [4]. Лише здійснення учнями повного циклу навчально-пізнавальних дій забезпечує глибоке і міцне оволодіння програмним матеріалом, їх розумовий і загальний розвиток, формування наукового світогляду, всебічну вихованість. Організація пізнавальної діяльності на засадах компетентнісного підходу сприяє досягненню запланованих результатів і спонукає учнів до творчого розвитку, що природно стимулює пізнавальний інтерес. З метою формування математичної компетентності в процесі навчання

вчителю необхідно використовувати різноманітні форми і методи, поєднувати предметно пізнавальну та творчу діяльність учнів. Саме цілеспрямоване тренування гнучкості мислення, використання фантазії, інтуїції, уяви, дослідницьких методів навчання сприяє розвитку математичної компетентності учнів.

### **СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**

1. Актуальні питання формування інтересу в навчанні / за ред. Г. І. Щукіної. – М. : Просвітництво, 1988.
2. Афанасьєва О. М., Бродський Я. С., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Математика: підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту / О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А.К. Сліпенко. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2012. – 480 с.
3. Голодюк Л. С. Організація навчально-пізнавальної діяльності учнів основної школи у навчанні математики в урочний та позаурочний час: теоретичний аспект: монографія. – Кропивницький: ФО-П Александрова М. В., 2017. – 404 с.
4. Holodiuk L. S. The interpretation of definition «a comprehensive organization of educational and cognitive activities» in the context of the «educational-creative activity» concept by the distribution of systematic activities // Scientific Vector of the Balkans. 2018. – № 1. – PP. 36-40
5. Організація навчально-пізнавальної діяльності учнів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [readbookz.com/book/172/5440.html](http://readbookz.com/book/172/5440.html).
6. Пізнавальні процеси психіки особистості [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [posibnyky.vntu.edu.ua/psihologiya/r222.htm](http://posibnyky.vntu.edu.ua/psihologiya/r222.htm).

**Світлана БАРАНОВА,**  
*учитель математики Помічянської  
загальноосвітньої школи I-III ступенів  
№3 Помічянської міської ради  
Кіровоградської області*

### **В РІК МАТЕМАТИКИ ПРО ЯСКРАВИХ ТВОРЦІВ ЦАРИЦІ УСІХ НАУК**

Математика – фундаментальна наука; основа науково-технічного прогресу людства. Не даремно англійський філософ Р. Бекон зазначав, що той, хто не знає математики, не може пізнати жодної науки і навіть не може виявити свого неуцтва. Математика розвиває інтелект, тренує пам'ять, допомагає досягти успіху в усіх сферах життя.

З метою забезпечення додержання конституційних гарантій з реалізації права на освіту, створення можливостей для рівного доступу українських школярів до сучасної та якісної математичної освіти, формування у них належного рівня математичної компетентності, ураховуючи результати

міжнародного дослідження якості освіти PISA щодо математичної компетентності здобувачів базової середньої освіти в Україні, Указом Президента України від 31.01.2020 року за №31/2020, оголошено 2020/2021 навчальний рік Роком математичної освіти в Україні [1].

Вважаю, що в цей Рік на уроках математики слід згадати про визначних творців математичної науки, адже найбільше багатство держави – це її люди. Україна подарувала світу цілу плеяду талановитих математиків, які стали взірцем патріотизму, професіоналізму, людяності. Ці люди стояли на державницьких позиціях та розуміли, що добробут і процвітання держави залежить від рівня освіченості та національної свідомості її громадян.

Знання наукового і життєвого шляху видатних математиків є необхідним компонентом професійної складової вчителя математики... Робота вчителя спрямована перш за все на виховання (в широкому розумінні) підростаючого покоління. Протягом усього часу навчання в школі дитина, а пізніше підліток, молода людина потребують взірця для наслідування. В інтересах суспільства, та й самих молодих людей, формувати зразки для наслідування за допомогою справді видатних особистостей. Оскільки в шкільному віці історія культури і науки краще опановується через долі конкретних людей, то вчителю математики бажано мати у своїй педагогічній скарбничці достатню кількість прикладів, які вводять підростаюче покоління у світ цінностей та сприяють духовному, моральному та патріотичному вихованню [2, с. 9].

Педагогічна персоналізація завжди буде одним із провідних напрямів історико-педагогічних досліджень, особливо в переломні часи, коли переглядаються існуючі канони й коли саме персоналія, яку ми повертаємо з небуття, і своїм життям, і своїми ідеями підтверджує рух історії [3, с. 46].

Видатний український математик, який здобув світову славу, – Михайло Васильович Остроградський. Знаючи його життєвий та творчий шлях, боляче констатувати, що нині в багатьох джерелах М.В. Остроградського називають російським вченим. Однак, не зважаючи на все це, в кожному математичному довіднику та підручнику з математики його ім'я присутнє, і ми повинні пишатися тим, що такого геніального вченого подарувала світові українська земля. До речі, саме він першим запропонував ввести до програм середніх шкіл поняття функції.

У контексті вивчення історичних фактів із життя математика, доцільно розв'язати вправи з теми «Функція. Область визначення та область значень».

1. Щоб дізнатися, у якому році народився видатний математик, обчисліть значення функції  $y = 73x + 925$ , при  $x=12$ .

*Відповідь. 24 вересня 1801 року у родині власника хутора Пашенна Василя Івановича Остроградського та його дружини Ярини Андріївни народився майбутній математик – Михайло.*

2. Функцію задано формулою  $f(x) = 2x^3 + 4x^2 + 27$  Знайдіть  $f(9)$  і ми дізнаємося, коли почалося знайомство майбутнього вченого з науками.

*Відповідь. У 1809 році Михайло пішов навчатися до Будинку бідних дворян.*

3. Функцію задано формулою  $f(x) = \frac{x-567}{25}$ . Знайдіть значення аргумента, якщо значення функції дорівнює 50 і дізнайтеся, в якому році Михайло Остроградський став студентом.

*Відповідь. У 1817 р. стає студентом відділення фізичних і математичних наук Харківського університету. Через рік М.В. Остроградський успішно складає іспити за трирічний курс й одержує атестат.*

4. Знайдіть координати точок перетину графіка функції  $y = \frac{x}{18} - 101\frac{13}{18}$  з віссю абсцис. Це буде рік, коли Остроградський стає академіком Петербурзької Академії наук.

*Відповідь. 1831 рік.*

5. Знайдіть добуток коренів рівняння  $(x-2)(x-4)(x-10)(x-25)=0$ , додайте 1 і дізнайтеся, в якому році ЮНЕСКО внесла М.В. Остроградського до переліку видатних математиків світу.

*Відповідь. У 2001 році.*

**Завдання 2.** Розшифруйте вислів видатного українського математика, який головну мету освіти бачив у тому, щоб пробудити здатність до самостійного мислення.

№1. Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{x-5}$

|               |                |                |
|---------------|----------------|----------------|
| Математика    | Неможливо      | Все            |
| $[5; \infty)$ | $(-\infty; 5)$ | $(-5; \infty)$ |

№2. Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{x+5} + \sqrt{5-x}$

|               |           |                |
|---------------|-----------|----------------|
| бути          | найвища   | Математика     |
| $(5; \infty)$ | $[-5; 5]$ | $(-5; \infty)$ |

№3. Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{x+3} + \frac{1}{\sqrt{x-3}}$

|               |                |                |
|---------------|----------------|----------------|
| філософська   | математиком    | Вчить          |
| $(3; \infty)$ | $(-3; \infty)$ | $(-\infty; 3)$ |

№4. Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{x^2 + 1}$

|                     |                |                |
|---------------------|----------------|----------------|
| наука,              | не будучи      | Вчить          |
| $(-\infty; \infty)$ | $(-\infty; 1)$ | $[-1; \infty)$ |

№5. Знайти область визначення функції  $y = \frac{x-1}{1+x}$

|             |            |              |
|-------------|------------|--------------|
| наука       | все        | в той же час |
| $x \neq -1$ | $x \neq 1$ | $x \neq 0$   |

№6. Знайдіть область визначення функції  $y = \frac{1}{(x-3)(x-4)}$

|                      |            |            |
|----------------------|------------|------------|
| справжніх            | життя      | Поетом     |
| $x \neq 3, x \neq 4$ | $x \neq 3$ | $x \neq 4$ |

№7. Знайдіть область визначення функції  $y = \sqrt{2x-4}$

|                |               |           |
|----------------|---------------|-----------|
| життя          | Поетів        | у душі    |
| $[-2; \infty)$ | $[2; \infty)$ | $[-4; 2)$ |

№8. Знайдіть область визначення функції  $y=x^2 + 3x - 5$

|                   |          |                |
|-------------------|----------|----------------|
| М. Остроградський | Ф. Вієт  | Піфагор        |
| $R$               | $[3; 5)$ | $(-5; \infty)$ |

*Відповідь. Математика – найвища філософська наука, наука справжніх поетів. (М. Остроградський)*

Видатні заслуги М.В. Остроградського в галузі науки визнані всім ученим світом. Його було обрано академіком Петербурзької Академії наук і почесним доктором Олександрівського (м. Вільно) і Гельсінгфорського університетів, у 1834 році – членом Американської, у 1841 році – Туринської, у 1853 році – Римської та у 1856 році – членом-кореспондентом Паризької академії наук, почесним членом Ради Харківського університету. Нагороджений орденами Св. Анни I ступеня і Св. Володимира II ступеня [4, с. 10].

Попри почесні та звання, не зважаючи на світове визнання та захоплення в наукових колах, Михайло Васильович через усе життя проніс любов до свого краю та рідної української мови. Він був видатним педагогом, який понад 30 років викладав математичні науки в найпрестижніших вітчизняних і зарубіжних вищих навчальних закладах. Учений доклав значних дидактичних та організаційних зусиль до становлення системи математичної освіти.

М.В. Остроградський – автор оригінальних і найдосконаліших на той час підручників та науково-методичних посібників, блискучий лектор. За свою плідну педагогічну діяльність удостоєний численних державних нагород. Його учнями були відомі вчені Д. Менделєєв та О. Можайський [5, с. 11].

Математик із світовим іменем М.В. Остроградський та всесвітньо відомий поет Т.Г. Шевченко жили і працювали в один і той же історичний період. Ще під час навчання в Петербурзькій Академії мистецтв Т.Г. Шевченко слухав лекції патріарха вітчизняних математиків, який на той час був однією з найвидатніших постатей у світовій науці. Саме тоді поет близько познайомився і на все життя міцно здружився з ним [6, с. 19]. Їх єднала любов до України, до своїх співвітчизників, української культури, духовності та бажання зробити світ кращим. Повернувшись із заслання, Тарас Шевченко зустрівся з Михайлом Остроградським, читав свої вірші. Т.Г. Шевченко був улюбленим поетом математика. Михайло Васильович знав напам'ять увесь «Кобзар».

Міцна дружба славетних поета і математика проливає світло на ще один бік діяльності безсмертного кобзаря і патріарха вітчизняних математиків, допомагає додати ще один штрих до Кобзарів наших геніїв з України. Вони були близькими в житті та нероздільні у своїй славі і народній пам'яті [6, с. 21].

Яскравою історичною особистістю є Михайло Пилипович Кравчук – гордість української математики, активний громадський діяч, академік Всеукраїнської академії наук, член Українського наукового товариства при Київському університеті, член комісії математичної термінології при Інституті наукової мови УАН; людина, в серці якої палала безмежна любов до України та математики. М.П. Кравчук став першим в Україні педагогом, який викладав вищу математику українською мовою. Він товаришував із Миколою Чайковським – професором математики, членом Наукового товариства імені

Шевченка, та з Володимиром Левицьким, головою математично-природописно-лікарської секції цього товариства [7, с. 113]. Коло друзів Михайла Пилиповича складали не тільки математики, а й інша творча еліта. Він прагнув об'єднати усіх науковців для розвитку української науки і культури. М.П. Кравчука було обрано членом математичних товариств Німеччини (1926 рік), Франції (1927 рік) та Італії (1927 рік) [8, с.20]. М.П. Кравчук був справжнім українським інтелігентом: понад усе любив Україну, народні пісні, спілкувався на лекціях, вдома, зі студентами виключно українською мовою, часто одягав вишиванку [9, с. 898]. Він мав дар виявляти та розвивати таланти своїх учнів. Відомий український учений, генеральний конструктор авіаційних двигунів, творець першого у світі двоконтурного турбореактивного двигуна – Архип Михайлович Люлька завдячував успіхом і творчими здобутками своєму мудрому наставнику Михайлу Пилиповичу Кравчуку. І хто знає, чи зумів би Сергій Корольов стати першим конструктором космічних кораблів, якби не участь і наукова школа академіка Михайла Кравчука. Огляд та аналіз наукових праць М. П. Кравчука виявляє його унікальний математичний талант, широчінь наукового кругозору, здатність аналізувати складні питання в різноманітних розділах математики, фізики, історії, методики математики та ін. Самовіддана праця Михайла Пилиповича в ім'я розбудови української науки, його непересічний педагогічний хист і повага серед студентської та наукової молоді не могли залишитись непоміченими органами тоталітарного режиму [10, с.5]. Ім'я М.П. Кравчука внесли до списку «ворогів народу». Особливо вражає та захоплює те, що будучи несправедливо засудженим радянською владою та приреченим на каторжне, нелюдське життя, М.П. Кравчук не зламався, не втратив віру у свою справу. Там, на засланні, в Магадані, він здійснив математичне відкриття, над яким працював 20 років. Ім'я Михайла Пилиповича занесено по лінії ЮНЕСКО до Міжнародного календаря визначних наукових діячів. «Моя любов – Україна і математика», – ці слова Михайла Пилиповича Кравчука викарбовано на гранітному постаменті пам'ятника, який встановлено йому 2003 року перед корпусом музею Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут». Цікавим та пізнавальним під час вивчення наукової спадщини М.П. Кравчука є розв'язання таких завдань: (Двом групам даються тексти віршів).

**Завдання.** Для букв а, е, і, ї, н, ф, я складіть частотну таблицю. Визначте моду отриманих даних.

1. Михайла Кравчука нема.

Людину мудру і святу  
Жорстокість дика і німа  
Звалила в вічну мерзлоту.  
Таких – один на сотні літ  
І на мільйони душ – один.  
Його ж на Колиму, за дріт.  
До голих нар і баланди.  
Його теорій і відкрить  
Чекали континенти всі;

2. Багата українська мова,-

Виразна, зручна і барвіста,  
Для пісні гожа і розмови,  
Для науковця і юриста.  
Науки всі – від Піфагора  
До Корольова і Глушкова –  
Доступно, чітко і прозоро  
Доносить українська мова.  
В ній кожне слово змісту повне,  
Звучить привітно, ніжно, щедро,

Його ж породу мерзлу рить  
Закинули на край Русі.  
Радіють деспоти-кати,  
Верховному мережать звіт  
Про те, що досягли мети:  
На генія поменшав світ.  
Радійте! Все ж настане суд,  
Недовго вже його чекать,  
Узнає світ і вашу суть,  
І справжню велич Кравчука! [11, с. 97].

Відбірне – мов чільце коштовне,  
Добротне – мов живуче зерно.  
В ній різнобарв'я килимове,  
Тони, і тембри, і відтінки.  
Чудова українська мова,  
Не зневажаймо рідну тільки [11, с. 95].

Ці віші написав сучасний математик, кандидат педагогічних наук, автор понад 200 наукових праць – Григорій Петрович Бевз. Він надрукував близько 50 книг, зокрема – підручники математики для 5-11 класів, за якими навчаються мільйони учнів. Деякі з них перекладено російською, польською, румунською, угорською, таджицькою мовами, надруковано шрифтом Брайля.

**Учитель.** Послухайте фрагмент вірша Катерини Матвійко та назвіть ім'я математика, якого характеризують ці рядки:

Піду в математики, вірші писатиму цифрами!  
Шукатиму рими у коренях, навіть в іксах.  
Та графік параболи просто поставлю епіграфом.  
І душу ховатиму в мінусах. Може, в плюсах.  
Піду в математики! Точність там, чіткість увічнені.  
Безпристрасний рух різних ліній, без слів і принад.  
А буде душа розриватись від болю і відчаю,  
Візьму на папері і виведу: ігрек квадрат!

*Відповідь: Володимир Левицький.*

У 1903-1914 роках наукова діяльність В. Левицького розвивається в основному у напрямку популяризації знань.

Розв'яжіть завдання та відшукавши відповідну букву, прочитайте слово.

**Завдання 1.** На столі розкладено портрети видатних особистостей: Тарас Шевченко, Іван Франко, Леся Українка, Володимир Левицький, Михайло Остроградський, Михайло Кравчук, Ліна Костенко, Марина В'язовська, Георгій Вороний, Микола Чайковський, Мирон Зарицький, Марко Вовчок, Микола Лобачевський.

Знайти, що ймовірність того, що навмання взятий портрет виявиться портретом:

- 1) Михайла Остроградського ( $\frac{1}{13}$ )
- 2) чоловіка ( $\frac{9}{13}$ )
- 3) математика ( $\frac{8}{13}$ )
- 4) жінки ( $\frac{4}{13}$ )
- 5) визначної творчої особистості (1)
- 6) учня нашого класу (0)
- 7) поетів і прозаїків ( $\frac{5}{13}$ )

8) людини, яка народилася раніше від Марини В'язовської ( $\frac{12}{13}$ )

9) людини, яка народилася не в Україні ( $\frac{2}{13}$ )

10) людини, яка говорила українською мовою ( $\frac{12}{13}$ )

|   |                |                |                |                |                |                |                 |   |
|---|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|---|
| 0 | $\frac{1}{13}$ | $\frac{2}{13}$ | $\frac{4}{13}$ | $\frac{5}{13}$ | $\frac{8}{13}$ | $\frac{9}{13}$ | $\frac{12}{13}$ | 1 |
| Ч | П              | К              | Р              | Н              | Д              | І              | И               | У |

*Відповідь. Підручники*

В. Левицький працює над створенням українських підручників. У 1906 році виходить перша, а у 1908 р. – друга частина «Алгебри для вищих класів шкіл середніх». У надзвичайно короткий термін, за 7 місяців, В. Левицький пише солідний підручник «Фізика за вищий клас», що побачив світ у 1912 році. Тривалий час це був один із найкращих підручників фізики. У 1924 році його перевидали.

**Завдання 2.** Розгадавши кросворд, присвячений видатним українцям, у виділених стовпцях ви зможете прочитати слово, що точно характеризує діяльність Володимира Левицького. Давайте попрацюємо усі разом і у такий спосіб покажемо, що ми єдині в досягненні мети.

1. Книга Тараса Шевченка, у виданні якої надав допомогу Михайло Остроградський (Кобзар).

2. Відомий український поет, який був учителем Михайла Остроградського в Полтаві в Будинку бідних дворян (Котляревський).

3. Письменник, який здійснив український переклад задач грецького епіграміста, автора праць з географії й астрономії Метродора (Франко).

4. Український математик, відомий своїми статтями з історії, з української літератури та мистецтва (Чайковський).

5. Є. Сенета про нього писав «Його ім'я добре відоме у світовій математичній науці. Світ не знав лише, що він – українець» (Кравчук).

6. Український математик, з яким Михайло Остроградський познайомився у Франції, а потім співпрацював у Петербурзі (Буняковський).

7. Ім'я генерального конструктора авіаційних двигунів, учня Михайла Кравчука (Архип).

8. Перший конструктор космічних кораблів, учень Михайла Кравчука (Корольов).

9. Вчений, який першим написав українською мовою фахову статтю з математики (Левицький).

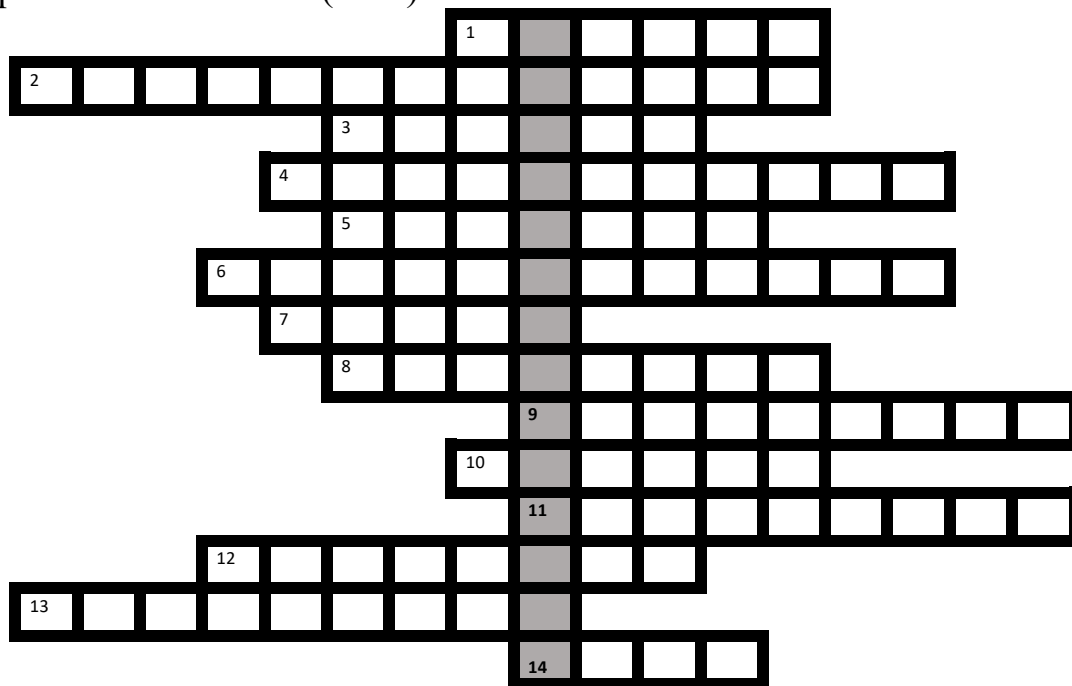
10. Вчений, який говорив: «Тільки математика, як яскрава зірка блищить переді мною й на неї всі мої сподівання» (Вороний).

11. Учень Михайла Остроградського, який став видатним ученим у галузі мостобудування (Журавський).

12. Письменник, який згадує про Остроградського у своїй повісті «Художник» (Шевченко).

13. Поет, який познайомив Михайла Остроградського з Тарасом Шевченком (Жуковський).

14. Місто, в якому на пам'ятнику М. Кравчуку є напис «Моя любов – Україна і математика» (Київ).



**Учитель.** У виділеному стовпці отримаємо слово: *основоположник*.

«Основоположник математичної культури нашого народу», – так назвав Володимира Левицького академік Михайло Кравчук.

Володимир Левицький прожив довге та змістовне життя, впродовж якого невтомно і щиро трудився на ниві української науки та освіти. Працюючи в Галичині, він *вперше* піднімав небосхил математичної культури на українському ґрунті. Був автором *першої* наукової статті з математики українською мовою, незмінним редактором *першого* україномовного наукового часопису з природничих наук, *першим* підготував і опублікував матеріали до української термінології з математики, фізики та хімії, серед *перших* був автором українських підручників з математики та фізики для середніх шкіл, фундатором Товариства наукових викладів імені Петра Могили, а також фундатором і викладачем вищої математики Українського таємного університету у Львові [12, с. 167]. В. Левицький вивчав теорію аналітичних інваріантів диференціальних рівнянь та їх групові властивості. Ці праці стали значним внеском у загальну теорію інтегрування у квадратурах, яку активно розвивали в Європі французька і німецька школи у зв'язку з проблемою Рімана. Слід зазначити, що проблему Рімана успішно розв'язала лише у 1980 році група японських математиків. Цей факт свідчить про глибоку математичну інтуїцію В. Левицького, його творчий дар відчувати найактуальніші математичні проблеми і сміливо їх досліджувати.

Завдяки своїм науковим напрацюванням, непохитною вірою в Україну, небайдужому ставленню до суспільно-політичних процесів В. Левицький назавжди залишиться в історії української культури як основоположник математичної культури нашого народу, новатор та патріот.

Дослідження найважливіших етапів життя М. Остроградського, М. Кравчука і В. Левицького продемонстрували їх безмежний талант та віру в

майбутнє України. Національна заслуга математиків полягає в розвитку математичної науки, її популяризації та підготовці талановитих послідовників. Не зважаючи на важкі переломні роки в історії, дискримінацію, всілякі бюрократичні перепони на шляху до розвитку української науки, культури, державності, ці люди зуміли вистояти та своїм життям показати, що цілеспрямована людина завжди досягає поставленої мети.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Указ Президента України від 31.01.2020 року за №31/2020 «Про оголошення 2020/2021 навчального року Роком математичної освіти в Україні» [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/31/2020>
2. Бевз В.Г. Реалізація аксіологічного підходу у навчанні майбутніх вчителів математики / В.Г. Бевз // Didactics of mathematics : Problems and Investigations – Issue №39. – 2013 – р. 7-10.
3. Сухомлинська О. В. Персоналія в історико-педагогічному дискурсі / О. В. Сухомлинська // Історико-педагогічний процес: нові підходи до загальних проблем. – К., 2003. – С. 36–46.
4. Михайло Васильович Остроградський в оцінках сучасників та нащадків: (До 200-річчя з дня народження) / Укладачі: Б.П. Зайцев, С.І. Посохов, В.Д. Прокопова. – Х. : НМЦ «СД», 2001. – 96 с.
5. Зелюк В.В. Остроградський і сучасність / В.В. Зелюк // Українське коло. – 2011. – №3 (100). – С. 10-12.
6. Барабаш О.М. Формування самостійності в процесі навчання – одне з основних завдань, поставлених М.В. Остроградським / О.М. Барабаш // Педагогіка математики і природознавства. VIII-IX Всеукраїнські читання, присвячені пам'яті М.В. Остроградського, 7-8 жовтня 2004, 26-27 жовтня 2005. Збірник статей. – Полтава : ПОІППО, 2005. – 201 с.
7. Хобзей П. К. Основоположник математичної культури нашого народу / П. К. Хобзей // Аксіоми для нащадків: Українські імена у світовій науці : зб. нарисів. – Львів, 1991. – С. 102–118.
8. Вірченко Н. О. Велет української математики / Н. О. Вірченко. – К. : Задруга, 2007. – 80 с. + 12 іл.
9. Сорока М. Задавній спомин / М. Сорока // Матеріали Дванадцятої міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука (15–17 трав. 2008 р.). – К., 2008. – Т. 2. – С. 897–902.
10. Сташенко М.О., Мачушинець Г.В. Світ знає, що Він – УКРАЇНЕЦЬ / М.О. Сташенко, Г.В. Мачушинець // Педагогічний пошук. – 2017. - №4 (96). – С. 3-7.
11. Воевода А.Л. Математика та література: матеріали до інтегрованих уроків і заходів/ Аліна Воевода. – К.: Редакція газет природничо-математичного циклу. 2013. – 104 с. – (Бібліотека «Шкільного світу»).
12. Пташник Б.Й. Основоположник української математичної культури в Галичині / Б.Й. Пташник // Буковинський математичний журнал. – 2016. – Т. 4, №3-4. – С. 167-173.

## РОЗДІЛ II.

### МЕТОДИЧНІ АКЦЕНТИ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ СЕРТИФІКАЦІЙНОЇ РОБОТИ ЗНО

**Юлія БОТУЗОВА,**

*старший викладач кафедри математики  
Центральноукраїнського  
державного педагогічного університету  
імені Володимира Винниченка*

#### МЕТОД ОЦІНКИ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ ЗОВНІШНЬОГО НЕЗАЛЕЖНОГО ОЦІНЮВАННЯ З МАТЕМАТИКИ

Одним із методів розв'язування рівнянь з використанням властивостей функцій є метод оцінки. Він передбачає отримання оцінок значень виразів, які знаходяться в правій та лівій частинах рівняння, з метою обґрунтування на їх основі відсутності коренів рівняння чи переходу до системи більш простих рівнянь.

Розглянемо теоретичні основи застосування методу оцінки та його основні алгоритми. Шкільний курс математики містить необхідний когнітивний елемент для опанування цим методом розв'язування рівнянь. Наведемо приклади рівнянь із сучасних підручників алгебри, а також приклади задач із сертифікаційних робіт зовнішнього незалежного оцінювання з математики, які розв'язуються методом оцінки.

Є дві основні ознаки, які спонукають до використання методу оцінки для певного рівняння:

1. Відсутність інших стандартних методів для розв'язування заданого рівняння.

2. Обмеженість функцій, які містяться в різних частинах цього рівняння.

Для того, щоб використовувати метод оцінки для розв'язування рівнянь, необхідно чітко розуміти, для яких типів рівнянь він взагалі підходить. Отже, варто зазначити, що метод оцінки застосовується до рівнянь вигляду  $f(x) = C$ , де  $C - const$ , або  $f(x) = g(x)$ .

Метод оцінки розв'язування рівняння вигляду  $f(x) = C$ , де  $C - const$  передбачає наступний алгоритм.

1. Оцінюємо значення функції  $y = f(x)$  на її області визначення.

2. Розглядаємо можливі ситуації: а)  $f(x) < A$ , де  $A < C$ ; б)  $f(x) \leq A$ , де  $A < C$ ; в)  $f(x) < C$ ; г)  $f(x) > B$ , де  $B > C$ ; ґ)  $f(x) \geq B$ , де  $B > C$ ; д)  $f(x) > C$ ; е)  $f(x) \leq C$ ; є)  $f(x) \geq C$ .

Якщо після аналізу отриманої оцінки значення функції  $y = f(x)$  виконується одна із умов а)-д), то задане рівняння не має розв'язків.

Якщо виконується одна із умов  $e)$  або  $є)$ , то рівняння може мати розв'язки. Одним із способів їх знаходження є графічний метод розв'язування рівнянь.

Трапляються випадки, коли функція  $y = f(x)$  в рівнянні вигляду  $f(x) = C$ , де  $C - const$  представлена у вигляді суми або добутку кількох функцій. Наприклад,  $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$ , або  $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)$ . Тоді алгоритм використання методу оцінки може бути наступним:

1. Якщо рівняння має вигляд  $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) = C$  (1), при чому  $f_1(x) \leq C_1$ ,  $f_2(x) \leq C_2$ , ...,  $f_n(x) \leq C_n$  та  $C_1 + C_2 + \dots + C_n = C$ , або ж  $f_1(x) \geq C_1$ ,  $f_2(x) \geq C_2$ , ...,  $f_n(x) \geq C_n$  та  $C_1 + C_2 + \dots + C_n = C$ , то переходимо до рівносильної системи

$$\text{рівнянь: } \begin{cases} f_1(x) = C_1; \\ f_2(x) = C_2; \\ \vdots \\ f_n(x) = C_n. \end{cases} \quad (2)$$

2. Якщо рівняння має вигляд  $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x) = C$  (3), при чому  $0 < f_1(x) \leq C_1$ ,  $0 < f_2(x) \leq C_2$ , ...,  $0 < f_n(x) \leq C_n$  та  $C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_n = C$ , або ж  $f_1(x) \geq C_1$ ,  $f_2(x) \geq C_2$ , ...,  $f_n(x) \geq C_n$ , де  $C_1, C_2, \dots, C_n$  – невід'ємні числа та  $C_1 \cdot C_2 \cdot \dots \cdot C_n = C$ , то

$$\text{переходимо до рівносильної системи рівнянь: } \begin{cases} f_1(x) = C_1; \\ f_2(x) = C_2; \\ \vdots \\ f_n(x) = C_n. \end{cases} \quad (4)$$

3. Розв'язуючи отриману систему рівнянь, знаходимо шуканий розв'язок заданого рівняння, або встановлюємо, що його не існує.

Для розв'язування рівнянь вигляду  $f(x) = g(x)$  (5) методом оцінки можна скористатись алгоритмом:

1. Оцінюємо значення функцій  $y = f(x)$  та  $y = g(x)$  на ОДЗ заданого рівняння.

2. Розглядаємо можливі ситуації:

а) значення однієї з функцій менше деякого числа  $A$ , а значення другої функції в цей час більше деякого числа  $B$ , при чому  $A < B$ ;

б) значення однієї з функцій не більше деякого числа  $A$ , а значення другої функції більше деякого числа  $B$ , при чому  $A < B$ ;

в) значення однієї з функцій менше деякого числа  $A$ , а значення другої функції в цей час не менше деякого числа  $B$ , при чому  $A < B$ ;

г) значення однієї з функцій не більше деякого числа  $A$ , а значення другої функції не менше деякого числа  $B$ , при чому  $A < B$ ;

г) значення однієї з функцій менше деякого числа  $C$ , а значення другої функції в цей час більше цього ж числа  $C$ ;

д) значення однієї з функцій не більше деякого числа  $C$ , а значення другої функції в цей час більше цього ж числа  $C$ ;

е) значення однієї з функцій менше деякого числа  $C$ , а значення другої функції в цей час не менше цього ж числа  $C$ ;

є) значення однієї з функцій не менше деякого числа  $C$ , а значення другої функції в цей час не більше цього ж числа  $C$ .

Якщо після аналізу отриманих оцінок значень функцій  $y = f(x)$  та  $y = g(x)$  виконується одна із умов а)-е), то задане рівняння не має розв'язків.

Якщо ж виконується умова є), то рівняння може мати розв'язки, які знаходяться шляхом розв'язання рівносильної системи рівнянь: 
$$\begin{cases} f(x) = C; \\ g(x) = C. \end{cases} \quad (6)$$

Доведення рівносильності рівнянь (1), (3), (5) та відповідних їх систем (2), (4), (6) в межах цієї статті не наводимо.

З наведених вище алгоритмів зрозуміло, що для опанування методом оцінки учні мають вміти знаходити області визначення та значень функцій, ОДЗ рівнянь, а також оцінювати значення виразів, користуючись властивостями числових нерівностей. Ці знання учні отримують впродовж вивчення курсу математики основної та старшої школи.

За навчальною програмою з математики в 9 класі вивчається тема «Нерівності», в межах якої учні знайомляться з основними властивостями числових нерівностей та на їх основі оцінюють значення виразів. Окрім того, знаючи властивості основних елементарних функцій, учні вже можуть виконувати завдання на знаходження області значень функцій.

Наприклад: **Завдання 1.** Знайдіть область значень функції: а)  $y = \sqrt{x} - 5$ ; б)  $y = |x| + 2$  [9, с.76]; в)  $y = 5 - x^2$ ; г)  $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$  [8, с.64].

**Розв'язання:** а) функція  $y = \sqrt{x}$  на своїй області визначення  $D(y) = [0; +\infty)$  приймає невід'ємні значення, тобто  $\sqrt{x} \geq 0$ , а тому оцінити значення виразу  $\sqrt{x} - 5$  можна скориставшись властивостями числових нерівностей, а саме: «якщо від обох частин правильної нерівності відняти (додати) одне й те саме число, то отримаємо правильну нерівність». Тобто,  $\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 5 \geq 0 - 5 \Rightarrow \sqrt{x} - 5 \geq -5$ . Отже,  $E(y) = [-5; +\infty)$ .

б) областю визначення функції  $y = |x|$  є множина всіх дійсних чисел, а областю значень – числовий проміжок  $[0; +\infty)$ , тобто  $|x| \geq 0$ . Користуючись властивостями числових нерівностей, аналогічно до пункту а), маємо:  $|x| \geq 0 \Rightarrow |x| + 2 \geq 0 + 2 \Rightarrow |x| + 2 \geq 2$ . Отже,  $E(y) = [2; +\infty)$ .

в) областю визначення функції  $y = x^2$  є множина всіх дійсних чисел, а областю значень – числовий проміжок  $[0; +\infty)$ , тобто  $x^2 \geq 0$ . Спочатку оцінимо значення  $-x^2$ :  $-x^2 \leq 0$ , а далі додамо до обох частин отриманої нерівності 5. Таким чином, отримуємо:  $-x^2 + 5 \leq 5 \Rightarrow E(y) = (-\infty; 5]$ .

г) функція  $y = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$  має областю визначення одну єдину точку  $x = 2$ . А тому приймає єдине значення, що дорівнює  $y(2) = \sqrt{2-2} + \sqrt{2-2} = 0$ .

Отже,  $E(y) = \{0\}$ .

**Відповідь:** а)  $E(y) = [-5; +\infty)$ ; б)  $E(y) = [2; +\infty)$ ; в)  $E(y) = (-\infty; 5]$ ; г)  $E(y) = \{0\}$ .

Для розвитку вміння оцінювати значення виразів (знаходити області визначення функцій) корисними є вправи, пов'язані із квадратичними функціями. Наприклад: **Завдання 2.** Знайти область значень функції:

$$\text{а) } y = x^2 - 2x + 3; \text{ б) } y = \frac{2}{x^2 - 2x + 3}.$$

*Розв'язання:* а) функція  $y = x^2 - 2x + 3$  квадратична; областю її визначення є множина всіх дійсних чисел; графіком є парабола, вітки якої спрямовані вгору; областю значень є проміжок  $E(y) = [y_e; +\infty)$ , де  $y_e$  – ордината вершини параболи. Отже, знайшовши значення  $y_e$ , знайдемо область визначення заданої функції. Зазначимо, що в різних підручниках з алгебри, по-перше, фігурують різні позначення для координат вершини параболи (наприклад,  $(x_e; y_e)$  [9],  $(x_0; y_0)$  [8],  $(m; n)$  [7]); по-друге, різні способи відшукування ординати вершини (підставити значення абсциси вершини у саму функцію та обчислити  $y_e = f(x_e)$  [9]; рахувати за формулою  $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$  [8,7]). Нам імпонує перший спосіб обчислення, адже сучасні учні не схильні до запам'ятовування формул. Достатньо того, щоб вони запам'ятали, як знаходити абсцису вершини параболи, а саме  $x_e = \frac{-b}{2a}$ . Отже, повертаючись до нашого прикладу, знаходимо:  $x_e = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2} = 1$ ,  $y_e = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 1 - 2 + 3 = 2$ . Звідки,  $E(y) = [2; +\infty)$ .

б) розглядаючи функцію  $y = \frac{2}{x^2 - 2x + 3}$ , помічаємо, що знаменник ніколи не перетворюється в нуль, а приймає значення з проміжку  $[2; +\infty)$ , що було встановлено вище у пункті а). Таким чином, дріб  $\frac{2}{x^2 - 2x + 3}$  приймає лише додатні значення, але не більші за 1. Отже, можемо записати:  $0 < \frac{2}{x^2 - 2x + 3} \leq 1 \Rightarrow E(y) = (0; 1]$ .

*Відповідь:* а)  $E(y) = [2; +\infty)$ ; б)  $E(y) = (0; 1]$ .

В старших класах школи (профільний рівень) здобувачі освіти вивчають ірраціональні, тригонометричні (10 клас), показникові, логарифмічні функції (11 клас) та їх основні властивості. Тому можуть оцінювати ірраціональні, тригонометричні, показникові та логарифмічні вирази. Наприклад: **Завдання 3.**

Оцініть значення виразу: а)  $4\sin x - 3$  [3, с.190]; б)  $\frac{1}{\cos x - 2}$  [5, с.130];

$$\text{в) } 7\cos^2 x + 3\sin^2 x \text{ [3, с.200].}$$

*Розв'язання:*

а) відомо, що  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , тоді за властивостями числових нерівностей:  $-4 \leq 4\sin x \leq 4$  та  $-4 - 3 \leq 4\sin x - 3 \leq 4 - 3 \Rightarrow -7 \leq 4\sin x - 3 \leq 1$ ;

б) відомо, що  $-1 \leq \cos x \leq 1$  та  $-1 - 2 \leq \cos x - 2 \leq 1 - 2 \Rightarrow -3 \leq \cos x - 2 \leq -1$ , тоді дріб  $\frac{1}{\cos x - 2}$  міститься в межах  $-1 \leq \frac{1}{\cos x - 2} \leq -\frac{1}{3}$ ;

в) спочатку спростимо вираз  $7\cos^2 x + 3\sin^2 x = 4\cos^2 x + (3\cos^2 x + 3\sin^2 x) = 4\cos^2 x + 3$ . Далі оцінимо його значення  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 4\cos^2 x \leq 4 \Rightarrow 0 + 3 \leq 4\cos^2 x + 3 \leq 4 + 3 \Rightarrow 3 \leq 4\cos^2 x + 3 \leq 7$

Відповідь: а)  $[-7; 1]$ ; б)  $\left[-1; -\frac{1}{3}\right]$ ; в)  $[3; 7]$ .

Подібні задачі трапляються і в сертифікаційних зошитах зовнішнього незалежного оцінювання навчальних досягнень учнів з математики. Зокрема, серед задач ЗНО - 2013 р. є **завдання**: Знайдіть найбільше значення функції

$y = \frac{(1 - 2\cos x)^4}{2}$ . Дане завдання вимагає здійснити оцінку значення виразу

$\frac{(1 - 2\cos x)^4}{2}$ . Для цього виконуються послідовні оцінки, наприклад:  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow$

$-2 \leq -2\cos x \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 1 - 2\cos x \leq 3 \Rightarrow 0 \leq (1 - 2\cos x)^4 \leq 81 \Rightarrow 0 \leq \frac{(1 - 2\cos x)^4}{2} \leq \frac{81}{2} = 40,5$ .

Відповідь: найбільше значення функції 40,5. В звіті ЗНО [12] не надано інформації щодо кількості учнів, що впорались із даним завданням, хоча можна припустити, що не багато і ми можемо віднести це завдання до розряду складних.

Задачі на знаходження області визначення та області значень функцій, що містять ірраціональності, за статистичними даними звітів ЗНО є складними для учнів. Наприклад, завдання: «Укажіть область значень функції  $y = \sqrt{x^2 + 9} - 6$

| А              | Б              | В              | Г               | Д                    |
|----------------|----------------|----------------|-----------------|----------------------|
| $[9; +\infty)$ | $[0; +\infty)$ | $[3; +\infty)$ | $[-3; +\infty)$ | $(-\infty; +\infty)$ |

(ЗНО 2008 р.)» – виконало лише 26,21% учнів які проходили тестування, що вказує на складність завдання. Так, це завдання потребувало глибокого аналізу виразу  $\sqrt{x^2 + 9} - 6$ . Область визначення заданої функції – множина всіх дійсних чисел, через те, що підкореневий вираз  $x^2 + 9$  при будь-якому значенні змінної  $x$  приймає додатні значення. Мінімальне значення виразу  $x^2 + 9$  дорівнює 9, максимального значення не має, тобто  $(x^2 + 9) \geq 9$ , а тому, враховуючи, що  $y = \sqrt{x^2 + 9} - 6$

зростаюча функція, оцінимо значення виразу  $\sqrt{x^2 + 9} - 6$ :  $\sqrt{x^2 + 9} \geq \sqrt{9} \Rightarrow \sqrt{x^2 + 9} \geq 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 9} - 6 \geq 3 - 6 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 9} - 6 \geq -3$ . Отже, правильна відповідь «Г», тобто проміжок  $[-3; +\infty)$ .

Приступати до розгляду методу оцінки при розв'язуванні рівнянь варто лише тоді, коли учні мають досвід вирішення задач на знаходження області значень різноманітних виразів та функцій, вміють оцінювати вирази, використовуючи при цьому властивості числових нерівностей.

Розглянемо задачі із пробних та основних сесій ЗНО з математики, які передбачають використання методу оцінки для свого розв'язання.

**Задача 1.** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{2x^2 + 7x - 9} + |\sin(\pi x) + 1| = 0$ . Якщо рівняння має один корінь, то запишіть його у відповідь. Якщо рівняння має більше, ніж один корінь, то у відповідь запишіть суму всіх коренів (ЗНО 2010 р.).

*Розв'язання:* задане рівняння має вигляд  $f_1(x) + f_2(x) = C$ , де  $f_1(x) = \sqrt{2x^2 + 7x - 9}$ ,  $f_2(x) = |\sin(\pi x) + 1|$ ,  $C = 0$ . Алгоритм розв'язання такого типу рівнянь наведений вище. Оцінимо значення  $f_1(x)$  та  $f_2(x)$ . Маємо:  $f_1(x) = \sqrt{2x^2 + 7x - 9} \geq 0$ ,  $f_2(x) = |\sin(\pi x) + 1| \geq 0 \Rightarrow f_1(x) + f_2(x) \geq 0$ . Отже, можемо переходити до рівносильної системи, адже рівність нулю буде виконуватись лише у випадку, коли обидва доданки дорівнюють нулю.

$$\begin{cases} \sqrt{2x^2 + 7x - 9} = 0; \\ |\sin(\pi x) + 1| = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + 7x - 9 = 0; \\ \sin(\pi x) + 1 = 0; \end{cases}$$

Перше рівняння системи – квадратне. Розв'язуємо, використовуючи дискримінант чи властивості суми коефіцієнтів: « $a + b + c = 0$ , тоді  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{c}{a}$ ».

Отже, знаходимо  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{-9}{2}$ .

Друге рівняння системи – тригонометричне, яке зводиться до частинного випадку:  $\sin(\pi x) = -1 \Rightarrow \pi x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -\frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$ .

Розв'язком системи є спільний корінь обох рівнянь системи. Помічаємо, що серед розв'язків другого рівняння не може бути цілих, а тому спільним розв'язком обох рівнянь є  $x = \frac{-9}{2}$  за умови, якщо вдасться знайти таке значення

$k \in \mathbb{Z}$ , при якому виконуватиметься рівність  $-\frac{9}{2} = -\frac{1}{2} + 2k$ . Маємо:  $2k = -4$ , а отже  $k = -2 \in \mathbb{Z}$ . Таким чином розв'язком системи є  $x = \frac{-9}{2} = -4,5$ .

*Відповідь:* -4,5.

За даними звіту ЗНО-2010 р. розглянуте вище рівняння змогли розв'язати повністю лише 3,74% всіх учасників тестування, що відносить його до розряду «дуже складних».

**Задача 2.** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right) = 1 + (y-1)^8; \\ 4\sin\frac{\pi y}{2} = 4x^2 + 4x + 5. \end{cases}$$
 Запишіть

у відповідь добуток  $x_0 \cdot y_0$ , якщо пара  $(x_0; y_0)$  є розв'язком системи рівнянь (ЗНО -2006 р.).

*Розв'язання:* обидва рівняння, що містяться в заданій системі є трансцендентними, а тому потребують пошуку методу розв'язання. Спробуємо скористатись алгоритмом методу оцінки для рівнянь вигляду  $f(x) = g(x)$ .

Розглянемо детальніше перше рівняння системи:  $\cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right) = 1 + (y-1)^8$ .

Оцінимо значення обох частин рівняння, враховуючи, що змінні  $x$  та  $y$  можуть приймати будь-які дійсні значення.

| Оцінка лівої частини рівняння                         | Оцінка правої частини рівняння                                               |
|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right) \leq 1$ | $(y-1)^8 \geq 0 \Rightarrow 1+(y-1)^8 \geq 1+0 \Rightarrow 1+(y-1)^8 \geq 1$ |

Помічаємо, що виконується умова ( $\epsilon$ ) наведеного вище алгоритму: значення лівої частини рівняння не більше 1, а значення правої частини рівняння в цей час не менше 1. Отже, від рівняння  $\cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right) = 1+(y-1)^8$  можемо

переходити до рівносильної системи: 
$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right) = 1; \\ 1+(y-1)^8 = 1. \end{cases}$$

В отриманій системі рівняння простіші. Розв'яжемо кожне з них:

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                                                                                |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\cos\left(\frac{\pi}{2}(2x+5)\right) = 1$ – частинний випадок;<br>$\frac{\pi}{2}(2x+5) = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2x+5}{2} = 2k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$<br>$\Rightarrow 2x+5 = 4k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x = 4k-5, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$<br>$\Rightarrow x = \frac{4k-5}{2}, k \in \mathbb{Z}$ | $1+(y-1)^8 = 1 \Rightarrow (y-1)^8 = 0 \Rightarrow$<br>$\Rightarrow y-1 = 0 \Rightarrow y = 1$ |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|

Розв'язком першого рівняння є пара чисел  $\left(\frac{4k-5}{2}; 1\right), k \in \mathbb{Z}$ .

Тепер розв'яжемо друге рівняння заданої системи:  $4\sin\frac{\pi y}{2} = 4x^2 + 4x + 5$ . Воно також є трансцендентним, тому застосовуємо до нього метод оцінки.

| Оцінка лівої частини рівняння                                                        | Оцінка правої частини рівняння                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $-1 \leq \sin\frac{\pi y}{2} \leq 1 \Rightarrow -4 \leq 4\sin\frac{\pi y}{2} \leq 4$ | $4x^2 + 4x + 5$ – квадратний тричлен. Область його значень: $[y_6; +\infty)$ .<br>Обчислюємо $x_6 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$ . Тоді<br>$y_6 = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 5 = 4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{4}{2} + 5 =$<br>$= 1 - 2 + 5 = 4$ . Звідси, $4x^2 + 4x + 5 \geq 4$ . |

Помічаємо, що знову виконується умова ( $\epsilon$ ) наведено вище алгоритму: значення лівої частини рівняння не більше 4, а значення правої частини рівняння в цей час не менше 4. Отже, від рівняння  $4\sin\frac{\pi y}{2} = 4x^2 + 4x + 5$  можемо переходити

до рівносильної системи: 
$$\begin{cases} 4\sin\frac{\pi y}{2} = 4; \\ 4x^2 + 4x + 5 = 4. \end{cases}$$

Оцінюючи значення правої частини, ми встановили, що  $4x^2 + 4x + 5 = 4$  виконується при  $x = -\frac{1}{2}$ . Тому  $x = -\frac{1}{2}$  – розв'язок другого рівняння отриманої системи.

Розв'яжемо перше рівняння цієї системи:  $4\sin\frac{\pi y}{2}=4 \Rightarrow \sin\frac{\pi y}{2}=1$  – частинний випадок. Маємо  $\frac{\pi y}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{y}{2}=\frac{1}{2}+2n, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow y=1+4n, n \in \mathbb{Z}$ .

Отже, розв'язком другого рівняння початкової системи є пара чисел  $\left(-\frac{1}{2}; 1+4n\right), n \in \mathbb{Z}$ .

Співставляючи розв'язки першого та другого рівнянь  $\left(\frac{4k-5}{2}; 1\right), k \in \mathbb{Z}$ ,  $\left(-\frac{1}{2}; 1+4n\right), n \in \mathbb{Z}$ , спробуємо знайти спільний розв'язок:  $\frac{4k-5}{2}=-\frac{1}{2}$  та  $1=1+4n$ , де  $k, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow 4k-5=-1; 4n=0 \Rightarrow 4k=4; n=0; \Rightarrow k=1; n=0 \Rightarrow k, n \in \mathbb{Z}$ . Це означає, що знайшлися такі цілі значення  $k, n$ , при яких система має розв'язок  $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ . У відповідь необхідно записати добуток:  $-\frac{1}{2} \cdot 1 = -0,5$ .

*Відповідь:* -0,5.

**Задача 3 (ЗНО-2010)** Розв'яжіть систему рівнянь 
$$\begin{cases} 5\cos\frac{\pi y}{2}=x^2-8x+21; \\ y+5x-4=0. \end{cases}$$

Якщо система має єдиний розв'язок  $(x_0; y_0)$ , то у відповідь запишіть суму  $x_0 + y_0$ ; якщо система має більше ніж один розв'язок, то у відповідь запишіть кількість усіх розв'язків.

В даній системі лише перше рівняння є трансцендентним і до нього ми застосовуємо метод оцінки. Розв'язати її самостійно пропонуємо читачу. Лише зазначимо, що за даними статистичних звітів ЗНО - 2010 р. [13] правильно виконали це завдання 3,09% усіх учасників тестування, що вказує на значну його складність для випускників.

Метод оцінки використовується також для розв'язування рівнянь з параметром, які традиційно входять до завдань зовнішнього незалежного оцінювання навчальних досягнень з математики і мають на меті перевірку рівня логічного й абстрактного мислення випускників шкіл, здатності до аналізу й узагальнення, необхідних для подальшого навчання у закладах вищої освіти. Як свідчать офіційні звіти про проведення ЗНО, задачі з параметрами викликають значні труднощі в учасників тестування. Адже, такі завдання належать до найвищого когнітивного рівня. Показовим є те, що максимальну кількість балів за виконання завдання з параметром отримує дуже незначна кількість учасників, при цьому майже 90 % навіть не приступають до його розв'язання [10].

**Задача 4 (ЗНО - 2011 р.).** Знайдіть найменше значення  $a$ , при якому має розв'язки рівняння  $\frac{1}{2}(\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 6 - 5a - 2a^2$

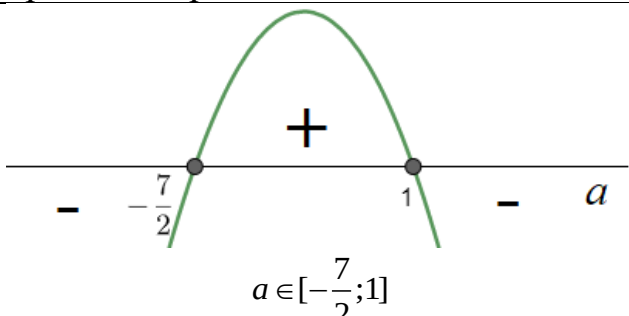
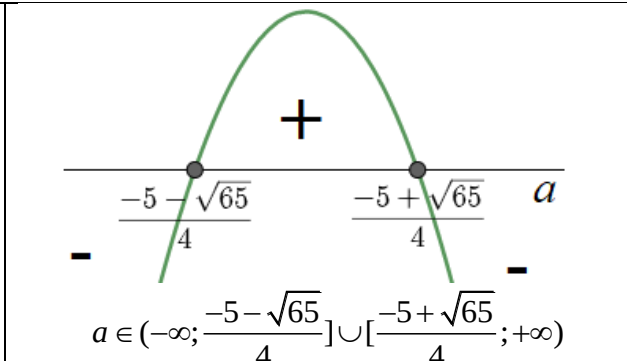
*Розв'язання:* Задача містить параметр  $a$  і за виглядом дуже схожа на попередню розглянуту, але підхід до розв'язання буде дещо інший.

Оцінимо ліву частину рівняння. Розкривши дужки, отримаємо:  
 $\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$ . Скористаємось методом введення допоміжного кута.

Нехай  $\cos \varphi = \frac{1}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$ . Можемо переписати:  $\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x =$   
 $= \cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right)$  та оцінити  $-1 \leq \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1$ .

Якщо ліва частина рівняння обмежена проміжком  $[-1; 1]$ , то для того, щоб існував розв'язок, необхідно щоб права частина також приймала значення з даного проміжку. Отже,  $-1 \leq 6 - 5a - 2a^2 \leq 1$ . Перейдемо до рівносильної системи нерівностей:  $\begin{cases} 6 - 5a - 2a^2 \geq -1; \\ 6 - 5a - 2a^2 \leq 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a^2 - 5a + 7 \geq 0; \\ -2a^2 - 5a + 5 \leq 0. \end{cases}$  Розв'яжемо кожен із

нерівностей отриманої системи методом парабол:

|                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $-2a^2 - 5a + 7 \geq 0;$<br>$D = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 7 = 25 + 56 = 81; \sqrt{D} = 9$<br>$a_1 = \frac{5-9}{2 \cdot (-2)} = \frac{-4}{-4} = 1; a_2 = \frac{5+9}{2 \cdot (-2)} = \frac{14}{-4} = -\frac{7}{2}$ | $-2a^2 - 5a + 5 \leq 0;$<br>$D = (-5)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 5 = 25 + 40 = 65;$<br>$\sqrt{D} = \sqrt{65}$<br>$a_3 = \frac{5-\sqrt{65}}{-4} = \frac{\sqrt{65}-5}{4};$<br>$a_4 = \frac{5+\sqrt{65}}{-4} = \frac{-5-\sqrt{65}}{4}$ |
| <p>Нанесемо отримані точки на числову пряму; зобразимо параболу, вітки якої направлені вниз; розставимо знаки «+» та «-»; виберемо потрібний проміжок/проміжки.</p>                                                 |                                                                                                                                                                                                                                 |
|  <p><math>a \in \left[-\frac{7}{2}; 1\right]</math></p>                                                                          |  <p><math>a \in \left(\frac{-5-\sqrt{65}}{4}; \frac{-5+\sqrt{65}}{4}\right)</math></p>                                                      |

Оцінивши значення виразів  $\frac{\sqrt{65}-5}{4}$  та  $\frac{-5-\sqrt{65}}{4}$ , знайдемо розв'язок системи нерівностей. Маємо:  $\frac{3}{4} < \frac{\sqrt{65}-5}{4} < 1; -\frac{7}{2} < \frac{-5-\sqrt{65}}{4} < 0$ , а тому розв'язком системи є об'єднання двох проміжків:  $a \in \left[-\frac{7}{2}; \frac{-5-\sqrt{65}}{4}\right] \cup \left[\frac{-5+\sqrt{65}}{4}; 1\right]$  (рис.1).

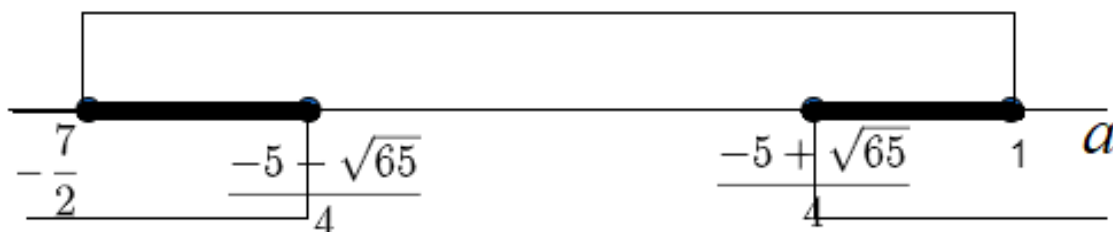


Рис. 1. Знаходження розв'язків системи нерівностей

За умовою задачі необхідно визначити найменше значення параметру  $a$ , при якому задане рівняння має розв'язок. Ми встановили, що рівняння має розв'язки, якщо  $a \in [-\frac{7}{2}; \frac{-5-\sqrt{65}}{4}] \cup [\frac{-5+\sqrt{65}}{4}; 1]$ . При цьому найменше значення параметра  $a$  дорівнює  $-\frac{7}{2} = -3,5$ .

*Відповідь:* -3,5.

Дане завдання виконало повністю лише 2,2% учасників тестування, що свідчить про його підвищену складність для випускників.

#### Задача 5. (ЗНО пробне, 2014 р.).

Знайдіть найменше значення параметра  $a$ , при якому рівняння  $2^{\sin^2(2\pi x + \frac{5\pi}{4})} = \frac{4}{(x-a)^2 - 6(x-a) + 13}$  має додатний корінь.

*Розв'язання:* Задане рівняння є трансцендентним, тому застосуємо до нього метод оцінки.

| Оцінка лівої частини рівняння                                                                                                                                                                                                                         | Оцінка правої частини рівняння                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $0 \leq \sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right) \leq 1$ , враховуючи, що показникова функція $y = 2^x$ зростаюча $\Rightarrow 2^0 \leq 2^{\sin^2(2\pi x + \frac{5\pi}{4})} \leq 2^1 \Rightarrow 1 \leq 2^{\sin^2(2\pi x + \frac{5\pi}{4})} \leq 2$ | $(x-a)^2 - 6(x-a) + 13$ – квадратний тричлен, областю значень якого є проміжок $[y_0; +\infty)$ .<br>Обчислюємо координату вершини, враховуючи, що аргументом є вираз $x-a$ : $(x-a)_0 = \frac{-(-6)}{2} = \frac{6}{2} = 3$ .<br>Тоді $y_0 = (3)^2 - 6 \cdot 3 + 13 = 9 - 18 + 13 = 4$ .<br>Отже, область значень виразу $(x-a)^2 - 6(x-a) + 13$ є $[4; +\infty)$ . Таким чином дріб $0 < \frac{4}{(x-a)^2 - 6(x-a) + 13} \leq 1$ . |

Враховуючи, що права частина рівняння приймає значення не більше за 1, а ліва частина рівняння – не менші за 1, можемо переходити до рівносильної

$$\text{системи рівнянь: } \begin{cases} 2^{\sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right)} = 1; \\ \frac{4}{(x-a)^2 - 6(x-a) + 13} = 1. \end{cases}$$

Враховуючи оцінку правої частини, рівність  $\frac{4}{(x-a)^2 - 6(x-a) + 13} = 1$

виконується, коли  $(x-a)^2 - 6(x-a) + 13 = 4$ , а отже при  $x-a=3 \Rightarrow x=a+3$ .

Тепер розв'яжемо перше рівняння отриманої системи:  $2^{\sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right)} = 1$  – показникове.  $2^{\sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right)} = 2^0 \Rightarrow \sin^2\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \sin\left(2\pi x + \frac{5\pi}{4}\right) = 0$  – частинний випадок:  $2\pi x + \frac{5\pi}{4} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x + \frac{5}{4} = k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{4k-5}{8}, k \in \mathbb{Z}$ .

Знайдені значення змінної  $x$  мають співпадати та, за умовою задачі, бути додатними:  $x = a+3 > 0$  та  $x = \frac{4k-5}{8} > 0, k \in \mathbb{Z}$ . Звідки  $a > -3$  та  $k > \frac{5}{4}, k \in \mathbb{Z}$ , при цьому маємо знайти найменше значення параметра  $a$ .

Через те, що  $k$  – цілі, маємо  $k = 2, 3, 4, \dots$

Нехай  $k = 2$ , тоді  $x = \frac{4 \cdot 2 - 5}{8} = \frac{3}{8}$ . Знайдемо відповідне значення  $a$ , використовуючи рівність  $x = a+3$ :  $\frac{3}{8} = a+3 \Rightarrow a = \frac{3}{8} - 3 = -2\frac{5}{8} = -2,625$ . Таким чином, найменше значення параметра  $a$ , при якому задане рівняння має додатний корінь становить  $-2,625$ .

*Відповідь:*  $-2,625$ .

**Задача 5.** Для всіх дійсних значень параметра  $a$  розв'яжіть рівняння  $(3a-2)^2 \log_3(-4x-4x^2) = -(a+1)^2 \log_7(1-2x^2)$  [11, с.78].

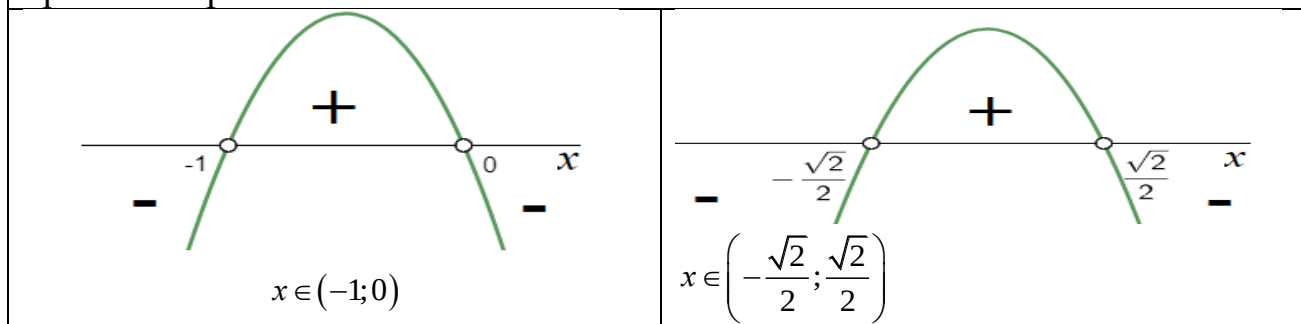
*Розв'язання:* Аналізуючи задане рівняння, помічаємо, що основи логарифмів різні, підлогарифмічні вирази – квадратні, що дозволяє їх оцінити. До того ж рівняння містить параметр. Тому спробуємо використати метод оцінки для його розв'язання.

Знайдемо ОДЗ заданого рівняння.  $\begin{cases} -4x-4x^2 > 0; \\ 1-2x^2 > 0; \end{cases}$  Розв'яжемо кожну із

нерівностей отриманої системи методом парабол:

|                                                                                                                       |                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $-4x^2 - 4x > 0$ ; Знайдемо корені рівняння<br>$-4x^2 - 4x = 0 \quad -4x(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;$<br>$x_2 = -1$ | $1-2x^2 > 0$ ; Знайдемо корені рівняння<br>$1-2x^2 = 0;$<br>$2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Нанесемо отримані точки на числову пряму; зобразимо параболу, вітки якої направлені вниз; розставимо знаки «+» та «-»; виберемо потрібний проміжок/проміжки.



Знайдемо розв'язок системи нерівностей, взявши перетин отриманих проміжків (рис.2).

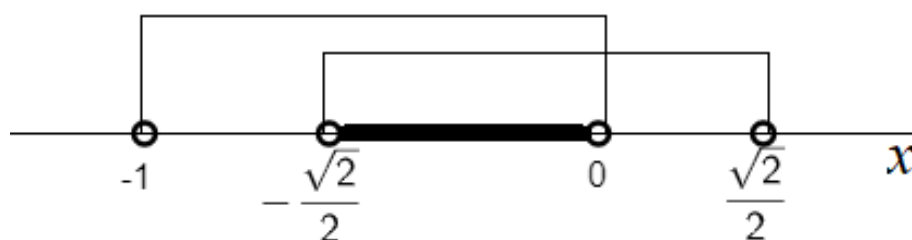


Рис. 2. Знаходження ОДЗ рівняння

Отже, ОДЗ заданого рівняння є проміжок  $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right)$ . Тепер оцінимо значення обох частин рівняння на ОДЗ.

| Оцінка лівої частини рівняння                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Оцінка правої частини рівняння                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Підлогарифмічний вираз <math>-4x^2 - 4x = -((4x^2 + 4x + 1) - 1) = -((2x + 1)^2 - 1) = 1 - (2x + 1)^2 \leq 1</math>. Отже, <math>0 &lt; -4x^2 - 4x \leq 1</math>.</p> <p>При цьому <math>\log_3(-4x^2 - 4x) \leq 0</math>.</p> <p>Враховуючи що <math>(3a - 2)^2 \geq 0</math>, маємо: <math>(3a - 2)^2 \log_3(-4x - 4x^2) \leq 0</math>.</p> | <p>Підлогарифмічний вираз <math>1 - 2x^2 &gt; 0</math> але <math>1 - 2x^2 &lt; 1</math>, адже <math>x \neq 0</math> (ОДЗ). Тому <math>0 &lt; 1 - 2x^2 &lt; 1</math>.</p> <p>Отже, <math>\log_7(1 - 2x^2) &lt; 0</math>.</p> <p>Враховуючи, що <math>-(a + 1)^2 \leq 0</math>, маємо <math>-(a + 1)^2 \log_7(1 - 2x^2) \geq 0</math></p> |

Отримали, що ліва частина рівняння приймає значення не більші за нуль, а права – не менші за нуль. Це означає, що можна переходити до рівносильної системи рівнянь:

$$\begin{cases} (3a - 2)^2 \log_3(-4x - 4x^2) = 0; \\ -(a + 1)^2 \log_7(1 - 2x^2) = 0. \end{cases}$$

Розглянемо спочатку друге рівняння отриманої системи  $-(a + 1)^2 \log_7(1 - 2x^2) = 0$ . Під час оцінки було встановлено, що  $\log_7(1 - 2x^2) < 0$ , тому лише  $-(a + 1)^2 = 0 \Rightarrow a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$ .

$$\begin{aligned} & \text{Підставимо } a = -1 \text{ в перше рівняння системи: } (3 \cdot (-1) - 2)^2 \log_3(-4x - 4x^2) = 0 \\ \Rightarrow & 25 \log_3(-4x - 4x^2) = 0 \Rightarrow -4x - 4x^2 = 1 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x + 1)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & x = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Таким чином, при  $a = -1$  розв'язком рівняння є  $x = -\frac{1}{2}$ , при всіх інших значеннях параметра  $a$  – рівняння розв'язків немає.

*Відповідь:* при  $a = -1$ ,  $x = -\frac{1}{2}$ ; при  $a \neq -1$ ,  $x \in \emptyset$ .

**Задача 6.** Знайти всі значення  $\alpha$ , які задовольняють умову  $2 < \alpha < 5$ , при яких рівняння  $\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$  має хоча б один розв'язок з відрізка  $2 \leq x \leq 3$  [11, с.79].

*Розв'язання:* Аналіз вигляду заданого рівняння показує, що воно трансцендентне, і його частини можна оцінити.

Знайдемо ОДЗ заданого рівняння:  $3 - |\sin \alpha x| > 0$  – виконується при будь-якому  $x \in \mathbb{R}$ , адже  $0 \leq |\sin \alpha x| \leq 1$ , а тоді  $3 - |\sin \alpha x| \geq 2$ . Враховуючи це, оцінимо ліву частину рівняння:  $\log_2(3 - |\sin \alpha x|) \geq 1$ . Оцінимо праву частину рівняння:

$$-1 \leq \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1. \text{ Отже, ліва частина рівняння приймає значення не менші за 1,}$$

а права – не більші за 1. Тому можемо переходити до рівносильної системи

$$\text{рівнянь: } \begin{cases} \log_2(3 - |\sin \alpha x|) = 1; \\ \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - |\sin \alpha x| = 2; \\ \pi x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\sin \alpha x| = 1; \\ x - \frac{1}{6} = 2k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sin \alpha x = \pm 1; \\ x = \frac{1}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ x = \frac{1}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

За умовою задачі  $2 \leq x \leq 3$ . Скористаємось цим для визначення можливих значень  $k \in \mathbb{Z}$ , де  $x = \frac{1}{6} + 2k$ . Отже,  $2 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 3 \Rightarrow 2 - \frac{1}{6} \leq 2k \leq 3 - \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{11}{6} \leq 2k \leq \frac{17}{6} \Rightarrow \frac{11}{12} \leq k \leq \frac{17}{12}$ . Серед цілих значень на одержаному відрізку лише  $k = 1$ . Обчислимо

$$\text{значення } x \text{ для даного значення } k: x = \frac{1}{6} + 2 \cdot 1 = 2\frac{1}{6} = \frac{13}{6}.$$

Знайдемо всі значення  $\alpha$ , які задовольняють умову  $2 < \alpha < 5$ , виразивши

$$\text{його з рівності } \alpha x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}: \alpha = \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{x}, n \in \mathbb{Z}, \text{ де } x = \frac{13}{6}. \text{ Отже,}$$

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) : \frac{13}{6}, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{13} + \frac{6\pi n}{13}, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{3\pi(1 + 2n)}{13}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Нехай } n = 1, \text{ тоді } \alpha = \frac{3\pi(1 + 2 \cdot 1)}{13} = \frac{9\pi}{13} \in (2; 5).$$

Нехай  $n = 2$ , тоді  $\alpha = \frac{3\pi(1+2 \cdot 2)}{13} = \frac{15\pi}{13} \in (2; 5)$ .

Нехай  $n = 3$ , тоді  $\alpha = \frac{3\pi(1+2 \cdot 3)}{13} = \frac{21\pi}{13} \notin (2; 5)$ .

Отже, значення  $\alpha$  з проміжку  $(2; 5)$  знайдені, при цьому  $x = \frac{13}{6} \in [2; 3]$ .

Відповідь:  $\frac{9\pi}{13}; \frac{15\pi}{13}$ .

Незважаючи на те, що в ЗНО з математики задачі, які розв'язуються методом оцінки неодноразово зустрічались, в сучасних підручниках їх одиниці, або й взагалі такі завдання відсутні.

В одному з діючих підручників алгебри для 10 класу профільного рівня знаходимо рівняння, яке розв'язується методом оцінки, але спосіб оцінювання значення виразу тут відмінний від розглянутих вище.

**Задача 7.** Розв'яжіть рівняння  $\sqrt{x} + \sqrt{8-x} = x^2 - 8x + 20$  [3, с. 412].

*Розв'язання:* На вигляд дане рівняння нескладне, ірраціональне, але застосовувати до нього стандартні методи піднесення до квадрату не хочеться, адже вираз, що міститься в його правій частині перетвориться на вираз четвертої степені і процес розв'язування рівняння лише ускладниться.

$$\text{Знайдемо ОДЗ рівняння: } \begin{cases} x \geq 0; \\ 8-x \geq 0; \\ x^2 - 8x + 20 \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0; \\ x \leq 8; \\ D < 0, x^2 - 8x + 20 > 0, x \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow x \in [0; 8]$$

Для оцінки значень обох частин рівняння скористаємось похідною. Розглянемо функції  $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{8-x}$  та  $g(x) = x^2 - 8x + 20$ .

Знайдемо найбільше та найменше значення цих функцій на ОДЗ.

$$1) \quad \text{знайдемо похідну } f'(x) = (\sqrt{x})' + (\sqrt{8-x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-1}{2\sqrt{8-x}} = \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{8-x}};$$

$$\text{розв'яжемо рівняння } f'(x) = 0: \frac{\sqrt{8-x} - \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \cdot \sqrt{8-x}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{8-x} - \sqrt{x} = 0; \\ 2\sqrt{x} \cdot \sqrt{8-x} \neq 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{8-x} = \sqrt{x}; \\ x \neq 0, x \neq 8; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8-x = x; \\ x \neq 0, x \neq 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 8; \\ x \neq 0, x \neq 8; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4; \\ x \neq 0, x \neq 8. \end{cases}$$

Знайдемо значення функції  $f(x)$  в точці  $x = 4$  та на кінцях відрізка  $[0; 8]$ :

$$f(0) = \sqrt{0} + \sqrt{8-0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}; \quad f(4) = \sqrt{4} + \sqrt{8-4} = 4; \quad f(8) = \sqrt{8} + \sqrt{8-8} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Отже, на ОДЗ значення функції  $f(x)$  можна оцінити наступним чином  $2\sqrt{2} \leq f(x) \leq 4$ .

$$2) \quad \text{знайдемо похідну } g'(x) = (x^2 - 8x + 20)' = 2x - 8; \quad \text{розв'яжемо рівняння } g'(x) = 0: 2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4. \text{ Легко можна встановити, що знайдена точка } \\ \text{— це точка мінімуму функції } g(x) = x^2 - 8x + 20, \quad \text{а отже} \\ g_{\min}(x) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 20 = 16 - 32 + 20 = 4 \Rightarrow \text{на ОДЗ } g(x) = x^2 - 8x + 20 \geq 4.$$

Отже, завдяки оцінці обох частин рівняння, ми встановили, що ліва частина рівняння не більше 4, а права – не менша 4. Тому можемо перейти до рівносильної системи рівнянь: 
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{8-x} = 4; \\ x^2 - 8x + 20 = 4; \end{cases} \Rightarrow x = 4.$$

*Відповідь:* 4.

Наостанок розглянемо подібне до попереднього рівняння, яке містить параметр.

**Задача 8.** При яких дійсних значеннях параметра  $a$  рівняння  $\sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x} = a$  має розв'язок.

*Розв'язання:* Спочатку знайдемо ОДЗ заданого рівняння: 
$$\begin{cases} x-2 \geq 0; \\ 8-2x \geq 0; \\ a \geq 0; \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 2; \\ x \leq 4; \\ a \geq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 4; \\ a \geq 0. \end{cases}$$

Позначимо  $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x}$ . На знайдений області визначення даної функції, яка є відрізком  $2 \leq x \leq 4$ , встановимо найбільше та найменше її значення.

Для цього знайдемо похідну:  $f'(x) = (\sqrt{x-2})' + (\sqrt{8-2x})' =$   
 $= \frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{8-2x}}$ . Розв'яжемо рівняння  $f'(x) = 0$ :  $\frac{1}{2\sqrt{x-2}} - \frac{1}{\sqrt{8-2x}} = 0, x \neq 2, x \neq 4 \Rightarrow$   
 $2\sqrt{x-2} = \sqrt{8-2x} \Rightarrow 4(x-2) = 8-2x \Rightarrow 4x-8 = 8-2x \Rightarrow 6x = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}.$

Знайдемо значення функції  $f(x)$  в точці  $x = \frac{8}{3}$  та на кінцях відрізка  $[2; 4]$ :

$$f(2) = \sqrt{2-2} + \sqrt{8-2 \cdot 2} = 2; \quad f\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{\frac{8}{3}-2} + \sqrt{8-2 \cdot \frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{\frac{8}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 3\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{6};$$

$$f(4) = \sqrt{4-2} + \sqrt{8-2 \cdot 4} = \sqrt{2}.$$

Отже,  $f_{\min}_{[2;4]}(x) = f(4) = \sqrt{2}$ ;  $f_{\max}_{[2;4]}(x) = f\left(\frac{8}{3}\right) = \sqrt{6}$ , а тому можна оцінити значення функції на відрізку  $[2; 4]$  наступним чином:  $\sqrt{2} \leq f(x) \leq \sqrt{6} \Rightarrow$  рівняння  $f(x) = a$  буде мати розв'язки за умови, що  $a \in [\sqrt{2}; \sqrt{6}]$ . При інших значеннях  $a$  рівняння розв'язків немає.

Дана задача має гарну графічну ілюстрацію (рис.3).

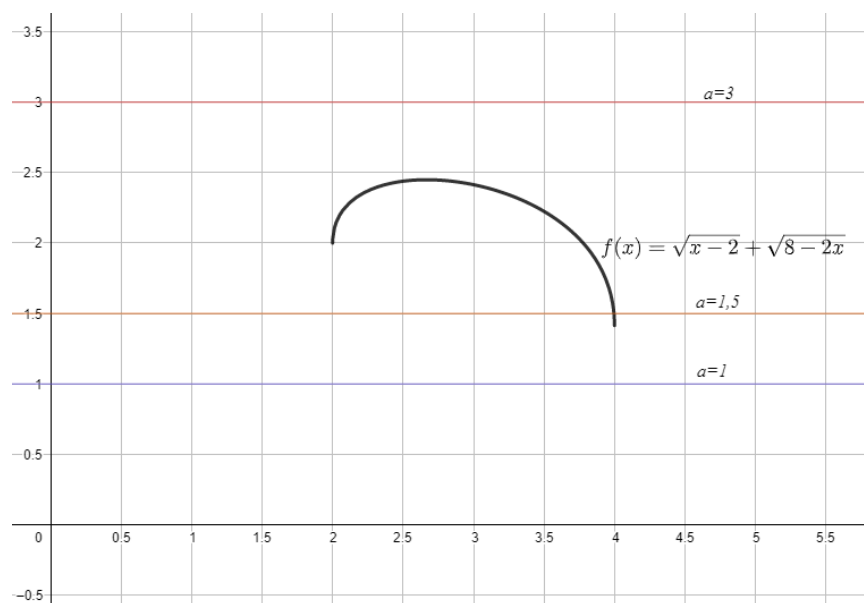


Рис. 3. Графічний розв'язок рівняння  $\sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x} = a$

Відповідь: при  $a \in [\sqrt{2}; \sqrt{6}]$  рівняння  $\sqrt{x-2} + \sqrt{8-2x} = a$  має розв'язки.

Звичайно, проведений в даній статті огляд задач, які розв'язуються за допомогою методу оцінки, не висчерпує всього їх різноманіття. Сподіваємось, що запропонований теоретичний матеріал, сформульовані орієнтовні алгоритми використання методу оцінки, а також наведені різнопланові приклади його застосовування стануть у нагоді учням та вчителям у процесі підготовки до складання зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень): підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2018. – 400 с.
2. Алгебра і початки аналізу (проф. рівень): підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти/ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський та ін. – Х. : Гімназія, 2019. – 352 с.
3. Алгебра і початки аналізу (профіль. рівень): під-руч. для 10-го кл. закл. заг. серед. освіти/ О.С. Істер, О.В. Єргіна. – Київ: Генеза, 2018. – 448 с.
4. Алгебра і початки аналізу (профіль. рівень): підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти / О. Істер, О. Єргіна. – Київ: Генеза, 2019. – 416 с.
5. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти/ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2018. – 336 с.
6. Алгебра і початки аналізу. Профільний рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти/ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, В.М. Владіміров, Н.Г. Владімірова. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2019. – 304 с.
7. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл./ Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 272 с.
8. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів/

А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х. : Гімназія, 2017. – 272 с.

9. Алгебра: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл./ О.С. Істер. – Київ : Генеза, 2017. – 264 с.

10. Ботузова Ю.В. Задачі з параметром в контексті STEM-освіти// Матеріали міжнародної науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти» (ПМО – 2019), м.Черкаси, 11-12 квітня 2019 р. – Черкаси: Вид. ФОП Гордієнко Є.І., 2019. – С. 237-238.

11. Горнштейн П.И., Полонский В.Б, Якир М.С. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 2005.– 328 с.

12. Офіційний звіт про проведення зовнішнього незалежного оцінювання знань випускників загальноосвітніх навчальних закладів України в 2013 році [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://testportal.gov.ua/ofzvit/>

13. Офіційний звіт про проведення зовнішнього незалежного оцінювання знань випускників загальноосвітніх навчальних закладів України в 2010 році [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <http://testportal.gov.ua/ofzvit/>

## РОЗДІЛ III.

### МАТЕМАТИЧНІ ОЛІМПІАДНІ ЗАВДАННЯ: РЕКОМЕНДАЦІЇ ЩОДО РОЗВ'ЯЗАННЯ

**Микола ГАЄВСЬКИЙ,**  
*старший викладач кафедри математики  
Центральноукраїнського  
державного педагогічного університету  
імені Володимира Винниченка,  
кандидат фізико-математичних наук*

#### ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДІВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ТА ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧ

**Постановка проблеми.** Диференціальне числення є одним із найважливіших розділів математики. Усвідомлення впливу поняття «похідна» на розвиток математики дає розуміння всіх можливих застосувань диференціального числення при розв'язуванні різних задач. У шкільному курсі математики стандартними є такі типи вправ: знаходження проміжків монотонності, точок екстремуму, задачі, що ілюструють геометричний похідної (дотична) або фізичний (швидкість) зміст похідної, поняття другої похідної та проміжки опуклості. Ясно, що в залежності рівня (академічний, стандарт, профільний чи поглиблений) на вивчення даної теми виділяється різна кількість годин та у підручнику містяться більш різноманітні типи задач.

Відомо, що більш детально диференціальне числення та його застосування будуть вивчатися в курсі вищої математики вже у закладах вищої освіти, проте існує значний спектр задач творчого та олімпіадного характеру, який можна розв'язати з використанням похідної без залучення складних, досить тонких елементарних міркувань. Розглянемо застосування похідної при розв'язуванні деяких типів задач творчого та олімпіадного характеру.

**Аналіз раніше виконаних досліджень.** Різні аспекти формування та розвитку творчого мислення та творчої особистості учня досліджували такі вчені, як Бевз Г.П., Бурда М.І., Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я., Швець В.О., Тарасенкова Н.А. та ін. Особливості системної організації розв'язування нестандартних та олімпіадних задач досліджується в роботах Ясінського В.А., Мітельмана І.М., Вороного О.М., Ізюмченко Л.В., Радченка В.М., Рубльова Б.В., Федака І.В., Сарани О.О., Бродського Я.С., Сліпенка О.К., Добосевича М.С., Лейфури В.М та ін. Зокрема, в роботі [1] розглянуто математичні аспекти підготовки учнів до розв'язування конкурсних завдань на прикладі однієї задачі із використанням як фактів елементарної математики, так і методів вищої математики, в [2] розглянуто методику доведення нерівностей із застосуванням елементів диференціального числення в шкільному курсі поглибленого вивчення

математики, а в роботах [2-9] розглянуто основні типи творчих задач та досліджено методи їх розв'язування.

**Виклад основного матеріалу.** Застосування теорії похідних спрощує розв'язання наступних задач, в котрих містяться подібні суми.

**Задача 1.** Перемножити  $(1-x)^2(1+2x+3x^2+\dots+20x^{19})$ .

Розглянемо суму  $s(x)=1+2x+3x^2+\dots+20x^{19}$ .

Ясно, що  $s(x)$  є похідною функції  $f(x)=x+x^2+\dots+x^{20}$ , але остання функція є сумою геометричної прогресії із знаменником  $x$ :

$$f(x)=x+x^2+\dots+x^{20}=\frac{x^{21}-x}{x-1}.$$

Тепер можемо знайти

$$s(x)=f'(x)=\left(\frac{x^{21}-x}{x-1}\right)'=\frac{(21x^{20}-1)(x-1)-x^{21}+x}{(x-1)^2}.$$

Остаточно

отримаємо

$$(1-x)^2(1+2x+3x^2+\dots+20x^{19})=(1-x)^2\cdot\frac{(21x^{20}-1)(x-1)-x^{21}+x}{(x-1)^2}=20x^{21}-21x^{20}+1.$$

**Задача 2.** Довести, що для всіх  $x \geq 0$  справедлива нерівність  $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$ .

Для доведення нерівності розглянемо функції  $f(x)=x - \frac{x^3}{6}$  та  $g(x)=\sin x$ .

Тоді

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{x^2}{2}, & g'(x) &= \cos x, \\ f''(x) &= 1 - x, & g''(x) &= -\sin x, \\ f'''(x) &= -1, & g'''(x) &= -\cos x. \end{aligned}$$

З останньої рівності слідує нерівності

$$f'''(x) \leq g'''(x) \Rightarrow f''(x) \leq g''(x) \Rightarrow f'(x) \leq g'(x) \Rightarrow f(x) \leq g(x).$$

Нерівність доведено.

Аналогічно можна довести наступні нерівності:

- $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$  при  $x \geq 0$ .
- $x - \frac{x^3}{6} \leq \operatorname{tg} x$  при  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Задача 3.** Довести, що для трьох додатних чисел  $a, b, c > 0$  має місце нерівність  $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)$ .

Без втрати загальності вважатимемо, що  $a > b > c$ , розглянемо функцію

$$f(x) = x^3 + b^3 + c^3 + 3xbc - xb(x+b) - bc(b+c) - xc(x+c).$$

Знайдемо її похідні  $f'(x) = 3x^2 + 3bc - 2bx - b^2 - 2cx - c^2$  та  $f''(x) = 6x - 2b - 2c$ .

Помітимо, що  $f''(x) = 6x - 2b - 2c$  - лінійна функція, котра є додатною на проміжку  $x \in [b, a]$ . Отже,  $f'(x)$  зростає на  $x \in [b, a]$ , а значить  $f'(b) \leq f'(a)$ .

Але,  $f'(b) = bc - c^2 = b(b - c) > 0$ , з цього слідує, що для  $x \in [b, a]$  функція  $f(x)$  є зростаючою, тобто  $f(b) \leq f(a)$ . З цієї нерівності та справедливості співвідношення  $f(b) = c^3 + b^2c - 2bc^2 = c(c^2 + b^2 - 2bc) = c(b - c)^2 \geq 0$  отримаємо, що  $f(x) \geq 0$ . Нерівність доведено.

Ще одним класом задач, де зручно використовувати апарат похідних – це доведення нерівностей та розв'язування рівнянь. Тут в більшості випадків використовують теореми Лагранжа, Ролля (див. наприклад, [9]), факт монотонності деякої функції тощо.

**Задача 4.** Довести нерівність  $\frac{1}{(n+1)^2} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

Для доведення цієї нерівності розглянемо функцію  $f(x) = \ln(1+x)$  на відрізку  $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ . Маємо  $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ , тепер, застосувавши теорему Лагранжа, отримаємо  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = f'(c)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{f'(c)}{n(n+1)}$ .

З останньої рівності слідує нерівність  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{f'(c)}{n(n+1)}$ .

Оскільки  $f'(x)$  на відрізку  $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$  є спадною, то остаточно матимемо

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{f'(c)}{n(n+1)} > \frac{f'\left(\frac{1}{n}\right)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

**Задача 5.** Довести нерівність  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ .

Розглянемо функцію  $f(x) = x - \ln(x+1)$ , знайдемо її проміжки монотонності  $f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ . Ясно, що при  $x > 0$  похідна є додатною, а тому є монотонно зростаючою, а, отже, є справедливою нерівність  $\frac{1}{n} - \ln\left(x + \frac{1}{n}\right) > 0$ , звідки слідує необхідне. Відмітимо, що міркуючи аналогічно, можна покращити нерівність задачі  $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ .

В багатьох випадках за допомогою диференціювання функції можна отримати розв'язок задачі.

**Задача 6.** Знайти всі пари дійсних чисел  $a, b \in \mathbb{R}$ , що для кожного  $x \in \mathbb{R}$  виконується співвідношення  $\sin 1999x + \sin ax + \sin bx = 0$ .

Зауважимо, що функція  $f(x) = \sin 1999x + \sin ax + \sin bx$  за умовою задачі є тотожною нулеві, тобто  $f(x) \equiv 0$ , отже,  $f'(x) \equiv 0$ , тоді

$$f'(x) = 1999 \cos 1999x + a \cos ax + b \cos bx.$$

В силу умов задачі візьмемо  $x = 0$  і підставимо в попереднє співвідношення  $f'(0) = 1999 + a + b = 0$ .

Аналогічно відшукавши ще дві похідні, отримаємо інше рівняння

$$f''(x) = -1999^2 \sin 1999x - a^2 \sin ax - b^2 \sin bx \text{ та}$$

$$f'''(x) = -1999^3 \cos 1999x - a^3 \cos ax - b^3 \cos bx.$$

Взявши  $x = 0$  матимемо  $f'''(x) \equiv 0$ ,  $f'''(0) = 1999^3 + a^3 + b^3 = 0$ .

Тепер можна перейти до простішої системи

$$\begin{cases} a+b = -1999, \\ a^3+b^3 = -1999^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b = -1999, \\ a^2-ab+b^2 = 1999^2, \\ a^2+a(a+1999)+(a+1999)^2 = 1999^2, \end{cases}$$

$$3a^2+3a \cdot 1999+1999^2 = 1999^2 \Rightarrow 3a^2+3a \cdot 1999 = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1999.$$

Далі вже легко отримати значення  $b$ . Лишилося зробити перевірку, оскільки  $f'(x) = g'(x) \Rightarrow f(x) = g(x) + C$ .

Корисним є наступний прийом: якщо функція  $f(x)$  не є опуклою на проміжку і потрібно оцінити знизу величину  $f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$ , то буває простіше встановити допоміжну нерівність

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a), \text{ де } a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

**Задача 7.** Довести, що для додатних чисел  $a, b, c, d$  таких, що  $a+b+c+d=1$  має місце нерівність  $6(a^3+b^3+c^3+d^3) \geq (a^2+b^2+c^2+d^2) + \frac{1}{8}$ .

З умови задачі слідує, що  $0 < a, b, c, d < 1$ . Запишемо нерівність в такому вигляді  $6a^3 - a^2 + 6b^3 - b^2 + 6c^3 - c^2 + 6d^3 - d^2 \geq \frac{1}{8}$ . Розглянемо функцію  $f(x) = 6x^3 - x^2$  при  $x \in (0, 1)$ , для неї  $f'(x) = 18x^2 - 2x$ ,  $f''(x) = 36x - 2$ . Як бачимо, на проміжку  $(0, 1)$  функція не є опуклою. Розглянемо допоміжну нерівність

$$f(x) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) + f'\left(\frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) \Rightarrow 6x^3 - x^2 \geq \frac{1}{32} + \frac{5}{8}\left(x - \frac{1}{4}\right) \text{ або}$$

$$6x^3 - x^2 \geq \frac{5x-1}{8} \Rightarrow 48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 \geq 0.$$

Далі, використавши теорему Безу про корені многочлена, отримаємо  $48x^3 - 8x^2 - 5x + 1 = (4x-1)^2(3x+1) \geq 0$  при  $x \in (0, 1)$ , допоміжна нерівність вірна.

$$\begin{aligned} \text{Отже, } f(a) + f(b) + f(c) + f(d) &= 6a^3 - a^2 + 6b^3 - b^2 + 6c^3 - c^2 + 6d^3 - d^2 \geq \\ &\geq \frac{5a-1}{8} + \frac{5b-1}{8} + \frac{5c-1}{8} + \frac{5d-1}{8} = \frac{5(a+b+c+d)-4}{8} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Нерівність доведено.

**Висновки.** У цій статті розглянуто різні застосування диференціального та інтегрального числення при розв'язуванні конкурсних текстових задач, які використовуються при роботі з обдарованими учнями під час підготовки до математичних турнірів.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Вороний О.М. Готуємось до олімпіади з математики. – Харків: Вид. група «Основа», 2008. – 255 с.
2. Київські міські математичні олімпіади. 2003–2011 роки / А.В. Анікушин, О.О. Клурман, Г.В. Крюкова та ін. за ред. Б.В. Рубльова. – Харків: Гімназія, 2011. – 192 с.
3. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2008. – 208 с.
4. Ясінський В.А. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та Міжнародних математичних олімпіад. Алгебра / В.А. Ясінський, О.Б. Панасенко. – Вінниця: Середняк Т.К., 2015. – 272 с.
5. Математичні олімпіади школярів України: 2001-2006 рік / В.М. Лейфура, І.М. Мітельман, В.М. Радченко, В.А. Ясінський. – Львів: Каменяр, 2008. – 348 с.
6. Сарана О.О. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн. — Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2011. – 400 с.
7. Плахотник В. В. 100 контрольних завдань з математики. Всеукраїнський конкурсзахист науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2010-2011 н. р./[за ред. О. В. Лісового]. – К. : ТОВ «Праймдрук», 2011. – 36 с.
8. Московские математические олимпиады 1993-2005 г. / Под ред. В.М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.
9. Мерзляк А. Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики : у 2 ч. / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М.С. Якір. — Х. : Гімназія, 2011. – Ч. 1. – 256 с.

**Людмила ІЗЮМЧЕНКО,**  
*доцент кафедри математики  
Центральноукраїнського державного  
педагогічного університету  
імені Володимира Винниченка,  
кандидат фізико-математичних наук*

## **ОЛІМПІАДНІ ЗАДАЧІ В ГЕОМЕТРІЇ: ЗАДАЧНА СЕРІЯ НА МЕТРИЧНІ СПІВВІДНОШЕННЯ У ЧОТИРИКУТНИКУ**

Математична підготовка в загальноосвітній школі насамперед спрямована на засвоєння учнями основних алгоритмів розв’язування задач стандартних типів. У той час як аналіз та розв’язування нестандартних задач, які покликані активізувати пізнавальну діяльність учнів, на жаль, залишаються без належної уваги у розділах «Задачі підвищеної складності» підручників з математики. Розв’язування цікавих, нестандартних задач чи розв’язування відомих задач нестандартним способом сприяє розвитку математичних здібностей учнів, формуванню здатності до самостійного оволодіння новими знаннями,

спроможності аналізувати отриману інформацію, розвитку творчого мислення, які необхідно систематично і вміло упроваджувати. В Україні є значні можливості для покращення самостійної пізнавальної діяльності учнів, у тому числі участь у різного виду позакласних заняттях, у математичних турнірах, олімпіадах, у ЗФМШ та науково-дослідницькій роботі у Малій Академії наук. Розв'язування конкурсних та олімпіадних задач учнями є гарним підґрунтям та підготовкою до майбутньої наукової діяльності; конкурсні задачі передбачають необхідність певного наукового дослідження; успіх залежить від глибини розуміння проблеми, вміння раціонально розподілити час при розв'язанні задачі, проаналізувати усі умови та обмеження, які фігурували в задачі та ін.; часто такі дослідження передбачають можливість узагальнити проблему.

Педагоги-практики, учені приділяють значну увагу різним аспектам процесу математичної підготовки обдарованих учнів до участі у математичних олімпіадах, конкурсах, турнірах, активної пошукової роботи у системі Малої академії наук України. Формування творчої особистості школяра, розвиток творчого мислення учня у процесі навчання математики досліджували Бевз Г.П., Богатирьова І.М., Бурда М.І., Кірман В.К., Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я., Скафа О.І., Слепкань З.І., Тарасенкова Н.А., Хмара Т.М., Чашечникова О.С., Швець В.О. та ін.[1, 5, 8]. Інноваційну діяльність при профільному вивченні математики та геометричну складову конкурсних задач розглядали Апостолова Г.В., Бевз В.Г., Владімірова Н.Г., Возняк О.Г., Зеленьяк О.П., Ізюмченко Л.В., Коломієць О.М., Макаруч О.П., Матяш О.І., Панасенко О.Б., Працьовитий М.В., Рабець К.В., Ясінський В.А. та ін. [3, 6, 12, 13]. Системний підхід в організації розв'язування нестандартних та олімпіадних задач досліджували Анікушин А.В., Борисова В.О., Вишенський В.А., Вороний О.М., Ганюшкін О.Г., Добосевич М.С., Карташов М.В., Клурман О.О., Кукуш О.Г., Курченко О.О., Мітельман І.М., Нагорний В.Н., Некрашевич В.В., Плахотник В.В., Радченко В.М., Рубльов Б.В., Сарана О.А., Федак І.В., Шунда Н.М. та ін. [2, 4, 7, 9, 10, 11].

Незважаючи на значну кількість досліджень, присвячених роботі з обдарованими здобувачами освіти, математична складова підготовки школярів до участі у математичних змаганнях потребує подальшого дослідження.

**Метою** статті є об'єднання задачної серії конкурсних геометричних задач навколо однієї ключової задачі.

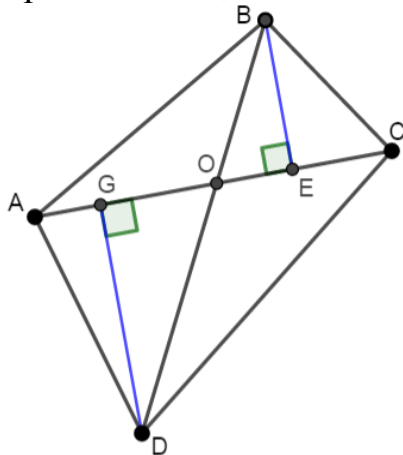
**Завдання:** розкрити методичні аспекти підготовки учнів до розв'язування конкурсних завдань на прикладі даної задачі; навести приклади різних задач з точки зору вікових можливостей дослідників; скласти олімпіадну задачу, яка дозволяє інтегрувати в геометричну оболонку суто теоретико-числові задачі.

Розглянемо наступну опорну задачу.

**Ключова задача.** Нехай є довільний опуклий чотирикутник  $ABCD$ , діагоналі якого перетинаються у точці  $O$ , утворюючи чотири трикутники  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$ ,  $OAD$ . Яким співвідношенням пов'язані площі цих чотирикутників?

Зауважимо, що згідно діючої програми вивчення математики у загальноосвітній школі учні у восьмому класі вивчають площу трикутника, а тому доцільно запропонувати проговорити, що є спільним для кожних двох

трикутників, наприклад,  $OAB$  і  $OAD$  та  $OAB$  і  $BC$  (наприклад, для двох останніх трикутників це є спільна сторона  $OB$ ; спільна висота, проведена з вершини  $B$ , до сторін  $AO$  і  $OC$ ). Кожний спільний елемент можна використати у обчисленні площі двох трикутників одночасно. Нехай зафіксуємо висоти, проведені з вершин  $B$  та  $D$ , тоді для площ трикутників матимемо:



$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BE, S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot BE, \text{ а тому}$$

$$\text{їхня частка } \frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{AO}{OC}; \text{ аналогічно і для двох}$$

інших трикутників отримаємо вирази

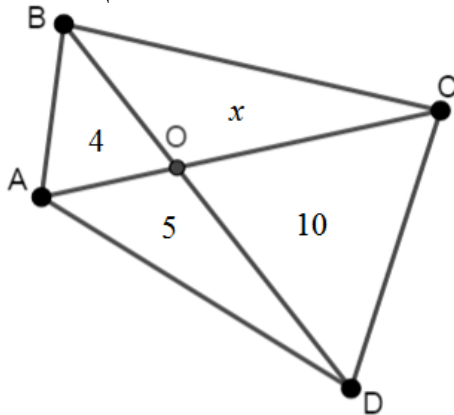
$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot DG, S_{\triangle ODC} = \frac{1}{2} \cdot OC \cdot DG; \text{ їхня}$$

$$\text{частка } \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle ODC}} = \frac{AO}{OC}.$$

Праві частини двох отриманих співвідношень однакові, а тому маємо рівність  $\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle OBC}} = \frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle ODC}}$ , звідки добуток площ несусідніх трикутників однаковий:

$$S_{\triangle AOB} \cdot S_{\triangle ODC} = S_{\triangle AOD} \cdot S_{\triangle OBC}.$$

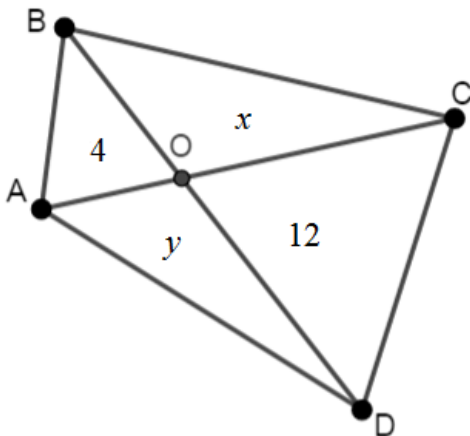
Це основний висновок ключової задачі.



**Задача 1.** Розв'яжіть задачу за готовим рисунком, на якому позначені площі відповідних трикутників.

Розв'язання задачі є очевидним, якщо відомий висновок з попередньої задачі і є дуже нетривіальним, якщо він невідомий:

$$4 \cdot 10 = 5 \cdot x \Rightarrow x = 8 \text{ (кв. од.)}.$$

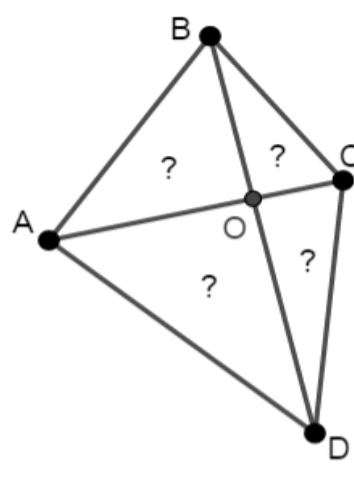
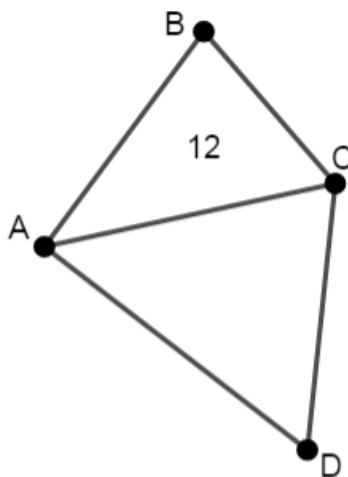
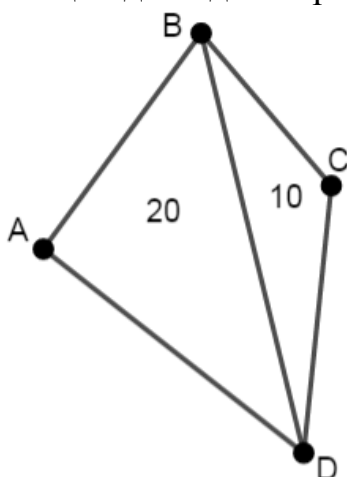


**Задача 1'.** Розв'яжіть задачу за готовим рисунком, на якому позначені площі відповідних трикутників, якщо площа чотирикутника  $ABCD$  дорівнює 30.

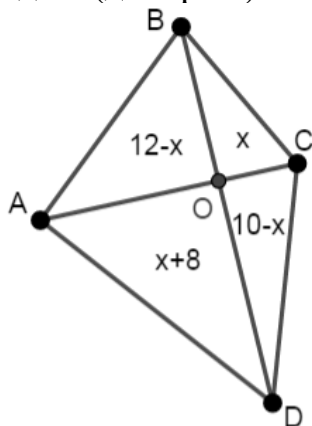
Розв'язання задачі зводиться до розв'язання системи двох рівнянь:

$$\begin{cases} x + y + 4 + 12 = 30, \\ x \cdot y = 4 \cdot 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 14, \\ x \cdot y = 48, \end{cases} \Rightarrow x = 6, y = 8 \text{ або } x = 8, y = 6.$$

**Задача 2.** Розв'яжіть задачу за готовим рисунком, на якому позначені площі відповідних трикутників.



*Розв'язання.* Ця задача є ускладненою версією попередніх задач і потребує лише охайних обчислень. Позначимо площу одного з чотирьох (малих) трикутників через  $x$  та виразимо площі інших трикутників, враховуючи умову задачі (див. рис.).



Враховуючи основне співвідношення між площами трикутників, складемо рівняння:

$$(12 - x) \cdot (10 - x) = (x + 8) \cdot x;$$

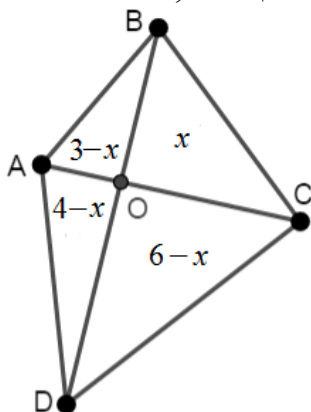
$$x^2 - 22x + 120 = x^2 + 8x; \quad 30x = 120; \quad x = 4.$$

А тоді площі шуканих трикутників  
 $S_{\triangle AOB} = 8$ ;  $S_{\triangle BOC} = 4$ ;  $S_{\triangle AOD} = 12$ ;  $S_{\triangle COD} = 6$ .

Відповідь: 8; 4; 12 і 6 кв. од.

Проведемо огляд завдань, які пропонувалися школярам на різних **математичних конкурсах**, розв'язання яких спирається на розглянуту ключову задачу. Прокоментуємо їхнє розв'язання.

**Задача 3.** Діагоналі опуклого чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Площі трикутників  $ABC$  і  $BCD$  дорівнюють  $3 \text{ см}^2$  і  $6 \text{ см}^2$ , а сума площ трикутників  $OBC$  і  $OAD$  дорівнює  $4 \text{ см}^2$ . Знайдіть площу чотирикутника  $ABCD$ . (Завдання III етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт МАН, секція «Математика», 2007/2008 н.р., автор Плахотник В.В.).



*Розв'язання.* Виконаємо рисунок, позначимо площу  $S_{\triangle BOC} = x$ , тоді усі інші площі з урахуванням умови рівні:  $S_{\triangle AOD} = 4 - x$ ;  $S_{\triangle COD} = 6 - x$ ;  $S_{\triangle AOB} = 3 - x$ , причому очікуваний результат  $x < 3$ . Отримаємо рівняння  $(6 - x) \cdot (3 - x) = (4 - x) \cdot x$ , після спрощення якого матимемо  $2x^2 - 13x + 18 = 0$ .

Обидва корені цього рівняння є додатними:  $x=2$ ;  $x=4,5$ , але умову задачі задовольняє лише  $x = 2$ . Площі малих трикутників 1; 2; 2; 4  $\text{см}^2$ , а тому площа чотирикутника  $ABCD$  є їхньою сумою і дорівнює 9  $\text{см}^2$ .

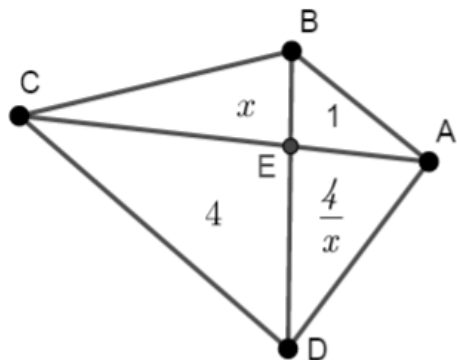
Відповідь: 9  $\text{см}^2$ .

**Задача 4.** Нехай в опуклому чотирикутнику  $ABCD$  діагоналі перетинаються в точці  $O$ , а площі трикутників  $ABC$ ,  $BCD$  і  $AOD$  дорівнюють відповідно 5; 3 і 8  $\text{см}^2$ . Знайдіть площу чотирикутника  $ABCD$  (Завдання Всеукраїнської заочної математичної школи Малої академії наук України, 2011/2012 н.р. [9, с. 5]).

*Розв'язання.* Виконаємо рисунок, позначимо площу  $S_{\Delta BOC} = x$ , тоді усі інші площі з урахуванням умови рівні:  $S_{\Delta AOD} = 8$ ;  $S_{\Delta COD} = 3 - x$ ;  $S_{\Delta AOB} = 5 - x$ , очікуваний результат  $x < 3$ . Отримаємо рівняння  $(5 - x) \cdot (3 - x) = 8 \cdot x$ , після спрощення якого матимемо  $x^2 - 16x + 15 = 0$ , коренями якого є  $x=1$ ;  $x=15$  (сторонній), умову задачі задовольняє лише  $x = 1$ . Площі малих трикутників 4; 1; 8; 2  $\text{см}^2$ , а тому площа чотирикутника  $ABCD$  дорівнює 15  $\text{см}^2$ .

Відповідь: 15  $\text{см}^2$ .

**Задача 5.** Діагоналі опуклого чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $E$ . Відомо, що  $S_{\Delta ABE} = 1 \text{ см}^2$ ,  $S_{\Delta DCE} = 4 \text{ см}^2$ ,  $S_{ABCD} \leq 9 \text{ см}^2$ . Знайдіть площі трикутників  $ADE$  і  $BCE$  (Завдання четвертого рівня, з поміткою для фізико-математичних класів, із збірника для ДПА з математики [1, с. 82]).



*Розв'язання.* Позначимо площу трикутника  $BCE$   $S_{\Delta CBE} = x$ . З рівності добутків  $S_{\Delta ABE} \cdot S_{\Delta DCE} = S_{\Delta AED} \cdot S_{\Delta BEC}$ ,  $1 \cdot 4 = S_{\Delta AED} \cdot x$  випливає, що площа  $S_{\Delta ADE} = \frac{4}{x}$ . Площа чотирикутника  $S_{ABCD} = x + \frac{4}{x} + 5 \leq 9$ , звідки

$x + \frac{4}{x} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{x} \leq 0 \Rightarrow x = 2, x > 0$ . А тому площі трикутників  $ADE$  і  $BCE$

дорівнюють по 2  $\text{см}^2$ . Можна міркувати інакше: з нерівності Коші

$x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} \Rightarrow x + \frac{4}{x} \geq 4$ . А за даними задачі  $x + \frac{4}{x} \leq 4$ , це означає, що

обидві умови виконуються лише тоді, коли виконується рівність  $x + \frac{4}{x} = 4$ . А

рівність у нерівності Коші виконується тоді і тільки тоді, коли компоненти є однаковими:  $x = \frac{4}{x}, x > 0 \Rightarrow x = 2$ . Відповідь: площі трикутників  $ADE$  і  $BCE$  дорівнюють по 2  $\text{см}^2$ .

**Задача 5'.** Діагоналі опуклого чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Відомо, що  $S_{BCO} = 1 \text{ см}^2$ ,  $S_{AOD} = 9 \text{ см}^2$ ,  $S_{ABCD} \leq 16 \text{ см}^2$ . Знайдіть площі трикутників  $ABO$  і  $COD$ . (Завдання четвертого рівня, з поміткою для фізико-

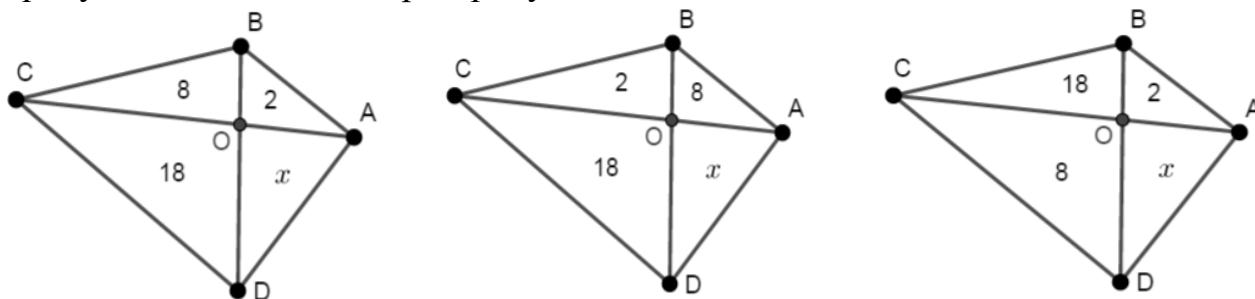
математичних класів, із збірника для ДПА з математики [8, с. 134]).

Розв'язання цієї задачі аналогічне до задачі 5.

Відповідь: площі трикутників  $ABO$  і  $COD$  дорівнюють по  $3 \text{ см}^2$ .

**Задача 6.** Діагоналі опуклого чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Відомо, що площі трьох із чотирьох трикутників  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  і  $DOA$  дорівнюють  $2 \text{ см}^2$ ,  $8 \text{ см}^2$  та  $18 \text{ см}^2$ . Якою може бути найбільша площа чотирикутника  $ABCD$ , якщо вона менша за  $100 \text{ см}^2$ ?

Оскільки невідомо, які з площ трикутників конкретно дорівнюють  $2$ ;  $8$ ;  $18 \text{ см}^2$ , то можливі три принципово різних випадки: коли навпроти невідомого трикутника лежать по черзі трикутники з площами  $2$ ;  $8$ ;  $18 \text{ см}^2$ .



Перший випадок: маємо  $8 \cdot x = 18 \cdot 2 \Rightarrow x = 4,5 \Rightarrow S_{ABCD} = 32,5 \text{ см}^2$ ; другий випадок:  $2 \cdot x = 18 \cdot 8 \Rightarrow x = 72 \Rightarrow S_{ABCD} = 100 \text{ см}^2$  (заборонено умовою задачі); третій випадок:  $18 \cdot x = 2 \cdot 8 \Rightarrow x = \frac{8}{9} \Rightarrow S_{ABCD} = 28\frac{8}{9} \text{ см}^2$ .

Відповідь: найбільша площа  $32,5 \text{ см}^2$ .

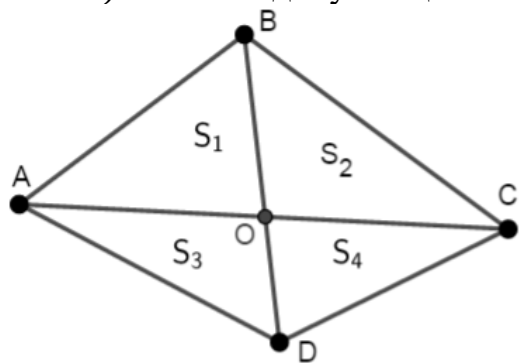
**Задача 7.** Діагоналі опуклого чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Відомо, що площі трикутників  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  і  $DOA$  виражаються натуральними числами (регіональна олімпіада, Кіровоградська область).

1) Чи може добуток цих площ дорівнювати а) 2019; б) 2025?

2) Чи може добуток цих площ закінчуватися цифрами а) 2019; б) 2020?

Розв'язання.

1. а) Оскільки  $S_1 \cdot S_4 = S_2 \cdot S_3$ , то добуток площ  $S_1 S_2 S_3 S_4 = (S_2 \cdot S_3)^2 = n^2$  є квадратом натурального числа, а тому а) не може дорівнювати 2019, оскільки 2019 не є квадратом натурального числа;



1. б) може дорівнювати 2025, бо 2025 є квадратом натурального числа 45. Наприклад,  $S_1 = 5$ ,  $S_4 = 9$ ;  $S_2 = 3$ ,  $S_3 = 15$ .

2. а) Неважко показати, що якщо квадрат натурального числа  $S_1 S_2 S_3 S_4 = n^2$  закінчується цифрою 9, то саме число  $n$  закінчується цифрою 3 або 7, тобто має вигляд  $n = 10k \pm 3$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . А тоді  $n^2 = (10k \pm 3)^2 = 100k^2 \pm 60k + 9 \equiv 9 \pmod{20}$  може закінчуватися двома цифрами 09 (наприклад, при  $k=5$ ), або 29, або 49, або 69, або 89, тобто передостання цифра 0; 2; 4; 6; 8, але не 1.

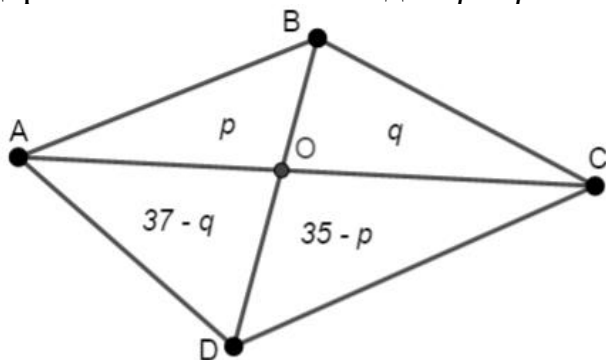
Відповідь: добуток площ не може закінчуватися цифрами 2019.

2. б) Якщо квадрат натурального числа  $S_1S_2S_3S_4 = n^2$  закінчується цифрою нуль, то число  $n^2$  ділиться на п'ять, а тоді і натуральне число  $n:5 \Rightarrow n^2:25$ , тобто число  $n^2$  повинно закінчуватися цифрами 00, або 25, або 50, або 75 і не може закінчуватися двома цифрами 20.

Відповідь: добуток площ не може закінчуватися цифрами 2020.

На завершення можна запропонувати задачу, створену автором статті для учнів старших класів, яка приводить до дослідження і розв'язання непростого діофантового рівняння.

**Задача 8\*.** Діагоналі опуклого чотирикутника  $ABCD$  перетинаються в точці  $O$ . Відомо, що площі трикутників  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$  і  $DOA$  виражаються натуральними числами, причому площі трикутників  $AOB$  і  $BOC$  виражаються простими числами  $p$  і  $q$ , а суми площ трикутників  $AOB$  і  $COD$  та  $BOC$  і  $DOA$  дорівнюють 35 і 37. Знайдіть  $p$  і  $q$ .



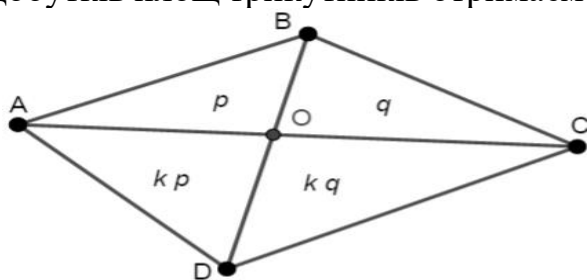
*Розв'язання.* Враховуючи співвідношення між площами трикутників, отримаємо рівняння:

$$q \cdot (37 - q) = p \cdot (35 - p).$$

Після спрощення отримаємо

$$p^2 - q^2 - 35p + 37q = 0,$$

або  $(p - q) \cdot (p + q) - 35 \cdot (p - q) = -2q$ , звідки  $(p - q) \cdot (35 - p - q) = 2q$ . За умовою числа  $p$  і  $q$  є простими (і неважко показати, що вони є різними, інакше суми, дані в умові, теж були б однаковими), а тому є взаємно простими. Права частина ділиться на просте число  $q$ , тому і ліва частина на нього ділиться. З того, що добуток ділиться на *просте* число, випливає, що хоч би один із співмножників ділиться на це просте число. Перший множник не може ділитися на  $q$ , бо  $q$  ділиться на  $q$ , а  $p$  не ділиться на  $q$  ( $p$  і  $q$  є взаємно простими), тому різниця  $p - q$  не ділиться на  $q$ . А тому на  $q$  ділиться другий множник  $35 - p - q$ , звідки випливає, що  $35 - p$  ділиться на  $q$ . А тому  $35 - p = k \cdot q$ , де  $k$  – натуральне число, адже  $35 - p$  (за умовою) є площею трикутника  $COD$  (є натуральним числом). З рівності добутків площ трикутників отримаємо, що площа трикутника  $DOA$  дорівнює  $k \cdot p$ .



Маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 37 - q = kp, \\ 35 - p = kq. \end{cases} \Rightarrow 2 - q + p = kp - kq,$$

Звідки  $(p - q)(k - 1) = 2$  – стандартне діофантове рівняння.

Оскільки обидва співмножники є цілими числами, причому другий співмножник є додатним цілим числом, то маємо усього дві можливості:

$$\left[ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} p - q = 2, \\ k - 1 = 1, \end{array} \Rightarrow k = 2; \quad \left\{ \begin{array}{l} 37 - q = 2p, \\ 35 - p = 2q, \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2p + q = 37, \\ p + 2q = 35, \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = 13, \\ q = 11, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} p - q = 1, \\ k - 1 = 2, \end{array} \Rightarrow k = 3; \quad \left\{ \begin{array}{l} 37 - q = 3p, \\ 35 - p = 3q, \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3p + q = 37, \\ p + 3q = 35, \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p = 9,5, \\ q = 8,5, \end{array} \Rightarrow \emptyset \end{array} \right. \right.$$

Відповідь:  $p = 13, q = 11$ .

**Висновки з дослідження і перспективи подальших розробок** напрому. Розв'язування конкурсних та олімпіадних задач учнями є гарною підготовкою до майбутнього продовження навчання та подальшої практичної діяльності, а тому продовження цієї теми є виправданим. Подальші дослідження будуть спрямовані на створення ширшої задачної серії до розглянутої ключової задачі, у тому числі завдань з інтеграцією у суміжні олімпіадні теми.

Статтю рекомендуємо вчителям математики, студентам фізико-математичних факультетів та усім, хто займається математичною підготовкою обдарованих школярів до участі в олімпіадах та математичних турнірах.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бурда М.І., Біляніна О.Я., Вашуленко О.П., Прокопенко Н.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас. Кн. 2. Харків: Гімназія, 2010. 224 с.
2. Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И. Сборник задач Киевских математических олимпиад. Киев, Вища школа, 1984. 240 с.
3. Ізюмченко Л.В., Макарчук О.П. Розв'язування задач з математики третього етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів-членів Малої академії наук України: Методичний посібник. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 124 с.
4. Київські міські математичні олімпіади. 2003–2011 роки /А.В. Анікушин, О.О. Клурман, Г.В. Крюкова та ін. за ред. Б.В. Рубльова. Харків: Гімназія, 2011. 192 с.
5. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики. Науково-методичний посібник. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 148 с.
6. Ленчук І.Г., Працьовитий М.В. Метричні задачі з кутами у стереометрії. Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Серія 3: Фізика і математика у вищій і середній школі: зб. наук. праць. Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2018. Вип. 20. С. 52-59.
7. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України 2001-2006 рр. Львів: Каменяр, 2008. 348 с.
8. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики: 11 кл. Ч. 2. За ред. М.І. Бурди. Київ: Центр навчально-методичної літератури, 2014. 208 с.
9. Плахотник В.В., Перегуда О.В. Задачі Всеукраїнської заочної

математичної школи Малої академії наук України на 2011-2012 н.р. Київ: Національний центр Мала академія наук України, 2012. 32 с.

10. Сарана О.А. Математичні олімпіади : просте і складне поруч. К.: Вид-во АСК., 2004. 344 с.

11. Федак І.В. Обласні олімпіади з математики 1987–2005 рр. Івано-Франківськ: ОІППО, 2005. 164 с.

12. Ясінський В.А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв’язування. Тернопіль: Навчальна книга, Богдан, 2008. 208 с.

13. Ясінський В.А., Панасенко О.Б. Секрети підготовки школярів до Всеукраїнських та міжнародних олімпіад. Алгебра. Навчально-методичний посібник. Вінниця: Середняк Т.К., 2015. 272 с.

**Інна КЛЮЧНИК,**

*доцент кафедри математики*

*Центральноукраїнського державного*

*педагогічного університету*

*імені Володимира Винниченка,*

*кандидат фізико-математичних наук*

## **ВИКОРИСТАННЯ БЛОК-СХЕМ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ З ПАРАМЕТРАМИ**

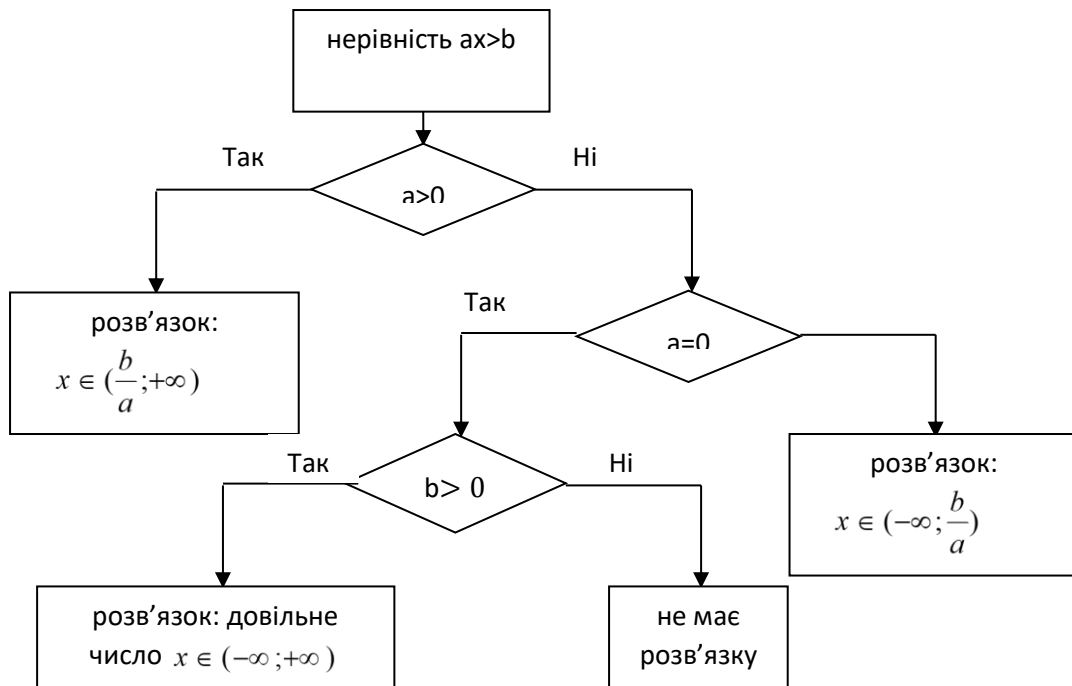
При розв’язуванні задач з параметрами потрібно мати не лише знання зі шкільного курсу математики, а й вміти творчо їх застосовувати. В школі таким задачам приділяється дуже мало часу, хоча вони є і на олімпіадах, і на зовнішньому незалежному оцінюванні знань з математики, окрім цього творчі задачі розвивають критичне мислення у здобувачів освіти.

Вперше з параметром здобувачі освіти закладів загальної середньої освіти зустрічаються при вивченні лінійної функції  $y = kx + b$ , ( $k, b$  – параметр), лінійного рівняння  $ax + b = 0$ , ( $a, b$  – параметр) та лінійних нерівностей  $ax > b, ax \geq b, ax < b, ax \leq b$ , ( $a, b$  – параметри). При розв’язуванні таких задач, з одного боку, параметр в задачі слід вважати величиною відомою, а з іншого – може приймати різні значення. При розв’язуванні задач з параметром використовують аналітичний [1, 2, 3, 4] та графічний методи. В залежності від ролі параметра в задачі, графічний поділяють на два метода:

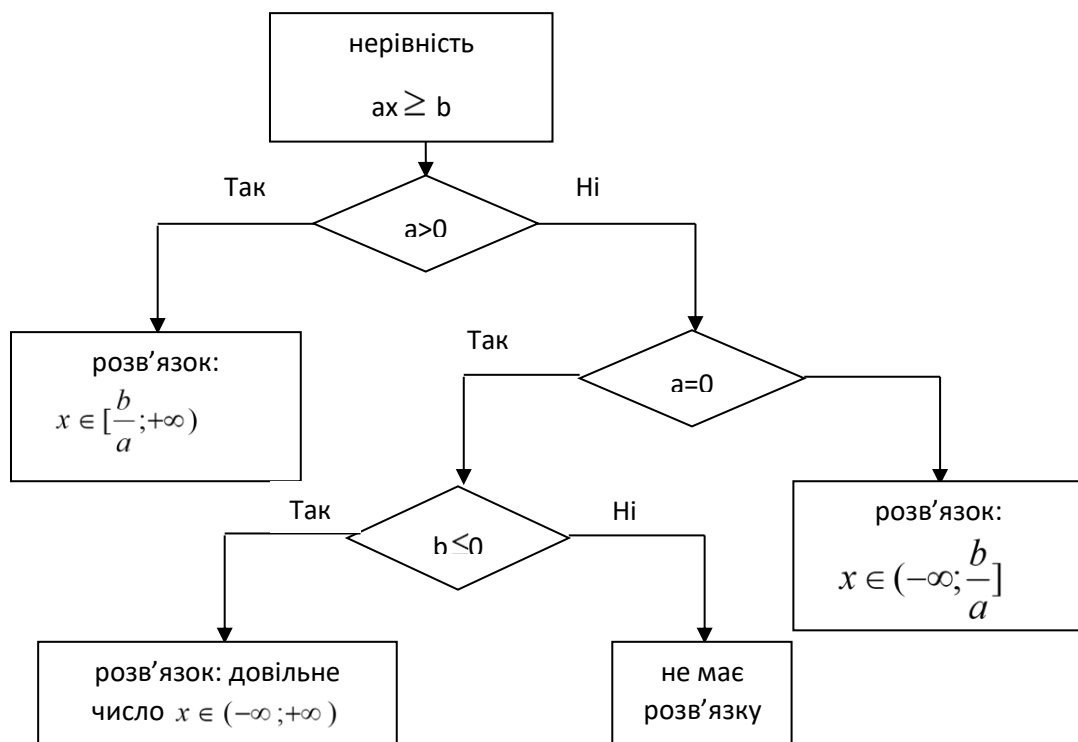
- якщо параметр не рівноправний зі змінною, тоді графічний образ будується на координатній площині ( $x; y$ );
- якщо параметр рівноправний зі змінною, тоді графічний образ будується на координатній площині ( $x; a$ ).

Розглянемо лінійні нерівності з однією змінною. До цього типу нерівностей відносять нерівності вигляду  $ax > b; ax \geq b; ax < b; ax \leq b$ , де хоча б один з коефіцієнтів  $a$  і  $b$  є параметром. Їх розв’язування ґрунтується на властивостях числових нерівностей. Пропонуємо блок-схеми розв’язування всіх

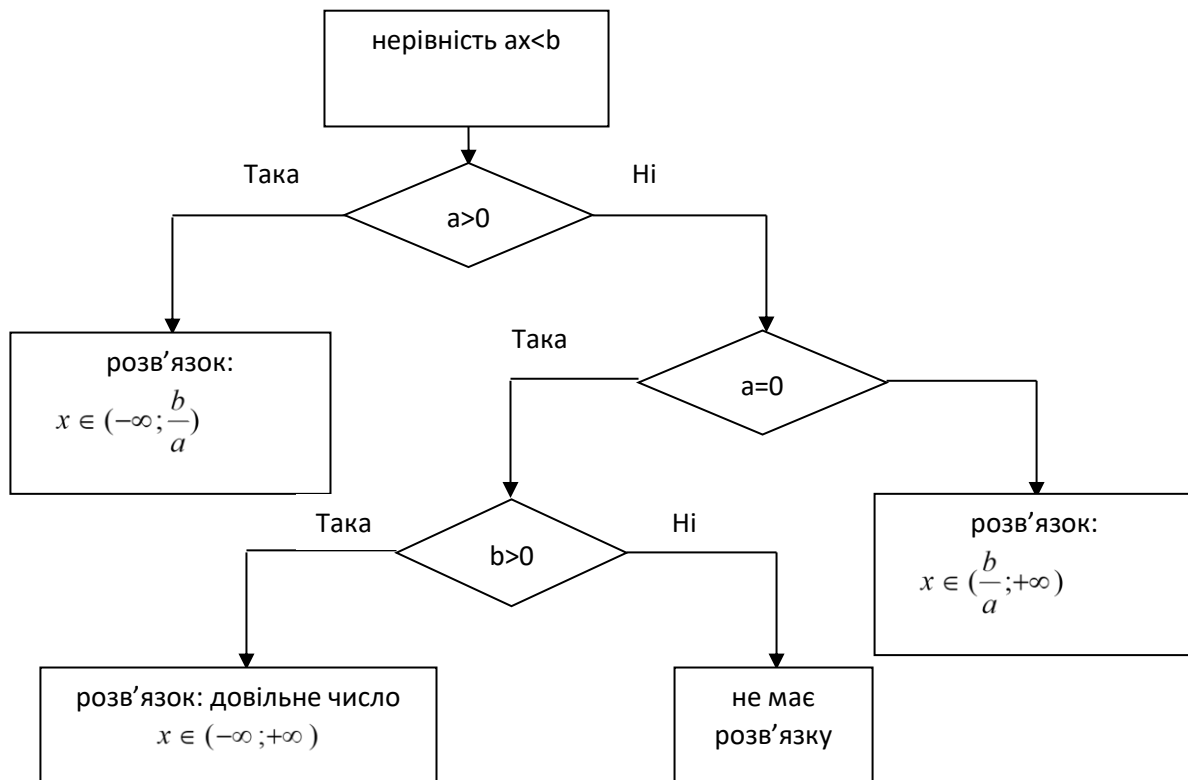
видів лінійних нерівностей (мал.1-4). Розглянути алгоритм розв'язування лінійних нерівностей можна при вивченні теми «Розв'язування нерівностей з однією змінною». Приведемо типові приклади які радимо розв'язати разом з вчителем.



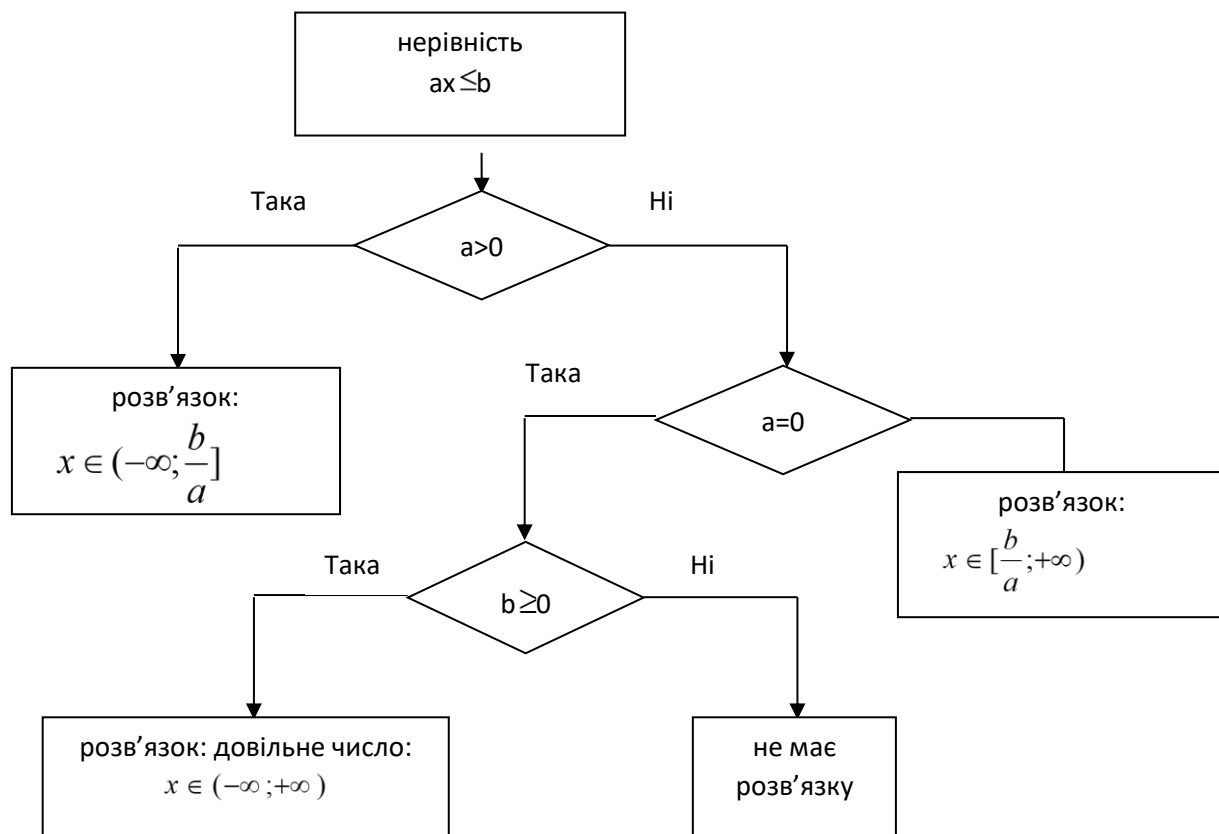
(мал.1)



(мал.2)



(мал.3)



(мал.4)

**Приклад 1.** Розв'язати нерівність  $2x > a + 5$

При всіх  $a \in (-\infty; +\infty)$ , маємо, що  $x > \frac{a+5}{2}$  або  $x \in (\frac{a+5}{2}; +\infty)$ .

**Приклад 2.** Розв'язати нерівність  $(a+1)x > 1$ .

*Розв'язування.* Згідно блок-схеми розв'язування лінійних нерівностей з параметром розглянемо випадки:

а) якщо  $a > -1$ , то  $x > \frac{1}{a+1}$ , або  $x \in (\frac{1}{a+1}; +\infty)$ ;

б) якщо  $a < -1$ , то  $x < \frac{1}{a+1}$ , або  $x \in (-\infty; \frac{1}{a+1})$ ;

в) якщо  $a = -1$ , то  $0x > 1$ , яке не має розв'язку.

*Відповідь:* якщо  $a \in (-\infty; -1)$ , то  $x \in (-\infty; \frac{1}{a+1})$ ; якщо  $a \in (-1; +\infty)$ , то  $x \in (\frac{1}{a+1}; +\infty)$ .

**Приклад 3.** Розв'язати нерівність  $(a-2)x \geq 4$ .

*Розв'язування.* Використаємо блок-схему на мал.2.

Розглянемо випадки:

а) якщо  $a > 2$ , то  $x \geq \frac{4}{a-2}$ , або  $x \in [\frac{4}{a-2}; +\infty)$ ;

б) якщо  $a < 2$ , то  $x \leq \frac{4}{a-2}$ , або  $x \in (-\infty; \frac{4}{a-2}]$ ;

в) якщо  $a = 2$ , то нерівність не має розв'язку.

*Відповідь:* якщо  $a > 2$ , то  $x \in [\frac{4}{a-2}; +\infty)$ ; якщо  $a < 2$ , то  $x \in (-\infty; \frac{4}{a-2}]$ .

**Приклад 4.** Розв'язати нерівність  $(a-3)x < 2$ .

*Розв'язування.* Розглянемо випадки:

а) якщо  $a > 3$ , то  $x < \frac{2}{a-3}$ , або  $x \in (-\infty; \frac{2}{a-3})$ ;

б) якщо  $a < 3$ , то  $x > \frac{2}{a-3}$ , або  $x \in (\frac{2}{a-3}; +\infty)$ ;

в) якщо  $a = 3$ , то  $0x < 2$  нерівність має безліч розв'язків.

*Відповідь:* якщо  $a > 3$ , то  $x \in (-\infty; \frac{2}{a-3})$ ; якщо  $a < 3$ , то  $x \in (\frac{2}{a-3}; +\infty)$ ; якщо  $a = 3$ , то  $0x < 2$  рівняння має безліч розв'язків.

**Приклад 5.** Розв'язати нерівність  $(a+1)x \leq 2$ .

*Розв'язування.* Використаємо блок-схему на мал.4. Розглянемо випадки:

а) якщо  $a > -1$ , то  $x \leq \frac{2}{a+1}$  або  $x \in (-\infty; \frac{2}{a+1}]$ ;

б) якщо  $a < -1$ , то  $x \geq \frac{2}{a+1}$  або  $x \in [\frac{2}{a+1}; +\infty)$ ;

в) якщо  $a = -1$ , то нерівність не має розв'язку.

*Відповідь:* якщо  $a > -1$ , то  $x \in (-\infty; \frac{2}{a+1}]$ ; якщо  $a < -1$ , то  $x \in [\frac{2}{a+1}; +\infty)$ .

**Приклад 6.** Розв'язати нерівність  $(a-1)x > (a-1)(a-3)$

*Розв'язування.* Розглянемо випадки:

- а) якщо  $a > 1$ , то  $x > a-3$ , або  $x \in (a-3; +\infty)$ ;
- б) якщо  $a < 1$ , то  $x < a-3$ , або  $x \in (-\infty; a-3)$ ;
- в) якщо  $a = 1$ , то  $0x > 0$  – нерівність не має розв'язку.

*Відповідь:* якщо  $a > 1$ , то  $x \in (a-3; +\infty)$ ; якщо  $a < 1$ , то  $x \in (-\infty; a-3)$ .

**Приклад 7.** Розв'язати нерівність  $(a+1)x \leq (a+2)$ .

*Розв'язування.* Розглянемо випадки:

- а) якщо  $a > -1$ , то  $x \leq \frac{a+2}{a+1}$ , або  $x \in (-\infty; \frac{a+2}{a+1}]$ ;
- б) якщо  $a < -1$ , то  $x \geq \frac{a+2}{a+1}$ , або  $x \in [\frac{a+2}{a+1}; +\infty)$ ;
- в) якщо  $a = -1$ , то  $0x < 1$  – нерівність має безліч розв'язків.

*Відповідь:* якщо  $a > -1$ , то  $x \in (-\infty; \frac{a+2}{a+1}]$ ; якщо  $a < -1$ , то  $x \in [\frac{a+2}{a+1}; +\infty)$

**Приклад 8.** Розв'язати нерівність  $5(x-2a) \geq 4-ax$ .

*Розв'язування.* Після зведення її до лінійної, одержимо  $x(a+5) \geq 4+10a$ .

Можливі наступні випадки:

- а) якщо  $a > -5$ , то  $x \in [\frac{4+10a}{a+5}; +\infty)$ ;
- б) якщо  $a < -5$ , то  $x \in (-\infty; \frac{4+10a}{a+5}]$ ;
- в) якщо  $a = -5$ , то нерівність має безліч розв'язків.

*Відповідь:* якщо  $a > -5$ , то  $x \in [\frac{4+10a}{a+5}; +\infty)$ ; якщо  $a < -5$ , то  $x \in (-\infty; \frac{4+10a}{a+5}]$ ;

якщо  $a = -5$ , то нерівність має безліч розв'язків.

При закріпленні теми «Розв'язування нерівностей другого степеня з однією змінною» і «Розв'язування нерівностей методом інтервалів» є можливість знову використати алгоритм розв'язування лінійних нерівностей. Це продемонструємо на таких прикладах.

**Приклад 9.** Розв'язати нерівність  $(a+2)(a-3)x > a+5$ .

*Розв'язування.* Розглянемо випадки:

- а) нехай  $(a+2)(a-3) > 0$ . Розв'язуючи цю нерівність одержимо  $a \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ . Тоді  $x \in (\frac{a+5}{(a+2)(a-3)}; +\infty)$ .
- б) Нехай  $(a+2)(a-3) < 0$ . Розв'язуючи цю нерівність одержимо  $a \in (-2; 3)$ . Тоді  $x < \frac{a+5}{(a+2)(a-3)}$  або  $x \in (-\infty; \frac{a+5}{(a+2)(a-3)})$ .
- в) Якщо  $a = -2$  то  $0x > 3$ , нерівність не має розв'язків.
- г) Якщо  $a = 3$  то  $0x > 8$ , нерівність не має розв'язків.

*Відповідь:* якщо  $a \in (-\infty; -2) \cup (3; +\infty)$ , то  $x \in (\frac{a+5}{(a+2)(a-3)}; +\infty)$ ; якщо  $a \in (-2; 3)$ ,

то  $x \in (-\infty; \frac{a+5}{(a+2)(a-3)})$ .

**Приклад 10.** Розв'язати нерівність  $\frac{a-1}{a+2}x > a-6$ .

*Розв'язування.* Розглянемо випадки:

а) нехай  $\frac{a-1}{a+2} > 0$ . Розв'язком цієї нерівності є:  $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ , тоді  $x \in (\frac{(a-6)(a+2)}{a-1}; +\infty)$

б) нехай  $\frac{a-1}{a+2} < 0$ . Розв'язком цієї нерівності є проміжок:  $a \in (-2; 1)$ .

Тоді  $x < \frac{(a-6)(a+2)}{a-1}$ , або  $x \in (-\infty; \frac{(a-6)(a+2)}{a-1})$ ;

в) нехай  $a = 1$ , тоді  $0x > -5$ , нерівність має безліч розв'язків.

*Відповідь:* при  $a \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ :  $x \in (\frac{(a-6)(a+2)}{a-1}; +\infty)$ ; при  $a \in (-2; 1)$ :  $x \in (-\infty; \frac{(a-6)(a+2)}{a-1})$ ; при  $a = 1$ : нерівність має безліч розв'язків.

**Приклад 11.** Розв'язати подвійну нерівність  $1 < ax < 2$

*Розв'язування.* Розглянемо випадки:

а) якщо  $a > 0$ , то  $\frac{1}{a} < x < \frac{2}{a}$  (обидві частини нерівності поділили на додатне число);

б) якщо  $a < 0$ , то  $\frac{2}{a} < x < \frac{1}{a}$ ;

в) якщо  $a = 0$ , то  $1 < 0x < 2$  ця нерівність не має розв'язку.

**Приклад 12.** Розв'язати систему нерівностей  $\begin{cases} (a+1)x + 1 < 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$

*Розв'язування.* При розв'язуванні першої нерівності можливі такі випадки:

а) якщо  $a > -1$ , то  $x < -\frac{1}{a+1}$ ;

б) якщо  $a < -1$ , то  $x > -\frac{1}{a+1}$ ;

в) якщо  $a = -1$ , то  $0x + 1 < 0$  нерівність не має розв'язку.

Знайдемо розв'язки таких систем нерівностей:

1) при  $a > -1$ :  $\begin{cases} x < -\frac{1}{a+1}; \\ x > 2 \end{cases}$       2) при  $a < -1$ :  $\begin{cases} x > -\frac{1}{a+1}. \\ x > 2 \end{cases}$

Розглянемо систему 1: при  $a+1 > 0$  держимо  $-\frac{1}{a+1} < 0$ . Розмістивши  $-\frac{1}{a+1}$  і 2 на вісі і знайшовши перетин, одержимо, що система немає розв'язків.

Розглянемо систему 2: при  $a < -1$ , одержимо  $-\frac{1}{a+1} > 0$ . Порівняємо  $-\frac{1}{a+1}$  і 2.

а) Якщо  $-\frac{1}{a+1} > 2$ , то  $a > -\frac{3}{2}$ .

$$\begin{cases} a < -1 \\ a > -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a \in (-\frac{3}{2}; -1). \text{ Тобто при } a \in (-\frac{3}{2}; -1), \text{ вираз } -\frac{1}{a+1} \text{ буде правіше}$$

від 2. Розмістивши на вісь  $-\frac{1}{a+1}$  і 2, одержимо, що система 2 має розв'язок

одержимо таку остаточну відповідь:  $x \in (-\frac{1}{a+1}; +\infty)$ .

б) Якщо  $-\frac{1}{a+1} < 2$ , то  $a < -\frac{3}{2}$ .

$$\begin{cases} a < -1 \\ a < -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow a < -\frac{3}{2}. \text{ Розмістивши на вісь } -\frac{1}{a+1} \text{ і } 2, \text{ одержимо, що система}$$

2 має розв'язок  $x \in (2; +\infty)$ .

в) Якщо  $-\frac{1}{a+1} = 2$ , то  $a = -\frac{3}{2}$ . Тобто при  $a = -\frac{3}{2}$ :  $x > 2$ .

Відповідь: якщо  $a > -\frac{3}{2}$ , то  $x \in (-\frac{1}{a+1}; +\infty)$ ; якщо  $a < -\frac{3}{2}$ , то

$x \in (-\frac{1}{a+1}; +\infty)$  якщо  $a = -\frac{3}{2}$ , то  $x > 2$ .

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Завізіон Г.В. Рівняння з параметрами: Навч. Посібник. – Кіровоград, 1997. – 100с.

2. Завізіон І.Г. Використання методу інтервалів до розв'язування нерівностей з параметрами // Республіканський студентський збірник наукових праць, студентські фізико-математичні етюди. – 2000. -№3. - С. 130 - 138.

3. Ключник І.Г Аналітичні методи розв'язування нерівностей з модулем та параметром. Педагогічний вісник.-2018.- № 3-4 (47-48). – С.42-46

4. Ключник І.Г., Ткаченко Л.А. Методичні особливості розв'язування показникових нерівностей з параметрами. Педагогічний вісник. -2019.- №1-2 (49-50).- С. 15-19.

**Олег МАКАРЧУК,**

*доцент кафедри прикладної математики,  
статистики та економіки*

*Центральноукраїнського*

*державного педагогічного університету*

*імені Володимира Винниченка,*

*кандидат фізико-математичних наук*

## **ВЕКТОРИ В ОЛІМПІАДНИХ ЗАДАЧАХ З МАТЕМАТИКИ**

Вектор, як фундаментальний елемент лінійної алгебри, представляє собою набір елементів з деякої множини. Потрібно відмітити, що компоненти вектора (в загальному розумінні) не обов'язково повинні мати числовий характер, наприклад, в інформатиці вектор інтерпретується, як кортеж елементів довільної однорідної структури.

Однак, незважаючи на всезагальність означення вектора, з точки зору лінійної алгебри сам вектор формувався на початку саме через призму геометричних міркувань як величина, що характеризується напрямом та модулем. Першим, хто ініціював введення поняття вектора був Карл Фрідріх Гаус в 1831 р [2], про що свідчить одна з відомих формул векторного аналізу – формула Остроградського-Гауса. Векторний аналіз нарощував звичну для сучасників наукову форму також за рахунок важливих робіт Уільяма Гамільтона, який безпосередньо і ввів саме слово *vector* і алгебру кватерніонів, завдяки працям Джозайя Гібса, зокрема «Елементи векторного аналізу» 1880 р, та Олівера Хевісайда 1903 р.

Хоча векторний аналіз (поняття було запропоновано Джозайя Гібсом при викладанні відповідного курсу) в широкому розумінні дефінується як розділ математики, що проектує засоби математичного аналізу на вектори в багатовимірних просторах, однак ми акцентуємо увагу лише на його окремому напрямку: використанні для розв'язання олімпіадних задач з математики, зокрема геометрії.

Безумовно, векторний апарат існує в єдиному симбіозі з аналітичною геометрією і її апаратом, однак при великому бажанні левову частку аналітичних викладок останнього можливо перевести на мову векторів. Тим паче, останній підхід лише обтяжує технічну складову медалі. Оскільки використання векторного апарату має великий ступінь алгоритмічності по відношенню до розв'язання олімпіадних задач з математики, розгляд відповідної тематики є актуальним.

Наведемо приклади розв'язування задач обласних, всеукраїнських математичних олімпіад та олімпіади МАН.

**Завдання 1 (МАН).** Нехай  $A, B, C, D, M$  – довільні точки простору. Довести, що вираз  $\overline{AM} \cdot \overline{BM} - \overline{BM} \cdot \overline{CM} + \overline{CM} \cdot \overline{DM} - \overline{DM} \cdot \overline{AM}$  не залежить від положення точки  $M$ .

### **Доведення**

Нехай  $A(a_1, a_2, a_3), B(b_1, b_2, b_3), C(c_1, c_2, c_3), D(d_1, d_2, d_3), M(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned}
\text{Маємо: } C(x, y, z) &= \overline{AM} \overline{BM} - \overline{BM} \overline{CM} + \overline{CM} \overline{DM} - \overline{DM} \overline{AM} = \\
&= \overline{(x - a_1; y - a_2; z - a_3)} \cdot \overline{(x - b_1; y - b_2; z - b_3)} - \\
&\quad - \overline{(x - b_1; y - b_2; z - b_3)} \cdot \overline{(x - c_1; y - c_2; z - c_3)} + \\
&\quad + \overline{(x - c_1; y - c_2; z - c_3)} \cdot \overline{(x - d_1; y - d_2; z - d_3)} - \\
&\quad - \overline{(x - d_1; y - d_2; z - d_3)} \cdot \overline{(x - a_1; y - a_2; z - a_3)} = \\
&= (x - a_1)(x - b_1) + (y - a_2)(y - b_2) + (z - a_3)(z - b_3) - \\
&\quad - (x - b_1)(x - c_1) + (y - b_2)(y - c_2) + (z - b_3)(z - c_3) + \\
&\quad + (x - c_1)(x - d_1) + (y - c_2)(y - d_2) + (z - c_3)(z - d_3) - \\
&\quad - (x - d_1)(x - a_1) + (y - d_2)(y - a_2) + (z - d_3)(z - a_3) = \\
&= f_1(x) + f_2(y) + f_3(z).
\end{aligned}$$

Функції  $f_j(t) (j \in \{1; 2; 3\})$  з останньої рівності визначаються очевидними чином в припущенні, що  $x, y, z$  – змінні величини. Покажемо, що  $f_1(x) - \text{const}$  (доведення  $f_2(x) - \text{const}, f_3(x) - \text{const}$  цілком ідентичне). Оскільки  $f_1(x)$  є квадратичною функцією, обчислимо коефіцієнти при степенях.

$$x^2: 1 - 1 + 1 - 1 = 0;$$

$$x^1: -(a_1 + b_1) + b_1 + c_1 + (c_1 + d_1) + d_1 + a_1 = 0;$$

$$x^0: a_1 b_1 - b_1 c_1 + c_1 d_1 - d_1 a_1.$$

Отже,  $f_1(x) - \text{const}$ ,  $f_2(x) - \text{const}$ ,  $f_3(x) - \text{const}$  і відповідно  $C_1(x, y, z) - \text{const}$ .

**Завдання 2. (МАН)** Кожен із трьох ненульових векторів перпендикулярний до суми двох інших. Довести, що кожен два вектори перпендикулярні.

**Доведення:** Доведемо більш загальний факт: якщо для векторів  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  при  $\lambda \neq -1$  виконуються умови

$$\begin{cases} \bar{a} \perp \bar{b} + \lambda \bar{c}; \\ \bar{b} \perp \bar{c} + \lambda \bar{a}; \\ \bar{c} \perp \bar{a} + \lambda \bar{b}, \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} \bar{a} \perp \bar{b}; \\ \bar{b} \perp \bar{c}; \\ \bar{c} \perp \bar{a}. \end{cases}$$

Позначимо  $\bar{a} \bar{b} = x, \bar{c} \bar{b} = y, \bar{c} \bar{a} = z$ , маємо:

$$\begin{cases} x + \lambda z = 0; \\ y + \lambda x = 0; \\ z + \lambda y = 0. \end{cases}$$

Як відомо [1] однорідна система лінійних рівнянь має лише тривіальний розв'язок (нуль-вектор), якщо головний визначний не рівний нулю. Маємо:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = 1 + \lambda^3 \Rightarrow \lambda = -1.$$

Отже,  $x = y = z = 0$  звідки випливає необхідне.

**Завдання 3. (Обласна математична олімпіада 10-клас, 2004 р)** Нехай у трикутнику  $ABC$  точки  $M$  і  $N$  є серединами сторін  $BC$  і  $CA$  відповідно. Відомо, що точка перетину висот трикутника  $ABC$  співпадає з точкою перетину медіан трикутника  $AMN$ . Знайдіть величину кута  $ABC$ .

**Розв'язання:** Введемо систему координат так, що  $A(a; 0), B(b; 0), C(0; 1)$ , як показано на рис 1.

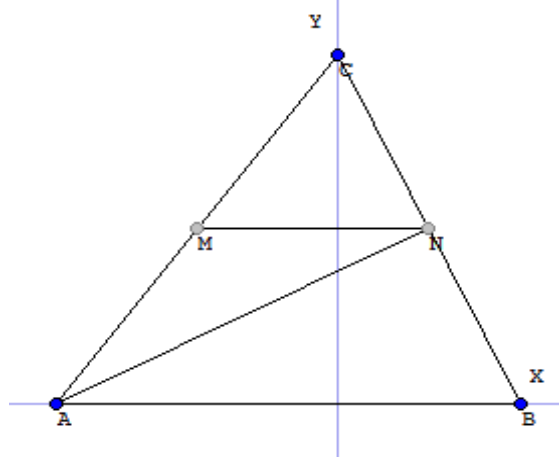


Рис 1.

**Завдання 3 (Обласна математична олімпіада 10-клас, 2004 р).**

Зрозуміло, що  $M\left(\frac{a}{2}; \frac{1}{2}\right), N\left(\frac{b}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . Нехай  $M_1$  – центроїд  $\triangle AMN$ , тоді  $M_1\left(\frac{1,5a+0,5b}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .  $M_1$  є ортоцентром  $\triangle ABC$  лише тоді, коли  $AM_1 \perp BC, BM_1 \perp AC$ , що еквівалентне тому, що  $\overline{AM_1} \cdot \overline{BC} = 0 = \overline{BM_1} \cdot \overline{AC}$ , тому  $\left(\frac{0,5b-2a}{3}; \frac{1}{3}\right) \cdot (-b; 1) = 0$  та  $\left(\frac{a-2,5b}{3}; \frac{1}{3}\right) \cdot (-a; 1) = 0$ . Маємо системи:

$$\begin{cases} -0,5b^2 + 2ab + 1 = 0; \\ -a^2 + 2,5ab + 1 = 0. \end{cases}$$

Віднявши від першої рівності другу маємо:

$$-0,5b^2 - 0,5ab + a^2 = 0 \Rightarrow (a - b)(2a + b) = 0.$$

Рівність  $a - b = 0$  неможлива ( $A \neq B$ ), тому  $b = -2a$ . Отже,  $a^2 + 5a^2 = 1, a = -\frac{1}{\sqrt{6}}, b = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \operatorname{ctg}(\angle ABC) = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \angle ABC = \operatorname{arccctg}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ .

**Завдання 4. (Обласна математична олімпіада 11-клас, 2003р)** На сторонах трикутника  $ABC$  зовні його побудовані трикутники  $ALC$  і  $CKB$  ( $\angle ALC = \angle CKB = 90^\circ, \angle LAC = \angle KCB = 30^\circ$ ). Точка  $Q$  лежить на відрізку  $AB$ , причому  $AQ:QB = 3:1$ . Доведіть, що  $\angle KQL = 90^\circ$ .

**Розв'язання:** Нехай в прямокутній системі координат  $C(0; 0), A(a; 1), B(b; 1)$ .

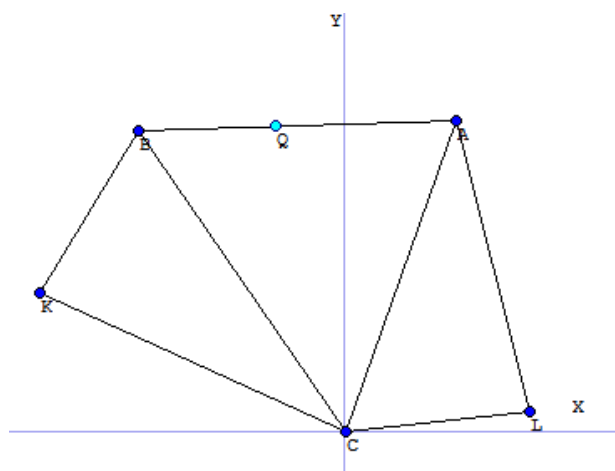


Рис 2.

**Завдання 4 (Обласна математична олімпіада 11-клас, 2003 р).**

Нагадаємо [1] формулу для координати точки, отриманої шляхом повороту на кут  $\varphi$ :  $C(x, y) \xrightarrow{\varphi} C_1(x_1; y_1): \begin{cases} x_1 = x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y_1 = x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{cases}$

Зрозуміло, що точка  $B$  при повороті на кут  $30^\circ$  з центром  $C$  і подальшою гомотетією з центром  $C$  і  $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$  переходить в  $K$ , то маємо:

$$K \left( \frac{\sqrt{3}}{2} (b \cos 30^\circ - 1 \sin 30^\circ); \frac{\sqrt{3}}{2} (b \sin 30^\circ + 1 \cos 30^\circ) \right),$$

$$K \left( 0,75b - \frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{b\sqrt{3}}{4} + 0,75 \right).$$

Точка  $A$  при повороті на кут  $-60^\circ$  з центром  $C$  і подальшою гомотетією з центром  $C$  і  $k = \frac{1}{2}$  переходить в  $L$ , тому маємо:

$$L \left( \frac{1}{2} (a \cos(-60^\circ) - 1 \sin(-60^\circ)); \frac{1}{2} (a \sin(-60^\circ) + 1 \cos(-60^\circ)) \right),$$

$$L \left( 0,25a + \frac{\sqrt{3}}{4}; -\frac{\sqrt{3}}{4}a + \frac{1}{4} \right).$$

Оскільки  $Q \left( \frac{a+3b}{4}; \frac{1+3 \cdot 1}{4} \right) \equiv \left( \frac{a+3b}{4}; 1 \right)$ , то маємо:

$$\overrightarrow{QL} \left( \frac{\sqrt{3}}{4} - 0,75b; -\frac{\sqrt{3}}{4}a - \frac{3}{4} \right), \quad \overrightarrow{QK} \left( -0,25a - \frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{b\sqrt{3}}{4} - 0,25 \right),$$

$$\overrightarrow{QL} \cdot \overrightarrow{QK} = -\left( \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3b}{4} \right) \left( \frac{a}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) + \left( \frac{\sqrt{3}a}{4} + \frac{3}{4} \right) \left( \frac{1}{4} - \frac{b\sqrt{3}}{4} \right) = 0 \Rightarrow QL \perp QK.$$

**Завдання 6. (Всеукраїнська математична олімпіада 11-клас, 2002 р)**

Основою чотирикутної піраміди  $SABCD$  є ромб  $ABCD$ . Відомо, що  $\angle SBA + \angle SBC = 180^\circ$ . На ребрі  $SC$  відмітили точку  $M$  так, що  $SM = 2MC$ . Доведіть, що площина, яка проходить через пряму  $DM$  і паралельна до прямої  $AC$ , перетинає висоту піраміди в її середині.

**Розв'язання:** Введемо систему координат так, що  $A(-1; 0; 0)$ ,  $C(1; 0; 0)$ ,  $B(0; b; 0)$ ,  $D(0; -b; 0)$ ,  $S(\alpha; \beta; \gamma)$  (рис 3).

Зрозуміло, що

$$\overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BS}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BD},$$

але з іншого боку

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BC} &= |\overrightarrow{BS}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos \angle SBA + |\overrightarrow{BS}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos \angle SBC = \\ &= BS \cdot BA(\cos \angle SBA + \cos \angle SBC) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BS} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \\ &(\alpha; \beta - b; \gamma) \cdot (0; -2b; 0) = -2b(\beta - b) = 0. \end{aligned}$$

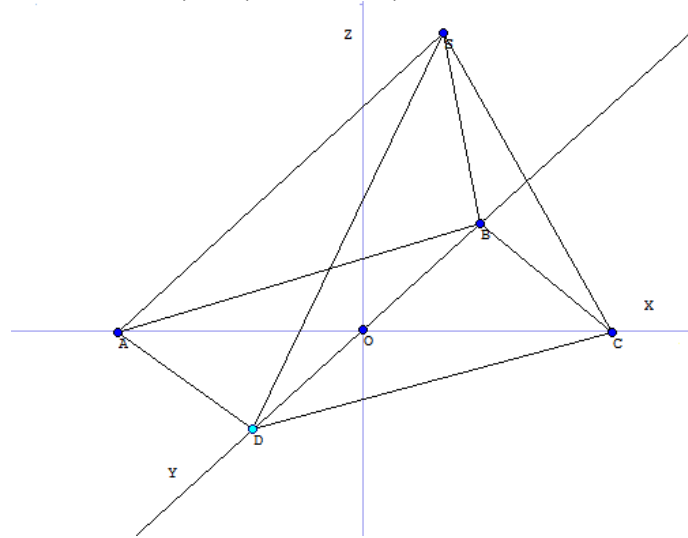


Рис 3.

**Завдання 7. (Всеукраїнська математична олімпіада 11-клас, 2002 р)**

Оскільки  $b \neq 0$ , то  $\beta = b$ .

Нехай  $S_1$  – проекція  $S$  на площину  $(ABS)$ ,  $E$  – середина  $SS_1$ , тоді  $S_1(\alpha; b; 0)$ ,  $E(\alpha; b; \frac{\gamma}{2})$ . Нам потрібно показати, що  $(DME) \parallel AC$ . Оскільки

$$M\left(\frac{\alpha + 1 \cdot 2}{3}; \frac{b + 0 \cdot 2}{3}; \frac{\gamma + 0 \cdot 2}{3}\right), \text{ то } \overrightarrow{DM}\left(\frac{\alpha + 2}{3}; \frac{4b}{3}; \frac{\gamma}{3}\right), \overrightarrow{DE}\left(\alpha; 2b; \frac{\gamma}{2}\right)$$

Рівняння площини  $DME$ :

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - (-b) & z - 0 \\ \alpha & 2b & \frac{\gamma}{2} \\ \frac{\alpha + 2}{3} & \frac{4b}{3} & \frac{\gamma}{3} \end{vmatrix} = 0$$

Нормальний вектор площини  $(DME)$ :

$$\bar{n} = \left( \begin{vmatrix} 2b & 0,5\gamma \\ \frac{4b}{3} & \frac{\gamma}{3} \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} \alpha & 0,5\gamma \\ \frac{\alpha + 2}{3} & \frac{\gamma}{3} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \alpha & 2b \\ \frac{\alpha + 2}{3} & \frac{4b}{3} \end{vmatrix} \right)$$

Оскільки  $\overrightarrow{AC}(2; 0; 0)$ , то

$$\overrightarrow{AC} \cdot \bar{n} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2b & 0,5\gamma \\ \frac{4b}{3} & \frac{\gamma}{3} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (DME) \parallel AC.$$

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. 10-е изд., испр. М.: Физматлит, 2005.
2. Гильмуллин М.Ф. История математики. Учебное пособие. / Елабуга: Изд-во ЕГПУ, 2009. – 212 с.
3. Готман Э.Г., Скопец З.А. Решение геометрических задач аналитическим методом. – М.: Просвещение, 1979.
4. Готман Э.Г., Скопец З.А.. Задача одна – решения разные. – К.: Рад.шк., 1988. – 173 с.
3. Кокстер Г.М., Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.
6. Крайзман М.Л. Розв'язування геометричних задач методом координат. – К.: Рад. Школа, 1983. – 127с.
7. Кушнир И.А. Координатный и векторный методы решения задач. – К.: ООО "Астарта", 1996. – 414 с.
8. Кушнір І.А. Методи розв'язування задач з геометрії. Книга для вчителя. – К.: Абрис, 1994. – 464 с.
9. Лейфура В.М., Мітельман І.М. та ін. Математичні олімпіади школярів України: 2001-2006. Львів: Каменярь, 2008. – 348 с.
10. Плахотник В. В. 100 контрольних завдань з математики. Всеукраїнський конкурсзахист науково-дослідницьких робіт учнів – членів Малої академії наук України у 2010-2011 н. р./[за ред. О. В. Лісового]. – К. : ТОВ «Праймдрук», 2011. – 36 с.
11. Понарин Я.П. Геометрия. – Ростов-на-Дону: Феникс, 1997.
12. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. – М., Наука, 1986. – ч1. – 272 с.

ДЛЯ НОТАТОК

ДЛЯ НОТАТОК

# **Продуктивне навчання математики: з досвіду роботи педагогів Кіровоградщини**

Підписано до друку 03.02.2021 р.  
Папір офсетний. Гарнітура Times New Roman.  
Друк – принтер. Тираж 100 прим.  
Зам. № 345

КЗ «КОІППО імені Василя Сухомлинського», вул. Велика Перспективна, 39/63,  
Кропивницький, 25006

Віддруковано в лабораторії інформаційно-методичного забезпечення освітнього  
процесу КЗ «КОІППО імені Василя Сухомлинського», вул. Велика Перспективна 39/63,  
Кропивницький, 25006